T.C.
GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİLİNEN BK UZAYLARI İLE bv^p DİZİ UZAYI ARASINDAKİ MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Hacer BİLGİN

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Yrd. Doç. Dr. Osman ÖZDEMİR
2010

T.C.
GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİLİNEN BK UZAYLARI İLE bv^p DİZİ UZAYI ARASINDAKİ MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Hacer BİLGİN

TOKAT
2010

Yrd. Doç. Dr. Osman ÖZDEMİR danışmanlığında, Hacer BİLGİN tarafından hazırlanan bu çalışma 03/08/2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU İmza:

Üye: Yrd. Doç. Dr. Osman ÖZDEMİR İmza:

Üye: Doç. Dr. Eşref ORUCOV İmza:

Üye : Doç. Dr. Naim ÇAĞMAN İmza:

Üye : Doç. Dr. Ercan TUNÇ İmza:

Yukarıdaki sonucu onaylarım

(İmza)

Prof. Dr. Metin YILDIRIM

Enstitü Müdürü

06/08/2010

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlâk kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Hacer BİLGİN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BİLİNEN BK UZAYLARI İLE bv^p DİZİ UZAYI ARASINDAKİ MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Hacer BİLGİN

Gaziosmanpaşa Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Osman ÖZDEMİR

Bu çalışma, altı bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, çalışma için gerekli temel tanım ve teoremler verildi. İkinci bölümde; Malkowsky ve ark. (2002) tarafından tanımlanan, bv^p $(1 \leq p < \infty)$ dizi uzayı kavramı ele alındı. Ayrıca, bu dizi uzayının bazı lineer ve topolojik özellikleri incelendi ve Schauder bazı ele alındı. Çalışmanın üçüncü bölümünde, bu dizi uzayının β-duali ile ilgili teoremin ifade ve ispatı verildi. Çalışmanın dördüncü bölümünde ise, Malkowsky ve ark.(2002) tarafından karakterize edilen matris dönüşümleri ile ilgili teoremlerin ifade ve ispatları verildi. Çalışmanın beşinci bölümünde, bilinen BK uzayları ile bv^p dizi uzayı arasındaki bir matris dönüşümünün, kompakt bir operatör olması için gerek ve yeter şartları vermek için non-kompaktlık Haussdorff ölçümü kullanıldı. Çalışmanın son bölümünde, sonuç verildi.

2010, 78 sayfa

Anahtar kelimeler: Fark Dizi Uzayı, Schauder Baz, $\beta-$ Dual, Matris Dönüşümleri, Non-Kompaktlık Ölçümü

ABSTRACT

Ms Thesis

MATRIX TRANSFORMATIONS BETWEEN THE SEQUENCE SPACE bv^p AND CERTAIN BK SPACES

Hacer BİLGİN

Gaziosmanpasa University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Asst. Prof. Dr. Osman ÖZDEMİR

This study consists of six chapters. In the first chapter, the necessary basic definitions and theorems for this study are given. In the second chapter, the concept of sequence space bv^p $(1 \leq p < \infty)$ presented by Malkowsky et al. (2002) is studied. Also, some linear and topological properties of this sequence space are analyzed and a Schauder basis of this sequence space is given. In the third chapter, the expression and proof of the theorem related with the β- dual of this sequence space. The expression and proof of the theorems related with matrix transformations characterized by Malkowsky et al. (2002) are given in the fourth chapter. In the fifth chapter of this study, the Hausdorff measure of noncompactness is applied to give necessary and sufficient conditions for a matrix map between the sequence space bv^p and certain BK spaces to be a compact operator. And finally, the result is given at the last chapter of the study.

2010, 78 pages

Key words: Difference Sequence Space, Scahauder Basis, β Dual, Matrix Transformations, Measure of Noncompactness

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum bu çalışmanın planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle çalışmamı bilimsel temeller ışığında şekillendiren Sayın Yrd.Doç.Dr. Osman ÖZDEMİR'e, sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmalarım sırasında desteklerini aldığım başta bölüm başkanımız Sayın Prof.Dr. Oktay MUHTAROĞLU olmak üzere bölümdeki tüm hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca bu çalışmanın yapılması sırasında, değerli olduğunu bildiğim vaktini, benim için ayıran Sayın Arş. Gör. Serkan DEMİRİZ'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bilimsel çalışmalarda desteğini hiç esirgemeyen TUBİTAK-BİDEB'e yüksek lisans öğrenimim boyunca maddi destek sağladığı için sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bugünlere gelmeme vesile olan pek kıymetli annem Tütiye BİLGİN, en büyük destekçim babam Alineci BİLGİN, abim Erkan BİLGİN, yengem Şengül BİLGİN ve dayım Gürbüz OKUMUŞ'a desteklerinden dolayı tüm kalbimle teşekkür ederim.

Hacer BİLGİN
Ağustos 2010

İÇİNDEKİLER

SİMGE ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N}$	:	Doğal Sayılar Cümlesi
$\mathbb{N}_0$	:	Genişletilmiş Doğal Sayılar Cümlesi
$\mathbb{Z}$	:	Tamsayılar Cümlesi
$\mathbb{R}$	:	Reel Sayılar Cümlesi
$\mathbb{C}$	:	Kompleks Sayılar Cümlesi
$\forall$	:	Her
$\exists$	:	En Az Bir
$\rightarrow$	:	İse
$\Leftrightarrow$	:	Mantıksal Denk
$\leq$	:	Büyük Olmayan
$\geq$	:	Küçük Olmayan
$\veebar$	:	Ya da
$\subseteq$	:	Alt Cümle
$\cup$	:	Birleşim
$\cap$	:	Arakesit
$\in$	:	Elemanıdır
sup	:	En Küçük Üst Sınır
inf	:	En Büyük Alt Sınır
$\overline{A}$	:	A Cümlesinin Kapanışı
ω	:	Bütün Reel ya da Kompleks Terimli Dizilerin Uzayı
c_0	:	Sıfıra Yakınsak Dizilerin Uzayı
c	:	Yakınsak Dizilerin Uzayı
ℓ_∞	:	Sınırlı Dizilerin Uzayı
ϕ	:	Sonlu Dizilerin Uzayı
cs	:	Yakınsak Seri Teşkil Eden Dizilerin Uzayı

(X,Y)	:	X'i Y İçine Dönüştüren Bütün Matrislerin Cümlesi
$L(X,Y)$	:	X'ten Y İçine Tanımlı Bütün Lineer Operatörlerin Cümlesi
$B(X,Y)$	:	X'ten Y İçine Tanımlı Bütün Sınırlı Lineer Operatörlerin Cümlesi
$K(X,Y)$	:	X'ten Y İçine Tanımlı Bütün Kompakt Operatörlerin Cümlesi
$\|a\|$	:	a'nın Normu
X^*	:	X'in Sürekli Duali
$X^\dagger$	:	X'in Cebirsel Duali
X_A	:	A Matrisinin X Cümlesindeki Etki Alanı
$d_{Y\|Y_1}$	:	d_Y Metriğinin Y_1'deki Alt Metriği
$clos_{Y_1}(S)$	:	S Kümesinin Y_1 Metrik Uzayındaki Kapanışı
$\mathcal{M}_X$	:	X Metrik Uzayının Boştan Farklı Bütün Sınırlı Altcümlelerinin Cümlesi

1. GİRİŞ

Reel ya da kompleks terimli bütün dizilerin cümlesi, ω ile gösterilecektir. ω'nın herhangi bir alt uzayına bir dizi uzayı denir. ℓ_∞, c ve c_0 ile sırasıyla bütün sınırlı, yakınsak ve sıfıra yakınsak olan dizilerin cümlesi gösterilecektir. bs ve cs ile de sırasıyla bütün sınırlı ve yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı gösterilecektir. Ayrıca, $1 \leq p < \infty$ için $p-$inci dereceden mutlak yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı ℓ_p ile gösterilecektir.

Yeni bir dizi uzayı inşaa etmek ve bu uzayın diğer uzaylar arasındaki yerini belirleyecek şekilde kapsama bağıntılarını vermek, yeni dizi uzayının $\alpha-, \beta-$ ve $\gamma-$ duallerini hesaplamak, bu dizi uzayından diğer bilinen dizi uzaylarına matris dönüşümlerini karakterize etmek, dizi uzayları ile ilgili önemli problemler arasındadır.

X, bir dizi uzayı ve $A = (a_{nk})$, kompleks sayıların herhangi bir matrisi olmak üzere, $x = (x_k) \in X$ ve $\forall n \in \mathbb{N}_0$ için

$$(Ax)_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$$

serileri yakınsak ise

$$Ax = ((Ax)_n)$$

dizisine, x dizisinin A-dönüşümü denir.

λ, herhangi bir dizi uzayı ve A, bir sonsuz matris olsun.

$$\lambda_A = \{x = (x_k) \in \omega : Ax \in \lambda\}$$

cümlesine, A matrisinin etki alanı denir. λ_A cümlesi, ω üzerinde tanımlı koordinatsal toplama ve skalarla çarpma işlemleri altında bir vektör uzayıdır, dolayısı ile bir dizi uzayıdır.

Bir sonsuz matrisin bir λ dizi uzayı üzerindeki etki alanını kullanarak, çalışma yapanların başında gelen Ng -Lee, 1978'de birinci mertebeden Cesàro matrisinin ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ üzerindeki etki alanını kullanarak Mutlak Olmayan Tipten Cesàro Dizi Uzayı adını verdiği X_p dizi uzayını inşaa etti. Bu çalışmayı takiben Wang, Nörlund ortalamasının ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ üzerindeki etki alanını; Malkowsky, Riesz ortalamasının ℓ_∞, c ve c_0 üzerindeki etki alanını kullanarak yeni dizi uzayları inşaa ettiler. Daha yakın zamanlarda, Altay ve Başar, $r-$ inci mertebeden Euler ortalamasına karşılık gelen $E^{(r)}$ üçgensel matrisinin c ve c_0 üzerindeki etki alanlarını kullanarak $e_0^{(r)}$ ve $e_c^{(r)}$ dizi uzaylarını tanımlayıp, bu uzayları incelediler.

$$\Delta_{nk} = \begin{cases} (-1)^{n-k}, & n-1 \leq k \leq n, \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

ile tanımlı matrise fark matrisi denir. Bu çalışmada, fark matrisinin ℓ_p dizi uzayı üzerindeki bv^p ile gösterilen etki alanı incelenecektir.

λ ve μ herhangi iki dizi uzayı ve $A = (a_{nk})$ bir sonsuz matris olsun. Eğer her $x \in \lambda$ için $((Ax)_n)$ dizisi mevcut ve μ uzayında ise; A, λ uzayından μ uzayına bir matris dönüşümü tanımlar denir. λ uzayını, μ uzayına taşıyan bütün sonsuz matrislerin sınıfı, (λ, μ) ile gösterilir. A sonsuz matrisinin λ uzayındaki dizileri μ dizi uzayına taşıması için hangi şartlara sahip olması gerektiği problemi, 1911 yılında, Alman Matematikçisi O. Toeplitz'e kadar dayanır. Bu şartların belirlenmesine, ilgili matris sınıfının karakterizasyonu denir. İncelenen bu çalışmada $(bv^p, \ell_\infty), (bv^p, c)$ (bv^p, c_0), (bv^p, ℓ_1) ve (bv^p, bv) matris sınıfları da karakterize edilecektir.

BK- uzayları teorisi, bilinen dizi uzayları arasındaki matris karakterizasyonlarının yapılmasında kullanılan çok önemli bir araçtır. Bu teoride kullanılan en önemli sonuç ise, "BK- uzayları arasındaki matris dönüşümlerinin sürekli olmasıdır." BK- uzayları arasındaki matris dönüşümünün bir kompakt operatör tanımlaması için matris üzerine ne gibi şartlar konulması gerektiğinin belirlemesi problemi oldukça önemlidir. Çalışmamızın son bölümünde, bv^p uzayından bilinen BK- uzaylarına matris dönüşümlerinden yola çıkarak, non-kompaktlık Hausdorf ölçümü yardımıyla ilgili matris dönüşümlerine karşılık gelen lineer operatörün kompakt olabilmesi için hangi şartların gerektiği ile ilgili teoremler ifade ve ispat edilecektir.

1.1 Temel Tanım ve Teoremler

Bu kısımda, çalışma boyunca kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilecektir.

Teorem 1.1.1. $E \subset \mathbb{R}$, sınırlıdır $\Leftrightarrow$

$$\exists K > 0 \ni \forall x \in E, |x| \leq K$$

kalır. (Anderson, 1970).

Teorem 1.1.2. $E \subset \mathbb{R}$, sınırlı bir cümle olsun. Bu takdirde; E'nin üst sınırları içerisinde bir en küçüğü, alt sınırları içerisinde bir en büyüğü vardır (Anderson, 1970).

Tanım 1.1.1. A, reel sayılar cümlesinin üstten sınırlı bir alt cümlesi olsun. A cümlesinin üst sınırlarının en küçüğüne, A cümlesinin, en küçük üst sınırı veya supremumu denir ve $\sup A$ ile gösterilir. A cümlesinin alt sınırlarının en büyüğüne, A cümlesinin en büyük alt sınırı veya infimumu denir ve $\inf A$ ile gösterilir.
Bu tanıma göre,
(i) $\forall x \in A, \quad x \leq \sup A$
(ii) $\forall \epsilon > 0, \exists x_0(\epsilon) \in A \ni x_0(\epsilon) > \sup A - \epsilon$
kalır.
(iii) $\forall x \in A, \quad \inf A \leq x$
(iv) $\forall \epsilon > 0, \exists x_0(\epsilon) \in A \ni x_0(\epsilon) < \inf A + \epsilon$
(Anderson, 1970).

Tanım 1.1.2. X, boştan farklı bir cümle olsun.

M1) $\forall x, y \in X, d(x, y) \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

M2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M3) $\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$

M4) $\forall x, y, z \in X, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

şartlarını sağlayan

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu varsa, d'ye X için bir metrik, (X, d) ikilisini de metrik uzay denir. Eğer M2 şartının sadece yeterlilik kısmı sağlanırsa d'ye yarı-metrik, (X, d) ikilisine de yarı-metrik uzay denir (Kreyzig, 1978).

Tanım 1.1.3. (X, d) bir metrik uzay ve $x = (x_n)$ X'de bir dizi ve $\alpha \in X$ olsun. Eğer $\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} \ni \forall n > N(\epsilon)$,

$$d(x_n, \alpha) < \epsilon$$

kalıyorsa, (x_n) dizisine yakınsak, $\alpha \in X$'e, (x_n) dizisinin limiti denir (Kreyzig, 1978).

Tanım 1.1.4. (X, d) bir metrik uzay ve $x = (x_n)$ X'de bir dizi olsun. Eğer $\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} \ni \forall n, m > N(\epsilon)$,

$$d(x_n, x_m) < \epsilon$$

kalıyorsa, (x_n) dizisine X'de bir Cauchy dizisi denir (Kreyzig, 1978).

Teorem 1.1.3. X, bir metrik uzay ve (s_n), X'de yakınsak herhangi bir dizi olsun. Bu takdirde (s_n), Cauchy dizisidir (Kreyzig, 1978).

Tanım 1.1.5. (X, d), bir metrik uzay olsun. Eğer X'de her Cauchy dizisi, X'de bir noktaya yakınsıyorsa, X'e tam metrik uzay denir (Kreyzig, 1978).

Tanım 1.1.6. X, boştan farklı bir cümle ve F, reel veya kompleks sayıların bir cismi olsun.

$$\begin{aligned} + : X \times X &\to X \\ (x, y) &\to +(x, y) = x + y \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \cdot : F \times X &\to X \\ (\lambda, x) &\to \cdot(\lambda, x) = \lambda x \end{aligned}$$

fonksiyonları;

L1) $\forall x, y \in X, x + y \in X$

L2) $\forall x, y \in X, x + y = y + x$

L3) $\forall x, y, z \in X, (x + y) + z = x + (y + z)$

L4) $\forall x \in X, x + \theta = x$ olacak şekilde bir tek $\theta \in X$ vardır.

L5) Her bir $x \in X, x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir tek $(-x) \in X$ vardır.

L6) $\forall x \in X, 1.x = x$

L7) $\forall \lambda, \mu \in F, \forall x \in X, \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

L8) $\forall \lambda \in F, \forall x, y \in X, \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

L9) $\forall \lambda, \mu \in F, \forall x, y \in X, (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

aksiyomlarını sağlıyorsa, X cümlesine F cismi üzerinde bir lineer (vektör) uzay denir ve $(X, +, \cdot)$ ile gösterilir. Eğer $F = \mathbb{R}$ ise X'e reel vektör uzayı, $F = \mathbb{C}$ ise X'e kompleks vektör uzayı denir (Kreyzig, 1978).

Tanım 1.1.7. X, F cismi üzerinde bir lineer uzay ve $Y \subseteq X$ olsun. Bu takdirde; $\forall x, y \in Y$ ve $\forall \alpha, \mu \in \mathbb{F}$ için $\alpha x + \mu y \in Y$ oluyorsa Y'ye, X uzayının bir alt uzayıdır denir (Kreyzig, 1978).

Tanım 1.1.8. X, F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Eğer,

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \|.\|(x) = \|x\| \end{aligned}$$

fonksiyonu,

N1) $\forall x \in X, \|x\| \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta,$

N3) $\forall x \in X$ ve $\forall \alpha \in F, \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|,$

N4) $\forall x, y \in X \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

aksiyomlarını sağlıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X, üzerinde bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay denir (Kreysig, 1978).

Örnek 1.1.1. $c_0, c, \ell_p, \ell_1, \ell_\infty$ ve bv dizi uzayları üzerlerinde tanımlı doğal normları altında birer normlu uzaydırlar (Kreyzig, 1978).

