q-DURRMEYER OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Hakan DELİBAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEMMUZ 2010

ANKARA

Hakan DELİBAŞ tarafından hazırlanan q-DURRMEYER OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. İsmet YÜKSEL …………………………

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Nurhayat İSPİR …………………………

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. İsmet YÜKSEL …………………………

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Doç. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL …………………………

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Tarih: 12 / 07 / 2010

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU ………………………………

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Hakan DELİBAŞ

q-DURRMEYER OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

(Yüksek lisans tezi)

Hakan DELİBAŞ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Temmuz 2010

ÖZET

Bu yüksek lisans tezi dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, lineer pozitif operatörlerin tanımı verilmiş ve temel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca bu bölümde Korovkin teoremi ifade ve ispat edilmiştir. İkinci bölümde, matematiksel ifadelerin *q*-analizi ile ilgili tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, *q*-Bernstein polinomlarının temel özellikleri incelenmiş ve yine bu bölümde *q*-Durrmeyer operatörlerinin tanımı verilmiş ve yaklaşım özellikleri, Korovkin teoremi kullanılarak, incelenmiştir. Dördüncü bölümde, q-Durrmeyer operatörlerinin yaklaşım hızları, süreklilik modülü, *K*-fonksiyoneli ve Lipschitz tipli maksimal fonksiyon yardımıyla incelenmiştir. Son olarak beşinci bölümde $D_{\infty,q}$ operatörünün tanımı ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Bilim kodu	**: 204.1.095**
Anahtar kelimeler	**: *q*-Analizi, *q*-Durrmeyer operatörleri, süreklilik modülü *K*-fonksiyoneli, lokal yaklaşım, global yaklaşım, Lipschitz tipli maksimal fonksiyon.**
Sayfa adedi	**: 67**
Tez yöneticisi	**: Yrd. Doç. Dr. İsmet YÜKSEL**

APPROXIMATION PROPERTIES OF q-DURRMEYER OPERATORS

(M.Sc. Thesis)

Hakan DELİBAŞ

GAZI UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

July 2010

ABSTRACT

This master thesis consists of four chapters. In the first chapter, definition of linear positive operators is given and its fundamental properties are examined. In the second chapter, the definitions of *q*-calculus of some mathematical expressions are given and also theorems. In the third chapter, the fundamental properties of *q*-Bernstein operators are examined, and also this chapter, the definition of *q*-Durrmeyer operators is given and using the Korovkin theorem, its approximation properties are explained. In the fourth chapter, rate of approximation of *q*-Durrmeyer operators are examined with help of modulus of continuity, *K*-functionel, the Lipschitz type maximal function. Finally five chapter, the definition of $D_{\infty,q}$ operators is given and its approximation properties are examined.

Science code : 204.1.095

Key words : *q*-calculus, *q*-Durrmeyer operators, modulus of continuity, *K*-functional, local approximation, global approximation, the Lipschitz type maximal function

Page number : 67

adviser : Yrd. Doç. Dr. İsmet YÜKSEL

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında beni yönlendiren, bilgi ve tecrubelerini hiç bir zaman esirgemiyen değerli danışman hocam Yrd.Doç. Dr. İsmet YÜKSEL'e ve beni her zaman destekleyen aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv
ABSTRACT v
TEŞEKKÜR vi
İÇİNDEKİLER vii
SİMGELER viii
1. GİRİŞ 1
1.1. Temel Kavramlar 1
1. q-ANALİZİ 9
1.1. Bazı Matematiksel İfadelerin q-Analoğu 9
3. q-DURRMEYER OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ 29
3.1. q-Bernstein Operatörlerinin Tanımı 29
3.2. q-Durrmeyer Operatörlerinin Tanımı 33
3.3. q-Durrmeyer Operatörlerinin Düzgün Yakınsaklığı 34
4. q-DURRMEYER OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM HIZI 44
4.1. Süreklilik Modülü 44
4.2. q-Durrmeyer Operatörlerinin Süreklilik Modülü ile Yaklaşım Hızı 45
4.3. Lokal Yaklaşım 47
4.4. Global Yaklaşım 52
4.5. q-Durrmeyer Operatörlerinin Bir f Fonksiyonuna Lipschitz Tipli Maximal Fonksiyon ile Yaklaşım Hızı 55
5. $D_{\infty,q}$ OPERATÖRLERİ 59
5.1. $D_{\infty,q}$ Operatörlerinin Tanımı ve Yaklaşım Özellikleri 59
KAYNAKLAR 67
ÖZGEÇMİŞ 67

SİMGELER

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$C[a,b]$	$[a,b]$ kapalı aralığında sürekli olan fonksiyonların uzayı
$C^2[a,b]$	$f,f',f'' \in C[a,b]$ olan fonksiyon uzayı
$(f_n(x))$	$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir fonksiyon dizisi
$(L_n(f;x))$	$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir operatör dizisi
$L_n(f;x) \rightrightarrows f(x)$	L_n operatör dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaklığı
$\varphi_{n,s}$	s -inci merkezi moment
$[k]_q$	$0<q\le 1$ olmak üzere bir k doğal sayısının q -analoğu
$[k]_q!$	$0<q\le 1$ olmak üzere bir k doğal sayısının q -faktöryeli
$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$	q -binom katsayısı
$e_q^x,\ E_q^x$	$0<q\le 1$ olmak üzere e^x fonksiyonunun q -analoğu
$\Delta_q f(x)$	$0<q\le 1$ olmak üzere f fonksiyonunun q -türev operatörü
$D_{n,q}(f;x)$	q -Durrmeyer operatörü
$\omega(f;\delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$K(f;\delta)$	f fonksiyonunun Peetre *K*-fonksiyoneli
$Lip_M(\alpha)$	Lipschitz sınıfı fonksiyonları
$\lVert\cdot\rVert_{C[a,b]}$	$C[a,b]$ uzayında $\lVert\cdot\rVert_{C[a,b]} = \max\limits_{a\le x\le b}\lvert\cdot\rvert$ ile tanımlı norm
$\lVert\cdot\rVert_{C^2[a,b]}$	$\lVert g\rVert_{C^2[a,b]} = \lVert g\rVert_{C[a,b]} + \lVert g'\rVert_{C[a,b]} + \lVert g''\rVert_{C[a,b]}$ ile tanımlı norm

1. GİRİŞ

Yaklaşımlar teorisinin en önemli çalışmalarından biri teorik matematikte ve gerçek hayatta karşılaşılan, çözümlenmesi zor olan fonksiyonların, daha basit daha kullanışlı diğer fonksiyonlar cinsinden bir gösterimini elde etmektir. Bu amaçla yapılan ilk ciddi çalışma 1885 yılında Alman matematikçi Weierstarss tarafından yapılmıştır [1]. Bu çalışmada sonlu $[a,b]$ aralığında sürekli her f fonksiyonu için, $\forall\varepsilon>0$ olmak üzere $[a,b]$ aralığında en az bir $p(x)$ polinomu bulabiliriz ki

$$\max_{a\le x\le b}\left|f(x)-p(x)\right|<\varepsilon$$

sağlanır. Yani $[a,b]$ aralığında sürekli f fonksiyonuna düzgün yakınsayan en az bir polinom bulabiliriz. Bu teoremi sağlayan $p(x)$ polinomlarını bulma teknikleri yaklaşımlar teorisini ortaya koymuştur. Bernstein (1912), Weierstrass teoremini ispatlamak için $[0,1]$ aralığında sürekli f fonksiyonuna düzgün yakınsayan $p(x)$ polinomunu,

$$B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

şeklinde tanımlamıştır [2]. Aynı zaman da B_n Bernstein polinomları lineer pozitif operatörlerdir. 1953 yılında P.P. Korovkin genel bir teorem ispatlamış ve lineer pozitif operatörleri için yaklaşım koşullarını genelleştirmiştir [1]. Korovkin teoremi sayesinde keyfi bir sürekli f fonksiyonuna düzgün yakınsayan Szasz operatörleri [3], Baskakov operatörleri [3], Chlodovsky operatörleri [4] gibi birçok lineer pozitif operatörler tanımlanmıştır. Bunlardan bir başkası da $[0,1]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar için Durrmeyer tarafından,

$$p_{n,k}=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

olmak üzere,

$$D_n(f;x)=(n+1)\sum_{k=0}^{n} p_{n.k}(x)\int_0^1 f(t)\,p_{n,k}(t)\,dt$$

şeklinde tanımlanan Durrmeyer operatörleridir [5]. Bu operatörler Bernstein polinomlarının integral modifikasyonu olarak düşünülebilir. Son yıllarda q-analoğu olarak bilinen çalışmayla bir çok matematiksel ifadenin q-analoğu elde edilmiştir. Buna paralel olarak $0 < q \leq 1$ ve

$$p_{n,k}\left(q;x\right)=\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k\left(1-x\right)_q^{n-k}$$

olmak üzere,

$$D_{n,q}\left(f;x\right)=\left[n+1\right]_q\sum_{k=0}^{n}q^{-k}p_{n,k}\left(q;x\right)\int_0^1 f\left(t\right)p_{n,k}\left(q;qt\right)d_q t$$

biçiminde q-Durrmeyer operatörleri tanımlanmıştır V. Gupta (2008) [6]. Bu tezde q-Durrmeyer operatörlerinin yaklaşım özellikleri incelenecektir. Ama bundan önce bu bölümde lineer pozitif operatörlerinin tanımı ve sahip oldukları temel özellikler incelenecektir. Ayrıca sonraki bölümde kullanılacak olan bazı tanımlar ve Korovkin teoremi de bu bölümde verilecektir.

1.1. Temel Kavramlar

1.1.1. Tanım : Fonksiyon uzaylarında tanımlanan, fonksiyonu fonksiyona dönüştüren bağıntılara operatör denir.

1.1.2. Tanım **:** X ve Y fonksiyon uzayları olmak üzere

$$L : X \to Y$$

şeklindeki L operatörünü göz önünde bulunduralım. Eğer her $f, g \in X$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$$

koşulu sağlanıyor ise L operatörüne lineer operatör denir.

1.1.3. Tanım : f pozitif bir fonksiyon ve L bir operatör olmak üzere

$$f \geq 0 \text{ iken } L(f) \geq 0$$

gerçekleniyorsa L operatörüne pozitif operatör denir. Hem lineerlik hem de pozitiflik özelliklerini sağlayan operatörlere lineer pozitif operatör denir.

1.1.1. Lemma : Lineer pozitif operatörler monoton artandır. Yani

$$f \leq g \Rightarrow L(f) \leq L(g)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat : Kabul edelim ki $f \leq g$ olsun. Bu durumda $g - f \geq 0$ olup L pozitif olduğundan $L(g - f) \geq 0$ sağlanır. Ayrıca L lineer olduğundan

$$L(g - f) = L(g) - L(f)$$

sağlandığını biliyoruz. O halde

$$L(g) - L(f) \geq 0 \text{ olup } L(f) \leq L(g)$$

gerçeklenir. O halde L operatörünün monoton artan olduğu ispatlanmış olur.

1.1.2. Lemma : L lineer pozitif operatör ise ;

$$\left|L(f)\right| \le L\left(\left|f\right|\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat : Herhangi bir f fonksiyonu için

$$-\left|f\right| \le f \le \left|f\right|$$

olduğu açıktır. L lineer pozitif operatörü Lemma 1.1.1 den monoton artan olduğundan

$$L\left(-\left|f\right|\right) \le L(f) \le L\left(\left|f\right|\right)$$

sağlanır. L nin lineerliğinden,

$$-L\left(\left|f\right|\right) \le L(f) \le L\left(\left|f\right|\right)$$

eşitsizliği gerçeklenir. O halde

$$\left|L(f)\right| \le L\left(\left|f\right|\right)$$

yazabiliriz. Bu da ispatı tamamlar.

1.1.4. Tanım : Kapalı bir $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı, sürekli ve reel değerli tüm fonksiyonların oluşturduğu uzaya $C[a,b]$ fonksiyon uzayı denir. $C[a,b]$ fonksiyon uzayında tanımlanan norm;

$$\left\|f\right\|_{C[a,b]} = \max_{a\le x\le b}\left|f(x)\right|$$

şeklinde tanımlanır. Bu norm ile birlikte $C[a,b]$ uzayı bir normlu uzaydır.

1.1.5. Tanım : $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\left(f_n(x)\right)$ dizisine fonksiyon dizisi denir.

1.1.6. Tanım : $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\left(L_n(f;x)\right)$ dizisine operatör dizisi denir.

1.1.7. Tanım : Her $x \in [a,b]$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C[a,b]} = \lim_{n\to\infty} \max_{a\le x\le b} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

koşulu sağlanıyorsa (f_n) fonksiyonlar dizisi f fonksiyonuna $C[a,b]$ normunda düzgün yakınsaktır denir ve

$$f_n \rightrightarrows f$$

ile gösterilir.

1.1.8. Tanım : $\varphi_{n,s}(x) = L_n\left((t-x)^s ; x\right), \qquad s = 0,1,2,...$

şeklinde tanımlanan ifadeye (L_n) operatör dizisinin s-inci merkezi momenti denir.

1.1.1. Teorem (P. P. Korovkin Teoremi [3]) **:** $f \in C[a,b]$ ve tüm reel eksende $|f(x)| \le M_f$ olmak üzere her $x \in [a,b]$ ve L_n lineer pozitif operatörü için

i) $L_n(1;x) \rightrightarrows 1$
ii) $L_n(t;x) \rightrightarrows x$
iii) $L_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2$

koşulları sağlanıyorsa bu durumda $a \le x \le b$ ve her $f \in C[a,b]$ için

$$L_n(f;x) \rightrightarrows f(x)$$

sağlanır [1].

İspat : Kabul edelim ki $f \in C[a,b]$ olsun. Bu durumda f sürekli olacağından ve sürekli fonksiyon tanımından, her $\varepsilon > 0$ için $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ bulabiliriz öyle ki, $|t-x| \le \delta$ için

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

sağlanır. Üçgen eşitsizliğinden ve hipotezden,

$$\left|f(t)-f(x)\right| \leq \left|f(t)\right|+\left|f(x)\right| \leq 2M_f \tag{1.1}$$

yazabiliriz. Eğer $|t-x|>\delta$ ise $\dfrac{|t-x|}{\delta}>1$ olacağından

$$\frac{(t-x)^2}{\delta^2}>1 \tag{1.2}$$

sağlanır. Eş. 1.1 ve Eş. 1.2 den

$$\left|f(t)-f(x)\right| \leq 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

yazabiliriz. O halde

$|t-x| \leq \delta$ için $\left|f(t)-f(x)\right|<\varepsilon$

$|t-x|>\delta$ için $\left|f(t)-f(x)\right| \leq 2M_f \dfrac{(t-x)^2}{\delta^2}$

olduğundan her $x,t \in [a,b]$ için,

$$\left|f(t)-f(t)\right|<\varepsilon+2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \tag{1.3}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bunula birlikte i), ii) ve iii) koşullarını gerçekleyen (L_n) operatör dizisi için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_n\left(f(t);x\right)-f(x)\right\|_{C[a.b]}=0$$

limitinin gerçeklendiğini gösterelim.

$$\begin{aligned}\left|L_n\left(f(t);x\right)-f(x)\right| &= \left|L_n\left(f(t);x\right)-f(x)+L_n\left(f(x);x\right)-L_n\left(f(x);x\right)\right| \\ &= \left|L_n\left(f(t);x\right)-L_n\left(f(x);x\right)+L_n\left(f(x);x\right)-f(x)\right| \\ &= \left|L_n\left(f(t)-f(x);x\right)+f(x)\left(L_n(1;x)-1\right)\right|\end{aligned}$$

sağlanır. Üçgen eşitsizliği uygulanırsa;

$$\left|L_n\left(f\left(t\right);x\right)-f\left(x\right)\right|\leq\left|L_n\left(f\left(t\right)-f\left(x\right);x\right)\right|+\left|f\left(x\right)\right|\left|\left(L_n\left(1;x\right)-1\right)\right|$$

gerçeklenir. Lemma 1.1.2 den,

$$\left|L_n\left(f\left(t\right);x\right)-f\left(x\right)\right|\leq L_n\left(\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right|;x\right)+\left|f\left(x\right)\right|\left|\left(L_n\left(1;x\right)-1\right)\right|$$

olur. Hipotezden $\left|f\left(x\right)\right|\leq M_f$ olduğunu biliyoruz. O halde

$$\left|L_n\left(f\left(t\right);x\right)-f\left(x\right)\right|\leq L_n\left(\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right|;x\right)+M_f\left|\left(L_n\left(1;x\right)-1\right)\right|$$

yazabiliriz. Lemma 1.1.1 den $\left(L_n\right)$ monoton artan olduğundan ve Eş. 1.3 den

$$\left|L_n\left(f\left(t\right);x\right)-f\left(x\right)\right|\leq L_n\left(\varepsilon+2\frac{M_f}{\delta^2}\left(t-x\right)^2;x\right)+M_f\left|\left(L_n\left(1;x\right)-1\right)\right| \tag{1.4}$$

olur. Diğer taraftan $\left(L_n\right)$ lineer olduğundan

$$\begin{aligned}
L_n\left(\varepsilon+2\frac{M_f}{\delta^2}\left(t-x\right)^2;x\right)&=L_n\left(\varepsilon;x\right)+L_n\left(2\frac{M_f}{\delta^2}\left(t-x\right)^2;x\right)\\
&=\varepsilon L_n\left(1;x\right)+2\frac{M_f}{\delta^2}L_n\left(t^2-2xt+x^2;x\right)\\
&=\varepsilon L_n\left(1;x\right)+2\frac{M_f}{\delta^2}\Big[L_n\left(t^2;x\right)-x^2-x^2+2x^2\\
&\quad-2xL_n\left(t;x\right)+x^2L_n\left(1;x\right)\Big]\\
&=\varepsilon L_n\left(1;x\right)+2\frac{M_f}{\delta^2}\Big[L_n\left(t^2;x\right)-x^2+2x^2\\
&\quad-2xL_n\left(t;x\right)+x^2L_n\left(1;x\right)-x^2\Big]\\
&=\varepsilon L_n\left(1;x\right)+2\frac{M_f}{\delta^2}\Big[\left(L_n\left(t^2\right)-x^2\right)\\
&\quad+2x\left(x-L_n\left(t;x\right)\right)+x^2\left(L_n\left(1;x\right)-1\right)\Big]
\end{aligned}$$

şeklinde düzenleyebiliriz. Bu elde ettiğimiz eşitliği Eş. 1.4 de yerine yazarsak

$$\left|L_n\left(f\left(t\right);x\right)-f\left(x\right)\right|\leq \varepsilon L_n\left(1;x\right)+2\frac{M_f}{\delta^2}\Big[\left(L_n\left(t^2\right)-x^2\right)+2x\left(x-L_n\left(t;x\right)\right)$$
$$+x^2\left(L_n\left(1;x\right)-1\right)\Big]+M_f\left|L_n\left(1;x\right)-1\right|$$

ifadesi elde edilir. Bu son eşitsizlikte i), ii) ve iii) koşulları kullanılırsa

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_n\left(f\right)-f\right\|_{C[a.b]}=\lim_{n\to\infty}\max_{a\leq x\leq b}\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|=0$$

gerçeklenip ispat tamamlanır.

