

KUANTUM HAMILTON JACOBI TEORİSİ VE UYGULAMALARI

Ahmet Ferhat ERDOĞAN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
FİZİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ANKARA
AĞUSTOS 2009**

Ahmet Ferhat ERDOĞAN tarafından hazırlanan Kuantum Hamilton Jacobı Teorisi ve Uygulamaları adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd.Doç. Dr Özlem YEŞİLTAS

Tez Danışmanı , Fizik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile ...Fizik...Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd.Doç. Dr Belma Berrin ŞİRVANLI

Fizik,Gazi Üniversitesi

Yrd.Doç. Dr Özlem YEŞİLTAS

Fizik,Gazi Üniversitesi

Yrd.Doç. Dr Şengül KAYA

Fizik,Ankara Üniversitesi

Tarih : 28/08/2009

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Nail ÜNSAL

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yaptığımı bildiririm.

Ahmet Ferhat ERDOĞAN

KUANTUM HAMILTON JACOBI TEORİSİ VE UYGULAMALARI**(Yüksek Lisans Tezi)****Ahmet Ferhat ERDOĞAN****GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ****Ağustos 2009****ÖZET**

Kuantum mekaniğinde, değişik potansiyel ailelerinin çözümlerinde kuantum Hamilton Jacobi yöntemi son derece etkili bir yöntemdir. Leacock ve Padgett tarafından geliştirilen kuantum Hamilton Jacobi metodu ile geniş bir potansiyel sınıfının tam çözümleri ve bağlı durumları elde edilmiştir. Bu tezde rölativistik olmayan kuantum mekaniğinde, kuantum momentum fonksiyonunun tekil yapısı kullanılarak hem enerji özdeğerleri hem de dalga fonksiyonları elde edilmiştir. Ayrıca, kuantum Hamilton Jacobi metodu ile Süpersimetrik kuantum mekaniği arasındaki ilişki incelenmiştir. Süpersimetrik kuantum mekaniğinin integrallenebilirlik koşulu olan şekil değişmezliği kullanılarak kuantum momentum fonksiyonunun kesirsel ve doğrusal dönüşümleri incelenmiştir.

Bilim Kodu :202.1.138**Anahtar Kelimeler:Kuantum Hamilton Jacobi, Süpersimetri****Sayfa Adedi :58****Tez Yöneticisi :Yrd.Doç. Dr Özlem YEŞİLTAŞ**

**THE APPLICATIONS AND THE THEORY OF
QUANTUM HAMILTONIEN JACOBI
(M.Sc.Thesis)**

Ahmet Ferhat ERDOĞAN

**GAZİ UNIVERSTY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECNOLOGY**

August 2009

ABSTRACT

Quantum Hamilton Jacobi which in the most efficient approach is used in solutions of various potential classes. Exact solutions and bound states of a wide class of potential solutions are obtained by quantum Hamilton Jacobi method which is developed first by Leacock and Padgett. In this thesis, both energy eigenvalues and wave functions are obtained by using the singularity structure of the quantum momentum function in non-relativistic quantum mechanics. Besides, supersymmetric quantum mechanics is connected to Quantum Hamilton Jacobi approach and the shape invariance method that is an integrability condition in supersymmetric quantum mechanics is used to discuss fractional linear transformations of quantum momentum function.

Science Code : 202.1.138

Key Words :Quantum Hamilton Jacobi, Supersymmetry

Page Numbers :58

Adviser :Assist.Prof.Dr. Özlem YEŞİLTAŞ

TEŞEKKÜR

Bu tezi hazırlarken bütün çalıőmalarım boyunca yardımını ve tecrübelerini esirgemeyen hocam Yrd.Doç. Dr zlem YEŞİLTAŞ'a , çalışma arkadaşlarına ve eőime sonsuz teőekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	ix
SİMGE VE KISALTMALAR.....	x
1. GİRİŞ.....	1
2. KLASİK MEKANİKSEL KAVRAMLAR.....	4
2.1. Hamilton Mekaniği	4
2.2. Lagrange Mekaniği.....	6
2.2.1. Genelleştirilmiş koordinatlar , holonomik sistemler	6
2.3. Hamilton-Jacobi Teorisi.....	8
2.4. Matematiksel Kavramlar.....	11
2.4.1. Kompleks düzlem ve kutupsal gösterim.....	11
2.4.2. Analitik fonksiyonlar.....	12
2.4.3. Kritik noktalar.....	13
2.4.4. Laurent serisi.....	14
2.4.5. Rezidü ve integral hesapları.....	14
3. KUANTUM HAMILTON JACOBI TEORİSİ.....	19
3.1. Morse Titreşicisinin Enerji Spektrumu.....	22
3.2. Kuantizasyon Kuralı ve Özdeğerler.....	28
3.3. Pösch-Teller Potansiyeli.....	33

3.4. Eckart Potansiyeli.....	37
4. SÜPERSİMETRİK KUANTUM MEKANİĞİNDE KUANTUM HAMILTON JACOBI YAKLAŞIMI.....	42
4.1. Süpersimetrik Kuantum Mekaniği.....	42
4.2. Kuantum Hamilton Jacobi Teorisi ile Süpersimetri Kuantum Mekaniğinin Birleştirilmesi.....	46
5. SONUÇ VE TARTIŞMA.....	53
KAYNAKLAR.....	55
ÖZGEÇMİŞ.....	58

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 1.1. Kompleks düzlemde bir $z = x + iy$ sayısının gösterimi.....	12
Şekil 3.1. Kompleks x düzleminde, klasik ve kuantum momentum gösterimi.....	22
Şekil 3.2. Kompleks düzlemde J integral gösterimi.....	29

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklama

L	Lagrange
H	Hamilton
Σ	Toplam Sembolü
Ψ	Dalga Fonksiyonu

Kısaltmalar

Açıklama

HJ	Hamilton-Jacobi
KMF	Kuantum Mekanik Fonksiyonu
KHJ	Kuantum Hamilton Jacobi
SUSY	Süpersimetri

1. GİRİŞ

Bu tezde kuantum mekaniğinde tam çözülebilir problemlere bir alternatif yaklaşım metodu çalışılmıştır. Kuantum Hamilton Jacobi (KHJ) metodu olarak bilinen bu yaklaşımın, kuantum mekaniğinde tam çözülebilir modellerin enerji spektrumlarının tanımlanmasında diğer metotlara göre daha kullanışlı olduğu görülmüştür. KHJ yaklaşımının bir diğer üstünlüğü de özfonksiyonların çözümüne gerek duymadan enerji özdeğerlerinin bulunabilmesi ve böylece dalga fonksiyonlarının bağımsız olarak hesaplanabilmesidir. Ayrıca klasik eylem-açı değişkenlerinin kuantum mekaniğindeki karşılığı verilmiştir. Tam kuantizasyon koşulu kompleks düzlemde kuantum eylem değişkenine karşı gelecek şekilde kontur integrali şeklinde formüle edilmiştir. Bir boyutlu ve ayırt edilebilir sistemler için enerji öz durumlarının tanımlanması için kesin bir kuantizasyon şartı verilmiştir. Böylelikle kuantizasyon şartından yararlanarak, dalga fonksiyonunu sıfır yapan kutup noktalarının sayısı ve dalga fonksiyonunun logaritmik türevi cinsinden kuantum momentum fonksiyonu (KMF) yazılabilir ve böylelikle enerji seviyeleri hesaplanabilir. KMF tarafından sağlanan denklem doğrusal olmayan KHJ denklemi olarak bilinir ve iki çözüme sahiptir. Ancak, fiziksel olarak kabul edilebilir çözümlere ulaşmak için $\hbar \rightarrow 0$ limitinde klasik momentuma ulaşılır ki bu ise fiziksel çözümlerin elde edilmesine olanak sağlayacaktır. KHJ uygulamaları oldukça geniş bir yazar kitlesinin ilgisine maruz kalmıştır [1-24]. Ancak bu metodu ilk olarak geliştiren bilimciler Leacock ve Padgett olmuştur [22].

Bu çalışmalardan sonra Bhalla ve arkadaşları sadece özfonksiyon çözümlerinin değil aynı zamanda enerji özdeğerlerinin de verilen fiziksel sistemler için bulunabileceğini süpersimetrik (SUSY) kuantum mekaniğini kullanarak göstermişlerdir [1-3]. Daha sonra, metot geliştirilerek çok daha geniş bir potansiyel ailesine uygulanarak test edilmiştir [1-39]. Bu çalışmalar gerek tam gerek kısmi çözülebilir potansiyeller ile birlikte parite zaman simetrik potansiyelleri de kapsamaktadır [4-13].

Fizikçiler doğadaki temel etkileşimlerin (güçlü, elektro-zayıf ve gravitasyonel etkileşimler) birleşik bir alan teorisini oluşturmak için özveriyle çalışmaktalar. Bu

konuda basit olarak bozonları fermiyonlara, fermiyonları da bozonlara dönüştüren süpersimetrinin gerekliliği oldukça önemlidir. Süpersicim kuramıyla olan ilişkisi, sicim kuramlarındaki modeli 22 boyutta yazmak yerine süpersimetri kullanarak süpersicimler sayesinde modeli 11 boyutta yazarak Süpersimetrinin varlığı süpersicim modellerinin bir öngörüsü olarak düşünülebilir [29]. Ayrıca, süpersicim kuramı parçacıkları ve temel kuvvetleri çok küçük süpersimetrik sicimlerin titreşimleri şeklinde modelleyerek onları tek bir kuramda anlatmayı amaçlayan bir model olmakla beraber bu tezde ilgilenilecek olan süpersimetri Lie cebirsel Süpersimetri komütasyon ve anti-komütasyon bağıntılarını kapsar. Ancak bu tezde cebirsel SUSY kuantum mekaniği potansiyel uygulamalarında kullanılacaktır. Bu konuda son çalışmalar referanslarda bulunabilir [32,33]. SUSY kuantum mekaniği Schrödinger denkleminin yapısının analizinde oldukça etkili bir metottur [14]. Birbirinden farklı potansiyelleri ilişkilendirmenin dışında, SUSY kuantum mekaniği şekil değişmez potansiyeller olarak bilinen çok geniş potansiyeller ailesinin cebirsel çözümlerine olanak sağlar [36].

Bu tezde KHJ metodu sadece tam çözülebilir potansiyel ailelerinden Morse Titreşicisinin Enerji Spektrumu, Pöschl-Teller ve Eckart potansiyellerine uygulanmıştır. Tezin ikinci bölümü temel klasik mekanik bilgilerine, Lagrange-Hamilton dinamiğine ve bazı temel matematiksel kavramlara ayrılmıştır.

Üçüncü bölümde KHJ metodu klasik mekanikteki eylem-açı değişkenleri ile ilişkilendirilerek verildikten sonra KMF ile dalga fonksiyonu arasındaki ilişki tanımlanmıştır. Daha sonra tam çözümleri bilinen Morse titreşicisinin enerji spektrumu, kuantizasyon kuralı ve özdeğerleri, Pöschl-Teller potansiyeli ve Eckart potansiyellerine uygulanarak Riccati denkleminin çözümlerine ulaşıldıktan sonra artık bu potansiyeller için enerji spektrumu ve özfonksiyonlar kümesi elde edilmiştir. Özellikle dalga fonksiyonu elde edilmeksizin nasıl enerji özdeğerlerine ulaşılacağı bu bölümde gösterilmiştir. Bu bölümde analitik bir fonksiyon olan KMF Laurent serisine açılarak her bir potansiyel için ayrı ayrı kutup noktaları incelenerek rezidü hesabı yapılmıştır.

Bu tezin dördüncü bölümünde SUSY kuantum mekaniği ile KHJ şeklindeki iki ayrı metot arasında bir ilişki kurulmuştur. Bu bölümde KHJ metodu ile Süpersimetri ve Süpersimetri'nin dört ayrı metodundan biri olan şekil değişmezlik modeli arasında ilişki kurulacaktır. Şekil değişmezlik kullanılarak, farklı enerjilere karşı gelen KMF kesirsel doğrusal dönüşümlerle bağlantılı olduğu gösterilip, herhangi bir kuantum momentum fonksiyonu için genel bir tekrarlılama bağıntısı verilecektir.

