

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**MINKOWSKI 3-UZAYINDA EQUIFORM SPACELİKE
VE
TIMELİKE NORMAL EĞRİLER**

Hacer DEMİREL

Yüksek Lisans Tezi
MATEMATİK ANABİLİM DALI
TEMMUZ,2020

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

MINKOWSKI 3-UZAYINDA EQUIFORM SPACELİKE

VE

TİMELİKE NORMAL EĞRİLER

Tez Yazarı

Hacer Demirel

Danışman

Doç. Dr. Gülден ALTAY SUROĞLU

TEMMUZ, 2020

ELAZIĞ

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Başlığı : Minkowski 3-Uzayında Equiform Spacelike Ve Timelike Normal Eğriler

Yazarı : Hacer DEMİREL

İlk Teslim Tarihi: 16.06.2020

Savunma Tarihi: 17.07.2020

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr Gülden ALTAY SUROĞLU Onaylarım

Başkan : Prof. Dr. Handan ÖZTEKİN Onaylarım

Üye : Doç. Dr. Müge KARADAĞ Onaylarım

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun/...../20..... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

İmza

Prof. Dr. Soner ÖZGEN

Enstitü Müdürü

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım “Minkowski 3-Uzayında Equiform Spacelike Normal Eğriler” yüksek lisans tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

17/07/2020

Hacer DEMİREL



ÖNSÖZ

Bu çalışmada, Minkowski 3-uzayında spacelike ve timelike asli normale sahip spacelike ve timelike equiform normal eğrilerin Frenet vektörleri ve Frenet formülleri incelendi ve eğrinin Pseudo-Riemann küresi ve Pseudo-Riemann hiperbolik uzayı üzerinde uzanması durumunda 1. ve 2. Eğrilikleri ile equiform eğrilik yarıçapı arasındaki ilişkiler incelendi.

Öncesinde Öklid uzayı ve minkowski 3- uzayında eğrilerin Frenet denklemleri ve Frenet vektörleri daha sonra equiform eğrilerin genel karakterizasyonları belirtildi sonuç kısmında ise spacelike ve timelike asli normale sahip spacelike ve timelike equiform normal eğrilerin Frenet vektörleri ve Frenet formülleri incelendi.

Bu çalışmamın hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, engin bilgi ve birikimlerinden yararlandığım, yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam, sayın Doç. Dr. Gülden ALTAY SUROĞLU'na teşekkürlerimi bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

Hacer DEMİREL

Elazığ, 2020

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ.....	v
İÇİNDEKİLER	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
SİMGELER LİSTESİ	ix
1. Giriş	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	2
2.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Eğriler	2
2.2. \mathbb{R}_1^3 Minkowski Uzayında Eğriler	4
3. \mathbb{R}_1^3 MINKOWSKI 3-UZAYINDA EQUIFORM SPACELIKE NORMAL EĞRİLER	9
4. \mathbb{R}_1^3 MINKOWSKI 3-UZAYINDA EQUIFORM TİMELIKE NORMAL EĞRİLER	19
KAYNAKLAR	26
ÖZGEÇMİŞ	27

ÖZET

Minkowski 3-Uzayında Equiform Spacelike Ve Timelike Normal Eğriler

Hacer DEMİREL

Yüksek Lisans Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı
Temmuz 2020, Sayfa viii+26

Bu çalışmada Minkowski 3- uzayında yapılandırılan spacelike veya timelike asli normaline sahip normal equiform spacelike ve timelike eğrilerin Frenet vektörleri ve Frenet formülleri incelendi. Daha sonra Minkowski 3- uzayında bu eğrilerin bazı karakterizasyonları verildi.

İkinci bölümde; Öklid Uzayı ve Minkowski uzayında bir eğrinin tanımı, Frenet vektör alanları ve formülleri ve temel teoremleri verildi. Öklid uzayında equiform eğrilerin temel tanımları ve özellikleri incelendi.

Üçüncü bölümde; Minkowski 3- uzayında equiform spacelike eğrilerin bazı karakterizasyonları elde edildi.

Dördüncü bölümde; Minkowski 3- uzayında equiform timelike eğrilerin bazı karakterizasyonları verildi.

Beşinci bölüm sonuç kısmıdır.

Anahtar Kelimeler: Öklid uzayı, Minkowski uzayı, Frenet formülleri, Equiform eğri.

ABSTRACT

Equiform Spacelike and Timelike Normal Curves in Minkowski 3-Space

Hacer DEMİREL

Master's Thesis

FIRAT ÜNİVERSİTESİ
Graduate School of Natural & Applied Sciences

Department of Mathematics
July 2020, Page: viii+26

In this study Frenet vectors and Frenet formulas of normal equiform spacelike and timelike curves that had spacelike or timelike main normal are given in Minkowski 3- space. Then, some characterizations of these curves are given in Minkowski 3- space.

In the second chapter; fundamental definitions and theorems of curves in Euclidean and Minkowski space are given. Then, fundamental definitions and properties of equiform curves in Euclidean space are examined.

In the third chapter; Some characterizations of equiform spacelike curves in Minkowski 3-space are deduced.

In the fourth chapter; Some characterizations of equiform timelike curves in Minkowski 3-space are given. The fifth chapter has been devoted to the conclusion

KeyWords: Euclidean space, Minkowski space, Frenet formulas, Equiform curves.

SİMGELER LİSTESİ

R^n	: n-boyutlu Reel Öklid uzayı
R_v^n	: Reel Yarı-öklidyen uzayı
\mathbb{R}_1^3	: Minkowski Reel 3-uzay
$S_1^2(m, r)$: Pseudo-Riemann küre
$H_0^2(m, r)$: Pseudo-Riemann hiperbolik uzay
$C(m)$: Pseudo-Riemann lighthlike koni
g	: Riemann metriği
σ	: Parametrizasyon
τ	: Burulma
K_1	: Birinci equiform eğrilik
K_2	: İkinci equiform eğrilik
g	: Skaler çarpım
$(A(t), a(t), \alpha(t))$: Birim düzgün equiform hareketi

1. GİRİŞ

Son iki yüzyıldır matematikçiler Minkowski Uzayına büyük ilgi göstermiştir [1-6]. Minkowskinin keşfettiği bu uzay özellikle Einstein'ın ortaya attığı rölativite kavramının yankı bulduğu ve rahat çalışıldığı uzaydır. Öklid uzayında yer alan ve çalışılan bir çok kavramın Minkowski uzayında nasıl yer aldığı matematikçilerin en çok merak ettiği ve üstünde durduğu alandır. Çizgisel geometri ise kinematik, tersine mühendislik bilgisayar mühendisliği, robotik gibi alanlarda kullanımı olan bilim dalıdır. Equiform eğriler bu çizgisel geometrinin yeni duyulan uygulamalarından biridir. Equiform eğriler hakkındaki ilk çalışma Boris Odehnal, Helmutt Pottman, Johannes Wallner tarafından "Equiform kinematic and the geometry of line elements" dir. Kinematikte ise equiform eğrilerin kullanımı U-Öztürk, E.B. Koc Öztürk, Y- Yalı tarafından Point-Line Geometry and equiform kinematics in Minkowski three Space çalışması ile yapılmıştır. Bu çalışmada ayrıca Minkowski 3- uzayında equiform dönüşümler ve plücker koordinatları hakkında bilgi verilmiştir. Daha sonra, E.M. Solouma Minkowski uzayında Equiform Smarandache eğrileri çalışmıştır. Bu çalışmada spacelike asli normale sahip equiform normal eğrilerin Frenet vektörleri ve Frenet formülleri incelendi[1,2].

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Çalışmaya geçmeden bazı önemli ön bilgilere ihtiyacımız var. Öncelikle Öklid Uzayında eğri ve frenet eşitliklerini ve eğrilikleri tanımlayacağız daha sonra Minkowski 3-uzayında aynı tanımları inceleyeceğiz;

2.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Eğriler

Tanım 2.1.1. I, \mathbb{R} 'nin bir açık aralığı olmak üzere $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ biçiminde düzgün (C^∞ sınıfından) bir α dönüşümüne, \mathbb{R}^n uzayı içinde bir eğri denir [7].