2. q-ANALİZİ

q-Analizi çalışmaları yaklaşık 150 yıl önce başlamıştır. Matematiksel bir ifadenin q-analoğunda $q \to 1^-$ alındığında tekrar ifadenin kendisi elde edilir. İstatistiksel mekanikte kesin olarak çözülebilen modellerdeki önemi nedeniyle son zamanlarda özellikle fonksiyonların q-analoglarına ilgi artmıştır. Bu bölümde bilinen bazı fonksiyonların q-analogları verilecektir.

2.1. Bazı Matematiksel İfadelerin q-Analogları

2.1.1. Tanım : Bir k doğal sayısının q-analoğu, $0 < q \le 1$ olmak üzere, $[k]_q$ şeklinde gösterilir ve

$$[k]_q = \begin{cases} \dfrac{1-q^k}{1-q} & ;0 < q < 1 \\ k & ;q = 1 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $[0]_q = 0$ dır. q-faktöriyel ise

$$[k]_q! = \begin{cases} [k]_q [k-1]_q .. [2]_q [1]_q & ;k = 1,2,3,... \\ 1 & ;k = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca yukarıdaki tanımlardan,

$$[k]_q! = [1]_q [2]_q ... [k]_q = \frac{(1-q)(1-q^2)...(1-q^k)}{(1-q)(1-q)...(1-q)}$$

eşitliği ve

$$(1-a)_q^k = (1-a)(1-aq)(1-aq^2)...(1-aq^{k-1})$$

genel ifadesinde $a = q$ için $(1-q)_q^k = (1-q)(1-q^2)...(1-q^k)$ sağlanacağından

$$[k]_q! = \frac{(1-q)_q^k}{(1-q)^k} \tag{2.1}$$

şeklinde de yazabiliriz.

2.1.1. Lemma :

$$\left(x+y\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

ifadesinin q-analoğu,

$$\left(x+y\right)\left(x+qy\right)...\left(x+q^{n-1}y\right)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}}x^{n-k}y^k$$

biçimindedir.

İspat :

Sonlu binom teoreminden

$$\left(x+y\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k; \qquad \binom{n}{k}=\frac{n!}{r!\left(n-r\right)!}$$

olduğu bilinmektedir. q bir parametre olmak üzere,

$$yx=qxy, \quad xq=qx, \quad ve \quad yq=qy \tag{2.2}$$

eşitlikleri gerçeklensin, ayrıca

$$\left(x+y\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k}y^k \tag{2.3}$$

olarak tanımlansın.

$$\left(x+y\right)^{n+1}=\left(x+y\right)^n\left(x+y\right)$$

eşitliğini yazabiliriz. Buradan

$$\sum_{k=0}^{n+1}\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^{n+1-k}y^k=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k}y^k\left(x+y\right)$$

bulunur. O halde

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ 0 \end{bmatrix}_q x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^{n+1-k} y^k + \begin{bmatrix} n+1 \\ n+1 \end{bmatrix}_q y^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k} y^k x + \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k} y^{k+1}$$

bulunur. Ayrıca Eş. 2.2 den $y^k x = xy^k q^k$ yazılabilir. Bu eşitliği toplamda yazarsak

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ 0 \end{bmatrix}_q x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^{n+1-k} y^k + \begin{bmatrix} n+1 \\ n+1 \end{bmatrix}_q y^{n+1}$$
$$= \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n+1-k} y^k q^k + \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q x^{n+1-k} y^k + \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_q y^{n+1}$$

bulunur. Şimdi $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q = 1$ ve $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_q = 1$ olduğunu kabul edersek,

$$\sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^{n+1-k} y^k = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^k + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q \right\} x^{n+1-k} y^k$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^k + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q \tag{2.4}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n \qquad \text{ve} \qquad yx^{n-k} = q^{n-k} x^{n-k} y$$

eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n+1-k} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q \tag{2.5}$$

bulunur. O halde Eş. 2.4 ve Eş. 2.5 den

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{1-q^{n+1-k}}{1-q^k} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q$$

elde edilir. Bu işlem k-kez uygulanırsa

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{1-q^{n+1-k}}{1-q^k} \cdot \frac{1-q^{n+2-k}}{1-q^{k-1}} \cdots \frac{1-q^n}{1-q} \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q$$

bulunur. Bu eşitliğin pay ve paydasını $(1-q)(1-q^2)...(1-q^{n-k})$ ile çarparsak

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(1-q)(1-q^2)...(1-q^{n-k})(1-q^{n-k+1})\ ...\ (1-q^n)}{(1-q)(1-q^2)...\ (1-q^k)(1-q)(1-q^2)...(1-q^{n-k})} = \frac{(1-q)_q^n}{(1-q)_q^k (1-q)_q^{n-k}}$$

olur. Eş. (2.1) eşitliği göz önünde bulundurulursa,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(1-q)_q^n}{(1-q)_q^k (1-q)_q^{n-k}} = \frac{[n]_q!(1-q)^n}{[k]_q!(1-q)^k [n-k]_q!(1-q)^{n-k}} = \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_k!}$$

gerçeklendiği görülür. Şimdi Eş. 2.3 ile verilen binom eşitliğinin q-analoğunu bulalım. Bunun için bu eşitlikteki y yerine xy yazalım. O halde

$$(x+xy)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k} (xy)^k \tag{2.6}$$

yazılır. Burada Eş. 2.2 ile verilen eşitlikler kullanılarak,

$$(xy)^k = x^k y^k q^{k(k-1)/2}$$

elde edilir. Ayrıca yine Eş. 2.2 eşitlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}
(x+xy)_q^n &= (x+xy)...(x+xy)(x+xy)(x+xy) \\
&= x(1+y)...x(1+y)x(1+y)x(1+y) \\
&= x(1+y)...x(1+y)x(x+yx)(1+y) \\
&= x(1+y)...x(1+y)x(x+qxy)(1+y) \\
&= x(1+y)...x(1+y)x(x+xqy)(1+y) \\
&= x(1+y)...x(1+y)x^2(1+qy)(1+y) \\
&= x(1+y)...x(x+yx)x(1+qy)(1+y) \\
&= x(1+y)...x(x+qxy)x(1+qy)(1+y) \\
&= x(1+y)...x(x+xqy)x(1+qy)(1+y) \\
&= x(1+y)...x^2(1+qy)x(1+qy)(1+y) \\
&\ ...
\end{aligned}$$

böyle devam ederek

$$\left(x+xy\right)_q^n = x^n\left(1+q^{n-1}y\right)...\left(1+q^2y\right)\left(1+q\ y\right) \tag{2.7}$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntılar Eş. 2.6 da yerine yazılırsa

$$x^n\left(1+q^{n-1}y\right)...\left(1+q^2y\right)\left(1+q\ y\right) = \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k}x^k y^k q^{k(k-1)/2}$$

eşitliği sağlanır. Buradan

$$\left(1+y\right)\left(1+qy\right)...\left(1+q^{n-1}y\right) = \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} y^k$$

elde edilir. Burada y yerine $\dfrac{y}{x}$ yazılırsa

$$\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+q\frac{y}{x}\right)...\left(1+q^{n-1}\frac{y}{x}\right) = \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} \left(\frac{y}{x}\right)^k$$

$$\left(x+y\right)\left(x+qy\right)...\left(x+q^{n-1}y\right) = \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^{n-k} y^k \tag{2.8}$$

elde edilir. Bu elde edilen Eş. 2.8 ifadesi Eş. 2.3 ün bir q-analoğunudur.

2.1.2. Tanım : $\left(\alpha\right)_k = \alpha\left(\alpha+1\right)...\left(\alpha+k-1\right)$ ifadesine Pochhammer sembolü denir ve bu ifadenin q-analoğu,

$$\begin{aligned}
\left[\left(\alpha\right)_k\right]_q &= \left[\alpha\right]_q\left[\alpha+1\right]_q ... \left[\alpha+k-1\right]_q \\
&= \frac{1-q^{\alpha}}{1-q}\frac{1-q^{\alpha+1}}{1-q}...\frac{1-q^{\alpha+k-1}}{1-q} \\
&= \frac{\left(1-q^{\alpha}\right)\left(1-q^{\alpha}q\right)...\left(1-q^{\alpha}q^{k-1}\right)}{\left(1-q\right)^k} \\
&= \frac{\left(1-q^{\alpha}\right)_q^k}{\left(1-q\right)^k}
\end{aligned}$$

şeklindedir.

2.1.3. Tanım : $0<q\leq 1$ olmak üzere,

$$\Delta_q f(x)=\frac{f(x)-f(qx)}{(1-q)x}$$

ifadesine f fonksiyonunun q -türev operatörü denir.

2.1.2. Lemma : $|x|<1$ için,

$$(1-x)^{-\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k}{k!}x^k$$

eşitliği sağlanır.

İspat : Öncelikle

$$g_\alpha(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k}{k!}x^k$$

olsun. Burada türev alınırsa,

$$\begin{aligned}g'_\alpha(x)&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_k}{(k-1)!}x^{k-1}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{k+1}}{k!}x^k\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}(\alpha)_{k+1}&=\alpha(\alpha+1)...(\alpha+k)\\&=\alpha\{(\alpha+1)(\alpha+1+1)...(\alpha+1+k-1)\}\\&=\alpha(\alpha+1)_k\end{aligned}$$

sağlanır. O halde,

$$g'_\alpha(x)=\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1)_k}{(k)!}x^k=\alpha g_{\alpha+1}(x) \tag{2.9}$$

gerçeklenir. Ayrıca burada

$$
\begin{aligned}
g_\alpha(x) - g_{\alpha+1}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k - (\alpha+1)_k}{k!} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1)_{k-1}\left(\alpha - (\alpha+k)\right)}{k!} x^k \\
&= -x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha+1)_{k-1}}{(k-1)!} x^{k-1} \\
&= -x g_{\alpha+1}(x) \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

eşitliği yazılabilir. Eş. 2.9 ve Eş. 2.10 dan

$$\frac{g'_\alpha(x)}{g_\alpha(x)} = \frac{\alpha}{1-x}$$

sağlanır. Buradan

$$g_\alpha(x) = c(1-x)^{-\alpha}$$

elde edilir. $g_\alpha(0) = 1$ olduğundan $c = 1$ olmak zorundadır. Buna göre

$$g_\alpha(x) = (1-x)^{-\alpha}$$

bulunur. O halde Lemmanın ispatı tamamlanır.

Şimdi,

$$g_\alpha(x) = (1-x)^{-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!} x^k$$

eşitliğinin q-analoğunun

$$(1-x)_q^{-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-q^\alpha)_q^k}{(1-q)_q^k} x^k$$

biçiminde olduğunu göstereceğiz. Ama bundan önce bir teorem verelim.

2.1.1. Teorem : (q-binom teoremi) $|x|<1$, $|q|<1$ ve $(1-a)_q^{\infty}=\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-aq^k\right)$ olsun.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-a)_q^k}{(1-q)_q^k}x^k=\frac{(1-ax)_q^{\infty}}{(1-x)_q^{\infty}}$$

sağlanır.

İspat :

$$f_a(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-a)_q^k}{(1-q)_q^k}x^k$$

olsun. Her iki tarafa q -türev operatörü uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\frac{f_a(x)-f_a(qx)}{x}&=\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-a)_q^k}{(1-q)_q^k}x^k-\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-a)_q^k}{(1-q)_q^k}(xq)^k\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-a)_q^k}{(1-q)_q^k}\left(1-q^k\right)x^{k-1}\end{aligned}$$

olur. Burada

$$(1-a)_q^k=\prod_{j=0}^{k-1}\left(1-aq^j\right)=(1-a)(1-aq)\ldots\left(1-aq^{k-1}\right)=(1-a)(1-aq)_q^{k-1}$$

$$\frac{1-q^k}{(1-q)_q^k}=\frac{1-q^k}{(1-q)\left(1-q^2\right)\ldots\left(1-q^k\right)}=\frac{1}{(1-q)\left(1-q^2\right)\ldots\left(1-q^{k-1}\right)}=\frac{1}{(1-q)_q^{k-1}}$$

sağlanır. Bu eşitlikleri yerlerine yazarsak,

$$\begin{aligned}\frac{f_a(x)-f_a(qx)}{x}&=(1-a)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-aq)_q^{k-1}}{(1-q)_q^{k-1}}x^{k-1}\\&=(1-a)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-aq)_q^k}{(1-q)_q^k}x^k\\&=(1-a)f_{aq}(x)\end{aligned}$$

sağlanır. Buradan

$$f_a(x)-f_a(qx)=(1-a)xf_{aq}(x) \tag{2.11}$$

bulunur. Şimdi $f_a(x)-f_{aq}(x)$ farkını düşünelim.

$$\begin{aligned} f_a(x)-f_{aq}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-a)_q^k}{(1-q)_q^k}x^k-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-aq)_q^k}{(1-q)_q^k}x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-a)_q^k-(1-aq)_q^k}{(1-q)_q^k}x^k \end{aligned} \tag{2.12}$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} (1-a)_q^k-(1-aq)_q^k &= \prod_{i=0}^{k-1}\left(1-aq^i\right)-\prod_{i=0}^{k-1}\left(1-aq\,q^i\right) \\ &= (1-a)\prod_{i=1}^{k-1}\left(1-aq^i\right)-\left(1-aq^k\right)\prod_{i=0}^{k-2}\left(1-aq\,q^i\right) \\ &= (1-a)\prod_{i=0}^{k-2}\left(1-aq^{i+1}\right)-\left(1-aq^k\right)\prod_{i=0}^{k-2}\left(1-aq^{i+1}\right) \\ &= \left(1-a-1+aq^k\right)\prod_{i=0}^{(k-1)-1}\left(1-aq\,q^i\right) \\ &= -a\left(1-q^k\right)(1-aq)_q^{k-1} \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu elde edilen ifade Eş. 2.12 de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} f_a(x)-f_{aq}(x) &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-a\left(1-q^k\right)(1-aq)_q^{k-1}}{(1-q)_q^k}x^k \\ &= -ax\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-aq)_q^{k-1}}{(1-q)_q^{k-1}}x^{k-1} \\ &= -ax\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-aq)_q^{k}}{(1-q)_q^{k}}x^{k} \\ &= -axf_{aq}(x) \end{aligned} \tag{2.13}$$

sağlanır. O halde Eş. 2.11 ve Eş. 2.13 dan

$$f_a(x)=\frac{1-ax}{1-x}f_a(qx)$$

bulunur. Bu bağıntıya n-kez iterasyon uygulayalım

$$\begin{aligned}
f_a(x)&=\frac{(1-ax)(1-axq)}{(1-x)(1-xq)}f_a\left(q^2x\right)\\
&=\frac{(1-ax)(1-axq)\left(1-axq^2\right)}{(1-x)(1-xq)\left(1-xq^2\right)}f_a\left(q^3x\right)\\
&\ldots\\
&=\frac{(1-ax)(1-axq)\left(1-axq^2\right)\ldots\left(1-axq^{n-1}\right)}{(1-x)(1-xq)\left(1-xq^2\right)\ldots\left(1-xq^{n-1}\right)}f_a\left(q^nx\right)\\
&=\frac{(1-ax)_q^n}{(1-x)_q^n}f_a\left(q^nx\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. $n\to\infty$ için

$$\begin{aligned}
f_a(x)&=\frac{(1-ax)_q^\infty}{(1-x)_q^\infty}f_a(0)\\
&=\frac{(1-ax)_q^\infty}{(1-x)_q^\infty}
\end{aligned}$$

gerçeklenir ki bu da ispatı tamamlar.