Tanım 1.1.9. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$, X'de bir dizi ve $\alpha \in X$ olsun. Eğer $\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} \ni \forall n > N(\epsilon)$,

$$\|x_n - \alpha\| < \epsilon$$

kalıyorsa, (x_n) dizisine yakınsak, $\alpha \in X$'e (s_n) dizisinin limiti denir (Kreyzig, 1978).

Tanım 1.1.10. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$ X'de bir dizi olsun.
Eğer $\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} \ni \forall n, m > N(\epsilon)$,

$$\|x_n - x_m\| < \epsilon$$

kalıyorsa, (x_n) dizisine X'de bir Cauchy dizisi denir (Kreyzig, 1978).

Tanım 1.1.11. $(X, \|\cdot\|)$, bir normlu uzay olsun. Eğer, X'de alınan her Cauchy dizisi, normdan elde edilen metriğe göre X uzayında bir noktaya yakınsıyorsa, X uzayına Banach uzayı denir (Kreyzig, 1978).

Tanım 1.1.12. X, bir lineer uzay ve d, X üzerinde bir metrik olsun. Eğer, X üzerinde cebirsel işlemler sürekli fonksiyonlar ise, yani (x_n) ve (y_n), X'de iki dizi (λ_n)'de skalerlerin bir dizisi olmak üzere

$$d(x_n, x) \to 0 \text{ ve } d(y_n, y) \to 0 \Rightarrow d(x_n + y_n, x + y) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

ve

$$\lambda_n \to \lambda \text{ ve } d(x_n, x) \to 0 \Rightarrow d(\lambda_n x_n, \lambda x) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

ise, (X, d) metrik uzayına lineer metrik uzay denir (Wilansky, 1964).

Tanım 1.1.13. X, lineer metrik uzay olsun. Eğer her bir $x \in X$ için,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n b_n$$

olacak şekilde skalerlerin bir tek (λ_n) dizisi mevcut ise (b_n) dizisine, X için bir Schauder baz denir (Wilansky, 1964).

Tanım 1.1.14.

$$\left\{x = (x_k) \in \omega : \sup_k |x_k| < \infty\right\}$$
$$\left\{x = (x_k) \in \omega : \lim_{k\to\infty} x_k \text{ - mevcut}\right\}$$
$$\left\{x = (x_k) \in \omega : \lim_{k\to\infty} x_k = 0\right\}$$

cümlelerine, sırasıyla sınırlı, yakınsak ve sıfıra yakınsak dizi uzayları denir ve ℓ_∞, c ve c_0 ile gösterilir (Maddox, 1988).

Tanım 1.1.15.

$$\left\{x = (x_k) \in \omega : \sum_k x_k - \text{yakınsak}\right\}$$
$$\left\{x = (x_k) \in \omega : \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right) \in \ell_\infty\right\}$$
$$\left\{x = (x_k) \in \omega : \sum_k |x_k| < \infty\right\}$$
$$\left\{x = (x_k) \in \omega : \sum_k |x_k|^p < \infty\right\}$$
$$\left\{x = (x_k) \in \omega : \sum_k |x_k - x_{k-1}| < \infty\right\}$$

cümlelerine, sırasıyla, yakınsak seri teşkil eden bütün dizilerin dizi uzayı, sınırlı kısmi toplamlar dizisine sahip bütün dizilerin dizi uzayı, mutlak yakınsak seri teşkil eden bütün dizilerin dizi uzayı, $1 \leq p < \infty$ olmak üzere p. kuvvetleri mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin dizi uzayı ve sınırlı salınımlı dizilerin dizi uzayı denir ve cs, bs, ℓ_1, ℓ_p ve bv ile gösterilir(Maddox, 1988).

Tanım 1.1.16. X ve Y aynı cisim üzerinde lineer uzaylar ve $f : X \to Y$ tanımlı bir operatör olsun. Eğer $\forall x_1, x_2 \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$$

ise f'ye bir lineer operatör denir (Maddox, 1988).

Tanım 1.1.17. X ve Y lineer uzaylar ve $f : X \to Y$ tanımlı bir operatör olsun. Eğer $f : X \to Y$ operatörü lineer , bire-bir ve örten ise bu f operatör bir izomorfizm denir. Bu takdirde, X ve Y uzayları lineer olarak izomorfik uzaylar adını alır ve $X \cong Y$ yazılır (Maddox, 1988).

Tanım 1.1.18. $T = (t_{nk})$, sonsuz matrisi verilsin. Eğer, $T = (t_{nk})$ sonsuz matrisi, $k > n$, $t_{nk} = 0$ ya da $k < n$, $t_{nk} = 0$ ise $T = (t_{nk})$ matrisine, üçgensel matris denir (Hofman ve Kunze, 1971).

Tanım 1.1.19.

$$e_{nk} = \begin{cases} 0 & , \quad k \neq n \\ 1 & , \quad k = n \end{cases}$$

ile tanımlı $e = (e_{nk})$, sonsuz matrisine, birim matris denir (Kreyzig, 1978).

Örnek 1.1.2. $e = (e^{(n)})$ dizisi, c_0 ve ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ uzayları için Schauder bazdır (Wilansky, 1964).

Tanım 1.1.20. $\Sigma = (\sigma_{nk})$, sonsuz matrisi,

$$\sigma_{nk} = \begin{cases} 0 & , \quad k > n \\ 1 & , \quad 0 \leq k \leq n \end{cases}$$

ile tanımlanır. Bu matrise fark matrisinin tersi veya toplam matrisi de denir (Malkowsky ve ark., 2002).

Tanım 1.1.21. $n = 1, 2, ...$ ve $k = 1, 2, ...$ olmak üzere $a_{nk} \in \mathbb{C}$ olan $A = (a_{nk})$ matrisine, sonsuz matris denir. Bütün dizilerin cümlesi ω, bir vektör uzayı yapısına sahip oldugundan $\forall x = (x_k)$ dizisinin terimleri;

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \\ x_k \\ . \\ . \\ . \end{bmatrix}$$

şeklinde sonsuz bileşenli bir kolon vektörü gibi yazılabilir. $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi ile $x = (x_k)$ dizisinin matris çarpımı alınarak;

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1k} & ... \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2k} & ... \\ . & . & ... & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nk} & ... \\ . & . & ... & . & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \\ x_k \\ . \\ . \\ . \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1k}x_k + ... \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2k}x_k + ... \\ . \\ . \\ . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nk}x_k + ... \\ . \\ . \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanan Ax dizisi elde edilir. Burada $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_k a_{nk}x_k = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nk}x_k + ...$$

toplamları yakınsıyorsa, bu sekilde elde edilen $(A_n(x))$ dizisine, $x = (x_k)$ dizisinin A matrisi ile yapılmış, dönüşüm dizisi denir (Nanda, 1986).

Tanım 1.1.22. X ve Y, ω dizi uzayının alt cümleleri, $A = (a_{nk})$ $(n, k = 1, 2, ...)$ bir sonsuz matris olsun. $\forall x = (x_k)$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$ serileri yakınsak ve $(A_n(x)) \in Y$ ise A matrisi X'i Y içine dönüştürüyor denir. X'i Y içine dönüştüren bütün matrislerin cümlesi (X, Y) ile gösterilir (Wilansky, 1964).

Tanım 1.1.23. X, bir lineer metrik uzay olsun. Eğer X uzayı, tamsa X'e Fréchet dizi uzayı denir (Wilansky, 1964).

Örnek 1.1.3. $\forall x, y \in \omega$ için

$$d(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$$

ile tanımlı d metriğine göre, ω bir Fréchet uzayıdır (Malkowsky ve Rakocevic, 2000).

Tanım 1.1.24. X, bir dizi uzayı olsun. Eğer,

$$\tau_k : X \to \mathbb{C}, \quad x \to \tau_k(x) = x_k, \ (k = 0, 1, 2, ...)$$

dönüşümü sürekli ise, X'e K - uzayı denir (Goes and Goes, 1970).

Tanım 1.1.25. $X \subset \omega$, olacak şekilde bir lineer metrik uzay olsun. X dizi uzayı, Fréchet uzayı ve K uzayı ise, X'e FK - uzayı denir. Ayrıca, X dizi uzayı, Banach uzayı ve K uzayı ise, bu uzaya BK - uzayı denir (Wilansky, 1964).

Örnek 1.1.4. ℓ_∞, c, c_0 ve ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ dizi uzayları üzerlerinde tanımlı doğal normları altında birer BK - uzayıdırlar (Wilansky, 1964).

Lemma 1.1.1. FK- uzayları arasındaki herhangi bir matris dönüşümü süreklidir (Malkowsky ve Rakočević, 2000).

Tanım 1.1.26. X, bir FK - uzayı olsun. Eğer, her $x = (x_k) \in X$ için

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k e^{(k)}$$

şeklinde bir tek temsile sahipse, $x^{[m]} = \sum_{k=0}^{m} x_k e^{(k)}$ olmak üzere $\lim_{m\to\infty} x^{[m]} = x$ oluyorsa, X'e AK - uzayı denir (Malkowsky ve Rakočević, 2000).

Örnek 1.1.5. ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ ve c_0, AK- uzaylarıdır (Malkowsky ve Rakočević, 2000).

Tanım 1.1.27. X, bir FK uzayı ve $a, x_0 \in X$ olsun.

$$S_\delta[x_0] = S_{X,\delta}[x_0] = \{x \in X : d_X(x, x_0) \leq \delta\} \ (\delta > 0)$$

olmak üzere FK uzayı üzerindeki norm,

$$\|a\|_D^* = \|a\|_{X,D}^* = \sup\left\{\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k\right| : x \in S_{1/D}[0]\right\} \ (D > 0)$$

ile tanımlanır.

Eğer X bir BK uzayı ise, X üzerindeki norm

$$\|a\|^* \ = \ \|a\|_X^* = \sup\left\{\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k\right| : \|x\| = 1\right\}$$

şeklindedir.

X ve Y, Fréchet uzaylar olsun. X'den Y'ye bütün sınırlı (sürekli) L lineer operatörlerinin cümlesi, $B(X,Y)$ gösterilir. Eğer, X ve Y normlu uzaylar ve $L \in B(X,Y)$ ise L'nin operatör normu;

$$\|L\| = \sup\{\|L(x)\| : \|x\| = 1\}$$

olarak tanımlanır (Malkowsky ve Rakočević, 2000).

Tanım 1.1.28. X ve Y, ω'nın iki alt kümesi olsun. $\forall z \in \omega$,

$$z^{-1} * Y = \{x \in \omega : xz = (x_k z_k)_{k=0}^{\infty} \in Y\}.$$

$$Z = M(X,Y) = \bigcap_{x \in X} x^{-1} * Y = \{a \in \omega : \forall x \in X, ax \in Y\}$$

cümlesine, X ve Ynin çarpım uzayı denir. Eğer $Y = \ell_1$ ve $Y = cs$ özel durumlarına, sırasıyla X'in $\alpha-$ ve $\beta-$ dualleri denir (Malkowsky ve Rakočević, 2000).

Lemma 1.1.2. $p \geq 1$, $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$ ve $b_1, b_2, ..., b_n \geq 0$ olsun. Bu takdirde,

$$\left(\sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=0}^{n} a_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=0}^{n} b_k^p\right)^{1/p}$$

dir. Bu eşitsizliğe, $p \geq 1$ için Minkowski eşitsizliği denir (Maddox, 1988)

Lemma 1.1.3. $x = (x_n)$ ve $y = (y_n)$ reel veya kompleks terimli herhangi iki dizi olsun. $s_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} s_i(y_i - y_{i+1}) + s_n y_{n+1}$$

ifadesine Abel Kısmi Toplamı denir (Maddox, 1988).

Tanım 1.1.29. M ve S, (X, d) metrik uzayının alt cümleleri ve $\epsilon > 0$ olsun.

$$\forall x \in M, \exists s \in S \ni d(x, s) < \epsilon$$

kalıyorsa, bu takdirde S cümlesine, M nin bir $\epsilon-$ netidir denir.
Eğer M cümlesi, $\epsilon > 0$ için sonlu bir $\epsilon-$ nete sahipse M cümlesine total sınırlı cümle denir (Malkowsky ve Rakočević, 2000).

Tanım 1.1.30. M, bir X metrik uzayının alt cümlesi olsun. Eğer M'de her (x_n) dizisi, limiti yine M'de olan yakınsak bir alt diziye sahipse M'ye kompaktır denir.
Eğer M'nin $\overline{M}$ kapanışı kompakt ise, M cümlesine relatif kompakt (ön kompakt) denir.
Ayrıca, M cümlesi relatif kompakt ise, M total sınırlıdır (Malkowsky ve Rakočević, 2000).

Tanım 1.1.31. κ_1 ve κ_2, sırasıyla, X ve Y Banach uzayları üzerinde tanımlı herhangi birer non-kompaktlık ölçümler ve L, X'den Y'ye bir operatör olsun.

$$\forall Q \in \mathcal{M}_X, L(Q) \in \mathcal{M}_Y$$

ve $0 \leq k < \infty$ olacak şekilde $\exists k \in \mathbb{R} \ni$

$$\forall Q \in \mathcal{M}_X, \kappa_2(L(Q)) \leq k\kappa_1(Q)$$

kalıyorsa, bu takdirde L operatörü, $(\kappa_1, \kappa_2)-$ sınırlıdır.
Eğer, L operatörü, $(\kappa_1, \kappa_2)-$ sınırlı ise, bu takdirde,

$$\|L\|_{\kappa_1,\kappa_2} = \inf\{k \geq 0 : \forall Q \in \mathcal{M}_X, \kappa_2(L(Q)) \leq k\kappa_1(Q)\}$$

ile tanımlı $\|L\|_{\kappa_1,\kappa_2}$ sayısına; L'nin $(\kappa_1,\kappa_2)-$ operatör normu denir.
Eğer $\kappa_1=\kappa_2=\kappa$ ise, $\|L\|_{\kappa,\kappa}$ yerine $\|L\|_{\kappa}$ yazılır (Malkowsky ve Rakočević, 2000).

Tanım 1.1.32. $X\subset\omega$ olsun. $x\in X$ ve $y\in\omega$ için $|y_k|\le|x_k|$ $(k\in\mathbb{N}_0)$ şartları $y\in X$ olmasını gerektiriyorsa, X cümlesine normal cümle denir (Malkowsky ve Rakočević, 2000).

Teorem 1.1.4. X ve Y, FK- uzayları ve $X\subset Y$ olsun. Bu takdirde, X üzerindeki d_X metriği, X üzerindeki $d_{Y|X}$ metriğinden daha kuvvetlidir.
d_X ve $d_{Y|X}$ metrikleri denktir $\Leftrightarrow$ X, Y'nin kapalı bir alt uzayıdır (Malkowsky ve Rakočević, 2000).

Lemma 1.1.4. X, $\|.\|$ normuna göre bir BK - uzayı ve T'de üçgensel bir matris olsun. Bu takdirde; X_T cümlesi, $\forall x\in X_T$ için,

$$\|x\|_T=\|T(x)\|$$

normuna göre bir BK - uzayıdır (Malkowsky ve Rakočević, 2000).

Lemma 1.1.5. $1<p<\infty$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olsun. Bu takdirde; $A\in(\ell_p,\ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart, $\mathcal{F}=\{0,...,n\}$ olmak üzere

$$\sup_{N\in\mathcal{F}}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\sum_{n\in N}a_{nk}\right|^q<\infty \tag{1.1.1}$$

dır (Stieglitz ve Tietz, 1977).

Lemma 1.1.6. $1<p<\infty$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olsun. Bu takdirde; $A\in(\ell_p,c)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n\to\infty}a_{nk}-\text{mevcut} \tag{1.1.2}$$

ve

$$\sup_{n\in N}\sum_{k=0}^{\infty}|a_{nk}|^q<\infty \tag{1.1.3}$$

dir (Stieglitz ve Tietz, 1977).

Lemma 1.1.7. $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu takdirde; $A \in (\ell_p, c_0)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0 \tag{1.1.4}$$

ve

$$\sup_{n\in N} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}|^q < \infty \tag{1.1.5}$$

dır (Stieglitz ve Tietz, 1977).

Lemma 1.1.8. $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu takdirde; $A \in (\ell_p, \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart 1.1.3 şartının sağlanmasıdır (Stieglitz ve Tietz, 1977).

Lemma 1.1.9. $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu takdirde; $A \in (\ell_p, bv)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{N} \sum_{k} \left| \sum_{n\in N} (a_{nk} - a_{n-1,k}) \right|^q < \infty \tag{1.1.6}$$

dır (Stieglitz ve Tietz, 1977).

Lemma 1.1.10. $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$ olsun. Bu takdirde,

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq 4. \max_{N\subset\{0,...,n\}} \left| \sum_{k\in N} a_k \right|$$

(Malkowsky ve Rakočević, 2000).

2. bv^p DİZİ UZAYI

2.1 bv^p Dizi Uzayı Kavramı

Bu bölümde, bv^p dizi uzayının tanımı verilerek, BK- uzayı olduğu gösterilecektir. Ayrıca, bv^p uzayı ile ℓ_p uzayı arasındaki ilişkiler incelenecek ve bv^p uzayının bir Schauder bazı bulunacaktır.

Tanım 2.1.1.

$$\delta_{nk} = \begin{cases} (-1)^{n-k} & , \quad n-1 \leq k \leq n, \\ 0 & , \quad \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

ile tanımlı $\Delta = (\delta_{nk})$ matrisine, fark matrisi denir (Malkowsky ve ark., 2002).

Tanım 2.1.2. X, herhangi bir dizi uzayı ve A, sonsuz bir matris olsun.

$$X_A = \{x = (x_k) \in \omega : Ax \in X\} \tag{2.1.1}$$

cümlesine, A matrisinin etki alanı denir (Malkowsky ve Rakočević, 2000).