Bu durumda r -ranklı bir Frenet eğrisi \mathbb{R}^n nin r –boyutlu alt uzayında yatacaktır. \mathbb{R}^n nin r –boyutlu alt uzayını $\Phi_r(t)$ ile gösterelim. Bu alt uzay, $\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t), \dots, \gamma^{(r)}(t)$, vektörleri ile gerildiğinden $\Phi_r(t)$ ye γ eğrisinin r . nci oskülör uzayı denir. Açık olarak $\Phi_1(t) \subset \Phi_2(t) \subset \dots \subset \Phi_r(t)$ dir. Eğer γ, r –ranklı bir Frenet eğrisi ise $\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t), \dots, \gamma^{(r)}(t)$, vektörlerine Gram-Schmidt ortonormalleştirme metodu uygulayarak $V_1(t), V_2(t), V_3(t), \dots, V_r(t)$ ortonormal r –çatısı (Serret-Frenet Vektörleri) elde edilir [8].

Teorem 2.1.1. $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ r –ranklı birim hızlı bir Frenet eğrisi olmak üzere γ nin ortonormal çatısı $V_1(t), V_2(t), V_3(t), \dots, V_r(t)$ nin türevleri

$$V_1'(t) = \kappa_1(t)V_2(t)$$

$$V_i'(t) = -\kappa_{i-1}(t)V_{i-1}(t) + \kappa_i(t)V_{i+1}(t) \quad (2.1)$$

$$V_r'(t) = -\kappa_{r-1}(t)V_{r-1}(t), \quad (2 \leq i \leq r - 1)$$

dir, [4]. Burada $\kappa_1, \dots, \kappa_{r-1}: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları γ nin Frenet eğrilik fonksiyonlarıdır. $V_1(t), V_2(t), V_3(t), \dots, V_r(t)$ vektörlerine Frenet r -çatısı ve (2.1) eşitliklerine de Frenet denklemleri adı verilir. Bu denklemler matris formunda aşağıdaki şekilde yazılır;

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \\ \dots \\ V_r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & \dots & 0 \\ -\kappa_2 & 0 & \kappa_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -\kappa_{r-1} \\ 0 & \dots & \dots & -\kappa_{r-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \dots \\ V_r \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Tanım 2.1.3. \mathbb{R}^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için \mathbb{R}^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için $T(t) = \alpha'(t)$ eşitliğiyle belirli bir $T(t)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki birim teğet vektörü denir [7].

T, I aralığının her bir t noktasına, $\alpha(t)$ noktasındaki $T(t)$ teğet vektörünü karşılık getiren bir fonksiyondur. Buna göre T, α eğrisi üstünde bir vektör alanıdır. Bu vektör alanına, α eğrisinin birim teğet vektör alanı denir. Kısaca $T = \alpha'$ yazılabilir [7].

Tanım 2.1.4. \mathbb{R}^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için $\kappa: I \rightarrow \mathbb{R}, \kappa(t) = \|T'(t)\|$ fonksiyonuna, α eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa(t)$ sayısına eğrinin $\alpha(t)$ noktasındaki eğriliği denir [7].

Tanım 2.1.5. \mathbb{R}^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için $N(s) = \frac{1}{\kappa(t)}T'(t)$ eşitliğiyle belirli bir $N(t)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki birinci dik vektörü(asli normali) denir. N vektör alanına, α birinci dik vektör alanı (asli normal vektör alanı) denir [7].

Tanım 2.1.6. \mathbb{R}^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için $B(t) = T(t) \times N(t)$ eşitliğiyle tanımlı $B(t)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi ikinci dik vektörü(binormali) denir. N vektör alanına, α ikinci dik vektör alanı (binormal vektör alanı) denir [7].

Tanım 2.1.7. $T(t), N(t), B(t)$ vektörlerine, $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri denir. $\{T(t), N(t), B(t)\}$ kümesine, α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki Frenet çatısı denir. T, N, B vektör alanlarına, α eğrisi üstünde Frenet vektör alanları denir [7].

Tanım 2.1.8. Birim hızlı $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olmak üzere

$$\tau: I \rightarrow \mathbb{R}, \tau(t) = -\langle B'(t), N(t) \rangle \quad (2.3)$$

fonksiyonuna, α eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\tau(t)$ sayısına eğrinin $\alpha(t)$ noktasındaki burulması denir [7].

Tanım 2.1.9. $\alpha, I \rightarrow \mathbb{R}$ de tanımlı \mathbb{R}^3 de bir eğri olsun. $a, b \in I$ olmak üzere

$$\int_a^b \|\alpha'\| dt \quad (2.4)$$

reel sayısına $t = a$ 'dan $t = b$ 'ye α 'nın yay uzunluğudur [3].

Tanım 2.1.10. $M \subset \mathbb{R}^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise M eğrisine (I, α) koordinat komşuluğuna göre birim hızlı eğri denir. Bu durumda $s \in I$ parametresine yay parametresi denir [7].

Tanım 2.1.11. Birim hızlı $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olmak üzere

$$T' = \kappa N,$$

$$N' = -\kappa T + \tau B, \quad (2.5)$$

$$B' = -\tau N$$

dir.

Frenet formüllerindeki katsayılar matrisi olan

$$\begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

matrisi ters simetriktir [9].

2.2. \mathbb{R}_1^3 Minkowski Uzayında Eğriler

Tanım 2.2.1. V bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde tanımlı $g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü bilinear, simetrik ve nondejenere ise g 'ye V üzerinde bir skalar çarpım, bu durumda V vektör uzayına da bir skalar çarpım uzayı denir [9].

Tanım 2.2.2. V bir skalar çarpım uzayı, W da üzerindeki skalar çarpım negatif tanımlı olacak şekilde V nin en büyük boyutlu altuzayı olsun. Bu durumda W 'nin boyutuna g skalar çarpımının indeksi denir.

g skalar çarpımının indeksi v ise $0 \leq v \leq \text{boy}V$ 'dir. Ayrıca V skalar çarpım uzayının indeksi, üzerinde tanımlı g skalar çarpımının indeksi olarak tanımlanır [4].

Tanım 2.2.3. \mathbb{R}^n , n –boyutlu standart reel vektör uzayı üzerinde her $p \in \mathbb{R}^n$ ve $v_p, w_p \in T_p^n \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$g\langle v_p, w_p \rangle = \sum_{i=1}^{n-v} v_i w_i - \sum_{i=n-v+1}^n v_i w_i \quad (2.7)$$

eşitliğiyle verilen v – indeksli metrik tensörle birlikte elde edilen uzaya yarı- Öklidyen uzay denir ve \mathbb{R}_v^n gösterilir. Burada $1 \leq i \leq n$ olmak üzere sırasıyla v_i ve w_i ler v_p ve w_p tanjant vektörlerin bileşenidir [9].

Tanım 2.2.4. \mathbb{R}_v^n yarı-öklidyen uzayında $v = 1$ ve $n \geq 2$ için, \mathbb{R}_1^n yarı-Öklidyen uzayına Lorentz n-uzay denir [8].

Tanım 2.2.5. \mathbb{R}_1^n yarı-Öklidyen uzayına Lorentz n-uzayında $n = 3$ olarak alır isek bu Lorentz uzayına özel olarak Minkowski 3- uzay denir.

Tanım 2.2.6. \mathbb{R}_1^3 Minkowski 3-Uzayında iki vektör u ve v olsun. $u = (u_1, u_2, u_3)$ ve $v = (v_1, v_2, v_3)$ olmak üzere bu iki vektörün skalar çarpımı,

$$\begin{aligned} \langle, \rangle_L: \mathbb{R}_1^3 \times \mathbb{R}_1^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\rightarrow \langle u, v \rangle_L = -u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \end{aligned} \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $u = v$ ise,

$$\|v\|_L = (\langle v, v \rangle_L)^{\frac{1}{2}} \quad (2.9)$$

eşitliği ile tanımlı $\|v\|_L$ reel sayısına, v vektörünün Lorentz anlamında normu denir. Normu ± 1 olan vektöre de Lorentz anlamında birim vektör denir [8].