2.1.1. Sonuç **:**

$$(1-x)_q^{-\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(1-q^\alpha\right)_q^k}{(1-q)_q^k}x^k$$

eşitliği sağlanır.

İspat : $q-$binom teoreminde $a=q^\alpha$ alınırsa

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(1-q^{\alpha}\right)_q^k}{\left(1-q\right)_q^k}x^k=\frac{\left(1-q^{\alpha}x\right)_q^{\infty}}{\left(1-x\right)_q^{\infty}}$$

olur. Ayrıca q – binom teoreminden

$$\begin{aligned}\frac{\left(1-q^{\alpha}\right)_q^k}{\left(1-q\right)_q^k}&=\frac{\left(1-q^{\alpha}\right)\left(1-q^{\alpha+1}\right)...\left(1-q^{\alpha+k-1}\right)}{\left(1-q\right)\left(1-q^{2}\right)...\left(1-q^{k}\right)}\\&=\frac{\dfrac{\left(1-q^{\alpha}\right)\left(1-q^{\alpha+1}\right)...\left(1-q^{\alpha+k-1}\right)}{\left(1-q\right)\left(1-q\right)...\left(1-q\right)}}{\dfrac{\left(1-q\right)\left(1-q^{2}\right)...\left(1-q^{k}\right)}{\left(1-q\right)\left(1-q\right)...\left(1-q\right)}}\\&=\frac{\left[\alpha\right]_q\left[\alpha+1\right]_q...\left[\alpha+k-1\right]_q}{\left[1\right]_q\left[2\right]_q...\left[k\right]_q}\\&=\frac{\left[\left(\alpha\right)_k\right]_q}{\left[k\right]_q!}\end{aligned}$$

olduğu açıkça görülür. Ayrıca

$$\begin{aligned}\frac{\left(1-q^{\alpha}x\right)_q^{\infty}}{\left(1-x\right)_q^{\infty}}&=\frac{\left(1-q^{\alpha}x\right)\left(1-q^{\alpha+1}x\right)...}{\left(1-x\right)\left(1-q^{2}x\right)...\left(1-q^{\alpha}x\right)\left(1-q^{\alpha+1}x\right)...}\\&=\frac{1}{\left(1-x\right)\left(1-q^{2}x\right)...\left(1-q^{\alpha-1}x\right)}\\&=\frac{1}{\left(1-x\right)_q^{\alpha}}\end{aligned}$$

sağlanır. O halde

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[\left(\alpha\right)_k\right]_q}{\left[k\right]_q!}x^k=\frac{1}{\left(1-x\right)_q^{\alpha}}$$

elde eldir. Bu ifade, $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\alpha\right)_k}{k!}x^k=\left(1-x\right)^{-\alpha}$ eşitliğinin bir q -analoğudur.

2.1.2. Sonuç (Euler Eşitlikleri):

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(1-q)_q^n}=\frac{1}{(1-x)_q^n}$ $\quad ,|x|<1\,,\,|q|<1$

ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{n(n-1)/2}x^n}{(1-q)_q^n}=(1-x)_q^{\infty}$

eşitlikleri sağlanır.

2.1.3. Lemma **:** $0<q\leq 1$ olsun. e^x fonksiyonunun q-analoğu,

$$e_q^x=\frac{1}{\left(1-(1-q)x\right)_q^{\infty}}$$

veya

$$E_q^x=\left(1+(1-q)x\right)_q^{\infty}$$

şeklinde verilir.

İspat :

Sonuç 2.1.2 nin (i) şıkkında x yerine $(1-q)x$ yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-q)^n x^n}{(1-q)_q^n}=\frac{1}{\left(1-(1-q)x\right)_q^{\infty}}$$

olur. Eş. 2.1 deki $q-$faktöriyel tanımından

$$e_q^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{[n]_q!}=\frac{1}{\left(1-(1-q)x\right)_q^{\infty}} \tag{2.14}$$

ifadesi elde edilir. Burada $q\to 1^-$ alınırsa

$$\lim_{q \to 1^-} \frac{1}{\left(1-\left(1-q\right)x\right)_q^{\infty}} = e^x$$

elde edilir. Benzer şekilde Sonuç 2.1.2 nin (ii) şıkkından

$$E_q^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\left[n\right]_q!} = \left(1+\left(1-q\right)x\right)_q^{\infty} \tag{2.15}$$

bulunur. Eş. 2.14 ve Eş. 2.15 e, e^x fonksiyonunun q-analoğu denir.

2.1.4. Tanım : $x \in \left[0,a\right]$ ve $0 < q < 1$ olmak üzere,

$$\int_0^a f\left(x\right) d_q x = a\left(1-q\right) \sum_{n=0}^{\infty} f\left(aq^n\right) q^n \tag{2.16}$$

ifadesine $f\left(x\right)$ fonksiyonunun q-integrali denir Thomae (1869) [10]. Bu tanım yardımıyla $\left(0,\infty\right)$ aralığındaki q-integrali

$$\int_0^{\infty} f\left(x\right) d_q x = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{q^{j+1}}^{q^j} f\left(x\right) d_q x \tag{2.17}$$

şeklinde tanımlanır.

2.1.5. Tanım : $t, s > 0$ *ve* $0 < q < 1$ ve $E_q\left(x\right) = \left(1+\left(1-q\right)x\right)_q^{\infty}$ olmak üzere,

$$\Gamma_q\left(t\right) = \int_0^{\infty} x^{t-1} E_q^{-qx} d_q x \tag{2.18}$$

$$\mathrm{B}_q(t,s) = \int_0^1 x^{t-1} \left(1-qx\right)_q^{s-1} d_q x \tag{2.19}$$

şeklinde verilen Eş. 2.18 ve Eş. 2.19 ifadelerine sırasıyla q-Gamma, q-Beta fonksiyonları denir.

2.1.4. Lemma : $n \in \mathbb{N}$ ve $0 < q \leq 1$ olmak üzere

$$\Gamma_q(n+1) = [n]_q!$$

eşitliği sağlanır.

İspat : Eş. 2.1 den

$$[n]_q! = \frac{(1-q)_q^n}{(1-q)^n}$$

olduğunu biliniyor. Eşitliğin sağ tarafını $(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})...$ ile çarpıp bölersek

$$[n]_q! = \frac{(1-q)(1-q^2)...(1-q^n)(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})...}{(1-q)^n(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})...} = \frac{(1-q)_q^\infty}{(1-q)^n(1-q^{n+1})_q^\infty} \tag{2.20}$$

olur.

$\Gamma(n) = (n-1)!$ olduğunu biliyoruz.

$\Gamma_q(n) = [n-1]_q!$ olduğunu kabul edelim. Eş. 2.20 de n yerine $n-1$ alınırsa

$$\Gamma_q(n) = \frac{(1-q)_q^\infty}{(1-q^n)_q^\infty}(1-q)^{1-n} \tag{2.21}$$

elde edilir. Eş. 2.21 de $n=1$ yazılırsa

$$\Gamma_q(1) = 1$$

bulunur. Eş. 2.21 de n yerine $n+1$ yazarsak

$$\Gamma_q(n+1) = \frac{(1-q)_q^\infty}{(1-q^{n+1})_q^\infty}(1-q)^{1-(n+1)} \tag{2.22}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\left(1-q^{n+1}\right)_q^{\infty} &= \prod_{k=0}^{\infty}\left(1-q^{n+k+1}\right)\\ &= \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-q^{n+k}\right)\\ &= \left(1-q^{n+1}\right)\left(1-q^{n+2}\right)\ldots\end{aligned}$$

eşitliğin sağ tarafını $\left(1-q^{n}\right)$ ile çarpıp bölersek

$$\begin{aligned}\left(1-q^{n+1}\right)_q^{\infty} &= \frac{1}{\left(1-q^{n}\right)}\left(1-q^{n}\right)\left(1-q^{n+1}\right)\left(1-q^{n+2}\right)\ldots\\ &= \frac{1}{\left(1-q^{n}\right)}\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-q^{n+k}\right)\\ &= \frac{\left(1-q^{n}\right)_q^{\infty}}{1-q^{n}}\end{aligned}$$

olur. O halde bu eşitliği Eş. 2.22 de yerine yazarsak

$$\begin{aligned}\Gamma_q\left(n+1\right) &= \frac{\left(1-q\right)_q^{\infty}}{\frac{\left(1-q^{n}\right)_q^{\infty}}{1-q^{n}}}\left(1-q\right)^{1-(n+1)}\\ &= \frac{\left(1-q\right)_q^{\infty}}{\left(1-q^{n}\right)_q^{\infty}}\left(1-q\right)^{1-n}\left(1-q\right)^{-1}\left(1-q^{n}\right)\\ &= \frac{\left(1-q\right)_q^{\infty}}{\left(1-q^{n}\right)_q^{\infty}}\left(1-q\right)^{1-n}\frac{\left(1-q^{n}\right)}{\left(1-q\right)}\\ &= \Gamma_q\left(n\right)\left[n\right]_q\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. $\Gamma_q\left(n\right)=\left[n-1\right]_q!$ kabulünden

$$\Gamma_q\left(n+1\right)=\left[n-1\right]_q!\left[n\right]_q=\left[n\right]_q!$$

olur. Bu şekilde ispat tamamlanır.

2.1.5. Lemma **:** $\alpha,\beta>0$ ve $0<q\leq 1$ olmak üzere,

$$B_q(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-qx)_q^{\beta-1}d_qx=\frac{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)}{\Gamma_q(\alpha+\beta)}$$

eşitliği sağlanır.

İspat :

Daha önce $q-$binom teoreminden $(1-x)^{-\alpha}$ nın $q-$analoğunun

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-q^{\alpha})_q^k}{(1-q)_q^k}x^k=\frac{(1-q^{\alpha}x)_q^{\infty}}{(1-x)_q^{\infty}}$$

olduğunu göstermiştik. Burada $x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$ ifadesinin $q-$analoğuna ihtiyaç duyulmaktadır. Bunun için $(1-x)^{-\alpha}$ ifadesinin $q-$analoğu

$$\frac{(1-q^{\alpha}x)_q^{\infty}}{(1-x)_q^{\infty}} \tag{2.23}$$

olduğundan, Eş. 2.23 de $\alpha=1$ alınırsa, $(1-x)^{-1}$ nın $q-$analoğu

$$\frac{(1-qx)_q^{\infty}}{(1-x)_q^{\infty}}$$

olur. Yine Eş. 2.23 de $\alpha=\beta$ alınırsa, $(1-x)^{-\beta}$ nın $q-$analoğu

$$\frac{(1-q^{\beta}x)_q^{\infty}}{(1-x)_q^{\infty}}$$

bulunur. Buradan

$\left(1-x\right)^{\beta-1}$ nın $q-$analoğu $\dfrac{\left(1-qx\right)_q^\infty}{\left(1-q^\beta x\right)_q^\infty}$

şeklinde elde edilir. Buna göre $x^{\alpha-1}\left(1-x\right)^{\beta-1}$ ifadesi yerine,

$$f_q\left(x\right)=x^{\alpha-1}\frac{\left(1-qx\right)_q^\infty}{\left(1-q^\beta x\right)_q^\infty}$$

ifadesi yazılacaktır. Diğer taraftan $q-$binom teoremi,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(1-a\right)_q^n}{\left(1-q\right)_q^n}x^n=\frac{\left(1-ax\right)_q^\infty}{\left(1-x\right)_q^\infty} \tag{2.24}$$

şeklinde ifade edilmişti.

$$\begin{aligned}\left(1-a\right)_q^n&=\prod_{k=0}^{n-1}\left(1-aq^k\right)\\&=\prod_{k=0}^{n-1}\left(1-aq^k\right)\frac{\prod_{k=n}^{\infty}\left(1-aq^k\right)}{\prod_{k=n}^{\infty}\left(1-aq^k\right)}\\&=\frac{\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-aq^k\right)}{\prod_{k=n}^{\infty}\left(1-aq^k\right)}\\&=\frac{\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-aq^k\right)}{\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-aq^{k+n}\right)}\\&=\frac{\left(1-a\right)_q^\infty}{\left(1-aq^n\right)_q^\infty}\end{aligned}$$

yazılabilir. Benzer şekilde

$$\left(1-q\right)_q^n = \frac{\left(1-q\right)_q^\infty}{\left(1-q^{n+1}\right)_q^\infty}$$

sağlanır. Bu bağıntılar Eş. 2.24 de kullanılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(1-a\right)_q^n}{\left(1-q\right)_q^n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(1-a\right)_q^\infty}{\left(1-aq^n\right)_q^\infty}\frac{\left(1-q^{n+1}\right)_q^\infty}{\left(1-q\right)_q^\infty}x^n = \frac{\left(1-ax\right)_q^\infty}{\left(1-x\right)_q^\infty}$$

bulunur. Buradan

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(1-q^{n+1}\right)_q^\infty}{\left(1-aq^n\right)_q^\infty}x^n = \frac{\left(1-ax\right)_q^\infty\left(1-q\right)_q^\infty}{\left(1-x\right)_q^\infty\left(1-a\right)_q^\infty}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte x yerine q^α, a yerine ise q^β yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(1-q^{n+1}\right)_q^\infty}{\left(1-q^{n+\beta}\right)_q^\infty}q^{\alpha n} = \frac{\left(1-q^{\alpha+\beta}\right)_q^\infty\left(1-q\right)_q^\infty}{\left(1-q^\alpha\right)_q^\infty\left(1-q^\beta\right)_q^\infty} \tag{2.25}$$

bulunur. Ayrıca

$$\int_0^a f\left(x\right)d_qx = \sum_{n=0}^{\infty} f\left(aq^n\right)\left(aq^n - aq^{n+1}\right)$$

ifadesinde $a=1$ ve $f\left(x\right)$ yerinede $f_q\left(x\right) = x^{\alpha-1}\dfrac{\left(1-qx\right)_q^\infty}{\left(1-q^\beta x\right)_q^\infty}$ yazılırsa

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}\frac{\left(1-qx\right)_q^\infty}{\left(1-q^\beta x\right)_q^\infty}d_qx = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(\alpha-1)}\frac{\left(1-q^{n+1}\right)_q^\infty}{\left(1-q^{n+\beta}\right)_q^\infty}\left(q^n - q^{n+1}\right)$$

$$= \left(1-q\right)\sum_{n=0}^{\infty} q^{n\alpha}\frac{\left(1-q^{n+1}\right)_q^\infty}{\left(1-q^{n+\beta}\right)_q^\infty}$$

elde edilir. Eş. 2.25 eşitliği dikkate alınırsa

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}\frac{(1-qx)_q^\infty}{(1-q^\beta x)_q^\infty}d_qx=\frac{(1-q)(1-q^{\alpha+\beta})_q^\infty(1-q)_q^\infty}{(1-q^\alpha)_q^\infty(1-q^\beta)_q^\infty} \tag{2.26}$$

bulunur. Bu bağıntı

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

ifadesinin q-analoğudur. Ancak Eş. 2.26 ifadesini bu formda yazabilmek için gama fonksiyonunun q-analoğuna ihtiyaç vardır. Eş. 2.21 den

$$\Gamma_q(n)=\frac{(1-q)_q^\infty}{(1-q^n)_q^\infty}(1-q)^{1-n}$$

eşitliği göz önünde bulundurulursa.

$$\frac{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)}{\Gamma_q(\alpha+\beta)}=\frac{\dfrac{(1-q)_q^\infty}{(1-q^\alpha)_q^\infty}(1-q)^{1-\alpha}\dfrac{(1-q)_q^\infty}{(1-q^\beta)_q^\infty}(1-q)^{1-\beta}}{\dfrac{(1-q)_q^\infty}{(1-q^{\alpha+\beta})_q^\infty}(1-q)^{1-\alpha-\beta}}$$

$$=\frac{(1-q)(1-q^{\alpha+\beta})_q^\infty(1-q)_q^\infty}{(1-q^\alpha)_q^\infty(1-q^\beta)_q^\infty}$$

bu son ifade ile Eş. 2.26 karşılaştırılırsa

$$\mathrm{B}_q(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}\frac{(1-qx)_q^\infty}{(1-q^\beta x)_q^\infty}d_qx=\frac{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)}{\Gamma_q(\alpha+\beta)}$$

eşitliği elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

2.1.6. Lemma :

$$\mathrm{B}_q(t,\infty)=(1-q)^t\,\Gamma_q(t)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Lemma 2.1.5, Eş. 2.16 ve Eş. 2.17 den

$$\begin{aligned}\mathrm{B}_q(t,\infty)&=(1-q)\sum_{j=0}^{\infty}q^j\left(q^j\right)^{t-1}\left(1-q^{j+1}\right)_q^{\infty}\\&=(1-q)\sum_{j=-\infty}^{\infty}q^j\left(q^j\right)^{t-1}\left(1-q^{j+1}\right)_q^{\infty}\\&=\int_0^{\infty}x^{t-1}(1-qx)_q^{\infty}d_qx\end{aligned}$$

yazabiliriz. Ayrıca $E_q^x=\left(1+(1-q)x\right)_q^{\infty}$ eşitliğini göz önünde bulundurursak $\Gamma_q(t)$ ve $\mathrm{B}_q(t)$ arasında bir bağıntı bulabiliriz. O halde

$$\mathrm{B}_q(t,\infty)=\int_0^{\infty}x^{t-1}E_q^{\frac{-qx}{(1-q)}}d_qx$$

yazabiliriz. Şimdi $x=(1-q)y$ değişken değiştirmesini yaparsak,

$$\begin{aligned}\mathrm{B}_q(t,\infty)&=(1-q)^t\int_0^{\infty}y^{t-1}E_q^{-qy}d_qy\\&=(1-q)^t\,\Gamma_q(t)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

3. *q*-DURRMEYER OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde önce q-Bernstein polinomları tanıtılacak ve daha sonra V. Gupta tarafından yapılan q-Durrmeyer Operatörlerinin tanımı ifade edilecektir [6]. Yine bu bölümde Korovkin teoremi yardımıyla q-Durrmeyer operatörlerinin yaklaşım özellikleri incelenecektir.

