

**TABAKALI TESADÜFİ ÖRNEKLEMEDE DOĞRUSAL OLMAYAN
MALİYET KISITLARI ALTINDA ÖRNEK ÇAPININ TABAKALARA
PAYLAŞTIRILMASI**

Sinem Tuğba ŞAHİN

**DOKTORA TEZİ
İSTATİSTİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**NİSAN 2010
ANKARA**

Sinem Tuğba ŞAHİN tarafından hazırlanan TABAKALI TESADÜFİ
ÖRNEKLEMEDE DOĞRUSAL OLMAYAN MALİYET KISITLARI ALTINDA
ÖRNEK ÇAPININ TABAKALARA PAYLAŞTIRILMASI adlı bu tezin Doktora
tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Alptekin ESİN
Tez Danışmanı, İstatistik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile İstatistik Anabilim Dalında Doktora tezi
olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Ayşen APAYDIN
İstatistik, Ankara Üniversitesi
Prof. Dr. A. Alptekin ESİN
İstatistik, Gazi Üniversitesi
Prof. Dr. Hasan BAL
İstatistik, Gazi Üniversitesi
Prof. Dr. Öztaş AYHAN
İstatistik, ODTÜ
Prof. Dr. Hamza GAMGAM
İstatistik, Gazi Üniversitesi

Tarih: 07/04/2010

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Doktora derecesini
onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Sinem Tuğba ŞAHİN

**TABAKALI TESADÜFİ ÖRNEKLEMEDE DOĞRUSAL OLMAYAN
MALİYET KISITLARI ALTINDA ÖRNEK ÇAPININ TABAKALARA
PAYLAŞTIRILMASI**

(Doktora Tezi)

Sinem Tuğba ŞAHİN

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Nisan 2010

ÖZET

Yığın yapısına ve bütçeye uygun bir örnekleme yönteminin belirlenmesi, araştırmaların en önemli aşamalarından biridir. Örnekleme yöntemleri çok çeşitli olmasına rağmen, uygulamalarda en çok kullanılan tabakalı tesadüfi örnekleme yöntemidir. Tabakalı tesadüfi örnekleme kullanıldığında, göz önüne alınması gereken noktalardan biri hangi tabakadan kaç birimlik örnek seçileceğidir. Literatürde yapılan çalışmaların hemen hemen hepsi doğrusal maliyet kısıtı altında, tabakalardan seçilecek örnek çapının belirlenmesi ile ilgilenmektedir. Bu çalışmada ise, doğrusal olmayan maliyet kısıtları göz önüne alınmıştır. Doğrusal olmayan maliyet kısıtları altında, hem tek değişkenli hem de çok değişkenli tabakalı tesadüfi örnekleme için, tabakalardan seçilmesi gereken örnek çapı belirlenmeye çalışılmıştır. Tek değişkenli tabakalı tesadüfi örnekleme için, doğrusal olmayan maliyet kısıtları altında farklı optimizasyon yöntemlerinin birbirlerine göre üstünlükleri ve doğrusal olmayan maliyet kısıtlarının yapıları incelenmiştir. Çok değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemede ise, tabakalardan seçilecek örnek çapının belirlenmesi için, tabaka içi yapıların, örnek çapının paylaşılması problemine yansıtıldığı yeni bir model önerilmiştir. Tek değişkenli durumda, farklı optimizasyon tekniklerinin birbirlerine göre üstünlükleri ve çok değişkenli durumda, yeni önerilen model ile klasik modelin karşılaştırılması için simülasyon çalışması yapılmıştır.

Sonuçlar, yeni önerilen modelin, klasik modele göre tabakalardan seçilecek örnek çapını daha iyi belirlediğini göstermektedir.

Bilim Kodu : 205.1.066
Anahtar Kelimeler : Tabakalı tesadüfi örnekleme, optimum paylaştırma, doğrusal olmayan maliyet fonksiyonu, doğrusal olmayan optimizasyon teknikleri.
Sayfa Adedi : 250
Tez Yöneticisi : Prof. Dr. A.Alptekin ESİN

**THE ALLOCATION OF SAMPLE SIZE INTO STRATA IN STRATIFIED
RANDOM SAMPLING UNDER NONLINEAR COST CONSTRAINTS
(Ph.D. Thesis)**

Sinem Tuğba ŞAHİN

**GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
April 2010**

ABSTRACT

Determination of appropriate sampling method for the population structure and buget is one of the most important stages in researches. Although there are many kinds of sampling methods, the most widely used in the applications is stratified random sampling. The number of sample units will be selected from each stratum is one of the points must be taken into consideration when using stratified random sampling. Most of the studies in literature deal with the determination of the sample size that will be selected from the stratum under linear cost constraint. However in this study, nonlinear cost constraints were taken into consideration. Under nonlinear cost constraints, the sample size that should be selected from strata was determined for both univariate and multivariate stratified random sampling. The superiority of each optimization method under nonlinear cost constraints and structure of nonlinear cost constraints were investigated for the univariate stratified random sampling. As to multivariate stratified random sampling, a new model in which the structure within strata is reflected to the problem of allocation of sample size has been proposed in order to determine the sample size that will be selected from strata. A simulation study has been conducted in order to display the superiority of each optimization method in the univariate case and to compare the new proposed model with the classical model in the multivariate case.

The results show that the new proposed model determines sample size that will be selected from strata better than the classical model.

Science Code : 205.1.066

Key Words : Stratified random sampling, optimum allocation, nonlinear cost function, nonlinear optimization methods.

Page Number : 250

Adviser : Prof. Dr. A.Alptekin EŞİN

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren Sayın Hocam Prof. Dr. A.Alptekin ESİN'e, doktora çalışmam boyunca desteklerini esirgemeyen Sayın Prof. Dr. Öztaş AYHAN ve Prof. Dr. Hasan BAL'a, beraber başladığımız uzun ve meşakkatli yolda ne zaman başım sıkışsa yanımda olan değerli arkadaşım Dr.Hasan ÖRKÜ'ye ve manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan çok değerli aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	vi
TEŞEKKÜR.....	viii
İÇİNDEKİLER	ix
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xx
1. GİRİŞ	1
2. TEK DEĞİŞKENLİ TABAKALI TESADÜFİ ÖRNEKLEME	5
2.1.Tabakalı Tesadüfi Örneklemde Örnek Çapının Tabakalara Paylaştırılması..	14
3. TEK DEĞİŞKENLİ TABAKALI TESADÜFİ ÖRNEKLEME İÇİN FARKLI OPTİMİZASYON TEKNİKLERİ İLE ÖRNEK ÇAPININ TABAKALARA PAYLAŞTIRILMASI.....	22
3.1. Lagrange Çarpanları Yöntemi.....	22
3.2. Kuhn-Tucker Yöntemi	38
3.2.1. $c = \sum t_h n_h^\alpha$ kısıtı altında örnek ortalaması istatistiğinin varyansının minimum yapılması.....	49
3.2.2. $c = \sum t_h \ln(n_h)$ ve $c = \sum t_h n_h^\alpha$ kısıtları altında örnek ortalaması istatistiğinin varyanslarının karşılaştırılması.....	55
3.3. Geometrik Programlama	70
3.3.1. Monomial ve posinomial fonksiyon	71
3.3.2. Kısıtsız geometrik programlama.....	73
3.3.3. Kısıtlı geometrik programlama	78
3.3.4. $c = \sum t_h n_h^\alpha$ kısıtı altında geometrik programlama ve Kuhn-Tucker yöntemi kullanılarak simülasyon çalışması ile örnek ortalaması istatistiğinin varyansının minimum yapılması	86

Sayfa

3.4. Hedef Programlama.....	97
3.4.1.Çok boyutlu simpleks yöntemi.....	101
3.4.2. Doğrusal olmayan hedef programlama	104
3.4.3. $c = \sum t_h n_h^\alpha$ kısıtı altında hedef programlama ve Kuhn-Tucker yöntemi kullanılarak simülasyon çalışması ile örnek ortalaması istatistiğinin varyansının minimum yapılması	128
4. ÇOK DEĞİŞKENLİ TABAKALI TESADÜFİ ÖRNEKLEME	142
4.1.Ghosh(1958) Tarafından Geliştirilen Yöntem.....	145
4.2. Kokan(1963) Tarafından Geliştirilen Yöntem	149
4.3. Jagannathan(1965) Tarafından Geliştirilen Yöntem	151
4.4. Folks ve Antle(1965) Tarafından Geliştirilen Yöntem.....	153
4.5. Chatterje(1968) Tarafından Geliştirilen Yöntem.....	157
4.6. Ahsan ve Khan(1977) Tarafından Geliştirilen Yöntem.....	158
4.7. Omule(1985) Tarafından Geliştirilen Yöntem	163
4.8. Khan ve Ahsan(2003) Tarafından Geliştirilen Yöntem.....	165
5. ÇOK DEĞİŞKENLİ TABAKALI TESADÜFİ ÖRNEKLEMEDE TABAKALARDAN SEÇİLECEK ÖRNEK ÇAPININ BELİRLENMESİ İÇİN YENİ BİR MODEL	175
5.1. Çok Değişkenli Tabakalı Tesadüfi Örneklemde Tabakalardan Seçilecek Örnek Çapının Belirlenmesi İçin Önerilen Yeni Modelin Oluşturulması.....	176
5.2. Simülasyon Çalışması	197
6. SONUÇLAR	236
KAYNAKLAR	245
ÖZGEÇMİŞ	250

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 3.1. $L = 2$, $N = 500$, $n = 100$, $c' = 500$, $t_1 = 1$ ve $t_2 = 1$ iken örnek çapları ve varyans değeri.....	51
Çizelge 3.2. $L = 2$, $N = 500$, $n = 100$, $c' = 1000$, $t_1 = 1$ ve $t_2 = 50$ iken örnek çapları ve varyans değeri.....	52
Çizelge 3.3. $L = 2$, $N = 500$, $n = 100$, $c' = 1000$, $t_1 = 50$ ve $t_2 = 1$ iken örnek çapları ve varyans değeri.....	52
Çizelge 3.4. $L = 2$, $N = 500$, $n = 100$, $c' = 1500$, $t_1 = 25$ ve $t_2 = 35$ iken örnek çapları ve varyans değeri.....	52
Çizelge 3.5. $L = 3$, $N = 10000$, $n = 500$, $c' = 550$, $t_1 = 1$, $t_2 = 1$ ve $t_3 = 1$ iken örnek çapları ve varyans değeri.....	53
Çizelge 3.6. $L = 3$, $N = 10000$, $n = 500$, $c' = 5000$, $t_1 = 15$, $t_2 = 75$ ve $t_3 = 50$ iken örnek çapları ve varyans değeri.....	53
Çizelge 3.7. $L = 4$, $N = 10000$, $n = 2000$, $c' = 1000$, $t_1 = 1$, $t_2 = 1$, $t_3 = 1$ ve $t_4 = 1$ iken örnek çapları ve varyans değeri.....	53
Çizelge 3.8. $L = 4$, $N = 10000$, $n = 2000$, $c' = 10000$, $t_1 = 75$, $t_2 = 80$, $t_3 = 65$ ve $t_4 = 90$ iken örnek çapları ve varyans değeri.....	54
Çizelge 3.9. $L = 5$, $N = 12000$, $n = 3000$, $c' = 10000$, $t_1 = 1$, $t_2 = 1$, $t_3 = 1$, $t_4 = 1$ ve $t_5 = 1$ iken örnek çapları ve varyans değeri.....	54
Çizelge 3.10. $L = 5$, $N = 12000$, $n = 3000$, $c' = 25000$, $t_1 = 40$, $t_2 = 50$, $t_3 = 30$, $t_4 = 45$ ve $t_5 = 60$ iken örnek çapları ve varyans değeri	54
Çizelge 3.11. $L = 2$, $N = 500$, $n = 100$, $c' = 500$, $t_1 = 1$ ve $t_2 = 1$ iken örnek çapları ve varyans değerleri	57
Çizelge 3.12. $L = 2$, $N = 500$, $n = 100$, $c' = 1000$, $t_1 = 1$ ve $t_2 = 50$ iken örnek çapları ve varyans değerleri	57

Çizelge	Sayfa
Çizelge 3.13. $L = 2$, $N = 500$, $n = 100$, $c' = 1000$, $t_1 = 50$ ve $t_2 = 1$ iken örnek çapları ve varyans değerleri	58
Çizelge 3.14. $L = 2$, $N = 500$, $n = 100$, $c' = 1500$, $t_1 = 25$ ve $t_2 = 35$ iken örnek çapları ve varyans değerleri	58
Çizelge 3.15. $L = 3$, $N = 10000$, $n = 500$, $c' = 550$, $t_1 = 1$, $t_2 = 1$ ve $t_3 = 1$ iken örnek çapları ve varyans değerleri	59
Çizelge 3.16. $L = 3$, $N = 10000$, $n = 500$, $c' = 5000$, $t_1 = 15$, $t_2 = 75$ ve $t_3 = 50$ iken örnek çapları ve varyans değerleri.....	59
Çizelge 3.17. $L = 4$, $N = 10000$, $n = 2000$, $c' = 1000$, $t_1 = 1$, $t_2 = 1$, $t_3 = 1$ ve $t_4 = 1$ iken örnek çapları ve varyans değerleri.....	60
Çizelge 3.18. $L = 4$, $N = 10000$, $n = 2000$, $c' = 10000$, $t_1 = 75$, $t_2 = 80$, $t_3 = 65$ ve $t_4 = 90$ iken örnek çapları ve varyans değerleri	61
Çizelge 3.19. $L = 5$, $N = 12000$, $n = 3000$, $c' = 10000$, $t_1 = 1$, $t_2 = 1$, $t_3 = 1$, $t_4 = 1$ ve $t_5 = 1$ iken örnek çapları ve varyans değerleri.....	62
Çizelge 3.20. $L = 5$, $N = 12000$, $n = 3000$, $c' = 25000$, $t_1 = 40$, $t_2 = 50$, $t_3 = 30$, $t_4 = 45$ ve $t_5 = 60$ iken örnek çapları ve varyans değerleri.....	63
Çizelge 3.21. $L = 2$, $N = 500$, $n = 100$, $c' = 500$, $t_1 = 1$ ve $t_2 = 1$ iken örnek çapları ve varyans değerleri	89
Çizelge 3.22. $L = 2$, $N = 500$, $n = 100$, $c' = 1000$, $t_1 = 1$ ve $t_2 = 50$ iken örnek çapları ve varyans değerleri	89
Çizelge 3.23. $L = 2$, $N = 500$, $n = 100$, $c' = 1000$, $t_1 = 50$ ve $t_2 = 1$ iken örnek çapları ve varyans değerleri	90
Çizelge 3.24. $L = 2$, $N = 500$, $n = 100$, $c' = 1500$, $t_1 = 25$ ve $t_2 = 35$ iken örnek çapları ve varyans değerleri	90