Tanım 2.2.7. \mathbb{R}_1^3 , Minkowski 3-uzayında iki vektör u ve v olsun. $u = (u_1, u_2, u_3)$ ve $v = (v_1, v_2, v_3)$ olmak üzere,

$$(u_3v_2 - u_2v_3, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) \quad (2.10)$$

vektörüne u ve v nin vektörel çarpımı (veya dış çarpımı) denir. $u \times v$ veya $u \wedge v$ şeklinde gösterilir.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \text{ ise } e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3}) \quad (2.11)$$

olmak üzere,

$$u \wedge v = -\det \begin{bmatrix} e_1 & -e_2 & -e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

ya da

$$u \wedge v = \det \begin{bmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

olarak hesaplanır.

Burada $e_1 \wedge e_2 = -e_3, e_2 \wedge e_3 = e_1, e_3 \wedge e_1 = e_2$ dir. Saat yönünün tersi pozitif yönü olarak alınmıştır [7,4].

Tanım 2.2.8. V bir Lorentz n -uzay olsun. $u \in V$ için,

- i) $\langle u, u \rangle > 0$ veya $u = 0$ ise u ya spacelike vektör,
- ii) $\langle u, u \rangle < 0$ ise u ya timelike vektör,
- iii) $\langle u, u \rangle = 0$ ve $u \neq 0$ ise u ya lightlike (null) vektör denir [8].

Teorem 2.2.1. \mathbb{R}_1^3 , Minkowski 3-uzayında iki vektör u ve v olsun.

- i) u ve v spacelike vektör ise $u \wedge v$ bir timelike vektördür.
- ii) u spacelike ve v timelike vektör ise $u \wedge v$ spacelike vektördür.
- iii) u spacelike ve v lightlike vektör olmak üzere $\langle u, v \rangle = 0$ ise $u \wedge v$ lightlike vektör, eğer $\langle u, v \rangle \neq 0$ ise $u \wedge v$ spacelike vektördür.
- iv) u ve v lightlike vektör ise $u \wedge v$ spacelike vektördür.
- v) u timelike ve v lightlike vektör ise $u \wedge v$ spacelike vektördür.
- vi) u ve v timelike vektör ise $u \wedge v$ spacelike vektördür [8].

Tanım 2.2.9. α nın hız vektörü α' olmak üzere

- (i) $\alpha'(t)$ space-like ise α eğrisine space-like,

- (ii) $\alpha'(t)$ time-like ise α eğrisine time-like,
- (iii) $\alpha'(t)$ light-like ise α eğrisine light-like eğri denir [10].

Tanım 2.2.10. α, \mathbb{R}_1^3 de bir eğri olsun. (2.3) 'deki formüle göre $g(\alpha', \alpha') = \mp 1$ nonnull (lightlike olmayan) eğriye birim hızlı (veya s' nin yay uzunluğu fonksiyonu tarafından parametrize edilmiş) eğri denir [9].

Tanım 2.2.11. $\alpha(s)$ eğrisi boyunca hareket eden Frenet vektörlerini $\{t, n, b\}$ ile simgeleriz. Buradan t, n, b sırasıyla $\alpha(s)$ in teğet, asli normal ve binormal vektörleridir. $\alpha(s)$ 'in causal karakterine bağlı olarak \mathbb{R}_1^3 'de keyfi bir $\alpha(s)$ vektörü için aşağıdaki Frenet Formülleri verilmiştir.

Eğer α , normal spacelike veya timelike olan spacelike bir eğri ise Frenet Formülleri

$$\begin{bmatrix} t' \\ n' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -\epsilon k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$g(t, t) = 1, g(n, n) = \epsilon = \mp 1, g(b, b) = -\epsilon \quad (2.15)$$

ve

$$g(t, n) = g(t, b) = g(n, b) = 0 \quad (2.16)$$

dir.

Tanım 2.2.12. Eğer α bir null(lightlike) asli normaline sahip bir spacelike eğri olmak üzere Frenet Formülleri

$$\begin{bmatrix} t' \\ n' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ -1 & 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$g(t, t) = 1, g(n, n) = 0, g(b, b) = 0, g(t, n) = g(t, b) = 0 \text{ ve } g(n, b) = 1 \quad (2.18)$$

Tanım 2.2.12. Frenet eşitlikleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & 1 & 0 \\ -\epsilon & K_1 & K_2 \\ 0 & K_2 & K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

$$g(T, T) = -\rho^2, g(N, N) = \epsilon\rho^2, g(B, B) = -\epsilon\rho^2, g(T, N) = g(T, B) = g(N, B) = 0 \quad (2.20)$$

Teorem 2.2.2. α, \mathbb{R}_1^3 de regüler bir spacelike eğri olsun. α spacelike eğrisinin eğriliği ve torsiyonu;

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}, \tau = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} \quad (2.21)$$

dir.

Tanım 2.2.12. Eğer $\alpha \mathbb{R}_1^3$ de keyfi bir eğri olmak üzere [7,4] de aşağıdaki Frenet formülleri verilmiştir

$$\begin{bmatrix} t' \\ n' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$g(t, t) = -1, g(n, n) = 1, g(b, b) = 1 \text{ ve } g(t, n) = g(t, b) = g(n, b) = 0 \quad (2.23)$$

dır

Tanım 2.2.13. α nın bir timelike eğri olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $T'(s) \neq 0, T(s)$ ile lineer bağımsız bir spacelike vektördür. s noktasında α eğrisinin eğriliği

$$\kappa(s) = \|T'(s)\| \quad (2.24)$$

dir.

$N(s)$ asli normal vektörü de,

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)} = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} \quad (2.25)$$

dir.

Ayrıca

$$K(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle \quad (2.26)$$

dir.

$$B(s) = T(s) \times N(s) \quad (2.27)$$

şeklindeki $B(s)$ vektörüne binormal vektör denir. $B(s)$ vektörü, bir spacelike birim vektördür. Her s için α nın Frenet üç ayaklısı diye adlandırılan $\{T, N, B\}, \mathbb{R}_1^3$ in bir ortonormal bazıdır. α nın s deki burulması ,

$$\tau(s) = \langle N'(s), B(s) \rangle \quad (2.28)$$

şeklinde tanımlanır. Bu durum için Frenet denklemleri matris formunda,

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & 1 & 0 \\ 1 & K_1 & K_2 \\ 0 & -K_2 & K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$g(T, T) = -\rho^2, g(N, N) = \rho^2, g(B, B) = \rho^2, g(T, N) = g(T, B) = g(N, B) = 0 \quad (2.30)$$

olur.

Tanım.2.2.14. Minkowski 3- uzayında $\alpha(\sigma)$ equiform timelike eğrisinin yer vektörü $\{N, B\}$ tarafından gerilen equiform normal düzleminde uzanıyor ise buna equiform normal eğri denir.

Tanım 2.2.15. α, \mathbb{R}_1^3 de bir eğri olmak üzere;
Pseudo-Riemann küre

$$S_1^2(m, r) = \{u \in \mathbb{R}_1^3: g(u - m, u - m) = r^2\} \quad (2.31)$$

Pseudo-Riemann hiperbolik uzay

$$H_0^2(m, r) = \{u \in \mathbb{R}_1^3: g(u - m, u - m) = -r^2\} \quad (2.32)$$

Pseudo-Riemann lightlike koni

$$C(m) = \{u \in \mathbb{R}_1^3: g(u - m, u - m) = 0\} \quad (2.33)$$

dır, [11,12].