3.1. *q*-Bernstein Polinomları

3.1.1. Lemma : q-Bernstein polinomlarının tanımı olan

$$B_{n,q}(f;x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k (1-x)_q^{n-k}$$

ifadesi kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

i) $B_{n,q}(1;x)=\sum_{k=o}^{n} p_{n,k}(q;x)=1$

ii) $B_{n,q}(t;x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]_q}{[n]_q} p_{n,k}(q;x)=x$

iii) $B_{n,q}(t^2;x)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)^2 p_{n,k}(q;x)=x^2+\frac{x(1-x)}{[n]_q}$

dir.

İspat:

i) $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$, q-binom katsayısı olmak üzere

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k y^{n-k} \tag{3.1}$$

eşitliği verilsin. Burada y yerine $1-x$ yazılırsa

$$(x+1-x)^n=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k (1-x)^{n-k}=1^n=1 \tag{3.2}$$

elde edilir. Ayrıca Eş. 2.7 den

$$\left(x+xy\right)^n = x^n\left(1+y\right)\left(1+qy\right)...\left(1+q^{n-1}\right)$$

olduğu bilinmektedir. Bu eşitlikte y yerine $-x$ yazılırsa,

$$\left(x-x^2\right)^n = x^n\left(1-x\right)\left(1-qx\right)...\left(1-q^{n-1}x\right)$$
$$x^n\left(1-x\right)^n = x^n\left(1-x\right)\left(1-qx\right)...\left(1-q^{n-1}x\right)$$
$$\left(1-x\right)_q^n = \left(1-x\right)\left(1-qx\right)...\left(1-q^{n-1}x\right)$$

elde edilir. Burada n yerine $n-k$ yazılırsa

$$\begin{aligned}\left(1-x\right)_q^{n-k} &= \left(1-x\right)\left(1-qx\right)...\left(1-q^{n-k-1}x\right)\\ &= \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)\end{aligned}$$

bulunur. Bu sonuç Eş. 3.2 de değerlendirilirse,

$$\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k\left(1-x\right)_q^{n-k} = 1$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$B_{n,q}\left(1,x\right) = \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k\left(1-x\right)_q^{n-k} = 1$$

bulunur.

ii)

$$\begin{aligned}B_{n,q}\left(t,x\right) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{[k]}{[n]}\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}x^k\left(1-x\right)_q^{n-k}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{[n-1]_q!}{[n-k]_q![k-1]_q!}x^k\left(1-x\right)_q^{n-k}\\ &= x\sum_{k=0}^{n-1}\frac{[n-1]_q!}{[n-k-1]_q![k]_q!}x^k\left(1-x\right)_q^{n-k}\\ &= x\end{aligned}$$

iii)

$$
\begin{aligned}
[k]_q^{\,2} &= \left(1+q+\ldots+q^{n-1}\right)[k]_q \\
&= \left(1+q\left(1+q+\ldots+q^{n-1}\right)\right)[k]_q \\
&= q[k]_q[k-1]_q+[k]_q
\end{aligned}
$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlik göz önünde bulundurulursa,

$$
\begin{aligned}
B_{n,q}\left(t^2,x\right) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{[k]_q^2}{[n]_q^2}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k\left(1-x\right)_q^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{q[k]_q[k-1]_q+[k]_q}{[n]_q^2}\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}x^k\ \left(1-x\right)_q^{n-k} \\
&= \frac{q}{[n]_q}\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]_q[k-1]_q}{[n]_q}\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}x^k\left(1-x\right)_q^{n-k} \\
&\quad +\frac{1}{[n]_q}\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]_q}{[n]_q}\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}x^k\left(1-x\right)_q^{n-k} \\
&= \frac{q}{[n]_q}\sum_{k=2}^{n}\frac{[n-1]_q!}{[k-2]_q![n-k]_q!}x^k\left(1-x\right)_q^{n-k}+\frac{1}{[n]_q}B_{n,q}\left(t;x\right) \\
&= \frac{q[n-1]_q}{[n]_q}\sum_{k=0}^{n}\frac{[n-2]_q!}{[k]_q![n-k-2]_q!}x^{k+2}\left(1-x\right)_q^{n-k-2}+\frac{1}{[n]_q}B_{n,q}\left(t;x\right) \\
&= \frac{q[n-1]_q x^2}{[n]_q}\sum_{k=0}^{n-2}\begin{bmatrix} n-2 \\ k \end{bmatrix}x^k\left(1-x\right)_q^{n-2-k}+\frac{1}{[n]_q}B_{n,q}\left(t;x\right) \\
&= \frac{q[n-1]_q x^2}{[n]_q}+\frac{x}{[n]_q} \\
&= \frac{[n]_q-1}{[n]_q}x^2+\frac{x}{[n]_q} \\
&= x^2-\frac{x^2}{[n]_q}+\frac{x}{[n]_q} \\
&= x^2+\frac{x\left(1-x\right)}{[n]_q}
\end{aligned}
$$

bulunur. İspat tamamlanır.

3.2. *q*-Durrmeyer Operatörlerinin Tanımı

3.2.1. Tanım : $f \in C[0.1]$, $x \in [0,1]$ ve $0 < q \leq 1$ olmak üzere V.Gupta [6] tarafından tanımlanan q -Durrmeyer operatörü;

$$D_{n,q}(f;x) = [n+1]_q \sum_{k=0}^{n} q^{-k} p_{n,k}(q;x) \int_0^1 f(t)\, p_{n,k}(q;qt)\, d_q t = \sum_{k=0}^{n} A_{n,k}(f) p_{n,k}(q;x) \quad (3.3)$$

şeklindedir. Burada

$$p_{n,k}(q;x) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k (1-x)_q^{n-k}$$

şeklinde tanımlanır. Dikkat edilirse $q = 1$ durumunda Eş. 3.3 eşitliği,

$$D_n(f;x) = (n+1) \sum_{k=0}^{n} p_{n.k}(x) \int_0^1 f(t)\, p_{n,k}(t)\, dt$$

eşitliği, yani klasik Durrmeyer operatörü elde edilir.

3.2.1. Lemma : Her $s \in \mathbb{N}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlik sağlnır.

$$\int_0^1 t^s p_{n,k}(q;qt)\, d_q t = q^k \frac{[n]_q! [k+s]_q!}{[n+s+1]_q! [k]_q!}.$$

ispat: $0 < q \leq 1$ olmak üzere, Tanım 2.1.5 den

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^s p_{n,k}(q;qt)\, d_q t &= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^k \int_0^1 t^{k+s} (1-qt)_q^{n-k}\, d_q t \\
&= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^k B_q(k+s+1,\ n-k+1) \\
&= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^k \frac{\Gamma_q(k+s+1)\Gamma_q(n-k+1)}{\Gamma_q(n+s+2)} \\
&= q^k \frac{[n]_q!}{[k]_q! [n-k]_q!} \frac{[k+s]_q! [n-k]_q!}{[n+s+1]_q!} \\
&= q^k \frac{[n]_q! [k+s]_q!}{[n+s+1]_q! [k]_q!}.
\end{aligned}$$

3.3. *q*-Durrmeyer operatörlerinin Düzgün Yakınsaklığı

3.3.1. Teorem **:** Her $n \in \mathbb{N},\ x \in [0,1]$ *ve* $0 < q \le 1$ için

i) $D_{n,q}(1,x) = 1$

ii) $D_{n,q}(t,x) = \dfrac{1 + qx[n]_q}{[n+2]_q}$

iii) $D_{n,q}(t^2;x) = \dfrac{1 + q + (1+q)^2 qx[n]_q + q^3x^2[n]_q\left([n]_q - 1\right)}{[n+2]_q[n+3]_q}$

İspat :

i) Her $0 < q \le 1$ için ve Lemma 3.2.1 ve Lemma 3.1.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
D_{n,q}(1,x) &= [n+1]_q \sum_{k=0}^{n} q^{-k} p_{n,k}(q;x) \int_0^1 p_{n,k}(q;qt)\,d_q t \\
&= [n+1]_q \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(q;x) q^{-k} q^{k} \frac{[n]_q![k]_q!}{[n+1]_q![k]_q!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(q;x) \\
&= 1
\end{aligned}$$

gerçeklenir.

ii) Her $0 < q \le 1$ için Lemma 3.2.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
D_{n,q}(t,x) &= [n+1]_q \sum_{k=0}^{n} q^{-k} p_{n,k}(q;x) \int_0^1 t\ \ p_{n,k}(q;qt)\,d_q t \\
&= [n+1]_q \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(q;x)\, q^{-k} q^{k} \frac{[n]_q![k+1]_q!}{[n+2]_q![k]_q!} \\
&= \frac{1}{[n+2]_q} \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(q;x)[k+1]_q
\end{aligned} \tag{3.4}$$

olur. $[k+1]_q = 1 + q + \ldots + q^k = 1 + q\left(1 + q + \ldots + q^{k-1}\right) = 1 + q[k]_q$ eşitliği kullanılırsa,

$$D_{n,q}(f;x)=\frac{1}{[n+2]_q}\sum_{k=0}^{n}p_{n,k}(q;x)\left(1+q[k]_q\right)$$
$$=\frac{1}{[n+2]_q}\sum_{k=0}^{n}p_{n,k}(q;x)+\frac{q}{[n+2]_q}\sum_{k=0}^{n}[k]_q\,p_{n,k}(q;x)$$

sağlanır. Bu eşitliğin sağ tarafındaki ikinci toplamı $[n]_q$ çarpıp böler ve Lemma 3.1.1' i göz önünde bulundurursak,

$$D_{n,q}(t;x)=\frac{1}{[n+2]_q}\sum_{k=0}^{n}p_{n,k}(q;x)+\frac{q[n]_q}{[n+2]_q}\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]_q}{[n]_q}\,p_{n,k}(q;x)$$
$$=\frac{1}{[n+2]_q}B_{n,q}(1;x)\;+\frac{1}{[n+2]_q}q[n]_q\,B_{n,q}(t;x)$$
$$=\frac{1+qx[n]_q}{[n+2]_q}$$

elde edilir.

iii) Lemma 3.2.1 kullanılırsa,

$$D_{n,q}\left(t^2,x\right)=[n+1]_q\sum_{k=0}^{n}q^{-k}p_{n,k}(q;x)\int_0^1 t^2\;p_{n,k}(q;qt)\,d_qt$$
$$=[n+1]_q\sum_{k=0}^{n}p_{n,k}(q;x)q^{-k}q^{k}\;\frac{[n]_q![k+2]_q!}{[n+3]_q![k]_q!}$$
$$=\frac{1}{[n+2]_q[n+3]_q}\sum_{k=0}^{n}p_{n,k}(q;x)[k+1]_q[k+2]_q \tag{3.5}$$

bulunur. $[k+1]_q=1+q[k]_q$ ve $[k+2]=1+q+q^2[k]_q$ eşitlikleri kullanılarak,

$$[k+1]_q[k+2]_q=\left(1+q[k]_q\right)\left(1+q+q^2[k]_q\right)$$
$$=\left(1+q+q[k]_q+2q^2[k]_q+q^3[k]_q^2\right)$$
$$=\left(1+q+\left(q+2q^2\right)[k]_q+q^3[k]_q^2\right) \tag{3.6}$$

eşitliğini yazabiliriz. Eş. 3.6 yı Eş. 3.5 de yerine yazarsak,

$$D_{n,q}\left(t^2,x\right)=\frac{1}{[n+2]_q[n+3]_q}\sum_{k=0}^{n}p_{n,k}(q;x)\left(1+q+\left(q+2q^2\right)[k]_q+q^3[k]_q^2\right)$$
$$=\frac{1+q}{[n+2]_q[n+3]_q}\sum_{k=0}^{n}p_{n,k}(q;x)+\frac{\left(q+2q^2\right)}{[n+2]_q[n+3]_q}\sum_{k=0}^{n}[k]_q\,p_{n,k}(q;x)$$
$$+\frac{q^3}{[n+2]_q[n+3]_q}\sum_{k=0}^{n}[k]_q^2\,p_{n,k}(q;x)$$

olur. Burada ikinci toplamı $[n]_q$ ile çarpıp böler ve üçüncü toplamı da $[n]_q^2$ ile çarpıp bölersek,

$$D_{n,q}\left(t^2,x\right)=\frac{1}{[n+2]_q[n+3]_q}\sum_{k=0}^{n}p_{n,k}(q;x)\left(1+q+\left(q+2q^2\right)[k]_q+q^3[k]_q^2\right)$$
$$=\frac{1+q}{[n+2]_q[n+3]_q}\sum_{k=0}^{n}p_{n,k}(q;x)+\frac{\left(q+2q^2\right)[n]_q}{[n+2]_q[n+3]_q}\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]_q}{[n]_q}p_{n,k}(q;x)$$
$$+\frac{q^3[n]_q^2}{[n+2]_q[n+3]_q}\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]_q^2}{[n]_q^2}p_{n,k}(q;x)$$
$$=\frac{1+q}{[n+2]_q[n+3]_q}B_{n,q}(1;x)+\frac{\left(q+2q^2\right)[n]_q}{[n+2]_q[n+3]_q}B_{n,q}(t;x)$$
$$+\frac{q^3[n]_q^2}{[n+2]_q[n+3]_q}B_{n,q}\left(t^2;x\right)$$

elde edilir. Lemma 3.1.1 göz önünde bulundurulursa,

$$D_{n,q}\left(t^2;x\right)=\frac{1}{[n+2]_q[n+3]_q}\left(1+q+\left(q+2q^2\right)[n]_q\,x+q^3[n]_q^2\left(\frac{[n]_q-1}{[n]_q}x^2+\frac{1}{[n]_q}x\right)\right)$$
$$=\frac{1+q+q(1+q)^2x[n]_q+q^3x^2\left([n]_q\left([n]_q-1\right)\right)}{[n+2]_q[n+3]_q}$$

elde edilir. Bu şekilde teoremin tamamı ispatlanmış olur.

3.3.1. Lemma : $r \geq 1$, $C_j(r) > 0$ ve k dan bağımsız olarak $j = 0,1,2,,...,r$ olsun.

$$D_{n,q}\left(t^r;x\right) = \frac{[n+1]_q!}{[n+r+1]_q!}\sum_{j=0}^{r} C_j(r)[n]_q^{\,j} B_{n,q}\left(t^j;x\right)$$

sağlanır.

İspat : Bir önceki teoremden kolayca görülebilir ki

$$D_{n,q}\left(t^r;x\right) = \frac{[n+1]_q!}{[n+r+1]_q!}\sum_{s=1}^{r}[k+1]_q[k+2]_q,...,[k+r]_q\, p_{n,k}(q;x) \tag{3.7}$$

sağlanır. Burada $[k+s]_q = [s]_q + q^s[k]_q$ eşitliğini kullanarak,

$$[k+1]_q[k+2]_q,...,[k+r]_q = \prod_{s=1}^{r}\left([s]_q + q^s[k]_q\right) = \sum_{j=0}^{r} C_j(r)[k]_q^{\,j} \tag{3.8}$$

yazabiliriz. Bu Eş. 3.8 yi, Eş. 3.7 da yerine koyarsak ve $C_s(r)$sayılarının $k$dan bağımsız olduğu göz önünde bulundurulursa,

$$\begin{aligned}
D_{n,q}\left(t^r;x\right) &= \frac{[n+1]_q!}{[n+r+1]_q!}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{r} C_j(r)[k]_q^{\,j}\, p_{n,k}(q;x) \\
&= \frac{[n+1]_q!}{[n+r+1]_q!}\sum_{j=0}^{r} C_j(r)\sum_{k=0}^{n}[k]_q^{\,j} p_{n,k}(q;x) \\
&= \frac{[n+1]_q!}{[n+r+1]_q!}\sum_{j=0}^{r} C_s(r)[n]_q^{\,j}\sum_{k=o}\frac{[k]_q^{\,j}}{[n]_q^{\,j}}\, p_{n,k}(q;x) \\
&= \frac{[n+1]_q!}{[n+r+1]_q!}\sum_{j=0}^{r} C_j(r)[n]_q^{\,j} B_{n,q}\left(t^j;x\right)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

3.3.2. Teorem : $0 < q \leq 1$olsun. Her $f \in C[0,1]$ için, $[0,1]$ kapalı aralığı üzerinde

$D_{n,q_n}(f) \rightrightarrows f$ düzgün yakınsaktır ancak ve ancak $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = 1$ dir.