Son olarak beşinci bölüm, sonuç ve tartışmalara ayrılmıştır.

2. KLASİK MEKANİKTE BAZI KAVRAMLAR

2.1. Hamilton Mekaniği

Hamilton denklemleri L Lagrange fonksiyonu; konum ve momentuma karşı gelen q_1, q_2, \dots, q_n ve $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ 'nin fonksiyonudur. Kısaltılırsa q genelleştirilmiş koordinatları, \dot{q} bunların zamana göre türevini göstermek üzere $L(q, \dot{q})$ ile verilir [16].

Euler-Lagrange hareket denklemi

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q} = 0 \quad L = T - V$$

ve korunumsuz kuvvetlerin bulunması durumunda

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q} = Q$$

haline gelir ve burada

$$\dot{p}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad (2.1)$$

şeklinde yazılabilir. Burada genelleştirilmiş momentum

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad (2.2)$$

olarak tanımlanır. Bu ve bundan sonraki eşitliklerde $\alpha : 1, 2, \dots, n$ değerlerini alır. Sistemimizin her bir parçasının ani konumu ve hızı, $2n$ tane q ve \dot{q} değişkenlerinin değerleri ile belirlenebilir. Bununla birlikte Eş.2.1 ve Eş.2.2 denklemlerini, \dot{q} 'ya göre q ve p cinsinden çözüp $\dot{q}_\alpha = \dot{q}_\alpha(q, p)$ olarak elde edilebilir. q ve p 'nin bir fonksiyonu olan ifade

$$H = \sum_{\beta=1}^n p_\beta \dot{q}_\beta - L \quad (2.3)$$

şeklinde verilir. Bu ifade *Hamiltoniyen fonksiyonu* olarak tanımlanabilir. Buradaki \dot{q} değişkenleri $\dot{q}_\alpha = \dot{q}_\alpha(q, p)$ ile verilen q ve p 'nin fonksiyonlarıdır. Fonksiyonel bağımlılık belirtilirse

$$H(q, p) = \sum_{\beta=1}^n p_\beta \dot{q}_\beta(q, p) - L(q, \dot{q}(q, p))$$

olarak yazılır. Bundan sonra hamilton denklemlerini elde etmek için, H 'nin türevlerini alırız. Önce p_α 'ya göre türev alınır ve bu \dot{q}_α terimi, $\sum_{\alpha} p_\alpha \dot{q}_\alpha$ toplamındaki p_α 'nın katsayılarıdır. Öteki terimler, \dot{q} 'nın q_α 'ya bağımlılığından gelir. Tümünü bir araya toplayarak yazarsak

$$\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \dot{q}_\alpha + \sum_{\beta=1}^n p_\beta \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial p_\alpha} - \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial p_\alpha} \quad (2.4)$$

elde edilir. Eş.2.2' den dolayı ikinci ve üçüncü terimler birbirini götürür ve buradan

$$\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \dot{q}_\alpha \quad (2.5)$$

yazılır. q_α 'ya göre türevlerini incelersek yine iki tür terim vardır. Birincisi L'nin q_α 'ya açık olarak bağlı olmasından gelen terim, ikincisi de \dot{q}_α 'nın q_α 'ya bağlı olmasından gelen terimdir. Böylece

$$\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} + \sum_{\beta=1}^n p_\beta \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial q_\alpha} - \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial q_\alpha}$$

elde edilir. Daha önce olduğu gibi ikinci ve üçüncü terimler birbirini götürür. Eş.2.1 denklemini kullanılırsa

$$\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = -\dot{p}_\alpha \quad (2.6)$$

ile birlikte

$$\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \dot{q}_\alpha \quad (2.7)$$

elde edilir. Eş.2.6 ve Eş.2.7 Hamilton denklemlerini oluştururlar [16]. Lagrange denklemlerinin n tane ikinci dereceden diferansiyel denklem olmasına karşılık bunlar 2n tane birinci dereceden denklem takımındadır.

2.2. Lagrange Mekanîği

2.2.1. Genelleştirilmiş koordinatlar; Holonomik sistemler

N parçacıktan oluşan bir katı cisim için bütün parçacıkların konumları, $3N$ sayıda koordinatla belirtilebilir. Bununla beraber $3N$ sayıda koordinatın hepsi bağımsız değişken olmayıp sistemin katı cisim olmasından kaynaklanan bağ koşullarına tabidirler. Gerçekte, her parçacığın konumu, tam olarak altı niceliğin belirlenmesi ile tespit edilebilir. Örneğin, kütle merkezinin üç X,Y,Z koordinatları ve yön belirleyen

üç φ, θ, ψ Euler açılarıdır. Bu altı nicelik, katı cisim için bir *genelleştirilmiş koordinatlar* takımı oluşturur [16].

Her parçacığın konumu, geri kalan genelleştirilmiş koordinatların değerleri ve t zamanı ile tayin edilir. Genel olarak belirli bir sistem için, sistemi oluşturan parçacığın bu değişkenlerin ve zamanın $r_i = r_i (q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ ile verilen açık bir fonksiyonu ise q_1, q_2, \dots, q_n değişkenleri bir *genelleştirilmiş koordinatlar* takımı olarak adlandırılır [16].

Koordinatların kendi arasında eşitliklerle verilen ve zamana açık olarak bağlı bulunmayan yani

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = \text{sabit}$$

veya $r = R$ gibi bağ koşullarına **doğal holonom** bağ koşulları denir. Ancak zamana bağlılık varsa, $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R(t)$ gibi koşullara **zorlanmış holonom** bağ koşulları denir [16].

Doğal ve zorlanmış sistemler arasındaki ayırım daha sonra faydalı olabilecek bir başka yolla ifade edilebilir. $r_i = r_i (q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ eşitliğinin zamana göre türevi alınarak i. parçacığın hızını $\dot{q}_1 \dots \dot{q}_n$ 'ların doğrusal bir fonksiyonu olduğu görülür [15].

$$r_i = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial r_i}{\partial t} \quad (2.8)$$

Son terim zamana açık olarak bağlı olmaktan türeyen bir terimdir ve doğal bir sistem için sıfırdır.

$$T = \sum \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \quad (2.9)$$

Eş.2.9 denklemini koyduğumuzda $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ zaman türevlerinin kuadratik bir fonksiyonunu elde ederiz. Doğal bir sistem için fonksiyon bir homojen kuadratik fonksiyondur. Fakat zorlanmış bir sistem için doğrusal ve sabit terimler de vardır. Simetrik katı bir cismin kinetik enerjisi ifadesi

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 \quad (2.10)$$

şeklindedir [16].

2.3. Hamilton-Jacobi Teorisi

Hamilton denklemleri şekil değiştirmeyen kanonik dönüşümler q_i, p_i olduğundan kanonik koordinatların kanonik dönüşümler aracılığıyla yazılabilir. Burada yeni değişkenler P ve Q zamana bağlı değildir [15].

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \quad (2.11)$$

$K(Q, P, t)$ olmak üzere yeni bir Hamiltonyen tanımlanır. Eş.2.11 kullanılarak

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0 \quad Q_i = \alpha_i = \text{sabit}$$

ve (2.12)

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0 \quad P_i = \beta_i = \text{sabit}$$

olur ve Eş.2.12 yazılabilir. Kanonik dönüşüm sonucu elde edilen Hamilton fonksiyonunun sıfır olması bize

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (2.13)$$

denklemini verir. Bundan dolayı Eş.2.13 denklemi

$$H(q, p, t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

olur ve F_2 üretici fonksiyon olmak üzere

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i},$$

olduğundan , Hamilton-Jacobi denklemi,

$$H(q_1, \dots, q_n; \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F_2}{\partial q_n}; t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0 \quad (2.14)$$

olarak elde edilir. F_2 fonksiyonu

$$F_2 = \int L(q; \dot{q}; t) dt + \text{sabit}$$

şeklindedir. Genellikle F_2 yerine S Hamilton 'un baş fonksiyonu olarak kullanılır

$$S = \int L(q; \dot{q}; t) dt + \text{sabit}$$

Hamilton'un varyasyon ilkesi $\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q; \dot{q}; t) dt = 0$ zamana göre belirli integralinin

değişiminden

$$\begin{aligned}
p_i &= \frac{\partial}{\partial q_i} S(q; \beta; t) \\
Q_i &= \frac{\partial}{\partial \beta_i} S(q; \beta; t) = \alpha_i
\end{aligned}
\tag{2.15}$$

şeklinde çözülür ve α_i sabittir. Dolayısıyla

$$H(q_1, \dots, q_n; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}; t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

olur. Hamilton fonksiyonu zamandan bağımsız ise

$$S(q; \beta; t) = W(q, \beta) - a_1 t \tag{2.16}$$

şeklinde verilir. Eş.2.16'da a_1 Hamiltoniyenin enerji sabitidir. Buraya kadar olanları özetlersek, klasik mekaniğin faz uzayı formalizmi bize (q_k, p_k) kümesinin bir fonksiyonu olan (Q_k, P_k) kanonik değişkenler çiftini sunmamıza olanak verir. Hareket denklemlerinin Hamiltoniyen formu, eğer kanonik bir dönüşüm ise korunumludur. Hamilton–Jacobi teorisinde yararlanılan bu serbestlik bize dönüşümler yaparak klasik mekanik problemlerin çözümünü sağlar ve Hamiltoniyen sabit hale gelir.

$W(q_i, P_i)$ bir üretici fonksiyon olmak üzere Hamiltoniyei sabit hale getirir. Eski ve yeni kanonik değişkenler bu durumda

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \quad \text{ve} \quad Q_i = \frac{\partial W}{\partial P_i}$$

olur. Yeni değişkenlere bağlı Hamiltoniyen ise

$$H(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}) = \alpha_1 \quad (2.17)$$

şeklindedir. Eş.2.17 Hamilton-Jacobi (HJ) denklemdir. $W(q_i, P_i)$ ise karakteristik fonksiyondur. Hamilton-Jacobi denkleminin çözümlerinin Euler-Lagrange denkleminin tüm çözümlerine eşdeğer olduğu bilinir.

Eylem değişkeni J_i olmak üzere, hareket denklemini çözmeden frekanslar

$$J_i = \oint_C \frac{\partial W}{\partial q_i} dq_i \quad (2.18)$$

Eş.2.18 integrali ile bulunur. Burada integral C kapalı eğrisinin hapsedtiği alan çevresindedir. J_i ise hareket sabiti α_i cinsindedir. $H = H(J_1, J_2, \dots, J_n)$ genelleştirilmiş faz uzayı değişkeni ω_i açı değişkeni olmak üzere

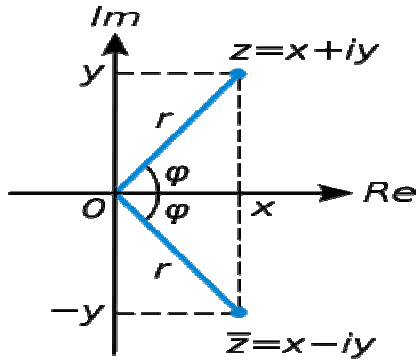
$$\omega_i = \nu_i t + \beta_i$$

şeklindedir. Bu ise bize periyodik hareketin frekanslarını verir.

2.4. Matematiksel Kavramlar

2.4.1. Kompleks düzlem ve kutupsal gösterim

Kompleks değişkeni dik bir koordinat düzleminde gösterebiliriz. Bunun için reel ve sanal eksenlerden oluşan koordinat sistemi alınır [17].



Şekil 1.1. Kompleks düzlemde bir $z = x \pm iy$ sayısının gösterimi.

z kompleks sayısı $z=x+iy$ olarak tanımlanır. Kompleks sayının büyüklük ifadesi $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ ile verilir. Argüman ve faz olarak ise $\varphi = \arctan(y/x)$ değeri tanımlanır. Buradan sonuç olarak $x = r \cos \varphi$ ve $y = r \sin \varphi$ ortaya çıkar. Kompleks sayıların kutupsal gösterimi $z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ olarak gösterilir [17]. Burada $\sin \varphi$ ve $\cos \varphi$ fonksiyonları Taylor serisine açılırsa ve kutupsal gösterim ifadesinde yazılırsa şeklinde $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ Euler formülü olarak elde edilir [17].