Çizelge	Sayfa
Çizelge 3.25. $L = 3$, $N = 10000$, $n = 500$, $c' = 550$, $t_1 = 1$, $t_2 = 1$ ve $t_3 = 1$ iken örnek çapları ve varyans değerleri	91
Çizelge 3.26. $L = 3$, $N = 10000$, $n = 500$, $c' = 5000$, $t_1 = 15$, $t_2 = 75$ ve $t_3 = 50$ iken örnek çapları ve varyans değerleri	91
Çizelge 3.27. $L = 4$, $N = 10000$, $n = 2000$, $c' = 1000$, $t_1 = 1$, $t_2 = 1$, $t_3 = 1$ ve $t_4 = 1$ iken örnek çapları ve varyans değerleri.....	92
Çizelge 3.28. $L = 4$, $N = 10000$, $n = 2000$, $c' = 10000$, $t_1 = 75$, $t_2 = 80$, $t_3 = 65$ ve $t_4 = 90$ iken örnek çapları ve varyans değerleri	93
Çizelge 3.29. $L = 5$, $N = 12000$, $n = 3000$, $c' = 10000$, $t_1 = 1$, $t_2 = 1$, $t_3 = 1$, $t_4 = 1$ ve $t_5 = 1$ iken örnek çapları ve varyans değerleri.....	94
Çizelge 3.30. $L = 5$, $N = 12000$, $n = 3000$, $c' = 25000$, $t_1 = 40$, $t_2 = 50$, $t_3 = 30$, $t_4 = 45$ ve $t_5 = 60$ iken örnek çapları ve varyans değerleri.....	95
Çizelge 3.31. Çok boyutlu simpleks tablosu.....	102
Çizelge 3.32. Çok boyutlu simpleks 1.aşamanın 1. çözüm tablosu	120
Çizelge 3.33. Çok boyutlu simpleks 1.aşamanın 2. çözüm tablosu	121
Çizelge 3.34. Çok boyutlu simpleks 1.aşamanın optimum tablosu	122
Çizelge 3.35. Çok boyutlu simpleks 2.aşamanın 1. çözüm tablosu	125
Çizelge 3.36. Çok boyutlu simpleks 2.aşamanın 2. çözüm tablosu	126
Çizelge 3.37. Çok boyutlu simpleks 2.aşamanın optimum tablosu	127
Çizelge 3.38. $L = 2$, $N = 500$, $N_1 = 300$, $N_2 = 200$, $d^2 = 15$, $z = 1.96$, $D^2 = 3.904$, $n = 100$, $c' = 500$, $t_1 = 1$ ve $t_2 = 1$ iken örnek çapları ve varyans değerleri	132
Çizelge 3.39. $L = 2$, $N = 500$, $N_1 = 400$, $N_2 = 100$, $d^2 = 20$, $z = 1.96$, $D^2 = 5.20$, $n = 100$, $c' = 1000$, $t_1 = 1$ ve $t_2 = 50$ iken örnek çapları ve varyans değerleri	132

Çizelge**Sayfa**

Çizelge 3.40. $L = 2$, $N = 500$, $N_1 = 350$, $N_2 = 150$, $d^2 = 0.055$, $z = 1.96$, $D^2 = 0.0143$, $n = 100$, $c' = 3500$, $t_1 = 50$ ve $t_2 = 1$ iken örnek çapları ve varyans değerleri	133
Çizelge 3.41. $L = 2$, $N = 500$, $N_1 = 200$, $N_2 = 300$, $d^2 = 15$, $z = 1.96$, $D^2 = 3.904$, $n = 100$, $c' = 4000$, $t_1 = 25$ ve $t_2 = 35$ iken örnek çapları ve varyans değerleri	133
Çizelge 3.42. $L = 3$, $N = 10000$, $N_1 = 2000$, $N_2 = 3000$, $N_3 = 5000$, $d^2 = 20$, $z = 1.96$, $D^2 = 5.206$, $n = 250$, $c' = 600$, $t_1 = 1$, $t_2 = 1$ ve $t_3 = 1$ iken örnek çapları ve varyans değerleri.....	134
Çizelge 3.43. $L = 3$, $N = 10000$, $N_1 = 2000$, $N_2 = 3000$, $N_3 = 5000$, $d^2 = 15$, $z = 1.96$, $D^2 = 3.904$, $n = 200$, $c' = 6000$, $t_1 = 15$, $t_2 = 45$ ve $t_3 = 30$ iken örnek çapları ve varyans değerleri	134
Çizelge 3.44. $L = 4$, $N = 1000$, $N_1 = 100$, $N_2 = 200$, $N_3 = 300$, $N_4 = 400$, $d^2 = 20$, $z = 1.96$, $D^2 = 5.206$, $n = 100$, $c' = 1000$, $t_1 = 1$, $t_2 = 1$, $t_3 = 1$ ve $t_4 = 1$ iken örnek çapları ve varyans değerleri	135
Çizelge 3.45. $L = 4$, $N = 6000$, $N_1 = 500$, $N_2 = 1500$, $N_3 = 2000$, $N_4 = 2000$, $d^2 = 15$, $z = 1.96$, $D^2 = 3.904$, $n = 200$, $c' = 6000$, $t_1 = 40$, $t_2 = 30$, $t_3 = 20$ ve $t_4 = 10$ iken örnek çapları ve varyans değerleri	136
Çizelge 3.46. $L = 5$, $N = 12000$, $N_1 = 500$, $N_2 = 1500$, $N_3 = 2000$, $N_4 = 3000$, $N_5 = 5000$, $d^2 = 15$, $z = 1.96$, $D^2 = 3.904$, $n = 3000$, $c' = 10000$, $t_1 = 1$, $t_2 = 1$, $t_3 = 1$, $t_4 = 1$ ve $t_5 = 1$ iken örnek çapları ve varyans değerleri	137
Çizelge 3.47. $L = 5$, $N = 12000$, $N_1 = 500$, $N_2 = 1500$, $N_3 = 2000$, $N_4 = 3000$, $N_5 = 5000$, $d^2 = 40$, $z = 1.96$, $D^2 = 10.412$, $n = 1000$, $c' = 25000$, $t_1 = 10$, $t_2 = 20$, $t_3 = 30$, $t_4 = 40$ ve $t_5 = 50$ iken örnek çapları ve varyans değerleri.....	138

Çizelge	Sayfa
Çizelge 5.1. Tabakalardaki değişkenler arasında ilişki yok iken $L = 2$, $p = 3$, $N = 500$, $N_1 = 300$, $N_2 = 200$, $c = 500$, $t_1 = 1$ ve $t_2 = 50$ için örnek çapları ve varyans değerleri	201
Çizelge 5.2. Tabakalardaki değişkenler arasında ilişki yok iken $L = 2$, $p = 3$, $N = 450$, $N_1 = 150$, $N_2 = 300$, $c = 1250$, $t_1 = 7$ ve $t_2 = 10$ için örnek çapları ve varyans değerleri	201
Çizelge 5.3. Tabakalardaki değişkenlerin bazıları ilişkili iken $L = 2$, $p = 3$, $N = 500$, $N_1 = 300$, $N_2 = 200$, $c = 1000$, $t_1 = 1$ ve $t_2 = 50$ için örnek çapları ve varyans değerleri	202
Çizelge 5.4. Tabakalardaki değişkenlerin bazıları ilişkili iken $L = 2$, $p = 3$, $N = 500$, $N_1 = 300$, $N_2 = 200$, $c = 1000$, $t_1 = 50$ ve $t_2 = 1$ için örnek çapları ve varyans değerleri	202
Çizelge 5.5. Tabakalardaki değişkenlerin hepsi ilişkili iken $L = 2$, $p = 3$, $N = 450$, $N_1 = 150$, $N_2 = 300$, $c = 200$, $t_1 = 1$ ve $t_2 = 1$ için örnek çapları ve varyans değerleri	203
Çizelge 5.6. Tabakalardaki değişkenlerin hepsi ilişkili iken $L = 2$, $p = 3$, $N = 450$, $N_1 = 150$, $N_2 = 300$, $c = 500$, $t_1 = 15$ ve $t_2 = 25$ için örnek çapları ve varyans değerleri	203
Çizelge 5.7. Tabakalardaki değişkenler arasında ilişki yok iken $L = 2$, $p = 4$, $N = 500$, $N_1 = 300$, $N_2 = 200$, $c = 750$, $t_1 = 1$ ve $t_2 = 50$ için örnek çapları ve varyans değerleri	204
Çizelge 5.8. Tabakalardaki değişkenlerin bazıları ilişkili iken $L = 2$, $p = 4$, $N = 500$, $N_1 = 300$, $N_2 = 200$, $c = 750$, $t_1 = 1$ ve $t_2 = 50$ için örnek çapları ve varyans değerleri	204
Çizelge 5.9. Tabakalardaki değişkenlerin hepsi ilişkili iken $L = 2$, $p = 4$, $N = 325$, $N_1 = 125$, $N_2 = 200$, $c = 1500$, $t_1 = 15$ ve $t_2 = 50$ için örnek çapları ve varyans değerleri	205
Çizelge 5.10. Tabakalardaki değişkenler arasında ilişki yok iken $L = 2$, $p = 5$, $N = 200$, $N_1 = 140$, $N_2 = 60$, $c = 1200$, $t_1 = 25$ ve $t_2 = 40$ için örnek çapları ve varyans değerleri	205

Çizelge**Sayfa**

Çizelge 5.11. Tabakalardaki değişkenlerin bazıları ilişkili iken $L = 2$, $p = 5$, $N = 400$, $N_1 = 130$, $N_2 = 270$, $c = 1700$, $t_1 = 25$ ve $t_2 = 5$ için örnek çapları ve varyans değerleri	206
Çizelge 5.12. Tabakalardaki değişkenlerin hepsi ilişkili iken $L = 2$, $p = 5$, $N = 700$, $N_1 = 300$, $N_2 = 400$, $c = 6000$, $t_1 = 15$ ve $t_2 = 10$ için örnek çapları ve varyans değerleri	206
Çizelge 5.13. Tabakalardaki değişkenler arasında ilişki yok iken $L = 3$, $p = 3$, $N = 1000$, $N_1 = 200$, $N_2 = 300$, $N_3 = 500$, $c = 1000$, $t_1 = 1$, $t_2 = 10$ ve $t_3 = 20$ $t_2 = 40$ için örnek çapları ve varyans değerleri	207
Çizelge 5.14. Tabakalardaki değişkenlerin bazıları ilişkili iken $L = 3$, $p = 3$, $N = 750$, $N_1 = 250$, $N_2 = 150$, $N_3 = 350$, $c = 1500$, $t_1 = 7.5$, $t_2 = 2.5$ ve $t_3 = 10$ için örnek çapları ve varyans değerleri	207
Çizelge 5.15. Tabakalardaki değişkenlerin hepsi ilişkili iken $L = 3$, $p = 3$, $N = 500$, $N_1 = 200$, $N_2 = 125$, $N_3 = 175$, $c = 2000$, $t_1 = 17$, $t_2 = 12$ ve $t_3 = 25$ için örnek çapları ve varyans değerleri	208
Çizelge 5.16. Tabakalardaki değişkenler arasında ilişki yok iken $L = 3$, $p = 4$, $N = 600$, $N_1 = 180$, $N_2 = 250$, $N_3 = 170$, $c = 4000$, $t_1 = 35$, $t_2 = 20$ ve $t_3 = 15$ için örnek çapları ve varyans değerleri	208
Çizelge 5.17. Tabakalardaki değişkenlerin bazıları ilişkili iken $L = 3$, $p = 4$, $N = 400$, $N_1 = 130$, $N_2 = 100$, $N_3 = 170$, $c = 2000$, $t_1 = 18$, $t_2 = 12$ ve $t_3 = 28$ için örnek çapları ve varyans değerleri	209
Çizelge 5.18. Tabakalardaki değişkenlerin hepsi ilişkili iken $L = 3$, $p = 4$, $N = 300$, $N_1 = 80$, $N_2 = 150$, $N_3 = 70$, $c = 500$, $t_1 = 9$, $t_2 = 3$ ve $t_3 = 6$ için örnek çapları ve varyans değerleri	209
Çizelge 5.19. Tabakalardaki değişkenler arasında ilişki yok iken $L = 3$, $p = 5$, $N = 1200$, $N_1 = 500$, $N_2 = 250$, $N_3 = 450$, $c = 2500$, $t_1 = 30$, $t_2 = 5$ ve $t_3 = 20$ için örnek çapları ve varyans değerleri	210