İspat : $q_n \in (0,1]$ için $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = 1$ olsun. $D_{n,q_n}(f) \rightrightarrows f$ düzgün yakınsaklığını gösterelim. Bunun için Korovkin teoremi kullanılacaktır. O halde ilk önce $D_{n,q}$ operatörlerinin lineer ve pozitif olduğunu gösterelim.

i) Lineerlik : Her $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ ve $f,\ g \in C[0,1]$ için

$$\begin{aligned}
D_{n,q}(\alpha f(t) + \beta g(t);x) &= [n+1]_q \sum_{k=0}^{n} q^{-k} p_{n,k}(q;x) \int_0^1 (\alpha f(t) + \beta g(t)) p_{n,k}(q;qt)\, d_q t \\
&= [n+1]_q \sum_{k=0}^{n} q^{-k} p_{n,k}(q;x) \Bigg(\alpha \int_0^1 f(t) p_{n,k}(q;qt)\, d_q t \\
&\quad + \beta \int_0^1 g(t) p_{n,k}(q;qt)\, d_q t \Bigg) \\
&= \alpha [n+1]_q \sum_{k=0}^{n} q^{-k} p_{n,k}(q;x) \int_0^1 f(t) p_{n,k}(q;qt)\, d_q t \\
&\quad + \beta [n+1]_q \sum_{k=0}^{n} q^{-k} p_{n,k}(q;x) \int_0^1 g(t) p_{n,k}(q;qt)\, d_q t \\
&= \alpha D_{n,q}(f;x) + \beta D_{n,q}(g;x)
\end{aligned}$$

gerçeklenip $(D_{n,q})$ operatörü bir lineer operatördür.

ii) Pozitiflik : Her $x \in [0,1]$ ve $0 < q \le 1$ olmak üzere,

$$D_{n,q}(f;x) = [n+1]_q \sum_{k=0}^{n} q^{-k} p_{n,k}(q;x) \int_0^1 f(t) p_{n,k}(q;qt)\, d_q t$$

operatörü için,

$[n+1]_q\ q^{-k} x^k (1-x)_q^{n-k} \ge 0$ olduğu açıktır. Ayrıca $t \in [0,1]$ için $p_{n,k}(q;qt) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (qt)^k (1-qt)^{n-k} \ge 0$ ve $f \ge 0$ ise $f(t) \ge 0$ olacağından, $\int_0^1 f(t) p_{n,k}(q;qt)\, d_q t \ge 0$ olur. O halde $D_{n,q}(f;x) \ge 0$ sağlanır.

Yani $\left(D_{n,q_n}\right)$ operatörü pozitif bir operatördür. O halde Korovkin teoreminden her $f \in C[0,1]$ için $D_{n,q}(f;x) \rightrightarrows f(x)$ düzgün yakınsak olması için,

$$D_{n,q}\left(t^i;x\right) \rightrightarrows x^i\ , \qquad i = 0,1,2 \tag{3.9}$$

yakınsaklığının sağlanması gerekir. Eğer $q_n \to 1$ ise $[n]_{q_n} \to \infty$ ve $s = 1,2,3$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{[n+s]_q}{[n]_q} = 1$ sağlanır. Buradan Eş. 3.9 sağlanır. Gerçekten Teorem 3.3.1 deki

i) $D_{n,q}(1,x) = 1$

ii) $D_{n,q}(t,x) = \dfrac{1 + qx[n]_q}{[n+2]_q}$

iii) $D_{n,q}\left(t^2;x\right) = \dfrac{1 + q + (1+q)^2 qx[n]_q + q^3x^2[n]_q\left([n]_q - 1\right)}{[n+2]_q[n+3]_q}$

ifadelerinde $q = (q_n)$ alırsa,

i) $D_{n,q}(1;x) \rightrightarrows 1$

ii) $D_{n,q}(t;x) \rightrightarrows x$

iii) $D_{n,q}\left(t^2;x\right) \rightrightarrows x^2$

gerçeklenir. O halde Korovkin teoreminden $D_{n,q_n}(f;x) \rightrightarrows f(x)$ sağlanır. Diğer taraftan her $f \in C[0,1]$ için $D_{n,q_n}(f;x) \rightrightarrows f(x)$ düzgün yakınsaklığı sağlansın. $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = 1$ olduğunu gösterelim. Bunun için (q_n) dizisinin limitinin 1 olmadığını kabul edelim. Yani $q_n \nrightarrow 1$ olsun. O halde (q_n) dizisinin öyle bir $\left(q_{n_k}\right)$ alt dizisi vardır ki $q_{n_k} \to q_0 \in (0,1)$, $(k \to \infty)$ sağlansın. Buradan $(k \to \infty)$ için $\dfrac{1}{[n_k + s]_{q_{n_k}}} = \dfrac{1 - q_{n_k}}{1 - \left(q_n\right)^{n_n + s}} \to (1 - q_0)$, $(s = 0,1,2,3)$ sağlanır. Şimdi $n = n_k$, $q = q_{n_k}$ seçersek;

$D_{n,q_n}\left(t^2;x\right) \to x\left(1-q_0{}^2\right)\left(1+q_0\right)q_0 + x^2 q_0^4 \not\to \quad x^2, \quad \left(k \to \infty\right)$ olduğu görülür. Bu durum hipotezimizle ,yani $D_{n,q_n}\left(f;x\right) \rightrightarrows f\left(x\right)$ düzgün yakınsaklığıyla çelişir. O halde $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = 1$ olmak zorunda. Bu şekilde ispat tamamlanır.

3.3.3. Teorem **:** q-Durrmeyer operatörlerinin ilk üç merkezi momentleri;

i) $\varphi_{n,0}\left(x\right) = 1$

ii) $\varphi_{n,1}\left(x\right) = \dfrac{1+qx[n]_q - x[n+2]_q}{[n+2]_q}$

iii) $\varphi_{n,2}\left(x\right) = \dfrac{q^3x^2[n]_q\left([n]_q - 1\right) + q\left(1+q\right)^2 x[n]_q + 1 + q}{[n+2]_q[n+3]_q} - 2x\dfrac{1+qx[n]_q}{[n+2]_q} + x^2$

şeklindedir.

İspat : Tanım 1.1.8, $D_{n,q}$ operatörünün lineerliğinden ve Teorem 3.3.1 den

i)

$$\begin{aligned}
\varphi_{n,0}\left(x\right) &= D_{n,q}\left(\left(t-x\right)^0;x\right) \\
&= D_{n,q}\left(1;x\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

olur.

ii)

$$\begin{aligned}
\varphi_{n,1}\left(x\right) &= D_{n,q}\left(\left(t-x\right)^1;x\right) \\
&= D_{n,q}\left(t;x\right) - x\, D_{n,q}\left(1;x\right) \\
&= \frac{1+qx[n]_q}{[n+2]_q} - x \\
&= \frac{1+qx[n]_q - x[n+2]_q}{[n+2]_q}
\end{aligned}$$

olur.

iii)

$$\begin{aligned}\varphi_{n,2}(x) &= D_{n,q}\left((t-x)^2;x\right)\\ &= D_{n,q}\left(t^2-2xt+x^2;x\right)\\ &= D_{n,q}\left(t^2;x\right)-2xD_{n,q}\left(t;x\right)+x^2D_{n,q}\left(1;x\right)\\ &= \frac{q^3x^2[n]_q\left([n]_q-1\right)+q(1+q)^2x[n]_q+1+q}{[n+2]_q[n+3]_q}-2x\frac{1+qx[n]_q}{[n+2]_q}+x^2\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanıp teorem ispatlamış olur.

3.3.2 Lemma : $n>3$ doğal sayısı verilmiş olsun. En az $q_0=q_0(n)\in(0,1)$ sayısı vardır, öyle ki her $q\in(q_0,1)$ sayısı için,

$$q^{n+2}-q^{n+1}-2q^n-2q^{n-1}-\ldots-2q^3-q^2+q+2<0$$

gerçeklenir ve

$$\varphi_{n,2}(x)=D_{n,q}\left((t-x)^2;x\right)\leq\frac{2}{[n+2]_q}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{[n+3]_q}\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $x\in[0,1]$ dir.

İspat : Teorem 3.3.1 den

$$\begin{aligned}D_{n,q}\left((t-x)^2;x\right) &= \frac{q^3x^2[n]_q\left([n]_q-1\right)+q(1+q)^2x[n]_q+1+q}{[n+2]_q[n+3]_q}-2x\frac{1+qx[n]_q}{[n+2]_q}+x^2\\ &= x^2\,\frac{q^3[n]_q\left([n]_q-1\right)-2q[n]_q[n+3]\ +[n+2]_q[n+3]_q}{[n+2][n+3]}\\ &\quad +x\,\frac{q(1+q)^2[n]_q-2[n+3]_q}{[n+2]_q[n+3]_q}+\frac{1+q}{[n+2]_q[n+3]_q}\end{aligned}$$

yazılabilir. $n>3$ ve her $q\in(q_0,1)$ sayısı için,

$$
\begin{aligned}
q(1+q)^2[n]_q - 2[n+3]_q &= q(1+q)^2\left(1+q+\ldots+q^{n-1}\right) - 2\left(1+q+\ldots+q^{n+2}\right) \\
&= \left(q+2q^2+q^3\right)\left(1+q+\ldots+q^{n-1}\right) - 2\left(1+q+\ldots+q^{n+2}\right) \\
&= \left(q+q+\ldots+q^n\right) + \left(2q^2+2q^3+\ldots+2q^{n+1}\right) \\
&\quad + \left(q^3+q^4+\ldots+q^{n+2}\right) - 2 - 2q - 2q^2 - \ldots - 2q^{n+2} \\
&= -q^{n+2} + q^{n+1} + 2q^n + 2q^{n-1} + \ldots + 2q^3 + q^2 - q - 2 > 0
\end{aligned}
$$

eşitliği gerçeklenir. Ayrıca $q \in (q_0, 1)$ için,

$$
\begin{aligned}
q(1+q)^2[n]_q - 2[n+3]_q &\leq 4[n]_q - 2[n+3]_q \\
&= 4\left([n+3]_q - q^n - q^{n+1} - q^{n+2}\right) - 2[n+3]_q \\
&\leq 4[n+3]_q - 2[n+3]_q \\
&= 2[n+3]_q
\end{aligned}
$$

olup,

$$
q(1+q)^2[n]_q - 2[n+3]_q \leq 2[n+3]_q \tag{3.10}
$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bunun yanında

$$
\begin{aligned}
& q(1+q)^2[n]_q - 2[n+3]_q + q^3[n]_q\left([n]_q - 1\right) - 2q[n]_q[n+3]_q + [n+2]_q[n+3]_q \\
&= q(1+q)^2[n]_q - 2\left(1+q+q^2+q^3[n]_q\right) + q^3[n]_q^{\,2} - q^3[n]_q - 2q[n]_q\left(1+q+q^2+q^3[n]_q\right) \\
&+ \left(1+q+q^2[n]_q\right)\left(1+q+q^2+q^3[n]_q\right) \\
&= q^3(1-q)^2[n]_q^{\,2} - \left(q-q^2+2q^3-2q^4\right)[n]_q - \left(1-q^3\right) \\
&= q^3(1-q)^2\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)^2 - q(1-q)\left(1+2q^2\right)\frac{1-q^n}{1-q} - \left(1-q^3\right) \\
&= q^3\left(1-q^n\right)^2 - q\left(1+2q^2\right)\left(1-q^n\right) - \left(1-q^3\right) \\
&= q^{2n+3} + q^{n+1} - q - 1 \leq 0
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$q(1+q)^2[n]_q-2[n+3]_q+q^3[n]_q\left([n]_q-1\right)-2q[n]_q[n+3]_q+[n+2]_q[n+3]_q\leq 0 \quad (3.11)$$

olduğu görülür. Diğer taraftan,

$$D_{n,q}\left((t-x)^2;x\right)=\frac{q(1+q)^2[n]_q-2[n+3]_q}{[n+2]_q[n+3]_q}\ x(1-x)$$
$$+\left(\frac{q(1+q)^2[n]_q-2[n+3]_q}{[n+2]_q[n+3]_q}+\frac{q^3[n]_q\left([n]_q-1\right)-2q[n]_q[n+3]_q+[n+2]_q[n+3]_q}{[n+2]_q[n+3]_q}\right)x^2$$
$$+\frac{1+q}{[n+2]_q[n+3]_q}$$

yazabiliriz. Sonuç olarak Eş. 3.10, Eş. 3.11 dan ve her $x\in[0,1]$ için,

$$D_{n,q}\left((t-x)^2;x\right)\leq\frac{2[n+3]_q}{[n+2]_q[n+3]_q}\ x(1-x)+\frac{2}{[n+2]_q[n+3]_q} \quad (3.12)$$

elde edilir. Buradan $x\in[0,1]$ için $\max\{x(1-x)\}=\frac{1}{4}$ olacağından,

$$D_{n,q}\left((t-x)^2;x\right)\leq\frac{2}{[n+2]_q}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{[n+3]_q}\right)$$

gerçeklenir ve ispat tamamlanır.

4. *q*-DURRMEYER OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM HIZI

Bu bölümde q-Durrmeyer operatörlerinin bir f fonksiyonuna yaklaşım hızları Süreklilik modülü, Peetre *K*-fonksiyoneli ve Lipschitz tipli maksimal fonksiyon yardımıyla incelenecektir.

4.1. Süreklilik Modülü

$\langle a,b\rangle$, $\mathbb{R}$ nin herhangi bir alt aralığı olmak üzere ∀ δ>0 için;

$$\omega(f;\delta)=\sup_{\substack{x,t\in\langle a,b\rangle\\ |x-t|\leq\delta}}|f(t)-f(x)| \tag{4.1}$$

ile tanımlanan $\omega(f;\delta)$ ifadesine f fonksiyonunun süreklilik modülü denir.

Süreklilik modülü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i) $\omega(f;\delta)\geq 0$

ii) $\delta_1\leq\delta_2$ ise $\omega(f;\delta_1)\leq\omega(f;\delta_2)$

iii) $m\in\mathbb{N}$ için $\omega(f;m\delta)\leq m\,\omega(f;\delta)$

iv) $\lambda\in\mathbb{R}^+$ için $\omega(f;\lambda\delta)\leq(\lambda+1)\omega(f;\delta)$

v) $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega(f;\delta)=0$

vi) $|f(t)-f(x)|\leq\omega(f;|t-x|)$

vii) $|f(t)-f(x)|\leq\left(1+\dfrac{|t-x|}{\delta}\right)\omega(f;\delta)$

4.2. *q*-Durrmeyer Operatörlerinin Süreklilik Modülü ile Yaklaşım Hızı

Bu kısımda Eş.3.3 ile verilen q-Durrmeyer operatörlerinin bir f fonksiyonuna yaklaşım hızını Eş. 4.1 ile tanımlanmış olan süreklilik modülünü kullanarak hesaplayacağız.

4.1.1. Teorem : $f \in C[0,1]$ olsun. $0 < q \leq 1$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için q-Durrmeyer operatörlerinin süreklilik modülüyle bir f fonksiyonuna yaklaşım hızı,

$$\left\| D_{n,q}(f;x) - f(x) \right\|_{C[0,1]} \leq 2\,\omega(f;\delta_n)$$

olarak hesaplanır. Burada

$$\delta_n = \sqrt{\frac{2}{[n+3]_q}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{[n+3]_q}\right)}$$

şeklindedir.