Tanım 2.1.3. $1 \leq p < \infty$ için bv^p cümlesi, $x_{-1} = 0$ olmak üzere,

$$bv^p = \{x = (x_k) \in \omega : \sum_{k=0}^{\infty} |x_k - x_{k-1}|^p < \infty\} \tag{2.1.2}$$

olarak tanımlanır (Malkowsky ve ark., 2002).

Önerme 2.1.1. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere bv^p dizi uzayı fark matrisinin ℓ_p de ki etki alanıdır. Yani;

$$bv^p = (\ell_p)_\Delta \tag{2.1.3}$$

dir (Malkowsky ve ark., 2002).

İspat . 2.1.1 ve 2.1.2 den

$$\begin{aligned}(\ell_p)_\Delta &= \{x=(x_n)\in\omega : \Delta x\in\ell_p\}\\ &= \{x=(x_n)\in\omega : (\sum_{k=0}^{\infty}\delta_{nk}x_k)\in\ell_p\}\\ &= \{x=(x_n)\in\omega : (\sum_{k=n-1}^{n}(-1)^{n-k}x_k)\in\ell_p\}\\ &= \{x=(x_n)\in\omega : (x_n-x_{n-1})\in\ell_p\}\\ &= \{x=(x_n)\in\omega : \sum_{n=0}^{\infty}|x_n-x_{n-1}|^p<\infty\}\\ &= bv^p\end{aligned}$$

Önerme 2.1.2. $p=1$ için

$$bv^p = bv$$

dir (Malkowsky ve ark., 2002).

İspat .

$$\begin{aligned}bv^p &= \{x=(x_k)\in\omega : \sum_{k=0}^{\infty}|x_k-x_{k-1}|^p<\infty\}\\ &= \{x=(x_k)\in\omega : \sum_{k=0}^{\infty}|x_k-x_{k-1}|<\infty\}\\ &= bv\end{aligned}$$

$\Rightarrow bv^p = bv$

Teorem 2.1.1.

$$bv^p = \{x=x_k\in\omega : \sum_{k=0}^{\infty}|x_k-x_{k-1}|^p<\infty\}$$

ile tanımlı bv^p cümlesi, diziler üzerindeki toplama ve skalerle çarpma işlemine göre bir lineer uzaydır (Malkowsky ve ark., 2002).

İspat . $\theta=(0)\in bv^p$ olduğundan bv^p cümlesi boş değildir.
$x=(x_k), y=(y_k)\in bv^p$ ve $\alpha\in\mathbb{C}$ olsun. Şimdi $\alpha x+y\in bv^p$ olduğunu gösterelim.

Üçgen eşitsizliği ile

$$\begin{aligned} |\alpha x_k + y_k - (\alpha x_{k-1} + y_{k-1})| &\leq |\alpha(x_k - x_{k-1})| + |y_k - y_{k-1}| \\ &\leq |\alpha|.|x_k - x_{k-1}| + |y_k - y_{k-1}| \qquad (2.1.4) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu yüzdende (2.1.4) eşitsizliği ve $p \geq 1$ için Minkowski eşitsizliği uygulanarak,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (|\alpha x_k + y_k - (\alpha x_{k-1} + y_{k-1})|)^p \right)^{1/p} &\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} (|\alpha|.|x_k - x_{k-1}|)^p \right)^{1/p} \\ &+ \left(\sum_{k=0}^{\infty} |y_k - y_{k-1}|^p \right)^{1/p} \\ &= |\alpha| \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k - x_{k-1}|^p \right)^{1/p} \\ &+ \left(\sum_{k=0}^{\infty} |y_k - y_{k-1}|^p \right)^{1/p} < \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise, $\alpha x + y \in bv^p$ olduğunu gösterir. Bu yüzdende, bv^p cümlesi, dizilerin toplama ve skalarla çarpma işlemine göre bir lineer uzaydır.

Teorem 2.1.2. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere, $\forall x = (x_k) \in bv^p$,

$$\|.\|_{bv^p}(x) = \|x\|_{bv^p} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k - x_{k-1}|^p \right)^{1/p} \qquad (2.1.5)$$

ile tanımlı

$$\|.\|_{bv^p} : bv^p \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu, bv^p uzayında bir norm ve $(bv^p, \|.\|_{bv^p})$ de bir normlu uzaydır (Malkowsky ve ark., 2002).

İspat . N1) $x = (x_k) \in bv^p$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_k - x_{k-1}|^p$$

serisi yakınsak ve negatif olmayan bir reel sayıdır. Bu yüzdende,

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}|x_k - x_{k-1}|^p\right)^{1/p} \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

dır. Yani,

$$\|x\|_{bv^p} \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

dır.

$$\begin{aligned}
\textbf{N2)} \quad \|x\|_{bv^p} = 0 \quad &\Leftrightarrow \left(\sum_{k=0}^{\infty}|x_k - x_{k-1}|^p\right)^{1/p} = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}|x_k - x_{k-1}|^p = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall k \in \{0,1,2,...\}, |x_k - x_{k-1}| = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall k \in \{0,1,2,...\}, x_k = x_{k-1}
\end{aligned}$$

$$P(n) :'' x_n = x_{n-1} \Rightarrow x = (x_n) = \theta''$$

olsun.

(i) $x_{-1} = 0$ ve $x_0 - x_{-1} = 0$ olduğundan $x_0 = 0$ dır. Bu yüzden de $p(0)-$ doğrudur. Benzer şekilde $x_0 = 0$ ve $x_1 - x_0 = 0$ olduğundan $x_1 = 0$ dır. Bu yüzdenden de $p(1)-$ doğrudur.

(ii) $k \in \mathbb{N}_0$, $p(k)$ doğru olsun. Yani,

$$x_k = x_{k-1} \Rightarrow x = (x_k) = \theta$$

olsun. Bu takdirde, $k \in \mathbb{N}$,

$$x_{k+1} = x_k \Rightarrow x = (x_{k+1}) = \theta$$

olduğundan $(x_{k+1}) = (0) = \theta$ dır. Bu yüzdende $k \in \mathbb{N}$, $p(k+1)-$ doğrudur. $k \in \mathbb{N}$, $p(k) \rightarrow p(k+1)$ totoloji olduğundan $p(k) \Rightarrow p(k+1)$ dir. Matematik İndiksiyon

Prensibinin her iki şartıda sağlandığından $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ doğrudur. Yani

$$x_n = x_{n-1} \Rightarrow x = (x_n) = \theta$$

dir. Bu yüzdende

$$x = (x_n) = (0) = \theta$$

dir.

$$x = (x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (0, 0, 0, ...) = \theta$$

elde edilir.

N3) $\forall x = (x_k) \in bv^p$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ için,

$$\begin{aligned}
\|\alpha x\|_{bv^p} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha x_k - \alpha x_{k-1}|^p\right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (|\alpha||x_k - x_{k-1}|)^p\right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha|^p |x_k - x_{k-1}|^p\right)^{1/p} \\
&= |\alpha| \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k - x_{k-1}|^p\right)^{1/p} \\
&= |\alpha|.\|x\|_{bv^p}
\end{aligned}$$

N4) $\forall x = (x_k), y = (y_k) \in bv^p$, ℓ_p için Minkowski Eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_{bv^p} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} |(x_k + y_k) - (x_{k-1} + y_{k-1})|^p\right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} |(x_k - x_{k-1}) + (y_k - y_{k-1})|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k - x_{k-1}|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} |y_k - y_{k-1}|^p\right)^{1/p} \\
&= \|x\|_{bv^p} + \|y\|_{bv^p}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu yüzdende N1-N4 aksiyomları sağlandığından

$$\|.\|_{bv^p} : bv^p \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu bv^p üzerinde bir norm ve $(bv^p, \|.\|_{bv^p})$ de bir normlu uzaydır. Aynı zamanda Teorem 2.1.1 den, bv^p uzayı lineer uzay olduğundan, bv^p uzayı normlu lineer uzaydır.

Teorem 2.1.3. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere bv^p lineer uzayı, 2.1.5'de tanımlı norma göre bir Banach uzayıdır (Malkowsky ve ark., 2002).

İspat . bv^p uzayının Banach uzay olduğunu göstermek için, 2.1.5'de tanımlanan norma göre tam olduğunu göstermek yeterlidir.
$x^{(i)} = \{x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, ...\}$ olmak üzere $(x^{(i)})$, bv^p'de keyfi bir Cauchy dizisi olsun.
Bu takdirde $\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} \ni \forall i, j > N(\epsilon)$,

$$\|x^{(i)} - x^{(j)}\|_{bv^p} = \|\Delta(x^{(i)}) - \Delta(x^{(j)})\|_p < \epsilon \tag{2.1.6}$$

kalır. Bu yüzdende $\forall k \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned} |(\Delta(x^{(i)}))_k - (\Delta(x^{(j)}))_k| &\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |(\Delta(x^{(i)}))_k - (\Delta(x^{(j)}))_k|^p \right)^{1/p} \\ &= \|\Delta(x^{(i)}) - \Delta(x^{(j)})\|_p < \epsilon \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

dır. Bu takdirde, her bir $k \in \mathbb{N}_0$ için $\{(\Delta(x^{(i)}))_k\}_{i \in \mathbb{N}_0}$, $\mathbb{C}$ üzerinde bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{C}$ tam olduğundan her bir $k \in \mathbb{N}_0$ için

$$(\Delta(x^{(i)}))_k \to (\Delta(x))_k, (i \to \infty)$$

olacak şekilde $\mathbb{C}$ de ki noktaların bir $((\Delta(x))_k)$ dizisi vardır.

$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} \ni \forall i, j > N(\epsilon)$ için

$$\|\Delta(x^{(i)}) - \Delta(x^{(j)})\|_p < \epsilon \tag{2.1.8}$$

dır. Bu takdirde, $\forall i, j > N(\epsilon),\ m \in \mathbb{N}$ için,

$$\left(\sum_{k=0}^{m} |(\Delta(x^{(i)}))_k - (\Delta(x^{(j)}))_k|^p\right)^{1/p} \leq \|\Delta(x^{(i)})_k - (\Delta(x^{(j)}))_k\|_p < \epsilon \qquad (2.1.9)$$

dir. Bu yüzdende $\forall i, j > N(\epsilon),\ m \in \mathbb{N}$ için,

$$\sum_{k=0}^{m} |(\Delta(x^{(i)}))_k - (\Delta(x^{(j)}))_k|^p \leq \epsilon^p \qquad (2.1.10)$$

elde edilir. $|.|$ fonksiyonunun sürekliliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m} |(\Delta(x^{(i)}))_k - (\Delta(x^{(j)}))_k|^p &= \lim_{j\to\infty} \sum_{k=0}^{m} |(\Delta(x^{(i)}))_k - (\Delta(x^{(j)}))_k|^p \\
&= \sum_{k=0}^{m} |(\Delta(x^{(i)}))_k - \lim_{j\to\infty} (\Delta(x^{(j)}))_k|^p \\
&= \sum_{k=0}^{m} |(\Delta(x^{(i)}))_k - (\Delta(x))_k|^p \leq \epsilon^p
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=0}^{m} |(\Delta(x^{(i)}))_k - (\Delta(x))_k|^p\right) \leq \epsilon \qquad (2.1.11)$$

elde edilir. 2.1.11 den $m \to \infty$ iken limite geçilirse, $\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} \ni \forall i > N(\epsilon)$,

$$\lim_{m\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{m} |(\Delta(x^{(i)}))_k - (\Delta(x))_k|^p\right) \leq \epsilon$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=0}^{\infty} |(\Delta(x^{(i)}))_k - (\Delta(x))_k|^p\right) \leq \epsilon \qquad (2.1.12)$$

kalır. Bu yüzdende $x = (x_k)$ dizisi, x e yakınsaktır.

$$|(\Delta(x))_k|^p \leq \big(|(\Delta(x))_k - (\Delta(x^{(i)}))_k| + |(\Delta(x^{(i)}))_k|\big)^p \qquad (2.1.13)$$

olduğundan Minkowski Eşitsizliğini kullanarak,

$$\left(\sum_{k=0}^{m}|(\Delta(x))_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=0}^{m}|(\Delta(x))_k-(\Delta(x^{(i)}))_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=0}^{m}|(\Delta(x^{(i)}))_k|^p\right)^{1/p} \tag{2.1.14}$$

yazılabilir. 2.1.12 den dolayı,

$$\left(\sum_{k=0}^{m}|(\Delta(x))_k-(\Delta(x^{(i)}))_k|^p\right)\in c \ \wedge \ \left(\sum_{k=0}^{m}|(\Delta(x^{(i)}))_k|^p\right)\in c \tag{2.1.15}$$

dır. $c \subseteq \ell_\infty$ ve 2.1.15 dan $\forall m \in \mathbb{N}$,

$$\left(\sum_{k=0}^{m}|(\Delta(x))_k-(\Delta(x^{(i)}))_k|^p\right)\leq K_{_1}^p \ \wedge \ \left(\sum_{k=0}^{m}|(\Delta(x^{(i)}))_k|^p\right)\leq K_{_2}^p \tag{2.1.16}$$

olacak şekilde $K_{_1}^p, K_{_2}^p$ vardır. Bu yüzdende 2.1.12 ve 2.1.14 dan,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{m}|(\Delta(x))_k|^p\right)^{1/p} &\leq \left(\sum_{k=0}^{m}|(\Delta(x))_k-(\Delta(x^{(i)}))_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=0}^{m}|(\Delta(x^{(i)}))_k|^p\right)^{1/p} \\
&\leq (K_{_1}^p)^{1/p}+(K_{_2}^p)^{1/p} \qquad (2.1.17)\\
\Rightarrow \left(\sum_{k=0}^{m}|(\Delta(x))_k|^p\right)^{1/p} &\leq K_{_1}+K_{_2}=K \\
\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{m}|(\Delta(x))_k|^p &\leq K^p
\end{aligned}$$

kalır. Bu yüzdende,

$$\left(\sum_{k=0}^{m}|(\Delta(x))_k|^p\right)^{1/p} < \infty$$

dır. Yani $x=(x_k)\in bv^p$ dir.

Teorem 2.1.4. bv^p uzayı, 2.1.5'de ki norma göre bir BK uzayıdır (Malkowsky ve ark., 2002).

İspat . bv^p uzayının BK uzayı olduğunu göstermek için, Banach uzayı ve bv^p deki koordinat dönüşümlerinin sürekli olduğunu göstermek yeterlidir. Teorem 2.1.3'te bv^p uzayının, Banach uzayı olduğu ispat edildi.

Şimdi de bv^p deki koordinat dönüşümlerinin sürekli olduğu gösterilecektir.
$x^{(n)} = (x_k^{(n)})$, $x^{(n)} \to x$ olacak şekilde bv^p deki noktaların, herhangi bir dizisi olsun. bv^p nin tanımından dolayı $y_k^{(n)} = (\Delta x^{(n)})_k \in \ell_p$ dir. ℓ_p bir BK- uzayı olduğundan, ℓ_p de koordinat dönüşümleri süreklidir. Bu yüzdende

$$\begin{aligned} y^{(n)} \to y \quad &\Rightarrow \quad y_k^{(n)} \to y_k \\ &\Rightarrow \quad (\Delta x^{(n)})_k \to (\Delta x^{(n)}) \end{aligned}$$

yazılabilir. Σ matrisinin, Δ matrisinin tersi olduğu kullanılırsa,

$$x_k^{(n)} = \Sigma_k(y_k^{(n)}) = \sum_{j=0}^{k} \sigma_{kj} y_j^{(n)} = \sum_{j=0}^{k} y_j^{(n)} \to \sum_{j=0}^{k} y_j = x_k$$

$$\Rightarrow x_k^{(n)} \to x_k$$

elde edilir. Bu yüzdende, bv^p deki koordinat dönüşümleri süreklidir.

Teorem 2.1.5. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere bv^p uzayı , ℓ_p uzayına izomorfik uzaydır (Altay ve Başar,2007).

İspat . Bunun için bv^p ve ℓ_p uzayları arasında birebir, örten bir lineer dönüşümün varlığı gösterilmelidir.
$x = (x_k)$, ω da bir dizi olmak üzere;

$$\begin{aligned} T: \quad bv^p &\longrightarrow \ell_p \\ x &\longrightarrow Tx = y = (y_k) = (x_k - x_{k-1}) \end{aligned} \tag{2.1.18}$$

ile tanımlı T dönüşümü göz önüne alınırsa;
$x = (x_k), u = (u_k) \in bv^p$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} T(x+u) &= (x_k + u_k) - (x_{k-1} + u_{k-1}) \\ &= (x_k - x_{k-1}) + (u_k - u_{k-1}) \\ &= Tx + Tu \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} T(\alpha x) &= (\alpha x_k - \alpha x_{k-1}) \\ &= \alpha(x_k - x_{k-1}) \\ &= \alpha T x \end{aligned}$$

olduğundan T dönüşümü lineerdir.

Şimdi de, $x = (x_k), u = (u_k) \in bv^p$, $Tx = Tu$ olduğu kabul edilerek $x = u$ olduğu gösterilicektir. O halde;

$$Tx = Tu \Rightarrow Tx - Tu = \theta$$

ve T dönüşümü lineer olduğundan $T(x-u) = (x_k - u_k) - (x_{k-1} - u_{k-1}) = 0$ elde edilir.

$$P(n) : (x_n - u_n) - (x_{n-1} - u_{n-1}) = 0 \Rightarrow x_n = u_n$$

olsun.

(i) $x_{-1} - u_{-1} = 0$ ve $(x_0 - u_0) - (x_{-1} - u_{-1}) = 0$ olduğundan $x_0 - u_0 = 0$ dır. Dolayısıyla da $x_0 = u_0$ dır. Bu yüzdende $p(0)-$ doğrudur.