Çizelge**Sayfa**

Çizelge 5.20. Tabakalardaki değişkenlerin bazıları ilişkili iken $L = 3$, $p = 5$, $N = 450$, $N_1 = 160$, $N_2 = 120$, $N_3 = 170$, $c = 4000$, $t_1 = 23$, $t_2 = 17$ ve $t_3 = 32$ için örnek çapları ve varyans değerleri.....	210
Çizelge 5.21. Tabakalardaki değişkenlerin hepsi ilişkili iken $L = 3$, $p = 5$, $N = 7500$, $N_1 = 1500$, $N_2 = 2500$, $N_3 = 3500$, $c = 10000$, $t_1 = 15$, $t_2 = 30$ ve $t_3 = 55$ için örnek çapları ve varyans değerleri.....	211
Çizelge 5.22. Tabakalardaki değişkenler arasında ilişki yok iken $L = 4$, $p = 3$, $N = 1000$, $N_1 = 100$, $N_2 = 200$, $N_3 = 300$, $N_4 = 400$, $c = 600$, $t_1 = 1$, $t_2 = 5$, $t_3 = 1$ ve $t_4 = 6$ için örnek çapları ve varyans değerleri	212
Çizelge 5.23. Tabakalardaki değişkenlerin bazıları ilişkili iken $L = 4$, $p = 3$, $N = 850$, $N_1 = 125$, $N_2 = 175$, $N_3 = 200$, $N_4 = 350$, $c = 1500$, $t_1 = 2$, $t_2 = 5$, $t_3 = 8$ ve $t_4 = 10$ için örnek çapları ve varyans değerleri	213
Çizelge 5.24. Tabakalardaki değişkenlerin hepsi ilişkili iken $L = 4$, $p = 3$, $N = 1000$, $N_1 = 220$, $N_2 = 170$, $N_3 = 180$, $N_4 = 430$, $c = 750$, $t_1 = 5$, $t_2 = 3$, $t_3 = 4$ ve $t_4 = 7$ için örnek çapları ve varyans değerleri	214
Çizelge 5.25. Tabakalardaki değişkenler arasında ilişki yok iken $L = 4$, $p = 4$, $N = 750$, $N_1 = 180$, $N_2 = 210$, $N_3 = 100$, $N_4 = 260$, $c = 3500$, $t_1 = 23$, $t_2 = 15$, $t_3 = 8$ ve $t_4 = 25$ için örnek çapları ve varyans değerleri.....	215
Çizelge 5.26. Tabakalardaki değişkenlerin bazıları ilişkili iken $L = 4$, $p = 4$, $N = 10000$, $N_1 = 1500$, $N_2 = 3000$, $N_3 = 2000$, $N_4 = 3500$, $c = 7000$, $t_1 = 5$, $t_2 = 25$, $t_3 = 15$ ve $t_4 = 20$ için örnek çapları ve varyans değerleri	216
Çizelge 5.27. Tabakalardaki değişkenlerin hepsi ilişkili iken $L = 4$, $p = 4$, $N = 1550$, $N_1 = 450$, $N_2 = 500$, $N_3 = 350$, $N_4 = 250$, $c = 5750$, $t_1 = 25$, $t_2 = 35$, $t_3 = 18$ ve $t_4 = 10$ için örnek çapları ve varyans değerleri.....	217

Çizelge**Sayfa**

Çizelge 5.28. Tabakalardaki değişkenler arasında ilişki yok iken $L = 4$, $p = 5$, $N = 750$, $N_1 = 300$, $N_2 = 200$, $N_3 = 100$, $N_4 = 150$, $c = 475$, $t_1 = 2$, $t_2 = 3$, $t_3 = 1$ ve $t_4 = 1$ için örnek çapları ve varyans değerleri.....	218
Çizelge 5.29. Tabakalardaki değişkenlerin bazıları ilişkili iken $L = 4$, $p = 5$, $N = 1300$, $N_1 = 220$, $N_2 = 440$, $N_3 = 330$, $N_4 = 310$, $c = 4000$, $t_1 = 10$, $t_2 = 31$, $t_3 = 22$ ve $t_4 = 13$ için örnek çapları ve varyans değerleri.....	219
Çizelge 5.30. Tabakalardaki değişkenlerin hepsi ilişkili iken $L = 4$, $p = 5$, $N = 1500$, $N_1 = 180$, $N_2 = 390$, $N_3 = 520$, $N_4 = 410$, $c = 3750$, $t_1 = 5$, $t_2 = 33$, $t_3 = 54$ ve $t_4 = 45$ için örnek çapları ve varyans değerleri.....	220
Çizelge 5.31. Tabakalardaki değişkenler arasında ilişki yok iken $L = 5$, $p = 3$, $N = 825$, $N_1 = 300$, $N_2 = 200$, $N_3 = 100$, $N_4 = 150$, $N_5 = 75$, $c = 3000$, $t_1 = 28$, $t_2 = 16$, $t_3 = 14$, $t_4 = 18$ ve $t_5 = 7$ için örnek çapları ve varyans değerleri	221
Çizelge 5.32. Tabakalardaki değişkenlerin bazıları ilişkili iken $L = 5$, $p = 3$, $N = 1125$, $N_1 = 325$, $N_2 = 130$, $N_3 = 260$, $N_4 = 190$, $N_5 = 220$, $c = 2500$, $t_1 = 7$, $t_2 = 3$, $t_3 = 9$, $t_4 = 1$ ve $t_5 = 12$ için örnek çapları ve varyans değerleri	222
Çizelge 5.33. Tabakalardaki değişkenlerin hepsi ilişkili iken $L = 5$, $p = 3$, $N = 1600$, $N_1 = 500$, $N_2 = 350$, $N_3 = 200$, $N_4 = 150$, $N_5 = 400$, $c = 3000$, $t_1 = 13$, $t_2 = 5$, $t_3 = 7$, $t_4 = 3$ ve $t_5 = 9$ için örnek çapları ve varyans değerleri	223
Çizelge 5.34. Tabakalardaki değişkenler arasında ilişki yok iken $L = 5$, $p = 4$, $N = 890$, $N_1 = 220$, $N_2 = 140$, $N_3 = 180$, $N_4 = 100$, $N_5 = 250$, $c = 2000$, $t_1 = 10$, $t_2 = 8$, $t_3 = 7$, $t_4 = 2$ ve $t_5 = 12$ için örnek çapları ve varyans değerleri	224
Çizelge 5.35. Tabakalardaki değişkenlerin bazıları ilişkili iken $L = 5$, $p = 4$, $N = 1430$, $N_1 = 170$, $N_2 = 410$, $N_3 = 240$, $N_4 = 330$, $N_5 = 280$, $c = 2500$, $t_1 = 4$, $t_2 = 9$, $t_3 = 3$, $t_4 = 10$ ve $t_5 = 8$ için örnek çapları ve varyans değerleri	225

Çizelge**Sayfa**

- Çizelge 5.36. Tabakalardaki değişkenlerin hepsi ilişkili iken $L = 5$, $p = 4$,
 $N = 1460$, $N_1 = 150$, $N_2 = 460$, $N_3 = 280$, $N_4 = 330$, $N_5 = 240$,
 $c = 5500$, $t_1 = 7$, $t_2 = 15$, $t_3 = 10$, $t_4 = 27$ ve $t_5 = 12$
 için örnek çapları ve varyans değerleri 226
- Çizelge 5.37. Tabakalardaki değişkenler arasında ilişki yok iken $L = 5$, $p = 5$,
 $N = 1025$, $N_1 = 300$, $N_2 = 200$, $N_3 = 100$, $N_4 = 150$, $N_5 = 275$,
 $c = 900$, $t_1 = 7$, $t_2 = 3$, $t_3 = 1$, $t_4 = 5$ ve $t_5 = 9$ için örnek
 çapları ve varyans değerleri 227
- Çizelge 5.38. Tabakalardaki değişkenlerin bazıları ilişkili iken $L = 5$, $p = 5$,
 $N = 825$, $N_1 = 100$, $N_2 = 125$, $N_3 = 150$, $N_4 = 200$, $N_5 = 250$,
 $c = 850$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 4$, $t_4 = 6$ ve $t_5 = 8$ için örnek
 çapları ve varyans değerleri 228
- Çizelge 5.39. Tabakalardaki değişkenlerin hepsi ilişkili iken $L = 5$, $p = 5$,
 $N = 1400$, $N_1 = 170$, $N_2 = 340$, $N_3 = 220$, $N_4 = 410$, $N_5 = 260$,
 $c = 5000$, $t_1 = 10$, $t_2 = 13$, $t_3 = 12$, $t_4 = 14$ ve $t_5 = 11$
 için örnek çapları ve varyans değerleri 229

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
c	Araştırma için ayrılan bütçe
c_0	Sabit giderler
t_h	h. tabakaya seyahat maliyeti
c_h	h. tabakadan bir birim seçme maliyeti
n	Örnek çapı
n_h	h. tabakadan seçilecek örnek çapı
d	Duyarlılık
$\text{Min}(f)$	Amaç fonksiyonunun minimum değeri
$\text{Mak}(f)$	Amaç fonksiyonunun maksimum değeri
α	Tabakaya seyahat etmenin ya da tabakadan bir birim seçmenin maliyet fonksiyonu üzerine etkisi
$V(\bar{x})_i$	i. modelden elde edilen örnek ortalaması istatistiğinin varyans değeri

1. GİRİŞ

Örnekleme planının iyi oluşturulması, istatistiksel çalışmalardan elde edilen sonuçların kullanılabilir ve gerçeği yansıtır nitelikte olmasında çok önemli rol oynar. Örnekleme planı ne kadar iyi oluşturulur, seçilen örneklerle yığın ne kadar iyi temsil edilirse, elde edilen istatistiksel sonuçlar o kadar güvenilir olur.

Uygulamalarda kullanılabilecek çok sayıda örnekleme yöntemi bulunmaktadır. Bununla birlikte, yığın homojen yapıda ise basit tesadüfi örnekleme, yığın heterojen yapıda ise tabakalı tesadüfi örnekleme, en sık kullanılan örnekleme yöntemleridir. Yığın heterojen yapıda iken basit tesadüfi örnekleme kullanıldığında, seçilen örneklerle yığının iyi temsil edilememesi gibi sorunlar ortaya çıkar. Dolayısıyla, yığın heterojen yapıda iken, her biri homojen olan ve birbiri ile kesişmeyen tabakalar oluşturulup, oluşturulan bu tabakadan basit tesadüfi örnekler seçmek hem yığının daha iyi temsil edilmesini hem de elde edilen tahminlerin hassaslığının artmasını sağlar. Ayrıca, tabakalı tesadüfi örnekleme kullanarak, yığını oluşturan her bir alt gruba yani tabakaya ait istatistikler de elde edilebilir.

Tabakalı tesadüfi örnekleme kullanıldığında, araştırmacının örnekleme planını yürütebilmesi için dikkat etmesi gereken üç önemli nokta vardır. Bunlardan birincisi tabaka sayısının belirlenmesi, ikincisi tabaka sınırlarının belirlenmesi, üçüncüsü ise tabakalardan seçilecek örnek çapının belirlenmesidir. Aslında bunların her biri birer optimizasyon problemidir.

Tabakalardan seçilecek örnek çapının belirlenmesi, literatürde en çok ele alınan problemidir. Araştırma için ayrılan sabit bir bütçe ile her tabakadan bir birim seçmenin ya da her tabakaya seyahat etmenin maliyeti bir birim arttırdığı kabul edilen doğrusal maliyet kısıtı altında, tabakalardan seçilecek örnek çapının belirlenmesi için pek çok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmaların ilki Neyman (1934) tarafından yapılmıştır. Neyman, tek değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemede, doğrusal maliyet kısıtı altında örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapacak örnek çaplarını elde etmeye çalışmıştır. Bunu yaparken, eşitlik kısıtlı

optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılan Lagrange çarpanları yöntemini kullanmış ve tabakalı tesadüfi örneklemede çok sık kullanılan paylaştırma formülünü elde etmiştir. Tek değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemede, tabakalardan seçilecek örnek çapının belirlenmesi problemi için, son yıllarda yapılan çalışmalardan birkaçı hariç, hemen hemen hepsi doğrusal maliyet kısıtı altında yapılmıştır [Evans, 1951; Zinger, 1962; Srikantan, 1963; Newbold, 1971; Sanathanan, 1971; Swindel ve Yandle, 1972; Ramachandran ve Rao, 1974; Cochran, 1977; Davis ve Finch, 1983; Ernst, 1989; Kao ve McCabe, 1991; McCallion, 1992; Bretthauer ve Shetty, 1995; Csenki, 1997; Valliant ve Gentle, 1997; Bretthauer ve ark., 1999; Mulvey ve ark., 2000; Clark ve Steel, 2000; Green, 2000; Chernyak, 2001; Judez ve ark., 2006; Semiz, 2004; Diaz-Garcia ve Garay-Tapia, 2005; Carrizosa ve Morales, 2007].

Literatürde, tek değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemenin yanı sıra çok değişkenli tabakalı tesadüfi örnekleme ile ilgili de pek çok çalışma yapılmıştır [Ghosh, 1958; Kokan, 1963; Folks ve Antle, 1965; Jagannathan, 1965a-1965b; Chatterjee, 1968; Kokan ve Khan, 1967; Ahsan ve Khan, 1977; Omule, 1985; Öztoprak, 1997; Bosch ve Wildner, 2003; Khan ve ark., 2003; Khan ve Ahsan, 2003; Diaz-Garcia, 2006]. Çok değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemede, tabakalardan seçilecek örnek çapının belirlenmesine ilişkin yapılan çalışmalara bakıldığında, bu çalışmaların hemen hemen hepsi ya doğrusal yapıdaki maliyet kısıtı altında yapılmış ya da maliyet kısıtı göz önüne alınmamıştır. Ayrıca, Folk ve Antle (1965) ile Khan ve Ahsan (2003) tarafından geliştirilen yeni modeller hariç diğer çalışmalar aynı modelin farklı biçimlerde çözümlenmesi mantığına dayanmaktadır. Çok değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemede, tabakalardan seçilecek örnek çapının belirlenmesi için kullanılan klasik yöntem, tek değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemede Neyman (1934) tarafından geliştirilen yöntemin p değişkenin her biri için ayrı ayrı uygulanıp, bulunan sonuçların ortalamasının alınması biçimindedir. Tabakalarda birden fazla değişken varken, tek değişken varmış gibi davranmak tahmin edicinin duyarlılığını azaltmaktadır.

Bu çalışmanın amacı, tabakalı tesadüfi örneklemede tabakalardan seçilecek örnek çapı belirlenirken, doğrusal olmayan yapıdaki maliyet kısıtını kullanmak ve yeni yaklaşımlar elde etmektir. Bu amaçla, tek değişkenli tabakalı tesadüfi örnekleme için doğrusal olmayan yapıdaki maliyet kısıtları ayrıntılı olarak incelenmiş ve bu doğrusal olmayan maliyet kısıtları altında farklı optimizasyon teknikleriyle çözümler elde edilerek, bu tekniklerin birbirlerine göre eksiklikleri ya da üstünlükleri incelenmiştir. Çok değişkenli tabakalı tesadüfi örnekleme için ise, literatürde doğrusal maliyet kısıtı ile kullanılan ve tek değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemin basit bir genişlemesi olarak ele alınan klasik modele alternatif yeni bir model önerilmiştir. Bu yeni model, çok değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemede doğrusal olmayan maliyet kısıtlarının kullanılması, tabaka içi yapıyı modele yansıtan ağırlıkların modelde yer alması ve değişkenler arasındaki ilişkileri göz önüne alması açısından, klasik modelden farklılık göstermektedir.