İspat : $f \in C[0,1]$ olsun. $D_{n,q}(f)$ operatörünün lineer, pozitif ve monotonluk özelliğinden dolayı $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} \left| D_{n,q}(f;x) - f(x) \right| &= \left| D_{n,q}(f(t) - f(x);x) \right| \\ &\leq D_{n,q}\left(\left| f(t) - f(x) \right|;x \right) \end{aligned}$$

yazabiliriz. Süreklilik modülünün (vii) inci özelliğinden

$$\left| f(t) - f(x) \right| \leq \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta} \right) \omega(f;\delta)$$

olduğunu biliyoruz. Yine operatörün monoton artan ve lineer özelliğinden

$$\left| D_{n,q}(f;x) - f(x) \right| \leq D_{n,q}\left(\omega(f;\delta)\left(1 + \frac{|t-x|}{\delta} \right); x \right)$$

elde edilir. $D_{n,q}(f)$ operatörü lineer olduğundan

$$\left|D_{n,q}\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|\leq\frac{\omega\left(f;\delta\right)}{\delta}D_{n,q}\left(\left|t-x\right|;x\right)+\omega\left(f;\delta\right)D_{n,q}\left(1;x\right) \tag{4.2}$$

yazabiliriz. Şimdi $D_{n,q}\left(\left|t-x\right|;x\right)$ ifadesini hesaplayalım.

$$\begin{aligned}D_{n,q}\left(\left|t-x\right|;x\right)&\leq[n+1]_q\sum_{k=0}^{n}q^{-k}p_{n,k}\left(q;x\right)\int_0^1\left|t-x\right|p_{n,k}\left(q;qt\right)d_qt\\&=[n+1]_q\sum_{k=0}^{n}q^{-k}p_{n,k}\left(q;x\right)\int_0^1\left|t-x\right|\left(p_{n,k}\left(q;qt\right)\right)^{\frac{1}{2}}\left(p_{n,k}\left(q;qt\right)\right)^{\frac{1}{2}}d_qt\end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada integral üzerinde Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uygularsak;

$$D_{n,q}\left(\left|t-x\right|;x\right)\leq[n+1]_q\sum_{k=0}^{n}q^{-k}p_{n,k}\left(q;x\right)\left(\int_0^1\left(t-x\right)^2p_{n,k}\left(q;qt\right)d_qt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1p_{n,k}\left(q;qt\right)d_qt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=[n+1]_q\sum_{k=0}^{n}q^{-k}\left(p_{n,k}\left(q;x\right)\right)^{\frac{1}{2}}\left(p_{n,k}\left(q;x\right)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1\left(t-x\right)^2p_{n,k}\left(q;qt\right)d_qt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1p_{n,k}\left(q;qt\right)d_qt\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Burada toplam üzerinden tekrar Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uygularsak

$$\begin{aligned}D_{n,q}\left(\left|t-x\right|;x\right)&\leq\left([n+1]_q\sum_{k=0}^{n}q^{-k}p_{n,k}\left(q;x\right)\int_0^1\left(t-x\right)^2p_{n,k}\left(q;qt\right)d_qt\right)^{\frac{1}{2}}\\&\times\left([n+1]_q\sum_{k=0}^{n}q^{-k}p_{n,k}\left(q;x\right)\int_0^1p_{n,k}\left(q;qt\right)d_qt\right)^{\frac{1}{2}}\\&=\left(D_{n,q}\left(\left(t-x\right)^2;x\right)\right)^{\frac{1}{2}}\left(D_{n,q}\left(1;x\right)\right)^{\frac{1}{2}}\\&=\left(\varphi_{n,2}\left(x\right)\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Lemma 3.3.1 den

$$D_{n,q}\left(\left|t-x\right|;x\right)\leq\sqrt{\frac{2}{[n+2]_q}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{[n+3]_q}\right)}$$

sağlanır. Bu eşitsizliği Eş. 4.2 de değerlendirirsek,

$$\left|D_{n,q}(f;x)-f(x)\right| \leq \frac{\omega(f;x)}{\delta}\left(\varphi_{n,2}(x)\right)^{\frac{1}{2}}+\omega(f;x)$$

$$\leq \omega(f;x)\left(\frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{2}{[n+2]_q}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{[n+3]_q}\right)}+1\right)$$

sağlanır. Burada $\delta=\delta_n=\sqrt{\frac{2}{[n+2]_q}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{[n+3]_q}\right)}$ seçersek,

$$\left\|D_{n,q}(f;x)-f(x)\right\|_{C[0,1]} \leq \omega(f;x)\left(\frac{1}{\delta_n}\,\delta_n+1\right)$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\left\|D_{n,q}(f;x)-f(x)\right\|_{C[0,1]} \leq 2\,\omega(f;\delta_n)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

4.3. Lokal Yaklaşım

Bu kısımda q-Durrmeyer operatörlerinin Peetre K-fonksiyoneli yardımıyla bir f fonksiyonuna yaklaşım hızı hesaplanacaktır.

4.3.1 Tanım : $\delta>0$ ve $W^2=\left\{g\in C[0,1]: g', g''\in C[0,1]\right\}$ olmak üzere K-fonksiyoneli,

$$K_2(f;\delta)=\inf\left\{\|f-g\|+\delta\|g''\|: g\in W^2\right\}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $\|.\|$ normu, $C[0,1]$deki düzgün normdur. Ayrıca $C>0$

$$K_2(f;\delta)\leq C\omega_2\left(f;\sqrt{\delta}\right) \tag{4.3}$$

sağlanır $[13, p.177, \text{teorem } 2.4]$. Burada $f\in C[0,1]$ olmak üzere $\omega_2(f;\delta)$ ifadesi,

$$\omega_2\left(f;\sqrt{\delta}\right)=\sup_{0<h\leq\sqrt{\delta}}\ \sup_{x,x+2h\in[0,1]}\left|f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)\right|$$

şeklindedir.

4.3.1. Lemma : $g(x)$ fonksiyonu $[0,a]$ aralığında ikinci basamaktan sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olsun. O halde

$$g(t)-g(x)=g'(x)(t-x)+\int_x^t (t-s)g''(s)\,ds \tag{4.4}$$

eşitliği sağlanır.

İspat : Analizin temel teoreminden ve g fonksiyonu ikinci basamaktan sürekli türeve sahip olduğundan,

$$g(t)=g(x)+\int_x^t g'(s)\,ds$$

yazabiliriz.

$$\int_x^t g'(s)\,ds$$

integraline kısmi integrasyon uygulayalım. $u=g'(s)$ dersek $du=g''(s)ds$ olur. $dv=ds$ dersek $v=s$ olur. Özel olarak $v=s-t$ alabiliriz. Kısmi integrasyon formülü göz önünde bulundurulursa,

$$\begin{aligned}\int_x^t g'(s)\,ds &= g'(s)(s-t)\Big|_x^t-\int_x^t (s-t)g''(s)\,ds\\ &=-g'(x)(x-t)-\int_x^t (s-t)g''(s)\,ds\\ &=g'(x)(t-x)+\int_x^t (t-s)g''(s)\,ds\end{aligned}$$

sağlanır. Buradan da

$$g(t)-g(x)=g'(x)(t-x)+\int_x^t (t-s)g''(s)\,ds$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

4.4.1. Teorem : $n>0$ olmak üzere n doğal sayı ve $q_0=q_0(n)\in(0,1)$ olsun.

$$\left|D_{n,q}(f;x)-f(x)\right|\leq C\omega_2\left(f;\frac{\delta_n(x)}{\sqrt{[n+2]_q}}\right)+\omega\left(f;\frac{1-x}{[n+2]_q}\right)$$

sağlanır. Burada $f\in C[0,1], \varphi^2(x)=x(1-x), \delta^2(x)=\varphi^2(x)+\frac{1}{[n]_q}$ ve $q\in(q_0,1)$ dir.

İspat : $f\in C[0,1]$ olmak üzere,

$$\tilde{D}_{n,q}(f;x)=D_{n,q}(f;x)+f(x)-f\left(\frac{1+q[n]_q x}{[n+2]_q}\right)$$

operatörünü tanımlayalım. Teorem 3.3.1 den

$$\tilde{D}_{n,q}(1;x)=D_{n,q}(1;x)=1 \tag{4.5}$$

$$\tilde{D}_{n,q}(t;x)=D_{n,q}(t;x)+x-\frac{1+q[n]_q x}{[n+2]_q}=x \tag{4.6}$$

sağlanır. Lemma 4.3.1 den

$$g(t)=g(x)+g'(x)(t-x)+\int_x^t (t-u)g''(u)\,du$$

sağlandığını biliyoruz. Buradan

$$\tilde{D}_{n,q}(g;x)=g(x)+\tilde{D}_{n,q}\left(\int_x^t (t-u)g''(u)\,du;x\right)$$

$$=g(x)+D_{n,q}\left(\int_x^t (t-u)g''(u)\,du;x\right)-\int_x^{\frac{1+q[n]_q x}{[n+2]_q}}\left(\frac{1+q[n]_q x}{[n+2]_q}-u\right)g''(u)\,du$$

bulunur. Buradan

$$\left|\tilde{D}_{n,q}\left(g;x\right)-g\left(x\right)\right|\leq D_{n,q}\left(\left|\int_{x}^{t}g''\left(u\right)\left(t-u\right)du\right|;x\right)+\int_{x}^{\frac{1+q[n]_q x}{[n+2]_q}}\left|\frac{1+q\left[n\right]_q x}{\left[n+2\right]_q}-u\right|g''\left(u\right)du$$

$$\leq D_{n,q}\left(\left(t-x\right)^2;x\right)\left\|g''\right\|+\left(\frac{1+q\left[n\right]_q x}{\left[n+2\right]_q}-x\right)^2\left\|g''\right\| \tag{4.7}$$

elde edilir. Lemma 3.3.2 den

$$D_{n,q}\left(\left(t-x\right)^2;x\right)+\left(\frac{1+q\left[n\right]_q x}{\left[n+2\right]_q}-x\right)^2\leq\frac{2}{\left[n+2\right]_q}\left(\varphi^2\left(x\right)+\frac{1}{\left[n+3\right]_q}\right)$$

$$+\left(\frac{1-\left(\left[n+2\right]_q-q\left[n\right]_q\right)x}{\left[n+2\right]_q}\right)^2 \tag{4.8}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\left[n+2\right]_q-q\left[n\right]_q=\left(1+q+...+q^{n+1}\right)-q\left(1+q+...+q^{n-1}\right)=1+q^{n+1}$$

olduğundan,

$$1\leq\left[n+2\right]_q-q\left[n\right]_q\leq2 \tag{4.9}$$

sağlanır. Burada $n=1,2,...,\ 0<q<1$ için $\left[n\right]_q\leq\left[n+3\right]_q$ sağlanır. O halde

$$\left(\frac{1-\left(\left[n+2\right]_q-q\left[n\right]_q\right)x}{\left[n+2\right]_q}\right)^2\delta_n^{-2}=\frac{1-2\left(\left[n+2\right]_q-q\left[n\right]_q\right)x+\left(\left[n+2\right]_q-q\left[n\right]_q\right)^2x^2}{\left[n+2\right]_q^2}$$

$$\times\frac{\left[n\right]_q}{\left[n\right]_q x\left(1-x\right)+1}$$

$$=\frac{1-2x+4x^2}{\left[n+2\right]_q}.\frac{\left[n\right]_q}{\left[n+2\right]_q}.\frac{1}{\left[n\right]_q x\left(1-x\right)+1}\leq\frac{3}{\left[n+2\right]_q} \tag{4.10}$$

elde edilir. $x\in\left[0,1\right]$ dir. Buradan

$$D_{n,q}\left(\left(t-x\right)^2;x\right)+\left(\frac{1+q\left[n\right]_q x}{\left[n+2\right]_q}-x\right)^2\leq\frac{5}{\left[n+2\right]_q}\delta_n^2\left(x\right)\qquad(4.11)$$

bulunur. Eş. 4.7 den

$$\left|\tilde{D}_{n,q}\left(g;x\right)-g\left(x\right)\right|\leq\frac{5}{\left[n+2\right]_q}\delta_n^2\left(x\right)\left\|g''\right\|\qquad(4.12)$$

sağlanır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}\left|D_{n,q}\left(f;x\right)\right|&=\left[n+1\right]_q\sum_{k=0}^{n}q^{-k}p_{n,k}\left(q;x\right)\int_0^1\left|f\left(t\right)p_{n,k}\left(q;qt\right)\right|d_qt\\&\leq\left\|f\right\|D_{n,q}\left(1;x\right)=\left\|f\right\|\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\left|\tilde{D}_{n,q}\left(f;x\right)\right|\leq\left|D_{n,q}\left(f;x\right)\right|+\left|f\left(x\right)\right|+\left|f\left(\frac{1+q\left[n\right]_q x}{\left[n+2\right]_q}\right)\right|\leq3\left\|f\right\|$$

sağlanır. Böylece

$$\left\|\tilde{D}_{n,q}\left(f;x\right)\right\|\leq3\left\|f\right\|\qquad(4.13)$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}\left|D_{n,q}\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|&\leq\left|\tilde{D}_{n,q}\left(f;x\right)-f\left(x\right)+f\left(\frac{1+q\left[n\right]_q x}{\left[n+2\right]_q}\right)-f\left(x\right)\right|\\&\leq\left|\tilde{D}_{n,q}\left(f-g;x\right)\right|+\left|\tilde{D}_{n,q}\left(g;x\right)-g\left(x\right)\right|+\left|g\left(x\right)-f\left(x\right)\right|\\&\quad+\left|f\left(\frac{1+q\left[n\right]_q x}{\left[n+2\right]_q}\right)-f\left(x\right)\right|\\&\leq4\left\|f-g\right\|+\frac{5}{\left[n+2\right]_q}\delta_n^2\left(x\right)\left\|g''\right\|+\omega\left(f;\left|\frac{1-\left(\left[n+2\right]_q-q\left[n\right]_q\right)x}{\left[n+2\right]_q}\right|\right)\\&\leq5\left(\left\|f-q\right\|+\frac{1}{\left[n+2\right]_q}\delta_n^2\left(x\right)\left\|g''\right\|\right)+\omega\left(f;\left|\frac{1-x}{\left[n+2\right]_q}\right|\right)\end{aligned}$$

sağlanır. Eş. 4.12 , Eş. 4.13 ve Eş. 4.9 dan

$$\left|D_{n,q}(f;x)-f(x)\right| \le 5K_2\left(f;\frac{1}{[n+2]_q}\delta_n^2\right)+\omega\left(f;\frac{1-x}{[n+2]_q}\right)$$

sağlanır. Eş. 4.3 göz önüne alınırsa,

$$\left|D_{n,q}(f;x)-f(x)\right| \le C\omega_2\left(f;\frac{\delta_n^2}{\sqrt{[n+2]_q}}\right)+\omega\left(f;\frac{1-x}{[n+2]_q}\right)$$

elde edilir ve bu şekilde ispat tamamlanmış olur.

4.4. Global Yaklaşım

4.4.1 Tanım : $f \in C[0,1]$ ve $\varphi(x)=\sqrt{x(1-x)}$ olsun. $x \in [0,1]$ için

$$\omega_2^{\varphi}\left(f;\sqrt{\delta}\right)=\sup_{0<h\le\sqrt{\delta}}\ \sup_{x\pm h\varphi(x)\in[0,1]}\left|f\left(x+h\varphi(x)\right)-2f(x)+f\left(x-h\varphi(x)\right)\right|$$

ifadesine ikinci Ditzian-Totik düzgünlük modülü denir. Ayrıca *K*-fonksiyoneli

$$\bar{K}_{2,\varphi}(f;\delta)=\inf\left\{\|f-g\|+\delta\left\|\varphi^2 g''\right\|+\delta^2\|g''\| : g\in W^2(\varphi)\right\}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $W^2(\varphi)=\left\{g\in C[0,1] : g'\in AC_{loc}[0,1], \varphi^2 g''\in C[0,1]\right\}$ dir. $g'\in AC_{loc}[0,1]$ olması demek, g' differensiyellenebilir ve g' $[a,b]\subset[0,1]$ kapalı aralığı üzerinde kesin sürekli olması demektir. Bununla beraber

$$\bar{K}_{2,\varphi}(f;\delta)\le C\omega_2^{\varphi}\left(f;\sqrt{\delta}\right) \tag{4.14}$$

eşitsizliği sağlandığı bilinmektedir [13]. Ayrıca birinci Ditzian-Totik modülü,

$$\bar{\omega}_{\psi}(f;\delta)=\sup_{0<h\le\delta}\ \sup_{x+h\psi(x)\in[0,1]}\left|f\left(x+h\psi(x)\right)-f(x)\right|$$

biçiminde verilir [14]. Burada ψ , $[0,1]$ üzerindeki basamak-ağırlık fonksiyonudur.

4.4.1 Teorem : $n>3$ bir doğal ve $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = 1$ olsun. Bir $C>0$ sabit sayısı vardır öyle ki,

$$\left\| D_{n,q}(f;x) - f(x) \right\| \le C\omega_2^{\varphi}\left(f; \frac{1}{\sqrt{[n]_q}} \right) + \bar{\omega}_{\psi}\left(f; \frac{1}{[n+2]_q} \right)$$

sağlanır. Burada $f \in C[0,1]$, $\psi(x) = 1-x$ ve $x \in [0,1]$ dir. Ayrıca burada

$\varphi^2(x) = x(1-x)$, $\delta_n^2(x) = \varphi^2(x) + \dfrac{1}{[n]_q}$ eşitlikleri göz önünde bulundurulacaktır.

