T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LORENTZ UZAY FORMLARINDA YÜZEYLER ÜZERİNE

Şemsi EKEN

DANIŞMAN: Prof. Dr. A. Ceylan ÇÖKEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA- 2010

TEZ ONAYI

Şemsi EKEN tarafından hazırlanan " LORENTZ UZAY FORMLARINDA YÜZEYLER ÜZERİNE" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Süleyman Demirel Üniversitesi MATEMATİK Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. A. Ceylan ÇÖKEN
Süleyman Demirel Üniversitesi
Matematik Anabilim Dalı

Jüri Üyeleri:

Unvan Adı ve Soyadı :	Prof. Dr. Mustafa Kemal SAĞEL Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı
Unvan Adı ve Soyadı:	Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU Süleyman Demirel Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı
Unvan Adı ve Soyadı:	Prof. Dr. A. Ceylan ÇÖKEN Süleyman Demirel Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Prof. Dr. Mustafa KUŞCU

Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

LORENTZ UZAY FORMLARINDA YÜZEYLER ÜZERİNE

Şemsi EKEN

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. A. Ceylan ÇÖKEN

Tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, konunun tarihsel gelişimi ifade edilmiştir.

İkinci bölümde konu ile ilgili temel kavramlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde 3- boyutlu Öklid uzayında ve 3- küre üzerinde helical geodezikleri içeren yüzeyler adlı çalışmalar incelenmiştir.

Dördüncü bölümde Lorentz uzayında sabit ortalama eğrilikli yüzeyler, helical eğriler ve geodezikler çalışıldı. Ayrıca $\mathbb{E}_1^3$ Lorentz uzayında helical geodezikleri içeren yüzeyler ile ilgili sınıflandırmalar yapıldı.

Beşinci bölümde ise $\mathcal{M}_1^3(\mathcal{C})$ Lorentz uzay formlarında helical geodezikleri içeren yüzeyler ile ilgili bazı sınıflandırmalar yapıldı.

Anahtar Kelimeler: Lorentz Uzay Formları, Helical Eğriler, Geodezikler, Sabit Ortalama Eğrilikli Yüzeyler

2010, 59 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

ON SURFACE IN LORENTZ SPACE FORMS

Şemsi EKEN

Süleyman Demirel Universitiy
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Mathematics Department

Supervisor: Prof. Dr. A. Ceylan ÇÖKEN

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, the historical background of the subject is considered.

In the two chapter, fundamental definitions and theorems related to subject are given.

In the three chapter, in the Euclidean 3- space $\mathbb{E}^3$ and in the 3- sphere, "surfaces which contain helical geodesics" are examined.

In the four chapter, in Lorentz space constant mean cuvature surfaces, helical curves and geodesics are studied. Also, several classifications related to surfaces which contain helical geodesics in Lorentz space are obtained.

In the five chapter, several classifications related to surfaces which contain helical geodesics in $\mathcal{M}_1^3(\mathcal{C})$ Lorentz space forms are obtained.

Key Words: Lorentz Space Forms, Helical Curves, Geodesics, Constant Mean Curvature Surfaces

2010, 59 pages

TEŞEKKÜR

Çalışmam boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, kıymetli tecrübelerinden ve bilgilerinden faydalandığım, çalışmamın her aşamasında beni destekleyen danışman hocam Prof.Dr. A.Ceylan ÇÖKEN' e teşekkür ederim.

Şemsi EKEN

Isparta, 2010

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar cismi
V	Reel vektör uzayı
$\mathbb{R}^n$	Öklid $n-$ uzayı
$\mathbb{S}^n$	$n-$ küre
$\mathbb{H}^n$	$n-$ hiperbolik uzay
$\mathcal{M}^3(\mathcal{C})$	reel uzay formu
$\mathbb{R}^n_\nu$	ν-indeksli semi- Öklid $n-$ uzay
$\mathbb{S}^n_\nu$	$\nu-$ indeksli $n-$ küre
$\mathbb{H}^n_\nu$	$\nu-$ indeksli $n-$ hiperbolik uzay
$\mathcal{M}^3_1(\mathcal{C})$	Lorentz uzay formu
g	Skalar çarpma
ν	Semi-Riemann manifoldunun indeksi
$\chi(\mathcal{M})$	$\mathcal{M}$ manifoldu üzerindeki vektör alanlarının uzayı
ξ	$\mathcal{M}$ yüzeyinin birim normali
$\mathcal{D}$	$\mathcal{M}^3_1(\mathcal{C})$ üzerindeki konneksiyon
∇	$\mathcal{M}$ üzerindeki konneksiyon
$\mathcal{S}$	ξ birim normali ile birleştirilmiş şekil operatörü
$\mathbb{II}$	İkinci temel form
$\mathcal{H}$	Ortalama eğrilik
$\mathcal{C}$	Kesit eğriliği
ε	ξ birim normalinin işareti

1.GİRİŞ

Matematik ve fizikte Lorentz uzay formları geniş ilgi alanı oluşturan bir konudur. Çünkü Lorentz uzay formlarında sabit ortalama eğrilikli hiperyüzeylerin relativite teorisinde önemli bir rol oynadığı birçok matematikçi tarafından bilinmektedir.
$n-$ boyutlu, v indeksli ve $\mathcal{C}$ sabit eğrilikli $\mathcal{M}_{v}^{n}(\mathcal{C})$ Lorentz uzay formlarında n, v ve $\mathcal{C}$ değiştikçe yeni uzaylar elde edilmektedir. Örneğin $\mathcal{C}$ =0 ise *Minkowski 3-uzayı*, $\mathcal{C}$ >0 ise *de Sitter*, $\mathcal{C}$ <0 ise de *anti-de Sitter uzayları* oluşacaktır. $n-$ boyutlu de Sitter uzayı, Riemann metrikli $n-$ kürenin ve benzer şekilde anti-de Sitter uzayı da Riemann metrikli $n-$hiperbolik uzayın Lorentz karşılığı olarak ifade edilebilir. Bu uzaylar genel relativitede maksimal simetriktir ve pozitif veya negatif kozmolojik sabitli Einstein denklemlerinin bir vakum çözümü olduğundan dolayı bu uzayların relativite teorisinde ve astrofizikte büyük önemi vardır. De Sitter ve anti-de Sitter uzayları fiziksel evren için bir kozmolojik model olduğundan burada yapılan çalışmalar son derece önemlidir.

Lorentz Uzay formları ile ilgili çalışmalar (Goldman, 1985), (Kamishima, 1985), (Kulkarni ile F. Raymond, 1985), (Zuo, 2006), (Cheng, 1994), (Fujimori, 2007), (Alias ve Pastor, 1999), (De Lima, 2007), (Lopez, 2000) gibi matematikçiler tarafından yapılmıştır. Bu çalışmalar daha çok sabit ortalama eğrilikli spacelike ve timelike yüzeyler üzerine yoğunlaşmıştır. K. Nomizu ise 1981 yılında "*On isoparametric hypersurfaces in the Lorentzian Space Forms*" adlı çalışması ile sabit asli eğrilikli isoparametric hiperyüzeylerin Lorentz uzay formunda spacelike hiperyüzey olup olmama durumunu incelemiştir.

(Zuo, 2006) ise Lorentz uzay formlarında time-like lineer weingarten yüzeylerin Backlaund dönüşümlerini ve (Fujioka ve Inoguchi, 2003) de bu uzay formlarında Timelike Bonnet yüzeylerini çalışmışlardır.
Bu çalışmada ise, Lorentz uzay formunda sabit ortalama eğrilikli, tam, diferensiyellenebilir yüzeyler incelenerek $\mathbb{E}_1^3$, $\mathbb{S}_1^3$, $\mathbb{H}_1^3$ uzaylarında helical eğriler, geodezikler, ortalama ve Gauss eğrilikleri, şekil operatörü, Gauss dönüşümleri ve temel

formlar verilerek, $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1^3(\mathcal{C})$ yüzeyinin içerdiği geodeziğe göre eğrilerle ilişkisi ele alındı ve buna bağlı olarak yüzeyler sınıflandırıldı.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmaya esas olan tanım ve teoremler verilecektir.

2.1. Simetrik Bilineer Formlar

Tanım 2.1.1. V bir reel vektör uzayı olsun.

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall\ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V$ için

$$\begin{array}{lrcl} i) & g(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) & = & g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) \\ ii) & g(a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) & = & ag(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) + bg(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \\ & g(\overrightarrow{u}, a\overrightarrow{v} + b\overrightarrow{w}) & = & ag(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + bg(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) \end{array}$$

özelliklerine sahip ise g dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerine *simetrik bilineer form* denir.(O'Neill, 1983)

Tanım 2.1.2. V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun.

i) $\forall\overrightarrow{v} \in V$ ve $\overrightarrow{v} \neq 0$ için $g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) > 0$ ise g simetrik bilineer formuna *pozitif definit,*

ii) $\forall\overrightarrow{v} \in V$ ve $\overrightarrow{v} \neq 0$ için $g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) < 0$ ise g simetrik bilineer formuna *negatif definit,*

iii) $\forall\overrightarrow{v} \in V$ ve $\overrightarrow{v} \neq 0$ için $g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) \geq 0$ ise g simetrik bilineer formuna *pozitif semi-definit,*

iv) $\forall\overrightarrow{v} \in V$ ve $\overrightarrow{v} \neq 0$ için $g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) \leq 0$ ise g simetrik bilineer formuna *negatif semi-definit,*

v) $\forall\overrightarrow{w} \in V$ için $g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0$ iken $\overrightarrow{v} = 0$ olmak zorunda ise g simetrik bilineer formuna *non-degenere* aksi halde *dejeneredir* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.3. V bir reel vektör uzayı ve

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

bir simetrik bilineer form olsun.

$$g\mid_W : W \times W \to \mathbb{R}$$

negatif definit olacak şekildeki en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna g simetrik bilineer formun indeksi denir ve ν ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.1.4. V bir reel vektör uzayı ve V üzerinde simetrik bilineer form g olsun. Bu durumda,
$i)$ $g(\alpha_i, \alpha_j) = 0$, $i \neq j$,
$ii)$ $g(\alpha_i, \alpha_j) = 1$, $1 \leq i \leq \gamma$,
$iii)$ $g(\alpha_i, \alpha_j) = -1$, $\gamma + 1 \leq i \leq \gamma + \nu$,
$iv)$ $g(\alpha_i, \alpha_j) = 0$, $\gamma + \nu \leq i \leq n = \gamma + \nu + \mu$,

olacak şekilde V nin $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ bazı vardır. (Duggal ve Bejancu, 1996).

Teorem 2.1.5. Bir g simetrik bilineer formun non-dejenere olması için gerek ve yeter şart g nin herhangi bir baza göre ters matrisinin olmasıdır. (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.6. Bir V reel vektör uzayı üzerinde non-dejenere simetrik bilineer forma V reel vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpma denir. V üzerindeki bir skalar çarpma g ise $(V\ ;\ g)$ ikilisine skalar çarpımlı vektör uzayı denir.(O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.7. $\forall \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V$ için $\overrightarrow{v} \neq 0$ ve $\overrightarrow{w} \neq 0$ için $g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0$ ise $\overrightarrow{v}$ ve $\overrightarrow{w}$ vektörleri diktir denir ve $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w}$ şekline gösterilir. V reel vektör uzayının bir altuzayı W ise $W^{\perp} = \{\overrightarrow{v} \in V \mid \overrightarrow{v} \perp W\}$ olsun. $W^{\perp}$ altuzayına V nin dik altuzayı denir. $W \oplus W^{\perp}$ genellikle V nin tamamı olmadığından $W^{\perp}$ altuzayına W nın ortogonal komplemanı denilemez. (O'Neill, 1983).

Teorem 2.1.8. W bir V skalar çarpım uzayının altuzayı olsun. O zaman
$i)$ $boyW + boyW^{\perp} = boyV$
$ii)$ $\left(W^{\perp}\right)^{\perp} = W$

özellikleri vardır.(O'Neill, 1983)

Tanım 2.1.9. V reel vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpma g ve W da V nin bir altuzayı olsun. Eğer g, W üzerinde non-dejenere ise W ya *non-dejenere altuzay*, non-dejenere değil ise *dejenere altuzaydır* denir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.1.10. V bir skalar çarpım uzayı ve W, V nin bir altuzayı olsun. W nın non-dejenere altuzay olması için gerek ve yeter şart $V = W \oplus W^{\perp}$ olmasıdır.(O'Neill, 1983)

Tanım 2.1.11. Bir V reel vektör uzayı üzerindeki skalar çarpma g olsun. Bir $\overrightarrow{v} \in V$ vektörünün normu

$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{|g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})|}$$

olarak tanımlanır. Normu bir birim olan vektöre *birim vektör* ve ortogonal birim vektörlerin cümlesine de *ortonormal sistem* denir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.1.13. V reel vektör uzayı için bir ortonormal baz $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ olsun. $\varepsilon_i = g(e_i, e_i)$ olmak üzere $\forall \overrightarrow{v} \in V$ vektörü

$$\overrightarrow{v} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(\overrightarrow{v}, e_i) e_i$$

olacak şekilde tek türlü yazılabilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.14. V bir skalar çarpım uzayı olsun. V nin indeksi ν olmak üzere $\nu = 1$ ve $boy V \geq 2$ ise V skalar çarpım uzayına bir *Lorentz uzayı denir.* (O'Neill,1983).

Tanım 2.1.15. V bir Lorentz uzayı olsun. $\overrightarrow{v} \in V$ olmak üzere

i) $g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) > 0$ veya $\overrightarrow{v} = 0$ ise $\overrightarrow{v}$ vektörüne *spacelike*

ii) $g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) < 0$ ise $\overrightarrow{v}$ vektörüne *timelike* *iii)* $g(\overrightarrow{v},\overrightarrow{v}) = 0$, $\overrightarrow{v} \neq 0$ ise $\overrightarrow{v}$ vektörüne *lightlike (null)* denir (O'Neill, 1983).

2.2. Semi-Riemann Manifoldlar

Tanım 2.2.1. $\mathcal{M}$ bir C^{∞} manifold olsun. $\forall p \in \mathcal{M}$ noktasındaki tanjant uzay $T_P\mathcal{M}$ olmak üzere,

$$\begin{array}{rccl} g_P & : & T_P\mathcal{M} \times T_P\mathcal{M} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & (X_P, Y_P) & \rightarrow & g_P(X_P, Y_P) \end{array}$$

biçiminde tanımlı sabit indeksli, simetrik, bilineer, non-dejenere (0, 2) tensörüne $\mathcal{M}$ üzerinde bir *metrik tensör* denir. (O'Neill, 1983)

Tanım 2.2.2. $\mathcal{M}$ bir C^{∞} manifold olsun. $\mathcal{M}$ bir g metrik tensör ile donatılmışsa, $\mathcal{M}$ ye bir *semi-Riemann manifoldu* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.3. Bir $\mathcal{M}$ semi-Riemann manifoldu üzerinde g metrik tensörünün indeksine *semi-Riemann manifoldun indeks*i denir ve $ind\mathcal{M}$ ile gösterilir. Eğer indeks ν ise $0 \leq \nu \leq boy\mathcal{M}$ dir. Özel olarak, $\nu = 0$ ise $\forall p \in \mathcal{M}$ için g_P, $T_P\mathcal{M}$ üze rinde pozitif tanımlı bir iç çarpım olduğundan, $\mathcal{M}$ bir *Riemann manifoldu* olur. $\nu = 1$ ve $n \geq 2$ olması durumunda ise, $\mathcal{M}$ ye bir *Lorentz manifoldu* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.4. $\mathbb{R}^n$ Öklid $n-$uzayı verilsin. $0 \leq \nu \leq n$, olmak üzere ν tamsayısı için, $\mathbb{R}^n$ üzerinde,

$$g(X_P, Y_P) = -\sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i + \sum_{i=\nu+1}^{n} x_i y_i$$

ile verilen metrik tensör göz önüne alınırsa, elde edilen uzay *semi-Öklid $n-$ uzay* olarak adlandırılır ve $\mathbb{R}^n_\nu$ ile gösterilir(O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.5. $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{N}$ birer semi-Riemann manifold ve

$$f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$$

bir C^{∞} fonksiyon olsun. Eğer f nin f_* jakobiyen matrisi $\forall p \in M$ noktasında regüler ise f ye $\mathcal{M}$ den $\mathcal{N}$ içine bir *immersiyon* denir. Başka bir ifade ile rankf= *boy*$\mathcal{M}$ ise f ye bir *immersiyon* denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.2.6. $u_1, u_2, ..., u_n$, $\mathbb{R}^n_\nu$ üzerinde doğal koordinat fonksiyonları olsunlar. V ve $W = \sum W_i \partial_i$, $\mathbb{R}^n_\nu$ üzerinde

$$\nabla_V W = \sum_{i=1}^{n} V(W_i)\, \partial_i$$

vektör alanına W nın V ye göre *kovaryant türevi* denir. Burada $\{\partial_i : 1 \leq i \leq n\}$, $\chi(\mathbb{R}^n_\nu)$ vektör alanları uzayının standart bazıdır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.7. $\mathcal{M}$ bir C^∞ manifold olsun. $\mathcal{M}$ üzerinde bir ∇ konneksiyonu

i) $\nabla_V W$, V ye göre bir $C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ lineerdir,

ii) $\nabla_V W$, W ya göre $\mathbb{R}$ lineerdir,

iii) $\nabla_V (fW) = V(f)\, W + f \nabla_V W, \quad \forall f \in C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$

olacak şekilde bir

$$\nabla : \chi(\mathcal{M}) \times \chi(\mathcal{M}) \to \chi(\mathcal{M})$$

fonksiyonudur.(O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.8. $\forall X, Y \in \chi(\mathcal{M})$

$$\begin{array}{rlcl} h: & \chi(\mathcal{M}) \times \chi(\mathcal{M}) & \to & \chi(\mathcal{M})^\perp \\ & X, Y & \to & h(X,Y) = nor \nabla_X Y \end{array}$$