Benzer şekilde $x_0 = u_0$ ve $(x_1 - u_1) - (x_0 - u_0) = 0$ olduğundan $x_1 - u_1 = 0$ dır. Dolayısıyla da $x_1 = u_1$ dır. Bu yüzdende $p(1)-$ doğrudur.

(ii) $k \in \mathbb{N}$, $p(k)$ doğru olsun. Yani,

$$(x_k - u_k) - (x_{k-1} - u_{k-1}) = 0 \Rightarrow x_k = u_k$$

olsun. Bu takdirde, $k \in \mathbb{N}$,

$$(x_{k+1} - u_{k+1}) - (x_k - u_k) = 0$$

olduğundan $x_{k+1} - u_{k+1} = 0$ dır. Dolayısıyla da $x_{k+1} = u_{k+1}$ dır. Bu yüzdende, $k \in \mathbb{N}$, $p(k+1)-$ doğrudur. $k \in \mathbb{N}$, $p(k) \to p(k+1)$ totoloji olduğundan $p(k) \Rightarrow p(k+1)$ dir. Matematik İndiksiyon Prensibinin her iki şartıda sağlandığından

$\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ doğrudur. Yani

$$(x_n - u_n) - (x_{n-1} - u_{n-1}) = 0 \Rightarrow x_n = u_n$$

dir. Bu yüzdende

$$x = (x_n) = (u_n) = u$$

dir. O halde $x = (x_k), u = (u_k) \in bv^p$, $Tx = Tu \Rightarrow x = u$ elde edilir.
Bu yüzdende T dönüşümü birebirdir.
$\forall y = (y_k) \in \ell_p$ için $\exists x = (x_k) = \left(\sum_{j=0}^{k} y_j\right) \in bv^p \ni T(x) = y = (y_k) = (x_k - x_{k-1})$ kalır.
Bu yüzdende T dönüşümü örtendir.
Sonuç olarak, bv^p uzayından, ℓ_p uzayına birebir, örten ve lineer bir dönüşüm var olduğundan, bv^p dizi uzayı , ℓ_p dizi uzayına izomorfik uzaydır.

Teorem 2.1.6. $1 \leq p < \infty$ için ℓ_p, bv^p nin kesin alt cümlesidir. Yani, $\ell_p \subset bv^p$ dir(Altay ve Başar,2007).

İspat . $x = (x_k)$, ℓ_p de keyfi bir dizi olsun. Bu takdirde,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p < \infty \tag{2.1.19}$$

dir. Dolayısıyla $(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p)$ dizisi, üstten sınırlıdır. Bu yüzdende $\forall n \in \mathbb{N}_0$,

$$\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p \leq M^p \tag{2.1.20}$$

olacak şekilde $\exists M^p > 0$ vardır. Ayrıca $1 \leq p < \infty$ için Minkowski Eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^{n} |x_k - x_{k-1}|^p\right)^{1/p} &\leq \left(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=0}^{n} |x_{k-1}|^p\right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=0}^{n-1} |x_k|^p\right)^{1/p}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\sum_{k=0}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=0}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}\\
&\leq 2\left(\sum_{k=0}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}\\
&\leq 2M=K_{_0} \qquad (2.1.21)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu yüzdende, $\forall n\in\mathbb{N}_0, \exists K_{_0}>0 \ni$

$$\sum_{k=0}^{n}|x_k-x_{k-1}|^p \leq K_{_0}^p=K \qquad (2.1.22)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n}|x_k-x_{k-1}|^p \leq K \qquad (2.1.23)$$

kalır. Bu takdirde,

$$\sum_{k=0}^{\infty}|x_k-x_{k-1}|^p$$

serisi yakınsaktır. Bu yüzdende $x=(x_k)\in bv^p$ dir. $\forall x=(x_k)\in\ell_p, x=(x_k)\in bv^p$ olduğundan $\ell_p\subset bv^p$ elde edilir.
Ayrıca,

$$x=(1,1,1,...)$$

dizisi göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
\Delta x &= (x_k-x_{k-1})\\
&= (x_0-x_{-1}, x_1-x_0, ...)\\
&= (1,0,0,...)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}|(\Delta x)_k|^p &= |(\Delta x)_0|^p+\sum_{k=1}^{\infty}|(\Delta x)_k|^p\\
&= |x_0|^p+0\\
&= 1
\end{aligned}$$

olduğundan $\Delta x\in\ell_p$ dir. Dolayısıyla da $x=(x_k)\in bv^p$ dir. Fakat $x=(x_k)\notin\ell_p$ dir. Bu yüzdende ℓ_p, bv^p nin kesin alt cümlesidir.

2.2 bv^p Uzayının Schauder Bazı

Bu kısımda, bv^p dizi uzayının Schauder bazına ilişkin teorem ifade ve ispat edilecektir.

Teorem 2.2.1. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere bv^p uzayınının elemanlarının $b^{(k)} = (b_j^{(k)})$ dizisi;

$$b_j^{(k)} = \begin{cases} 0, & j < k \\ 1, & j \geq k \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde $(b^{(k)})$ dizisi, bv^p dizi uzayının bir Schauder bazıdır ve $\forall x \in bv^p$,

$$\lambda_k = (\Delta x)_k = x_k - x_{k-1}, \quad (k \in \mathbb{N}_0)$$

olmak üzere;

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k b^{(k)}, \quad (k \in \mathbb{N}_0) \tag{2.2.1}$$

şeklinde bir tek gösterime sahiptir (Malkowsky ve ark., 2002).

İspat . $e^{(k)}$, ℓ_p için bir Schauder bazdır. Bu takdirde $\forall k \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned} \Delta(b^{(k)}) &= (\Delta(b_j^{(k)})) \\ &= (b_j^{(k)} - b_{j-1}^{(k)}) \\ &= (e_j^{(k)}) \\ &= e^{(k)} \in \ell_p \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

olduğundan $\{(b^k)\} \subset bv^p$ dir.

$x = (x_k) \in bv^p$, keyfi bir dizi ve $\forall m > 0$ için,

$$x^{[m]} = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k b^{(k)}, \quad (k \in \mathbb{N}_0) \tag{2.2.3}$$

olsun. Bu yüzdende 2.2.2 eşitliğinin varlığı göz önünde tutularak, 2.2.3 eşitliğine Δ matrisini uygulanırsa,

$$\Delta x^{[m]} = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k \Delta b^{(k)} = \sum_{k=0}^{m} (\Delta x)_k e^{(k)}$$

ve $i, m \in \mathbb{N}_0$

$$\left[\Delta(x - x^{[m]})\right]_i = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq i \leq m \\ (\Delta x)_i & , \quad i > m \end{cases}$$

elde edilir. $\forall \epsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N} \ni \forall m > m_0,$

$$\left(\sum_{i=m_0+1}^{\infty} |(\Delta x)_i|^p \right)^{1/p} < \frac{\epsilon}{2}$$

kalır. Bu yüzdende $\forall \epsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N} \ni \forall m > m_0,$

$$\begin{aligned} \left\| \Delta(x - x^{[m]})_i \right\|_p &= \left(\sum_{k=m}^{\infty} |(\Delta x)_i|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{k=m_0}^{\infty} |(\Delta x)_i|^p \right)^{1/p} \\ &< \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\| \Delta(x - x^{[m]})_i \right\|_p < \epsilon$$

kalır. Bu yüzdende

$$x^{[m]} \to x \quad (m \to \infty)$$

dir.

$$x^{[m]} = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k b^{(k)}$$

olduğundan

$$\lim_{m\to\infty} x^{[m]} = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \lambda_k b^{(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k b^{(k)}$$

dir. Bu yüzdende

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k b^{(k)}$$

elde edilir.

x dizisinin

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k b^{(k)}, \quad (k \in \mathbb{N}_0) \tag{2.2.4}$$

şeklinde başka bir gösterimi var olsun. 2.2.2 eşitliğinin varlığını göz önünde tutularak 2.2.4 eşitliğine Δ matrisini uygulanırsa, $\forall n \in \mathbb{N}_0$ için,

$$(\Delta(x)_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k (\Delta b^{(k)})_n = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k e_n^{(k)} = \mu_n$$

elde edilir. Bu takdirde $\forall n \in \mathbb{N}_0$,

$$(\Delta x)_n = \mu_n = \lambda_n$$

dir. O halde $x \in bv^p$ dizisinin 2.2.1 teki gösterimi bir tektir. Bu yüzden de $(b^{(k)})_{k=0}^{\infty}$ dizisi, bv^p dizi uzayının bir Schauder bazıdır.

3. bv^p UZAYININ $\beta-$ DUALİ

3.1 bv^p Uzayının $\beta-$ Duali

Bu kısımda, bv^p'nin $\beta-$ dualini belirleyen teorem ifade ve ispat edilecektir.

Teorem 3.1.1. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$E_{nk} = \begin{cases} 0, & 0 < k < n-1 \\ 1, & k \geq n \end{cases} \tag{3.1.1}$$

ile $E = (E_{nk})$ matrisi tanımlansın ve

$$M(bv^p) = ((n+1)^{1/q})^{-1} * \ell_\infty \tag{3.1.2}$$

olsun. Bu takdirde;

(a) $$(bv^p)^\beta = (\ell_p^\beta \cap M(bv^p))_E \tag{3.1.3}$$

ve

(b) $\forall a \in (bv^p)^\beta$,

$$\|a\|_{bv^p}^* = \|E(a)\|_q \tag{3.1.4}$$

dır (Malkowsky ve ark., 2002).

İspat . (a) İlk olarak $((\ell_p)^\beta \cap M(bv^p, c_o))_E = (bv^p)^\beta$ olduğu gösterilecektir. $a \in (\ell_p^\beta \cap M(bv^p, c_o))_E$ olsun. Bu takdirde;

$$R = E(a) \in ((\ell_p)^\beta \cap M(bv^p, c_o)) \Rightarrow R \in (\ell_p)^\beta \text{ve} R \in M(bv^p, c_0) \tag{3.1.5}$$

dır. $y \in bv^p$, keyfi olsun. Bu takdirde, $\Delta(y) = x \in \ell_p$ dır. 3.1.5 den dolayı

$$R \in M(bv^p, c_0) \Rightarrow \forall y \in bv^p, R.y \in c_0 \tag{3.1.6}$$

olur. Ayrıca, $R \in \ell_p^\beta$ olduğundan, $x \in \ell_p$ ve $\forall k$, için

$$(R_k x_k) \in cs \tag{3.1.7}$$

dır. Abel Kısmi Toplama Formülünden, $n \in \mathbb{N}_0$ için,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} a_k y_k &= \sum_{k=1}^{n} R_k \Delta(y_k) - R_{n+1} y_{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} R_k x_k - R_{n+1} y_{n+1} \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

dır. 3.1.8 eşitliğinde $n \to \infty$ iken limite geçilir, 3.1.6 ve 3.1.7 ifadeleri göz önüne alınırsa;

$$(a_k y_k) \in cs$$

elde edilir. O halde $\forall y \in bv^p$ için $a.y \in cs$ olduğundan $a \in (bv^p)^\beta$ elde edilir. Bu takdirde,

$$((\ell_p)^\beta \cap M(bv^p, c_o))_E \subseteq (bv^p)^\beta \tag{3.1.9}$$

dır.

Tersine olarak, $a \in (bv^p)^\beta$ ve $y \in bv^p$ olsun. Bu takdirde, $a.y \in cs$ dir. Ayrıca,

$$\Delta(e) = e^{(0)} \in \phi \subset \ell_p$$

olduğundan $e \in bv^p$ ve dolayısıyla $a = a.e \in cs$ olur. Bu da $E = (E_{nk})$ dizisinin tanımlı olduğunu gösterir. $y \in bv^p$ olduğundan $x = \Delta(y) \in \ell_p$ ve dolayısıyla $y = \Sigma(x)$ dir. Bu yüzdende; $\forall n \in \mathbb{N}_0$,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y_k = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{k} x_j = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=k}^{n} a_j \right) x_k \tag{3.1.10}$$

yazılabilir. 3.1.10 eşitliğinde

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k y_k\right) \in c \Rightarrow \left(\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=k}^{n} a_j\right) x_k\right) \in c$$

dir. $A = (a_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ matrisi

$$a_{nk} = \begin{cases} \sum_{j=k}^{n} a_j & , \quad 0 \leq k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa, 3.1.10 eşitliğinden, $A \in (\ell_p, c) \subset (\ell_p, \ell_\infty)$ elde edilir. Bu takdirde $\forall n \in \mathbb{N}_0$ ve $x \in S_{1/D}[0]$ olacak şekilde $\exists D > 0$ reel sayısı için

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=k}^{n} a_j\right) x_k\right| \leq C$$

olacak şekilde $\exists C > 0$ vardır. $m \in \mathbb{N}_0$ olsun. $n \geq m$ ve $\forall n \in \mathbb{N}_0$ ve $x \in S_{1/D}^{[m]}[0]$ için

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=k}^{n} a_j\right) x_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{j=k}^{n} a_j\right) x_k\right| \leq C$$

dir. $a \in cs$ ve $R = E(a)$ olduğundan

$$\left|\sum_{k=0}^{m} R_k x_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{m}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{j=k}^{n} a_j\right) x_k\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{j=k}^{n} a_j\right) x_k\right| \leq C \qquad (3.1.11)$$

elde edilir.

$x \in \ell_p$ verilmiş ve $\delta = 1/2D$ olsun. $\widetilde{x}$ dizisini $\widetilde{x}_k = (sgnR_k)x_k, (k = 0, 1, 2, ...)$ olarak tanımlansın. ℓ_p normal ve $|\widetilde{x}_k| \leq |x_k|$ olduğundan $\widetilde{x} \in \ell_p$ dir. ℓ_p, AK uzayı olduğundan $\forall m \geq m_0$ için,

$$\widetilde{\widetilde{x}}^{[m]} = K^{-1}\widetilde{x}^{[m]} \in S_{1/D}[0] \qquad (3.1.12)$$

olacak şekilde $\exists K > 0$ reel sayısı ve $m_0 \in \mathbb{N}_0$ vardır. Bu yüzdende 3.1.11 ve 3.1.12'den,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{m} R_k \widetilde{\widetilde{x}}_k^{[m]}\right| &= \left|\sum_{k=0}^{m} R_k K^{-1} \widetilde{x}_k^{[m]}\right| \\
&\leq \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{m} \left|R_k \widetilde{x}_k^{[m]}\right| \\
&\leq \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{m} \left|R_k x_k^{[m]}\right| \leq C \\
&= \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{m} |R_k x_k| \leq C
\end{aligned}$$

dir. Bu yüzdende

$$\sum_{k=0}^{m} |R_k x_k| \leq KC \tag{3.1.13}$$

dir. O halde

$$R \in \ell_p^{\alpha} \subset \ell_p^{\beta} \tag{3.1.14}$$

dir. Sonuç olarak 3.1.8 ve 3.1.14 birleştirilirse,

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1} y_{n+1} \tag{3.1.15}$$

ifadesi $\forall y \in bv^p$ için mevcuttur ve $R \in (bv^p, c)$ dir. Bu yüzdende;

$$R \in M(bv^p, c) \tag{3.1.16}$$

dir. 3.1.14 ve 3.1.16 birleştirilirse;

$$R = E(a) \in (\ell_p^{\beta} \cap M(bv^p, c))$$

elde edilir. Bu yüzdende

$$a \in (\ell_p^{\beta} \cap M(bv^p, c))_E$$

dır. $\forall a \in (bv^p)^\beta, a \in (\ell_p^\beta \cap M(bv^p, c))_E$ olduğundan dolayı da

$$(bv^p)^\beta \subseteq (\ell_p^\beta \cap M(bv^p, c))_E \tag{3.1.17}$$

elde edilir. 3.1.9 ve 3.1.17 den

$$(bv^p)^\beta = (\ell_p^\beta \cap M(bv^p, c))_E$$

elde edilir.

Şimdi de;

$$M(bv^p, c) \subset M(bv^p) \subset M(bv^p, c_0) \tag{3.1.18}$$

olduğu gösterilecektir. İlk olarak kabul edelim ki $a \in M(bv^p, c)$ keyfi olsun. Bu takdirde $\forall x \in bv^p, ax \in c$ dir. Ayrıca, $x \in bv^p$ olması için gerek ve yeter şart $\Delta(x) = y \in \ell_p$ dir. Bu takdirde $x = \Sigma(y)$ ve $\forall n \in \mathbb{N}_0$, $a_n x_n = \sum_{k=0}^{n} a_n y_k$ dır. $\forall n \in \mathbb{N}_0$,

$$c_{nk} = \begin{cases} a_n & , \quad 0 \le k \le n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

ile tanımlı $C = (c_{nk})$ matrisini tanımlayalım. Bu takdirde $C \in (\ell_p, c)$ dir. O halde, Lemma 1.1.6'dan dolayı

$$\begin{aligned} \sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |c_{nk}|^q &= \sup_n \left(\sum_{k=0}^{n} |c_{nk}|^q + \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_{nk}|^q \right) \\ &= \sup_n \left(\sum_{k=0}^{n} |a_n|^q + 0 \right) \\ &= \sup_n \sum_{k=0}^{n} |a_n|^q \\ &= \sup_n (n+1)|a_n|^q < \infty \end{aligned} \tag{3.1.19}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} & \{(n+1)|a_n|^q\} \in \ell_\infty \\ \Rightarrow \quad & \{(n+1)|a_n|^q\}^{1/q} \in \ell_\infty \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ \{(n+1)^{1/q}|a_n|\} \in \ell_\infty$$
$$\Rightarrow \ \{(n+1)^{1/q}a_n\} \in \ell_\infty$$

dır. Bu ise, $a \in M(bv^p)$ olduğunu gösterir. $\forall a \in M(bv^p, c), a \in M(bv^p)$ olduğundan dolayı da

$$M(bv^p, c) \subset M(bv^p) \tag{3.1.20}$$

elde edilir.
$a \in M(bv^p)$ keyfi olsun. Bu takdirde $a \in ((n+1)^{1/q})^{-1} * \ell_\infty$ olduğundan
$((n+1)^{1/q}a_n) \in \ell_\infty$ dır. O halde $\exists K > 0 \ni \forall n \in \mathbb{N}_0$,

$$(n+1)^{1/q}|a_n| \leq K$$

kalır. Bu yüzdende $\exists K > 0 \ni \forall n \in \mathbb{N}_0$,

$$|a_n| \leq K(n+1)^{-1/q}$$

kalır. Bu yüzdende $\forall n \in \mathbb{N}_0$,

$$0 \leq |a_n| \leq \frac{K}{(n+1)^{1/q}}$$

olduğundan

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} |a_n| \leq K \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^{1/q}} = 0$$

$$\Rightarrow \ 0 \leq \lim_{n\to\infty} |a_n| \leq 0$$
$$\Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$
$$\Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$
$$\Rightarrow \ a \in c_0 \tag{3.1.21}$$

elde edilir. C matrisini yukarıda ki gibi tanımlanırsa 3.1.19 tekrar elde edilir. Lemma 1.1.7, 3.1.19 ve 3.1.21 den $C \in (\ell_p, c_0)$ elde dilir. Bu takdirde $\forall x \in bv^p$, $ax \in c_0$ dir. Bu ise $a \in M(bv^p, c_0)$ olduğunu gösterir. $\forall a \in M(bv^p), a \in M(bv^p, c_0)$

olduğundan

$$M(bv^p) \subset M(bv^p, c_0) \tag{3.1.22}$$

elde edilir. 3.1.20 ve 3.1.22 birleştirilirse 3.1.19 elde edilir.