Tezin ikinci bölümünde, tek değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemin en genel hali ve notasyonları gözden geçirilmiş, tek değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemede, örnek çapının tabakalara paylaştırılmasına ilişkin kullanılan en temel yöntemlerden bahsedilmiştir. Ayrıca, doğrusal olmayan yapıdaki maliyet kısıtları tanıtılmış ve literatürde tabakalı tesadüfi örnekleme ile ilgili yapılan çalışmalara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, doğrusal olmayan optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılan yöntemlerden Lagrange çarpanları, Kuhn-Tucker, Geometrik programlama ve Hedef programlama yöntemleri tanıtılmıştır. Bu dört yöntemin kullanılmasının nedeni; Lagrange çarpanları yönteminin Neyman (1934) tarafından kullanılan en temel yöntem olması, Kuhn-Tucker yönteminin eşitsizlik kısıtlarını kapsayan doğrusal olmayan problemlerin çözümünde kullanılmasının yanında Lagrange çarpanları yöntemini de kapsaması, geometrik programlamanın hem eşitsizlik kısıtlarını kapsaması hem de problemin dualini kullanarak daha az değişkenle çalışılması gibi avantajlara sahip olması, hedef programlamanın ise birden fazla amacı minimize eden çok amaçlı bir optimizasyon yöntemi olmasıdır. Bu yöntemlerin işleyişlerinin görülebilmesi amacıyla sayısal örneklere de yer verilmiştir. Tek değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemede doğrusal olmayan maliyet

kısıtları altında tabakalardan seçilecek örnek çapının belirlenmesi probleminde, Lagrange çarpanları yönteminin kullanılmasından ortaya çıkan dezavantajlardan bahsedilmiş ve bu dezavantajlardan dolayı simülasyon çalışması ile yapılan karşılaştırmalar Kuhn-Tucker, Geometrik ve Hedef programlama üzerinden yapılmıştır. Yapılan karşılaştırmalar sonucunda, kullanılan yöntemlerin birbirlerine göre eksiklikleri ve üstünlükleri incelenmiştir. Ayrıca, bu karşılaştırmalar yapılırken, doğrusal olmayan maliyet kısıtları üzerinde ayrıntılı incelemeler yapılmıştır.

Dördüncü bölümde, çok değişkenli tabakalı tesadüfi örnekleme en genel hali ve notasyonları gözden geçirilmiştir. Literatürde, çok değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemede, tabakalardan seçilecek örnek çapının belirlenmesi problemine ilişkin yapılan çalışmaların en belirgin olanları ayrıntıları ile incelenmiştir.

Beşinci bölümde, çok değişkenli tabakalı tesadüfi örnekleme için tabakalardan seçilecek örnek çapının belirlenmesi probleminde, klasik modele alternatif bir model önerilmiştir. Bu model, doğrusal olmayan maliyet kısıtını içerdigi, hem tabaka içi yapıyı hem de tabaka içindeki değişkenlerin ilişkilerini yansıttığı için klasik modele göre çok değişkenli yapıyı daha iyi ifade edebilmektedir. Bu bölümde, klasik model ile yeni önerilen modelin işleyişleri yapılan simülasyon çalışması ile karşılaştırılmıştır.

Son bölümde elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

2. TEK DEĞİŞKENLİ TABAKALI TESADÜFİ ÖRNEKLEME

Örnekten elde edilen tahminin güvenilirliği, örneğin çapına ve yığının homojenliğine bağlıdır. Çünkü yığın ne kadar homojen ve örnek çapı ne kadar büyükse yapılan tahminin hassaslığı o ölçüde yüksek olur. Yapılan tahminin hassaslığının yüksek olması ile kastedilen; duyarlılığın artması yani elde edilen tahmin ediciyle oluşturulan güven aralığının daha dar olmasıdır.

Örnek çapına dokunmadan duyarlılığı arttırmaya yarayan örnekleme yöntemlerinden birisi de tabakalı tesadüfi örnekleme yöntemidir. Yığının bazı özellik, vasıf ya da nitelik bakımından gruplara ayrılmasına tabaka adı verilir. Kısaca, yığını kesişmeyen ve tabaka adı verilen alt gruplara ayırarak, her bir tabakadan basit tesadüfi örnekler seçip yığın parametrelerini tahmin etme işlemine tabakalı tesadüfi örnekleme denir.

Örneğin, belli bir bölgede bulunan çiftliklerdeki ortalama büyükbaş hayvan sayısının tahmin edilmek istendiğini varsayalım. Bu bölgede bulunan çiftliklerin kapladıkları alanların değişkenlik gösterdiği, çiftliklerin çoğunun orta ve küçük ölçekli olduğu ve sadece birkaç tane büyük çiftlik olduğu bilinmektedir. Bu yapıdaki bir yığından, basit tesadüfi örnekleme göre çiftlik seçilirse, büyük ölçekli çiftliklerin hiç birisi örneğe seçilemeyebilir. Böyle bir durumda, bu bölgede çiftlik başına ortalama büyükbaş hayvan sayısı tahmin edildiğinde, gerçek ortalamanın altında bir tahmin yapılmış olur. Aynı şekilde, basit tesadüfi örnekleme göre yapılan seçimde, küçük ölçekli çiftliklerin hiç birisi örneğe seçilemeyebilir. Böyle bir durumda ise, bu bölgede çiftlik başına ortalama büyükbaş hayvan sayısı tahmin edildiğinde, gerçek ortalamanın üstünde bir tahmin yapılmış olur. Sonuç olarak, seçilen örnek, yığını iyi bir şekilde temsil etmemiş olur. Bununla birlikte, çiftlikleri kapladıkları alanlara göre küçük, orta ve büyük olmak üzere üç gruba ayırıp, her bir gruptan belirli sayıda çiftlik seçilmesi ve bu bölgede çiftlik başına ortalama büyükbaş hayvan sayısının, bu üç gruptan gelen örnek bilgisi kullanılarak tahmin edilmesinin yığını daha iyi temsil edeceği açıktır.

Tabakalı tesadüfi örnekleme kullanılmasının nedenlerini aşağıdaki gibi sıralayabiliriz:

- 1- Belli şartlar altında istatistiğin duyarlılığını arttırabilir olmasıdır. Bu şart, tabaka içi yapının homojen olması yani tabakalara ayrılan birimlerin birbirine yakın olmasıdır. Başka bir ifadeyle, yığın heterojen bir yapıya sahipse yani yığını oluşturan birimler arasında açıklık fazla ise tabakalı tesadüfi örnekleme kullanılması duyarlılığı arttıracaktır.
- 2- Yığını oluşturan alt grupları yani her bir tabakayı ilgilendiren bilgiler arzu edilebilir.
- 3- Hem idari hem de fiziksel nedenlerden dolayı bilginin toplanmasını kolaylaştırabilir.

Yığınınız belli bir özellik bakımından tabakalara ayrılabilir nitelikte olduğunda, tabakalı tesadüfi örneklemenin, basit tesadüfi örnekleme göre avantajlarını aşağıdaki gibi özetleyebiliriz:

- 1- Aynı duyarlılığı elde etmek için, tabakalı tesadüfi örneklemede, basit tesadüfi örnekleme göre daha küçük çaplı örnek ile çalışılır. Bu da para, zaman ve emek tasarrufu sağlar.
- 2- Yığın alt gruplara yani tabakalara ayrıldığından, tabakalı tesadüfi örnekleme ile bu alt gruplar yani tabakalar hakkında ayrıntılı bilgiler elde edebiliriz.
- 3- Tabakalı tesadüfi örnekleme duyarlılığı arttırdığından, tahminlerimiz daha dar bir aralıkta elde edilir.

Notasyonlar

N	Yığındaki birim sayısı(Yığın çapı)
L	Yığındaki tabaka sayısı
N_h	h . tabakadaki birim sayısı(h . tabakanın çapı)
W_h	h . tabakanın ağırlığı

X_{hi}	h . tabakadaki i . birimin gözlem değeri
X_h	h . tabaka toplamı
$\bar{X}_h$	h . tabakada birim başına ortalama
X	Yığın toplamı
$\bar{X}$	Yığın ortalaması
S_h^2	h . tabakanın varyansı
S^2	Yığın varyansı
n	Örneğe seçilen birim sayısı(Örnek çapı)
n_h	h . tabakadan örneğe seçilen birim sayısı(h . tabakadaki örnek çapı)
x_{hi}	h . tabakadan örneğe seçilen i . birimin gözlem değeri
x_h	h . tabakadaki örnek toplamı
$\bar{x}_h$	h . tabakada birim başına ortalamanın tahmini
$\hat{X}_h$	h . tabakanın toplamının tahmini
$\hat{X}$	Toplam değer istatistiği(Yığın toplamının tahmini)
$\bar{x}$	Örnek ortalaması istatistiği(Yığın ortalamasının tahmini)
s_h^2	h . tabakanın varyansının tahmini(h . tabakanın örnek varyansı)
$V(\bar{x})$	Örnek ortalaması istatistiğinin varyansı(Yığın ortalamasının tahmininin varyansı)
$\hat{V}(\bar{x})$	Örnek ortalaması istatistiğinin varyansının tahmini(Yığın ortalamasının tahmininin varyansının tahmini)
c	Örnekleme planı için ayrılan toplam bütçe
c_0	Sabit maliyet
c_h	h . tabakadan bir birim seçme maliyeti
t_h	h . tabakaya seyahat maliyeti

$X_1, X_2, \dots, X_N$, N çaplı yığınınımız olsun. Bu yığın, aşağıda gösterildiği gibi her birinde N_h tane birim olan L tane homojen tabakaya ayrılсын ($h=1,2,\dots,L$).

Buradan, yığın çapı $N = N_1 + N_2 + \dots + N_L = \sum N_h$ olarak yazılır.

Tabaka 1 Tabaka 2 . . . Tabaka L

X_{11}	X_{21}	.	.	.	X_{L1}
X_{12}	X_{22}	.	.	.	X_{L2}
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
X_{1N_1}	X_{2N_2}	.	.	.	X_{LN_L}

X_{hi} , h .tabakadaki i .birimin gözlem değerini ve N_h , h .tabakadaki birim sayısını göstermek üzere; h .tabakanın toplamı,

$$X_h = X_{h1} + X_{h2} + \dots + X_{hN_h} = \sum_{i=1}^{N_h} X_{hi}$$

biçiminde bu tabakadaki birimlerin toplamına eşittir. h .tabakada birim başına ortalama ise;

$$\bar{X}_h = \frac{X_{h1} + X_{h2} + \dots + X_{hN_h}}{N_h} = \frac{\sum_{i=1}^{N_h} X_{hi}}{N_h} = \frac{X_h}{N_h}$$

olarak h .tabakanın toplamının, bu tabakadaki birim sayısına bölünmesi ile elde edilir. Yığın toplamı,

$$X = \sum_{h=1}^L X_h = \sum_{h=1}^L \sum_{i=1}^{N_h} X_{hi}$$

biçiminde tabaka toplamlarının toplamına eşittir. Yığın ortalaması,

$$\bar{X} = \frac{X}{N} = \frac{\sum_{h=1}^L X_h}{N} = \frac{\sum_{h=1}^L N_h \bar{X}_h}{N} = \frac{\sum_{h=1}^L \sum_{i=1}^{N_h} X_{hi}}{N}$$

olarak yığın toplamının yığındaki birim sayısına bölünmesi ile elde edilir. Yığın toplamının ve yığın ortalamasının tahmin edilmesi için, aşağıda gösterildiği gibi L tabakanın her birinden n_h çaplı örnekler yerine koymadan yöntemi ile seçilir. Bu

durumda, toplam örnek çapı $n = n_1 + n_2 + \dots + n_L = \sum_{h=1}^L n_h$ olarak yazılabilir.

1.tabakadan N_1 tane birim içinden n_1 tanesi, 2.tabakadan N_2 tane birim içinden n_2 tanesi,..., L .tabakadan N_L tane birim içinden n_L tanesi yerine koymadan yöntemiyle seçildiğinde, $N = \sum_{h=1}^L N_h$ çaplı yığından $n = \sum_{h=1}^L n_h$ çaplı örnek aşağıdaki gibi seçilmiş olur.

Tabaka 1	Tabaka 2	. . .	Tabaka L
x_{11}	x_{21}	. . .	x_{L1}
x_{12}	x_{22}	. . .	x_{L2}
.	.	. . .	.
.	.	. . .	.
.	.	. . .	.
x_{1n_1}	x_{2n_2}	. . .	x_{Ln_L}

Seçilebilecek mümkün örneklerin sayısı; $MHS = \binom{N_1}{n_1} \binom{N_2}{n_2} \dots \binom{N_L}{n_L} = \prod_{h=1}^L \binom{N_h}{n_h}$

kadardır.

x_{hi} , h .tabakadan örneğe seçilen i .birimin gözlem değerini ve n_h , h .tabakadan örneğe seçilen birim sayısını göstermek üzere, h .tabakadaki örnek toplamı

$$x_h = x_{h1} + x_{h2} + \dots + x_{hn_h} = \sum_{i=1}^{n_h} x_{hi}$$

bu tabakadan seçilen n_h tane örnek biriminin toplamına eşittir. h .tabakada birim başına ortalamanın tahmini,

$$\bar{x}_h = \frac{x_{h1} + x_{h2} + \dots + x_{hn_h}}{n_h} = \frac{\sum_{i=1}^{n_h} x_{hi}}{n_h} = \frac{x_h}{n_h}$$

bu tabakadaki örnek toplamının n_h örnek çapına bölünmesi ile elde edilir. Bu tahmin, h .tabakada birim başına ortalamanın $\binom{N_h}{n_h}$ tane mümkün tahmininden biridir. h .tabakada birim başına ortalamanın tahmini, h .tabakada birim başına ortalama için yansız bir tahmin edicidir ve $E(\bar{x}_h) = \bar{X}_h$ ile gösterilir.

h .tabakanın toplamının tahmini;

$$\hat{X}_h = N_h \bar{x}_h$$

h .tabakada birim başına ortalamanın tahmini ile h .tabakadaki birim sayısının çarpılması ile elde edilir. Bu tahmin, h .tabakanın toplamının $\binom{N_h}{n_h}$ tane mümkün tahmininden biridir. h .tabakanın toplamının tahmini, h .tabakanın toplamı için yansız bir tahmin edicidir ve $E(\hat{X}_h) = X_h$ ile gösterilir.