Tanım 2.2. 16. $\alpha: I \rightarrow E_1^3$ Minkowski E_1^3 uzayında bir eğri olsun. α nın equiform parametresini $\rho = \frac{1}{k_1}$, α nın eğriliğinin yarıçapı olduğu yerde

$$\sigma = \int \frac{ds}{d\rho} = \int k_1 ds \quad (2.34)$$

ile tanımlanır.

Burdan

$$\frac{ds}{d\rho} = \rho \quad (2.35)$$

dur.

Tanım 2.2.17. $K_1: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $K_1 = \rho'$ ise $K_1 e, \alpha$ eğrisinin 1.equiform eğriliği denir.

Tanım 2.2.18. $K_2: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $K_2 = \frac{k_2}{k_1}$ ise α eğrisinin 2.equiform eğriliğidir.

3. \mathbb{R}_1^3 MINKOWSKI 3-UZAYINDA EQUIFORM SPACELİKE NORMAL EĞRİLER

Bu bölümde, önce \mathbb{R}_1^3 Minkowski uzayındaki equiform spacelike ve equiform timelike asli normaliyile belirtilen spacelike eğriler verilecektir. Frenet vektörleri gösterilip, daha sonra \mathbb{R}_1^3 de equiform spacelike normal eğrinin bazı karakterizasyonları verilecektir.

\mathbb{R}_1^3 Minkowski uzayında bir normal eğri konum vektörü

$$\alpha(s) = \lambda(s)n(s) + \eta(s)b(s) \quad (3.1)$$

olan bir eğridir. Burada λ, η, s diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

Teorem 3.1. $\alpha(\sigma), \mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında spacelike equiform bir eğri olsun. Equiform normal eğrinin Frenet formülleri

$$\begin{aligned} T' &= \rho' T + N \\ N' &= \rho' N - \varepsilon T + \frac{k_2}{k_1} B \\ B' &= \rho' B + \frac{k_2}{k_1} N \end{aligned} \quad (3.2.)$$

dır.

İspat. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ eğrisi \mathbb{R}_1^3 Minkowski uzayında spacelike bir eğri olsun. $\alpha(s)$ 'nin equiform parametresi σ ve eğrilik yarıçapı ρ olmak üzere (2.35) denklemi α eğrisinin teğet vektörüdür. Buradan

$$T = \frac{d\alpha}{d\sigma} = \frac{d\alpha}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} = \frac{d\alpha}{ds} \cdot \rho = t \cdot \rho \quad (3.4)$$

elde edilir. Benzer olarak equiform asli normal ve binormal vektörü

$$N = \rho n$$

$$B = \rho b$$

olur. Böylece $\{T, N, B\}$ equiform ortogonal çatısı elde edilir.

$$\{\rho t, \rho n, \rho b\}$$

İçin

$$g(\rho t, \rho n) = \rho^2 g(t, n) = \rho^2 \cdot 0 = 0$$

$$g(\rho t, \rho b) = \rho^2 g(t, b) = \rho^2 \cdot 0 = 0 \quad (3.5)$$

$$g(\rho n, \rho b) = \rho^2 g(n, b) = \rho^2 \cdot 0 = 0$$

α equiform spacelike ya da timelike asli normaline sahip equiform spacelike eğri olsun.
(2.14),(2.35) ve (3.4) i kullanarak

$$\begin{aligned}
T' &= \frac{dT}{d\sigma} = \frac{d\rho T}{d\sigma} = \frac{d\rho}{d\sigma} \cdot t + \frac{dt}{d\sigma} \cdot \rho \\
&= \frac{d\rho}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} \cdot t + \frac{dt}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} \cdot \rho \\
&= \rho' \cdot \rho \cdot t + t' \cdot \rho^2 \\
&= \rho' T + \rho^2 \cdot k^1 \cdot n \\
&= \rho' T + \left(\frac{1}{k^1}\right) \cdot k^1 \cdot \rho \cdot n \\
&= \rho' T + \rho \cdot n = \rho' T + N
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
N' &= \frac{d(N)}{d\sigma} = \frac{d(\rho n)}{d\sigma} = \frac{d\rho}{d\sigma} \cdot n + \frac{dn}{d\sigma} \cdot \rho = \frac{d\rho}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} \cdot n + \frac{dn}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} \cdot \rho \\
&= \rho' \cdot \rho \cdot n + n' \cdot \rho^2 \\
&= \rho' \cdot N + \rho^2(-\varepsilon k_1 t + k_2 b)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
&= \rho' N - \varepsilon k_1 \cdot \frac{1}{k_1} \cdot \rho t + k_2 \cdot \rho^2 \cdot b \\
&= \rho' N - \varepsilon k_1 \cdot \frac{1}{k_1} \cdot \rho \cdot b \\
&= \rho' \cdot N - \varepsilon \rho T + \frac{k_2}{k_1} \cdot B
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
B' &= \frac{d(B)}{d\sigma} = \frac{d(\rho b)}{d\sigma} = \frac{d\rho}{d\sigma} \cdot b + \frac{db}{d\sigma} \cdot \rho = \frac{d\rho}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} \cdot b + \frac{db}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} \cdot \rho \\
&= \rho' \cdot \rho \cdot b + b' \cdot \rho^2 \\
&= \rho' \cdot B + \rho^2(k_2 \cdot n) = \rho' \cdot B + \rho \cdot \frac{1}{k_1} \cdot k_2 \cdot n \\
&= \rho' \cdot B + \rho \cdot \frac{k_2}{k_1} \cdot N
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Teorem 3.2. $\alpha = \alpha(\sigma)$ her $\sigma \in I \subset \mathbb{R}$ için Equiform eğrilikleri $K_1(\sigma) > 0, K_2(\sigma) \neq 0$ a sahip equiform spacelike veya equiform timelike asli normali ile verilmiş \mathbb{R}_1^3 'de equiform spacelike normal eğri olsun. Buradan aşağıdaki ifadeler mevcuttur.

i) Equiform eğrilikleri $K_1(\sigma), K_2(\sigma)$ ise

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{1}{K_1} \left[K_2 - \left(\frac{K_1}{K_2} \right)' \right]$$

dir.

ii) Konum vektörünün equiform asli normal ve equiform binormal vektörleri sırasıyla

$$g(\alpha, N) = -\rho^2$$

$$g(\alpha, B) = -\frac{\rho^2}{K_1} \left[K_2 - \left(\frac{K_1}{K_2} \right)' \right] \quad (3.10)$$

şeklindedir.

İspat: i) $\alpha(s), \mathbb{R}_1^3$ de equiform spacelike veya equiform timelike asli normal N ye sahip equiform spacelike normal eğri olsun. Buradan

$$\alpha(\sigma) = \lambda(\sigma)N(\sigma) + \eta(\sigma)B(\sigma)$$

dir.

Burada σ ya bağlı türev alıp (2.19)'deki Frenet eğriliklerini göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{d\sigma} &= \frac{d\lambda}{d\sigma}N(\sigma) + \lambda(\sigma)\frac{dN(\sigma)}{d\sigma} + \frac{d\eta(\sigma)}{d\sigma}B(\sigma) + \eta(\sigma)\frac{dB(\sigma)}{d\sigma} \\ &= \lambda'N + \lambda N' + \eta'B + \eta B' \\ &= \lambda'N + \lambda(-\varepsilon T + K_1N + K_2B) + \eta'B + \eta(K_2N + K_1B) \\ &= \lambda'N + -\varepsilon\lambda T + \lambda K_1N + \lambda K_2B + \eta'B + \eta K_2N + \eta K_1B \\ &= -\varepsilon\lambda T + N(\lambda' + \lambda K_1 + \eta K_2) + B(\lambda K_2 + \eta' + \eta K_1) \end{aligned} \quad (3.11)$$

olur.