(b) $a \in (bv^p)^\beta$ olarak verilsin. $x \in bv^p$ alınırsa, $\Delta(x) = y \in \ell_p$ elde edilir. $R = E(a)$ olmak üzere Abel Kısmi Toplama Formülünden

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x_k = \sum_{k=0}^{n} R_k y_k - R_{n+1} x_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, ...) \tag{3.1.23}$$

yazılabilir. $a \in (bv^p)^\beta$ ve (a) dan $R \in M(bv^p, c_0)$ olduğundan dolayı 3.1.23 den

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x_k = \sum_{k=0}^{n+1} R_k y_k \quad (n = 0, 1, 2, ...) \tag{3.1.24}$$

elde edilir. $\|x\|_{bv^p} = \|y\|_p$ olduğundan $\|a\|^*_{bv^p} = \|R\|^*_{\ell_p}$ ve ℓ^*_p ve ℓ_q norm izometrik olduğundan dolayı da 3.1.4 elde edilir.

Uyarı 3.1.1. (a) $\ell_q \nsubseteq M(bv^p)$

(b) $M(bv^p) \nsubseteq \ell_q$

(Malkowsky ve ark., 2002).

İspat . (a)

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{v+1}, & k = 2^v \\ 0, & k \neq 2^v \end{cases} (v = 0, 1, 2, ...) \tag{3.1.25}$$

ile a dizisi tanımlansın.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^q &= |a_0|^q + |a_1|^q + |a_2|^q + |a_3|^q + |a_4|^q + ... \\ &= |a_1|^q + |a_2|^q + |a_4|^q + ... \\ &= |a_{2^0}|^q + |a_{2^1}|^q + |a_{2^2}|^q + ... \\ &= \sum_{v=0}^{\infty} |a_{2^v}|^q \\ &= \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{(v+1)^q} < \infty \end{aligned}$$

olduğundan $a \in \ell_q$ dır. Fakat

$$|a_{2^v}|(2^v+1)^{1/q} \geq \frac{2^{v/q}}{v+1} \to \infty \quad (v \to \infty)$$

olduğundan $a \notin M(bv^p)$ dır. O halde;

$$a \in \ell_q \setminus M(bv^p)$$

elde edilir.

(b)$\forall k \in \mathbb{N}_0$,

$$\widetilde{a}_k = \left(\frac{1}{k+1}\right)^{1/q} \tag{3.1.26}$$

ile $\widetilde{a}$ dizisi tanımlansın. $k = (0, 1, 2, ...)$ için

$$\widetilde{a}_k(k+1)^{1/q} = 1$$

olduğundan $\widetilde{a} \in M(bv^p)$ dir. Fakat

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\widetilde{a}_k|^q = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \infty$$

olduğundan $\widetilde{a} \notin \ell_q$ dir. O halde

$$\widetilde{a} \in M(bv^p) \backslash \ell_q$$

dir.

4. bv^p DİZİ UZAYI ÜZERİNDEKİ MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

4.1 bv^p Dizi Uzayı Üzerindeki Matris Dönüşümleri

Bu bölümde bv^p dizi uzayı üzerindeki matris dönüşümleri karakterize edilecektir. Daha önce olduğu gibi, $1 < p < \infty$ ve $q = p/(p-1)$ olarak kabul edilecektir.

Lemma 4.1.1. $X \subset \phi$, AK özelliğine sahip normal bir FK uzayı, Y bir lineer uzay ve $M(X_\Delta, c) = M(X_\Delta, c_0)$ olsun. $\forall n, k \in \mathbb{N}_0$ için R^A matrisi,

$$r^A_{nk} = \sum_{j=k}^{\infty} a_{nj} \tag{4.1.1}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde; $A \in (X_\Delta, Y)$ olması için gerek ve yeter şart

$$R^A \in (X, Y) \tag{4.1.2}$$

ve $\forall n \in \mathbb{N}_0$

$$R^A_n \in M(X_\Delta, c_0) \tag{4.1.3}$$

dır (Malkowsky, 2002).

İspat . Kabul edelim ki $A \in (X_\Delta, Y)$, $X_\Delta = Z$ ve $R^A = R$ olsun. Bu takdirde $A \in (Z, Y)$ dır. Bu yüzdende $A_n \in Z^\beta$ olur.

$$(X_\Delta)^\beta = (X^\beta \cap M(x_\Delta, c))_E,\ E(A_n) = R_n \tag{4.1.4}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} A_n \in (X^\beta \cap M(x_\Delta, c))_E \quad &\Rightarrow \quad R_n = E(A_n) \in X^\beta \wedge R_n = E(A_n) \in M(x_0, c) \\ &\Rightarrow \quad R_n \in X^\beta \wedge R_n \in M(x_0, c) \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

dir. Böylece 4.1.3 ispatlanır. Şimdi de $R \in (X, Y)$ olduğunu gösterelim. Bunun için $\forall x \in X$ olmak üzere, $R(x) \in Y$ olduğunu göstermek yeterlidir. $z \in Z$ için $\Delta(z) = x \in X$ olacaktır. $\forall n \in \mathbb{N}_0$ için Abel Kısmi Toplama Formülüne göre;

$$\sum_{k=0}^{m} a_{nk} z_k = \sum_{k=0}^{m+1} r_{nk} x_k - r_{n,m+1} z_{m+1} \quad (m \in \mathbb{N}_0) \tag{4.1.6}$$

yazılabilir. 4.1.3 den dolayı $\forall n \in \mathbb{N}_0$,

$$\lim_{m\to\infty} r_{n,m+1} z_{m+1} = 0$$

dır. 4.1.6 ifadesine $(m \to \infty)$ iken limite geçilirse, $\forall n \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned}
& \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} a_{nk} z_k = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m+1} r_{nk} x_k - \lim_{m\to\infty} r_{n,m+1} z_{m+1} \\
\Rightarrow \quad & \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} a_{nk} z_k = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m+1} r_{nk} x_k \\
\Rightarrow \quad & \sum_{k=0}^{m} a_{nk} z_k = \sum_{k=0}^{m+1} r_{nk} x_k \\
\Rightarrow \quad & A_n(z) = R_n(x) \\
\Leftrightarrow \quad & A(z) = R(x)
\end{aligned}$$

olacaktır. $A \in (Z, Y)$ olarak kabul edildiğinden $A(z) \in Y$ ve dolayısıylada $R(x) \in Y$ olur. $\forall x \in X, R(x) \in Y$ olduğundan $R \in (X, Y)$ dir. Dolayısıyla 4.1.2 elde edilir.

Tersine olarak, $R \in (X, Y)$ ve $\forall n$ için $R_n \in (X_\Delta, c_0)$ olsun. Bu durumda $R_n \in M(X_\Delta, c)$ ve dolayısıyla da $\forall x \in X$ için $R_n(x) \in c$ dir. 4.1.6 dan dolayı da $z \in Z$ ve $M(X_\Delta, c_0) = M(X_\Delta, c)$ ile birlikte $\forall n \in \mathbb{N}_0$,

$$A_n(z) = R_n(x) \Leftrightarrow A(z) = R(x)$$

olur. $R \in (X, Y)$ verilmiş olduğundan $R(x) \in Y$ ve dolayısıyla $A(z) \in Y$ dir. Bu $A \in (X_\Delta, Y)$ olduğunu gösterir.

Lemma 4.1.2. $X \supset \phi$ ve Y, BK uzayları olsun.

(a) $A \in (X, \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\|A\|_X^* = \sup_n \|A_n\|^* < \infty \tag{4.1.7}$$

dır. Ayrıca, $A \in (X, \ell_\infty)$ ise, bu takdirde

$$\|L_A\| = \|A\|_X^* \tag{4.1.8}$$

dır.

(b) $(b^{(k)})_{k=0}^\infty$, X'in bir Schauder bazı ve Y_1, Y de kapalı bir BK uzayı olsun. Bu takdirde

$$A \in (X, Y_1) \Leftrightarrow A \in (X, Y) \text{ ve } \forall k, A(b^{(k)}) \in Y_1 \tag{4.1.9}$$

(Malkowsky ve Rakočević,2000).

İspat . (a) Kabul edelim ki 4.1.7 şartı sağlansın. Bu takdirde $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\|x\| = 1$ şartını sağlayan $\forall x \in X$, $A_n(x)$ serisi yakınsak ve $A(x) \in \ell_\infty$ dur. Bu yüzdende Tanım 1.1.22'den dolayı $A \in (X, \ell_\infty)$ elde edilir.
Tersine olarak; $A \in (X, \ell_\infty)$ olsun. Bu takdirde Lemma 1.1.1'den dolayı $\|x\| = 1$ şartını sağlayan $\forall x \in X$, $L_A(x) = A(x)$ olacak şekilde en az bir $L_A \in B(X, \ell_\infty)$ operatörü vardır. $\|x\| = 1$ şartını sağlayan $\forall x \in X$, $A(x) \in \ell_\infty$ olduğundan

$$\|A(x)\|_\infty = \|L_A(x)\|_\infty = \sup_n |A_n(x)| = \sup_n \|A_n\|_X^* \leq M\|x\|$$

dır. Bu yüzdende 4.1.7 şartı elde edilir.
Ayrıca $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\|x\| = 1$ şartını sağlayan $\forall x \in X$,

$$\|A(x)\|_\infty = \sup_n |A_n(x)| = \|L_A(x)\|_\infty \leq \|L_A\|$$

olur. Bu yüzdende $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\|x\| = 1$ şartını sağlayan $\forall x \in X$,

$$|A_n(x)| \leq \|L_A\|$$

dır. $\|.\|^*$ normunun tanımı gereğince

$$\|A\|^* = \sup_n |A_n(x)| \leq \|L_A\| \tag{4.1.10}$$

elde edilir. Ayrıca, $\forall\epsilon > 0$ için

$$\|A(x)\|_\infty \geq \|L_A\| - \epsilon/2 \tag{4.1.11}$$

olacak biçimde $\|x\| = 1$ şartını sağlayan $\exists x \in X$ vardır ve

$$|A_{n(x)}(x)| \geq \|A(x)\|_\infty - \epsilon/2 \tag{4.1.12}$$

olacak şekilde bir $n(x)$ tamsayısı vardır. Bu yüzdende 4.1.11 ve 4.1.12'dan

$$|A_{n(x)}(x)| \geq \|L_A\| - \epsilon \tag{4.1.13}$$

dir. Sonuç olarak;

$$\|A\|^* = \sup_n \|A_n\|^* \geq \|L_A\| - \epsilon \tag{4.1.14}$$

olur. $\epsilon > 0$ keyfi olduğundan, $\|A\|^* \geq \|L_A\|$ ve 4.1.10 ile de

$$\|A\|^* = \|L_A\| \tag{4.1.15}$$

elde edilir.

(b) $A \in (X, Y_1)$ için koşulların gerekliliği açık olarak görülebilir. Tersine; $A \in (X, Y)$ olsun. Bu takdirde Lemma 1.1.1'den dolayı $L_A(x) = A(x)$ olacak şekilde en az bir $L_A \in B(X, Y)$ operatörü vardır. Y_1, Y'nin kapalı bir alt uzayı olduğundan, Teorem 1.1.4'den Y_1 ve Y'deki metrikler aynıdır. S, Y_1'de herhangi bir uzay olsun. Bu takdirde sırasıyla d_{Y_1} ve $d_{Y|Y_1}$ metriklerine göre S'nin Y_1 ve Y'deki kapanışları için

$$clos_{Y_1}(S) = clos_{Y|Y_1}(S) \tag{4.1.16}$$

elde edilir.

$\forall x \in X$ ve

$$SB = \left\{ \sum_{k=0}^{m} \lambda_k b^{(k)} : m \in \mathbb{N}_0, \lambda_k \in \mathbb{C}\ (k \in \mathbb{N}_0) \right\} \tag{4.1.17}$$

ile

$$\{b^{(k)} : k = 0, 1, ...\}$$

nin spanı tanımlansın. $\forall k = 0, 1, ...,$ $L_A(b(k)) \in Y_1$ ve d_{Y_1} ve $d_{Y|Y_1}$ metrikleri denk olduğundan

$$L_A|_{SB} : (X, d_X) \to (Y_1, d_{Y_1}) \tag{4.1.18}$$

dönüşümü süreklidir. Ayrıca, $(b^{(k)})_{k=0}^{\infty}$, X'in bir bazı olduğundan, $\overline{SB} = X$ dır. Bu takdirde 4.1.16 ve $L_A|_{SB}$ nin sürekliliğinden

$$\begin{aligned} L_A(x) &= L_A(\overline{SB}) = clos_{Y_1}(L_A|_{SB}(SB)) = clos_{Y|Y_1}(L_A|_{SB}(SB)) \\ &\subset clos_{Y|Y_1}(Y_1) = Y_1 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu yüzdende $\forall x \in X$ için $L_A(x) = A(x) \in Y_1$ dir. Sonuç olarak $A \in (X, Y)$ elde edilir.

Teorem 4.1.1. (a) $A \in (bv^p, \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\|A\|_{(bv^p, \ell_\infty)} = \sup_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{j=k}^{\infty} a_{nj} \right|^q \right)^{1/q} < \infty \tag{4.1.19}$$

ve $\forall n \in \mathbb{N}_0$,

$$\sup_k k^{1/q} \left| \sum_{j=k}^{\infty} a_{nj} \right| < \infty \tag{4.1.20}$$

olmasıdır.

(b) $A \in (bv^p, c_0)$ olması için gerek ve yeter şart 4.1.19 ve 4.1.20 sağlanır ve herbir $k \in \mathbb{N}_0$,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=k}^{\infty} a_{nj} = 0. \tag{4.1.21}$$

(c) $A \in (bv^p, c)$ olması için gerek ve yeter şart 4.1.19 ve 4.1.20 sağlanır ve herbir $k \in \mathbb{N}_0$,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=k}^{\infty} a_{nj} = \alpha_k. \tag{4.1.22}$$

(d) Y; ℓ_∞, c_0 ya da c dizilerinden herhangi biri olsun.

Eğer $A \in (bv^p, Y)$ ise, bu takdirde $\|L_A\| = \|A\|_{(bv^p,\ell_\infty)}$

(Malkowsky ve ark., 2002).

İspat . (a) 3.1.18'den dolayı $M(bv^p, c) = M(bv^p, c_0)$ dır. O halde, Lemma 4.1.1.'in bütün şartları sağlanır.

$$r_{nk}^A = \sum_{j=k}^{\infty} a_{nj}$$

olsun.

Bu takdirde, $A \in (bv^p, \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart

(i) $R^A \in (\ell_p, \ell_\infty)$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}_0, R_n^A \in M(bv^p, c_0)$

olmasıdır. (i) den ve Teorem 1.1.18'den dolayı

$$R^A \in (\ell_p, \ell_\infty) \Leftrightarrow \sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |r_{nk}|^q < \infty$$

yazılabilir. Bu takdirde 4.1.19 şartı sağlanır.

3.1.2 ve 3.1.18'den dolayı $M(bv^p, c) = M(bv^p, c_0) = M(bv^p)$ ve

$$M(bv^p) = \left((k^{1/q})_{k=0}^{\infty}\right)^{-1} * \ell_\infty \tag{4.1.23}$$

yazılabilir. (ii) ve 4.1.23'den dolayı $\forall n \in \mathbb{N}_0$,

$$R_n^A \in M(bv^p, c_0) \Leftrightarrow k^{1/q}(r_{nk}^A) \in \ell_\infty \Leftrightarrow \sup_k k^{1/q}|r_{nk}^A| = \sup_k k^{1/q} \left|\sum_{j=k}^{\infty} a_{nj}\right| < \infty$$

dur. Bu ise 4.1.20 şartının sağlanığını gösterir.