Yığın toplamının tahmini;

$$\hat{X}_{tb} = \sum_{h=1}^L \hat{X}_h = \sum_{h=1}^L N_h \bar{x}_h = \sum_{h=1}^L N_h \frac{x_h}{n_h} = \sum_{h=1}^L N_h \frac{\sum_{i=1}^{n_h} x_{hi}}{n_h}$$

tabaka toplamlarının tahminlerinin toplanması ile elde edilir. Bu tahmin, yığın toplamının $\prod_{h=1}^L \binom{N_h}{n_h}$ tane mümkün tahmininden biridir. Yığın toplamının tahmini,

yığın toplamı için yansız bir tahmin edicidir ve $E(\hat{X}_{tb}) = X$ ile gösterilir.

Yığın ortalamasının tahmini;

$$\bar{x}_{tb} = \frac{\hat{X}}{N} = \frac{\sum_{h=1}^L \hat{X}_h}{N} = \frac{\sum_{h=1}^L N_h \bar{x}_h}{N} = \frac{1}{N} \sum_{h=1}^L N_h \frac{x_h}{n_h} = \frac{1}{N} \sum_{h=1}^L N_h \frac{\sum_{i=1}^{n_h} x_{hi}}{n_h}$$

yığın toplamının tahmininin, yığındaki birim sayısına bölünmesi ile elde edilir. Bu tahmin, yığın ortalamasının $\prod_{h=1}^L \binom{N_h}{n_h}$ tane mümkün tahmininden biridir. Yığın ortalamasının tahmini, yığın ortalaması için yansız bir tahmin edicidir ve $E(\bar{x}_{tb}) = \bar{X}$ ile gösterilir.

Yığın varyansı, yığındaki her bir birimin yığın ortalamasından ayrılığı olarak tanımlandığından

$$S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{h=1}^L \sum_{i=1}^{N_h} (X_{hi} - \bar{X})^2$$

biçiminde ifade edilir.

h . tabakanın varyansı,

$$S_h^2 = \frac{1}{N_h - 1} \sum_{i=1}^{N_h} (X_{hi} - \bar{X}_h)^2$$

h . tabakadaki her bir birimin tabaka ortalamasından ayrılığı olarak ifade edilir. h . tabakanın varyansının tahmini ise,

$$s_h^2 = \frac{1}{n_h - 1} \sum_{i=1}^{n_h} (x_{hi} - \bar{x}_h)^2$$

h . tabakadan örneğe seçilen her bir birimin tabaka ortalamasının tahmininden ayrılığı olarak ifade edilir. Bu tahmin, h . tabakanın varyansının $\binom{N_h}{n_h}$ tane mümkün tahmininden biridir. h . tabakanın varyansının tahmini, h . tabakanın varyansı için yansız bir tahmin edicidir ve $E(s_h^2) = S_h^2$ ile gösterilir.

$\frac{N_h}{N}$ terimi tabaka ağırlığı olarak adlandırılır ve W_h ile gösterilir. O halde, örnek ortalaması istatistiği;

$$\bar{x}_{tb} = \frac{\sum_{h=1}^L N_h \bar{x}_h}{N}$$

$$\bar{x}_{tb} = \sum_{h=1}^L W_h \bar{x}_h$$

$$\bar{x}_{tb} = W_1 \bar{x}_1 + W_2 \bar{x}_2 + \dots + W_L \bar{x}_L$$

olarak yeniden yazılabilir. Tabakalı tesadüfi örnekleme yönteminde, her tabaka için basit tesadüfi örnekleme yöntemi kullanılmaktadır. Bu nedenle, tabakalı tesadüfi örnekleme, L kez tekrar eden basit tesadüfi örnekleme olarak adlandırmak yanlış

olmayacaktır. Tabakalı tesadüfi örnekleme de her bir tabakadan n_h çaplı örnekler tesadüfi olarak seçilir ve bu seçimler birbirinden bağımsızdır.

$$V(\bar{x}_{tb}) = V(W_1\bar{x}_1 + W_2\bar{x}_2 + \dots + W_L\bar{x}_L)$$

$$V(\bar{x}_{tb}) = V(W_1\bar{x}_1) + V(W_2\bar{x}_2) + \dots + V(W_L\bar{x}_L)$$

$$V(\bar{x}_{tb}) = W_1^2 V(\bar{x}_1) + W_2^2 V(\bar{x}_2) + \dots + W_L^2 V(\bar{x}_L)$$

Her tabaka için ayrı ayrı basit tesadüfi örnekleme yöntemi kullanıldığından, h . tabakada birim başına ortalamanın tahmininin varyansı yerine koymadan örnekleme için;

$$V(\bar{x}_h) = \frac{N_h - n_h}{N_h} \frac{S_h^2}{n_h}$$

olarak ifade edilir. O halde, tabakalı tesadüfi örnekleme yöntemi için, örnek ortalaması istatistiğinin varyansı;

$$V(\bar{x}_{tb}) = W_1^2 \frac{N_1 - n_1}{N_1} \frac{S_1^2}{n_1} + W_2^2 \frac{N_2 - n_2}{N_2} \frac{S_2^2}{n_2} + \dots + W_L^2 \frac{N_L - n_L}{N_L} \frac{S_L^2}{n_L}$$

$$V(\bar{x}_{tb}) = \sum_{h=1}^L W_h^2 \frac{N_h - n_h}{N_h} \frac{S_h^2}{n_h}$$

$$V(\bar{x}_{tb}) = \sum_{h=1}^L \left(\frac{N_h}{N} \right)^2 \frac{N_h - n_h}{N_h} \frac{S_h^2}{n_h}$$

$$V(\bar{x}_{tb}) = \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^L N_h^2 \frac{N_h - n_h}{N_h} \frac{S_h^2}{n_h}$$

$$V(\bar{x}_{tb}) = \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{n_h} - \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{N_h}$$

olarak elde edilir. Gerçek uygulamalarda genellikle yığın birimlerinin tamamına ulaşmak mümkün değildir. Yığın birimlerine ulaşmak mümkün olsa bile, tamsayım

yaparak parametre değerlerini bulmak çok zaman alıcıdır. Tabakalı tesadüfi örneklemede tabaka varyansları S_h^2 'ler genellikle bilinmediğinden $V(\bar{x}_{tb})$ 'da hesaplanamaz. Bu nedenle, tabaka varyansı S_h^2 'nin tahmin edicisi kullanılarak, $V(\bar{x}_{tb})$ tahmin edilir. Buradan, örnek ortalaması istatistiğinin varyansı formülünde, S_h^2 yerine s_h^2 yazılarak, örnek ortalaması istatistiğinin varyansının tahmini;

$$\hat{V}(\bar{x}_{tb}) = \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^L N_h^2 \frac{N_h - n_h}{N_h} \frac{s_h^2}{n_h}$$

$$\hat{V}(\bar{x}_{tb}) = \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 s_h^2}{n_h} - \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 s_h^2}{N_h}$$

olarak elde edilir. Örnek ortalaması istatistiğinin varyansının tahmini, örnek ortalaması istatistiğinin varyansı için yansız bir tahmin edicidir ve $E(\hat{V}(\bar{x}_{tb})) = V(\bar{x}_{tb})$ olarak ifade edilir.

2.1. Tabakalı Tesadüfi Örneklemede Örnek Çapının Tabakalara Paylaştırılması

Tabakalı tesadüfi örneklemede en önemli problem belirlenmiş n örnek çapını tabakalara paylaştırmak, hangi tabakadan kaç birimlik örnek seçeceğimize karar vermektir. İyi bir paylaştırma ile, minimum maliyete karşın maksimum duyarlılığın elde edilmesi kastedilmektedir. Tahmin edicinin duyarlılığı varyansı ile ölçülmektedir. Tahmin edicinin varyansı ne kadar küçük ise duyarlılık o derecede yüksektir. Belirlenmiş bir n örnek çapı için belli başlı kullanılan dört paylaştırma yöntemi bulunmaktadır:

- 1- Eşit Paylaştırma
- 2- Orantılı Paylaştırma
- 3- En Uygun Paylaştırma
- 4- Neyman Paylaştırma

Tabaka çapları eşit olduğunda *eşit paylaşırma*, tabaka çapları farklılık gösterdiğinde *orantılı paylaşırma*, tabaka çapları ve tabaka varyansları birbirinden farklı ise *Neyman paylaşırma*, tabaka çapları ve tabaka varyanslarının farklı olmasının yanında her tabakadan birim seçme maliyeti farklılık gösteriyorsa *en uygun paylaşırma* yapılması önerilmektedir[Yamane, 2001].

Bazı durumlarda sabit bir bütçe ile alan çalışması yapmak gerekebilir. En uygun paylaşırma yöntemi, n birimlik örneği belli bir maliyet kısıtı altında, varyansı minimum yapacak şekilde tabakalara paylaşırma temeline dayanmaktadır. Her bir tabakanın çapı, tabaka varyansları ve her tabakadan bir birim seçme maliyetinin birbirinden farklı olduğu durumlarda en uygun paylaşırma yönteminin kullanılması önerilir. Bu yöntem için kullanılan, doğrusal maliyet kısıtı;

$$c = c_0 + \sum_{h=1}^L n_h c_h$$

olarak tanımlanır. Burada, c araştırma için ayrılan toplam maliyeti, c_0 ofis giderleri, idari giderler, çalışanların ücretleri vb. sabit maliyetleri, c_h ise h . tabakadan bir birim seçme ya da bir birimden bilgi alma maliyetini ifade etmektedir.

n çaplı örneği yığında bulunan L tane tabakaya, verilen doğrusal maliyet kısıtı altında paylaşırma istersek, her bir tabakadan seçilmesi gereken örnek çapı;

$$n_h = \frac{N_h S_h / \sqrt{c_h}}{\sum_{h=1}^L N_h S_h / \sqrt{c_h}} n, \quad h = 1, 2, \dots, L \quad (2.1)$$

olarak belirlenir. Her tabakadan seçilecek örnek çapının belirlenmesi, eşitlik kısıtlı bir optimizasyon problemidir ve çözüm için genellikle Lagrange çarpanları yöntemi kullanılır. Eş. 2.1'den görüleceği gibi her tabakadan seçilecek örnek çapı, tabakanın çapı ve varyansı ile doğru orantılı, tabakadan bir birim seçme maliyeti ile ters

orantılıdır. Bu durum, tabakanın çapı ve varyansı ne kadar büyük ve tabakadan bir birim seçme maliyeti ne kadar küçükse bu tabakadan o kadar fazla örnek seçilmesi gerektiği anlamına gelmektedir. Bununla birlikte, her zaman her tabakadan bir birim seçme maliyeti bilinemeyebilir. Bu durumda, maliyetlerin birbirine göre oranlarının bilinmesi ya da maliyet oranlarının dolaylı yoldan tahmin edilmesi gerekir. Örneğin, yığınınızda iki tabaka olsun. 1. tabaka kent ve 2. tabaka kırsal iken, kırsal alanda bir birey ile yapılacak görüşmenin, kenttekinin 4 katı kadar zaman alacağı bilinebilir. Böylece 2. tabakanın maliyeti, 1. tabakanının 4 katı olarak tahmin edilebilir.

Maliyet kısıtımız doğrusal olduğunda, örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapacak n_h değerlerinin belirlenmesi oldukça kolaydır. Bununla birlikte, maliyet kısıtları doğrusal olmadığına n_h değerlerinin belirlenmesi oldukça karmaşıktır. Bu çalışmada, doğrusal olmayan maliyet kısıtları altında, örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapacak n_h değerlerinin belirlenmesi ile ilgilenilecektir. Literatürde önerilen doğrusal olmayan maliyet kısıtları aşağıdaki gibidir:

Doğrusal olmayan maliyet kısıtları;

1. $c = c_0 + \sum_{h=1}^L t_h n_h^\alpha$, $\alpha > 0$ biçimindedir [Cochran, 1977, Bretthauer ve ark., 1999]. Burada,

c : Araştırma için ayrılan toplam bütçe

c_0 : Sabit bütçe

t_h : h . tabakaya seyahat maliyeti

α : h . tabakaya seyahat etmenin maliyet kısıtı üzerine etkisi

olarak ifade edilmektedir. Bu maliyet kısıtı doğrusal olmayan yapıdadır. Tabakalardan bir birim seçme maliyeti çok farklı değil fakat tabakadan tabakaya

seyahat maliyeti önemli derecede farklılık gösteriyorken bu maliyet kısıtının kullanılması uygun olur.

$$2. \quad c = c_0 + \sum_{h=1}^L c_h n_h^\alpha, \alpha > 0 \text{ biçimindedir [Chernyak, 2001]. Burada,}$$

c : Araştırma için ayrılan toplam bütçe

c_0 : Sabit bütçe

c_h : h . tabakadan bir birim seçme maliyeti

α : h . tabakadan bir birim seçmenin maliyet kısıtı üzerine etkisi

olarak ifade edilmektedir. Bu maliyet kısıtı doğrusal olmayan yapıdadır. Tabakadan tabakaya seyahat maliyeti önemli derecede farklı değil fakat tabakalardan bir birim seçme maliyeti farklılık gösteriyorken bu maliyet kısıtının kullanılması uygun olur.

$$3. \quad c = c_0 + \sum_{h=1}^L c_h \ln(n_h) \text{ biçimindedir [Chernyak, 2001]. Burada,}$$

c : Araştırma için ayrılan toplam bütçe

c_0 : Sabit bütçe

c_h : h . tabakadan bir birim seçme maliyeti

olarak ifade edilmektedir. Bu maliyet kısıtı da doğrusal olmayan yapıdadır. Tabakadan tabakaya seyahat maliyeti önemli derecede farklı değil fakat tabakalardan bir birim seçme maliyeti çok farklılık gösteriyorken bu maliyet kısıtının kullanılması uygun olur.

$$4. \quad c = c_0 + \sum_{h=1}^L t_h \ln(n_h) \text{ biçimindedir [Chernyak, 2001]. Burada,}$$

c : Araştırma için ayrılan toplam bütçe

c_0 : Sabit bütçe

t_h : h . tabakaya seyahat maliyeti

olarak ifade edilmektedir. Bu maliyet kısıtı da doğrusal olmayan yapıdadır. Tabakalardan bir birim seçme maliyeti çok farklı değil fakat tabakadan tabakaya seyahat maliyeti çok farklılık gösteriyorken bu maliyet kısıtının kullanılması uygun olur.