şekline tanımlı h dönüşümü $2-$lineer ve simetriktir. h fonksiyonuna $\mathcal{M}$ nin *şekil tensörü* veya *ikinci temel tensörü* denir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.2.9. $\mathcal{M}$ semi-Riemann manifoldu üzerinde $\forall X, Y, Z \in \chi(\mathcal{M})$ için

i) $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$,

ii) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$

olacak şekilde bir tek ∇ konneksiyonu vardır. ∇ ye $\mathcal{M}$ nin Levi Civita konneksiyonu denir ve Levi Civita konneksiyonu,

$$\begin{aligned} 2\left(\nabla_X Y, Z\right) &= Xg\left(Y,Z\right) + Yg\left(Z,X\right) - Zg\left(X,Y\right) \\ &\quad -g\left(X,[Y,Z]\right) + g\left(Y,[Z,X]\right) + g\left(Z,[X,Y]\right) \end{aligned}$$

Kozsul formulü ile karakterize edilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.10. $\mathcal{M}$, $\widetilde{\mathcal{M}}$ nın bir yarı-Riemann alt manifoldu olsun. $\widetilde{\nabla}$ ve ∇, sırasıyla $\widetilde{\mathcal{M}}$ ve $\mathcal{M}$ üzerindeki Levi-Civita konneksiyonları olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi\left(\widetilde{\mathcal{M}}\right)$ için,

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h\left(X,Y\right)$$

eşitliğine $\mathcal{M}$ nin *Gauss denklemi* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.11. $\mathcal{M} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$, $\mathcal{M}$ yarı-Riemann hiperyüzeyinin bir P noktasındaki şekil operatörü $\mathcal{S}\left(P\right)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathcal{K} : \mathcal{M} &\to \mathbb{R} \\ P &\to \mathcal{K}\left(P\right) = \det \mathcal{S}\left(P\right) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona $\mathcal{M}$ nin *Gauss eğrilik fonksiyonu,* $\mathcal{K}\left(P\right)$ değerine de $\mathcal{M}$ nin P noktasındaki *Gauss eğriliği* denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.2.12. $\mathcal{M}$, $\widetilde{\mathcal{M}}$ nın bir yarı-Riemann alt manifoldu olsun. Bir $P \in \mathcal{M}$ noktasının umbilik nokta olması için

$$h\left(X,Y\right) = g\left(X,Y\right)Z, \quad \forall X,Y,Z \in T_P\mathcal{M}$$

olacak şekilde bir $Z \in T_P\mathcal{M}^{\perp}$ normal vektörünün var olması gereklidir. Böylece elde edilen Z normal vektör alanına $\mathcal{M}$ nin P noktasındaki *normal eğrilik vektörü* denir. Aynı zamanda her noktasında umbilik olan manifolda *total umbiliktir*, denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.13. $\mathcal{M}$ bir semi Riemann manifold ve $P \in \mathcal{M}$ noktasındaki X, Y tanjant vektörlerinin gerdiği $T_P\mathcal{M}$ tanjant uzayının 2-boyutlu bir non-degenere altuzayı Π olsun.

$$K(\Pi) = \frac{g(R(X,Y)Y,X)}{g(X,X)\,g(Y,Y) - g(X,Y)^2}$$

şeklinde tanımlanan $K(\Pi)$ reel sayısına Π nin kesit eğriliği denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.14. $\mathcal{M}$, $(n+1)$-boyutlu, $p-$indeksli ve c sabit eğrilikli bağlantılı semi-Riemann manifoldu olsun. bu semi-Riemann manifolduna $p-$indeksli indefinit uzay formu denir ve $p=0$ ise sadece uzay formu denir (Zheng, 1996).

Tanım 2.2.15. $n \geq 2$ ve $0 \leq \nu \leq n$ olmak üzere;

i) $\mathbb{S}^n_\nu(r) = \{X \in \mathbb{R}^{n+1}_\nu : g(X,X) = r^2\}$ hiperkuadriğine $\mathbb{R}^{n+1}_\nu$ de $r > 0$ yarıçaplı, $n-$boyutlu ve $\nu-$indeksli pseudo-küre denir.

ii) $\mathbb{H}^n_\nu(r) = \left\{X \in \mathbb{R}^{n+1}_{\nu+1} : g(X,X) = -r^2\right\}$ hiperkuadriğine $\mathbb{R}^{n+1}_{\nu+1}$ de $r > 0$ yarıçaplı, $n-$boyutlu ve $\nu-$indeksli pseudo-hiperbolik uzay denir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.2.16. $n \geq 2$ ve $0 \leq \nu \leq n$ olsun.

i) $\mathbb{S}^n_\nu(r)$ pseudo-küre, $c = 1/r^2$ sabit pozitif eğrilikli, tam semi-Riemann manifoldudur.

ii) $\mathbb{H}^n_\nu(r)$ pseudo-hiperbolik uzay, $c = -1/r^2$ sabit negatif eğrilikli, tam semi-Riemann manifoldudur (O'Neill, 1983).

Önerme 2.2.17. γ, $\mathbb{S}^n_v \subset \mathbb{R}^{n+1}_\nu$ nın sabit olmayan bir geodeziği olsun.

i) γ timelike ise, γ eğrisi $\mathbb{R}^{n+1}_\nu$ de hiperbol dallarından birinin parametrelendirilmişidir.

ii) γ spacelike ise, γ eğrisi $\mathbb{R}^{n+1}_\nu$ de elipsin periyodik parametrelendirilmişidir.

iii) γ null ise, γ geodeziği $\mathbb{R}^{n+1}_\nu$ de bir doğrudur (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.18. Tam, basit bağlantılı ve sabit eğrilikli bir semi-Riemann manifolduna uzay formu denir (O'Neill, 1983).

Önerme 2.2.19. Basit bağlantılı uzay formlarının izometrik olması için gerek ve yeter koşul bu uzay formlarının boyutlarının, indekslerinin ve $\mathcal{C}$ eğriliklerinin aynı olmasıdır (O'Neill, 1983).

Sonuç 2.2.20. $n \geq 2$ için,

$$\mathcal{M}(n,\nu,\mathcal{C}) = \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{S}^n_v(r) & \text{eğer} & \mathcal{C}=1/r^2 \quad \text{ve} \quad 0 \leq \nu \leq n-2, \\ \mathbb{R}^n_\nu & \text{eğer} & \mathcal{C}=0, \\ \mathbb{H}^n_\nu(r) & \text{eğer} & \mathcal{C}=-1/r^2 \quad \text{ve} \quad 2 \leq \nu \leq n. \end{array} \right.$$

(O'Neill, 1983).

Sonuç (Hopf) 2.2.21. Tam, basit bağlantılı ve $\mathcal{C}$ sabit eğrilikli $n-$ boyutlu Riemann manifoldu,

$$\begin{array}{lll} \mathcal{C}=1/r^2 & \text{ise} & \mathbb{S}^n(r) \text{ küresine,} \\ \mathcal{C}=0 & \text{ise} & \mathbb{R}^n \text{ Öklid uzayına,} \\ \mathcal{C}=-1/r^2 & \text{ise} & \mathbb{H}^n \text{ hiperbolik uzayına,} \end{array}$$

izometriktir (O'Neill, 1983).

Sonuç 2.2.22. $n-$boyutlu, tam, basit bağlantılı ve $\mathcal{C}$ sabit eğrilikli Lorentz manifoldu aşağıdakilere izometriktir;

$$\begin{array}{llllll} \text{Lorentz küresi} & \mathbb{S}^n_1(r), & \text{eğer} & \mathcal{C}=1/r^2 & \text{ve} & n \geq 3, \\ & \widetilde{\mathbb{S}}^2_1(r), & \text{eğer} & \mathcal{C}=1/r^2 & \text{ve} & n=2 \\ \text{Minkowski uzayı} & \mathbb{R}^n_1 & \text{eğer} & \mathcal{C}=0 & & \\ & \widetilde{\mathbb{H}}^n_1(r) & \text{eğer} & \mathcal{C}=-1/r^2. & & \end{array}.$$

Relativity teorisinde $\mathbb{S}^4_1(r)$ e *de Sitter uzayı*, $\mathbb{H}^4_1(r)$ e ise *anti-de Sitter uzayı* denir.(O'Neill, 1983).

3. 3- KÜRE ÜZERİNDE HELİCAL GEODEZİKLERİ İÇEREN YÜZEYLER

Bu kısımda, 1992 yılında, Tamura, M. nin $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında "Surfaces Which Contain Helical Geodesics" ve 2003 yılındaki " Surfaces Which Contain Helical Geodesics In The 3-Sphere" adlı çalışmaları incelendi.

Helical bir eğri, $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında eğriliği ve torsiyonu sabit olan bir eğridir. Bu eğri genellikle helistir. Eğer eğrilik sabit ve torsiyon sıfırsa bu eğri bir çembere, eğrilikte sıfır ise bir doğruya indirgenir. $\mathbb{E}^3$ de dairesel silindir, doğru, çember ve helis eğrilerini geodezik olarak içerir. Ayrıca $\mathbb{E}^3$ de küre üzerindeki büyük çemberler ve düzlem üzerindeki doğrular geodeziktirler. Ancak $\mathbb{E}^3$ de helikoid, helisi içermesine rağmen helis, helikoidin bir geodeziği değildir, ve $\mathbb{E}^3$ de dönel yüzeyler üzerindeki çemberler de her zaman geodezik değildir. Tüm bunlara dayanarak, $\mathbb{E}^3$ de $\mathcal{M}$ yüzeyi üzerindeki bir helical geodezik, $\mathbb{E}^3$ de eğri olarak helical, $\mathcal{M}$ yüzeyi üzerinde ise geodezik olan bir eğridir.

$\mathcal{M}^3(\mathcal{C})$ de $\mathcal{M}$ yüzeyi üzerindeki bir helical geodezik, $\mathcal{M}^3(\mathcal{C})$ de eğri olarak helical, $\mathcal{M}$ yüzeyi üzerinde ise geodezik olan bir eğridir.
Burada $\mathcal{M}^3(\mathcal{C})$, $\mathcal{C}$ sabit eğrilikli, $\langle .,. \rangle$ metrikli, basit bağlantılı, 3- boyutlu Riemann uzay formudur. Burada , $\mathcal{C} = 0, \pm 1$ alınacaktır. Yani, $\mathcal{M}^3(0) = \mathbb{E}^3$ $\big($3-boyutlu Öklid uzayı$\big)$, $\mathcal{M}^3(1) = \mathbb{S}^3$ (birim 3-küre), $\mathcal{M}^3(-1) = \mathbb{H}^3$ (birim hiperbolik 3-uzay) elde edilir.

$\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^3(\mathcal{C})$ uzay formunda bir yüzey, $\chi(\mathcal{M})$, $\mathcal{M}$ nin tüm vektör alanlarının bir kümesi, $\mathcal{D}$, $\mathcal{M}^3(\mathcal{C})$ deki Levi-Civita konneksiyonu, ∇, $\mathcal{M}$ deki Levi-Civita konneksiyonu ve ξ, $\mathcal{M}$ üzerindeki birim vektör alanı olsun. $\mathcal{M}$ üzerindeki ikinci temel formu

$$\mathbb{II}(X, Y)\,\xi = \mathcal{D}_X Y - \nabla_X Y \tag{3.1}$$

şeklindedir. $\mathcal{S}$, $\mathcal{M}$ nin şekil operatörü olmak üzere,

$$\mathbb{II}(X, Y) = \langle \mathcal{S}(X), Y \rangle$$

$\forall X, Y \in \chi(M)$.

$\mathcal{M}$ üzerindeki $\forall V, W \in \chi(M)$ için Codazzi denklemi hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}\mathcal{S}([V,W]) &= \nabla_V \mathcal{S}(W) - \nabla_W \mathcal{S}(V)\\ \mathcal{S}(\nabla_V W - \nabla_W V) &= (\nabla_V \mathcal{S}) W + \mathcal{S}(\nabla_V W) - (\nabla_W \mathcal{S}) V - \mathcal{S}(\nabla_W V)\end{aligned}$$

dir. Burada gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$(\nabla_V \mathcal{S}) W = (\nabla_W \mathcal{S}) V \tag{3.2}$$

bulunur.

$\mathcal{M}^3(\mathcal{C})$ de $\mathcal{M}$ yüzeyinin $\mathcal{K}$ Gauss eğriliği ve $\mathcal{H}$ ortalama eğriliği aşağıdaki gibidir:

$$\mathcal{K} = \mathcal{C} + \det \mathcal{S}, \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2} iz\mathcal{S}.$$

$\mathcal{M}^3(\mathcal{C})$ de $\mathcal{M}$ nin Gauss-Kronecker eğriliği $\mathcal{K}_e$ ile gösterilir ve

$$\mathcal{K}_e = \det \mathcal{S}$$

şeklindedir.

γ, $\mathcal{M}^3(\mathcal{C})$ de yay parametresine bağlı helical bir eğri olsun. O halde γ boyunca birim vektörleri X, Y ve eğrilikleri κ, τ olmak üzere, Frenet denklemleri:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\gamma'}\gamma' &= \kappa X\\ \mathcal{D}_{\gamma'}X &= -\kappa\gamma' + \tau Y\\ \mathcal{D}_{\gamma'}Y &= -\tau X\end{aligned}$$

dir. Burada γ', γ nın birim teğet vektör alanıdır.

Eğriliği sıfırdan farklı ve torsiyonu sıfır olan helical bir eğriye "*riemann çemberi*" denir. Eğer κ ve τ sıfırdan farklı ise, bu helical eğriye " *uygun helis*" denir.

Örnek 3.1. ($\mathbb{S}^3$ de helisler) $\mathbb{S}^3$, 4-boyutlu $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayına gömülmüş birim

3-küre olsun. $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{E}^4$ deki bir helis,

$$\gamma(s) = (\cos\theta\cos(as), \cos\theta\sin(as), \sin\theta\cos(bs), \sin\theta\sin(bs))$$

dir, ki burada

$$a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta = 1$$

şeklindedir. s yay parametresi olmak üzere, ayrıca

$$x_1^2 + x_2^2 = \cos^2\theta, \quad x_3^2 + x_4^2 = \sin^2\theta$$

olduğu açıktır. Bunun anlamı γ nın düzlem toru üzerinde olmasıdır.
Burada düzlem torun sabit ortalama eğriliği

$$\mathcal{H} = \cot(2\theta)$$

dir. κ ve τ eğrilikler olmak üzere,

$$\kappa = \sqrt{(a^2-1)(1-b^2)} \quad \text{ve} \quad \tau = ab$$

bulunur (Tamura, 2004).

$\mathbb{S}^3$ deki her uygun helis, bu helislerden birine kongürüenttir. Aşağıdaki lemma ileride vereceğimiz teoremler için önemli bir rol oynamaktadır.

Lemma 3.2. $\mathcal{M}$, bir Riemann 2- manifold olsun. Eğer $\mathcal{M}$ üzerindeki her yerde iki geodezik ailenin arakesiti sabit açı yapıyorsa, o zaman $\mathcal{M}$ bir düzlemdir (Tamura, 2004).

Şimdi ise $c \geq 0$ için, $\mathcal{M}^3(\mathcal{C})$ de isoparametrik yüzeyler (asli eğrilikleri sabit olan yüzeyler) ve $\mathbb{E}^3$ de düzlemsel yüzeyler ile ilgili bazı sınıflandırmalar hatırlatılacaktır.

Önerme 3.3. $\mathcal{M}$, $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında tam, düzlemsel bir yüzey olsun. O halde $\mathcal{M}$, düzlemsel eğrileri içeren bir dairesel silindirdir (Tamura, 2004).

Önerme 3.4. $\mathcal{M}$, $\mathbb{E}^3$ de isoparametrik bir yüzey olsun. Bu durumda $\mathcal{M}$, ya (total geodezik) düzlemdir, ya total umbilik küredir, ya da dairesel silindirdir (Tamura, 2004).

Önerme 3.5. $\mathcal{M}$, $\mathbb{S}^3$ de isoparametrik bir yüzey olsun. Bu durumda $\mathcal{M}$, total geodezik 2-küredir, ya total umbilik 2- küredir ya da çemberler içeren bir Hopf torudur (Tamura, 2004).

Aşağıda $\mathbb{E}^3$ de ve $\mathcal{M}^3(\mathcal{C})$ de helical geodezikleri içeren yüzeylerin karakterizasyonları ile ilgili teoremler mevcuttur.