Bu yüzden α eğrisinin asli normal ve binormal vektörler alanlarının katsayıları sıfır olup

$$\varepsilon\lambda = 1$$

$$\lambda' + \lambda K_1 + \eta K_2 = 0 \quad (3.12)$$

$$\lambda K_2 + \eta' + \eta K_1 = 0$$

dir. Buradan

$$\lambda = -\varepsilon \Rightarrow \lambda' = 0 \quad (3.13)$$

$$\lambda K_1 + \eta K_2 = 0 \Rightarrow \eta = \varepsilon \frac{K_1}{K_2}$$

Böylece

$$\alpha(\sigma) = -\varepsilon N + \varepsilon \frac{K_1}{K_2} B \quad (3.14)$$

elde edilir. (3.12) nin 2. eşitliği ve (3.13)' ü kullanarak

$$\varepsilon K^2 + \left(\frac{K^1}{K^2}\right)' + \frac{K^1}{K^2} \cdot K^1 = \varepsilon K^2 + \left(\frac{K^1}{K^2}\right)' + \left(\frac{K^{12}}{K^2}\right) = 0 \quad (3.15)$$

bulunur.

$$\left(\frac{K_1}{K_2}\right)' + \left(\frac{K_1^2}{K_2}\right) - K_2 = 0 \quad (3.16)$$

Buradan

$$\left[\left(\frac{K_1}{K_2}\right)' - K_2\right] = -\left(\frac{K_1^2}{K_2}\right) \quad (3.17)$$

$$\left(\frac{1}{K_1}\right)\left[\left(\frac{K_1}{K_2}\right)' - K_2\right] = -\left(\frac{K_1}{K_2}\right)$$

elde edilir.

ii) (3.17) i (3.14) de yerine yazarsak

$$\alpha(\sigma) = -\varepsilon N + \left(\frac{\varepsilon}{K_1}\right)\left[K_2 - \left(\frac{K_1}{K_2}\right)'\right]B \quad (3.18)$$

bulunur. (3.18)'den

$$\begin{aligned} g(\alpha, \alpha) &= g\left(-\varepsilon N + \frac{\varepsilon}{K_1}\left[K_2 - \left(\frac{K_1}{K_2}\right)'\right]B, -\varepsilon N + \left(\frac{\varepsilon}{K_1}\right)\left[K_2 - \left(\frac{K_1}{K_2}\right)'\right]B\right) \\ &= \varepsilon^2 g(N, N) + \left(\frac{\varepsilon^2}{K_1^2}\left[K_2 - \left(\frac{K_1}{K_2}\right)'\right]^2\right)g(B, B) \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$= \varepsilon \rho^2 - \varepsilon \rho^2 \frac{1}{K_1^2} \left[K_2 - \left(\frac{K_1}{K_2}\right)'\right]^2$$

$$\begin{aligned} g(\alpha, N) &= g\left(-\varepsilon N + \left(\frac{\varepsilon}{K_1}\right)\left[K_2 - \left(\frac{K_1}{K_2}\right)'\right]B, N\right) \\ &= -\varepsilon g(N, N) \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$= -\varepsilon \cdot \varepsilon \rho^2 = -\rho^2$$

$$\begin{aligned}
g(\alpha, B) &= g(-\varepsilon N + \frac{\varepsilon}{K_1} [K_2 - (\frac{K_1}{K_2})'] B, B) \\
&= [\frac{\varepsilon}{K_1} K_2 - (\frac{K_1}{K_2})'] g(B, B) \\
&= [\frac{\varepsilon}{K_1} K_2 - (\frac{K_1}{K_2})'] - \varepsilon \rho^2 \\
&= [-\frac{\rho^2}{K_1} K_2 - (\frac{K_1}{K_2})']
\end{aligned} \tag{3.21}$$

elde edilir.

Tersine farz edelim ki (i).eşitlik verilmiş olsun. Buradan

$$\frac{1}{K_1} [(\frac{K_1}{K_2})' - K_2] = -\frac{K_1}{K_2}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
\frac{K_1^2}{K_2} &= K_2 - (\frac{K_1}{K_2})' \\
\frac{K_1^2}{K_2} + (\frac{K_1}{K_2})' - K_2 &= 0
\end{aligned}$$

bulunur.

Frenet eşitliklerinden yararlanılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\alpha} [\alpha(\sigma) + \varepsilon N - \varepsilon \frac{K_1}{K_2} B] \\
&T + \varepsilon(-\varepsilon T + K_1 N + K_2 B) - \varepsilon (\frac{K_1}{K_2})' B - \varepsilon \frac{K_1}{K_2} (K_2 N + K_1 B) \\
&T - T + \varepsilon K_1 N + \varepsilon K_2 B - \varepsilon K_1 N - \varepsilon (\frac{K_1}{K_2})' B - \varepsilon \frac{K_1^2}{K_2} B \\
&\varepsilon B \left[K^2 - \left(\frac{K^1}{K^2} \right)' - \frac{K^{12}}{K^2} \right] = \varepsilon \cdot B \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

Sonuç olarak α equiform normal bir eğridir.

ii) nin doğruluğunu kabul edelim. Böylece $g(\alpha, N) = -\rho^2$ olup

$$g(\alpha, B) = -\frac{\rho^2}{K_1} \left[K_2 - \left(\frac{K_1}{K_2} \right)' \right]$$

$$g(\alpha, N) = -\rho^2$$

dir. Bu ifadenin türevi alınırsa .

$$g(\alpha', N) + g(\alpha, N') = -2\rho\rho'$$

$$g(T, N) + g(\alpha, -\varepsilon T + K_1 N + K_2 B) = -2\rho\rho'$$

$$\varepsilon g(\alpha, T) - K_1 g(\alpha, N) + K_2 g(\alpha, B) = -2\rho\rho'$$

$$-\varepsilon g(\alpha, T) - K_1 \rho^2 + K_2 \left(\frac{-\rho^2}{K_1} \right) \left[K_2 - \left(\frac{K_1}{K_2} \right)' \right] = -2\rho\rho'$$

$$-\varepsilon g(\alpha, T) - K_1 \rho^2 - \rho^2 K_2 \frac{K_1}{K_2} = -2\rho\rho'$$

$$-\varepsilon g(\alpha, T) - K_1 \rho^2 - \rho^2 K_1 = -2\rho\rho'$$

$$\varepsilon g(\alpha, T) - K_1 \rho^2 - \rho^2 K_1 = -2\rho(\rho K_1) \quad (3.22)$$

elde edilir. Bu durumda $g(\alpha, T) = 0$ olursa α equiform normal eğridir.

Teorem 3.3. $\alpha = \alpha(\sigma) \mathbb{R}_1^3$ de her $\sigma \in I \subset \mathbb{R}$ için equiform eğrilikleri $K_1(\sigma) > 0, K_2(\sigma) \neq 0$ a sahip ve equiform timelike asli normal ya da equiform spacelike normaline sahip equiform spacelike eğri olsun. non-null equiform asli normal N ve non-null konum vektörü ile verilsin. Bu durumda

i) Konum vektörü α equiform spacelike olması için gerek ve yeter şart Pseudo-Riemann küresi üzerinde yatarsa

$$\frac{K_1}{K_2} = \mp \sqrt{1 - \frac{r^2}{\varepsilon \rho^2}} \quad , \quad \frac{r^2}{\varepsilon \rho^2} < 1$$

olur.

ii) Konum vektörü α equiform timelike olması için gerek ve yeter şart α eğrisi Pseudo-Riemann hiperbolik $H^2(m, r)$ uzayında yatmasıdır. Böylece

$$\frac{K_1}{K_2} = \mp \sqrt{1 - \frac{r^2}{\varepsilon \rho^2}}$$

dir.

İspat. İlk olarak α konum vektörü α nın bir equiform spacelike olduğunu varsayalım.

$$g(\alpha, \alpha) = r^2, r \in \mathbb{R}^+$$

(3.11)'den

$$\varepsilon\rho^2 - \varepsilon\rho^2 \frac{1}{K_1^2} [K_2 - (\frac{K_1}{K_2})']^2 = r^2$$

olur.