Literatürde uzun yıllardır tabakalı tesadüfi örneklemede örnek çapının tabakalara paylaştırılması problemiyle ilgili çalışmalar yapılmaktadır. Bununla birlikte, yapılan çalışmaların çoğu doğrusal maliyet kısıtı altında örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapacak örnek çaplarının bulunması üzerinedir. Son yıllarda yapılan çalışmalar aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Bretthauer ve ark.(1999), optimum paylaştırma için önerilen biri doğrusal diğeri doğrusal olmayan iki farklı maliyet kısıtı altında, tamsayı doğrusal olmayan programlama algoritmasını kullanarak örneğin tabakalara paylaştırılması problemi ile ilgilenmişlerdir. Bu çalışmada maliyet kısıtlarının hem amaç fonksiyonu hem de kısıt olduğu durumları göz önüne alarak, dal-sınır, dinamik programlama ve Lagrange çarpanları yöntemlerini kullanmışlardır. Çalışma sonunda bu iki maliyet kısıtının farklı çözüm algoritmalarının CPU zamanlarını incelemişler fakat bu çalışmada maliyet kısıtlarından hangisinin hangi durumlarda varyansı nasıl etkilediği ve

$$\sum_{h=1}^L n_h = n \text{ kısıtını göz önüne almamışlardır.}$$

Chernyak(2001), doğrusal olmayan iki farklı maliyet kısıtı altında, Lagrange çarpanları yöntemini kullanarak tabakalı tesadüfi örnekleme ve çift örnekleme için örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapan n_h değerlerini genelleterek teorem halinde vermiştir. Bununla birlikte, Lagrange çarpanları yöntemi eşitlik kısıtlı optimizasyon yöntemi olduğundan, bu çalışmada $2 \leq n_h \leq N_h$ kısıtı dikkate alınmamıştır.

Clark ve Steel(2000), belirlenmiş örnek çapı n 'nin tabakalara paylaştırılması için doğrusal maliyet kısıtına ek kısıtlar ekleyerek, oluşan yeni doğrusal maliyet kısıtı altında örnek çapının tabakalara paylaştırılması problemi ile ilgilenmişlerdir. Bu ek kısıtlar, yığındaki bazı tabakalar için sağlanması gereken kısıtlardır. Örneğin, araştırmayı yapan uzmanın görüşleri doğrultusunda yığındaki herhangi bir tabakaya ilişkin n_h değeri için bir alt sınır ya da üst sınır belirlenebilir. Yazarlar bu gibi durumları bir ek kısıt olarak göz önüne alıp, doğrusal maliyet kısıtına eklemişlerdir.

Bretthauer ve Shetty(1995), dal-sınır algoritması ve iki farklı sezgisel yaklaşımı kullanarak doğrusal olmayan tamsayılı kaynak paylaştırma problemi ile ilgilenmişlerdir. Uygulama olarak da, tabakalı tesadüfi örneklemede örnek çapının tabakalara paylaştırılması problemini ele almışlardır. Bununla birlikte, bu çalışmada ele alınan maliyet kısıtı doğrusaldır.

Bosch ve Wildner(2003), doğrusal maliyet kısıtı altında çok değişkenli tabakalı tesadüfi örnekleme için, Lagrange çarpanları yöntemini kullanarak örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapacak n_h 'ları belirleme problemini ele almışlardır.

Khan ve ark.(2003) ve Khan ve Ahsan(2003), doğrusal maliyet kısıtı altında çok değişkenli tabakalı tesadüfi örnekleme için, dinamik programlama yöntemini kullanarak örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapacak n_h 'ları belirleme problemini ele almışlardır.

Green(2000), örnek çapının minimum yapılmasını amaç fonksiyonu olarak kabul edip, tabakalardan seçilecek örnek çaplarına kısıtlar getirmiş($n_h \geq A$ gibi) ve matematiksel programlama tekniklerini kullanarak tek ya da daha fazla aşamalı tabakalı tesadüfi örnekleme yöntemleri için örnek çapının tabakalara paylaştırılması problemini ele almıştır.

Diaz-Garcia ve Garay-Tapia(2005), doğrusal maliyet kısıtı altında tamsayı doğrusal olmayan stokastik programlama yöntemini kullanarak örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapacak n_h 'ları belirleme problemini ele almışlardır.

Diaz-Garcia(2006), doğrusal maliyet kısıtı altında çok değişkenli tabakalı tesadüfi örnekleme için, tamsayı çok-amaçlı optimizasyon problemini hedef programlama problemine çevirerek örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapacak n_h 'ları belirleme problemini ele almıştır.

Valliant ve Gentle(1997), iki aşamalı örnekleme için örnek çaplarına hedef değerleri koyarak(örneğin, $n_{h,\min} \leq n_h \leq N_h$ gibi) çok amaçlı programlamayı kullanarak ve çalışmalarını varyans bileşenleriyle ilişkilendirerek örnek çapının paylaşılması problemini ele almışlardır.

Semiz(2004), doğrusal maliyet kısıtı altında çok değişkenli tabakalı tesadüfi örnekleme için, tamsayı hedef programlama yöntemini kullanarak örnek çapının tabakalara paylaşılması problemi ile ilgilenmiştir. Elde ettiği örnek çaplarını kullanarak örnek ortalaması istatistiğinin varyansını bulmuş ve bulduğu bu varyans değeri ile diğer yöntemlerle elde edilen varyanslar arasındaki göreceli etkinliği incelemiştir.

Davis ve Finch(1983), doğrusal maliyet kısıtını kullanarak, maliyeti minimum yapmayı amaçlamışlardır. Bunun için, her tabakadan gelen varyansa ilişkin kısıtlar getirmişler ve bu varyans kısıtları altında maliyeti minimum yapacak örnek çaplarını kısıtlı geometrik programlama yöntemini kullanarak bulmuşlardır.

Örnek çapının tabakalara paylaşılması ile ilgili diğer çalışmaların bazıları Kao ve McCabe(1991), Judez ve ark.(2006), McCallion(1992), Serfling(1968), Ernst(1989), Mulvey ve ark.(2000), Öztoprak(1997), Csenki(1997), Srikantan(1963), Zinger(1962), Swindel ve Yandle(1972), Kokan ve Khan(1967), Ramachandran ve

Rao(1974), Kokan(1963), Newbold(1971), Sanathanan(1971) ve Evans(1951) tarafından yapılmıştır.

Tabakalı tesadüfi örneklemede, tabakalarda hem tek değişken hem de çok değişken olması durumunda örnek çapının tabakalara paylaştırılması problemi ile ilgili şu ana kadar yapılan çalışmalarda genellikle doğrusal maliyet kısıtı kullanılmıştır. Doğrusal olmayan maliyet kısıtı altında yapılan çalışmaların sayısı tek değişkenli tabakalı tesadüfi örnekleme için çok az, çok değişkenli tabakalı tesadüfi örnekleme için ise yoktur.

Bu çalışmada amaç, tek değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemede, doğrusal olmayan maliyet kısıtları altında farklı optimizasyon yöntemleri kullanılarak örnek çapının en iyi şekilde tabakalara paylaştırılması ve çok değişkenli tabakalı tesadüfi örnekleme için ise doğrusal olmayan maliyet kısıtı altında klasik modele alternatif olarak yeni bir modelin önerilmesidir.

3. TEK DEĞİŞKENLİ TABAKALI TESADÜFİ ÖRNEKLEME İÇİN FARKLI OPTİMİZASYON TEKNİKLERİ İLE ÖRNEK ÇAPININ TABAKALARA PAYLAŞTIRILMASI

Amaç fonksiyonu ya da kısıtlardan herhangi birisi doğrusal değil ise, bu problem doğrusal olmayan programlama problemidir. Ele aldığımız çalışmada, hem örnek ortalaması istatistiğinin varyansı hem de maliyet kısıtları doğrusal değildir. Doğrusal olmayan problemlerin çözümünde kullanılan pek çok optimizasyon yöntemi bulunmaktadır[Bal, 1995; Rao, 1996; Hamdy, 2000; Ignizio, 1976].

Bu bölümde, tek değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemede doğrusal olmayan maliyet kısıtları altında örnek çapının tabakalara paylaşılması için, doğrusal olmayan optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılan en yaygın yöntemlerden olan Lagrange çarpanları, Kuhn-Tucker, Geometrik ve Doğrusal Olmayan Hedef programlama yöntemleri kullanılmıştır. Ayrıca, izleyen alt bölümlerde kullanılan bu yöntemler simülasyon yoluyla karşılaştırılarak, birbirlerine göre üstünlükleri araştırılmış ve hangi şartlar altında örnek ortalaması istatistiğinin varyansını nasıl etkiledikleri tartışılmıştır.

3.1. Lagrange Çarpanları Yöntemi

Lagrange çarpanları yöntemi, ister amaç ister kısıt fonksiyonu doğrusal olsun ya da olmasın eşitlik kısıtlı optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılan en yaygın yöntemdir.

Eşitlik kısıtlı optimizasyon problemi aşağıdaki gibi verilsin:

$$\text{Min } f = f(x)$$

$$g_i(x) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Burada $f(x)$ amaç fonksiyonunu, $g_i(x)$ i . kısıtı, m kısıtların sayısını göstermek üzere; $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $m \leq n$ 'dir. Lagrange çarpanları yönteminde,

gereklilik şartı ile optimum noktalar elde edilirken, yeterlilik şartı ile elde edilen optimum noktaların minimum, maksimum ya da eyer noktası olduğuna karar verilir.

Gerekli Şart : Önce her bir kısıt için λ_i Lagrange çarpanları kullanılarak, $L(X, \lambda)$ Lagrange fonksiyonu oluşturulur.

$$L(X, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i [g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)]$$

Yukarıdaki kısıtlı optimizasyon problemi bu fonksiyon yardımı ile kısıtsız optimizasyon problemine dönüştürülür.

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = -(g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\forall \lambda_i \text{ serbest} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Bu yöntemde, kısıtlar eşitlik halinde olduğundan λ_i Lagrange çarpanları serbesttir. Denklemlerden (X_0, λ_0) çözümü elde edilir.

$$\text{Rank} \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right]_{(x_0, \lambda_0)} = m$$

Yeterli Şart : Yukarıdaki $L(X, \lambda)$ fonksiyonu için yeterli şartlar çeşitli yollardan bulunabilir.

P kısıtların x_j 'lere ($j = 1, 2, \dots, n$) göre türevlerinin matrisi, Q Lagrange fonksiyonunun x_j 'lere göre ikinci türevler matrisini ifade etmek üzere;

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad Q = \left[\frac{\partial^2 L(X, \lambda)}{\partial x_i \partial x_j} \right], \quad \Delta = \begin{bmatrix} 0 & P \\ P^T & Q - \mu I \end{bmatrix}$$

tanımlayalım. Burada μ bilinmeyen negatif ve pozitif değer alabilen bir sayı ve I birim matristir.

$|\Delta| = 0$ denkleminde elde edilecek köklerin sayısı $n - m$ tanedir.

- a) Köklerin hepsi pozitif ise (X_0, λ_0) noktasına f amaç fonksiyonunun minimum noktası denir.
- b) Köklerin hepsi negatif ise (X_0, λ_0) noktasına f amaç fonksiyonunun maksimum noktası denir.
- c) Köklerden bazıları negatif, bazıları pozitif ise noktanın maksimumluğu ya da minimumluğu hakkında bir yorum yapılamaz. (X_0, λ_0) eyer noktasıdır.

Herhangi bir kısıtın sağ taraf sabitinde(kaynağında) meydana gelen bir birimlik artma ya da azalma, amaç fonksiyonunun en iyi değerinde kısıta karşı gelen Lagrange çarpanı kadar artma ya da azalmaya neden olur.

3.1. Teorem

Tek değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemede $c = c_0 + \sum_{h=1}^L c_h n_h^\alpha$ $\alpha > 0$ biçimindeki doğrusal olmayan maliyet fonksiyonu kullanıldığında

$$\frac{n_h}{n} = \frac{(W_h^2 S_h^2 / c_h)^{1/(1+\alpha)}}{\sum_{h=1}^L (W_h^2 S_h^2 / c_h)^{1/(1+\alpha)}} \quad (3.1)$$

iken, maliyet fonksiyonu kısıt olarak alındığında, örnek ortalaması istatistiğinin varyansı minimumdur ve varyans fonksiyonu kısıt olarak alındığında, maliyet minimumdur.

Eğer maliyet fonksiyonu kısıt olarak alınmış ise yığından seçilecek örnek çapı;

$$n = \frac{C^{1/\alpha} \sum_{h=1}^L (W_h^2 S_h^2 / c_h)^{1/(1+\alpha)}}{\left[\sum_{h=1}^L (W_h^2 S_h^2 c_h^{1/\alpha})^{\alpha/(1+\alpha)} \right]^{1/\alpha}} \quad (3.2)$$

olur. Eğer varyans fonksiyonu kısıt olarak alınmış ise yığından seçilecek örnek çapı;

$$n = \frac{\sum_{h=1}^L (W_h^2 S_h^2 c_h^{1/\alpha})^{\alpha/(1+\alpha)} \sum_{h=1}^L (W_h^2 S_h^2 / c_h)^{1/(1+\alpha)}}{V + \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{N_h}} \quad (3.3)$$

olarak elde edilir[Chernyak, 2001].