Teorem 3.6. $\mathcal{M}$, $\mathbb{E}^3$ de sabit ortalama eğrilikli tam diferansiyellenebilir bir yüzey olsun. Eğer $\mathcal{M}$ üzerinde umbilik nokta yok ise, o zaman $\mathcal{M}$ nin herbir noktasından geçen ve eğriliği ($\mathbb{E}^3$ de eğri olarak) sıfırdan farklı olan bir helical geodezik vardır. O halde $\mathcal{M}$, dairesel silindirdir (Tamura, 1992).

Teorem 3.7. $\mathcal{M}$, $\mathbb{S}^3$ 3- küre üzerinde sabit ortalama eğrilikli tam diferansiyellenebilir bir yüzey olsun. Eğer $\mathcal{M}$ üzerinde $\mathcal{M}$ nin herbir noktasından geçen iki helical geodezik var ise o zaman $\mathcal{M}$, ya büyük küre, ya küçük küre ya da çemberleri içeren bir Hopf torudur (Tamura, 2004).Bu teoremin ispatı için aşağıda verilecek olan Teorem 3.8 ve Lemma 3.9 un verilmesi gereklidir.

Teorem 3.8. $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^3(\mathcal{C})$ uzay formunda sabit ortalama eğrilikli tam bir yüzey olsun. Eğer $\mathcal{M}$ nin umbilik noktaları yoksa, $\mathcal{M}$ üzerinde $\mathcal{M}$ nin herbir noktasından geçen ve eğriliği ($\mathcal{M}^3(\mathcal{C})$ de eğri olarak) sıfırdan farklı olan bir helical geodezik vardır. O halde $\mathcal{M}$, dairesel silindirdir (Tamura, 2004).

Burada $\mathcal{M}^3(\mathcal{C})$ dairesel silindir derken, $\mathcal{C} \neq 0$ için; $\mathbb{S}^3$ de çemberleri içeren Hopf silindiri (tor), $\mathbb{H}^3$ de geodezikler çevresindeki equdistant tubes lerdir.

Lemma 3.9. $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^3(\mathcal{C})$ de sabit ortalama eğrilikli tam bir yüzey olsun ve $\mathcal{U}$, $\mathcal{M}$ de bir açık küme olsun. Kabul edelim ki $\mathcal{U}$ üzerinde iki asimptotik eğri ailesi ve bu eğrilerin her ikisi de ambient uzayda geodezik olsunlar. O zaman $\mathcal{U}$, ya total geodeziktir, ya $\mathbb{E}^3$ de dairesel silindirin bir kısmına kongrüenttir ya da $\mathbb{S}^3$ de çemberleri içeren bir Hopf torudur (Tamura, 2004).

İspat. Eğer $\mathcal{U}$ total geodezik ise, o zaman $\mathcal{U}$ üzerinde ambient geodezik olan iki asimptotik eğri ailesi vardır. Bu yüzden biz $\mathcal{U}$ üzerinde total geodezik olmama durumu incelenecektir.

α_1 ve α_2, $\mathcal{U}$ üzerinde $p \in \mathcal{U}$ noktasından geçen ve $\mathcal{M}^3(\mathcal{C})$ de bir eğri olarak geodezik olan iki asimptotik eğri olsunlar.
λ ve $2\mathcal{H} - \lambda$, $\mathcal{M}$ nin asli eğrilikleri ve bunlara karşılık gelen asli vektör alanları E_1, E_2 olsun. Burada $\mathcal{H}$, başlangıçta kabul edildiği gibi sabittir. θ, E_1 ile α_1' arasındaki açı olmak üzere;

$$\begin{aligned} \alpha_1' &= \cos\theta E_1 + \sin\theta E_2 \\ \alpha_2' &= -\cos\theta E_1 + \sin\theta E_2 \end{aligned}$$

şeklindedir ki burada α_1' ve α_2', sırasıyla α_1 ve α_2 nin birim tanjant vektör alanları olsunlar. Ayrıca $\nabla_{E_1} E_1 = \alpha E_2$, $\nabla_{E_1} E_2 = -\alpha E_1$, $\nabla_{E_2} E_1 = \beta E_2$, $\nabla_{E_2} E_2 = -\beta E_1$ eşitlikleri mevcuttur. Codazzi denkleminden,

$$\begin{aligned} \nabla_{E_1}\lambda &= -2\beta(\lambda - \mathcal{H}) \\ \nabla_{E_2}\lambda &= 2\alpha(\lambda - \mathcal{H}) \end{aligned} \tag{3.3}$$

bulunur. $\mathcal{M}$ deki α_1 ve α_2 eğrileri aynı zamanda geodezik olduklarından,

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha_1'}\theta &+ \alpha\cos\theta + \beta\sin\theta = 0 \\ \nabla_{\alpha_2'}\theta &+ \alpha\cos\theta - \beta\sin\theta = 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

dir. Burada α_1 ve α_2 eğrileri için

$$\nabla_{\alpha_1'}\theta = 0 \quad \text{ve} \quad \nabla_{\alpha_2'}\theta = 0$$

olduğu biliniyor. Ayrıca α_1 geodezik olduğundan;

$$\nabla_{\alpha_1'}\alpha_1' = 0$$

dır. $\alpha_1^{'}$ nin değeri yerine yazılırsa,

$$\alpha \cos\theta + \beta \sin\theta = 0$$

elde edilir. Benzer şekilde α_2 geodezik olduğundan,

$$\nabla_{\alpha_2^{'}} \alpha_2^{'} = 0$$

dır. $\alpha_2^{'}$ nin değeri yerine yazılırsa,

$$\alpha \cos\theta - \beta \sin\theta = 0$$

elde edilir.

Burada α_1 ve α_2 eğrileri asimptotik eğriler

$$\mathbb{III}\left(E_1, E_1\right) = \lambda \quad \text{ve} \quad \mathbb{III}\left(E_2, E_2\right) = 2\mathcal{H} - \lambda$$

şeklindedir.

α_1 ve α_2 eğrileri $\mathcal{M}^3\left(\mathcal{C}\right)$ de birer eğri olarak geodezik olduklarından;

$$\mathcal{D}_{\alpha_1^{'}} \alpha_1^{'} = 0 \quad \text{ve} \quad \mathcal{D}_{\alpha_2^{'}} \alpha_2^{'} = 0$$

dir. Şimdi ise $\alpha_1^{'}$ ve $\alpha_2^{'}$ değerleri yerine yazılırsa her iki durumda da,

$$\lambda \cos^2\theta + \left(2\mathcal{H} - \lambda\right) \sin^2\theta = 0 \tag{3.5}$$

bulunur. Yukarıdaki ifadenin $\alpha_1^{'}$ ve $\alpha_2^{'}$ ye göre türevi alınırsa,

$$\nabla_{\alpha_1^{'}} \left(\lambda \cos^2\theta + \left(2\mathcal{H} - \lambda\right) \sin^2\theta\right) = 0$$

elde edilir. Yani,

$$\begin{aligned}
&\cos^2\theta\nabla_{\alpha_1'}\lambda+2\lambda\cos\theta\left(-\sin\theta\right)\nabla_{\alpha_1'}\theta+\sin^2\theta\nabla_{\alpha_1'}\left(2\mathcal{H}-\lambda\right)\\
&+2\left(2\mathcal{H}-\lambda\right)\sin\theta\cos\theta\nabla_{\alpha_1'}\theta \qquad = \quad 0.
\end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned}
\nabla_{\alpha_1'}\lambda &= 2\left(\lambda-\mathcal{H}\right)\left(\alpha\sin\theta-\beta\cos\theta\right)\\
\nabla_{\alpha_1'}\left(2\mathcal{H}-\lambda\right) &= 2\left(\lambda-\mathcal{H}\right)\left(\beta\cos\theta-\alpha\sin\theta\right)
\end{aligned}$$

olduğu açıktır. O halde tüm bilinenler yerine yazılırsa,

$$\alpha\sin\theta\left(3\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)-\beta\cos\theta\left(\cos^2-3\sin^2\theta\right)=0$$

bulunur. Aynı işlemler benzer şekilde α_2' için yapılırsa,

$$\alpha\sin\theta\left(3\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)+\beta\cos\theta\left(\cos^2-3\sin^2\theta\right)=0$$

elde edilir.

Burada α veya β sıfır olduğundan,

$$3\cos^2\theta=\sin^2\theta \quad \text{veya} \quad \cos^2\theta=3\sin^2\theta$$

dir. (3.3) ve (3.5) denklemleri, bu doğruların $\mathcal{U}$ üzerinde geodezik olduğunu gösterir. Böylece $\mathcal{U}$ total geodezik değildir. Bilindiği gibi iki geodezik doğru ailesinin arakesiti sabit $\pi/2$ açısıdır. Böylece Lemma 3.2 dan $\mathcal{U}$ düzlemdir (Tamura, 2004).

Teorem 3.10. $\mathcal{M}$, $\mathbb{E}^3$ de sabit ortalama eğrilikli tam diferensiyellenebilir bir yüzey olsun. Eğer $\mathcal{M}$ üzerinde, $\mathcal{M}$ nin herbir noktasından iki helical geodezik varsa o zaman $\mathcal{M}$, ya düzlem, ya küre ya da dairesel silindirdir (Tamura, 1992).

Teorem 3.11. $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^3\left(\mathcal{C}\right)$ de negatif omayan ve sabit ortalama eğrilikli tam bir yüzey olsun. Eğer $\mathcal{M}$ nin her bir noktasından geçen iki tane helical geodezik varsa o zaman $\mathcal{M}$, ya total geodezik bir yüzey, ya total umbilik bir yüzey ya dairesel silindir ($\mathcal{C}=0$) ya da Hopf toru ($\mathcal{C}>0$) dur (Tamura, 2004).

İspat. $\mathcal{M}^3\left(\mathcal{C}\right)=\mathbb{E}^3$ olduğu durumu (Tamura, 1992) de verilmiştir. Burada ise

$\mathcal{M}^3(\mathcal{C}) = \mathbb{S}^3$ olma durumu incelenecektir.

γ, $\mathcal{M}$ üzerinde helical geodezik ise aşağıdaki üç durum söz konusudur:

1. Durum. $\kappa \neq 0$ ve $\tau \neq 0$ olsun. Bu durumda (3.1) denklemlerinde $\mathcal{D}_{\gamma'}\gamma' = \mathbb{II}(\gamma', \gamma')$ ifadesi $\mathcal{M}$ ye normal olduğundan $X = \xi$ alınabilir. O halde,

$$\mathcal{D}_{\gamma'}\xi = -\kappa\gamma' + \tau Y \quad \text{ve} \quad \mathcal{D}_{\gamma'}Y = -\tau\xi.$$

bulunur.

2. Durum. $\kappa \neq 0$ ve $\tau = 0$ olsun. Burada da (3.2) denklemlerinde $X = \xi$ alınırsa,

$$\mathcal{D}_{\gamma'}\xi = -\kappa\gamma'.$$

bulunur.

3. Durum. $\kappa = 0$ olsun. Gauss denkleminden,

$$\mathbb{II}\left(\gamma', \gamma'\right) = 0$$

elde edilir.

γ_1 ve γ_2 $\mathcal{M}$ üzerinde $p \in \mathcal{M}$ noktasından geçen helical geodezik olsunlar. Burada 1-3 durumları göz önüne alındığında aşağıdaki olasılıklar söz konusudur:

(i) γ_1 ve γ_2 ambient geodezik,
(ii) γ_1 ve γ_2 Riemann çemberi,
(iii) γ_1 ve γ_2 uygun helis,
(iv) γ_1 ambient geodezik, γ_2 Riemann çember,
(v) γ_1 ambient geodezik, γ_2 uygun helis,
(vi) γ_1 Riemann çemberi, γ_2 uygun helis.

İlk olarak, $\mathcal{K}$ Gauss eğriliği en azından bir noktada pozitif olsun. Ve

$$\mathcal{M}_1 = \{p \in \mathcal{M} : \mathcal{K}_e(p) > 0\}$$

olsun. O halde $\mathcal{M}_1$, $(ii), (iii), (vi)$ tiplerinden biridir. $\mathcal{M}_{11}$ ise $\mathcal{M}_1$ in tüm umbilik noktalarının kümesi ve,

$$\mathcal{M}_{12} = \mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_{11}$$

olsun. Eğer $\mathcal{M}_{12} \neq \varnothing$ ise o halde Teorem 3.8 den $\mathcal{M}_{12}$ üzerinde $\mathcal{K}_e = 0$ dir. Bu ise $\mathcal{M}_{12}$ üzerinde $\mathcal{K}_e > 0$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $\mathcal{M}_1$, hem açık hem kapalı olduğundan $\mathcal{M}_1$, total umbilik bir yüzeydir.. Böylece $\mathcal{M}$, total umbilik bir yüzeydir.

Şimdi ise $\mathcal{M}$ üzerinde $\mathcal{K}_e \leq 0$ olsun. Ve

$$\mathcal{M}_2 = \{p \in \mathcal{M} : \mathcal{K}_e(p) < 0\}$$

O halde $\mathcal{M}_2$, $(i) - (vi)$ tiplerinden biridir.

$$\mathcal{M}_{21} = \{p \in \mathcal{M} : \ p \text{ noktasından geçen Riemann çemberi veya uygun helis var}\}$$

ve $\mathcal{M}_{22} = \mathcal{M}_2 - \mathcal{M}_{21}$ olsun. O halde $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_{21} \cup \mathcal{M}_{22}$, $\mathcal{M}_2 = Cl\mathcal{M}_{21} \cup Int\mathcal{M}_{22}$ ve $\mathcal{M}_2 = Cl\mathcal{M}_{22} \cup Int\mathcal{M}_{21}$ olduğu açıktır. burada $\mathcal{A}$ kümesi için, $Cl\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ nın kapanışını, $Int\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ nın içini göstermektedir. Böylece $\mathcal{M}_{21}$ veya $\mathcal{M}_{22}$ iç noktalara sahiptir ya da $\mathcal{M}_{21}$ veya $\mathcal{M}_{22}$, $\mathcal{M}_2$ de yoğundur. Eğer $\mathcal{M}_{21} \neq \varnothing$ veya $\mathcal{M}_{21}$, $\mathcal{M}_2$ de yoğun ise Teorem 3.1 den $\mathcal{M}_2$ düzlemdir. Oysa bu bir çelişkidir. Bunun anlamı $\mathcal{M}_2$ üzerinde tüm asimptotik eğriler, ambient geodeziktirler. Böylece, Lemma 3.4. ten $\mathcal{M}_2$ üzerinde $\mathcal{K} = 0$ dır. O halde $\mathcal{M}_2 = \{p \in \mathcal{M} : \mathcal{K}_e(p) = -1\}$ dir. Buradan $\mathcal{M}_2$ kapalıdır. Ayrıca $\mathcal{M}_2$ hem açık hem kapalı olduğundan $\mathcal{M}$ bir düzlemdir. Dolayısıyla $\mathcal{M}$, çemberleri içeren bir Hopf torudur. Çünkü $\mathcal{M}$, isoparametrik ve tam bir düzlemdir.

Şimdi ise $\mathbb{H}^3$ de tam düzlemsel yüzeylerin ve isoparametrik yüzeylerin sınıflandırmaları hatırlatılacaktır.

Önerme 3 12. $\mathcal{M}$, $\mathbb{H}^3$ hiperbolik 3-uzayında tam düzlemsel bir yüzey olsun. O zaman $\mathcal{M}$, ya total umbilik $(horoküre)$, ya da $\mathbb{H}^3$ de bir geodeziğin (equdistant tube)sidir (Tamura, 2004).

Önerme 3 13. $\mathcal{M}$, $\mathbb{H}^3$ hiperbolik 3-uzayında isoparametrik bir yüzey olsun. O halde $\mathcal{M}$, ya total geodezik 2-hiperbolik uzaydır, ya total umbilik yüzey ya da geodezikler etrafındaki equdistant tube lerdir (Tamura, 2004).