Buradan

$$\varepsilon\rho^2 [1 - \frac{1}{K_1^2} [K_2 - (\frac{K_1}{K_2})']^2] = r^2$$

$$[1 - \frac{1}{K_1^2} [K_2 - (\frac{K_1}{K_2})']^2] = (\frac{r^2}{\varepsilon\rho^2})$$

$$1 - \frac{r^2}{\varepsilon\rho^2} = \frac{1}{K_1^2} [K_2 - (\frac{K_1}{K_2})']^2 \quad (3.23)$$

$$\mp \sqrt{1 - \frac{r^2}{\varepsilon\rho^2}} = \frac{1}{K_1} [K_2 - (\frac{K_1}{K_2})']$$

dır.

Bunu (3.8) deki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\mp \sqrt{1 - \frac{r^2}{\varepsilon\rho^2}} = \frac{K_1}{K_2} \quad (3.24)$$

olur.

Daha sonra m vektörü için σ ya göre diferensiyeli alınırsa

$$m' = \alpha' + \varepsilon N' - \varepsilon (\frac{K_1}{K_2})' B - \varepsilon \frac{K_1}{K_2} B'$$

elde edilir.

(2.5)'deki Frenet eşitliklerinden

$$m' = \alpha' + \varepsilon(-\varepsilon T + K_1 N + K_2 B) - \varepsilon (\frac{K_1}{K_2})' B - \varepsilon \frac{K_1}{K_2} (K_2 N + K_1 B)$$

$$= \alpha' - T + \varepsilon K_1 N + \varepsilon K_2 B - \varepsilon (\frac{K_1}{K_2})' B - \varepsilon K_1 N - \varepsilon \frac{K_1^2}{K_2} B$$

$$= \varepsilon B [K_2 - (\frac{K_1}{K_2})' - \frac{K_1^2}{K_2}] = \varepsilon B \cdot 0 = 0$$

olur. Buradan

$$m' = 0 \Rightarrow m = sbt$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
g(\alpha - m, \alpha - m) &= g(-\varepsilon N + \varepsilon \frac{K_1}{K_2} B, -\varepsilon N + \varepsilon \frac{K_1}{K_2} B) \\
&= g(N, N) + \varepsilon^2 \left(\frac{K_1}{K_2}\right)^2 g(B, B) \\
&= \varepsilon \rho^2 - \varepsilon \rho^2 \left(\frac{K_1}{K_2}\right)^2 \\
&= \varepsilon \rho^2 \left(1 - \frac{r^2}{\varepsilon \rho^2}\right) \\
&= \varepsilon \rho^2 - \varepsilon \rho^2 \left(\frac{\varepsilon \rho^2 - r^2}{\varepsilon \rho^2}\right) \\
&= r^2
\end{aligned} \tag{3.25}$$

dir. Öyle ise $\alpha(\sigma)$ eğrisi $S_1^2(m, r)$ küresi üzerinde yatar.

Tersine $\alpha(\sigma)$, $S_1^2(m, r)$ küresinde yatsın ve (3.14) dekleminin doğru olduğunu kabul edelim. Buradan $g(\alpha - m, \alpha - m) = r^2, r \in \mathbb{R}^+$ dir. 3 kez r ye göre diferensiyeli alınırsa Frenet eşitliklerinden

$$\alpha - m = 0.T - \rho^2.N - \rho^2 \frac{K_1}{K_2} B$$

bulunur. Bu sebeple m vektörü ötelenirse $\alpha(\sigma)$ equiform normal eğriye eş olur.

Özel olarak $m = 0$ denirse (3.14) den $g(\alpha, \alpha) = r^2$ olur. Böylece *i*) ispatlanmış olur, *ii*) nin ispatı için α konum vektörü timelike oluşunu kabul edlim. (3.11) dan ve timelike eğri tanımından

$$\varepsilon \rho^2 \left(\left(1 - \frac{1}{K_1^2}\right) \left[K_2 - \left(\frac{K_1}{K_2}\right)'\right]^2 \right) < 0$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned}
\varepsilon \rho^2 \left(1 - \frac{1}{K_1^2} \left[K_2 - \left(\frac{K_1}{K_2}\right)'\right]^2\right) &= -r^2 \\
\left(1 - \frac{1}{K_1^2} \left[K_2 - \left(\frac{K_1}{K_2}\right)'\right]^2\right) &= -\frac{r^2}{\varepsilon \rho^2} \\
\frac{1}{K_1^2} \left[K_2 - \left(\frac{K_1}{K_2}\right)'\right]^2 &= 1 + \frac{-r^2}{\varepsilon \rho^2} \\
\frac{1}{K_1^2} \left[K_2 - \left(\frac{K_1}{K_2}\right)'\right] &= \sqrt{1 + \frac{-r^2}{\varepsilon \rho^2}}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\frac{K_1}{K_2} = \sqrt{1 + \frac{-r^2}{\varepsilon\rho^2}}$$

bulunur.

Örnek 3.1. \mathbb{R}_1^3 de birim hızlı spacelike bir eğri $\alpha(s) = (s, s\sin(\ln s), s\cos(\ln s))$ olsun. $\alpha(s)$ eğrisinin birim teğet vektör alanı ve birim normal vektör alanı

$$t(s) = (1, \sin(\ln s) + \cos(\ln s), \cos(\ln s) - \sin(\ln s))$$

$$n(s) = (0, \cos(\ln s) - \sin(\ln s), -\sin(\ln s) - \cos(\ln s))$$

dır. Bu eğrinin birinci eğriliği, eğrilik yarıçapı ve birinci equiform eğriliği

$$k_1 = \frac{\sqrt{2}}{s}, \rho = \frac{s}{\sqrt{2}}, K_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

olur. $\alpha(s)$ eğrisinin binormal vektör alanı

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}}(2, \sin(\ln s) + \cos(\ln s), \cos(\ln s) - \sin(\ln s))$$

elde edilir. Böylece

$$k_1 = \frac{1}{s}, K_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

olur. Equiform parametreleri ise

$$\sigma = \int \frac{ds}{\rho} = \sqrt{2} \ln s, s = e^{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}, \rho = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \quad (3.27)$$

bulunur. Buradan $\alpha(\sigma)$ equiform eğrisi

$$\alpha(\sigma) = (e^{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}, e^{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}} \sin(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}), e^{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}} \cos(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}))$$

olur. $\alpha(\sigma)$ equiform eğrisinin teğet vektör alanı

$$T(\sigma) = \frac{e^{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}} (1, \sin(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}) + \cos(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}), \cos(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}) - \sin(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}))$$

elde edilir. Böylece $\alpha(\sigma)$ eğrisi spacelike normal eğri olduğu elde edilir. Bu eğrinin asli normal ve binormal vektör alanları

$$N(\sigma) = \frac{e^{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}} \left(0, \cos\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) - \sin\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right), -\cos\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) - \sin\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) \right),$$

$$B(\sigma) = \frac{e^{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}} \left(0, \sin\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) + \cos\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right), \cos\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) - \sin\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) \right)$$

dır. Teorem 3.1 den ve (3.8) den

$$\frac{1}{K_1^2} \left[K^2 - \left(\frac{K^1}{K^2} \right)' \right] = 1,$$

$$g(\alpha, N) = -\frac{e^{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}} = -\rho^2$$

$$g(\alpha, B) = -\frac{e^{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}} = -\frac{\rho^2}{K_1^2} \left[K^2 - \left(\frac{K^1}{K^2} \right)' \right]$$

olur. Daha sonra (3.11) ve (3.12) den

$$K_1 = K_2, g(\alpha, \alpha) = 0$$

elde edilir.

4. \mathbb{R}_1^3 MINKOWSKI 3-UZAYINDA EQUIFORM TIMELİKE NORMAL EĞRİLER

Bu bölümde önce Minkowski 3- uzayında equiform timelike eğrilerin bazı özellikleri elde edilecektir.