İspat

Örnek ortalaması istatistiğinin varyansı $V(\bar{x}_{tb}) = \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{n_h} - \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{N_h}$ ve ele alınan

doğrusal olmayan maliyet fonksiyonu $c = c_0 + \sum_{h=1}^L c_h n_h^\alpha$ $\alpha > 0$ olmak üzere;

Eş. 3.1'in elde edilmesi : Varyans amaç fonksiyonu, maliyet kısıt olarak ele alınırsa;

$$\min V(\bar{x}_{tb}) = \min \left(\sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{n_h} - \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{N_h} \right)$$

$$c = c_0 + \sum_{h=1}^L c_h n_h^\alpha$$

probleminin çözümünde Lagrange çarpanları yöntemini kullanabiliriz. Doğrusal olmayan maliyet kısıtı aşağıdaki gibi düzenlenerek Lagrange fonksiyonu yardımıyla,

$$c = c_0 + \sum_{h=1}^L c_h n_h^\alpha \Rightarrow c - c_0 = \sum_{h=1}^L c_h n_h^\alpha \Rightarrow c' = C = \sum_{h=1}^L c_h n_h^\alpha$$

$$L(\lambda, n_h) = \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{n_h} - \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{N_h} + \lambda \left(\sum_{h=1}^L c_h n_h^\alpha - c' \right)$$

$$\frac{\partial L(\lambda, n_h)}{\partial n_h} = -\frac{W_h^2 S_h^2}{n_h^2} + \lambda \alpha c_h n_h^{\alpha-1} = 0$$

$$\lambda \alpha c_h n_h^{\alpha-1} = \frac{W_h^2 S_h^2}{n_h^2}$$

$$n_h^{\alpha-1} n_h^2 = \frac{W_h^2 S_h^2}{\lambda \alpha c_h}$$

$$n_h^{\alpha+1} = \frac{W_h^2 S_h^2 / c_h}{\lambda \alpha}$$

$$n_h = \left(\frac{W_h^2 S_h^2 / c_h}{\lambda \alpha} \right)^{1/(\alpha+1)} \quad (3.4)$$

olarak elde edilir. Eş. 3.4'den elde edilen n_h değerleri $c' = \sum_{h=1}^L c_h n_h^\alpha$ maliyet kısıtı

altında $V(\bar{x}_{tb})$ 'yi minimum yapan örnek çaplarıdır. Bununla birlikte elde ettiğimiz

eşitliği λ değerinden kurtarmak için $n = \sum_{h=1}^L n_h$ eşitliğinden faydalanabiliriz.

$$\begin{aligned}
n &= \sum_{h=1}^L n_h = \sum_{h=1}^L \left(\frac{W_h^2 S_h^2 / c_h}{\lambda \alpha} \right)^{1/(1+\alpha)} \\
n &= \frac{\sum_{h=1}^L (W_h^2 S_h^2 / c_h)^{1/(1+\alpha)}}{(\lambda \alpha)^{1/(1+\alpha)}} \\
n &= (\lambda \alpha)^{-1/(1+\alpha)} \sum_{h=1}^L (W_h^2 S_h^2 / c_h)^{1/(1+\alpha)} \tag{3.5}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Eş. 3.4 ile Eş. 3.5 oranlanırsa;

$$\begin{aligned}
\frac{n_h}{n} &= \frac{\left(\frac{W_h^2 S_h^2 / c_h}{\lambda \alpha} \right)^{1/(1+\alpha)}}{(\lambda \alpha)^{-1/(1+\alpha)} \sum_{h=1}^L (W_h^2 S_h^2 / c_h)^{1/(1+\alpha)}} \\
\frac{n_h}{n} &= \frac{(\lambda \alpha)^{-1/(1+\alpha)} (W_h^2 S_h^2 / c_h)^{1/(1+\alpha)}}{(\lambda \alpha)^{-1/(1+\alpha)} \sum_{h=1}^L (W_h^2 S_h^2 / c_h)^{1/(1+\alpha)}} \\
\frac{n_h}{n} &= \frac{(W_h^2 S_h^2 / c_h)^{1/(1+\alpha)}}{\sum_{h=1}^L (W_h^2 S_h^2 / c_h)^{1/(1+\alpha)}}
\end{aligned}$$

doğrusal olmayan maliyet kısıtı altında, örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapan Eş. 3.1 elde edilir.

Maliyet amaç fonksiyonu, varyans kısıt olarak ele alınır;

$$\begin{aligned}
\min(Maliyet) &= \min \left(\sum_{h=1}^L c_h n_h^\alpha \right) \\
V &= \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{n_h} - \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{N_h}
\end{aligned}$$

Lagrange fonksiyonu aşağıdaki gibi düzenlenmesiyle,

$$\begin{aligned}
L(\lambda, n_h) &= \sum_{h=1}^L c_h n_h^\alpha + \lambda \left(\sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{n_h} - \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{N_h} - V \right) \\
\frac{\partial L(\lambda, n_h)}{\partial n_h} &= \alpha c_h n_h^{\alpha-1} - \lambda \frac{W_h^2 S_h^2}{n_h^2} = 0 \\
\alpha c_h n_h^{\alpha-1} &= \lambda \frac{W_h^2 S_h^2}{n_h^2} \\
n_h^{\alpha-1} n_h^2 &= \lambda \frac{W_h^2 S_h^2}{\alpha c_h} \\
n_h^{\alpha+1} &= \left(\frac{\lambda}{\alpha} \right) (W_h^2 S_h^2 / c_h) \\
n_h &= \left(\frac{\lambda}{\alpha} \right)^{1/(\alpha+1)} (W_h^2 S_h^2 / c_h)^{1/(\alpha+1)}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

olarak elde edilir. Eş. 3.6'da elde edilen n_h değerleri varyans kısıtı altında maliyeti minimum yapan örnek çaplarıdır. Bununla birlikte elde ettiğimiz eşitliği λ değerinden kurtarmak için $n = \sum_{h=1}^L n_h$ eşitliğinden faydalanabiliriz.

$$n = \sum_{h=1}^L n_h = \left(\frac{\lambda}{\alpha} \right)^{1/(\alpha+1)} \sum_{h=1}^L (W_h^2 S_h^2 / c_h)^{1/(\alpha+1)} \tag{3.7}$$

olarak elde edilir. Buradan, Eş. 3.6 ve Eş. 3.7 oranlanırsa;

$$\frac{n_h}{n} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\alpha} \right)^{1/(\alpha+1)} (W_h^2 S_h^2 / c_h)^{1/(\alpha+1)}}{\left(\frac{\lambda}{\alpha} \right)^{1/(\alpha+1)} \sum_{h=1}^L (W_h^2 S_h^2 / c_h)^{1/(\alpha+1)}}$$

$$\frac{n_h}{n} = \frac{(W_h^2 S_h^2 / c_h)^{1/(1+\alpha)}}{\sum_{h=1}^L (W_h^2 S_h^2 / c_h)^{1/(1+\alpha)}}$$

varyans kısıtı altında, maliyeti minimum yapan Eş. 3.1 elde edilir.

Eş. 3.2'nin elde edilmesi : Araştırma için C maliyet kısıtı belirlenmişken; Eş. 3.4'de

elde edilen $n_h = \left(\frac{W_h^2 S_h^2 / c_h}{\lambda \alpha} \right)^{1/(1+\alpha)}$ değeri C maliyet fonksiyonunda yerine yazılır ve $(\lambda \alpha)^{1/(1+\alpha)}$ için çözülürse;

$$C = \sum_{h=1}^L c_h n_h^\alpha \quad \text{ve} \quad n_h = \frac{(W_h^2 S_h^2 / c_h)^{1/(1+\alpha)}}{(\lambda \alpha)^{1/(1+\alpha)}} \quad \text{olmak üzere;}$$

$$C = \sum_{h=1}^L c_h \left(\frac{(W_h^2 S_h^2 / c_h)^{1/(1+\alpha)}}{(\lambda \alpha)^{1/(1+\alpha)}} \right)^\alpha$$

$$C = \sum_{h=1}^L c_h \frac{(W_h^2 S_h^2 / c_h)^{\alpha/(1+\alpha)}}{(\lambda \alpha)^{\alpha/(1+\alpha)}}$$

$$(\lambda \alpha)^{\alpha/(1+\alpha)} = C^{-1} \left[\sum_{h=1}^L c_h (W_h^2 S_h^2 / c_h)^{\alpha/(1+\alpha)} \right]$$

$$(\lambda \alpha)^{\alpha/(1+\alpha)} = C^{-1} \left[\sum_{h=1}^L c_h^{1/(1+\alpha)} (W_h^2 S_h^2)^{\alpha/(1+\alpha)} \right]$$

$$(\lambda \alpha)^{\alpha/(1+\alpha)} = C^{-1} \left[\sum_{h=1}^L (W_h^2 S_h^2 c_h^{1/\alpha})^{\alpha/(1+\alpha)} \right]$$

$$(\lambda \alpha)^{1/(1+\alpha)} = C^{-1/\alpha} \left[\sum_{h=1}^L (W_h^2 S_h^2 c_h^{1/\alpha})^{\alpha/(1+\alpha)} \right]^{1/\alpha} \quad (3.8)$$

olarak bulunur. Eş. 3.5’de $n = (\lambda\alpha)^{-1/(1+\alpha)} \sum_{h=1}^L (W_h^2 S_h^2 / c_h)^{1/(1+\alpha)}$ olarak bulunmuştu. Bu durumda, belirlenmiş bir C maliyeti için Eş. 3.8’de elde edilen $(\lambda\alpha)^{1/(1+\alpha)}$ değeri Eş. 3.5’de yerine yazılırsa;

$$n = \left(C^{-1/\alpha} \left[\sum_{h=1}^L \left(W_h^2 S_h^2 c_h^{1/\alpha} \right)^{\alpha/(1+\alpha)} \right]^{1/\alpha} \right)^{-1} \sum_{h=1}^L (W_h^2 S_h^2 / c_h)^{1/(1+\alpha)}$$

$$n = \frac{C^{1/\alpha} \sum_{h=1}^L (W_h^2 S_h^2 / c_h)^{1/(1+\alpha)}}{\left[\sum_{h=1}^L \left(W_h^2 S_h^2 c_h^{1/\alpha} \right)^{\alpha/(1+\alpha)} \right]^{1/\alpha}}$$

maliyet kısıtı altında, yığından seçilecek örnek çapını belirleyen Eş. 3.2 elde edilir.

Eş. 3.3’ün elde edilmesi : Araştırma için V varyans kısıtı belirlenmişken; Eş. 3.6’da elde edilen $n_h = \left(\frac{\lambda}{\alpha} \right)^{1/(1+\alpha)} (W_h^2 S_h^2 / c_h)^{1/(1+\alpha)}$ değeri V ’de yerine yazılır ve $\left(\frac{\lambda}{\alpha} \right)^{1/(1+\alpha)}$ için çözülürse;

$$V = \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{n_h} - \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{N_h} \quad \text{ve} \quad n_h = \left(\frac{\lambda}{\alpha} \right)^{1/(1+\alpha)} (W_h^2 S_h^2 / c_h)^{1/(1+\alpha)} \quad \text{olmak üzere;}$$

$$V = \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{\left(\frac{\lambda}{\alpha} \right)^{1/(1+\alpha)} (W_h^2 S_h^2 / c_h)^{1/(1+\alpha)}} - \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{N_h}$$

$$\sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{\left(\frac{\lambda}{\alpha} \right)^{1/(1+\alpha)} (W_h^2 S_h^2 / c_h)^{1/(1+\alpha)}} = V + \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{N_h}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{(W_h^2 S_h^2 / c_h)^{1/(1+\alpha)}} &= \left(\frac{\lambda}{\alpha} \right)^{1/(1+\alpha)} \left(V + \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{N_h} \right) \\
\sum_{h=1}^L (W_h^2 S_h^2)^{\alpha/(1+\alpha)} c_h^{1/(1+\alpha)} &= \left(\frac{\lambda}{\alpha} \right)^{1/(1+\alpha)} \left(V + \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{N_h} \right) \\
\sum_{h=1}^L (W_h^2 S_h^2 c_h^{1/\alpha})^{\alpha/(1+\alpha)} &= \left(\frac{\lambda}{\alpha} \right)^{1/(1+\alpha)} \left(V + \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{N_h} \right) \\
\left(\frac{\lambda}{\alpha} \right)^{1/(1+\alpha)} &= \frac{\sum_{h=1}^L (W_h^2 S_h^2 c_h^{1/\alpha})^{\alpha/(1+\alpha)}}{V + \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{N_h}} \tag{3.9}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Eş. 3.7’de $n = \left(\frac{\lambda}{\alpha} \right)^{1/(1+\alpha)} \sum_{h=1}^L (W_h^2 S_h^2 / c_h)^{1/(1+\alpha)}$ olarak bulunmuştu. Bu

durumda, belirlenmiş bir V varyansı için Eş. 3.9’da elde edilen $\left(\frac{\lambda}{\alpha} \right)^{1/(1+\alpha)}$ değeri Eş.

3.7’de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
n &= \frac{\sum_{h=1}^L (W_h^2 S_h^2 c_h^{1/\alpha})^{\alpha/(1+\alpha)}}{V + \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{N_h}} \sum_{h=1}^L (W_h^2 S_h^2 / c_h)^{1/(1+\alpha)} \\
n &= \frac{\sum_{h=1}^L (W_h^2 S_h^2 c_h^{1/\alpha})^{\alpha/(1+\alpha)} \sum_{h=1}^L (W_h^2 S_h^2 / c_h)^{1/(1+\alpha)}}{V + \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{N_h}}
\end{aligned}$$

varyans kısıtı altında yığından seçilecek örnek çapını belirleyen Eş. 3.3 elde edilir. Maliyetin ya da varyansın kısıt olarak alınması göz önünde bulundurularak, önce Eş. 3.2 ya da Eş. 3.3 ile n örnek çapı bulunur, daha sonra bulunan örnek çapı Eş. 3.1 ile tabakalara paylaştırılır. Lagrange çarpanları yönteminin dezavantajı $n_h \leq N_h$ kısıtını dikkate almamasıdır.