İspat. (Teorem 3.8) γ, $\mathcal{M}$ üzerinde $p \in \mathcal{M}$ noktasından geçen bir helical geodezik olsun. O halde Gauss denkleminden

$$\mathcal{D}_{\gamma'}\gamma' = \mathbb{III}\left(\gamma', \gamma'\right)\xi$$

ifadesi $\mathcal{M}$ ye normaldir. Böylece Serret-Frenet formulünde $X = \xi$ alınırsa,

$$\mathbb{III}\left(\gamma', \gamma'\right) = \kappa, \quad ve \quad \mathbb{III}\left(\gamma', Y\right) = -\tau.$$

λ ve $2\mathcal{H} - \lambda$, $\mathcal{M}$ nin asli eğrilikleri olsunlar. O halde $\mathcal{M}$ nin ortalama eğriliği kabul edildiği gibi $\mathcal{H}$ dir. E_1 ve E_2, $\mathcal{M}$ üzerinde asli vektör alanlarına karşılık gelen vektör alanları olsunlar. θ, γ' ile E_1 arasındaki açı olmak üzere,

$$\begin{aligned} \gamma' &= \cos\theta E_1 + \sin\theta E_2 \\ Y &= -\sin\theta E_1 + \cos\theta E_{2.} \end{aligned}$$

Ayrıca burada,

$$\begin{aligned} \mathbb{III}\left(E_1, E_1\right) &= \mathcal{D}_{E_1}E_1 = \lambda \\ \mathbb{III}\left(E_2, E_2\right) &= \mathcal{D}_{E_2}E_2 = (2\mathcal{H} - \lambda) \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde düşünülürse,

$$\mathbb{III}\left(\gamma', \gamma'\right) = \mathcal{D}_{\gamma'}\gamma' = \lambda\cos^2\theta + (2\mathcal{H} - \lambda)\sin^2\theta \tag{3.7}$$

$$\mathbb{III}\left(Y, Y\right) = \lambda\sin^2\theta + (2\mathcal{H} - \lambda)\cos^2\theta \tag{3.8}$$

bulunur. (3.6) ve (3.7) denklemlerinden

$$\kappa = \lambda\cos^2\theta + (2\mathcal{H} - \lambda)\sin^2\theta$$

ve (3.8) denkleminden de

$$\mathbb{III}\left(Y,Y\right)=2\mathcal{H}-\kappa$$

elde edilir. $\mathcal{M}$ nin $\mathcal{K}$ Gauss eğriliği

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= c+\mathbb{III}\left(\gamma^{'},\gamma^{'}\right).\mathbb{III}\left(Y,Y\right)-\left\{\mathbb{III}\left(\gamma^{'},Y\right)^{2}\right\},\\ &= c+\kappa\left(2\mathcal{H}-\kappa\right)-\tau^{2}\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu ifade $c+\lambda\left(2\mathcal{H}-\lambda\right)$ ya eşit olmalıdır. γ boyunca λ ve $2\mathcal{H}-\lambda$ fonksiyonları sabittirler. Şimdi (3.7) in $\gamma^{'}$ ye göre diferansiyeli alınırsa;

$$\nabla_{\gamma'}\theta=0 \tag{3.9}$$

bulunur, Çünkü $\mathcal{M}$ nin umbilik noktası yoktur.

Ayrıca $\nabla_{E_1}E_1=\alpha E_2$, $\nabla_{E_1}E_2=-\alpha E_1$, $\nabla_{E_2}E_1=\beta E_2$, $\nabla_{E_2}E_2=-\beta E_1$ olduğu açıktır. γ geodezik olduğundan,

$$\nabla_{\gamma^{'}}\gamma^{'}=0$$

dır. $\gamma^{'}$ nin değeri yerine yazılırsa,

$$\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta=0. \tag{3.10}$$

Ayrıca

$$\mathcal{S}(\,[E_1,E_2])=\nabla_{E_1}\mathcal{S}(E_2)-\nabla_{E_2}\mathcal{S}(E_1)$$

Codazzi denklemi kullanılırsa,

$$\nabla_{E_1}\lambda=-2\beta\left(\lambda-\mathcal{H}\right)\quad \text{ve}\quad \nabla_{E_2}\lambda=2\alpha\left(\lambda-\mathcal{H}\right) \tag{3.11}$$

bulunur. Burada $D_{\gamma'}\left(\lambda\xi\right)$ nin normal kısmı sıfır olduğundan ve (3.8) denkleminden,

$$\begin{aligned}
\nabla_{\gamma'}(\lambda\xi) &= 0 \\
(\nabla_{\gamma'}\lambda)\xi + \lambda\nabla_{\gamma'}\xi &= 0 \\
\nabla_{\gamma'}\xi &\neq 0
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\nabla_{\gamma'}\lambda = 0$$

dır. Son ifadede tüm bilinenler yerine yazılırsa

$$\alpha\sin\theta - \beta\cos\theta = 0 \tag{3.12}$$

elde edilir.Böylece (3.8) ve (3.10) denklemlerinden,γ boyunca $\alpha = \beta = 0$ olduğu görülür. Bunun anlamı $\mathcal{M}$ üzerindeki tüm doğruların $\mathcal{M}$ nin geodeziği olduğudur. Böylece $\mathcal{M}$ düzlemdir ve λ ve $2\mathcal{H} - \lambda$ asli eğriliklerine sahiptir. O halde $\mathcal{M}$ ya total geodezik bir yüzey, ya total umbilik bir yüzey ya da dairesel silindirdir. Ancak başlangıçta $\mathcal{M}$ nin umbilik noktaları yok kabul edilmişti. O halde $\mathcal{M}$, dairesel silindirdir (Tamura, 2004).

4. $\mathbb{E}_1^3$ LORENTZ UZAYINDA HELİCAL GEODEZİKLERİ İÇEREN YÜZEYLER

Bu bölümde, Lorentz uzayında sabit ortalama eğrilikli yüzeyler, helical eğriler ve geodezikler çalışıldı. Ayrıca, $\mathbb{E}_1^3$ Lorentz uzayında helical geodezikleri içeren yüzeyler ile ilgili bazı sınıflandırmalar elde edildi.

$\mathbb{E}_1^3$ Lorentz uzayında bir helical eğri, eğriliği ve torsiyon sabit olan eğridir. Bilindiği gibi bu eğri genellikle helis eğrisidir. Eğer eğrilik sabit, torsiyon sıfır ise bu eğri bir Lorentz çemberine, eğrilikte sıfır ise bu eğri bir doğruya indirgenir. $\mathbb{E}_1^3$ deki Lorentz silindirleri ise bu eğrileri geodezik olarak içerir. $\mathbb{E}_1^3$ de $\mathcal{M}$ yüzeyi üzerindeki bir helical geodezik, $\mathbb{E}_1^3$ Lorentz uzayında bir eğri olarak helical, $\mathcal{M}$ yüzeyi üzerinde ise geodezik olan bir eğridir.

Şimdi ise Lorentz uzayında sabit ortalama eğrilikli yüzeyleri sınıflandırmak için bazı teoremler verilecektir.

Teorem 4.1. $\mathcal{M}$, $\mathbb{E}_1^3$ Lorentz uzayında tam, diferensiyellenebilir ve sabit ortalama eğrilikli bir yüzey olsun. Eğer $\mathcal{M}$ nin umbilik noktası yok ise, o zaman eğrilikleri sıfırdan farklı olan ve $\mathcal{M}$ nin herbir noktasından geçen iki helical geodezik vardır. O zaman $\mathcal{M}$, Lorentz silindirlerinden biridir.

İspat. γ, $\mathbb{E}_1^3$ de yay parameresi ile parametrelendirilmiş bir helical eğri olsun. Serret-Frenet formüllerinden γ nın X, Y birim vektör alanları ve κ, τ eğrilikleri olsun.

1.Durum. $\gamma^{'}, X$ spacelike, Y timelike olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\gamma'}\gamma^{'} &= \kappa X \\ \mathcal{D}_{\gamma'}X &= -\kappa\gamma^{'} + \tau Y \\ \mathcal{D}_{\gamma'}Y &= \tau X \end{aligned} \tag{4.1}$$

burada $\gamma^{'}$, γ nın birim teğet vektör alanını göstermektedir.

γ, $\mathcal{M}$ üzerinde $p \in \mathcal{M}$ noktasından geçen bir helical geodezik ve $\mathcal{M}$ nin birim normal vektör alanı ξ olsun. Gauss denkleminden,

$$\mathcal{D}_{\gamma'}\gamma^{'} = \mathbb{II}\left(\gamma^{'}, \gamma^{'}\right)$$

olduğundan, $\mathcal{M}$ ye normaldir. Böylece $X = \xi$ alınabilir.

$$\mathbb{II}\left(\gamma^{'}, \gamma^{'}\right) = \kappa\xi, \qquad \mathbb{II}\left(\gamma^{'}, Y\right) = \tau\xi \tag{4.2}$$

Burada λ ve $c-\lambda$, $\mathcal{M}$ nin asli eğrilikleri ve E_1 ile E_2, $\mathcal{M}$ nin asli vektör alanlarına karşılık gelen vektör alanları olsunlar.

1.1.Durum . E_1, ξ spacelike, E_2 timelike olsun. θ, $\gamma^{'}$ ile E_1 arasındaki açı olmak üzere,

$$\begin{aligned} \gamma^{'} &= \cosh\theta E_1 + \sinh\theta E_2 \\ Y &= \sinh\theta E_1 + \cosh\theta E_2. \end{aligned}$$

şeklindedir. Ayrıca burada

$$\mathcal{S}\left(E_1\right) = \lambda E_1 \ \text{ ve } \ \mathcal{S}\left(E_2\right) = -\left(c-\lambda\right)E_2$$

ve $\varepsilon = \langle\xi, \xi\rangle = \pm 1$ olduğu göz önüne alınarak,

$$\mathbb{II}\left(E_1, E_1\right) = \varepsilon\left\langle\mathcal{S}\left(E_1\right), E_1\right\rangle\xi = \left\langle\lambda E_1, E_1\right\rangle\xi$$

dir.O halde

$$\mathbb{II}\left(E_1, E_1\right) = \mathcal{D}_{E_1}E_1 = \lambda\xi$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\mathbb{II}\left(E_2, E_2\right) = \varepsilon\left\langle\mathcal{S}\left(E_2\right), E_2\right\rangle\xi = \left\langle-\left(c-\lambda\right)E_2, E_2\right\rangle\xi$$

dir. O halde

$$\mathbb{II}\left(E_2, E_2\right) = \mathcal{D}_{E_2} E_2 = \left(c - \lambda\right) \xi$$

elde edilir. γ geodezik olduğundan,

$$\mathbb{II}\left(\gamma^{'}, \gamma^{'}\right) = \mathcal{D}_{\gamma^{'}} \gamma^{'}$$

olduğu açıktır.

$$\mathbb{II}\left(\gamma^{'}, \gamma^{'}\right) = \mathcal{D}_{\gamma^{'}} \gamma^{'} = \left\{\lambda \cosh^2 \theta + \left(c - \lambda\right) \sinh^2 \theta\right\} \xi \tag{4.3}$$

$$\mathbb{II}\left(Y, Y\right) = \mathcal{D}_{Y} Y = \left\{\lambda \sinh^2 \theta + \left(c - \lambda\right) \cosh^2 \theta\right\} \xi \tag{4.4}$$

(4.2) ve (4.3) denklemlerinden,

$$\kappa = \lambda \cosh^2 \theta + \left(c - \lambda\right) \sinh^2 \theta$$

elde edilir. Şimdi ise (4.3) denkleminin $\gamma^{'}$ ye göre türevini alınırsa, $\mathcal{M}$ nin umbilik noktası olmadığından

$$\nabla_{\gamma^{'}} \left(\lambda \cosh^2 \theta + \left(c - \lambda\right) \sinh^2 \theta\right) \xi = 0$$

dır. Buradan

$$\nabla_{\gamma^{'}} \left(\lambda \cosh^2 \theta + \left(c - \lambda\right) \sinh^2 \theta\right) = 0$$

ve

$$(2\lambda \cosh \theta + 2\left(c - \lambda\right) \sinh \theta) \nabla_{\gamma^{'}} \theta = 0$$

dir. Ayrıca,

$$(2\lambda \cosh \theta + 2\left(c - \lambda\right) \sinh \theta) \neq 0$$

olduğundan,

$$\nabla_{\gamma^{'}} \theta = 0 \tag{4.5}$$

bulunur. Burada $\nabla_{E_1} E_1 = \alpha E_2$, $\nabla_{E_2} E_2 = -\beta E_1$, ve $\nabla_{E_1} E_2 = \alpha E_1$, $\nabla_{E_2} E_1 =$

$-\beta E_2$ olduğu açıktır. Ayrıca γ geodezik olduğundan,

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$$

dır. γ' yerine konulursa

$$\alpha \cosh\theta - \beta \sinh\theta = 0 \tag{4.6}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\mathcal{S}\left[E_1, E_2\right] = \nabla_{E_1}\mathcal{S}\left(E_2\right) - \nabla_{E_2}\mathcal{S}\left(E_1\right)$$

Codazzi denklemi kullanılırsa,

$$\nabla_{E_1}\lambda = -\beta c \quad \text{ve} \quad \nabla_{E_2}\lambda = -\alpha c \tag{4.7}$$

bulunur. Burada $D_{\gamma'}\left(\lambda\xi\right)$ nin normal kısmı sıfır olduğundan ve (4.7) denkleminden,

$$\begin{aligned} \nabla_{\gamma'}\left(\lambda\xi\right) &= 0 \\ (\nabla_{\gamma'}\lambda)\xi + \lambda\nabla_{\gamma'}\xi &= 0 \\ \nabla_{\gamma'}\xi &\neq 0 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\nabla_{\gamma'}\lambda = 0$$

Son ifadede tüm bilinenler yerine yazılırsa

$$\alpha \sinh\theta + \beta \cosh\theta = 0 \tag{4.8}$$

elde edilir.Böylece (4.6) ve (4.8) denklemlerinden,γ boyunca $\alpha = \beta = 0$ olduğu görülür. Bunun anlamı $\mathcal{M}$ üzerindeki tüm doğruların $\mathcal{M}$ nin geodeziği olduğudur. Ayrıca burada $\mathcal{M}$ üzerindeki her yerde iki geodezik ailenin arakesiti sabittir. O halde $\mathcal{M}$ Lorentz düzlemidir ve burada $\mathcal{M}$, λ ve $c-\lambda$ eğriliklerine sahiptir. Dolayısyla $\mathcal{M}$ ya Lorentz düzlemidir, ya da Lorentz silindirlerinden biridir. Ancak başlangıçta $\mathcal{M}$ nin umbilik noktaları yok kabul edilmişti. O halde $\mathcal{M}$, Lorentz silindirlerinden biridir.

1.2.Durum. E_2, ξ spacelike, E_1 timelike olsun. θ, $\gamma^{'}$ ile E_1 arasındaki açı olmak üzere

$$\begin{aligned} \gamma^{'} &= \cosh\theta E_1 + \sinh\theta E_2 \\ Y &= \sinh\theta E_1 + \cosh\theta E_2. \end{aligned}$$

şeklindedir. Ayrıca

$$\mathcal{S}\left(E_1\right) = -\lambda E_1 \quad , \quad \mathcal{S}\left(E_2\right) = \left(c-\lambda\right) E_2$$

ve $\varepsilon = \langle \xi, \xi \rangle \pm 1$ olduğu göz önüne alınarak,

$$\mathbb{II}\left(E_1, E_1\right) = \varepsilon \left\langle \mathcal{S}\left(E_1, E_1\right)\right\rangle \xi = \left\langle -\lambda E_1, E_1 \right\rangle \xi$$

den

$$\mathbb{II}\left(E_1, E_1\right) = \mathcal{D}_{E_1} E_1 = \lambda \xi$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$\mathbb{II}\left(E_2, E_2\right) = \varepsilon \left\langle \mathcal{S}\left(E_2, E_2\right)\right\rangle \xi = \left\langle -\left(c-\lambda\right) E_2, E_2 \right\rangle \xi$$

den

$$\mathbb{II}\left(E_2, E_2\right) = \mathcal{D}_{E_2} E_2 = (c-\lambda)\xi$$

elde edilir. γ geodezik olduğundan

$$\mathbb{II}\left(\gamma^{'}, \gamma^{'}\right) = \mathcal{D}_{\gamma^{'}} \gamma^{'}$$

olduğu açıktır.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{III}\left(\gamma', \gamma'\right) & = & \mathcal{D}_{\gamma'}\gamma' = \left\{\lambda \cosh^2\theta + (c-\lambda)\sinh^2\theta\right\}\xi \\ \mathbb{III}\left(Y, Y\right) & = & \mathcal{D}_{Y}Y = \left\{\lambda \sinh^2\theta + (c-\lambda)\cosh^2\theta\right\}\xi \end{array} \tag{4.9}$$

(4.2) ve (4.9) denklemlerinden

$$\kappa = \lambda \cosh^2\theta + (c-\lambda)\sinh^2\theta$$

elde edilir. Şimdi ise (4.9) denkleminin γ' ye göre türevini alırsak, $\mathcal{M}$ nin umbilik noktası olmadığından,

$$\nabla_{\gamma'}\left(\lambda \cosh^2\theta + (c-\lambda)\sinh^2\theta\right)\xi = 0.$$

olduğundan

$$(2\lambda\cosh\theta + 2(c-\lambda)\sinh\theta)\nabla_{\gamma'}\theta = 0$$

dir. Ayrıca

$$2\lambda\cosh\theta + 2(c-\lambda)\sinh\theta \neq 0$$

olduğundan

$$\nabla_{\gamma'}\theta = 0 \tag{4.10}$$

bulunur. Burada $\nabla_{E_1}E_1 = \alpha E_2$, $\nabla_{E_2}E_2 = -\beta E_1$, $\nabla_{E_1}E_2 = \alpha E_1$, $\nabla_{E_2}E_1 = -\beta E_2$ olduğu açıktır. Ayrıca γ geodezik olduğundan,

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$$

dır. γ' yerine konulursa

$$\alpha\cosh\theta - \beta\sinh\theta = 0. \tag{4.11}$$

elde edilir. Öte yandan

$$\mathcal{S}\left[E_1, E_2\right] = \nabla_{E_1}\mathcal{S}\left(E_2\right) - \nabla_{E_2}\mathcal{S}\left(E_1\right)$$

Codazzi denklemi kullanılırsa,

$$\nabla_{E_1}\lambda = -\beta c \quad \text{ve} \quad \nabla_{E_2}\lambda = -\alpha c \tag{4.12}$$

bulunur. Burada $D_{\gamma'}(\lambda\xi)$ nin normal kısmı sıfır olduğundan ve (4.12) denkleminden,

$$\begin{aligned}
\nabla_{\gamma'}(\lambda\xi) &= 0 \\
(\nabla_{\gamma'}\lambda)\xi + \lambda\nabla_{\gamma'}\xi &= 0 \\
\nabla_{\gamma'}\xi &\neq 0
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\nabla_{\gamma'}\lambda = 0.$$

Son ifadede tüm bilinenler yerine yazılırsa

$$\alpha \sinh\theta - \beta\cosh\theta = 0 \tag{4.13}$$

elde edilir. Böylece (4.11) ve (4.13) denklemlerinden, γ boyunca $\alpha = \beta = 0$ olduğu görülür. Bunun anlamı $\mathcal{M}$ üzerindeki tüm doğruların $\mathcal{M}$ nin geodeziği olduğudur. Ayrıca burada $\mathcal{M}$ üzerindeki her yerde iki geodezik ailenin arakesiti sabittir. O halde $\mathcal{M}$ Lorentz düzlemidir ve burada $\mathcal{M}$, λ ve $c-\lambda$ eğriliklerine sahiptir. Dolayısyla $\mathcal{M}$ ya Lorentz düzlemidir ya da Lorentz silindirlerinden biridir. Ancak başlangıçta $\mathcal{M}$ nin umbilik noktaları yok kabul edilmişti. O halde $\mathcal{M}$, Lorentz silindirlerinden biridir.