İspat :

$$\tilde{D}_{n,q}(f;x) = D_{n,q}(f;x) + f(x) - f\left(\frac{1+q[n]_q x}{[n+2]_q} \right)$$

ifadesi tanımlansın. Lemma 4.3.1 den

$$g(t) = g(x) + g'(x)(t-x) + \int_x^t (t-u) g''(u)\,du$$

sağlandığı biliniyor. Eş. (4.5) ve Eş. (4.6) burada da göz ününde bulundurulursa,

$$\tilde{D}_{n,q}(g;x) = g(x) + D_{n,q}\left(\int_x^t (t-u) g''(u)\,du; x \right) - \int_x^{\frac{1+q[n]_q x}{[n+2]_q}} \left(\frac{1+q[n]_q x}{[n+2]_q} - u \right) g''(u)\,du$$

sağlanır. Buradan

$$\left| \tilde{D}_{n,q}(g;x) - g(x) \right| \le D_{n,q}\left(\left| \int_x^t |t-u| \, g''(u)\,du \right| ; x \right) + \left| \int_x^{\frac{1+q[n]_q x}{[n+2]_q}} \left| \frac{1+q[n]_q x}{[n+2]_q} - u \right| \left| g''(u) \right| du \right| \tag{4.15}$$

sağlanır. δ_n^2 fonksiyonu $[0,1]$ de konkav olduğundan $u = t + \tau(x-t)$, $\tau \in [0,1]$ için,

$$\frac{|t-u|}{\delta_n^2(u)} = \frac{\tau|x-t|}{\delta_n^2(t+\tau(x-t))} \le \frac{\tau|x-t|}{\delta_n^2(t)+\tau(\delta_n^2(x)-\delta_n^2(t))} \le \frac{|t-x|}{\delta_n^2(x)}$$

sağlanır. Eş. (4.15) den

$$\left|\tilde{D}_{n,q}(g;x)-g(x)\right| \le D_{n,q}\left(\left|\int_x^t \frac{|t-u|}{\delta_n^2(u)}du\right|;x\right)\left\|\delta_n^2 g''\right\| + \left|\int_x^{\frac{1+q[n]_q x}{[n+2]_q}} \frac{\left|\frac{1+q[n]_q x}{[n+2]_q}-u\right|}{\delta_n^2(u)}du\right|\left\|\delta_n^2 g''\right\|$$

$$\le \frac{1}{\delta_n^2(x)}.D_{n,q}\left((t-x)^2;x\right)\left\|\delta_n^2 g''\right\| + \frac{1}{\delta_n^2(x)}\left(\frac{1+q[n]_q x}{[n+2]_q}-x\right)^2\left\|\delta_n^2 g''\right\|$$

sağlanır. Hipotezden

$$\delta_n^2(x)|g''(x)| = |\varphi^2(x)g''(x)| + \frac{1}{[n]_q}|g''(x)| \le \left\|\delta_n^2 g''\right\| + \frac{1}{[n]_q}\|g''\|$$

olur.

$$\left|\tilde{D}_{n,q}(g;x)-g(x)\right| \le \frac{5}{[n+2]_q}\left(\left\|\delta_n^2 g''\right\| + \frac{1}{[n]_q}\|g''\|\right) \tag{4.16}$$

sağlanır. $[n]_q \le [n+2]_q$, Eş. 4.11, Eş. 4.13 ve Eş. 4.16 dan

$$\left|D_{n,q}(f;x)-f(x)\right|$$
$$= \left|D_{n,q}(f-g;x)+D_{n,q}(g;x)-g(x)+(f-g)(x)\right|$$
$$\le \left|\tilde{D}_{n,q}(f-g;x)\right| + \left|\tilde{D}_{n,q}(g;x)-g(x)\right| + |f(x)-g(x)| + \left|f\left(\frac{1+q[n]_q x}{[n+2]_q}\right)-f(x)\right|$$
$$\le 4\|f-g\| + \frac{5}{[n]_q}\left\|\delta_n^2 g''\right\| + \frac{5}{[n]_q^2}\|g''\| + \left|f\left(\frac{1+q[n]_q x}{[n+2]_q}\right)-f(x)\right|$$

bulunur. $g \in W^2(\varphi)$ için sağ tarafın infimumunu alırsak

$$\left| D_{n,q}(g;x) - f(x) \right| \le 5\overline{K}_{2,\varphi}\left(f;\frac{1}{[n]_q} \right) + \left| f\left(\frac{1+q[n]_q x}{[n+2]_q} \right) - f(x) \right| \tag{4.17}$$

elde edilir. Eş. 4.9 dan

$$\begin{aligned}
&\left| f\left(\frac{1+q[n]_q x}{[n+2]_q} \right) - f(x) \right| \\
&= \left| f\left(x + \psi(x)\frac{1-\left([n+2]_q - q[n]_q\right)x}{[n+2]_q \psi(x)} \right) - f(x) \right| \\
&\le \sup_{t,\, t+\psi(t)\frac{1-\left([n+2]_q - q[n]_q\right)x}{[n+2]_q \psi(x)} \in [0,1]} \left| f\left(t + \psi(t)\frac{1-\left([n+2]_q - q[n]_q\right)x}{[n+2]_q \psi(x)} \right) - f(t) \right| \\
&\le \overline{\omega}_\psi\left(f;\frac{1-\left([n+2]_q - q[n]_q\right)x}{[n+2]_q \psi(x)} \right) \\
&\le \overline{\omega}_\psi\left(f;\frac{1-x}{[n+2]_q \psi(x)} \right) \\
&\le \overline{\omega}_\psi\left(f;\frac{1}{[n+2]_q} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 4.17 ve Eş. 4.14 den

$$\left\| D_{n,q}(g;x) - f(x) \right\| \le C\omega_2^\varphi\left(f;\frac{1}{\sqrt{[n]_q}} \right) + \overline{\omega}_\psi\left(f;\frac{1}{[n+2]_q} \right)$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

4.5. q-Durrmeyer Operatörlerinin Bir *f* Fonksiyonuna Lipschitz Tipli Maximal Fonksiyon ile Yaklaşım Hızı

Bu kısımda Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar için q-Durrmeyer operatörlerinin bir f fonksiyonuna yaklaşım hızı, B. Lenze [15] tarafından tanımlanan Lipschitz tipli maximal fonksiyon yardımıyla hesaplanacaktır.

4.5.1. Tanım : (Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar) $0<\alpha\leq 1$ olmak üzere

$$|f(t)-f(x)|\leq M\,|t-x|^{\alpha}$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlara, Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar denir. Buradaki M ye Lipschitz sabiti denir. Bu sınıftan olan fonksiyonlar $f\in Lip_M(\alpha)$ ile gösterilir.

4.5.2. Tanım : (Lipschitz tipli maximal fonksiyon) $0<\alpha\leq 1$ ve $f\in Lip_M(\alpha)$ olsun.

$$\tilde{\omega}_{\alpha}(f;x)=\sup_{\substack{t\neq x\\ t\in[0,1]}}\frac{|f(t)-f(x)|}{|t-x|^{\alpha}},\qquad x\in[0,1] \tag{4.18}$$

ifadesine Lipschitz tipli maximal fonksiyon denir [15]. Burada $\tilde{\omega}_{\alpha}(f;x)$ fonksiyonunun sınırlılığı, f nin Lipschitz sınıfından olmasını gerektirir.

4.5.1. Teorem : $0<\alpha\leq 1$ ve $f\in Lip_M(\alpha)$ olmak üzere,

$$\left\|D_{n,q}(f;x)-f(x)\right\|_{C[0,1]}=O\left(\frac{2}{[n+2]_q}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{[n+3]_q}\right)\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

olur.

İspat :

$$D_{n,q}(1;x)=[n+1]_q\sum_{k=0}^{n}q^{-k}p_{n,k}(q;x)\int_0^1 p_{n,k}(q;qt)d_qt=1$$

olduğu bilinmektedir.

$$\left|D_{n,q}(f;x)-f(x)\right|=\Bigg|[n+1]_q\sum_{k=0}^{n}q^{-k}p_{n,k}(q;x)\int_0^1 f(t)\,p_{n,k}(q;qt)\,d_qt$$

$$-f(x)[n+1]_q\sum_{k=0}^{n}q^{-k}p_{n,k}(q;x)\int_0^1 p_{n,k}(q;qt)\,d_qt\Bigg|$$

$$=\left|[n+1]_q\sum_{k=0}^{n}q^{-k}p_{n,k}(q;x)\int_0^1\big(f(t)-f(x)\big)p_{n,k}(q;qt)\,d_qt\right|$$

elde edilir. Ayrıca

$[n+1]_q\geq 0,\ p_{n,k}(q;x),\ p_{n,k}(q;qt)\geq 0,\ q^{-k}\geq 0$ olduğundan ve üçgen eşitsizliğini kullanırsak,

$$\left|D_{n,q}(f;x)-f(x)\right|\leq[n+1]_q\sum_{k=0}^{n}q^{-k}p_{n,k}(q;x)\int_0^1\left|f(t)-f(x)\right|p_{n,k}(q;qt)\,d_qt \qquad (4.12)$$

sağlanır. $f\in Lip_M(\alpha)$ olduğundan

$$\left|f(t)-f(x)\right|\leq M\left|t-x\right|^{\alpha}$$

gerçeklendiği biliniyor. Bu eşitsizlik Eş. 4.12 de kullanılırsa,

$$\left|D_{n,q}(f;x)-f(x)\right|\leq M[n+1]_q\sum_{k=0}^{n}q^{-k}p_{n,k}(q;x)\int_0^1\left|t-x\right|^{\alpha}p_{n,k}(q,qt)\,d_qt$$

elde edilir. $p_1=\dfrac{2}{\alpha},\ p_2=\dfrac{2}{2-\alpha}$ seçilirse, $\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}=1$ olup

$$\left|D_{n,q}(f;x)-f\right|\leq M[n+1]_q\sum_{k=0}^{n}q^{-k}p_{n,k}(q;x)\int_0^1\left|t-x\right|^{\alpha}\big(p_{n,k}(q,qt)\big)^{\frac{\alpha}{2}}\big(p_{n,k}(q,qt)\big)^{\frac{2-\alpha}{2}}\,d_qt$$

$$=M[n+1]_q\sum_{k=0}^{n}q^{-k}p_{n,k}(q;x)\int_0^1\Big(\left|t-x\right|^{2}p_{n,k}(q,qt)\Big)^{\frac{\alpha}{2}}\big(p_{n,k}(q,qt)\big)^{\frac{2-\alpha}{2}}\,d_qt$$

biçiminde yazılabilir. Burada integral üzerinde Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|D_{n,q}(f;x)-f(x)\right| \leq M[n+1]_q \sum_{k=0}^{n} q^{-k} p_{n,k}(q;x) \left(\int_0^1 (t-x)^2 p_{n,k}(q;qt)\, d_q t \right)^{\frac{\alpha}{2}}$$
$$\times \left(\int_0^1 p_{n,k}(q;qt)\, d_q t \right)^{\frac{2-\alpha}{2}}$$
$$= M \sum_{k=0}^{n} \left([n+1]_q q^{-k} p_{n,k}(q;x) \right)^{\frac{\alpha}{2}} \left([n+1]_q q^{-k} p_{n,k}(q;x) \right)^{\frac{2-\alpha}{2}}$$
$$\times \left(\int_0^1 (t-x)^2 p_{n,k}(q;qt)\, d_q t \right)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\int_0^1 p_{n,k}(q;qt)\, d_q t \right)^{\frac{2-\alpha}{2}}$$

olur. Bu eşitsizliği tekrar düzenlersek

$$\left|D_{n,q}(f;x)-f(x)\right| \leq M \sum_{k=0}^{n} \left([n+1]_q q^{-k} p_{n,k}(q;x) \int_0^1 (t-x)^2 p_{n,k}(q;qt)\, d_q t \right)^{\frac{\alpha}{2}}$$
$$\times \left([n+1]_q q^{-k} p_{n,k}(q;x) \int_0^1 p_{n,k}(q;qt)\, d_q t \right)^{\frac{2-\alpha}{2}}$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada toplam üzerinde tekrar Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|D_{n,q}(f;x)-f(x)\right| \leq M \left([n+1]_q \sum_{k=0}^{n} q^{-k} p_{n,k}(q;x) \int_0^1 (t-x)^2 p_{n,k}(q;qt)\, d_q t \right)^{\frac{\alpha}{2}}$$
$$\times \left([n+1]_q \sum_{k=0}^{n} q^{-k} p_{n,k}(q;x) \int_0^1 p_{n,k}(q;qt)\, d_q t \right)^{\frac{2-\alpha}{2}}$$
$$= M \left(\varphi_{n,2}(x) \right)^{\frac{\alpha}{2}} \left(D_{n,q}(1;x) \right)^{\frac{2-\alpha}{2}}$$

bulunur. Lemma 3.3.1 den

$$\left\|D_{n,q}(f;x)-f(x)\right\|_{C[0,1]} \leq M \left(\frac{2}{[n+2]_q} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{[n+3]_q} \right) \right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

olur. İspat tamamlanır.

5. $D_{\infty,q}$ OPERATÖRLERİ

Bu bölümde $D_{n,q}$ operatörlerinin limit formu olan $D_{\infty,q}$ operatörleri tanıtılıp ve $D_{n,q}$ operatörlerinin $D_{\infty,q}$ operatörlerine yaklaşım hızı hesaplanacaktır.

5.1. $D_{\infty,q}$ Operatörlerinin Tanımı

5.1.1 Tanım: $q\in(0,1)$, $D_{\infty,q}(f;1)=f(1)$ olmak üzere, $x\in[0,1]$ için $D_{\infty,q}$ operatörleri

$$D_{\infty,q}(f;x)=\frac{1}{1-q}\sum_{k=0}^{\infty}p_{\infty,k}(q;x)q^{-k}\int_0^1 f(t)\,p_{\infty,k}(q;qt)\,d_qt=\sum_{k=0}^{\infty}A_{\infty,k}(f)\,p_{\infty,k}(q;x)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$p_{\infty,k}(q;x)=\frac{x^k}{(1-q)^k[k]_q!}(1-x)_q^{\infty}$$

biçimindedir.

5.1.1. Lemma : $0<q\leq 1$ ve $x\in[0,1]$ olmak üzere,

$$\sum_{k=0}^{\infty}p_{\infty,k}(q;x)=1$$

sağlanır.

İspat: Eş. 2.1 ve Sonuç 2.2 den

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}p_{\infty,k}(q;x)&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{(1-q)^k[k]_q!}(1-x)_q^{\infty}\\&=(1-x)_q^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{(1-q)^k\dfrac{(1-q)_q^k}{(1-q)^k}}\\&=(1-x)_q^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{(1-q)_q^k}\\&=(1-x)_q^{\infty}\frac{1}{(1-x)_q^{\infty}}\\&=1\end{aligned}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

5.1.2. Lemma : $0 < q \leq 1$ ve $s = 0,1,2,...$ olmak üzere,

$$\int_0^1 t^s p_{\infty,k}\left(q;qt\right)d_q t = q^k \left(1-q\right)^{s+1} \frac{\left[k+s\right]_q!}{\left[k\right]_q!}$$

sağlanır.

İspat : Lemma 2.5 den

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^s p_{\infty,k}\left(q;qt\right)d_q t &= \int_0^1 t^s \frac{1}{\left(1-q\right)^k \left[k\right]_q!}\left(qt\right)^t \left(1-qt\right)_q^\infty d_q t \\
&= \frac{q^k}{\left(1-q\right)^k \left[k\right]_q!}\int_0^1 t^{k+s}\left(1-qt\right)_q^\infty d_q t \\
&= \frac{q^k}{\left(1-q\right)^k \left[k\right]_q!}\mathrm{B}_q\left(k+s+1,\infty\right) \\
&= \frac{q^k}{\left(1-q\right)^k \left[k\right]_q!}\Gamma_q\left(k+s+1\right)\left(1-q\right)^{k+s+1} \\
&= q^k\left(1-q\right)^{s+1}\frac{\left[k+s\right]_q!}{\left[k\right]_q!}
\end{aligned}$$

5.1.3. Lemma : $0 < q \leq 1$ ve $x \in \left[0,1\right]$ olmak üzere,

i)i $D_{\infty,q}\left(1;x\right) = 1$

ii) $D_{\infty,q}\left(t;x\right) = 1 + q\left(x-1\right)$

iii) $D_{\infty,q}\left(t^2;x\right) = \left(1-q\right)^2\left(1+q\right) + q\left(1+2q\right)\left(1-q\right)x + q^3\left(1-x\right)x + q^4x^2$

eşitlikleri sağlanır.