Tanım. Minkowski 3- uzayında $\alpha(\sigma)$ equiform timelike eğrisinin yer vektörü $\{N, B\}$ tarafından gerilen equiform normal düzleminde uzanıyor ise buna equiform normal eğri denir. Bu nedenle \mathbb{R}_1^3 Minkowski uzayında bir normal eğri vkonum vektörü

$$\alpha(s) = \lambda(s)n(s) + \mu(s)b(s)$$

dir. Burada λ, μ, s diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

Teorem 4.1.Bundan yola çıkarak \mathbb{R}_1^3 deki sabit σ equiform parametresini kullanarak α nın Frenet formülleri bulunur

$$T = \frac{d\alpha}{d\sigma} \quad (4.1)$$

α eğrisinin equiform tanjant vektörü deriz. (2.8) ve (4.1) ü kullanarak

$$T = \frac{d\alpha}{d\sigma} = \frac{d\alpha}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} = \frac{d\alpha}{ds} \cdot \rho = \rho t \quad (4.2)$$

equiform asli normal vektörü ve equiform binormal vektörü ise

$$N = \frac{d\alpha'}{d\sigma} \cdot t = \frac{d\alpha'}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} = \rho \cdot t' = \rho n \quad B = \frac{d\alpha}{d\sigma} \cdot b = \rho b \quad (4.3)$$

Daha sonra $\{T, N, B\}$ nin kolaylıkla α eğrisinin sabit ortogonal çatısı olduğunu gösterebiliriz. α, \mathbb{R}_1^3 de equiform timelike eğri ise (2.22),(4.2),(4.3) den yola çıkarak

$$\begin{aligned} T' &= \frac{dT}{d\sigma} = \frac{d(\rho t)}{d\sigma} \\ &= \frac{d\rho}{d\sigma} t + \rho \frac{dt}{d\sigma} \\ &= \frac{d\rho}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} t + \rho \frac{dt}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} \\ &= \rho' \rho t + \rho^2 t' \\ &= \rho' T + \rho^2 k_1 n \\ &= \rho' T + N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N' &= \frac{d(N)}{d\sigma} = \frac{d(\rho n)}{d\sigma} = \frac{d\rho}{d\sigma} \cdot n + \frac{dn}{d\sigma} \cdot \rho = \frac{d\rho}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} \cdot n + \frac{dn}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} \cdot \rho \\
&= \rho' \cdot \rho \cdot n + n' \cdot \rho^2 = \rho' \cdot N + \rho^2(k_1 t + k_2 b) \\
&= \rho' N + k_1 \cdot \frac{1}{k_1} \cdot t + k_2 \cdot \rho^2 \cdot b = \rho' N + k_1 \cdot \frac{1}{k_1} \cdot t + \frac{k_2}{k_1} b \\
&= \rho' \cdot N + T + \frac{k_2}{k_1} \cdot B
\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
B' &= \frac{d(B)}{d\sigma} = \frac{d(\rho b)}{d\sigma} = \frac{d\rho}{d\sigma} \cdot b + \frac{db}{d\sigma} \cdot \rho = \frac{d\rho}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} \cdot b + \frac{db}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} \cdot \rho \\
&= \rho' \cdot \rho \cdot b + b' \cdot \rho^2 = \rho' \cdot B + \rho^2(-k^2 \cdot n) \\
&= \rho' \cdot B - \frac{1}{k_1} \cdot k_2 \cdot n \\
&= \rho' \cdot B - \frac{k_2}{k_1} \cdot N
\end{aligned}$$

k_1 ve k_2 nin tanımından ve Frenet formüllerinden

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & 1 & 0 \\ 1 & K_1 & K_2 \\ 0 & -K_2 & K_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

$$g(T, T) = -\rho^2, g(N, N) = \rho^2, g(B, B) = \rho^2, g(T, N) = g(T, B) = g(N, B) = 0$$

Teorem.4.2. $\alpha = \alpha(\sigma), \mathbb{R}_1^3$ de N equiform spacelike asli normaliyle verilmiş bir equiform timelike eğri olsun ve equiform eğrilikleri her $\sigma \in I \subset \mathbb{R}$ için $K_1(\alpha) > 0, K_2(\alpha) \neq 0$ olsun. α nın equiform normal eğri olması için gerek ve yeter şart yer vektörünün sırasıyla equiform normal ve binormal bileşenlerinin sırasıyla

$$g(\alpha, N) = \rho^2$$

$$g(\alpha, B) = \rho^2 \frac{K_1}{K_2}$$

şeklinde verilmiş olmasıdır.

İspat. $\alpha(\sigma), \mathbb{R}_1^3$ de equiform timelike normal eğri olsun. Bu tanımdan

$$\alpha(\sigma) = \lambda(\sigma)N(\sigma) + \eta(\sigma)B(\sigma)$$

σ ya bağlı diferensiyelini alıp Frenet eşitliklerini de kullanırsak

$$\lambda = 1, \lambda' + \lambda K^1 - \eta K^2 = 0, \lambda K^2 + \eta' + \eta K^1 = 0. \quad (4.6)$$

Bu eşitliklerin birinci ve ikinci denklemlerinden

$$\lambda = 1, \eta = \frac{K_1}{K_2}$$

$$\alpha(\sigma) = N + \frac{K_1}{K_2} B \quad (4.7)$$

$$g(\alpha, N) = \rho^2$$

$$g(\alpha, B) = \rho^2 \frac{K_1}{K_2}$$

ve

$$g(\alpha, \alpha) = \rho^2 \left(1 + \left(\frac{K_1}{K_2}\right)^2\right) \quad (4.8)$$

elde edilir.

Tersine farzedelim ki

$$g(\alpha, N) = \rho^2, \quad g(\alpha, B) = \rho^2 \frac{K_1}{K_2}$$

olsun.

$$g(\alpha, N) = \rho^2$$

eşitliğinin σ ya göre diferensiyelini alırsa

$$g(T, N) + g(\alpha, N') = 2\rho\rho'$$

$$g(\alpha, T + K_1 N + K_2 B) = 2\rho\rho'$$

$$g(\alpha, T) + K_1 g(\alpha, N) + K_2 g(\alpha, B) = 2\rho\rho'$$

$$g(\alpha, T) + K_1 \rho^2 + K_1 \rho^2 = 2\rho\rho'$$

$$g(\alpha, T) + 2K_1 \rho^2 = 2\rho\rho' \quad (4.9)$$

elde edilir. Böylece

$$g(\alpha, T) = 0$$

bulunur. O halde α equiform normal eğridir.

Teorem.4.3. $\alpha = \alpha(\sigma), \mathbb{R}_1^3$ de N equiform spacelike asli normaline sahip equiform timelike eğri olsun ve her $\sigma \in I \subset \mathbb{R}$ için $K_1(\sigma) > 0, K_2(\sigma) \neq 0$ olsun. α nın bir equiform normal eğriye eş olması için gerek ve yeter şart equiform eğriliklerinin

$$\frac{K_1}{K_2} = -\frac{1}{K_1} [K_2 - \left(\frac{K_1}{K_2}\right)'] \quad (4.10)$$

olmasıdır.

İspat. Farz edelim ki $\alpha = \alpha(\sigma), \mathbb{R}_1^3$ de bir equiform normal timelike eğriye eş olsun. Buna göre (4.6)deki üç eşitlik söz konusudur. Üçüncü eşitlikten aşağıdaki diferensiyel denklemi elde edilir:

$$\left(\frac{K_1}{K_2}\right)' + \frac{K_1^2}{K_2^2} + K_2^2 = 0$$

Böylece

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{-1}{K_1} [K_2 + \left(\frac{K_1}{K_2}\right)'] \quad (4.11)$$

olur.

Tersine (4.10) denklem var olduğunu düşünelim. Bu denklemin σ ya göre diferensiyelini alırsak ve (4.5) daki Frenet eşitliklerini kullanırsak

$$\left(\frac{K_1}{K_2}\right)' + \frac{K_1^2}{K_2^2} + K_2 = 0 \quad (4.11)$$

(4.4) daki Frenet eşitliklerinin diferensiyelini alırsak

$$\frac{d}{d\sigma} [\alpha(\sigma) - N - \frac{K_1}{K_2} B] = 0$$

Tersine α bir tane equiform normal eğriye eştir.