2.Durum. γ', Y spacelike, X timelike olsun. O zaman,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{\gamma'}\gamma' &= \kappa X \\
\mathcal{D}_{\gamma'}X &= \kappa\gamma' + \tau Y \\
\mathcal{D}_{\gamma'}Y &= -\tau X
\end{aligned} \tag{4.14}$$

burada γ', γ nın birim teğet vektör alanını göstermektedir.

γ, $\mathcal{M}$ üzerinde $p \in \mathcal{M}$ noktasından geçen bir helical geodezik ve $\mathcal{M}$ nin birim normal vektör alanı ξ olsun. Gauss denkleminden,

$$\mathcal{D}_{\gamma'}\gamma' = \mathbb{II}\left(\gamma', \gamma'\right)$$

olduğundan, $\mathcal{M}$ ye normaldir. Böylece $X = \xi$ alınabilir. Böylece

$$\mathbb{II}\left(\gamma', \gamma'\right) = \kappa\xi, \qquad \mathbb{II}\left(\gamma', Y\right) = -\tau\xi \tag{4.15}$$

dir. Burada λ ve $c-\lambda$, $\mathcal{M}$ nin asli eğrilikleri ve E_1 ve E_2, $\mathcal{M}$ üzerinde asli vektör alanlarına karşılık gelen vektör alanları olsunlar.

Ayrıca E_1 ve E_2 spacelike, ξ timelike dır. θ, γ' ile E_1 arasındaki açı olmak üzere,

$$\begin{aligned} \gamma' &= \cosh\theta E_1 + \sinh\theta E_2 \\ Y &= \sinh\theta E_1 + \cosh\theta E_2. \end{aligned}$$

Ayrıca burada

$$\mathcal{S}(E_1) = \lambda E_1 \;\;,\;\; \mathcal{S}(E_2) = (c-\lambda) E_2$$

ve $\varepsilon = \langle \xi, \xi \rangle = \pm 1$ olduğu göz önüne alınarak,

$$\mathbb{II}(E_1, E_1) = \varepsilon \langle \mathcal{S}(E_1), E_1 \rangle \xi = -\langle \lambda E_1, E_1 \rangle \xi$$

dir. O halde,

$$\mathbb{II}(E_1, E_1) = \mathcal{D}_{E_1} E_1 = -\lambda\xi$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\mathbb{II}(E_2, E_2) = \varepsilon \langle \mathcal{S}(E_2), E_2 \rangle \xi = -\langle (c-\lambda) E_2, E_2 \rangle \xi$$

dir. Ohalde

$$\mathbb{II}(E_2, E_2) = \mathcal{D}_{E_2} E_2 = -(c-\lambda)\xi$$

elde edilir. γ geodezik olduğunda

$$\mathbb{II}\left(\gamma^{'},\gamma^{'}\right)=\mathcal{D}_{\gamma^{'}}\gamma^{'}$$

olduğu açıktır..

$$\begin{aligned}\mathbb{II}\left(\gamma^{'},\gamma^{'}\right) &= \mathcal{D}_{\gamma^{'}}\gamma^{'} &= -\left\{\lambda\cosh^{2}\theta+(c-\lambda)\sinh^{2}\theta\right\}\xi \\ \mathbb{II}\left(Y,Y\right) &= \mathcal{D}_{Y}Y &= -\left\{\lambda\sinh^{2}\theta+(c-\lambda)\cosh^{2}\theta\right\}\xi.\end{aligned} \tag{4.16}$$

(4.15) ve (4.16) denklemlerinden,

$$\kappa=\lambda\cosh^{2}\theta+(c-\lambda)\sinh^{2}\theta$$

elde edilir. Şimdi ise (4.16) denkleminin $\gamma^{'}$ ye göre türevini alırsak, $\mathcal{M}$ nin umbilik noktası olmadığından

$$\nabla_{\gamma^{'}}\left\{\lambda\cosh^{2}\theta+(c-\lambda)\sinh^{2}\theta\right\}\xi=0.$$

Buradan

$$\nabla_{\gamma^{'}}(\lambda\cosh^{2}\theta+(c-\lambda)\sinh^{2}\theta)=0$$

olduğundan

$$(2\lambda\cosh\theta\sinh\theta+2\,(c-\lambda)\sinh\theta\cosh\theta)\nabla_{\gamma^{'}}\theta=0$$

dir. Ayrıca

$$2\lambda\cosh\theta\sinh\theta+2\,(c-\lambda)\sinh\theta\cosh\theta\neq 0$$

olduğundan,

$$\nabla_{\gamma^{'}}\theta=0$$

bulunur. Burada $\nabla_{E_1}E_1=\alpha E_2$, $\nabla_{E_2}E_2=-\beta E_1$, $\nabla_{E_1}E_2=-\alpha E_1$, $\nabla_{E_2}E_1=\beta E_2$ olduğu açıktır. Ayrıca γ geodezik olduğundan

$$\nabla_{\gamma^{'}}\gamma^{'}=0$$

dır. γ' yerine konulursa,

$$\alpha \cosh \theta + \beta \sinh \theta = 0. \tag{4.17}$$

elde edilir. Öte yandan,

$$\mathcal{S}\left([E_1, E_2]\right) = \nabla_{E_1} \mathcal{S}\left(E_2\right) - \nabla_{E_2} \mathcal{S}\left(E_1\right)$$

Codazzi denklemi kullanılırsa,

$$\nabla_{E_1} \lambda = -\left(2\lambda - c\right)\beta \quad \text{ve} \quad \nabla_{E_2} \lambda = \left(2\lambda - c\right)\alpha \tag{4.18}$$

bulunur. Burada $\mathcal{D}_{\gamma'}\left(\lambda\xi\right)$ nin normal kısmı sıfır olduğundan ve (4.18) denkleminden,

$$\begin{aligned} \nabla_{\gamma'}\left(\lambda\xi\right) &= 0 \\ \left(\nabla_{\gamma'}\lambda\right)\xi + \lambda\nabla_{\gamma'}\xi &= 0 \\ \nabla_{\gamma'}\xi &\neq 0 \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\nabla_{\gamma'}\lambda = 0.$$

Son ifadede tüm bilinenler yerine yazılırsa,

$$\alpha \sinh \theta - \beta \cosh \theta = 0 \tag{4.19}$$

elde edilir. Böylece (4.17) ve (4.19) denklemlerinden γ boyunca $\alpha = \beta = 0$ olduğu görülür. Bunun anlamı $\mathcal{M}$ üzerindeki tüm doğruların $\mathcal{M}$ nin geodeziği olduğudur. Ayrıca burada $\mathcal{M}$ üzerindeki her yerde iki geodezik ailenin arakesiti sabittir. O halde $\mathcal{M}$ Lorentz düzlemidir ve burada $\mathcal{M}$, λ ve $c - \lambda$ eğriliklerine sahiptir. Dolayısıyla $\mathcal{M}$ ya Lorentz düzlemidir, ya da Lorentz silindirlerinden biridir. Ancak başlangıçta $\mathcal{M}$ nin umbilik noktaları yok kabul edilmişti. O halde $\mathcal{M}$, Lorentz silindirlerinden biridir.

3.Durum. X, Y spacelike, $\gamma^{'}$ timelike olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\gamma^{'}}\gamma^{'} &= \kappa X \\ \mathcal{D}_{\gamma^{'}}X &= -\kappa\gamma^{'}+\tau Y \\ \mathcal{D}_{\gamma^{'}}Y &= -\tau X \end{aligned} \tag{4.20}$$

burada $\gamma^{'}$, γ nın birim teğet vektör alanını göstermektedir.

γ, $\mathcal{M}$ üzerinde $p \in \mathcal{M}$ noktasından geçen bir helical geodezik ve $\mathcal{M}$ nin birim normal vektör alanı ξ olsun. Gauss denkleminden,

$$\mathcal{D}_{\gamma^{'}}\gamma^{'} = \mathbb{II}\left(\gamma^{'}, \gamma^{'}\right)$$

olduğundan, $\mathcal{M}$ ye normaldir. Böylece $X = \xi$ alınabilir. Böylece

$$\mathbb{II}\left(\gamma^{'}, \gamma^{'}\right) = \kappa\xi, \qquad \mathbb{II}\left(\gamma^{'}, Y\right) = -\tau\xi \tag{4.21}$$

dır. Burada λ ve $c-\lambda$, $\mathcal{M}$ nin asli eğrilikleri ve E_1 ile E_2, $\mathcal{M}$ nin asli vektör alanlarına karşılık gelen vektör alanları olsunlar.

3.1.Durum . E_1, ξ spacelike, E_2 timelike olsun. θ, $\gamma^{'}$ ile E_1 arasındaki açı olmak üzere,

$$\begin{aligned} \gamma^{'} &= \cosh\theta E_1 + \sinh\theta E_2 \\ Y &= \sinh\theta E_1 + \cosh\theta E_2. \end{aligned}$$

şeklindedir. Ayrıca burada

$$\mathcal{S}\left(E_1\right) = \lambda E_1 \quad , \quad \mathcal{S}\left(E_2\right) = -\left(c-\lambda\right)E_2$$

dir. $\varepsilon = \langle\xi, \xi\rangle = \pm 1$ olduğu göz önüne alınarak,

$$\mathbb{II}\left(E_1, E_1\right) = \varepsilon\left\langle\mathcal{S}\left(E_1\right), E_1\right\rangle\xi = \left\langle\lambda E_1, E_1\right\rangle\xi$$

dir.O halde,

$$\mathbb{II}\left(E_1, E_1\right) = \mathcal{D}_{E_1} E_1 = \lambda\xi$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\mathbb{II}\left(E_2, E_2\right) = \varepsilon\left\langle \mathcal{S}\left(E_2\right), E_2\right\rangle \xi = \left\langle -\left(c-\lambda\right) E_2, E_2\right\rangle \xi$$

dir. O halde

$$\mathbb{II}\left(E_2, E_2\right) = \mathcal{D}_{E_2} E_2 - \left(c-\lambda\right)\xi$$

elde edilir. γ geodezik olduğunda

$$\mathbb{II}\left(\gamma^{'}, \gamma^{'}\right) = \mathcal{D}_{\gamma'} \gamma^{'}$$

olduğu açıktır..

$$\mathbb{II}\left(\gamma^{'}, \gamma^{'}\right) = \mathcal{D}_{\gamma'} \gamma^{'} = \left\{\lambda \cosh^2\theta + \left(c-\lambda\right)\sinh^2\theta\right\}\xi \tag{4.22}$$

$$\mathbb{II}\left(Y, Y\right) = \mathcal{D}_Y Y = \left\{\lambda \sinh^2\theta + \left(c-\lambda\right)\cosh^2\theta\right\}\xi$$

(4.21) ve (4.22) denklemlerinden,

$$\kappa = \lambda\cosh^2\theta + \left(c-\lambda\right)\sinh^2\theta$$

elde edilir. Şimdi ise (4.21) denkleminin $\gamma^{'}$ ye göre türevini alırsak, $\mathcal{M}$ nin umbilik noktası olmadığından

$$\nabla_{\gamma'}\left(\lambda\cosh^2\theta + \left(c-\lambda\right)\sinh^2\theta\right)\xi = 0.$$

Buradan

$$\nabla_{\gamma'}\left(\lambda\cosh^2\theta + \left(c-\lambda\right)\sinh^2\theta\right) = 0$$

olduğundan

$$(2\lambda\cosh\theta\sinh\theta + 2\left(c-\lambda\right)\sinh\theta\cosh\theta)\nabla_{\gamma'}\theta = 0$$

dir. Ayrıca

$$2\lambda \cosh\theta \sinh\theta + 2\left(c-\lambda\right)\sinh\theta\cosh\theta \neq 0$$

olduğundan

$$\nabla_{\gamma'}\theta$$

bulunur. Burada $\nabla_{E_1}E_1 = \alpha E_2$, $\nabla_{E_2}E_2 = -\beta E_1$, ve $\nabla_{E_1}E_2 = \alpha E_1$, $\nabla_{E_2}E_1 = -\beta E_2$ olduğu açıktır. Ayrıca γ geodezik olduğundan

$$\nabla_{\gamma'}\gamma^{'} = 0$$

dır. $\gamma^{'}$ yerine konulursa

$$\alpha\cosh\theta - \beta\sinh\theta = 0 \tag{4.23}$$

elde edilir. Öte yandan

$$\mathcal{S}(\,[E_1,E_2]) = \nabla_{E_1}\mathcal{S}\left(E_2\right) - \nabla_{E_2}\mathcal{S}\left(E_1\right)$$

Codazzi denklemi kullanılırsa

$$\nabla_{E_1}\lambda = -\beta c \quad \text{ve} \quad \nabla_{E_2}\lambda = -\alpha c \tag{4.24}$$

bulunur. Burada $D_{\gamma'}\left(\lambda\xi\right)$ nin normal kısmı sıfır olduğundan ve (4.24) denkleminden,

$$\begin{aligned} \nabla_{\gamma'}\left(\lambda\xi\right) &= 0 \\ (\nabla_{\gamma'}\lambda)\xi + \lambda\nabla_{\gamma'}\xi &= 0 \\ \nabla_{\gamma'}\xi &\neq 0 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\nabla_{\gamma'}\lambda = 0$$

dır. Son ifadede tüm bilinenler yerine yazılırsa

$$\alpha\sinh\theta + \beta\cosh\theta = 0 \tag{4.25}$$

elde edilir.Böylece (4.23) ve (4.25) denklemlerinden, γ boyunca $\alpha = \beta = 0$ olduğu görülür. Bunun anlamı $\mathcal{M}$ üzerindeki tüm doğruların $\mathcal{M}$ nin geodeziği olduğudur. Ayrıca burada $\mathcal{M}$ üzerindeki her yerde iki geodezik ailenin arakesiti sabittir. O halde $\mathcal{M}$ Lorentz düzlemidir ve burada $\mathcal{M}$, λ ve $c-\lambda$ eğriliklerine sahiptir. Dolayısıyla $\mathcal{M}$ ya Lorentz düzlemidir, ya da Lorentz silindirlerinden biridir. Ancak başlangıçta $\mathcal{M}$ nin umbilik noktaları yok kabul edilmişti. O halde $\mathcal{M}$, Lorentz silindirlerinden biridir.