İspat :

Lemma 5.1.2, Lemma 2.1.6 ve Lemma 5.1.1. kullanılırsa, i)

$$D_{\infty,q}(1;x)=\frac{1}{1-q}\sum_{k=0}^{\infty}q^{-k}p_{\infty,k}(q;x)\int_{0}^{1}p_{\infty,k}(q;qt)\,d_q t$$
$$=\frac{1}{1-q}\sum_{k=0}^{\infty}q^{-k}p_{\infty,k}(q;x)q^{k}(1-q)\frac{[k]_q!}{[k]_q!}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}p_{\infty,k}(q;x)$$
$$=1$$

olur.

ii)

$$D_{\infty,q}(t;x)=\frac{1}{1-q}\sum_{k=0}^{\infty}q^{-k}p_{\infty,k}(q;x)\int_{0}^{1}t\,p_{\infty,k}(q;qt)\,d_q t$$
$$=\frac{1}{1-q}\sum_{k=0}^{\infty}q^{-k}p_{\infty,k}(q;x)q^{k}(1-q)^{2}\frac{[k+1]_q!}{[k]_q!}$$
$$=(1-q)\sum_{k=0}^{\infty}p_{\infty,k}(q;x)[k+1]_q$$

olur. Burada $[k+1]_q=1+q[k]_q$ yazılırsa ve Lemma 5.1.1 kullanılırsa

$$D_{\infty,q}(t;x)=(1-q)\sum_{k=0}^{\infty}p_{\infty,k}(q;x)\left(1+q[k]_q\right)$$
$$=(1-q)\left(\sum_{k=0}^{\infty}p_{\infty,k}(q;x)+q\sum_{k=0}^{\infty}p_{\infty,k}(q;x)[k]_q\right)$$
$$=(1-q)\left(1+q\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k}}{(1-q)^{k}[k]_q!}(1-x)_q^{\infty}[k]_q\right)$$
$$=(1-q)\left(1+q\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k}}{(1-q)^{k}[k-1]_q!}(1-x)_q^{\infty}\right)$$
$$=(1-q)\left(1+q\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{(1-q)^{k+1}[k]_q!}(1-x)_q^{\infty}\right)$$
$$=(1-q)\left(1+\frac{qx}{1-q}\sum_{k=0}^{\infty}p_{\infty,k}(q;x)\right)$$
$$=1-q+qx$$
$$=1+q$$

iii)

$$D_{\infty,q}\left(t^2;x\right)=\frac{1}{1-q}\sum_{k=0}^{\infty}q^{-k}p_{\infty,k}\left(q;x\right)\int_0^1 t^2\,p_{\infty,k}\left(q;qt\right)d_qt$$
$$=\frac{1}{1-q}\sum_{k=0}^{\infty}q^{-k}p_{\infty,k}\left(q;x\right)q^k\left(1-q\right)^3\frac{\left[k+2\right]_q!}{\left[k\right]_q!}$$
$$=\left(1-q\right)^2\sum_{k=0}^{\infty}p_{\infty,k}\left(q;x\right)\left[k+1\right]_q\left[k+2\right]_q$$

bulunur. Eş. 3.6 dan $\left[k+1\right]_q\left[k+2\right]=1+q+\left(q+2q^2\right)\left[k\right]_q+q^3\left[k\right]_q^2$ olduğundan

$$D_{\infty,q}\left(t^2;x\right)=\left(1-q\right)^2\sum_{k=0}^{\infty}p_{\infty,k}\left(q;x\right)\left(1+q+\left(q+2q^2\right)\left[k\right]_q+q^3\left[k\right]_q^2\right)$$

olur. $\left[k\right]_q^2=q\left[k\right]_q\left[k-1\right]_q+\left[k\right]_q$ yazılırsa ve sonra Lemma 5.1.1 den kullanılırsa

$$D_{\infty,q}\left(t^2;x\right)=\left(1-q\right)^2\sum_{k=0}^{\infty}p_{\infty,k}\left(q;x\right)\left(1+q+\left(q+2q^2\right)\left[k\right]_q+q^3\left[k\right]_q\left(q\left[k-1\right]_q+1\right)\right)$$
$$=\left(1-q\right)^2\sum_{k=0}^{\infty}p_{\infty,k}\left(q;x\right)\left(1+q+q\left(1+q\right)^2\left[k\right]_q+q^4\left[k\right]_q\left[k-1\right]_q\right)$$
$$=\left(1-q\right)^2\left(\left(1+q\right)\sum_{k=0}^{\infty}p_{\infty,k}\left(q;x\right)+q\left(1+q\right)^2\sum_{k=0}^{\infty}p_{\infty,k}\left(q;x\right)\left[k\right]_q\right.$$
$$\left.+q^4\sum_{k=0}^{\infty}p_{\infty,k}\left(q;x\right)\left[k\right]_q\left[k-1\right]_q\right)$$
$$=\left(1-q\right)^2\left(\left(1+q\right)+q\left(1+q\right)^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\left(1-q\right)^k\left[k\right]_q!}\left(1-x\right)_q^{\infty}\left[k\right]_q\right.$$
$$\left.+q^4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\left(1-q\right)^k\left[k\right]_q!}\left(1-x\right)_q^{\infty}\left[k\right]_q\left[k-1\right]_q\right)$$
$$=\left(1-q\right)^2\left(\left(1+q\right)+q\left(1+q\right)^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k\left(1-x\right)_q^{\infty}}{\left(1-q\right)^k\left[k-1\right]_q!}\right.$$
$$\left.+q^4\sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^k\left(1-x\right)_q^{\infty}}{\left(1-q\right)^k\left[k-2\right]_q!}\right)$$

$$=(1-q)^2\left((1+q)+q(1+q)^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}(1-x)_q^{\infty}}{(1-q)^{k+1}[k]_q!}+q^4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+2}(1-x)_q^{\infty}}{(1-q)^{k+2}[k]_q!}\right)$$

$$=(1-q)^2\left(1+q+q(1+q)^2\frac{x}{1-q}\sum_{k=0}^{\infty}p_{\infty,k}(q;x)+q^4\frac{x^2}{(1-q)^2}\sum_{k=0}^{\infty}p_{\infty,k}(q;x)\right)$$

$$=(1-q)^2\left(1+q+q(1+q)^2\frac{x}{1-q}+q^4\frac{x^2}{(1-q)^2}\right)$$

$$=(1+q)(1-q)^2+q(1-q)(1+q)^2x+q^4x^2$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

5.1.1. Teorem : Her $f\in C[0,1]$ ve $q\to 1^-$ için

$$\left(D_{\infty,q}(f)\right)\rightrightarrows f$$

İspat : $D_{\infty,k}$ operatörleri $[0,1]$ de lineer pozitif operatörlerdir. Lemma 5.1.3 den

$$D_{\infty,q}\left(t^i;x\right)\rightrightarrows x^i\ ,\qquad i=0,1,2\qquad \left(q\to 1^-\right)$$

sağlanır. O halde Korovkin teoreminden

$$\left(D_{\infty,q}(f)\right)\rightrightarrows f$$

gerçeklenir ve ispat tamamlanır.

5.1.2. Teorem : Belirli bir $q\in(0,1)$ ve her $f\in C[0,1]$ olmak üzere, $\left(D_{n,q}(f;x)\right)$ dizisi, $[0,1]$ aralığı üzerinde düzgün olarak $D_{\infty,q}(f;x)$ e yakınsar. Ayrıca

$$\left\|D_{n,q}(f)-D_{\infty,q}(f)\right\|\le C_q\omega\left(f;q^n\right)$$

sağlanır.

İspat :

$D_{n,q}(1;x)=D_{\infty,q}(1;x)=1$ olduğu biliniyor. Her $x\in[0,1]$ için

$$\begin{aligned}\left|D_{n,q}(f;x)-D_{\infty,q}(f;x)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n}A_{n,k}(f)\,p_{n,k}(q;x)-\sum_{k=0}^{\infty}A_{\infty,k}(f)\,p_{\infty,k}(q;x)\right| \\ &= \left|\sum_{k=0}^{n}A_{n,k}(f-f(1))\,p_{n,k}(q;x)-\sum_{k=0}^{\infty}A_{\infty,k}(f-f(1))\,p_{\infty,k}(q;x)\right| \\ &\le \sum_{k=0}^{n}\left|A_{n,k}(f-f(1))-A_{\infty,k}(f-f(1))\right|p_{n,k}(q;x) \\ &\quad+\sum_{k=0}^{n}\left|A_{\infty,k}(f-f(1))\right|\left|p_{n,k}(q;x)-p_{\infty,k}(q;x)\right| \\ &\quad+\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|A_{\infty,k}(f-f(1))\right|p_{\infty,k}(q;x) \\ &= I_1+I_2+I_3\end{aligned}$$

sağlanır. Ayrıca, Eş. 4.1 deki süreklilik modülünün (iv)-üncü özelliğinden

$$\omega(f;\lambda t)\le(1+\lambda)\,\omega(f;t),\qquad \lambda>0$$

sağlanır. O halde

$$\left|f(t)-f(1)\right|\le\omega(f;1-t)\le\omega\left(f;q^n\right)\left(1+(1-t)/q^n\right)$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}\left|A_{n,k}(f-f(1))\right| &= \left|[n+1]_q\int_0^1 q^{-k}\left(f(t)-f(1)\right)p_{n,k}(q;qt)\,d_qt\right| \\ &\le [n+1]_q\int_0^1 q^{-k}\left|\left(f(t)-f(1)\right)\right|p_{n,k}(q;qt)\,d_qt \\ &\le [n+1]_q\int_0^1 q^{-k}\omega\left(f,q^n\right)\left(1+(1-t)/q^n\right)p_{n,k}(q;qt)\,d_qt \\ &= \omega\left(f,q^n\right)\left(1+q^{-n}\left(1-\frac{[k+1]_q}{[n+2]_q}\right)\right) \\ &= \omega\left(f,q^n\right)\left(1+\frac{q^{k+1}\left(1-q^{n+1-k}\right)}{q^n\left(1-q^{n+2}\right)}\right) \\ &\le \omega\left(f,q^n\right)\left(1+q^{k+1-n}\right)\end{aligned}$$

sağlanır. Benzer şekilde

$$\left|A_{\infty,k}\left(f-f(1)\right)\right| = \frac{q^{-k}}{1-q}\left|\int_0^1 \left(f(t)-f(1)\right)p_{\infty,k}(q;qt)\,d_qt\right|$$
$$\leq \omega\left(f;q^n\right)\frac{q^{-k}}{1-q}\left|\int_0^1 \left(1+(1-t)/q^n\right)p_{\infty,k}(q;qt)\,d_qt\right|$$
$$= \omega\left(f;q^n\right)\left(1+\left(1-\left(1-q^{k+1}\right)\right)/q^n\right)$$
$$= \omega\left(f;q^n\right)\left(1+q^{k+1-n}\right)$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca

$$\left|p_{n,k}(q;x)-p_{\infty,k}(q;x)\right| = \left|\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right) - \frac{x^k}{(1-q)^k [k]_q!}\prod_{s=0}^{\infty}\left(1-q^s x\right)\right|$$
$$= \left|\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \left(\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right) - \prod_{s=0}^{\infty}\left(1-q^s x\right)\right)\right.$$
$$\left. + x^k \prod_{s=0}^{\infty}\left(1-q^s x\right)\left(\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q - \frac{1}{(1-q)^k [k]_q!}\right)\right|$$
$$\leq p_{n,k}(q;x)\left|1-\prod_{s=n-k}^{\infty}\left(1-q^s x\right)\right| + p_{\infty,k}(q;x)\left|\prod_{s=n-k+1}^{\infty}\left(1-q^s x\right)-1\right|$$
$$\leq \frac{q^{n-k}}{1-q}\left(p_{n,k}(q;x)+p_{\infty,k}(q;x)\right) \qquad (5.1)$$

sağlanır. Burada

$$1-\prod_{s=1}^{n}\left(1-a_s\right) \leq \sum_{s=1}^{n} a_s \qquad ,\left(a_1,\ldots,a_n \in (0,1)\right), \quad n=1,2,......$$

eşitsizliği kullanılmıştır. Böylece Eş. 5.1 kullanılarak,

$$\left|A_{n,k}\left(f-f(1)\right)-A_{\infty,k}\left(f-f(1)\right)\right|$$
$$\leq \int_0^1 q^{-k}\left|f(t)-f(1)\right|\left|[n+1]_q\, p_{n,k}(q;x)-\frac{1}{1-q}p_{\infty,k}(q;x)\right|d_qt$$
$$\leq \int_0^1 q^{-k}\left|f(t)-f(1)\right|\left|[n+1]_q-\frac{1}{1-q}\right|p_{\infty,k}(q;qt)\,d_qt$$
$$+\int_0^1 q^{-k}\left|f(t)-f(1)\right|[n+1]\left|p_{n,k}(q;qt)-p_{\infty,k}(q;qt)\right|d_qt$$

$$\leq \frac{q^{n+1}}{1-q}\int_0^1 q^{-k}\left|f(t)-f(1)\right| p_{\infty,k}(q;qt)\,d_q t$$

$$+\frac{q^{n+1}}{1-q}\int_0^1 q^{-k}\left|f(t)-f(1)\right|[n+1]_q \times \left(p_{n,k}(q;qt)+p_{\infty,k}(q;qt)\right)d_q t$$

$$\leq q^{n+1}\omega\left(f;q^n\right)\left(1+q^{k+1-n}\right)+2\frac{q^{n-k}}{1-q}\omega\left(f;q^n\right)\left(1+q^{k+1-n}\right)$$

$$\leq \frac{5\omega\left(f;q^n\right)}{1-q}$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi I_1, I_3 değerlerini hesaplayalım.

$$I_1 \leq \frac{5\omega\left(f;q^n\right)}{1-q}\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(q;x)=\frac{5\omega\left(f;q^n\right)}{1-q}$$

ve

$$I_3 \leq \omega\left(f;q^n\right)\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(1+q^{k+1-n}\right)p_{\infty,k}(q;x)\leq \omega\left(f;q^n\right)\sum_{k=n+1}^{\infty}2p_{\infty,k}(q;x)\leq 2\omega\left(f;q^n\right)$$

bulunur. Son olarak

$$I_2 \leq \sum_{k=0}^{\infty}\omega\left(f;q^n\right)\left(1+q^{k+1-n}\right)\frac{q^{n-k}}{1-q}\left|p_{n,k}(q;x)+p_{\infty,k}(q;x)\right|$$

$$\leq \frac{2\omega\left(f;q^n\right)}{1-q}\sum_{k=0}^{n}\left|p_{n,k}(q;x)+p_{\infty,k}(q;x)\right|\leq \frac{4\omega\left(f;q^n\right)}{1-q}$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi bulunun I_1, I_2, I_3 ifadeleriyle ilgili eşitsizlikler yerlerine yazılırsa,

$$\left\|D_{n,q}(f)-D_{\infty,q}(f)\right\|\leq C_q\omega\left(f,q^n\right)$$

eşitsizliği gerçeklenmiş olur. Buradan ispat tamamlanır.

KAYNAKLAR

1. Korovkin, P.P., “Linear Operators and Approximation Theory”, ***Hidustan Publishing Corp.(İndia),*** Delhi, (1960).

2. Bernstein, S, “Démonstration du théoréme de Weierstrass, fondeé sur le calcul Des probabilitiés”, ***Common. Soc. Math. Kharkow (2)***, 13: 1-2, (1912-1913)

3. Altomare, F., Campiti, M., “Korovkin Type Approximation Theory And Its Applications”, ***Walter de Gruyter***, Berlin-New York, 195-352 (1994).

4. Cholodovsky, I., “Sur la répresentation des functions discontinues par les Polynomes de M.S. Bernstein”, ***Fund. Math.,*** 13 : 62-72 (1929).

5. Durrmeyer, J.L., “Une formule d’inversion de la transformée de laplace : Applications la théorie des moments”. PhD thesis, ***Faculté des Sciences de l’Université de Paris***, (1967).

6. Gupta, V. “Some approximation properties of q-Durrmeyer operators”. ***Appl. Math. Comput,*** 197(1): 172–178 (2008).

7. Andrews, G.E., Askey, R. and Roy, R. “Special Functions”, ***Cambridge University Press,*** (1999).

8. Phillips, G.M., “Bernstein polynomials based on the q-integers”, ***Ann. Numer. Math.*** 511–518. 4 (1997).

9. Kac, V., Cheung, P., Quantum Calculus***, Springer***, New York, (2002).

10. Thomae, J., “Beitrage zur Theorie der durch die Heische Reihe”, ***Journal fur die Reine und Angewandte mathematik,*** 70: 258-281, (1869).

11. Finta, Z., Gupta, V., “Approximation by q-Durrmeyer operators”, ***J. Appl. Math. Comput,*** 29: 401–415 (2009).

12. Lorentz, G.G. “Bernstein Polynomials”, ***Math. Expo.,*** vol. 8, ***Univ. of Toronto Press***, Toronto, (1953).

13. DeVore, R. A., Lorentz, G.G., “Constructive Approximation”, ***Springer-Verlag, Berlin,*** (1993).

14. Ditzian, Z., Totik, V.,“Moduli of Smootness”,***Springer-Verlag, New York***(1987)

15. Lenze, B., “Bernstein-Baskakov-Kontorovich operators and Lipschitz-type maximal functions”, ***Approx. Th. Kecskemét, Hungary, Collog. Math.***, Soc. János Bolyai, 58; 469-496, (1990).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: DELİBAŞ, Hakan
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 20.05.1982 Rize
Medeni hali	: Bekar
Telefon	: 0 (312) 346 87 45
e-mail	: hadelf@hotmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi /Matematik Bölümü	2010
Lisans	Ankara üniversitesi/ Matematik Bölümü	2007
Lise	Ardeşen Lisesi	2000

Yabancı Dil

İngilizce