(b) Teorem 2.2.1'den dolayı, $1 \le p < \infty$ olmak üzere bv^p uzayınının elemanlarının

$(b^{(k)})_{k=0}^{\infty}$ dizisi;

$$b_j^{(k)} = \begin{cases} 0, & j < k \\ 1, & j \geq k \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa, $(b^{(k)})_{k=0}^{\infty}$ dizisi, bv^p dizi uzayının bir Schauder bazıdır. Bu takdirde, $\forall k \in \mathbb{N}_0$,

$$A_n(b^{(k)}) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{nj} b_j^{(k)} = \sum_{j=k}^{\infty} a_{nj} \tag{4.1.24}$$

dir. Lemma 4.1.2. (b) şıkkına göre $A \in (bv^p, c_0)$ olması için gerek ve yeter şart (bv^p, ℓ_∞) ve $\forall k \in \mathbb{N}_0, A_n(b^{(k)}) \in c_0$ olmasıdır. Bu yüzdende 4.1.24'den 4.1.21 sağlanır. Ayrıca, (a) şıkkıda göz önüne alınırsa, (b) şıkkının ispatı biter.

(c) (b), şıkkının ispatı ile aynıdır.

(d)$A \in (bv^p, \ell_\infty)$ ise bu takdirde Lemma 4.1.2'den

$$\|A\|_{bv^p}^* = \|L_A\|$$

yazılabilir. Bu takdirde, $\forall n \in \mathbb{N}_0$

$$\|A\|_{bv^p}^* = \sup_n \|A_n\|_{bv^p}^*$$

dir. Teorem 3.1.1'den dolayı sonuç elde edilir.

$$(bv^p, c_0) \subset (bv^p, c) \subset (bv^p, \ell_\infty)$$

olduğundan $Y = c_0$ veya $Y = c$ olduğunda da ispat benzer verilebilir.

Lemma 4.1.3. X, $X \supset \Phi$ olacak şekilde bir BK-uzayı ve An de Tanım 1.1.22 de ki gibi tanımlansın. $A \in (X, \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\|A\|_{(X,\ell_1)} = \sup_{\substack{N \subset \mathbb{N}_0 \\ N-sonlu}} \left\| \sum_{n \in N} A_n \right\| < \infty \tag{4.1.25}$$

olmasıdır (Malkowsky, 1987).

Ayrıca,$A \in (X, \ell_1)$ ise, bu takdirde

$$\|A\|_{(X,\ell_1)} \leq \|L_A\| \leq 4\|A\|_{(X,\ell_1)} \tag{4.1.26}$$

dir (Malkowsky ve ark., 2002).

İspat . $A \in (X, \ell_1)$ ve $m \in \mathbb{N}_0$ olsun. Bu takdirde, Lemma 1.1.1'den dolayı $L_A(x) = A(x)$ olacak şekilde en az bir $L_A \in B(X, \ell_1)$ operatörü vardır. Bu yüzdende

$$\|L_A(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_1 \tag{4.1.27}$$

dır. Bu takdirde $\forall N \subset \{0, ..., m\}$ ve $\|x\| = 1$ olacak şekilde ki her bir $x \in X$,

$$\begin{aligned} \left|\sum_{n\in N} A_n(x)\right| &\leq \sum_{n=0}^{m} |A_n(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |A_n(x)| \\ \Rightarrow \|A\|_{(X,\ell_1)} &= \sup_{\substack{N \subset \mathbb{N}_0 \\ N - sonlu}} \left|\sum_{n\in N} A_n(x)\right| \leq \sup_n \|A(x)\|_1 = \|L_A\| \\ \Rightarrow \|A\|_{(X,\ell_1)} &\leq \|L_A\| \end{aligned} \tag{4.1.28}$$

elde edilir. 4.1.27 ve supremumun özelliğinden dolayı $\forall \epsilon > 0$ ve $\|x\| = 1$ şartını sağlayan her bir $x \in X \quad \ni$

$$\|A(x)\|_1 \geq \|L_A\| - \frac{\epsilon}{2} \tag{4.1.29}$$

kalır. Ayrıca, 4.1.25 ve supremumun özelliğinden dolayı da $\forall \epsilon > 0$ ve $\|x\| = 1$ şartını sağlayan her bir $x \in X \quad \ni$

$$\sum_{n=0}^{m(x)} |A_n(x)| \geq \|A(x)\|_1 - \frac{\epsilon}{2} \tag{4.1.30}$$

kalır. 4.1.29 ve 4.1.30 den dolayı

$$\sum_{n=0}^{m(x)} |A_n(x)| \geq \|A(x)\|_1 - \frac{\epsilon}{2} \geq \|L_A\| - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} = \|L_A\| - \epsilon$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{m(x)} |A_n(x)| \geq \|L_A\| - \epsilon \tag{4.1.31}$$

yazılabilir. Lemma 1.1.5 ve 4.1.31 den dolayı

$$4. \max_{N \subset \{0,\ldots,m(x)\}} \left| \sum_{n \in N} A_n(x) \right| \geq \sum_{n=0}^{m(x)} |A_n(x)| \geq \|L_A\| - \epsilon \tag{4.1.32}$$

elde edilir. 4.1.32'den

$$4.\|A\|_{(X,\ell_1)} \geq \|L_A\| - \epsilon$$

yazılabilir. $\epsilon > 0$ keyfi olduğundan,

$$4.\|A\|_{(X,\ell_1)} \geq \|L_A\| \tag{4.1.33}$$

yazılabilir. 4.1.28 ve 4.1.34 den dolayıda

$$\|A\|_{(X,\ell_1)} \leq \|L_A\| \leq 4.\|A\|_{(X,\ell_1)} \tag{4.1.34}$$

elde edilir.

Lemma 4.1.4. *X ve Y, ω' nın keyfi alt cümleleri olsun.*
(a)$A \in (X, Y_T)$ *olması için gerek ve yeter şart* $B = TA \in (X, Y)$ *olmasıdır.*
(b) *Eğer X ve Y BK uzayları ve $A \in (X, Y_T)$ ise*

$$\|L_A\| = \|L_B\| \tag{4.1.35}$$

dir (Malkowsky ve Rakočević, 2000).

İspat . (a)$A \in (X, Y_T)$ olsun. Bu takdirde A, X den Y_T ye bir matris dönüşümüdür.

$$\begin{aligned} A \in (X, Y_T) &\Leftrightarrow \forall x \in X,\ y = A(x) \in Y_T \\ &\Leftrightarrow \forall x \in X,\ T(y) = T(A(x)) \in Y \\ &\Leftrightarrow \forall x \in X,\ (TA)(x) \in Y \\ &\Leftrightarrow \forall x \in X,\ B = (TA)(x) \in Y. \end{aligned}$$

(b) X ve Y BK uzayları ve $A \in (X, Y_T)$ olsun. Bu takdirde, $\forall x \in X,\ y = A(x) \in Y_T$ dir. Y bir BK uzayı ve T bir üçgensel matris olduğundan, $y \in Y_T$,

$$\|y\|_{Y_T} = \|T(y)\|_Y \tag{4.1.36}$$

normuna göre Y_T bir BK uzayıdır. Teorem 2.1.8 'den dolayı A dönüşümü süreklidir. Ayrıca, her $A \in (X, Y)$ matrisi ve her $x \in X$,

$$L_A(x) = A(x) \tag{4.1.37}$$

olacak şekilde bir L_A operatörü vardır ve

$$\begin{aligned} \|L_A\| &= \sup\{\|L_A(x)\|_{Y_T} : \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{\|A(x)\|_{Y_T} : \|x\| = 1\} \\ &< \infty \end{aligned}$$

dir. Bununla beraber $B = TA$, sürekli olmasından ve 4.1.36 eşitliğinden,

$$\begin{aligned} \|L_B\| &= \sup\{\|L_B(x)\|_Y : \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{\|B(x)\|_Y : \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{\|(TA)(x)\|_Y : \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{\|T(A(x))\|_Y : \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{\|A(x)\|_{Y_T} : \|x\| = 1\} \\ &= \|L_A\| \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem 4.1.2. **(a)** $A \in (bv^p, \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart $\forall n \in \mathbb{N}_0$,

$$\sup_k \left(k^{1/q} \left| \sum_{j=k}^{\infty} a_{nj} \right| \right) < \infty \tag{4.1.38}$$

sağlanır ve

$$\|A\|_{(bv^p,\ell_1)} = \sup_{\substack{N \subset \mathbb{N}_0 \\ N - sonlu}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{n \in N} \left(\sum_{j=k}^{\infty} a_{nj} \right) \right|^q \right)^{1/q} < \infty. \quad (4.1.39)$$

Ayrıca, $A \in (bv^p, \ell_1)$ ise, bu takdirde

$$\|A\|_{(bv^p,\ell_1)} \leq \|L_A\| \leq 4.\|A\|_{(bv^p,\ell_1)}. \quad (4.1.40)$$

(b) $A \in (bv^p, bv)$ olması için gerek ve yeter şart $\forall n$,

$$\sup_k \left(k^{1/q} \left| \sum_{j=k}^{\infty} a_{nj} \right| \right) < \infty \quad (4.1.41)$$

sağlanır ve

$$\|A\|_{(bv^p,bv)} = \sup_{\substack{N \subset \mathbb{N}_0 \\ N - sonlu}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{n \in N} \left(\sum_{j=k}^{\infty} (a_{nj} - a_{n-1,j}) \right) \right|^q \right)^{1/q} < \infty. \quad (4.1.42)$$

Ayrıca,$A \in (bv^p, bv)$ ise, bu takdirde

$$\|A\|_{(bv^p,bv)} \leq \|L_A\| \leq 4.\|A\|_{(bv^p,bv)}. \quad (4.1.43)$$

(Malkowsky ve ark., 2002).

İspat . (a) 3.1.18'den dolayı $M(bv^p, c) = M(bv^p, c_0)$ dır. O halde, Lemma 4.1.1'in bütün şartları sağlanır.

$$r_{nk}^A = \sum_{j=k}^{\infty} a_{nj}$$

olsun.

Bu takdirde, $A \in (bv^p, \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart

(i) $R^A \in (\ell_p, \ell_1)$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}_0, R_n^A \in M(bv^p, c_0)$

olmasıdır. (i) den ve Lemma 1.1.5'ten dolayı

$$R^A \in (\ell_p, \ell_1) \Leftrightarrow \sup_N \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{n \in N} \left(\sum_{j=k}^{\infty} a_{nj} \right) \right|^q < \infty$$

yazılabilir. Bu takdirde 3.1.2 şartı sağlanır.
(ii), 3.1.2 ve 3.1.18'den dolayı $M(bv^p, c) = M(bv^p, c_0) = M(bv^p)$ ve

$$M(bv^p) = \left((k^{1/q})_{k=0}^{\infty} \right)^{-1} * \ell_\infty \tag{4.1.44}$$

yazılabilir. (ii) ve 4.1.44'den dolayı $\forall n \in \mathbb{N}_0$,

$$R_n^A \in M(bv^p, c_0) \Leftrightarrow k^{1/q}(r_{nk}^A) \in \ell_\infty \Leftrightarrow \sup_k k^{1/q} |r_{nk}^A| = \sup_k k^{1/q} \left| \sum_{j=k}^{\infty} a_{nj} \right| < \infty$$

dur. Bu ise 4.1.38 şartının sağlanığını gösterir.
Ayrıca, $A \in (bv^p, \ell_1)$ ise Lemma 4.1.3.'te $X = (bv^p)$ alınırsa,

$$\|A\|_{(bv^p, \ell_1)} \le \|L_A\| \le 4\|A\|_{(bv^p, \ell_1)} \tag{4.1.45}$$

elde edilir.
(b) 3.1.18 den dolayı $M(bv^p, c) = M(bv^p, c_0)$ dır. O halde, Lemma 4.1.1.'in bütün şartları sağlanır.

$$r_{nk}^A = \sum_{j=k}^{\infty} a_{nj}$$

olsun.
Bu takdirde, $A \in (bv^p, bv)$ olması için gerek ve yeter şart
(i) $R^A \in (\ell_p, bv)$
(ii) $\forall n \in \mathbb{N}_0, R_n^A \in M(bv^p, c_0)$
olmasıdır. (i) den ve Lemma 1.1.9'dan dolayı

$$R^A \in (\ell_p, bv) \Leftrightarrow \sup_N \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{n \in N} \left(\sum_{j=k}^{\infty} (a_{nj} - a_{n-1,j}) \right) \right|^q < \infty$$

yazılabilir. Bu takdirde 4.1.42 şartı sağlanır.

(a)'dan (ii) şartının 4.1.41 şartını gerektirdiği açıktır.

Ayrıca, $A \in (bv^p, bv)$ ise $bv = (\ell_1)_\Delta$ olduğundan Lemma 4.1.4'den dolayı $A \in (bv^p, bv)$ ise $B = \Delta A \in (bv^p, \ell_1)$ dir. Bu yüzdende Lemma 4.1.3.'ten dolayı

$$\|B\|_{(bv^p,\ell_1)} \leq \|L_B\| \leq 4\|B\|_{(bv^p,\ell_1)} \tag{4.1.46}$$

yazılabilir. Ayrıca, 4.1.39'den

$$\|B\|_{(bv^p,\ell_1)} = \sup_{\substack{N \subset \mathbb{N}_0 \\ N - sonlu}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left|\sum_{n\in N} \left(\sum_{j=k}^{\infty} (b_{nj})\right)\right|^q\right)^{1/q} < \infty. \tag{4.1.47}$$

yazılabilir. $B = (b_{nk})$ ve $B = \Delta A = (a_{nk} - a_{n-1,k})$ olduğundan 4.1.42 ve 4.1.47'den

$$\begin{aligned} \|B\|_{(bv^p,\ell_1)} &= \sup_{\substack{N \subset \mathbb{N}_0 \\ N - sonlu}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left|\sum_{n\in N} \left(\sum_{j=k}^{\infty} (a_{nj} - a_{n-1,j})\right)\right|^q\right)^{1/q} \\ &= \|A\|_{(bv^p,bv)} \end{aligned} \tag{4.1.48}$$

elde edilir. 4.1.48 ve 4.1.46'den dolayı 4.1.43 şartı sağlanır. Yani,

$$\|A\|_{(bv^p,bv)} \leq \|L_A\| \leq 4.\|A\|_{(bv^p,bv)}$$

dir.

5. NON-KOMPAKTLIK ÖLÇÜMÜ VE DÖNÜŞÜMLERİ

5.1 Non-Kompaktlık Hausdorff Ölçümü ve Kompakt Operatörler

Bu bölümde, $(bv^p, \ell_\infty), (bv^p, c)$ (bv^p, c_0), (bv^p, ℓ_1) ve (bv^p, bv) arasındaki bir lineer operatörün kompakt olması için operatör üzerine hangi şartların konulması gerektiği non-kompaktlık Haussdorff ölçümü kullanılarak belirlendi.

Tanım 5.1.1. X, bir metrik uzay ve Q, X'in sınırlı bir alt kümesi olsun.

$$\begin{aligned} \chi(Q) &= \inf\{\epsilon \in \mathbb{R}^+ : Q, X'\text{de sonlu bir } \epsilon\text{-nete sahiptir}\} \\ &= \inf\{\epsilon \in \mathbb{R}^+ : Q \subset \cup_{i=1}^n B(x_i, r_i), x_i \in X, r_i < \epsilon\} \end{aligned}$$

cümlesine Q'nun non-kompaktlık Hausdorf ölçümü denir (Malkowsky ve ark., 2002).

Lemma 5.1.1. (X, d), bir metrik uzay ve Q, Q_1 ve Q_2 X metrik uzayının alt cümleleri olsun. Bu takdirde,

(i) $\chi(Q) = 0 \Leftrightarrow Q$, total sınırlı cümledir.

(ii) $Q_1 \subset Q_2 \Rightarrow \chi(Q_1) \leq \chi(Q_2)$

(iii) $\chi(Q) = \chi(\overline{Q})$

(iv) $\chi(Q_1 \cup Q_2) = \max\{\chi(Q_1), \chi(Q_2)\}$

(v) $\chi(Q_1 \cap Q_2) \leq \min\{\chi(Q_1), \chi(Q_2)\}$

dir (Malkowsky ve Rakočević, 2000).

İspat . (i) $\chi(Q) = 0$ olsun. Tanım 5.1.1'den

$$\inf\{\epsilon \in \mathbb{R}^+ : Q \subset \cup_{i=1}^n B(x_i, r_i), x_i \in X, r_i < \epsilon\} = 0$$

dır. İnfimumun II. özelliğinden

$$\forall\delta > 0, \exists\epsilon_0 \in \mathbb{R}^+ \ni \epsilon_0 < 0 + \delta \text{ ve } Q \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i)\ ,\ r_i < \epsilon_0$$

kalır. Bu yüzdende,

$$\forall\delta > 0, r_i < \delta \text{ ve } Q \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i)$$

dir. O halde Q, total sınırlıdır.
Tersine Q, total sınırlı olsun. Bu takdirde,

$$\forall\epsilon > 0, r_i < \epsilon \text{ ve } Q \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i)$$

dir. Dolayısıyla da,

$$\{\epsilon \in \mathbb{R}^+ : Q \subset \cup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i), x_i \in X, r_i < \epsilon\} \tag{5.1.1}$$

cümlesi tanımlanabilir. Q, total sınırlı ve $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ olduğundan 5.1.1 cümlesinin infimumu sıfır olur. O halde, $\chi(Q) = 0$ dır.
(ii) $Q_1 \subset Q_2$ olsun. $\chi(Q_1)$'in tanımı ve infimumun I. özelliğinden
$Q_1 \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i)$ ve $r_i < \epsilon$ şartını sağlayan $\forall\epsilon > 0$,

$$\chi(Q_1) \leq \epsilon \tag{5.1.2}$$

kalır ve $\chi(Q_2)$'in tanımı ve infimumun II. özelliğinden
$Q_2 \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i)$ ve $r_i < \epsilon$ şartını sağlayan $\forall\delta > 0, \exists\epsilon_0 > 0 \ni$

$$\epsilon_0 < \chi(Q_2) + \delta \tag{5.1.3}$$

kalır. 5.1.2 $\forall\epsilon > 0$ için doğru olduğundan ϵ_0 içinde doğrudur. O halde 5.1.2 ve 5.1.3 birleştirilirse, $Q_1 \subset Q_2 \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i)$ ve $r_i < \epsilon$ şartını sağlayan $\forall\delta > 0, \exists\epsilon_0 > 0 \ni$

$$\begin{aligned} \chi(Q_1) &\leq \epsilon_0 < \chi(Q_2) + \delta \\ \Rightarrow \quad \chi(Q_1) &< \chi(Q_2) + \delta \end{aligned}$$

kalır. Bu yüzdende

$$\chi(Q_1) \leq \chi(Q_2)$$

dir.