2.4.2. Analitik fonksiyonlar

Teorem 1: Bir D bölgesinde bir $f(z)$ fonksiyonu, eğer D 'deki tüm noktalar boyunca tanımlı ve türevlenebilir ise analitiktir denir. $f(z)$ fonksiyonu D 'de bir z_0 komşuluğunda analitik ise bir $z = z_0$ noktasında $f(z)$ analitiktir denir.

Teorem 2: $f(z)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (2.19)$$

olmak üzere, bir $z = x + iy$ noktasının komşuluğunda tanımlı, sürekli ve z 'de türevi olan bir fonksiyon olsun. Bu noktada, kısmi türevler Cauchy-Riemann denklemlerini sağlarlar.

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

Böylelikle eğer kısmi türevler sağlanıyorsa, $f(z)$ fonksiyonu bir D bölgesinde analittir denir.

2.4.3. Kritik noktalar

i) Sıfır Noktası

$z = a$ noktasında $f(a)=0$ ise bu nokta $f(z)$ fonksiyonunun sıfır noktasıdır. Fakat $f'(a) \neq 0$,

ise a noktası birinci mertebeden sıfır noktası olur [17].

ii) Tekil Noktalar

$f(z)$ fonksiyonunun analitik olmadığı noktaya tekil nokta denir ve üç'e ayrılır [17] :

* Zahiri tekil nokta : $z=a$ ' da $f(z)$ analitik olmamalı fakat , $z \rightarrow a$ olurken $|f(z)| < N$ gibi sonlu bir N sayısından küçük ise a noktası zahiri tekil nokta olur.

** Kutup noktası

$z \rightarrow a$ iken $|f(z)| \rightarrow \infty$ olursa a bir kutup noktası olur. Gösterim olarak

$$\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| \rightarrow \infty$$

ise ve

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)|f(z)|$$

analitik oluyorsa $x=a$ noktası birinci dereceden kutup noktası olur.

*** Esaslı Tekil Nokta

Zahiri ve kutup tekil nokta dışında kalan noktalara esaslı tekil nokta denir. Gösterim olarak

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^n f(z)$$

ifadesi analitik olacak şekilde, sonlu bir n değeri bulunmuyorsa, z=a noktası esaslı tekil noktadır [17].

2.4.4. Laurent serisi

$f(z)$, merkezleri z_0 olan iki eşmerkezli çember C_1 , C_2 ile çevrelenen bölgede analitik olsun. Bu durumda $f(z)$ aşağıdaki gibi Laurent serileri ile temsil edilir

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \quad (2.20)$$

Burada serinin katsayıları

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{(z - z_0)^{n+1}} dz^*$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{(z - z_0)^{n+1}} dz^*$$

şeklindedir [39].

2.4.5. Rezidü ve integral hesapları

Teorem 1: $f(z)$, basit bağlantılı bir D bölgesinde analitik ise, D 'deki her bir basit kapalı c eğrisi için ifade

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

şeklindedir. Bu teorem, Cauchy'nin integral teoremi olarak bilinir.

Teorem 2: $f(z)$ basit bağlantılı D bölgesinde analitik ise, $f(z)$ 'nin integrali D 'deki yoldan bağımsızdır.

Teorem 3: $f(z)$ basit bağlantılı D bölgesinde analitik olsun. O halde, herhangi bir z_0 için z_0 'ı içine alan herhangi bir C basit kapalı yol olmak üzere

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

şeklinde olup burada C 'nin yönü saat yönünün tersi olarak alınır. Bu Cauchy'nin integral formülü olarak bilinir.

Teorem 4: $f(z)$ basit bağlantılı D bölgesinde analitik olsun. Fonksiyonun D bölgesindeki türevleri de D 'de analiktir. z_0 noktasındaki türevler aşağıdaki bağıntı ile verilir

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad (n=1,2,\dots)$$

Bu teoremlerin ispatları burada verilmeyecektir. Bir $f(z)$ fonksiyonu C eğrisi içinde bir a noktası hariç, her yerde analitik ise, fonksiyonun bu a noktasındaki rezidüsü

$$\text{Res } f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz \quad (2.21)$$

olarak tanımlanır. Rezidü değeri C eğrisinden bağımsızdır. Fonksiyon a noktası hariç her yerde analitik olduğundan C eğrisinin şekline bağlı değildir. Fonksiyonun analitik olduğu bir noktada rezidü sıfırdır. Rezidü, fonksiyonların analitik olmadığı yerlerde integral hesaplama amacına yöneliktir [17].

Kompleks fonksiyonların integrallerini almakta zorlanırsınız. Fakat rezidü metoduyla kolayca hesaplanır. Rezidü metoduyla integral hesaplarını birkaç başlık altında toplarız.

$$i) \int_0^{2\pi} f(\sin \theta, \cos \theta) d\theta \text{ türü integraller;}$$

Kompleks düzlemde $|z|=1$ çemberi üzerindeki bir integral $[0,2\pi]$ aralığındaki reel bir integrale eşdeğerdir. Bu çember üzerinde ($r=|z|=1$)

$$z = e^{i\theta} \quad ; \quad \frac{1}{z} = e^{-i\theta} \quad ; \quad dz = e^{i\theta} i d\theta = iz d\theta$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad ; \quad \sin \theta = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \quad \text{ve} \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

değişiklikleri yapılırsa, kompleks düzlemde $|z|=1$ çemberi üzerinde integral alınabilir [17].

$$ii) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx \text{ türü integraller;}$$

$P(x)$ ve $Q(x)$ polinom olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

şeklindeki ifadenin $Q(x)$ polinomu'nun derecesi , $P(x)$ polinomu'nun derecesinden en az iki derece yüksek olmalıdır ve $Q(x)$ 'in sıfır noktaları reel eksen üzerinde olmamalıdır.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res} \left\{ \frac{P(z_k)}{Q(z_k)} \right\}$$

iii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos ax dx$ ve $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin ax dx$ türü integraller;

Bu integrali $e^{iax} = \cos ax + i \sin ax$ olduğundan bu integrali reel ve sanal kısım olarak ayrılabilir [17].

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos ax dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin ax dx$$

Jordan teoremi : C_R kompleks düzlemin üst yarısında R yarıçaplı yarım bir çember ise ve $z \rightarrow \infty$ olurken $f(z) \rightarrow 0$ oluyorsa

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{iax} f(z) dz = 0 \quad (a > 0)$$

Sonuç olarak Jordan teoremi kullanılarak bu tür integraller için metot

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x) dx = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res} \left\{ f(z_k) e^{iaz_k} \right\}$$

z_k üst yarım küredeki kutuplardır [17].

iv) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)/(x-a)dx$ türü integraller ;

Kutup noktası reel eksen üzerinde ise integralin alınması zorlaşır. Bunun için C eğrisi içinde C_R gibi küçük bir yarım çemberden geçirilerek işlem yapılır. Burada a kutup noktası olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res} \left[\frac{f(z_k)}{z_k - a} \right] + \pi i f(a)$$

ifadesi ile çözüm yapılır.

3. KUANTUM HAMILTON JACOBI TEORİSİ

Hamiltoniyen işlemcisi

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \quad (3.1)$$

olarak verilir. Burada tek boyutta, bir çizgi boyunca hareket eden rölativistik olmayan parçacıklar incelenir. Basit olması açısından zamandan bağımsız Schrödinger denklemi

$$H\psi = E\psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi \quad (3.2)$$

şeklinde yazılır. Eş.3.2'deki işlemci ve özdeğerler

$$\begin{aligned} \hat{H} &\equiv H(\hat{x}, \hat{p}) = \hat{p}^2 + V(\hat{x}), \\ \hat{x} &= x, \\ \hat{p} &= (\hbar/i)\partial/\partial x \end{aligned} \quad (3.3)$$

olarak verilir. Eş.3.3'de \hat{x} doğrusal koordinat, \hat{p} momentum işlemcisidir. Sistem için kuantum dönüşümünde kurallara uygun yeni koordinat kümeleri \hat{Q} ve \hat{P} olarak tanımlanır. İşlemciler yerine özdeğer kavramı vurgulanacaktır. Buna göre özdeğerler ve özfonksiyonlar, \hat{H} yerine E özdeğeri yazılabilir [18].

$$\begin{aligned} p &= \partial W(x, E(P))/\partial x, \\ Q &= \partial W(x, E(P))/\partial P, \end{aligned} \quad (3.4)$$

Eş.3.3'deki ifadeleri Eş.3.2 denkleminde yerine yazarsak sabit ($2m=1$) olmak üzere, üretici fonksiyonun

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial^2 W(x, E)}{\partial x^2} + \left[\frac{\partial W(x, E)}{\partial x} \right]^2 = E - V(x) \quad (3.5)$$

Yukarıdaki denklemi sağladığı varsayılır ve $W(x, E)$ ile KMF arasındaki ilişki

$$p(x, E) = \frac{\partial W}{\partial x} \quad (3.6)$$

olur. Sonuç olarak

$$-\frac{\hbar^2}{2m} (p^2 - ip') + V - E = 0 \quad (3.7)$$

elde edilir. Eş.3.7 denklemi KHJ olarak adlandırılır. KMF ile klasik momentum arasındaki ilişki

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} p(x, E) = p_{\text{klasik}}(x, E) = \sqrt{E - V(x)} \quad (3.8)$$

şeklinindedir. Burada $\hbar \rightarrow 0$ limitinde KMF, klasik momentuma dönüşür. Dönme noktaları x_1, x_2 klasik momentumun sıfıra eşit olduğu noktalardır. Yani

$$p_{\text{klasik}}(x_1, E) = p_{\text{klasik}}(x_2, E) = 0$$

dır. Klasik eylem değişkeni klasik tanım geliştirilerek yapılır ve

$$\frac{1}{2\pi} \oint_C p_{kl}(x, E) dx$$

integrali yardımıyla tanımlanır. Burada integral C kapalı eğrisinin hapsedtiği alan çevresindedir. O halde kuantum eylem değişkeni genel klasik tanımdan yola çıkarak bulunur. $p(x, E)$ KMF olarak tanımlanır.

$$J = J(E) = \frac{1}{2\pi} \oint_C p(x, E) dx \quad (3.9)$$

ile verilir. Eş.3.9'denklemini eylem değişkeninden enerji özdeğerine geçmemizi sağlar. J (hareket değişkeni özdeğeri) yi, E (enerji özdeğeri)'ye bağlar. Eş.3.9'da kullanmak için hareket değişkeni J özdeğerinin elde edilmesi gereklidir. Böylece reel x ekseninde bu durumda KMF'nun dönme noktaları arasında $-i\hbar$ kadar kutup noktaları vardır. Yani temel durum, birinci uyarılmış durum, ikinci uyarılmış durum gibi enerji seviyeleri bulunur. Dolayısıyla kuyudaki KMF'nun kutupları bize sistemin uyarılmış durumlarını verir [18].

Yani;

$$J = J(E) = n\hbar \quad n = 0,1,2,3\dots$$

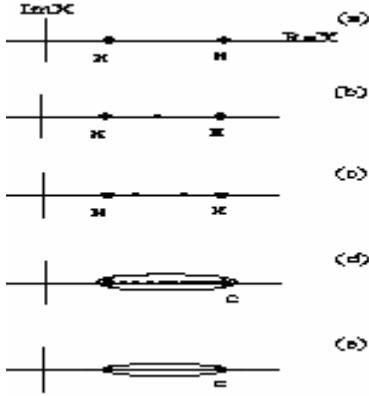
ve enerji özdeğerleri, hareket değişkeni özdeğeri için $n\hbar$ değeri ile ilişkilidir. Bu durum Şekil 3a ve Şekil 3d'de gösterilmiştir. Eş.3.9 denklemi tersinirdir. Böylece

$$J = J(E) \text{ veya } E = E(J)$$

denklemini verir [18].