Teorem.4.4. $\alpha = \alpha(\sigma) \mathbb{R}_1^3$ de bir equiform spacelike asli normaline N ye sahip ve non-null equiform asli normaline N ve non-null yer vektörü ile verilmiş equiform eğrilikleri her $\sigma \in I \subset \mathbb{R}$ için $K_1(\sigma) > 0, K_2(\sigma) \neq 0$ olsun. α nın Pseudo-Riemann küresi $S^2(m, r)$ üzerinde yatması için gerek ve yeter şart α nın equiform normal eğri olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki α bir equiform normal eğri olsun. (4.3) teoremden (4.10) numaralı denklem ortaya çıkar. Denklemi

$$2\rho^2 \frac{K_1}{K_2} \text{ ile çarparsak}$$

$$2\rho^2 \frac{K_1}{K_2} \left(\frac{K_1}{K_2}\right)' + 2\rho^2 K_1 + 2\rho^2 K_1 \left(\frac{K_1}{K_2}\right)^2 = 0$$

$K_1 = \rho'$ olduğundan son denklem

$$2\rho^2 \frac{K_1}{K_2} \left(\frac{K_1}{K_2}\right)' + 2\rho^2 \rho' \left[1 + \left(\frac{K_1}{K_2}\right)^2\right] = 0$$

şekline dönüşür. Bu son denklem

$$\rho^2 \left[1 + \left(\frac{K_1}{K_2}\right)^2\right] = r^2$$

denkleminin r 'nin pozitif reel değerlerinde diferensiyelidir.

$$m = \alpha(\sigma) - N - \frac{K_1}{K_2} B$$

ile verilen denkleminin σ' 'ya göre türevini alırsak ve (4.4) deki Frenet eşitliklerini kullanırsak $m' = 0$ olarak buluruz ve böylece m nin sabit olduğunu buluruz. Daha sonra

$$g(\alpha - m, \alpha - m) = \rho^2 \left[1 + \left(\frac{K_1}{K_2}\right)^2\right] = r^2$$

bu da gösteriyor ki α 'nın m merkezli ve $r = \rho \left[1 + \frac{K_1}{K_2}\right]$ $S_1^2(m, r)$ Pseudo-Riemann küresinde uzandığını gösterir.

Tersine farz edelim ki $\alpha, S_1^2(m, r)$ Pseudo-Riemann küresinde uzansın. Bu yüzden

$$g(\alpha - m, \alpha - m) = r^2, \quad r \in \mathbb{R}^+$$

Bu denklemin 3- defa σ ya göre türevini alırsak ve Frenet eşitliklerini kullanırsak aşağıdaki eşitlikleri buluruz

$$g(\alpha - m, T) = 0,$$

$$g(\alpha - m, N) = \rho^2,$$

$$g(\alpha - m, B) = \rho^2 \frac{K_1}{K_2}$$

böylece

$$\alpha - m = -g(\alpha - m, T)T + g(\alpha - m, N)N + g(\alpha - m, B)B$$

$$= \rho^2 N + \rho^2 \frac{K_1}{K_2} B$$

m vektörünün dönüşümünden α bir equiform normal eğriye eştir, bu da ispatı tamamlar.



4. SONUÇ

Bu çalışmanın sonucu olarak $\rho = \frac{1}{k_1}$ eğrilik yarıçapına sahip bir eğri olan $\alpha(s)$ için ρ 'yu equiform parametresi olarak kabul ettiğimizde $\alpha(s)$ normal yüzeyde uzanan bir eğrinin hız vektörü $\alpha'(s)$ eğrisi spacelike bir eğri ise spacelike, $\alpha'(s)$ eğrisi timelike ise bir timelike eğridir [13].

Yer vektörü $\alpha(\sigma) = \lambda(\sigma)N(\sigma) + \eta(\sigma)B(\sigma)$ spacelike olması ancak ve ancak bu eğrinin Pseudo-Riemann küresi üzerinde uzanması demektir

$$\frac{K_1}{K_2} = \mp \sqrt{1 - \frac{r^2}{\varepsilon\rho^2}}, \quad \frac{r^2}{\varepsilon\rho^2} < 1 \text{ olur.}$$

Yer vektörünün timelike olması ancak ve ancak bu eğrinin Pseudo-Riemann Hiperbolic uzayı üzerinde uzanması ile mümkün olur ve

$$\frac{K_1}{K_2} = \mp \sqrt{1 + \frac{r^2}{\varepsilon\rho^2}} \text{ olur.}$$

$\alpha = \alpha(\sigma) \mathbb{R}_1^3$ de bir equiform spacelike asli normal N ye sahip ve non-null equiform asli normal N ve non-null yer vektörü ile verilmiş equiform eğrilikleri her $\sigma \in I \subset \mathbb{R}$ için $K_1(\sigma) > 0, K_2(\sigma) \neq 0$ olsun. α nın Pseudo-Riemann küresi $S^2(m, r)$ üzerinde yatması için gerek ve yeter şart α nın equiform normal eğri olmasıdır [1,2].

KAYNAKLAR

- [1] Elsayid H. K.; Elzawy, M.; Elsharkawy A. (2016) Equiform Spacelike Normal Curves in Minkowski 3-Space, <http://arxiv.org/submit/1486770/pdf>.
- [2] Elzawy M.; Elsharkawy A. (2016). Equiform Timelike Normal Curves in Minkowski 3-Space, *Far East Journal of Mathematical Sciences*, C. 101, Sayı 8. doi:10.17654/MS101081619.
- [3] O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemann Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, New York
- [4] Ilarslan, K.; Nesovic, E. (2004). Timelike and null normal curves in Minkowski space, *Ind.J. of pure and applied mathematics*, C. 35, Sayı 7, 881-888.
- [5] Grbovic, M.; Ilarslan, K.; Nesovic, E. (2013). On null pseudo null Mannheim curves in Minkowski 3-space, *J. Geommetry*, doi:10.1007/s00022-013-0205-z.
- [6] Kızıltuğ, S.; Yaylı, Y. (2014). Bertrand Curves of AW(k)-type in the Equiform Geometry of the Galilean Space, *Abstract and Applied Analysis*. V. Article ID 402360.
- [7] AbdelAziz, H. S.; Saad, M. K.; Kızıltuğ, S. (2012). Parallel Surfaces of Weingarten Type in Minkowski 3- Space, *International Mathematical Forum*, C. 7, Sayı 46, 2293 – 2302.
- [8] Turgut A. (1995). *3- Boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler*. Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi
- [9] Sabuncuoğlu, A. (2004). *Diferensiyel Geometri*, Nobel Yayın, Ankara
- [10] Yay, Y. (2010). *Minkowski Uzayında Kirchhoff Elastik Çubuklar*, SDÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Isparta.
- [11] HacıSalihoğlu, H. (2000). *Diferensiyel Geometri*, Ertem Matbaa, Ankara
- [12] Ilarslan, K. (2005). Spacelike Normal Curves in Minkowski Space E_1^3 , *Turk.J.Math* , Sayı 29, 53-63.
- [13] Walrave, J. (1995). *Curves and surfaces in Minkowski space*, Doctoral thesis, K.U. Leuven, Faculty of Science, Leuven

ÖZGEÇMİŞ

Hacer DEMİREL

KİŞİSEL BİLGİLER

Doğum Yeri : Malatya Merkez
Doğum Yılı : 1979
Uyruğu : T.C.
Adres : Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi, Elazığ
E-posta : hacerdemirel44@gmail.com
Yabancı Diller : İngilizce (YÖKDİL: 46)

EĞİTİM BİLGİLERİ

Lisans : Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Lise : Hacı Hüseyin Köllük Anadolu Ticaret Lisesi

ARAŞTIRMA DENEYİMİ

Paket Programlar : Mathematica, Scientific
İşletim Sistemleri : Windows