(iii)

$$Q \subset \overline{Q} \Rightarrow \chi(Q) \leq \chi(\overline{Q}) \tag{5.1.4}$$

Diğer taraftan, $\chi(Q)$'in tanımından $Q \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i)$ ve $r_i < \epsilon$ şartını sağlayan $\forall\delta > 0, \exists\epsilon_0 > 0 \ni$

$$\epsilon_0 < \chi(Q) + \delta \tag{5.1.5}$$

kalır.

$$Q \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i) \Rightarrow \overline{Q} \subset \overline{\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i)} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B(x_i, r_i)}$$

dir. Ayrıca, $\overline{B(x_i, r_i)}$ ile $B(x_i, r_i)$'nin yarıçapları aynı olduğundan

$$\overline{Q} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B(x_i, r_i)}, r_i < \epsilon$$

şartını sağlayan $\forall\epsilon > 0$,

$$\chi(\overline{Q}) < \epsilon \tag{5.1.6}$$

kalır. 5.1.5 ve 5.1.6 birleştirilirse, $\forall\delta > 0, \exists\epsilon_0 > 0 \ni$

$$\begin{aligned} \chi(\overline{Q}) &\leq \epsilon_0 < \chi(Q) + \delta \\ \Rightarrow \quad \chi(\overline{Q}) &< \chi(Q) + \delta \end{aligned}$$

kalır. Bu yüzdende

$$\chi(\overline{Q}) \leq \chi(Q_2) \tag{5.1.7}$$

dir. 5.1.4 ve 5.1.7 birleştirilirse

$$\chi(Q) = \chi(\overline{Q})$$

elde edilir.

(iv) $Q_1 \subset Q_1 \cup Q_2$ ve $Q_2 \subset Q_1 \cup Q_2$ olduğundan (ii)'den

$$\chi(Q_1) \subset \chi(Q_1 \cup Q_2) \quad ve \quad \chi(Q_2) \subset \chi(Q_1 \cup Q_2)$$

yazılabilir. Bu yüzdende,

$$\max\{\chi(Q_1), \chi(Q_1)\} \leq \chi(Q_1 \cup Q_2) \tag{5.1.8}$$

elde edilir.

Tersine, $\max\{\chi(Q_1), \chi(Q_1)\} = s$ ve $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ olsun. Tanım 5.1.1'den

$$Q_1 \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i), Q_2 \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, r_j),\ r_i < s + \epsilon,\ \ r_j < s + \epsilon$$

elde edilir. Bu yüzdende,

$$Q_1 \cup Q_2 \subset \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} \{B(x_i, r_i) \cup B(x_j, r_j)\} \subset \bigcup_{k=1}^{n+m} B(x_k, r_k) \text{ ve } r_k < s + \epsilon$$

dir. Bu takdirde,

$$\forall \epsilon > 0, \chi(Q_1 \cup Q_2) \leq s + \epsilon$$

elde edilir. O halde

$$\chi(Q_1 \cup Q_2) \leq s$$

yani,

$$\chi(Q_1 \cup Q_2) \leq \max\{\chi(Q_1, Q_2)\} \tag{5.1.9}$$

dir. 5.1.8 ve 5.1.9 birleştirilirse (iv) elde edilir.

(v) $Q_1 \cap Q_2 \subset Q_1$ ve $Q_1 \cap Q_2 \subset Q_2$ olduğundan (ii)'den

$$\chi(Q_1 \cap Q_2) \subset \chi(Q_1) \quad ve \quad \chi(Q_1 \cap Q_2) \subset \chi(Q_2)$$

yazılabilir. Bu yüzdende,

$$\chi(Q_1 \cap Q_2) \leq \min\{\chi(Q_1), \chi(Q_1)\}$$

elde edilir.

Lemma 5.1.2. (X, d), bir nomlu uzay ve Q, Q_1 ve Q_2 X normlu uzayının alt cümleleri olsun. Bu takdirde,

(i) $\chi(Q_1 + Q_2) \leq \chi(Q_1) + \chi(Q_2)$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \chi(\lambda Q) = |\lambda|\chi(Q)$

(iii) $\forall x \in X, \chi(Q + x) = \chi(Q)$

dir(Malkowsky ve Rakočević, 2000).

İspat . (i) $\epsilon > 0$ olsun. Ayrıca $\{x_1, ..., x_n\}$ ve $\{y_1, ..., y_n\}$ sırasıyla Q_1 ve Q_2 nin $[\chi(Q_1) + \epsilon]-$ ve $[\chi(Q_2) + \epsilon]-$ neti olsun. Bu takdirde

$$Q_1 \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i) \text{ ve } r_i < \chi(Q_1) + \epsilon \tag{5.1.10}$$

$$Q_2 \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, r_j) \text{ ve } r_j < \chi(Q_2) + \epsilon \tag{5.1.11}$$

dir. 5.1.10 ve 5.1.11 birleştirilirse,

$$\begin{aligned} Q_1 + Q_2 \quad &\subset \quad \bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m}\{B(x_i, r_i) + B(x_j, r_j)\} \\ &\subset \quad \bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j}^{m}\{x_i + y_i B(\theta, r_i) + B(\theta, r_j)\} \\ &\subset \quad \bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j}^{m}\{x_i + y_i B(\theta, r_i + r_j)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j}^{m} B(x_i + y_i, r_i + r_j) \\ \Rightarrow Q_1 + Q_2 &\subset \bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j}^{m} B(x_i + y_i, r_i + r_j), \qquad r_i + r_j < \chi(Q_1) + \chi(Q_2) + 2\epsilon \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu takdirde $\forall\epsilon > 0$,

$$\chi(Q_1 + Q_2) \leq \chi(Q_1) + \chi(Q_2) + 2\epsilon$$

dir. Bu yüzdende

$$\chi(Q_1 + Q_2) \leq \chi(Q_1) + \chi(Q_2)$$

dir.

(ii) $\lambda = 0$ ise eşitlik açıktır. $\lambda \neq 0$ olsun. Ayrıca, $\chi(Q)$'nun tanımından $\epsilon > 0$,

$$Q \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i) \text{ ve } r_i < \epsilon$$

$$\begin{aligned} \lambda Q &\subset \bigcup_{i=1}^{n}\{\lambda B(x_i, r_i)\} \\ &= \bigcup_{i=1}^{n}\{\lambda(x_i + B(\theta, r_i))\} \\ &= \bigcup_{i=1}^{n}\{\lambda x_i + \lambda B(\theta, r_i)\} \\ &= \bigcup_{i=1}^{n}\{\lambda x_i + B(\theta, |\lambda| r_i)\} \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} B(\lambda x_i, |\lambda| r_i) \\ \Rightarrow \lambda Q &\subset \bigcup_{i=1}^{n} B(\lambda x_i, |\lambda| r_i), \qquad |\lambda| r_i < |\lambda|\epsilon \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu takdirde Tanım 5.1.1'den $\forall\epsilon > 0$,

$$\chi(\lambda Q) \leq |\lambda|\epsilon \leq |\lambda|\chi(Q)$$

dir. Bu yüzdende

$$\chi(\lambda Q) \leq |\lambda|\chi(Q) \tag{5.1.12}$$

dır.

Tersine,

$$\chi(Q) = \chi(\lambda^{-1}(\lambda Q)) \leq |\lambda|^{-1}\chi(\lambda Q) \tag{5.1.13}$$
$$\Rightarrow \|\lambda\|\chi(Q) \leq |\lambda|^{-1}\chi(\lambda Q) \tag{5.1.14}$$

dir. 5.1.12 ve 5.1.13 birleştirilirse

$$\chi(\lambda Q) = |\lambda|\chi(Q)$$

elde edilir.

(iii) $x \in X$ olsun.

$$\chi(Q + x) = \chi(Q) + \chi(\{x\}) = \chi(Q) \tag{5.1.15}$$

dir. Benzer şekilde,

$$\chi(Q) = \chi(Q + x - x) \leq \chi(Q + x) + \chi(\{-x\}) = \chi(Q + x) \tag{5.1.16}$$

5.1.15 ve 5.1.16 birleştirilirse

$$\chi(Q + x) = \chi(Q)$$

elde edilir.

Lemma 5.1.3. X, Schauder bazı $\{e_1, e_2, ...\}$ olan bir Banach uzayı ve Q, X'in sınırlı bir alt cümlesi olsun. Eğer P_n operatörü, $\forall x = (x_k)$ dizileri için,

$$P_n : X \to X, P_n(x) = x^{[n]} = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...)$$

şeklinde tanımlanıyorsa,

$$\chi(Q) = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in Q} \|(I - P_n)(x)\| \tag{5.1.17}$$

dir (Malkowsky ve Rakočević, 2000).

İspat . $\forall n \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned} Q \subset Q &\Rightarrow Q \subset IQ \\ &\Rightarrow Q \subset P_nQ + (I - P_n)Q \end{aligned}$$

olduğu açıktır. Lemma 5.1.1 ve Lemma 5.1.2'den dolayı,

$$\begin{aligned} \chi(Q) \le \chi(P_nQ + (I - P_n)Q) &\le \chi(P_nQ) + \chi((I - P_n)Q) \\ &= \chi((I - P_n)Q) \\ &\le \sup_{x\in Q} \|(I - P_n)x\| \end{aligned}$$

dir. $n \to \infty$ iken limite geçilirse,

$$\chi(Q) \le \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in Q} \|(I - P_n)x\| \tag{5.1.18}$$

elde edilir.

Tersine, $\epsilon > 0$ ve $\{z_1, z_2, ..., z_k\}$, Q'nun bir $[\chi(Q) + \epsilon]$- neti olsun. Bu takdirde;

$$Q \subset \{z_1, ..., z_k\} + [\chi(Q) + \epsilon]B_X \tag{5.1.19}$$

dir. 5.1.19 den $\forall x \in Q, \exists z \in \{z_1, ..., z_k\}$ ve $s \in B_X \ni$

$$x = z + [\chi(Q) + \epsilon]s$$

kalır. Bu yüzdende,

$$\sup_{x\in Q} \|(I - P_n)Q\| \le \sup_{1\le i\le k} \|(I - P_n)z_i\| + [\chi(Q) + \epsilon] \tag{5.1.20}$$

dir. 5.1.20 de limite geçilirse,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in Q}\|(I-P_n)x\| &\leq \chi(Q)+\epsilon \\ \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in Q}\|(I-P_n)x\| &\leq \chi(Q) \qquad (5.1.21)\end{aligned}$$

elde edilir. 5.1.18 ve 5.1.21 birleştirilirse, 5.1.17 elde edilir.

Lemma 5.1.4. X, Schauder bazı $\{e_1, e_2, ...\}$ olan bir Banach uzayı ve Q, X'in sınırlı bir alt cümlesi olsun.

$$P_n : X \to X$$

operatörü $\{e_1, e_2, ...\}$ lineer geren sistemi üzerinde izdüşüm operatörü olsun. Bu takdirde,

$$a = \lim_{n\to\infty}\sup \|I - P_n\|$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}\sup\,(\sup_{x\in Q}\|(I-P_n)(x)\|) &\leq \chi(Q) \leq \\ &\leq \inf_n \sup_{x\in Q}\|(I-P_n)(x)\| \leq \\ &\leq \lim_{n\to\infty}\sup\,(\sup_{x\in Q}\|(I-P_n)(x)\|) \qquad (5.1.22)\end{aligned}$$

dir (Malkowsky ve Rakočević, 2000).

İspat . $\forall n \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned}Q \subset Q &\Rightarrow Q \subset IQ \\ &\Rightarrow Q \subset P_nQ + (I-P_n)Q\end{aligned}$$

olduğu açıktır. Lemma 5.1.1 ve Lemma 5.1.2'den dolayı,

$$\begin{aligned}\chi(Q) = \chi(P_nQ + (I-P_n)Q) &\leq \chi(P_nQ) + \chi((I-P_n)Q) \\ &= \chi((I-P_n)Q) \\ &\leq \sup_{x\in Q}\|(I-P_n)x\|\end{aligned}$$

dir. Bu yüzdende,

$$\chi(Q) \leq \inf_n \sup_{x\in Q} \|(I-P_n)x\| \leq \lim_{n\to\infty} \sup (\sup_{x\in Q} \|(I-P_n)(x)\|) \tag{5.1.23}$$

elde edilir.

$\epsilon > 0$ ve $\{z_1, z_2, ..., z_k\}$, Q'nun bir $[\chi(Q)+\epsilon]$- neti olsun. Bu takdirde;

$$Q \subset \{z_1, ..., z_k\} + [\chi(Q)+\epsilon]B_X \tag{5.1.24}$$

dir. 5.1.24 den $\forall x \in Q, \exists z \in \{z_1, ..., z_k\}$ ve $s \in B_X \ni$

$$x = z + [\chi(Q)+\epsilon]s$$

kalır. Bu yüzdende,

$$\sup_{x\in Q} \|(I-P_n)Q\| \leq \sup_{1\leq i\leq k} \|(I-P_n)z_i\| + [\chi(Q)+\epsilon]\|I-P_n\|$$

dir. Bu yüzdende,

$$\lim_{n\to\infty} \sup \|(I-P_n)Q\| \leq (\chi(Q)+\epsilon) \lim_{n\to\infty} \sup \|I-P_n\| \tag{5.1.25}$$

elde edilir. 5.1.23 ve 5.1.25 birleştirilirse, 5.1.22 elde edilir.

Lemma 5.1.5. X ve Y, Banach uzayı ve $L \in B(X,Y)$ olsun. Bu takdirde,

$$K = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

olmak üzere

$$\|L\|_\chi = \chi(L(K)) \tag{5.1.26}$$

dir (Malkowsky ve Rakočević, 2000).

Lemma 5.1.6. X ve Y, Banach uzayı ve $L \in B(X,Y)$ olsun. Bu takdirde $\|.\|_\chi$, $B(X,Y)$ üzerinde yarı normdur ve

(i) $\|L\|_\chi = 0 \Leftrightarrow L \in K(X,Y)$

(ii) $\|L\|_\chi \leq \|L\|$.

(Malkowsky ve Rakočević, 2000).

İspat . (i) $\|.\|_\chi$'nin yarınorm olduğu Lemma 5.1.2'den görülebilir.
(i) $\|L\|_\chi = 0$ olsun. Lemma 5.1.4'den

$$\|L\|_\chi = \chi(L(K)) = 0$$

olur. Bu yüzden de, Lemma 5.1.1'den $L(K)$ total sınırlıdır.
(x_n), X'de keyfi sınırlı bir dizi olsun. Bu takdirde

$$\exists M > 0 \ni \forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| \leq M$$

kalır. $y_n = \frac{x_n}{M}$ olarak alınırsa, $\|y_n\| \leq 1$ olur. Yani, $(y_n) \in K$ dır. Dolayısıyla $(L(y_n))$, $L(K)$ 'de bir dizidir. $L(K)$ total sınırlı olduğundan sonlu $1-$ neti vardır ve bu netin açık yuvarlarından en az biri (y_n) dizisinin bir $(y_n^{(1)})$ alt dizisini içerir. Bu yuvar, $B(z,1)$ olsun. Aynı şekilde, $(y_n^{(1)})$ dizisinin bir $(y_n^{(2)})$ alt dizisini içeren $\frac{1}{2}-$ neti ve bir $B(z,\frac{1}{2})$ yuvarı vardır. Bu şekilde devam edilirse,

$$(y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, ..., y_n^{(i)}, ...)$$

alt dizisi elde edilir. Bu takdirde,

$$y_n^{(i)}, y_n^{(j)} \in B(z, \frac{1}{N})$$

dir. bu takdirde,

$$\|y_n^{(i)} - y_n^{(j)}\| \leq \|y_n^{(i)} - z\| + \|z - y_n^{(j)}\| < \frac{2}{N}$$

dir.O halde, $\forall i \in \mathbb{N}$ için $(y_n^{(i)})$ alt dizisi bir Cauchy dizisidir. Ayrıca, Y, bir Banach uzayı olduğundan, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$y_n^{(i)} \to z \qquad (i \to \infty)$$

dir. Bu yüzdende L kompakt operatördür.
Tersi için L kompakt olsun. Dolayısıyla da ön kompakt (relatif kompakt) olacağından

$\overline{L(K)}$ kompakttır. Bu takdirde, $\forall\epsilon > 0, \exists n = n(\epsilon) \in \mathbb{N} \ni$

$$\overline{L(K)} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon) \tag{5.1.27}$$

kalır. Bu yüzdende Lemma 5.1.1, Lemma 5.1.5 ve 5.1.27'den $\forall\epsilon > 0$,

$$\|L\|_\chi = \chi(L(K)) \leq \chi(\overline{L(K)}) \leq \epsilon \tag{5.1.28}$$

elde edilir. Bu ise L operatörünün total sınırlı olduğunu gösterir. Bu takdir de, Lemma 5.1.1'den

$$\|L\|_\chi = 0$$

dır.