Burada dikkat edileceği üzere W zamandan bağımsızdır. Ayrıca Hamilton-Jacobi denkleminin genel olarak iki veya üç boyutta da çalışılabilir; bu durumda ∇ işlemcisini çalışılacak olan koordinatlarda yazmak uygundur.

$$-i\hbar\nabla.\nabla W + \nabla W.\nabla W = E - V \quad .$$



Şekil 3.1. Kompleks x düzleminde, klasik ve kuantum momentum gösterimi [18].

Şekil 3.1. Kompleks x düzlemi üzerinde, $p_{kl}(x, E)$ klasik momentum fonksiyonu ve $p(x, E)$ KMF olarak tanımlanır. Dönüm noktaları x_1 ve x_2 dir. Gösterilen x düzleminde; A durumu: $p(x, E)$ temel durumlar için kutup noktası yoktur. B durumu: $p(x, E)$ 'nin bir kutbu (büyük nokta) birinci uyarılmış durum içindir. C durumu: ikinci uyarılmış durum için iki kutup (büyük noktalar) vardır. D durumu: x düzlemi gösterilen $p(x, E)$ on üç kutup (büyük noktalar) on üçüncü uyarılmış durum için x_1 ve x_2 kutupları kuantum hareket değişkeni olarak C kontur içinde kullanılır. E durumu: $p_{kl}(x, E)$ klasik moment fonksiyonunun x_1 ve x_2 kutup noktaları arasında kesilmiş halini x düzleminde gösterir [18].

Rölativistik olmayan kuantum mekaniğinde analitik olarak çözülebilen, tüm özdeğer ve özfonksiyonları kesin olarak bilinen potansiyellerin sayısı sınırlıdır. Bazı potansiyeller Morse, Pösch-Teller, Eckart vb. olarak sayılabilir. Bu tip potansiyeller için sonraki bölümde göreceğimiz eş potansiyeller arasında bir ilişki vardır [36].

3.1. Morse Titreşicisinin Enerji Spektrumu

Morse potansiyeli

$$V(x) = A^2 + B^2 e^{-2\alpha x} - 2B \left(A + \frac{\alpha}{2} \right) e^{-\alpha x} \quad (3.10)$$

olmak üzere ve $\hbar = 1 = 2m$ atomik birimler kullanılarak Eş.3.7 denkleminde yerine yazılır [14]. Buradan

$$P^2(x, E) - iP'(x, E) - \left[E - A^2 - B^2 e^{-2\alpha x} - 2B \left(A + \frac{\alpha}{2} \right) e^{-\alpha x} \right] = 0 \quad (3.11)$$

ifadesini alır. Burada $P'(x, E) = \frac{dP(x, E)}{dx}$ olarak tanımlanır. Eş.3.11 denkleminde yeni bir değişken değiştirmesi yapılırsa

$$y = \frac{2B}{\alpha} e^{-\alpha x}$$

kullanılırsa

$$dy = -2B e^{-\alpha x} dx$$

olur ve buradan

$$\frac{dP(x, E)}{dx} = \frac{dP}{dy} \frac{dy}{dx} = -2B e^{-\alpha x} \frac{dP}{dy} = -\alpha y P'(y, E)$$

olacaktır. Bunlar Eş.3.11 denkleminde yazılırsa

$$\tilde{P}^2(y, E) + i\alpha y \tilde{P}'(y, E) - \left[E - A^2 - \frac{\alpha^2}{4} y^2 + \left(A + \frac{\alpha}{2} \right) \alpha y \right] = 0 \quad (3.12)$$

elde edilir. Burada $\tilde{P}(y) \equiv P(x(y))$ ve Eş.3.12 denklemi daha uygun bir forma getirilebilir. Bunun için

$$\tilde{P}(y, E) = i\alpha y \phi(y, E)$$

ile verilen bir dönüşüm uygulanır. Türevi alındığında

$$\tilde{P}' = i\alpha \phi(y, E) + i\alpha y \phi'(y, E)$$

olur. Hepsi birlikte Eş.3.12 denkleminde yerine yazılırsa

$$-\alpha^2 y^2 \phi^2 + i\alpha y i\alpha (\phi + y\phi') - \left[E - A^2 - \frac{\alpha^2}{4} y^2 + \left(A + \frac{\alpha}{2} \right) \alpha y \right] = 0 \quad (3.13)$$

elde edilir. Eş.3.13 denklemi $\left(-\frac{1}{\alpha^2 y^2}\right)$ terimi ile çarpılırsa

$$\phi^2 - \alpha^2 y \left(-\frac{1}{\alpha^2 y^2} \right) [\phi + y\phi'] + \frac{1}{\alpha^2 y^2} \left[E - A^2 - \frac{\alpha^2}{4} y^2 + \alpha \left(A + \frac{\alpha}{2} \right) y \right] = 0$$

$$\phi^2 + \frac{1}{y} \phi + \phi' + \frac{1}{\alpha^2 y^2} \left[E - A^2 - \frac{\alpha^2}{4} y^2 + \alpha \left(A + \frac{\alpha}{2} \right) y \right] = 0$$

haline gelir. Sonuç olarak

$$\left(\phi + \frac{1}{2y} \right)^2 + \phi' - \frac{1}{4y^2} + \frac{1}{\alpha^2 y^2} \left[E - A^2 - \frac{\alpha^2}{4} y^2 + \alpha \left(A + \frac{\alpha}{2} \right) y \right] = 0 \quad (3.14)$$

denklemini elde ederiz. Şimdi de

$$\chi(y, E) = \phi(y, E) + \frac{1}{2y}$$

dönüşümü Eş.3.13 denkleminde uygulanırsa

$$\phi = \chi - \frac{1}{2y} ,$$

$$\phi' = \frac{d\phi}{dy} \quad \text{olmak üzere} \quad \phi' = \chi' + \frac{1}{2y^2}$$

$$\chi^2 + \chi' + \frac{1}{4y^2} + \frac{1}{\alpha^2 y^2} \left(E - A^2 - \frac{y^2 \alpha^2}{4} + \left(A + \frac{\alpha}{2} \right) y \alpha \right) = 0 \quad (3.15)$$

Eş.3.15 ile verilen Riccati denkleminde ulaşılır. Buradan $y = 0$ 'ın χ 'nin kutupları olduğu görülür ve sabit kutup için $y = 0$ ' da redizü hesabı yapılır.

$y = 0$ için

$$\chi = \frac{b_1}{y} + a_0 + a_1 y + \dots$$

ve türev ifadesi

$$\chi' = \frac{d\chi}{dy}$$

$$\chi' = -\frac{b_1}{y^2} + a_1 + \dots$$

serisi kullanılır. Bunu Eş.3.15 denkleminde yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\left(\frac{b_1^2}{y^2} + a_0^2 + a_1^2 y^2 + \frac{2b_1 a_0}{y} + \frac{2b_1 a_1}{y} y + 2a_0 a_1 y - \frac{b_1}{y^2} + a_1 + \frac{1}{4y^2} + \right) \quad (3.16)$$

$$\frac{1}{\alpha^2 y^2} \left[E - A^2 - \frac{\alpha^2 y^2}{4} + \left(A + \frac{\alpha}{2} \right) y \alpha \right] = 0$$

elde edilir. Eş.3.16 denklemi düzenlenirse

$$\left(\frac{b_1^2}{y^2} + a_0^2 + a_1^2 y^2 + \frac{2b_1 a_0}{y} + 2b_1 a_1 + 2a_0 a_1 y - \frac{b_1}{y^2} \right) + \quad (3.17)$$

$$\left(a_1 + \frac{1}{4y^2} + \frac{E}{\alpha^2 y^2} - \frac{A^2}{\alpha^2 y^2} - \frac{1}{4} + \left(A + \frac{\alpha}{2} \right) \frac{1}{\alpha y} \right) = 0$$

halini alır. Eş.3.17'de y^n parantezine alma işlemi uygulanırsa

$$y^{-2} : b_1^2 - b_1 + \left[\frac{E}{\alpha^2} - \frac{A^2}{\alpha^2} + \frac{1}{4} \right] = 0$$

$$y^{-1} : 2b_1 a_0 + \frac{1}{\alpha} \left(A^2 + \frac{\alpha}{2} \right) = 0$$

$$y^1 : 2a_0 a_1 = 0$$

$$y^2 : a_1^2 = 0$$

$$y^0 : a_0^2 + 2b_1 a_1 + a_1 - \frac{1}{4} = 0$$

şeklinde denklemler grubu elde ederiz ki b_1, a_0 ve a_1 çözümlerinin tüm bu denklemleri sağlaması gerekir. O halde y^{-2} katsayısından

$$b_1 = \frac{1}{2} \left\{ 1 \pm i \frac{2}{\alpha} \sqrt{|E - A^2|} \right\} \quad (3.18)$$

elde edilir. Dolayısıyla rezidü görüldüğü gibi çift değerlidir. Diğer çözümler $a_1 = 0$ ve $a_0 = \pm \frac{1}{2}$ olarak bulunur. Morse potansiyeli için, süperpotansiyel $W = A - Be^{-\alpha x}$ ile verilir [14]. Eş.3.18 denkleminde doğru işareti bulmak için

$$\lim_{E \rightarrow 0} P(x, E) = i\sqrt{2mW}(x)$$

yada

$$\lim_{E \rightarrow 0} \tilde{P}(y, E) = i\tilde{W}(y)$$

şartı kullanılır ve buradan

$$\lim_{E \rightarrow 0} b_1 = \frac{A}{\alpha} + \frac{1}{2}$$

elde edilir. b_1 değeri için doğru değer

$$b_1 = \frac{1}{2} \left[1 - i \frac{2}{\alpha} \sqrt{|E - A^2|} \right] \quad (3.19)$$

şeklindedir. $y = \infty$ 'da rezidü hesabı için Eş.3.15 denkleminde $y = \frac{1}{t}$ dönüşümü kullanılır ve

$$\tilde{\chi}(t) = \chi\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$\tilde{\chi}^2(t) - t^2 \tilde{\chi}(t) + \frac{1}{4} t^2 + \frac{1}{\alpha^2} \left[(E - A^2) t^2 - \frac{\alpha^2}{4} + \left(A + \frac{\alpha}{2} \right) \alpha t \right] = 0 \quad (3.20)$$

olur. Eş.3.20 denkleminde $\tilde{\chi}(t) = d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + \dots$ serisi kullanılır ve burada $t=0$,
da $\overline{\chi}(t)$ 'nin rezidüsünün $\left(\frac{1}{2\pi}\right) \oint_C p(x, E) dx$ integralinden elde edileceğini seri
çözümü devam edilirse

$$\left[d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + \dots\right]^2 - t^2 [d_1 + 2d_2 + \dots] + \frac{1}{4} t^2 + \frac{1}{\alpha^2} \left[(E - A^2) t^2 - \frac{\alpha^2}{4} + \left(A + \frac{\alpha}{2}\right) \alpha t \right] = 0$$

olarak bulunur. Aynı şekilde t^n gruplandırmasını uygulanırsa

$$d_0 = \pm \frac{1}{2} \quad (3.21)$$

ve

$$d_1 = -\frac{1}{2\alpha d_0} \left[A + \frac{\alpha}{2} \right] \quad (3.22)$$

elde edilir. $\psi(x) = e^{i \int P(x, E) dx}$ ifadesinde, integral ancak $d_0 = -\frac{1}{2}$ için sonsuza
bağlıdır. O halde doğru değer $d_0 = -\frac{1}{2}$ ' dir.

3.2. Kuantizasyon Kuralı ve Özdeğerler

C kompleks x düzleminde dönme noktaları arasındaki reel eksenin hapsedildiği
kontur çizgi olmak üzere

$$J(E) = \frac{1}{2\pi} \oint p(x, E) dx = n\hbar \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.23)$$

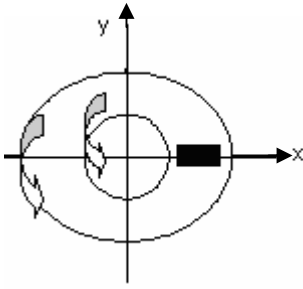
kuantizasyon kuralıdır. $y = \frac{2B}{\alpha} e^{-\alpha x}$ için

$$dy = -2Be^{-\alpha x} dx$$

olur. Eş.3.23 denkleminde yerine yazılırsa

$$J(E) = \frac{i}{2\pi} \oint_{C'} \left(\bar{X} - \frac{1}{2y} \right) dy = n\hbar \quad n = 0,1,2,\dots$$

C' , x -düzleminde C çizgisinin y düzlemindeki görüntüsüdür. (Ancak türevden gelen negatif işaret nedeniyle yön saat yönü tersidir.)