3.2.Durum . E_2, ξ spacelike, E_1 timelike olsun. θ, γ' ile E_1 arasındaki açı olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
\gamma' &= \cosh\theta E_1 + \sinh\theta E_2 \\
Y &= \sinh\theta E_1 + \cosh\theta E_2.
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Ayrıca burada

$$\mathcal{S}(E_1) = -\lambda E_1 \quad , \quad \mathcal{S}(E_2) = (c-\lambda) E_2$$

ve $\varepsilon = \langle \xi, \xi \rangle \pm 1$ olduğu göz önüne alınarak,

$$\mathbb{II}(E_1, E_1) = \varepsilon \langle \mathcal{S}(E_1, E_1) \rangle \xi = \langle -\lambda E_1, E_1 \rangle \xi$$

dir. O halde

$$\mathbb{II}(E_1, E_1) = \mathcal{D}_{E_1} E_1 = \lambda \xi$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\mathbb{II}(E_2, E_2) = \varepsilon \langle \mathcal{S}(E_2, E_2) \rangle \xi = \langle -(c-\lambda) E_2, E_2 \rangle \xi$$

dir. Ohalde

$$\mathbb{II}(E_2, E_2) = \mathcal{D}_{E_2} E_2 = (c-\lambda)\xi$$

elde edilir. γ geodezik olduğunda

$$\mathbb{II}\left(\gamma^{'},\gamma^{'}\right)=\mathcal{D}_{\gamma^{'}}\gamma^{'}$$

olduğu açıktır.

$$\begin{array}{rcccl} \mathbb{II}\left(\gamma^{'},\gamma^{'}\right) & = & \mathcal{D}_{\gamma^{'}}\gamma^{'} & = & \left\{\lambda\cosh^{2}\theta+(c-\lambda)\sinh^{2}\theta\right\}\xi \\ \mathbb{II}\left(Y,Y\right) & = & \mathcal{D}_{Y}Y & = & \left\{\lambda\sinh^{2}\theta+(c-\lambda)\cosh^{2}\theta\right\}\xi \end{array} \tag{4.26}$$

(4.21) ve (4.26) denklemlerinden

$$\kappa=\lambda\cosh^{2}\theta+(c-\lambda)\sinh^{2}\theta$$

elde edilir. Şimdi ise (4.26) denkleminin $\gamma^{'}$ ye göre türevini alırsak, $\mathcal{M}$ nin umbilik noktası olmadığından,

$$\nabla_{\gamma^{'}}\left(\lambda\cosh^{2}\theta+(c-\lambda)\sinh^{2}\theta\right)\xi=0.$$

Buradan

$$\nabla_{\gamma^{'}}\left(\lambda\cosh^{2}\theta+(c-\lambda)\sinh^{2}\theta\right)=0$$

olduğunda

$$(2\lambda\cosh\theta\sinh\theta+2\left(c-\lambda\right)\sinh\theta\cosh\theta)\nabla_{\gamma^{'}}\theta=0$$

dir. Ayrıca

$$2\lambda\cosh\theta\sinh\theta+2\left(c-\lambda\right)\sinh\theta\cosh\theta\neq 0$$

olduğundan

$$\nabla_{\gamma^{'}}\theta=0$$

elde edilir.

Burada $\nabla_{E_1}E_1=\alpha E_2$, $\nabla_{E_2}E_2=-\beta E_1$, ve $\nabla_{E_1}E_2=\alpha E_1$, $\nabla_{E_2}E_1=-\beta E_2$ olduğu açıktır. Ayrıca γ geodezik olduğundan

$$\nabla_{\gamma^{'}}\gamma^{'}=0$$

dır. γ' yerine konulursa

$$\alpha \cosh\theta - \beta \sinh\theta = 0 \tag{4.27}$$

elde edilir. Öte yandan

$$\mathcal{S}\left[E_1, E_2\right] = \nabla_{E_1}\mathcal{S}\left(E_2\right) - \nabla_{E_2}\mathcal{S}\left(E_1\right)$$

Codazzi denklemi kullanılırsa

$$\nabla_{E_1}\lambda = -\beta c \quad \text{ve} \quad \nabla_{E_2}\lambda = -\alpha c \tag{4.28}$$

bulunur. Burada $D_{\gamma'}\left(\lambda\xi\right)$ nin normal kısmı sıfır olduğundan ve (4.28) denkleminden,

$$\begin{aligned} \nabla_{\gamma'}\left(\lambda\xi\right) &= 0 \\ (\nabla_{\gamma'}\lambda)\xi + \lambda\nabla_{\gamma'}\xi &= 0 \\ \nabla_{\gamma'}\xi &\neq 0 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\nabla_{\gamma'}\lambda = 0$$

Son ifadede tüm bilinenler yerine yazılırsa

$$\alpha \sinh\theta + \beta \cosh\theta = 0 \tag{4.29}$$

elde edilir.Böylece (4.27) ve (4.29) denklemlerinden,γ boyunca $\alpha = \beta = 0$ olduğu görülür. Bunun anlamı $\mathcal{M}$ üzerindeki tüm doğruların $\mathcal{M}$ nin geodeziği olduğudur. Ayrıca burada $\mathcal{M}$ üzerindeki her yerde iki geodezik ailenin arakesiti sabittir. O halde $\mathcal{M}$ Lorentz düzlemidir ve burada $\mathcal{M}$, λ ve $c-\lambda$ eğriliklerine sahiptir. Dolayısıyla $\mathcal{M}$ ya Lorentz düzlemidir, ya da Lorentz silindirlerinden biridir. Ancak başlangıçta $\mathcal{M}$ nin umbilik noktaları yok kabul edilmişti. O halde $\mathcal{M}$, Lorentz silindirlerinden biridir.

$\mathbb{E}^3_1$ Lorentz uzayında $\mathcal{M}$ üzerindeki helical geodezikleri içeren yüzeyler ile ilgili bir diğer karakterizasyon aşağıdaki gibidir.

Teorem 4.2. $\mathcal{M}$, $\mathbb{E}_1^3$ Lorentz uzayında sabit ortalama eğrilikli tam diferansiyellenebilir bir yüzey olsun. Eğer $\mathcal{M}$ nin herbir noktasından geçen iki helical geeodezik varsa, o zaman $\mathcal{M}$, ya pseudo-küre, ya pseudo-hiperbolik uzay, ya Lorentz düzlemi ya da Lorentz silindirlerinden biridir.

İspat. Burada γ eğrisi için iki farklı durum söz konusudur:

1.Durum. γ, $\mathcal{M}$ üzerinde bir spacelike helical geodezik olsun. O halde aşağıdaki durumlar vardır:

1.1.Durum. $\kappa \neq 0$ ve $\tau \neq 0$ olsun. Bu durumda, (4.1) ve (4.14) de $X = \xi$ alınabilir. Çünkü $\mathcal{D}_{\gamma'}\gamma' = \mathbb{II}\left(\gamma', \gamma'\right)$, $\mathcal{M}$ ye normaldir.Bu durumda,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\gamma'}\xi &= -\kappa\gamma' + \tau Y \quad \text{ve} \quad \mathcal{D}_{\gamma'}Y = \tau\xi. \\ &\text{veya} \\ \mathcal{D}_{\gamma'}\xi &= \kappa\gamma' + \tau Y \quad \text{ve} \quad \mathcal{D}_{\gamma'}Y = -\tau\xi. \end{aligned}$$

olacaktır.

1.2.Durum. $\kappa \neq 0$ ve $\tau = 0$. Burada (4.1) ve (4.14) de $X = \xi$ alınırsa,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\gamma'}\xi &= -\kappa\gamma' \\ &\text{veya} \\ \mathcal{D}_{\gamma'}\xi &= \kappa\gamma' \end{aligned}$$

olacaktır.

1.3.Durum. $\kappa = 0$. olsun. O halde Gauss denkleminden,

$$\mathbb{II}\left(\gamma', \gamma'\right) = 0$$

elde edilir.

2.Durum. γ, $\mathcal{M}$ üzerinde bir timelike helical geodezik olsun. O halde aşağıdaki durumlar vardır:

2.1.Durum. $\kappa \neq 0$ ve $\tau \neq 0$ olsun. Bu durumda, (4.20) de $X = \xi$ alınabilir.

Çünkü $\mathcal{D}_{\gamma'}\gamma' = \mathbb{III}\left(\gamma', \gamma'\right)$, $\mathcal{M}$ ye normaldir.Bu durumda,

$$\mathcal{D}_{\gamma'}\xi \;=\; \kappa\gamma' + \tau Y \quad \text{ve} \quad \mathcal{D}_{\gamma'}Y \;=\; -\tau\xi.$$

olacaktır.

2.2.Durum. $\kappa \neq 0$ ve $\tau = 0$. Burada (4.20) de $X = \xi$ alınırsa,

$$\mathcal{D}_{\gamma'}\xi \;=\; -\kappa\gamma'$$

olacaktır.

2.3.Durum. $\kappa = 0$. olsun. O halde (4.20) deki Gauss denkleminden,

$$\mathbb{III}\left(\gamma', \gamma'\right) = 0$$

elde edilir.

γ_1 ve γ_2, $\mathcal{M}$ üzerinde $p \in \mathcal{M}$ noktasından geçen spacelike veya timelike helical geodezikler olsunlar. O halde yukarıdaki 1.1 - 2.3 durumları göz önüne alındığında aşağıdaki olasılıklar söz konusudur:

(i) γ_1 ve γ_2 doğru,
(ii) γ_1 ve γ_2 Lorentz çemberi,
(iii) γ_1 ve γ_2 helis,
(iv) γ_1 doğru, γ_2 Lorentz çemberi,
(v) γ_1 doğru, γ_2 helis,
(vi) γ_1 Lorentz çemberi, γ_2 helis.

İlk olarak, kabul edelim ki $\mathcal{K}$ Gauss eğriliği en azından bir noktada pozitif ve

$$\mathcal{M}_1 = \{p \in \mathcal{M} : \mathcal{K}(p) > 0\}$$

olsun. O halde $\mathcal{M}_1$, $(ii), (iii), (vi)$ tiplerinden biridir. $\mathcal{M}_{11}$ ise $\mathcal{M}_1$ in tüm umbilik noktalarının kümesi ve,

$$\mathcal{M}_{12} = \mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_{11}$$

olsun. Eğer $\mathcal{M}_{12} \neq \varnothing$ ise o halde Teorem 4.1 den $\mathcal{M}_{12}$ üzerinde $\mathcal{K} = 0$ dir. Bu ise $\mathcal{M}_{12}$ üzerinde $\mathcal{K} > 0$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $\mathcal{M}_1$, total umbiliktir. Böylece $\mathcal{M}_1$ pseudo-küredir. O halde $\mathcal{M}$ pseudo-küredir.

Şimdi ise kabul edelim ki $\mathcal{M}$ üzerinde $\mathcal{K} \leq 0$ olsun. Ve

$$\mathcal{M}_2 = \{p \in \mathcal{M} : \mathcal{K}(p) < 0\}$$

O halde $\mathcal{M}_2$, $(ii), (iii), (vi)$ tiplerinden biridir. $\mathcal{M}_{22}$, $\mathcal{M}_2$ nin tüm umbilik noktalarının bir kümesi ve $\mathcal{M}_{23} = \mathcal{M}_2 - \mathcal{M}_{22}$ olsun. Eğer $\mathcal{M}_{23} \neq \varnothing$ ise o halde Teorem 4.1 den bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $\mathcal{M}_2$ total umbiliktir. Böylece $\mathcal{M}_{22}$ pseudo hiperbolik uzaydır, yani $\mathcal{M}$ pseudo hiperbolik uzaydır.

Son olarak ise $\mathcal{K}$ Gauss eğriliği en azından bir noktada sıfır ve

$$\mathcal{M}_2 = \{p \in \mathcal{M} : \mathcal{K}(p) = 0\}$$

olsun. Burada ise $\mathcal{M}$ ya Lorentz düzlemidir ya da Lorentz silindirlerinden biridir.

5. $\mathcal{M}_1^3(\mathcal{C})$ LORENTZ UZAY FORMLARINDA HELİCAL GEODEZİKLERİ İÇEREN YÜZEYLER

Bu bölümde, Lorentz uzay formlarında sabit ortalama eğrilikli yüzeyler, helical eğriler ve geodezikler çalışıldı. Ayrıca, $\mathcal{M}_1^3(\mathcal{C})$ Lorentz uzay formlarında helical geodezikleri içeren yüzeyler ile ilgili bazı sınıflandırmalar elde edildi.

$\mathcal{M}_1^3(\mathcal{C})$, $\mathcal{C}$ eğrilikli, 3-boyutlu Lorentz uzay formlarında bir helical eğri, eğriliği ve torsiyon sabit olan eğridir. Bir eğrinin, eğer eğriliği sabit, torsiyonu sıfır ise bu eğri bir Riemann veya Lorentz çemberine, eğrilikte sıfır ise bu eğri bir geodeziğe indirgenir.
" 3-küre üzerinde helical geodezikleri içeren yüzeyler" adlı çalışmayı incelediğimizde, $\mathbb{S}^3$ deki bir $\mathcal{M}$ yüzeyi üzerindeki herbir noktadan geçen iki helical geodezik var ise bu durumda $\mathcal{M}$ nin ya büyük küre, ya küçük küre ya da Hopf toru olduğu belirtilmiş idi.

$\mathcal{M}_1^3(\mathcal{C})$ de $\mathcal{M}$ yüzeyi üzerindeki bir helical geodezik, $\mathcal{M}_1^3(\mathcal{C})$ Lorentz uzay formlarında bir eğri olarak helical, $\mathcal{M}$ yüzeyi üzerinde ise geodezik olan bir eğridir.
Bu çalışmada $\mathcal{M}_1^3(\mathcal{C})$ deki tüm yüzeyler diferansiyellenebilir ve bağlantılı olarak kabul edildi.

Şimdi ise Lorentz uzay formlarında sabit ortalama eğrilikli yüzeyleri sınıflandırmak için bazı teoremler verilecektir.

Teorem 5.1. $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_1^3(\mathcal{C})$ de sabit ortalama eğrilikli tam bir yüzey olsun. Eğer $\mathcal{M}$ nin umbilik noktası yok ise o zaman eğrilikleri sıfırdan farklı olan ve $\mathcal{M}$ nin herbir noktasından geçen iki helical geodezik vardır. O zaman $\mathcal{M}$, Lorentz silindirlerinden biridir.

Burada $\mathcal{M}_1^3(\mathcal{C})$ deki Lorentz silindiri, $\mathbb{S}_1^3$ de Lorentz benzeri bir Hopf toru, $\mathbb{H}_1^3$ de ise Lorentz benzeri boru (tubes) anlamındadır.

İspat. Bu teoremin ispatı 4. Bölümdeki teorem 4.1 in ispatı ile aynı formdadır.

Lemma 5.2. $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_1^3(\mathcal{C})$ de sabit ortalama eğrilikli bir yüzey olsun ve $\mathcal{U}$, $\mathcal{M}$ de bir açık küme olsun. $\mathcal{U}$ üzerinde iki asimptotik eğri ailesi (bunlar ambient uzayda geodezik) olsun. Bu durumda $\mathcal{U}$ ya total geodeziktir ya $\mathbb{E}_1^3$ de Lorentz silidirinin açık bir kısmına kongrüenttir ya da $\mathbb{S}_1^3$ de Lorentz benzeri Hopf toru dur.

İspat. Eğer $\mathcal{U}$ total geodezik ise, o halde $\mathcal{U}$ üzerinde ambient geodezik olan iki asimptotik eğri ailesi vardır. Dolayıyla biz burada $\mathcal{U}$ nun total geodezik olmama durumunu incelenecektir.

α_1 ve α_2, $\mathcal{U}$ üzerinde $p \in \mathcal{U}$ noktasından geçen asimptotik eğriler aynı zamanda $\mathcal{M}_1^3(\mathcal{C})$ de geodezik olsun.
λ ve $2\mathcal{H} - \lambda$, $\mathcal{M}$ üzerinde E_1, E_2 asli vektör alanlarına karşılık gelen asli eğrilikler olsun. Burada $\mathcal{M}$ nin ortalama eğriliği $\mathcal{H}$, kabul ettiğimiz gibi sabittir. θ, E_1 ile α_1' arasındaki açı olmak üzere,

$$\begin{aligned} \alpha_1' &= \cosh\theta E_1 + \sinh\theta E_2 \\ \alpha_2' &= \cosh\theta E_1 + \sinh\theta E_2 \end{aligned}$$

şeklindedir ve burada α_1' ve α_2' sırasıyla α_1 ve α_2 nin birim tanjant vektör alanlarıdır.

1. Durum. γ', X spacelike, Y timelike olsun.

1.1. Durum. E_1, ξ spacelike, E_2 timelike olsun.
Bu durumda $\nabla_{E_1}E_1 = \alpha E_2$, $\nabla_{E_2}E_2 = -\beta E_1$, ve $\nabla_{E_1}E_2 = \alpha E_1$, $\nabla_{E_2}E_1 = -\beta E_2$ olduğu açıktır. Codazzi denklemi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \nabla_{E_1}\lambda &= -2\beta\mathcal{H} \\ \nabla_{E_2}\lambda &= -2\alpha\mathcal{H} \end{aligned} \tag{5.1}$$

ve

$$\begin{aligned} \nabla_{E_1}(2\mathcal{H} - \lambda) &= 2\beta\mathcal{H} \\ \nabla_{E_2}(2\mathcal{H} - \lambda) &= 2\alpha\mathcal{H} \end{aligned} \tag{5.2}$$

bulunur. Aynı zamanda α_1 ve α_2 eğrileri $\mathcal{M}$ üzerinde geodezik olduklarından

$$\mathcal{D}_{\alpha_1{}'}\alpha_1^{'} = 0 \qquad \text{ve} \qquad \mathcal{D}_{\alpha_2^{'}}\alpha_2^{'} = 0$$

dir. Burada $\alpha_1^{'}$ ve $\alpha_2^{'}$ değerleri yerine yazılıp gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\lambda \cosh^2\theta + (2\mathcal{H} - \lambda)\sinh^2\theta = 0 \tag{5.3}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\nabla_{\alpha_1^{'}}\left\{\lambda \cosh^2\theta + (2\mathcal{H} - \lambda)\sinh^2\theta\right\} = 0$$

olduğundan dolayı

$$\nabla_{\alpha_1^{'}}\theta = 0$$

bulunur. Benzer hesaplamalar $\alpha_2^{'}$ için yapılırsa

$$\nabla_{\alpha_2^{'}}\theta = 0$$

elde edilir. Aynı zamanda

$$\nabla_{\alpha_1^{'}}\alpha_1^{'} = 0 \quad \text{ve} \quad \nabla_{\alpha_2^{'}}\alpha_2^{'} = 0$$

şeklindedir. $\alpha_1^{'}$ ve $\alpha_2^{'}$ değerleri yerine yazılırsa

$$\alpha\cosh\theta - \beta\sinh\theta = 0$$

bulunur. Dolayısyla α_1 ve α_2 asimptotik eğrileri $\mathcal{M}$ üzerinde geodezik olduklarından

$$\nabla_{\alpha_1^{'}}\theta \;+\; \alpha\cosh\theta - \beta\sinh\theta \;=\; 0 \tag{5.4}$$

$$\nabla_{\alpha_2^{'}}\theta \;+\; \alpha\cosh\theta - \beta\sinh\theta \;=\; 0 \tag{5.5}$$

eşitlikleri elde edilir.