(ii) $\|L\| = \inf\{k : \forall x \in X, \|L(x)\| \leq k\|x\|\}$
olduğundan infimumun II. özelliğinden,

$$\forall\epsilon > 0, k = k_\epsilon \in \mathbb{N} \ni k < \|L\| + \epsilon$$

yazılabilir. $L(K)$'nın sonlu $k-$ neti alınsın. Bu takdirde, $\chi(L(K))$ in tanımından

$$L(K) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, k)$$

elde edilir. Buradan da $\forall\epsilon > 0$,

$$\|L\|_\chi = \chi(L(K)) \leq k < \|L\| + \epsilon$$

dır. Bu yüzden de,

$$\|L\|_\chi \leq \|L\|$$

dir.

Teorem 5.1.1. A, sonsuz bir matris ve $1 < p < \infty,\ q = p/(p-1)$ olsun. Ayrıca n>r olacak her n ve r tamsayıları için,

$$\|A\|^{(r)}_{(bv^p,\ell_\infty)} = \sup_{n>r}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\sum_{j=k}^{\infty} a_{nj}\right|^q\right)^{1/q} < \infty$$

olsun.

(a) $A \in (bv^p, c_0)$ ise, bu takdirde

$$\|L_A\|_\chi = \lim_{r\to\infty} \|A\|^{(r)}_{(bv^p,\ell_\infty)} \tag{5.1.29}$$

dır.

(b) $A \in (bv^p, c)$ ise, bu takdirde $\forall n$,

$$\frac{1}{2}\lim_{r\to\infty} \|A\|^{(r)}_{(bv^p,\ell_\infty)} \leq \|L_A\|_\chi \leq \lim_{r\to\infty} \|A\|^{(r)}_{(bv^p,\ell_\infty)} \tag{5.1.30}$$

dır.

(c) $A \in (bv^p, \ell_\infty)$ ise, bu takdirde $\forall n$,

$$0 \leq \|L_A\|_\chi \leq \lim_{r\to\infty} \|A\|^{(r)}_{(bv^p,\ell_\infty)} \tag{5.1.31}$$

dır.

(Malkowsky ve ark., 2002).

İspat . Teorem 4.1.1'den 5.1.29, 5.1.30 ve 5.1.31'deki limitler mevcuttur.

(a)

$$K = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

ile bv^p nin birim yuvarı gösterilsin. $P_r : c_0 \to c_0$ $(r = 0, 1, 2, ...)$, $x = (x_k) \in c_0$,

$$P_r(x) = (x_0, x_1, x_2, ..., x_r, 0, 0, ...)$$

şeklinde bir projektor dönüşümü olsun. O halde,

$$\begin{aligned} \|I - Pr\| &= \sup_{\substack{x \neq \theta \\ x \in c_0}} \frac{\|(I - Pr)(x)\|}{\|x\|} \\ &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu takdirde Lemma 5.1.3. ve Lemma 5.1.5'den

$$\|L_A\|_\chi = \chi(AK) = \lim_{r\to\infty} \left[\sup_{x\in K} \|(I - P_r)Ax\|\right] \tag{5.1.32}$$

yazılabilir.

$$\tilde{a}_{nk} = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq n \leq r \\ a_{nk} & , \quad r < n \end{cases}$$

ile $A_{(r)} = (\tilde{a}_{nk})$ sonsuz matrisini tanımlayalım. O halde Teorem 4.1.1 (d) den

$$\sup_{x \in K} \|(I - P_r)Ax\| = \|L_{A_{(r)}}\| = \|A_{(r)}\|_{(bv^p, \ell_\infty)} = \|A\|^r_{(bv^p, \ell_\infty)} \tag{5.1.33}$$

bulunur. Bu yüzden de 5.1.32 ve 5.1.33 ten 5.1.29 elde edilir.

(b) Her $x = (x_k) \in c$ dizisi, $x - \ell e \in c_0$ olacak şekildeki $\ell \in \mathbb{C}$,

$$x = \ell e + \sum_{k=0}^{\infty} (x_k - \ell) e^{(k)}$$

şeklinde bir tek gösterimine sahiptir. $P_r : c \to c$

$$P_r(x) = \ell e + \sum_{k=0}^{r} (x_k - \ell) e^{(k)}, \quad (r = 0, 1, 2, ...)$$

olsun. Kolayca ispatlanabilir ki; $\|I - Pr\| = 2, r = 0, 1, 2, ...$ dir.

Bu yüzdende; (a) şıkkının ispatına benzer şekilde ispat tamamlanır.

(c) $x = (x_k) \in \ell_\infty$ ve $P_r : \ell_\infty \to \ell_\infty$

$$P_r(x) = (x_0, x_1, x_2, ..., x_r, 0, 0, ...), \quad (r = 0, 1, 2, ...)$$

olsun. Bu yüzden de

$$AK \subset P_r(AK) + (I - P_r)(AK)$$

yazılabilir. χ fonksiyonunun elementer özelliklerini kullanarak,

$$\begin{aligned} \chi(AK) &\leq \chi(P_r(AK)) + \chi((I - P_r)(AK)) \\ &= \chi((I - P_r)(AK)) \\ &\leq \sup_{x \in K} \|(I - Pr)Ax\| \\ &= \|L_{A_{(r)}}\| \end{aligned} \tag{5.1.34}$$

yazılabilir. 5.1.34 ve Teorem 4.1.1 (d)'den

$$0 \leq \|L_A\|_\chi \leq \lim_{r\to\infty} \|A\|^{(r)}_{(bv^p,\ell_\infty)}$$

elde edilir.

Sonuç 5.1.1. $A \in (bv^p, c_0)$ ya da $A \in (bv^p, c)$ ise bu takdirde L_A'nın kompakt olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{r\to\infty} \|A\|^{(r)}_{(bv^p,\ell_\infty)} = 0 \qquad (5.1.35)$$

dır. Ayrıca, $A \in (bv^p, \ell_\infty)$ ise bu takdirde

$$\lim_{r\to\infty} \|A\|^{(r)}_{(bv^p,\ell_\infty)} = 0$$

ise L_A kompakttır(Malkowsky ve ark., 2002).

Örnek 5.1.1. $A_{(n)} = e^{(0)}$ $(n = 0, 1, ...)$ ile A matrisini tanımlansın. Bu takdirde, $\forall n \in \mathbb{N}_0$,

$$\sup_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{j=k}^{\infty} a_{nj} \right|^q \right)^{1/q} = 1 < \infty$$

ve

$$\sup_n k^{1/q} \left| \sum_{j=k}^{\infty} a_{nj} \right|^q = 0 < \infty$$

dir. Bu yüzden de, Teorem 4.1.1 (a)'dan $A \in (bv^p, \ell_\infty)$ elde edilir. Ayrıca, $\forall r \in \mathbb{N}_0$,

$$\|A\|^{(r)}_{(bv^p,\ell_\infty)} = \sup_{n>r} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{j=k}^{\infty} a_{nj} \right|^q \right)^{1/q} = \sup_{n>r} \left| \sum_{j=0}^{\infty} a_{nj} \right| = 1$$

dir. Bu takdirde

$$\lim_{r\to\infty} \|A\|^{(r)}_{(bv^p,\ell_\infty)} = 1 > 0$$

dır. Buna rağmen, $\forall x \in bv^p$ için $L_A(x) = x_0 e$ olduğundan, L_A, bir kompakt operatördür (Malkowsky ve ark., 2002).

Teorem 5.1.2. A, sonsuz bir matris ve $1 < p < \infty,\ q = p/(p-1)$ olsun. Ayrıca n>r olacak her n ve r tamsayıları için,

$$\|A\|^{(r)}_{(bv^p,\ell_1)} = \sup_{\substack{N \subset \mathbb{N}_0 \backslash \{0,1,...,r\} \\ N - sonlu}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{n \in N} \left(\sum_{j=k}^{\infty} a_{nj} \right) \right|^q \right)^{1/q} < \infty$$

olsun.

$A \in (bv^p, \ell_1)$ ise, bu takdirde ,

$$\lim_{r\to\infty} \|A\|^{(r)}_{(bv^p,\ell_1)} \leq \|L_A\|_\chi \leq 4. \lim_{r\to\infty} \|A\|^{(r)}_{(bv^p,\ell_1)} \tag{5.1.36}$$

dır (Malkowsky ve ark., 2002).

İspat . Her $x = (x_k) \in \ell_1$ dizisi,

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k e^{(k)}$$

şeklinde bir tek gösterimine sahiptir. $P_r : \ell_1 \to \ell_1$

$$P_r(x) = (x_0, x_1, ...x_r, 0, 0, ...) \ \ (r = 0, 1, 2, ...)$$

olsun. Kolayca ispatlanabilir ki; $\|I - Pr\| = 1, r = 0, 1, 2, ...$ dir.

Bu yüzdende; Teorem 5.1.1 (a) şıkkının ispatına benzer şekilde ispat tamamlanır.

Sonuç 5.1.2. $A \in (bv^p, \ell_1)$ ise bu takdirde L_A'nın kompakt olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{r\to\infty} \|A\|^{(r)}_{(bv^p,\ell_\infty)} = 0 \tag{5.1.37}$$

olmasıdır (Malkowsky ve ark., 2002).

Teorem 5.1.3. A, sonsuz bir matris ve $1 < p < \infty,\ q = p/(p-1)$ olsun. Ayrıca $n > r$ olacak şekilde her n ve r tamsayıları için,

$$\|A\|^{(r)}_{(bv^p,bv)} = \sup_{\substack{N \subset \mathbb{N}_0 \backslash \{0,1,...,r\} \\ N - sonlu}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{n \in N} \left(\sum_{j=k}^{\infty} (a_{nj} - a_{n-1,j} \right) \right|^q \right)^{1/q} < \infty.$$

olsun.

$A \in (bv^p, bv)$ ise, bu takdirde ,

$$\lim_{r\to\infty} \|A\|^{(r)}_{(bv^p,bv)} \leq \|L_A\|_\chi \leq 4. \lim_{r\to\infty} \|A\|^{(r)}_{(bv^p,bv)} \tag{5.1.38}$$

olmasıdır (Malkowsky ve ark., 2002).

İspat . $\forall k \in \mathbb{N}_0$ için $b^{(k)}$ Teorem 2.2.1'deki gibi tanımlansın. $b^{(k)}$, bv uzayının Schauder bazıdır ve $x = (x_k) \in bv$,

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} (x_k - x_{k-1}) b^{(k)}$$

dır.

$$P_r(x) = (x_0, x_1, ...x_r, 0, 0, ...) \quad (r = 0, 1, 2, ...)$$

ile $P_r : bv \to bv$ projektör dönüşümü tanımlansın. Bu yüzden de, $\forall r \in \mathbb{N}_0$

$$(I - P_r)(x) = (0, ..., 0, x_{r+1} - x_r, x_{r+2} - x_r, ...)$$

Bu takdirde,

$$\begin{aligned} \|(I - P_r)(x)\|_{bv} &= |x_{r+1} - x_r| + |x_{r+2} - x_r - (x_{r+1} - x_r)| + ... \\ &= |x_{r+1} - x_r| + |x_{r+2} - x_{r+1}| + |x_{r+3} - x_{r+2}| + ... \\ &\leq \|x\|_{bv} \end{aligned}$$

dir.

O halde, $\forall r \in \mathbb{N}_0$, $\|I - Pr\| \leq 1$ dir. Ayrıca, $I - Pr$ bir projektör olduğundan,

$\|I - Pr\| \geq 1$ elde edilir. Bu yüzdende; Lemma 5.1.4 ve Teorem 5.1.1 (b)'den 5.1.38 elde dilir.

Sonuç 5.1.3. $A \in (bv^p, bv)$ ise bu takdirde L_A'nın kompakt olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{r \to \infty} \|A\|^{(r)}_{(bv^p, bv)} = 0 \tag{5.1.39}$$

olmasıdır(Malkowsky ve ark., 2002).

6. SONUÇ

Bu çalışmada, Malkowsky ve ark. (2002) tarafından tanımlanan, $\Delta = (\delta_{nk})$ fark matrisinin ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ dizi uzayı üzerindeki etki alanı kullanılarak elde edilen bv^p $(1 \leq p < \infty)$ dizi uzayı ele alınmıştır.

Yeni bir dizi uzayı tanımlanırken bu dizi uzayı ile standart dizi uzayları arasında ne türden bir kapsama bağıntısının bulunduğunun incelenmesi, son derece önemlidir. Yapılan bu çalışmada bv^p $(1 \leq p < \infty)$ dizi uzayının ℓ_p'yi kapsadığı ve bu iki uzayın birbirine lineer olarak izomorf olduğunun gösterilmesi ile ilgili teoremler, ikinci bölümün en göze çarpan noktalarıdır. Özellikle bu izomorfim yardımıyla, bv^p $(1 \leq p < \infty)$ dizi uzayının geometrik özelliklerinin de incelenmesi mümkün olmaktadır.

bv^p $(1 \leq p < \infty)$ dizi uzayının β- dualine ilişkin ayrılan üçüncü bölümde ise bv^p'nin β- duali tam olarak belirlenmiş ve böylelikle bir sonraki bölümde matris dönüşümlerini yapabilmemiz mümkün olmuştur. Bilindiği gibi, bv^p'den bilinen dizi uzayları içerisine matris dönüşümü yapabilmek için dönüşüm dizisinin varlığı garanti edilmelidir. Bu nedenle, üçüncü bölümde bv^p dizi uzayının $\beta-$ duali hesaplanarak, dördüncü bölümde ilgili matris karakterizasyonları yapılmıştır.

BK- uzayları teorisi matris karakterizasyonlarının yapılmasında son derece önemlidir. "BK- uzayları arasındaki matris dönüşümlerinin sürekli olması" akla şu soruyu getiriyor; Bir dizi uzayından başka bir dizi uzayına çalışan lineer operatör hangi şartlar altında kompakt olur? Bu sorunun cevabı, çalışmanın beşinci bölümünde non-kompaktlık Hausdorff ölçümü kullanarak verildi. Böylelikle dördüncü bölümde yapılan matris dönüşümlerinin daha da kullanışlı olmasına imkan verildi.

KAYNAKLAR

Altay, B. ve Başar, F., 2007. The Fine Spectrum and the Matrix Domain of the Difference Operator Δ on the Sequence Space ℓ_p $(0 < p < 1)$ Communications in Mathematical Analysis (11), 1-11

Akhmerov, R. R., Kamenskii, M. I., Potapov, A. S., Rodkina, A. E. and Sadovski, B. N., 1992. Measures of Noncompactness and Condensing Operators, Oper. Theor. Adv. Appl. 55.

Anderson, J. A., 1969. Real Analysis, Cordon And Breach Science Publishers Inc., New York.

Banas, J., Goebl, K., 1980. Measures of Noncompactness in Banach Spaces, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. J 60.

Garling, D. J. H., 1967. On Topological Sequence Spaces. Proc. Cambritge Philos. Soc., 63, 997- 1019.

Garling, D. J. H., 1967. The $\beta-$ and $\gamma-$ Duality of Sequence Spaces, Proc. Camb. Phill. Soc., 63, 963,981.

Goldberg, R. R., 1976. Methots of Real Analysis, Canada.

Goes, G. ve Goes, S., 1970. Sequences of Bounded Variation and Sequences of Fourier Coefficients I, Math, Z. 118, 93-102

Hoffman, K. ve Kunze, R., 1971. Linear Algebra, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Versey

Jarrah, A. M. ve Malkowsky, E., 1990. BK-Spaces, Bases and Linear Operators, Rendiconti del Cir. Mat. Di Palermo II, 52, 177-191.

Knopp, K., 1964, Theory and Application of Infinite Series, Blackie and Son, London.

Kreyzig, E., 1978. Introductory Functional Analysis With Applications, New York.

Lipschutz, S., 1965. General Topology, Mc Graw Hill Book Company, New York.

Maddox, I. J., 1980. Infinite Matrices of Operators, Springer- Verlag, Berlin.

Maddox, I. J., 1988. Elements of Functional Analysis, Cambritge University Pres.

Malkowsky, E., 1987. Klassen Von Matrix Abbildungen in Paranormierten FR-Räumen, Analysis 7, 275-292

Malkowsky, E., 2002. Linear Operators between Some Matrix Domains, Rend. Circ. Math. Palermo, 2, 68, 641-655.

Malkowsky E. ve Rakocevic, V., 1998. The measure of noncompactness of linear operators between certain sequence spaces, Acta Sci. Math Szeged, 64, 151-170

Malkowsky, E. ve Rakocevic, V., 2000. An Introduction into The Theory of Sequence Spaces and Measures of Noncompactness, Zbornik Radova , Matematički Institut SANU, Belgrade, 9(17) 143-234.

Malkowsky, E., Rakočević ve Živković, S., 2002. Matris Transformations Between The Sequence Space bv^p And Certain BK Spaces, Bulletion T.CXXIII de l'Academic Serbe des Sciences Et des Arts 7,33-46

Nanda, S., 1986. Matrix Transformations and Sequence Spaces, Italy

Rakocevic, V., 1994. Funkcionalna Analiza, Knjiga, Beograd

Rudin, W., 1976. Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill

Stieglitz, M. ve Tietz, H., 1977. Matristransformationen von Folgenräumen Eine Ergebnisübersicht, Math. Z. 154, 1-6

Wilansky, A., 1964. Functional Analysis, Blaisdell Publishing Company.

Wilansky, A., 1984. Summability through Functional Analysis, North-Holland Math. Studies, 85.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı: Hacer BİLGİN

Doğum Tarihi ve Yer: 01.01.1985 -ARTVİN/ARDANUÇ

Medeni Hali: Bekar

Yabancı Dili: İngilizce

E-posta: bilgin0808@hotmail.com

Eğitim:

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek Lisans	Gaziosmanpaşa Üniversitesi	2010
Lisans	Gaziosmanpaşa Üniversitesi	2008
Lise	Artvin Anadolu Lisesi	2004