Şekil 3.2. Kompleks düzlemde J integral gösterimi

γ_1 , $y=0$ noktasını içine alan küçük bir çember olarak tanımlanmıştır. Γ_R ise R yarıçaplı daha büyük bir çemberdir. Öyle ki $p(x, E)$ 'nin tüm tekilliklerini içine alır o halde

$$I_{\Gamma_R} = j(E) + I_{\gamma_1} \quad (3.24)$$

burada I_{γ_1} çizgi integrali ($y=0$ ' ı içeren γ_1 konturu için) ve I_{Γ_R}, Γ_R konturu için çizgi integralidir. I_{γ_1} çizgi integralinin değeri $-b_1$ ve $J(E)$ 'nin değeri ise $-n$ 'dir. I_{Γ_R} için ise

$$y = \frac{1}{t}$$

dönüşümünden dolayı $-d_1$ olur. $\frac{1}{t}$ için yeni kontur: Γ_R olup, Γ_R o halde Eş.3.24 denkleminde

$$I_{\Gamma_r} = j(E) + I_{\gamma_1}$$

yazıldıktan sonra artık

$$-d_1 = -b_1 - n \quad (3.25)$$

ifadesine kolaylıkla ulaşılır Eş.3.25 denkleminde Eş.3.19 ve Eş.3.22 denklemleri yazılırsa

$$\frac{1}{2} - \frac{i}{\alpha} \sqrt{|E - A^2|} + n = -\frac{1}{2\alpha d_0} \left[A + \frac{\alpha}{2} \right]$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade düzenlenirse

$$\left(-\frac{i}{\alpha} \sqrt{|E - A^2|} \right)^2 = \left(-n - \frac{1}{2\alpha d_0} \left[A + \frac{\alpha}{2} \right] - \frac{1}{2} \right)^2$$

ve buradan enerji değeri

$$E_n = A^2 - (A - n\alpha)^2 \quad (3.26)$$

olarak elde edilir. Bu sonuç referans [14] ile uyumludur. Eş.3.20'e göre $y=0$ ' da χ 'nin bir kutbu vardır. Aynı zamanda bu denklem dalga fonksiyonunun kutuplarına karşı gelen n tane de hareketli kutup içermektedir. Sonlu kompleks düzlemde başka kutup yoktur. Çok büyük "y" için χ 'nin bağlı olduğu görülür. Liouville teoremini kullanarak

$$\chi = \frac{b_1}{y} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{y - y_k} + c \quad (3.27)$$

Eş.3.27’de b_1 ve c sabittir. b_1 Eş.3.19’de verilmiştir.

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{y - y_k} = \frac{P_n'(y)}{P_n(y)} \quad (3.28)$$

Burada $P_n(y) = \prod_{k=1}^n (y - y_k)$ olmak üzere Eş.3.28 ifadesi Eş.3.27 de yerine yazılır ve

Eş.3.20 denklemini kullanarak

$$\frac{P_n''}{P_n} + 2 \frac{b_1}{y} \frac{P_n'}{P_n} + 2 \frac{P_n'}{P_n} c + 2 \frac{b_1}{y} c + c^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{\alpha y} \left(A + \frac{\alpha}{2} \right) = 0 \quad (3.29)$$

ifadesi elde edilir. Çok büyük y değeri için

$$\frac{P_n''}{P_n} \approx \frac{n(n-1)}{y^2}$$

$$\frac{P_n'}{P_n} \approx \frac{n}{y}$$

kullanıldığında $c = \pm \frac{1}{2}$ elde edilir ve integrallenebilirlik koşulundan $c = -\frac{1}{2}$ olur.

$\frac{1}{y}$ ’nin katsayısına bakılırsa

$$2b_1c + 2nc + \frac{1}{\alpha} \left(A + \frac{\alpha}{2} \right) = 0$$

ifadesi elde edilir. Eş.3.19 ve Eş.3.26’yı kullanırsak

$$yP_n''(y) + \{1 - y + 2(s - n)\}P_n'(y) + nP_n(y) = 0 \quad (3.30)$$

elde edilir ve Eş.3.30 denklemi genel olarak

$$xy'' + (\beta + 1 - x)y' + ny = 0$$

ile verilen Laguerre diferansiyel denklemdir ve

$$P_n(y) \equiv L_n^\beta(y) \quad (3.31)$$

olarak belirlenir Dalga fonksiyonu çözümlerine ulaşabilmek için

$$\psi(x) = e^{i \int P(x,E) dx}$$

kullanılarak

$$\psi(y) = e^{i \int \left[\frac{b_1 + P'}{y} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2y} \right] dy}$$

elde edilebilir, o halde

$$\psi_n(y) = y^{s-n} e^{-\frac{1}{2}y} P_n(x) \quad (3.32)$$

yazılır. Eş.3.31 denklemi Eş.3.32'de yerine yazılırsa

$$\psi_n(y) = y^{s-n} e^{-\frac{1}{2}y} P_n(x) \quad (3.33)$$

ifadesi elde edilir. Burada $s = \frac{A}{\alpha}$ şeklinde tanımlıdır.

3.3. Pöschl-Teller Potansiyeli

Pöschl-Teller potansiyeli

$$V(x) = A^2 + (B^2 + A^2 + A\alpha) \csc h^2 \alpha x - B(2A + \alpha) \coth \alpha x \csc h \alpha x \quad (3.34)$$

ve süperpotansiyel ifadesi

$$W(x) = A \coth \alpha x - B \csc h \alpha x \quad (A < B) \quad (3.35)$$

şeklindedir [19]. Eş.3.6 denkleminde ($\hbar = 1 = 2m$) alınır ve Eş.3.34 ifadesi bu denkleme yerine yazılırsa

$$P^2(x, E) - iP'(x, E) - \left[E - A^2 - (B^2 + A^2 + A\alpha) \csc h^2 \alpha x + B(2A + \alpha) \coth \alpha x \csc h \alpha x \right] = 0$$

elde edilir. Yeni değişken değiştirilirse

$$y = \cosh \alpha x$$

olur. Bu durumda kuantum Hamilton-Jacobi denklemi

$$\tilde{P}^2(y, E) - i\alpha \sqrt{y^2 - 1} \tilde{P}'(y, E) - \left[E - A^2 - (B^2 + A^2 + A\alpha) \frac{1}{y^2 - 1} + B(2A + \alpha) \frac{y}{y^2 - 1} \right] = 0 \quad (3.36)$$

haline gelir. Buradan $\tilde{P}(y) = \tilde{P}(x(y))$ dir. Eş.3.36 denklemini

$$\tilde{P}(y, E) = -i\alpha\sqrt{y^2 - 1}\phi(y) \quad (3.37)$$

Eş.3.37 dönüşümü daha uygun bir forma getirir. Böylece

$$\left(\phi + \frac{1}{2} \frac{y}{y^2 - 1}\right)^2 + \phi' - \frac{1}{4} \frac{y^2}{(y^2 - 1)^2} + \frac{1}{\alpha^2(y^2 - 1)} \left[E - A^2 - (B^2 + A^2 + A\alpha) \frac{1}{y^2 - 1} + B(2A + \alpha) \frac{y}{y^2 - 1} \right] = 0 \quad (3.38)$$

ifadesi elde edilir [19]. Eş.3.38'de

$$\chi = \phi + \frac{1}{2} \frac{y}{y^2 - 1} \quad (3.39)$$

değişken değiştirilmesi yapıldığında Eş.3.38 denklemi

$$\chi^2 + \chi' + \frac{3}{4} \frac{y^2}{(y^2 - 1)^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(y^2 - 1)} + \frac{1}{\alpha^2(y^2 - 1)} \left[E - A^2 - (B^2 + A^2 + A\alpha) \frac{1}{y^2 - 1} + B(2A + \alpha) \frac{y}{y^2 - 1} \right] = 0 \quad (3.40)$$

Eş.3.40 şeklinde yazılır. Buradan $y = \pm 1$ için χ kutupları bulunur. Hareketli kutuplarda klasik dönme noktaları arasında hareket eden kutuplar vardır. $y = +1$ için

$$\chi = \frac{b_1}{y - 1} + a_0 + a_1(y - 1) + \dots \quad (3.41)$$

denklemini bulunur [19]. Eş.3.40'de Eş.3.41 denklemini yazılarak $\frac{1}{(y-1)^2}$ 'li terimin katsayısı

$$b_1 = \frac{1}{2} \left[1 \pm \frac{1}{2\alpha} [2(B-A) - \alpha] \right]$$

şeklinde bulunur ve uygun durumlarda b_1 değerleri tercih edilir.

$$\lim_{E \rightarrow 0} \text{Re } s \tilde{P}(y, E) = i \text{Res } \tilde{W}(y, E)$$

Morse titreştiricisi için süperpotansiyel açıkça gösterilir [19].

$$b_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\alpha} (A - B) \quad (3.42)$$

$y = -1$ için aynı şekilde

$$\chi = \frac{b_2}{y+1} + c_0 + c_1(y+1) + \dots \quad (3.43)$$

olarak bulunur. Eş.3.43 ifadesi Eş.3.40 denkleminde yazılarak $\frac{1}{(y+1)^2}$ 'li terimin katsayısı

$$b_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\alpha} (A + B) \quad (3.44)$$

şeklinde bulunur. Eş.3.41'de görüldüğü gibi hareketli bir kutup vardır. Bu nedenle

$$\chi = \frac{b_1}{y-1} + \frac{b_2}{y+1} + \frac{P'(y)}{P(y)} + c \quad (3.45)$$

şeklindeki forma ulaşılır. Burada b_1, b_2 ve c sabit, P ise polinom olarak alınır [19].

Eş.3.45 ifadesi Eş.3.40 denkleminde yerine yazılırsa

$$c^2 + \frac{2b_1b_2}{y^2-1} + \frac{2b_2}{y+1} \frac{P'}{P} + 2 \frac{P'}{P} c + \frac{2b_1c}{y-1} + \frac{2b_1}{y-1} \frac{P''}{P} + \frac{2b_2}{y+1} c + \frac{1}{2} \frac{1}{y^2-1} + \frac{P''}{P} \frac{3}{8} \frac{1}{y^2-1} + \frac{1}{\alpha^2} (E - A^2) \frac{1}{y^2-1} + \frac{1}{2\alpha^2} (B^2 + A^2 + A\alpha) \frac{1}{y^2-1} = 0 \quad (3.46)$$

ifadesi elde edilir. Eş.3.46'deki farklı terimlere bakıldığında çok büyük y değerleri için katsayı sıfır alınır. Sabit terimin sıfıra gitmesi $c=0$ 'ı verir. Kalan terimler yazılırsa

$$\frac{P''}{P} + \frac{P'}{P} \left[\frac{2b_1}{y-1} + \frac{2b_2}{y+1} \right] + \frac{2b_1b_2}{y^2-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{y^2-1} + \frac{3}{8} \frac{1}{y^2-1} + \frac{1}{\alpha^2} (E - A^2) \frac{1}{y^2-1} + \frac{1}{2\alpha^2} (B^2 + A^2 + A\alpha) \frac{1}{y^2-1} = 0 \quad (3.47)$$

şeklinde olur. Çok büyük y değeri için $P(y) \approx y^n$ gibi davranır ve Eş.3.47'deki denklem kullanılarak $\frac{1}{y^2}$ 'li terimin katsayısını verir [19].

$$2b_1b_2 + 2nb_2 + 2nb_1 + n(n-1) + \frac{3}{8} + \frac{1}{\alpha^2} (E - A^2) + \frac{1}{2\alpha^2} (B^2 + A^2 + A\alpha) - \frac{1}{2} = 0 \quad (3.48)$$

Eş.3.42 ve Eş.3.44 ifadelerini Eş.3.48 denkleminde yerine yazarsak Eş.3.26'yi(enerji tanımını) verir.