Şimdi (5.3) ifadesinin α_1' ye ve α_2' ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\nabla_{\alpha_1'}\left(\lambda\cosh^2\theta+(2\mathcal{H}-\lambda)\sinh^2\theta\right) &= 0\\
\nabla_{\alpha_2'}\left(\lambda\cosh^2\theta+(2\mathcal{H}-\lambda)\sinh^2\theta\right) &= 0
\end{aligned}$$

bulunur. Sırasıyla (5.1) ve (5.2) eşitlikleri kullanılarak bu türevler alınırsa

$$\alpha\sinh\theta\left(\sinh^2\theta-3\cosh^2\theta\right) - \beta\cosh\theta\left(\cosh^2\theta-3\sinh^2\theta\right) = 0$$

ifadesi bulunur. Buradan α veya β sıfırdır. Bu durumda $\sinh^2\theta = 3\cosh^2\theta$ veya $\cosh^2\theta = 3\sinh^2\theta$ dır. Burada (5.1), (5.2) ve (5.3) denklemleri doğruların $\mathcal{U}$ üzerinde geodezik olduğunu gösterir. Ayrıca iki geodezik ailenin arakesiti $\mathcal{U}$ üzerinde sabit açı yaptığından, $\mathcal{U}$ Lorentz düzlemidir. Buna göre $\det\mathcal{S}=-\mathcal{C}$ dir. Böylece $\det\mathcal{S}=-\mathcal{C}$ olduğundan $\mathcal{C}\geq 0$ dır.

1.2. Durum. E_2, ξ spacelike, E_1 timelike olsun.

Bu durumda $\nabla_{E_1}E_1=\alpha E_2$, $\nabla_{E_2}E_2=-\beta E_1$, ve $\nabla_{E_1}E_2=\alpha E_1$, $\nabla_{E_2}E_1=-\beta E_2$ olduğu açıktır. Codazzi denklemi kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\nabla_{E_1}\lambda &= -2\beta\mathcal{H}\\
\nabla_{E_2}\lambda &= -2\alpha\mathcal{H}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

ve

$$\begin{aligned}
\nabla_{E_1}(2\mathcal{H}-\lambda) &= 2\beta\mathcal{H}\\
\nabla_{E_2}(2\mathcal{H}-\lambda) &= 2\alpha\mathcal{H}
\end{aligned} \tag{5.7}$$

bulunur. Aynı zamanda α_1 ve α_2 eğrileri $\mathcal{M}$ üzerinde geodezik olduklarından,

$$\mathcal{D}_{\alpha_1'}\alpha_1'=0 \quad \text{ve} \quad \mathcal{D}_{\alpha_2'}\alpha_2'=0$$

dir. Burada α_1' ve α_2' değerleri yerine yazılıp gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$\lambda\cosh^2\theta+(2\mathcal{H}-\lambda)\sinh^2\theta=0 \tag{5.8}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\nabla_{\alpha_1'}\left\{\lambda\cosh^2\theta+(2\mathcal{H}-\lambda)\sinh^2\theta\right\}=0$$

olduğundan dolayı

$$\nabla_{\alpha_1'}\theta=0$$

bulunur. Benzer hesaplamalar α_2' için yapılırsa,

$$\nabla_{\alpha_2'}\theta=0$$

elde edilir. Aynı zamanda

$$\nabla_{\alpha_1'}\alpha_1'=0 \quad \text{ve} \quad \nabla_{\alpha_2'}\alpha_2'=0$$

olduğu açıkıtr. α_1' ve α_2' değerleri yerine yazılırsa,

$$\alpha\cosh\theta-\beta\sinh\theta=0$$

bulunur. Dolayısıyla α_1 ve α_2 asimptotik eğrileri $\mathcal{M}$ üzerinde geodezik olduklarından

$$\nabla_{\alpha_1'}\theta \;+\; \alpha\cosh\theta-\beta\sinh\theta \;=\; 0 \tag{5.9}$$

$$\nabla_{\alpha_2'}\theta \;+\; \alpha\cosh\theta-\beta\sinh\theta \;=\; 0 \tag{5.10}$$

eşitlikleri elde edilir.

Şimdi (5.8) ifadesinin α_1' ye ve α_2' ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\nabla_{\alpha_1'}\left(\lambda\cosh^2\theta+(2\mathcal{H}-\lambda)\sinh^2\theta\right) &= 0\\ \nabla_{\alpha_2'}\left(\lambda\cosh^2\theta+(2\mathcal{H}-\lambda)\sinh^2\theta\right) &= 0\end{aligned}$$

bulunur. Sırasıyla (5.6) ve (5.7) eşitlikleri kullanılarak bu türevler alınırsa

$$\alpha\sinh\theta\left(\sinh^2\theta-3\cosh^2\theta\right) \;-\; \beta\cosh\theta\left(\cosh^2\theta-3\sinh^2\theta\right) \;=\; 0$$

ifadesi bulunur. Buradan α veya β sıfırdır. Bu durumda $\sinh^2\theta = 3\cosh^2\theta$ veya $\cosh^2\theta = 3\sinh^2\theta$ dır. Burada (5.6), (5.7) ve (5.8) denklemleri doğruların $\mathcal{U}$ üzerinde geodezik olduğunu gösterir. Ayrıca iki geodezik ailenin arakesiti $\mathcal{U}$ üzerinde sabit açı yaptığından, $\mathcal{U}$ Lorentz düzlemidir. Buna göre $\det\mathcal{S} = -\mathcal{C}$ dir. Böylece $\det\mathcal{S} = -\mathcal{C}$ olduğundan $\mathcal{C} \geq 0$ dır.

2. Durum. γ', Y, E_1, E_2 spacelike, X, ξ timelike olsun.
Bu durumda $\nabla_{E_1}E_1 = \alpha E_2$, $\nabla_{E_2}E_2 = -\beta E_1$, ve $\nabla_{E_1}E_2 = -\alpha E_1$, $\nabla_{E_2}E_1 = \beta E_2$ olduğu açıktır. Codazzi denklemi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \nabla_{E_1}\lambda &= -2\beta\,(\lambda - \mathcal{H}) \\ \nabla_{E_2}\lambda &= 2\alpha\,(\lambda - \mathcal{H}) \end{aligned} \tag{5.11}$$

ve

$$\begin{aligned} \nabla_{E_1}(2\mathcal{H} - \lambda) &= 2\beta\,(\lambda - \mathcal{H}) \\ \nabla_{E_2}(2\mathcal{H} - \lambda) &= -2\alpha\,(\lambda - \mathcal{H}) \end{aligned} \tag{5.12}$$

bulunur. Aynı zamanda α_1 ve α_2 eğrileri $\mathcal{M}$ üzerinde geodezik olduklarından

$$\mathcal{D}_{\alpha_1{}'}\alpha_{1'} = 0 \qquad \text{ve} \qquad \mathcal{D}_{\alpha_2{}'}\alpha_{2'} = 0$$

dir. Burada α_1' ve α_2' değerleri yerine yazılıp gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\lambda\cosh^2\theta + (2\mathcal{H} - \lambda)\sinh^2\theta = 0 \tag{5.13}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\nabla_{\alpha_1'}\left\{\lambda\cosh^2\theta + (2\mathcal{H} - \lambda)\sinh^2\theta\right\} = 0$$

olduğundan dolayı

$$\nabla_{\alpha_1'}\theta = 0$$

bulunur. Benzer hesaplamalar α_2' için yapılırsa

$$\nabla_{\alpha_2'}\theta = 0$$

elde edilir. Aynı zamanda

$$\nabla_{\alpha_1'}\alpha_1' = 0 \quad \text{ve} \quad \nabla_{\alpha_2'}\alpha_2' = 0$$

olduğunu biliyoruz. α_1' ve α_2' değerleri yerine yazılırsa

$$\alpha\cosh\theta + \beta\sinh\theta = 0$$

bulunur. Dolayısıyla α_1 ve α_2 asimptotik eğrileri $\mathcal{M}$ üzerinde geodezik olduklarından

$$\nabla_{\alpha_1'}\theta \;+\; \alpha\cosh\theta + \beta\sinh\theta \;=\; 0 \tag{5.14}$$

$$\nabla_{\alpha_2'}\theta \;+\; \alpha\cosh\theta + \beta\sinh\theta \;=\; 0 \tag{5.15}$$

eşitlikleri elde edilir.

Şimdi (5.13) ifadesinin α_1' ye ve α_2' ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\nabla_{\alpha_1'}\left(\lambda\cosh^2\theta + (2\mathcal{H}-\lambda)\sinh^2\theta\right) &= 0\\
\nabla_{\alpha_2'}\left(\lambda\cosh^2\theta + (2\mathcal{H}-\lambda)\sinh^2\theta\right) &= 0
\end{aligned}$$

bulunur. Sırasıyla (5.11) ve (5.12) eşitlikleri kullanılarak bu türevler alınırsa

$$\alpha\sinh\theta\left(\sinh^2\theta - 3\cosh^2\theta\right) \;+\; \beta\cosh\theta\left(\cosh^2\theta - 3\sinh^2\theta\right) \;= 0$$

ifadesi bulunur. Buradan α veya β sıfırdır. Bu durumda $\sinh^2\theta = 3\cosh^2\theta$ veya $\cosh^2\theta = 3\sinh^2\theta$ dır. Burada (5.11), (5.12) ve (5.13) denklemleri doğruların $\mathcal{U}$ üzerinde geodezik olduğunu gösterir. Ayrıca iki geodezik ailenin arakesiti $\mathcal{U}$ üzerinde sabit açı yaptığından, $\mathcal{U}$ Lorentz düzlemidir. Buna göre $\det\mathcal{S} = -\mathcal{C}$ dir. Böylece $\det\mathcal{S} = -\mathcal{C}$ olduğundan $\mathcal{C} \geq 0$ dır.

3. Durum. γ', X spacelike, Y timelike olsun.

3.1. Durum. E_1, ξ spacelike, E_2 timelike olsun.

Bu durumda $\nabla_{E_1}E_1 = \alpha E_2$, $\nabla_{E_2}E_2 = -\beta E_1$, ve $\nabla_{E_1}E_2 = \alpha E_1$, $\nabla_{E_2}E_1 = -\beta E_2$

olduğu açıktır. Codazzi denklemi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \nabla_{E_1}\lambda &= -2\beta\mathcal{H} \\ \nabla_{E_2}\lambda &= -2\alpha\mathcal{H} \end{aligned} \tag{5.16}$$

ve

$$\begin{aligned} \nabla_{E_1}(2\mathcal{H}-\lambda) &= 2\beta\mathcal{H} \\ \nabla_{E_2}(2\mathcal{H}-\lambda) &= 2\alpha\mathcal{H} \end{aligned} \tag{5.17}$$

bulunur. Aynı zamanda α_1 ve α_2 eğrileri $\mathcal{M}$ üzerinde geodezik olduklarından

$$\mathcal{D}_{\alpha_{1'}}\alpha_{1'} = 0 \quad \text{ve} \quad \mathcal{D}_{\alpha_2'}\alpha_{2'} = 0$$

dir. Burada $\alpha_1^{'}$ ve $\alpha_2^{'}$ değerleri yerine yazılıp gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\lambda\cosh^2\theta + (2\mathcal{H}-\lambda)\sinh^2\theta = 0 \tag{5.18}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\nabla_{\alpha_1'}\left\{\lambda\cosh^2\theta + (2\mathcal{H}-\lambda)\sinh^2\theta\right\} = 0$$

olduğundan dolayı

$$\nabla_{\alpha_1'}\theta = 0$$

bulunur. Benzer hesaplamalar $\alpha_2^{'}$ için yapılırsa

$$\nabla_{\alpha_2'}\theta = 0$$

elde edilir. Aynı zamanda

$$\nabla_{\alpha_1'}\alpha_1^{'} = 0 \quad \text{ve} \quad \nabla_{\alpha_2'}\alpha_2^{'} = 0$$

olduğunu biliyoruz. $\alpha_1^{'}$ ve $\alpha_2^{'}$ değerleri yerine yazılırsa

$$\alpha\cosh\theta - \beta\sinh\theta = 0$$

bulunur. Dolayısyla α_1 ve α_2 asimptotik eğrileri $\mathcal{M}$ üzerinde geodezik olduklarından

$$\nabla_{\alpha_1'}\theta + \alpha\cosh\theta - \beta\sinh\theta = 0 \tag{5.19}$$

$$\nabla_{\alpha_2'}\theta + \alpha\cosh\theta - \beta\sinh\theta = 0 \tag{5.20}$$

eşitlikleri elde edilir.

Şimdi (5.18) ifadesinin α_1' ye ve α_2' ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\nabla_{\alpha_1'}\left(\lambda\cosh^2\theta + (2\mathcal{H}-\lambda)\sinh^2\theta\right) &= 0\\ \nabla_{\alpha_2'}\left(\lambda\cosh^2\theta + (2\mathcal{H}-\lambda)\sinh^2\theta\right) &= 0\end{aligned}$$

bulunur. Sırasıyla (5.16) ve (5.17) eşitlikleri kullanılarak bu türevler alınırsa

$$\alpha\sinh\theta\left(\sinh^2\theta - 3\cosh^2\theta\right) - \beta\cosh\theta\left(\cosh^2\theta - 3\sinh^2\theta\right) = 0$$

ifadesi bulunur. Buradan α veya β sıfırdır. Bu durumda $\sinh^2\theta = 3\cosh^2\theta$ veya $\cosh^2\theta = 3\sinh^2\theta$ dır. Burada (5.16), (5.17) ve (5.18) denklemleri doğruların $\mathcal{U}$ üzerinde geodezik olduğunu gösterir. Ayrıca iki geodezik ailenin arakesiti $\mathcal{U}$ üzerinde sabit açı yaptığından, $\mathcal{U}$ Lorentz düzlemidir. Buna göre $\det\mathcal{S} = -\mathcal{C}$ dir. Böylece $\det\mathcal{S} = -\mathcal{C}$ olduğundan $\mathcal{C} \geq 0$ dır.

3.2. Durum. E_2, ξ spacelike, E_1 timelike olsun.
Bu durumda $\nabla_{E_1}E_1 = \alpha E_2$, $\nabla_{E_2}E_2 = -\beta E_1$, ve $\nabla_{E_1}E_2 = \alpha E_1$, $\nabla_{E_2}E_1 = -\beta E_2$ olduğu açıktır. Codazzi denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}\nabla_{E_1}\lambda &= 2\beta\mathcal{H}\\ \nabla_{E_2}\lambda &= 2\alpha\mathcal{H}\end{aligned} \tag{5.21}$$

ve

$$\begin{aligned}\nabla_{E_1}(2\mathcal{H}-\lambda) &= -2\beta\mathcal{H}\\ \nabla_{E_2}(2\mathcal{H}-\lambda) &= -2\alpha\mathcal{H}\end{aligned} \tag{5.22}$$

bulunur. Aynı zamanda α_1 ve α_2 eğrileri $\mathcal{M}$ üzerinde geodezik olduklarından

$$\mathcal{D}_{\alpha_1'}\alpha_1' = 0 \quad \text{ve} \quad \mathcal{D}_{\alpha_2'}\alpha_2' = 0$$

dir. Burada $\alpha_1^{'}$ ve $\alpha_2^{'}$ değerleri yerine yazılıp gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\lambda \cosh^2 \theta + (2\mathcal{H} - \lambda) \sinh^2 \theta = 0 \tag{5.23}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\nabla_{\alpha_1^{'}} \left\{ \lambda \cosh^2 \theta + (2\mathcal{H} - \lambda) \sinh^2 \theta \right\} = 0$$

olduğundan dolayı

$$\nabla_{\alpha_1^{'}} \theta = 0$$

bulunur. Benzer hesaplamalar $\alpha_2^{'}$ için yapılırsa

$$\nabla_{\alpha_2^{'}} \theta = 0$$

elde edilir. Aynı zamanda

$$\nabla_{\alpha_1^{'}} \alpha_1^{'} = 0 \quad \text{ve} \quad \nabla_{\alpha_2^{'}} \alpha_2^{'} = 0$$

olduğunu biliyoruz. $\alpha_1^{'}$ ve $\alpha_2^{'}$ değerleri yerine yazılırsa

$$\alpha \cosh \theta - \beta \sinh \theta = 0$$

bulunur. Dolayısyla α_1 ve α_2 asimptotik eğrileri $\mathcal{M}$ üzerinde geodezik olduklarından

$$\nabla_{\alpha_1^{'}} \theta \quad + \quad \alpha \cosh \theta - \beta \sinh \theta \quad = \quad 0 \tag{5.24}$$

$$\nabla_{\alpha_2^{'}} \theta \quad + \quad \alpha \cosh \theta - \beta \sinh \theta \quad = \quad 0 \tag{5.25}$$

eşitlikleri elde edilir.