Eş.3.26, Eş.3.42 ve Eş.3.44 denklemleri yerine yazılırsa Eş.3.47 denklemi

$$(1 - y^2)P''(y) + [(2s - 1)y - 2\lambda]P'(y) + [n(n - 2s)]P(y) = 0 \quad (3.49)$$

şeklindeki Legendre diferansiyel denkleminde dönüşür. Eş.3.49 denklemi standart Jacobi polinomuna benzer.

$$s = \frac{A}{\alpha}, \quad \lambda = \frac{\beta}{\alpha}$$

şeklinde tanımlanır ve $P(y)$ polinomu

$$P(y) \equiv P_n^{(\alpha, \beta)}(y) = P_n\left(\lambda - s - \frac{1}{2}, -\lambda - s - \frac{1}{2}\right)(y)$$

elde edilir. Pöschl - Teller potansiyeline ait dalga fonksiyonu Morse titreştiricisi ile benzer özellik gösterir [19]. Sonuç olarak

$$\psi(y) = (y-1)^{\frac{(\lambda-s)}{2}} (y+1)^{\frac{-(\lambda+s)}{2}} P_n\left(\lambda - s - \frac{1}{2}, -\lambda - s - \frac{1}{2}\right)(y) \quad (3.50)$$

elde edilir ve literatürdeki değerler ile uyuzur [14].

3.4. Eckart Potansiyeli

Eckart potansiyel

$$V(x) = A^2 + \frac{B^2}{A^2} - 2B \coth \alpha x + A(A - \alpha) \csc h^2 \alpha x \quad (3.51)$$

ile verilir ve buna karşı gelen süperpotansiyel

$$W(x) = -A \coth \alpha x + \frac{B}{A} \quad (B > A^2) \quad (3.52)$$

şeklinde [19].(Bkz.4. Bölüm) Eş.3.6 denkleminde ($\hbar = 1 = 2m$) alınır ve Eş.3.51 ifadesi bu denklemde yerine yazılırsa

$$P^2(x, E) - iP'(x, E) - \left[E - A^2 - \frac{B^2}{A^2} + 2B \coth \alpha x - A(A - \alpha) \csc h^2 \alpha x \right] = 0 \quad (3.53)$$

elde edilir ve yeni bir değişken değiştirilse

$$y = \coth \alpha x$$

kuantum Hamilton-Jacobi denklemi

$$\tilde{P}^2(y, E) - i\alpha(1 - y^2)\tilde{P}'(y, E) - \left[E - A^2 - \frac{B^2}{A^2} + 2By - A(A - \alpha)(y^2 - 1) \right] = 0 \quad (3.54)$$

haline gelir. Buradan $\tilde{P}(y) = \tilde{P}(x(y))$ dir. Eş.3.54 denklemini

$$\tilde{P}(y, E) = -i\alpha(1 - y^2)\phi(y) \quad (3.55)$$

Eş.3.55 dönüşümü daha uygun bir forma getirir [19]. Böylece

$$\left(\phi - \frac{y}{y^2 - 1} \right)^2 + \phi' - \frac{y^2}{(1 - y^2)^2} + \frac{1}{\alpha^2(1 - y^2)^2} \left[E - A^2 - \frac{B^2}{A^2} + 2By - A(A - \alpha)(y^2 - 1) \right] = 0 \quad (3.56)$$

ifadesi elde edilir. Bundan sonra

$$\chi = \phi - \frac{y}{1 - y^2} \quad (3.57)$$

kullanılırsa Eş.3.56'da Eş.3.57'de yerine yazılırsa

$$\chi^2 + \chi' + \frac{y^2}{(1-y^2)^2} + \frac{1}{(1-y^2)} + \frac{1}{\alpha^2(1-y^2)^2} \left[E - A^2 - \frac{B^2}{A^2} + 2By - A(A-\alpha)(y^2-1) \right] = 0 \quad (3.58)$$

elde edilir. $y = \pm 1$ için χ kutupları bulunur. Hareketli kutuplarda klasik dönme noktaları arasında hareket eden kutuplar vardır [19].

$y = +1$ için

$$\chi = \frac{b_1}{y-1} + a_0 + a_1(y-1) + \dots \quad (3.59)$$

denklemini bulunur. Eş.3.58'de Eş.3.59 denklemini yazılır ve $\frac{1}{(y+1)^2}$ 'li terimin katsayısı

$$b_1 = \frac{1}{2} \left[1 \pm \frac{1}{\alpha} \sqrt{\left(A - \frac{B}{A} \right)^2 - E} \right]$$

şeklinde iki değer elde edilir. Morse titreştiricisi için süper potansiyel durumuna göre doğru değer

$$b_1 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{\alpha} \sqrt{\left(A - \frac{B}{A} \right)^2 - E} \right] \quad (3.60)$$

olarak bulunur. Benzer şekilde $y = -1$ için hesaplanırsa

$$b_2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{\alpha} \sqrt{\left(A - \frac{B}{A} \right)^2 - E} \right] \quad (3.61)$$

olur χ Eş.3.45 denklemini formuna getirilmelidir. Eş.3.45 denkleminde Eş.3.57 denklemini yazılırsa benzer şekilde Morse ve Poschl Teller potansiyeli $c=0$ değerinde denklemin sonucu

$$\frac{P''(y)}{P(y)} + \frac{P'(y)}{P(y)} \left[\frac{2b_1}{y-1} + \frac{b_2}{y+1} \right] + \frac{2b_1b_2}{y^2-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{y^2-1} - \frac{1}{2\alpha^2} \frac{1}{y^2-1} \left[\left(E - A^2 - \frac{B^2}{A^2} \right) \right] - \frac{1}{\alpha^2} \frac{1}{y^2-1} A(A-\alpha) = 0 \quad (3.62)$$

olarak elde edilir [19]. Çok büyük y değeri için $P(y) \approx y^n$ gibi davranır ve $\frac{1}{y^2}$ 'li terimin katsayısını verir.

$$2b_1b_2 + 2b_2n + 2b_1n + n(n-1) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\alpha^2} \left(E - A^2 - \frac{B^2}{A^2} \right) + \frac{1}{\alpha^2} A(A-\alpha) = 0 \quad (3.63)$$

Eş.3.60 ve Eş.3.61 ifadelerini Eş.3.63 denkleminde yerine yazılırsa

$$E_n = A^2 - (A+n\alpha)^2 - \frac{B^2}{(A+n\alpha)^2} + \frac{B^2}{A^2} \quad (3.64)$$

elde edilir Eş.3.64 enerji tanımını verir. Eş.3.60, Eş.3.61 ve Eş.3.64 denklemleri kullanılırsa Eckart potansiyeli için Eş.3.63 diferansiyel denklemini yazılır [19].

$$(1-y^2)P''(y) + [-2\alpha - 2(-n-s+1)y]P'(y) + [(-2ns)]P(y) = 0 \quad (3.65)$$

Eş.3.65 denklemini standart Jacobi denklemine benzer. Burada sabitler

$$s = \frac{A}{\alpha}, \quad \lambda = \frac{\beta}{\alpha^2}, \quad \alpha = \frac{\lambda}{n+s} \quad (3.66)$$

şeklinde tanımlanır ve çözümler

$$P(y) \equiv P_n^{(\alpha, \beta)}(y) = P_n^{(S_3, S_4)}(y)$$

şeklinde dir. Eckart potansiyel dalga fonksiyonu

$$\psi(x) = e^{i \int P(x, E) dx}$$

kullanılarak

$$\psi(y) = (y-1)^{\frac{S_3}{2}} (y+1)^{\frac{S_4}{2}} P_n^{(S_3, S_4)}(y) \quad (3.67)$$

şeklinde elde edilir [19]. Bu değerler literatürdeki enerji ve dalga fonksiyonu ile uyuşmaktadır [14].

4. SÜPERSİMETRİK KUANTUM MEKANİĞİNDE KUANTUM HAMILTON JACOBI YAKLAŞIMI

4.1. Süpersimetrik Kuantum Mekaniği

Süpersimetrik kuantum mekaniği Eş.4.1 ve Eş.4.2 ile verilen süpersimetri işlemcileriyle

$$\{Q_i, Q_j\} = \delta_{ij}H \quad i, j=1, 2, \dots, N \quad (4.1)$$

$$[Q_i, H] = 0 \quad (4.2)$$

karakterize edilir. Burada N üretici (generator) adedini, H ise süpersimetrik Hamiltoniyeni, Q_i, Q_j süpersimetri işlemcilerini göstermektedir. Süpersimetrinin antikomütatör olması diğer simetri türlerinden ayrılmasına neden olur. Antikomütatör özelliğinden dolayı; süpersimetrinin, kuantum mekaniğine uygulanması sonucu ortaya çıkan süpersimetrik kuantum mekaniğinde her fiziksel niceliğin bir eşi olacaktır. Gerçek fiziksel nicelikler, bu eşler tarafından teşkil edilir Eş.4.1 [36].

Burada sadece iki işlemci içeren (N=2) basit sistemler göz önüne alınırsa, Q ve Q^+ işlemcileri

$$\begin{aligned} Q &= (Q_1 + iQ_2)/(2)^{\frac{1}{2}} \\ Q^+ &= (Q_1 - iQ_2)/(2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

şeklinde ifade edilebilir. Yeni işlemciler cinsinden Eş.4.1 ifadesi

$$H = \{Q, Q^+\} \quad , \quad Q^2 = 0 \quad , \quad Q^{+2} = 0 \quad (4.4)$$

elde edilir ve Eş.4.2 eşitliği ise

$$[Q, H] = 0 \quad [Q^+, H] = 0 \quad (4.5)$$

şeklinde verilir. Eş.4.4 yardımıyla süpersimetri işlemcileri

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A^- & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad Q^+ = \begin{bmatrix} 0 & A^+ \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

olarak yazılabilir. Burada A^- doğrusal diferansiyel bir işlemci, A^+ ise A^- 'nin adjointidir. Süpersimetrik Hamiltonyen, H_{\mp} eş Hamiltonyenleri cinsinden Eş.4.6 ve Eş.4.4 ifadelerinden

$$H = \begin{bmatrix} A^+ A^- & 0 \\ 0 & A^- A^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^- & 0 \\ 0 & H^+ \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Doğrusal işlemciler cinsinden eş Hamiltoniyenler

$$H_- = A^+ A^- = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + V_-(x) \quad (4.7)$$

$$H_+ = A^- A^+ = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + V_+(x)$$

olarak bulunur. Süpersimetrinin bozulmaması için V_- eş potansiyeline karşılık gelen taban durum dalga fonksiyonunun normalize olması ve taban durum enerjisinin $E_0^{(-)} = 0$ olması gerekir. Bu sistemlerde $V_- = V$ yazılırsa bulunacak spektrumlar tam değerlere sahip olur. Bu tür sistemler için $\psi_0^-(x) \equiv \psi_0(x)$ olacaktır [36].

$$H_- \psi_0 = \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + V_-(x) \right) \psi_0 = 0$$

yazılır. Buradan

$$H_- = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{\psi_0} \frac{d^2 \psi_0}{dx^2} \right) \quad (4.8)$$

olarak ifade edilir. Eş.4.7 ve Eş.4.8 eşitliklerinden, doğrusal işlemciler taban durum dalga fonksiyonları cinsinden

$$A^+ = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}} \left(-\frac{d}{dx} - \frac{1}{\psi_0} \frac{d^2 \psi_0}{dx^2} \right) \quad (4.9)$$

$$A^- = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}} \left(\frac{d}{dx} - \frac{1}{\psi_0} \frac{d^2 \psi_0}{dx^2} \right)$$

ile verilir. Süpersimetrik kuantum mekaniğinde

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}} \left(\frac{1}{\psi_0} \frac{d\psi_0}{dx} \right) \quad (4.10)$$

ifadesi, süperpotansiyel olarak bilinir ve

$$\psi_0(x) = \exp \left(-\frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar} \int^x W(x) dx \right)$$

taban durum dalga fonksiyonu, Eş.4.10'daki gibi süperpotansiyel cinsinden bu şekilde ifade edilir. Doğrusal işlemcileri, süperpotansiyel cinsinden verip Eş.4.9 ve Eş.4.7 eşitlikleri göz önüne alınırsa, süpersimetrik eş potansiyeller

$$V_{\pm}(x) = W^2(x) \pm \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}} W'(x) \quad (4.11)$$

olarak bulunur.