Şimdi (5.23) ifadesinin $\alpha_1^{'}$ ye ve $\alpha_2^{'}$ ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha_1^{'}} \left(\lambda \cosh^2 \theta + (2\mathcal{H} - \lambda) \sinh^2 \theta \right) &= 0 \\ \nabla_{\alpha_2^{'}} \left(\lambda \cosh^2 \theta + (2\mathcal{H} - \lambda) \sinh^2 \theta \right) &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Sırasıyla (5.21) ve (5.22) eşitlikleri kullanılarak bu türevler alınırsa

$$\alpha \sinh\theta\left(\sinh^2\theta - 3\cosh^2\theta\right) \quad - \quad \beta\cosh\theta\left(\cosh^2\theta - 3\sinh^2\theta\right) \quad = \quad 0$$

ifadesi bulunur. Buradan α veya β sıfırdır. Bu durumda $\sinh^2\theta = 3\cosh^2\theta$ veya $\cosh^2\theta = 3\sinh^2\theta$ dır. Burada (5.21), (5.22) ve (5.23) denklemleri doğruların $\mathcal{U}$ üzerinde geodezik olduğunu gösterir. Ayrıca iki geodezik ailenin arakesiti $\mathcal{U}$ üzerinde sabit açı yaptığından, $\mathcal{U}$ Lorentz düzlemidir. Buna göre $\det\mathcal{S} = -\mathcal{C}$ dir. Böylece $\det\mathcal{S} = -\mathcal{C}$ olduğundan $\mathcal{C} \geq 0$ dır.

Teorem 5.3. $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_1^3(\mathcal{C})$ de negatif olmayan eğrilikli, tam, sabit ortalama eğrilikli bir yüzey olsun. Eğer $\mathcal{M}$ üzerinde $\mathcal{M}$ nin herbir noktasından geçen iki helical geodezik var ise o halde $\mathcal{M}$, ya total geodezik bir yüzey, ya total umbilik bir yüzey, ya dairesel silindir ya da Lorentz benzeri Hopf toru dur.

İspat. $\mathcal{M}_1^3(\mathcal{C}) = \mathbb{E}_1^3$ olması durumunu 4. bölümde vermiştik. Şimdi ise $\mathcal{M}_1^3(\mathcal{C}) = \mathbb{S}_1^3$ olması durumu göz önüne alınırsa, γ eğrisi için iki farklı durum söz konusudur:

1.Durum. γ, $\mathcal{M}$ üzerinde bir spacelike helical geodezik olsun. O halde aşağıdaki durumlar vardır:

1.1.Durum. $\kappa \neq 0$ ve $\tau \neq 0$ olsun. Bu durumda, Serret-Frenet formüllerinde $X = \xi$ alınabilir. Çünkü $\mathcal{D}_{\gamma'}\gamma' = \mathbb{II}\left(\gamma', \gamma'\right)$, $\mathcal{M}$ ye normaldir.Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\gamma'}\xi &= -\kappa\gamma' + \tau Y \quad \text{ve} \quad \mathcal{D}_{\gamma'}Y = \tau\xi. \\ &\text{veya} \\ \mathcal{D}_{\gamma'}\xi &= -\kappa\gamma' + \tau Y \quad \text{ve} \quad \mathcal{D}_{\gamma'}Y = \tau\xi. \end{aligned}$$

olacaktır.

1.2.Durum. $\kappa \neq 0$ ve $\tau = 0$. Burada $X = \xi$ alınırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\gamma'}\xi &= -\kappa\gamma' \\ &\text{veya} \\ \mathcal{D}_{\gamma'}\xi &= -\kappa\gamma' \end{aligned}$$

olacaktır.

1.3.Durum. $\kappa = 0$. olsun. O halde Gauss denkleminden,

$$\mathbb{II}\left(\gamma', \gamma'\right) = 0$$

elde edilir.

2 Durum. γ, $\mathcal{M}$ üzerinde bir timelike helical geodezik olsun. O halde aşağıdaki durumlar vardır:

2.1.Durum. $\kappa \neq 0$ ve $\tau \neq 0$ olsun. Bu durumda, Serret-Frenet formüllerinde $X = \xi$ alınabilir. Çünkü $\mathcal{D}_{\gamma'}\gamma' = \mathbb{II}\left(\gamma', \gamma'\right)$, $\mathcal{M}$ ye normaldir.Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\gamma'}\xi &= -\kappa\gamma' + \tau Y \quad \text{ve} \quad \mathcal{D}_{\gamma'}Y = \tau\xi. \\ &\text{veya} \\ \mathcal{D}_{\gamma'}\xi &= \kappa\gamma' + \tau Y \quad \text{ve} \quad \mathcal{D}_{\gamma'}Y = -\tau\xi. \end{aligned}$$

olacaktır.

2.2.Durum. $\kappa \neq 0$ ve $\tau = 0$. Burada $X = \xi$ alınırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\gamma'}\xi &= -\kappa\gamma' \\ &\text{veya} \\ \mathcal{D}_{\gamma'}\xi &= \kappa\gamma' \end{aligned}$$

olacaktır.

2.3.Durum. $\kappa = 0$. olsun. O halde Gauss denkleminden,

$$\mathbb{II}\left(\gamma', \gamma'\right) = 0$$

elde edilir.

γ_1 ve γ_2, $\mathcal{M}$ üzerinde $p \in \mathcal{M}$ noktasından geçen spacelike veya timelike helical geodezikler olsunlar. O halde yukarıdaki 1.1 - 2.3 durumları göz önüne alındığında aşağıdaki olasılıklar söz konusudur:

(i)	γ_1 ve γ_2 ambient geodezik,
(ii)	γ_1 ve γ_2 Riemann çemberi veya Lorentz çemberi,
(iii)	γ_1 ve γ_2 uygun helis,
(iv)	γ_1 ambient geodezik, γ_2 Riemann veya Lorentz çemberi,
(v)	γ_1 ambient geodezik , γ_2 uygun helis,
(vi)	γ_1 Riemann veya Lorentz çemberi, γ_2 uygun helis.

İlk olarak, $\mathcal{K}$ Gauss eğriliği en azından bir noktada pozitif ve

$$\mathcal{M}_1 = \{p \in \mathcal{M} : \mathcal{K}_e(p) > 0\}$$

olsun. O halde $\mathcal{M}_1$, $(ii), (iii), (vi)$ tiplerinden biridir. $\mathcal{M}_{11}$ ise $\mathcal{M}_1$ in tüm umbilik noktalarının kümesi ve,

$$\mathcal{M}_{12} = \mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_{11}$$

olsun. Eğer $\mathcal{M}_{12} \neq \varnothing$ ise o halde Teorem 5.1 den $\mathcal{M}_{12}$ üzerinde $\mathcal{K}_e = 0$ dir. Bu ise $\mathcal{M}_{12}$ üzerinde $\mathcal{K}_e > 0$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $\mathcal{M}_1$, hem açık hem kapalı olduğundan $\mathcal{M}_1$, total umbilik bir yüzeydir.. Böylece $\mathcal{M}$, total umbilik bir yüzeydir.

Şimdi ise kabul edelim ki $\mathcal{M}$ üzerinde $\mathcal{K}_e \leq 0$ ve

$$\mathcal{M}_2 = \{p \in \mathcal{M} : \mathcal{K}_e(p) < 0\}$$

olsun. O halde $\mathcal{M}_2$, $(i) - (vi)$ tiplerinden biridir.$p \in \mathcal{M}$:

$$\mathcal{M}_{21} = \left\{ \begin{array}{l} \quad p \text{ noktasından geçen Riemann veya Lorentz çemberi} \\ \text{veya uygun helis var} \end{array} \right\}$$

ve $\mathcal{M}_{22} = \mathcal{M}_2 - \mathcal{M}_{21}$ olsun. O halde $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_{21} \cup \mathcal{M}_{22}$ dir ve $\mathcal{M}_2 = Cl\mathcal{M}_{21} \cup Int\mathcal{M}_{22}$ ve $\mathcal{M}_2 = Cl\mathcal{M}_{22} \cup Int\mathcal{M}_{21}$ olduğu açıktır. burada $\mathcal{A}$ kümesi için, $Cl\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ nın kapanışını, $Int\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ nın içini göstermektedir. Böylece $\mathcal{M}_{21}$ veya $\mathcal{M}_{22}$ iç noktalara sahiptir ya da $\mathcal{M}_{21}$ veya $\mathcal{M}_{22}$, $\mathcal{M}_2$ de yoğundur. Eğer $\mathcal{M}_{21} \neq \varnothing$ veya $\mathcal{M}_{21}$, $\mathcal{M}_2$ de yoğun ise Teorem 5.1 den $\mathcal{M}_2$ düzlemdir. Oysa bu bir çelişkidir. Bunun anlamı $\mathcal{M}_2$ üzerinde tüm asimptotik eğriler, ambient geodeziktirler. Böylece, $\mathcal{M}_2$ üzerinde $\mathcal{K} = 0$ dır. O halde $\mathcal{M}_2 = \{p \in \mathcal{M} : \mathcal{K}_e(p) = -1\}$ dir. Buradan $\mathcal{M}_2$ kapalıdır. Ayrıca $\mathcal{M}_2$ hem açık hem kapalı olduğundan $\mathcal{M}$ bir Lorentz düzlemdir. Dolayısıyla $\mathcal{M}$, Lorentz benzeri bir Hopf torudur. Çünkü $\mathcal{M}$, isoparametrik ve tam bir düzlemdir.

Şimdiye kadar $\mathcal{M}_1^3(\mathcal{C}) = \mathbb{S}_1^3$ de sabit ortalama eğrilikli yüzeyler ile ilgili sınıflandırmalar verildi. Burada $\nu = 2$ alınarak $\mathbb{S}_2^3$ için de yani $\mathbb{S}_2^3 \sim \mathbb{H}_1^3$ olduğundan $\mathbb{H}_1^3$ Lorentz uzay formu için de benzer sınıflandırmalar yapılabilir. $\mathbb{S}_1^3$ ve $\mathbb{H}_1^3$ ile ilgili bazı örnekler de aşağıdaki gibi verilebilir.

Örnek 5.4. ($\mathbb{S}_1^3$ de spacelike helisler) $\mathbb{S}_1^3$, 4-boyutlu birim küre olmak üzere,

$$\gamma(s) = (q\cos(s/k), q\sin(s/k), r\sinh(s/k), r\cosh(s/k))$$

dir, ki burada

$$k = \left(1 + 2r^2\right)^{1/2} \quad \text{ve} \quad q^2 - r^2 = 1$$

şeklindedir. Ayrıca burada κ ve τ eğrilikler olmak üzere,

$$\kappa = 2r\left(1 + r^2/k^2\right)^{1/2} \quad \text{ve} \quad \tau = 1/k^2$$

bulunur (Ikawa, 1985).

Örnek 5.5. ($\mathbb{S}_1^3$ de timelike helisler) $\mathbb{S}_1^3$, 4-boyutlu birim küre olmak üzere,

$$\gamma(s) = (\mu\cos(s/k), \mu\sin(s/k), \lambda\cos(s/k), \lambda\sinh(s/k)$$

dir, ki burada

$$k = \left(2\lambda^2 - 1\right)^{1/2} \quad \text{ve} \quad \lambda^2 + \mu^2 = 1$$

şeklindedir. Ayrıca burada κ ve τ eğrilikler olmak üzere,

$$\kappa = 2\lambda\mu/k^2 \quad \text{ve} \quad \tau = 1/k^2$$

bulunur (Ikawa, 1985).

Örnek 5.6. ($\mathbb{H}_1^3$ de spacelike helisler) $\mathbb{H}_1^3$, 4-boyutlu birim hiperbolik uzay olmak üzere,

$$\gamma(s) = \left(-\sinh(s/k), -\sinh(ms/k), -\cosh(s/k), -\cosh(ms/k)\right)$$

dir, ki burada

$$k = \left(\lambda^2 + \mu^2 m^2\right)^{1/2}$$

şeklindedir. Ayrıca burada κ ve τ eğrilikler olmak üzere,

$$\kappa = \lambda\mu\left(1 - m^2\right)/k^2 \quad \text{ve} \quad \tau = m/k^2$$

bulunur (Ikawa, 1985).

Örnek 5.7. ($\mathbb{H}_1^3$ de timelike helisler) $\mathbb{H}_1^3$, 4-boyutlu birim hiperbolik uzay olmak üzere,

$$\gamma(s) = \left(\mu\sin(ms/k), \mu\cos(ms/k), \lambda\sin(s/k), \lambda\cos(s/k)\right)$$

dir, ki burada

$$k = \left(\lambda^2 - \mu^2 m^2\right)^{1/2} \quad \text{ve} \quad -\lambda^2 + \mu^2 = -1$$

şeklindedir. Ayrıca burada κ ve τ eğrilikler olmak üzere,

$$\kappa = \lambda\mu\left(1 - m^2\right)/k^2 \quad \text{ve} \quad \tau = m/k^2$$

bulunur (Ikawa, 1985).

KAYNAKLAR

Alias, Luis J., Pastor, Jos´e A., 1999. Spacelike surfaces of constant mean curvature with free boundary in the Minkowski space. Classical Quantum Gravity. 16 , no. 4, 1323–1331.

Cheng, Q. M., 1994. Hypersurfaces of a Lorentz space form. Archiv der Mathe matik 63, no. 3, 271–281.

Duggal, L. K., Bejancu, A., 1996. Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications. Kluwer Academic Publishers, 300 p., AH Dordrecht.

De Lima, H. F., 2007. Spacelike hypersurfaces with constant higher order mean curvature in de Sitter space. Journal of Geometry and Physics 57, no. 3, 967–975.

Fujimori, S., 2007. Spacelike mean curvature 1 surfaces of genus 1 with two ends in de Sitter 3-space. Kyushu Journal of Mathematics. 61, no. 1, 1–20.

Fujioka, A., Inoguchi, J., 2003. Timelike Bonnet surfaces in Lorentzian space forms. Differential Geometry and its Applications.18, no. 1, 103–111.

Goldman, W. M., 1985. Nonstandard Lorentz space forms. Journal of Differential Geometry. 21, no. 2, 301–308.

Hacısalihoğlu, H. H., 2000. Diferensiyel Geometri. Ankara Üniversitesi, Fen-Fakültesi Yayınları Matbaası, Cilt 3, 205 s.

Ikawa,T., 1985.On curves and submanifolds in an indefinite-Riemannian mani fold. Tsukuba J. Math. 9, no.2, 353-371.

Kamishima,Y., 1985. Lorentz space forms and virtually solvable groups.Indiana University Mathemetics Journal. 34, no. 2, 249–258.

Kulkarni, R. S. Raymond, F. 1985. 3-dimensional Lorentz space-forms and Seifert fiber spaces. Journal of Differential Geometry 21, no. 2, 231–268.

L´opez,R., 2000. Timelike surfaces with constant mean curvature in Lorentz three-space. Tohoku Mathematical Journal 2, no. 4, 515–532.

Nomizu, K., 1981. On isoparametric hypersurfaces in the lorentzian space forms. Japan Journal (N.S) 7, no.1, 217-226.

O'Neill, B., 1983. Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity. Academic Press, Inc. New York. 468 s.

Tamura, M., 1992. Surfaces which contain helical geodesics. Geometriae Dedicata. 42, 311-315.

Tamura, M., 2004., Surfaces which contain helical geodesics in the 3- sphere. Mem. Fac. Sci. Eng. Shimate Univ. Series B. Mathematical Science. 37, 59-65.

Zheng, Y., 1996. Spacelike Hypersurfaces with Constant Scalar Curvature in the de Sitter Space. Differential Geometry and its Applications, 6, 51-54.

Zuo,Da F., 2006. Time-like linear Weingarten surfaces in Lorentzian space forms Acta Mathematica Sinica. 22, no. 4, 1021–1026.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Şemsi EKEN
Doğum Yeri ve Yılı	:	KİLİS, 1986
Medeni Hali	:	Bekar
Yabancı Dili	:	İngilizce

Eğitim Durumu :

Lise	:	Kilis Lisesi, 2000 – 2004
Lisans	:	Süleyman Demirel Üniversitesi, 2004 – 2008
Yüksek Lisans	:	Süleyman Demirel Üniversitesi, 2008 – ...

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

Yayınları (SCI ve diğer makaleler):

Bildiriler

1-VIII. Geometri Sempozyumu "On surfaces in Lorentz Space" adlı bildiri sunuldu. Antalya, 2010.