V_{\pm} eş potansiyeller taban durum enerjisi hariç ($E_0^- = 0$), aynı enerji spektrumları bulunur. Bundan dolayı; ψ_n^- ve ψ_n^+ , sırasıyla E_n^- ve E_n^+ özdeğerlerini veren H_- ve H_+ eş Hamiltonyenlerinin özfonksiyonları ile tanımlanır. Böylece $A^- \psi_n^-$, H_+ eş Hamiltonyeninin E_n^- özdeğerli bir özfonksiyonu olur [36]. Aşağıda bu durum işlemci ve özfonksiyonlarla anlatılmıştır.

$$\begin{aligned} H_+(A^- \psi_n^-) &= A^- A^+ (A^- \psi_n^-) = A^- H_- \psi_n^- \\ &= E_n^- (A^- \psi_n^-) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Aynı şekilde $A^+ \psi_n^+$, H_- eş Hamiltonyeninin E_n^+ özdeğerli bir özfonksiyonu olacaktır

$$\begin{aligned} H_-(A^+ \psi_n^+) &= A^+ A^- (A^+ \psi_n^+) = A^+ H_+ \psi_n^+ \\ &= E_n^+ (A^+ \psi_n^+) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Eş.4.12 ve Eş.4.13 denklemlerinden

$$E_n^+ = E_{(n+1)}^-$$

$$\psi_n^+ = [E_{(n+1)}^-]^{-1/2} A^- \psi_{n+1}^-$$

$$\psi_{n+1}^- = [E_n^+]^{-1/2} A^+ \psi_n^+$$

olduğu görülür ve $n = 0,1,2,\dots$ ile verilir Eş.4.3 [36].

4.2. Kuantum Hamilton Jacobi Teorisi ile Süpersimetrimin Birleştirilmesi

Süpersimetrik Kuantum Mekaniği, Schrödinger denkleminin analiz edilmesinde oldukça önemli bir yere sahiptir [20]. Buna ek olarak potansiyel bölgelerini açıklamada da yardımcı olmuştur. Süpersimetrik kuantum mekaniği bilinen çeşitli potansiyellerin cebirsel çözümlerini kolaylaştırır [21].

Bu bölümde kuantum Hamilton-Jacobi formalizmini süpersimetrik kuantum mekaniğinin metotlarından biri olan şekil değişmezliği ile ilişkilendireceğiz. Şekil değişmezliği kullanarak, farklı enerjilere karşı gelen KMF'ın kesirsel doğrusal dönüşümlerle ilişkili olduklarını göstereceğiz.

KHJ yaklaşımında, kuantum mekaniksel sistemin spektrumu denklemin çözümleri ile tanımlanır

$$-ip'(x, \alpha) + p^2(x, \alpha) = E - V(x, \alpha) \equiv p_C^2(x, \alpha) \quad (4.14)$$

Burada $\hbar = 2m = 1$, α potansiyelin dayanıklılık karakteristik katsayısıdır. Eş.4.14 denklemi Schrödinger denklemi ile ilişkilidir [38].

$$-\psi'' + (V(x, \alpha) - E)\psi = 0 \quad (4.15)$$

Eş.4.14 ile Eş.4.15 özdeğer denklemi arasında

$$p = -i \left(\frac{\psi'}{\psi} \right) \quad (4.16)$$

Eş.4.16 fonksiyonu kullanılarak geçiş yapılır [38]. Bu nedenle dalga fonksiyonu

$$\psi(x) \approx e^{i \int P(x) dx}$$

şeklinde olacaktır. Eş.4.11 ifadesi sırasıyla yazılırsa

$$V_-(x, \alpha) = W^2(x, \alpha) - W'(x, \alpha) \quad (4.17)$$

$$V_+(x, \alpha) = W^2(x, \alpha) + W'(x, \alpha) \quad (4.18)$$

$W(x, \alpha)$ reel bir fonksiyondur ve süperpotansiyel olarak isimlendirilir [20]. Hamiltonyen $H_-(x, \alpha)$ için $V_-(x, \alpha)$ potansiyeli seçilir, bunun temel durum özdeğeri $E_0^- = 0$ dir. Benzer şekilde eş Hamiltonyen $H_+(x, \alpha)$ için $V_+(x, \alpha)$ kullanılır. Özdeğer serisi taban durum hariç $E_n^+ = E_{n+1}^-$ şeklinde aynıdır.

Şimdi $H_-(x, \alpha)$ Hamiltoniyenine bakarsak, V_- 'nin özfonksiyonlarını $\psi^{(-)}$ ile göstermek gerekir ve $p^- \equiv -i\psi'^{-} / \psi^{-}$ kuantum momentum fonksiyonuna karşı gelir. Eş.4.14'de Eş.4.17 ifadesi yerine yazılırsa

$$-ip'^{-}(x, \alpha) + p^{-2}(x, \alpha) = E^- - [W^2(x, \alpha) - W'(x, \alpha)] \quad (4.19)$$

elde edilir. $E_0^- = 0$ enerji durumu için Eş.4.19'un çözümü

$$p_{E=0}^{-}(x, \alpha) = iW(x, \alpha) \quad (4.20)$$

şeklindedir. Eş.4.20 denkleminin başlangıç koşulunu sağlaması gerekir. Süpersimetrik eş Hamiltonyen $H_+(x, \alpha)$, benzer şekilde eş kuantum momentum fonksiyonu vardır ve $p^+(x, \alpha)$ ile verilir. Bu ise

$$-ip^{+'}(x, \alpha) + p^{+2}(x, \alpha) = E^+ - [W^2(x, \alpha) + W'(x, \alpha)] \quad (4.21)$$

olarak verilir. Eş.4.21'e karşı gelen Schrödinger denklemi yazılır.

$$H_{\pm}(x, \alpha)\psi^{\pm} = -\psi^{\pm''} + [W^2(x, \alpha) \pm W(x, \alpha)]\psi^{\pm} = E\psi^{\pm} \quad (4.22)$$

Eş.4.19 ve Eş.4.21 denklemleri Eş.4.22 ile ilişkilendirilse kuantum momentum fonksiyonu

$$p^{\pm} = -i \left(\frac{\psi^{\pm'}}{\psi^{\pm}} \right) \quad (4.23)$$

Eş.4.23 şeklinde bulunur. Eş Hamiltonyenleri Eş.4.7 şeklinde ifade edilirse ve Eş.4.9'daki işlemciler yerine yazılırsa

$$\psi^{-} = C^{-} A^{+} \psi^{+} = C^{-} \left(-\psi^{+'} + W\psi^{+} \right) \quad (4.24)$$

$$\psi^{+} = C^{+} A\psi^{-} = C^{+} \left(\psi^{-'} + W\psi^{-} \right) \quad (4.25)$$

eş dalga fonksiyonlar olmak üzere Eş.4.24 ve Eş.4.25 elde edilir [38]. Burada C^{-} ve C^{+} normalizasyon sabitleridir. p^{-} ve p^{+} arasında ilişkiyi bulmak için Eş.4.24 ve Eş.4.25 arasında bağlantı kurulur. Buradan Eş.4.19 ve Eş.4.21 denklemleri kullanılırsa

$$\frac{\psi^+}{\psi^-} = C^+ (W^2 - E + iWp^-) \quad (4.26)$$

$$\frac{\psi^-}{\psi^+} = C^- (-W^2 + E + iWp^+) \quad (4.27)$$

şeklinde elde edilir. Eş.4.26 ve Eş.4.27 denklemleri çarpılır

$$-p^+ p^- = C^+ C^- (W^2 - E + iWp^-) (-W^2 + E + iWp^+) \quad (4.28)$$

ifadesi elde edilir. p^- ve p^+ için Eş.4.28 denklemi çözülürse, ilk olarak C^- , C^+ normalizasyon sabitlerinin çarpımına bakılır $\psi^+ = C^+ A \psi^-$ ve $\psi^- = C^- A^+ \psi^+$ elde edilir [38]. Böylece Eş.4.28 denklemi

$$\langle \psi^+ | \psi^+ \rangle = C^+ \langle \psi^+ | A | \psi^- \rangle = C^+ \langle \psi^+ | A C^- A^+ | \psi^+ \rangle = C^+ C^- E \langle \psi^+ | \psi^+ \rangle$$

haline gelir. Hamiltonyen Eş.4.7'den yazılır. Böylece $C^- C^+ = 1/E$ olur. Bundan dolayı

$$p^+ = \frac{iWp^- + W^2 - E}{-p^- + iW}$$

ya da

$$p^- = \frac{-iWp^+ + W^2 - E}{-p^+ + iW}$$

şeklinindedir. Bu iki denklemin aynı süperpotansiyelle $W(x, \alpha)$ bağlantılı olduğu açıktır. Hamiltoniyenin çözülebilir olması için süperpotansiyelin integrallenebilirlik koşulu olan şekil değişmezliği sağlaması gerekir [38]. KHJ formalizmi üzerinde şekil

değişmezliğin etkisini incelenebilir. Şekil değişmezlik ya da şekil değişmez potansiyeller arasında

$$V^+(x, \alpha_i) = V^-(x, \alpha_{i+1}) + R(\alpha_i) \quad (4.29)$$

gibi bir bağıntı vardır. Eş.4.29'da $R(\alpha_i)$ bir sabittir [21]. İki eş KMF arasında

$$P_{E-R(\alpha_i)}^-(x, \alpha_{i+1}) = P_E^+(x, \alpha_i)$$

olduğu görülür. Buradan

$$P_{E-R(\alpha_i)}^-(x, \alpha_{i+1}) = \frac{iW(x, \alpha_i)p_E^-(x, \alpha_i) + W^2(x, \alpha_i) - E(\alpha_i)}{-p_E^-(x, \alpha_i) + iW(x, \alpha_i)} \quad (4.30)$$

olur ve

$$P_{E-R(\alpha_i)}^-(x, \alpha_i) = \frac{iW(x, \alpha_i)p_{E-R(\alpha_i)}^-(x, \alpha_{i+1}) - W^2(x, \alpha_i) + E(\alpha_i)}{p_{E-R(\alpha_i)}^-(x, \alpha_{i+1}) + iW(x, \alpha_i)} \quad (4.31)$$

benzer bağıntıları elde edilir [38]. Eş.4.30 ifadesi bir kesirsel doğrusal dönüşümdür [27]. Genel olarak bu türden bir dönüşüm

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

ile verilir. f_1 ve f_2 benzer şekilde yazılarak

$$(f_1 \circ f_2)(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

olarak elde edilir. Burada katsayılar arasında

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$$

ilişkisi vardır. Eş.4.31 formundaki herhangi bir dönüşüm f için bir ters dönüşüm f^{-1} ancak ve ancak $ad - bc \neq 0$ ise vardır. Bu ise doğrusal kesirsel, doğrusal dönüşümlerin $PGL(2, \mathbb{C})$ grubuna izomorfik olan bir grup kurmasındandır. 2×2 'lik matrislerin izdüşümsel grubu kompleks durumları vardır. Bu yüzden Eş.4.30 ve Eş.4.31 eş KMF ifadeleri ile ilişkilendirilirse

$$m_1 = \begin{bmatrix} iW(x, \alpha_1) & W^2(x, \alpha_1) - E \\ -1 & iW(x, \alpha_1) \end{bmatrix}$$

ve

$$m_2 = \begin{bmatrix} iW(x, \alpha_2) & W^2(x, \alpha_2) - E + R(\alpha_1) \\ -1 & iW(x, \alpha_2) \end{bmatrix}$$

olur ve buradan kolayca KMF genelleştirilebilir

$$P_{E-R(\alpha_i)}^-(x, \alpha_i) = \frac{A_{n+1} P_{E-\sum_{i=1}^n R(\alpha_i)}^-(x, \alpha_{n+1}) + B_{n+1}}{C_{n+1} P_{E-\sum_{i=1}^n R(\alpha_i)}^-(x, \alpha_{n+1}) + D_{n+1}} \quad (4.32)$$

Burada katsayılar determinanı

$$\begin{bmatrix} A_{n+1} & B_{n+1} \\ C_{n+1} & D_{n+1} \end{bmatrix} = m_n \cdot m_{n-1} \cdots m_1$$

ile verilir ve

$$m_k = \begin{bmatrix} iW(x, \alpha_k) & W^2(x, \alpha_k) - E + \sum_{j=1}^{k-1} R(\alpha_j) \\ -1 & iW(x, \alpha_k) \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

şeklindedir. Burada $E > \sum_{j=1}^{k-1} R(\alpha_j)$ olduğu için Eş.4.32'den dolayı, m_k tekil olmayan bir matristir [38].

5. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu tezde KHJ formalizmi çerçevesinde kuantum mekaniğinde bir boyutta tam çözülebilir modeller çalışıldı. Tam çözülebilir modellerin özdeğer ve özfonksiyonları, kompleks değişkenler teorisi kullanılarak sade bir metot ile elde edildi. KMF'nun tekil yapısı bu önemli yer tutar. Bunun yanı sıra, KHJ denklemini Riccati denklemine dönüştürmek için değişken değiştirmesine ihtiyaç duyuldu. Bu durumda, sabit kutuplar ve karşı gelen rezidüleri belirlemek oldukça kolaydır. Zorluk, hareketli kutupların sayısı ve konumlandığı bölgeden kaynaklanır. Literatürde çalışılan tam ve kısmi çözülebilir potansiyeller için hareketli kutup noktalarının sayısının sonlu olduğu görülmüştür. Ayrıca, KMF'nun bağımsız değişkenlerin büyük değerleri için davranışlarının KHJ denkleminde belirlenmesi oldukça kolaydır. Bu tezde, böylelikle KMF'nun uygun değişken değiştirmesi sonucu rasyonel bir fonksiyon olduğu görülmüştür.

Leacock and Padgett tarafından verilen kuantizasyon koşulu bir boyutlu problemlere indirgenebilecek sistemlere uygulanabilir. Bu tezle birlikte gelecekte daha yüksek boyutlarda ama ayırt edilemeyen sistemler için tam kuantizasyon koşulunun formülasyonu, yarı-klasik sistemlere uygulamaları ve hatta kaotik sistemlere olan uygulamalar oldukça ilginç olacaktır. Bu tezde, KHJ yaklaşımının yalnızca bağlı durumlara uygulanabilir olduğu görülmüştür. Sürekli enerji çözümleri için bu yaklaşım için bir değişiklik yapılması gerekir. Metodun Schrödinger denklemini çözmeksizin ve dalga fonksiyonlarını da elde etmeksizin enerji özdeğerlerine ulaşılmasına olanak vermesi diğer birçok metoda göre üstünlük sağladığı görülmüştür.

Bağlı durumlarla ilgili spektrum hesaplarının yanı sıra, KHJ formalizminin Süpersimetrik kuantum mekaniği ile ilgili ilişkisi de incelendi. Doğrusal kesirsel dönüşümler ile süpersimetrik eş potansiyellerin kuantum momentum fonksiyonları ilişkilendirildi. Matris temsili kullanılarak, herhangi bir şekil değişmez potansiyel için kuantum momentum tekrar bağıntıları türetildi. Grup teorisi temeli ile süpersimetrik KMF'nun bağlantısı KMF'nun özelliklerini daha derin olarak

anlaşılmasına olanak verir. Gelecek çalışmalarda kesirsel Süpersimetrik kuantum mekaniği ile kuantum Hamilton Jacobi arasındaki bağlantının geliştirilmesi ile oldukça verimli çalışmalar yapılabilmesi mümkündür.

KAYNAKLAR

1. Bhalla, R. S., Kapoor, A. K., Panigrahi, P. K., “Exactness of the supersymmetric WKB approximation scheme” , *Int. J. Mod. Phys. A.*, 54: 951-954 (1996).
2. Bhalla, R. S., Kapoor, A. K., Panigrahi, P. K., “Quantum Hamilton–Jacobi formalism and the bound state spectra” , *Am. J. Phys.*, 65: 1187-1194 (1997).
3. Bhalla, R. S., Kapoor, A. K., Panigrahi, P. K., “ Energy Eigenvalues for a Class of one-dimensional potentials via quantum Hamilton–Jacobi formalism” , *Mod. Phys. Lett. A.*, 12: 295-306 (1997).
4. Ranjani, S. S., Kapoor, A. K., Panigrahi, P. K., “Band edge eigenfunctions and eigenvalues for periodic potentials through the quantum Hamilton-Jacobi formalism” , *Mod. Phys. Lett. A.*, 19: 2047-2058 (2004).
5. Ranjani, S. S., Kapoor, A. K., Panigrahi, P. K., “ An explicit realization of fractional statistics in one dimension” , *Ann. Phys.*, 324(5): 1176-1183 (2005).
6. Ranjani, S. S., Kapoor, A. K., Panigrahi, P. K., “Periodic Quasi-Exactly Solvable Models” , *Int. J. Theor. Phys.*, 44: 1167-1176 (2005).
7. Ranjani, S. S., Kapoor, A. K., Panigrahi, P. K., “Quantum Hamilton–Jacobi analysis of PT symmetric Hamiltonians” , *Int. J. of Mod. Phys. A.*, 20: 4067-4077 (2005).
8. Geojo, K. G., Ranjani, S. S., Kapoor, A. K., “A study of quasi-exactly solvable models within the quantum Hamilton-Jacobi formalism” , *J. Phys A: Math. Gen.*, 36(16): 4591-4598 (2003).
9. Ranjani, S. S., Geojo, K. G., Kapoor, A. K., Panigrahi, P. K., “Band edge eigenfunctions and eigenvalues for periodic potentials through the quantum Hamilton–Jacobi formalism” , *Mod. Phys. Lett. A.*, 19 (27): 1457-1468 (2004).
10. Yeşiltaş, Ö., Sever, R., “Exponential type complex and non-Hermitian potentials within quantum Hamilton–Jacobi formalism” , *J. Math. Chem.*, 43(3): 921-931 (2008).
11. Yeşiltaş, Ö., Ocak, S. B., “The generalized PT -symmetric Sinh-Gordon potential solvable within quantum Hamilton–Jacobi formalism” , *Int. J. Theor. Phys.*, 47: 415-420 (2008).
12. Ocak, S. B., Yeşiltaş, Ö., Demircioğlu, B., “Communications in statistics-theory and methods” , *Int. J. Theor. Phys.*, 47: 1865-1876 (2008).

13. Yeşiltaş, Ö., Demircioğlu, B., “Quantum Hamilton–Jacobi approach to two dimensional singular oscillator” , *Chin. Phys. Lett.*, 25: 1935-1940 (2008).
14. Sukhatme, G. S., “Supersymmetric Quantum Mechanics and Large- N Expansions”, *Phys. Rev. Lett.*, 54(20): 2184-2187 (1985).
15. Goldstein, H., “Classical Mechanics” 3rd ed., *Wesley*, London, 438-455 (1980).
16. Kibble, T. W., Berkshire, F. H., “Klasik Mekanik” , *Palme*, Ankara, 186-221 (1999).
17. Karaoğlu, B. “Fizikte ve Mühendislikte Matematik Metotlar” , *Bilgitek*, İstanbul, 113-167 (1997).
18. Leacock, R. A., Padgett, M., “On the quantum Hamilton Jacobi formalism”, *Phys.Rev. D.*, 28: 2491-2502 (1983).
19. Geojo K G., “Quantum Hamilton-Jacobi study of wave functions and energy spectrum of solvable and Quasi-Exactly solvable models” , Thesis a Doctor , *University of Hyderabad*, 40: 19-32 (2003).
20. Cooper, F., Khare, A., Sukhatme, U., “Supersymmetry in Quantum Mechanics”, *Phys. Rep.*, 20(373): 251-267 (1995).
21. Dutt, R., Khare, A., Sukhatme, U., “Supersymmetry, shape invariance and exactly solvable potentials” , *Am. J. Phys.*, 56: 163-168 (1988).
22. Leacock, R. A., Padgett, M., “Action-angle formulation of angular momentum” , *J. Phys. Rev. Lett.*, 50: 2491-2502 (1983).
23. Leacock, R. A., Padgett, M., “Hamilton-Jacobi/action-angle quantum mechanics”, *Phys. Rev. D.*, 28: 2491-2502 (1983).
24. Leacock, R. A., Padgett, M., “Action-angle formulation of angular momentum” , *Phys. Rev. A.*, 33: 2775-2777 (1986).
25. Leacock, R. A., Padgett, M., “Quantum action-angle-variable analysis of basic systems” , *Am. J. Phys.*, 55 (3): 261-264 (1986).
26. Gozzi, E., “Classical and quantum adiabatic invariants” , *Phys. Lett. B.*, 165(4): 351-354 (1985).
27. Fisher, S. D., “Complex Variables” , *Wadsworth* Belmont 199-230 (1986).
28. Dresden, G.P., June 20, *Math. Mag.*, 77 (3): 211-218 (2004).

29. Beasley, C., Heckman, J., Vafa, C., “GUTs and exceptional branes in F-theory-II.Experimental predictions” , *J. High Energy Phys.*, 20: 59-60 (2009).
30. Grundland, M.A., Hariton, J.A., “Invariant solutions of the supersymmetric-Gordon equation” , *J. Phys. A: Math. Theor.*, 42: 335203-335226 (2009).
31. Papadopoulos, G., “Invariant Killing spinors in 11D and type II supergravities” , *Class. Quantum Grav.*, 26: 155004-155022 (2009).
32. Suzko, A., Halberg, A. S., “Supersymmetry and Darboux transformations for the generalized Schrödinger equation” , *J. Phys. A: Math. Theo.*, 72: 858-865 (2009).
33. Calzada, J. A., Negro, J., M A del Olmo, “The 5th International Symposium in Quantum Theory and Symmetries” , *J. Phys. Conf Ser.*, 175: İspanya, 1-16 (2009).
34. Quesne, C., “Exceptional orthogonal polynomials, exactly solvable potentials and supersymmetry” , *J. Phys. A: Math. Theor.*, 41: 39-45 (2008).
35. Balantekin, A. B., “An algebraic construction of generalized coherent states Associated with q -deformed models for primary shape-invariant systems” , *J. Phys. A: Math.Theor.*, 40: 3463-3480 (2007).
36. Gönül, B., “Süpersimetrik WKB metodunun bazı potansiyel uygulaması.” , Yüksek Lisans Tezi , *Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara, 14-27 (1989).
37. Cooper, F., Khare, A., Sukhatme, U., “Supersymmetry in Quantum Mechanics” , *London World Scientific* Singapore, 1-55 (2001).
38. Rasinariu, C., Dykla, J., Gangopadhyaya, A., “Exactly solvable systems and the quantum Hamilton–Jacobi formalism” , *Phys. Lett. A.*, 338 (3): 197-202 (2005).
39. Kreyszing, E., “Second-Order linear odes” , Advanced Engineering Mathematics 9th ed. , *Wiley*, Ohio, 58-69 (2006).

ÖZGEÇMİŞ**Kişisel Bilgiler**

Soyadı, adı : ERDOĞAN, Ahmet Ferhat
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 04.03.1980 Ankara
Medeni hali : Evli
Telefon : 0 (312) 418 82 21
Faks : 0 (312) 418 82 21
e-mail : ferhaterdogan_99@yahoo.com.

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek lisans(Tezsiz)	Gazi Üniversitesi /Fizik Öğretmenliği Bölümü	2004
Lisans	Gazi Üniversitesi/ Fizik Bölümü	2002
Lise	Keçiören Lisesi	1996

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2003-2006	Net Dershanesi	Öğretmen
2006-2009	Mavi Limit Dershanesi	Kurucu

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Basketbol , Yüzme, Bilgisayar teknolojileri,