3.2. Teorem

Tek değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemede $c = \sum_{h=1}^L c_h \ln(n_h)$ biçiminde doğrusal olmayan maliyet fonksiyonu kullanıldığında

$$\frac{n_h}{n} = \frac{W_h^2 S_h^2 / c_h}{\sum_{h=1}^L W_h^2 S_h^2 / c_h} \quad (3.10)$$

iken, maliyet fonksiyonu kısıt olarak alındığında, örnek ortalaması istatistiğinin varyansı minimumdur ve varyans fonksiyonu kısıt olarak alındığında, maliyet minimumdur.

Eğer maliyet fonksiyonu kısıt olarak alınmış ise yığından seçilecek örnek çapı;

$$n = \exp \left\{ \frac{C - \sum_{h=1}^L c_h \ln(W_h^2 S_h^2 / c_h)}{\sum_{h=1}^L c_h} \right\} \sum_{h=1}^L W_h^2 S_h^2 / c_h \quad (3.11)$$

olur. Eğer varyans fonksiyonu kısıt olarak alınmış ise yığından seçilecek örnek çapı;

$$n = \left[\sum_{h=1}^L c_h \right] \frac{\sum_{h=1}^L W_h^2 S_h^2 / c_h}{V + \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{N_h}} \quad (3.12)$$

olarak elde edilir[Chernyak, 2001].

İspat

Örnek ortalaması istatistiğinin varyansı $V(\bar{x}_{tb}) = \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{n_h} - \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{N_h}$ ve ele alınan

doğrusal olmayan maliyet fonksiyonu $c = \sum_{h=1}^L c_h \ln(n_h)$ olmak üzere;

Eş. 3.10'nun elde edilmesi : Varyans amaç fonksiyonu, maliyet kısıt olarak ele alınırsa;

$$\min V(\bar{x}_{tb}) = \min \left(\sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{n_h} - \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{N_h} \right)$$

$$c = \sum_{h=1}^L c_h \ln(n_h)$$

probleminin çözümünde Lagrange çarpanları yöntemini kullanabiliriz.

$$L(\lambda, n_h) = \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{n_h} - \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{N_h} + \lambda \left(\sum_{h=1}^L c_h \ln(n_h) - c \right)$$

$$\frac{\partial L(\lambda, n_h)}{\partial n_h} = -\frac{W_h^2 S_h^2}{n_h^2} + \lambda c_h \frac{1}{n_h} = 0$$

$$\lambda c_h \frac{1}{n_h} = \frac{W_h^2 S_h^2}{n_h^2}$$

$$n_h = \frac{W_h^2 S_h^2 / c_h}{\lambda} \quad (3.13)$$

olarak elde edilir. $n = \sum_{h=1}^L n_h$ eşitliğinden faydalanırsak;

$$n = \sum_{h=1}^L n_h = \frac{1}{\lambda} \sum_{h=1}^L W_h^2 S_h^2 / c_h \quad (3.14)$$

olarak elde edilir. Eş. 3.13 ve Eş. 3.14 oranlanırsa;

$$\frac{n_h}{n} = \frac{\frac{W_h^2 S_h^2}{c_h}}{\frac{1}{\lambda} \sum_{h=1}^L W_h^2 S_h^2 / c_h}$$

$$\frac{n_h}{n} = \frac{W_h^2 S_h^2 / c_h}{\sum_{h=1}^L W_h^2 S_h^2 / c_h}$$

doğrusal olmayan maliyet kısıtı altında, örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapan Eş. 3.10 elde edilir.

Maliyet amaç fonksiyonu, varyans kısıt olarak ele alınır;

$$\min(\text{Maliyet}) = \min \left(\sum_{h=1}^L c_h \ln(n_h) \right)$$

$$V = \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{n_h} - \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{N_h}$$

probleminin çözümünde Lagrange çarpanları yöntemini kullanabiliriz.

$$L(\lambda, n_h) = \sum_{h=1}^L c_h \ln(n_h) + \lambda \left(\sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{n_h} - \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{N_h} - V \right)$$

$$\frac{\partial L(\lambda, n_h)}{\partial n_h} = c_h \frac{1}{n_h} - \lambda \frac{W_h^2 S_h^2}{n_h^2} = 0$$

$$c_h \frac{1}{n_h} = \lambda \frac{W_h^2 S_h^2}{n_h^2}$$

$$n_h = \lambda (W_h^2 S_h^2 / c_h) \tag{3.15}$$

olarak elde edilir. $n = \sum_{h=1}^L n_h$ eşitliğinden faydalanırsak;

$$n = \sum_{h=1}^L n_h = \lambda \sum_{h=1}^L (W_h^2 S_h^2 / c_h) \quad (3.16)$$

olarak elde edilir. Eş. 3.15 ve Eş. 3.16 oranlanırsa;

$$\frac{n_h}{n} = \frac{\lambda (W_h^2 S_h^2 / c_h)}{\lambda \sum_{h=1}^L (W_h^2 S_h^2 / c_h)}$$

$$\frac{n_h}{n} = \frac{W_h^2 S_h^2 / c_h}{\sum_{h=1}^L W_h^2 S_h^2 / c_h}$$

varyans kısıtı altında, maliyeti minimum yapan Eş. 3.10 elde edilir.

Eş. 3.11'in elde edilmesi : Araştırma için C maliyet kısıtı belirlenmişken; Eş.

3.13'de elde edilen $n_h = \frac{W_h^2 S_h^2 / c_h}{\lambda}$ değeri C maliyet fonksiyonunda yerine yazılır ve

λ için çözülürse;

$$C = \sum_{h=1}^L c_h \ln(n_h) \quad \text{ve} \quad n_h = \frac{W_h^2 S_h^2 / c_h}{\lambda} \quad \text{olmak üzere;}$$

$$C = \sum_{h=1}^L c_h \ln \left(\frac{W_h^2 S_h^2 / c_h}{\lambda} \right)$$

$$C = \sum_{h=1}^L c_h \ln \left(\frac{1}{\lambda} (W_h^2 S_h^2 / c_h) \right)$$

$$C = \sum_{h=1}^L c_h \left[\ln \left(\frac{1}{\lambda} \right) + \ln (W_h^2 S_h^2 / c_h) \right]$$

$$C = \sum_{h=1}^L c_h \ln \left(\frac{1}{\lambda} \right) + \sum_{h=1}^L c_h \ln (W_h^2 S_h^2 / c_h)$$

$$C - \sum_{h=1}^L c_h \ln (W_h^2 S_h^2 / c_h) = \sum_{h=1}^L c_h \ln \left(\frac{1}{\lambda} \right)$$

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{1}{\lambda}\right) &= \frac{C - \sum_{h=1}^L c_h \ln(W_h^2 S_h^2 / c_h)}{\sum_{h=1}^L c_h} \\
\frac{1}{\lambda} &= \exp\left\{\frac{C - \sum_{h=1}^L c_h \ln(W_h^2 S_h^2 / c_h)}{\sum_{h=1}^L c_h}\right\} \\
\lambda &= \left[\exp\left\{\frac{C - \sum_{h=1}^L c_h \ln(W_h^2 S_h^2 / c_h)}{\sum_{h=1}^L c_h}\right\}\right]^{-1}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

olarak bulunur. Eş. 3.14’de $n = \frac{1}{\lambda} \sum_{h=1}^L W_h^2 S_h^2 / c_h$ olarak bulunmuştu. Bu durumda, belirlenmiş bir C maliyeti için Eş. 3.17’de elde edilen λ değeri Eş. 3.14’de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
n &= \frac{1}{\left[\exp\left\{\frac{C - \sum_{h=1}^L c_h \ln(W_h^2 S_h^2 / c_h)}{\sum_{h=1}^L c_h}\right\}\right]^{-1}} \sum_{h=1}^L W_h^2 S_h^2 / c_h \\
n &= \exp\left\{\frac{C - \sum_{h=1}^L c_h \ln(W_h^2 S_h^2 / c_h)}{\sum_{h=1}^L c_h}\right\} \sum_{h=1}^L W_h^2 S_h^2 / c_h
\end{aligned}$$

maliyet kısıtı altında yığından seçilecek örnek çapını belirleyen Eş. 3.11 elde edilir.

Eş. 3.12’nin elde edilmesi : Araştırma için V varyans kısıtı belirlenmişken; Eş. 3.15’de elde edilen $n_h = \lambda (W_h^2 S_h^2 / c_h)$ değeri V ’de yerine yazılır ve λ için çözülürse;

$$V = \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{n_h} - \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{N_h} \quad \text{ve} \quad n_h = \lambda (W_h^2 S_h^2 / c_h) \quad \text{olmak üzere;}$$

$$V = \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{\lambda (W_h^2 S_h^2 / c_h)} - \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{N_h}$$

$$V + \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{N_h} = \frac{1}{\lambda} \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{(W_h^2 S_h^2 / c_h)}$$

$$\lambda \left[V + \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{N_h} \right] = \sum_{h=1}^L c_h$$

$$\lambda = \frac{\sum_{h=1}^L c_h}{V + \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{N_h}} \quad (3.18)$$

olarak bulunur. Eş. 3.16'da $n = \lambda \sum_{h=1}^L (W_h^2 S_h^2 / c_h)$ olarak bulunmuştu. Bu durumda, belirlenmiş bir V varyansı için Eş. 3.18'de elde edilen λ değeri Eş. 3.16'da yerine yazılırsa;

$$n = \frac{\sum_{h=1}^L c_h}{V + \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{N_h}} \sum_{h=1}^L (W_h^2 S_h^2 / c_h)$$

$$n = \left[\sum_{h=1}^L c_h \right] \frac{\sum_{h=1}^L (W_h^2 S_h^2 / c_h)}{V + \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{N_h}}$$

varyans kısıtı altında yığından seçilecek örnek çapını belirleyen Eş. 3.12 elde edilir. Maliyet ya da varyansın kısıt olarak alınması göz önünde bulundurularak, önce Eş. 3.11 veya Eş. 3.12 ile n örnek çapı bulunur, daha sonra bulunan örnek çapı Eş. 3.10 ile tabakalara paylaştırılır.

3.2. Kuhn-Tucker Yöntemi

Kuhn-Tucker yöntemi, eşitsizlik kısıtlı optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılmaktadır. Bu yöntem eşitsizlik kısıtlarını, eşitlik kısıtı haline getirerek, genel Lagrange fonksiyonu oluşturma temeline dayanır. Problemin genel yapısı;

$$\text{Max } f(x)$$

$$g_i(x) \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

biçimindedir. Burada, b_i , i . kısıtın sağ taraf sabitidir. Böyle problemlerin çözümünde Kuhn-Tucker(K-T) şartlarından yararlanılır. Bunun içinde eşitsizlik kısıtları uygun değişkenlerin kullanılmasıyla eşitlik durumuna getirilir. Uygun noktalar, bu fonksiyonun gerek şartlarından elde edilir. Yukarıdaki kısıtlayıcılar $s_i^2 \geq 0$ aylak değişkeni kullanılarak eşitlik durumuna getirilir. İlgilendiğimiz problem örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapmaktır. Kurduğumuz modelin Kuhn-Tucker yöntemi ile çözümlenebilmesi için amaç fonksiyonu, Kuhn-Tucker yönteminin genel yapısına uygun olarak maksimum problemine dönüştürülebilir.

$$\text{Max } f(x)$$

$$g_i(x) \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ olmak üzere;}$$

$$\text{Max } f(x)$$

$$g_i(x) + s_i^2 = b_i \rightarrow g_i(x) + s_i^2 - b_i = 0$$

Buradan genel Lagrange fonksiyonu;

$$L(X, \lambda, s) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (b_i - g_i(x) - s_i^2)$$

olarak oluşturulur. Kuhn-Tucker Gerek Şartları;

- 1-
$$\frac{\partial L(X, \lambda, s)}{\partial x_j} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0$$
- 2-
$$\frac{\partial L(X, \lambda, s)}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(x) - s_i^2 = 0 \quad \text{veya} \quad g_i(x) \leq b_i$$
- 3-
$$\frac{\partial L(X, \lambda, s)}{\partial s_i} = -2\lambda_i s_i = \lambda_i (g_i(x) - b_i) = 0$$
- 4- Kısıtın sağ taraf sabiti(kaynağı) arttırıldığında amaç fonksiyonunun en iyi çözümü Lagrange çarpanı kadar artacağından maksimum problemi için eşitsizlik kısıtlarına karşı gelen Lagrange çarpanları $\lambda_i \geq 0$, eşitlik kısıtına karşı gelen Lagrange çarpanları ise λ_i serbest olmalıdır.

Bu dört şart Kuhn-Tucker gerek şartları olarak tanımlanmaktadır. Gerek şart denklemlerinden (X^*, λ^*) mümkün noktaları elde edilir. Noktaların maksimum mu ya da minimum mu olduğunu söyleyebilmek için Heissian matrisinden yararlanılır. Heissian matrisi aşağıdaki tanımlanmaktadır.

$$H = \frac{\partial^2 L(X, \lambda, s)}{\partial x_i \partial x_j}$$

Heissian matrisi negatif tanımlı ise (X^*, λ^*) maksimum noktadır.

Heissian matrisi pozitif tanımlı ise (X^*, λ^*) minimum noktadır.

Heissian matrisi ne negatif ne de pozitif tanımlı ise (X^*, λ^*) eyer noktasıdır.

Tabakalı tesadüfi örnekleme için, verilen herhangi doğrusal ya da doğrusal olmayan maliyet kısıtı altında varyansı minimum yapacak ya da varyans kısıtı altında maliyeti minimum yapacak n_h 'ları belirlemek Kuhn-Tucker yönteminde, Lagrange yönteminde olduğundan çok daha zor ve zaman alıcıdır. Lagrange yönteminde elde edilen genellemelere benzer genellemeler elde etmek neredeyse imkansızdır. Çünkü Kuhn-Tucker yönteminde λ_i 'lerin farklı durumları için mümkün çözümü bulmak

gerekir. Bununla birlikte, Lagrange çarpanları yöntemi $n_h \leq N_h$ kısıtını göz önüne alamadığı için elde edilen çözümlerde $n_h > N_h$ ya da $n > N$ gibi sonuçlarla karşılaşmak mümkündür. Kuhn-Tucker yönteminde $n_h \leq N_h$ ($h=1, 2, \dots, L$) eşitsizlik kısıtı göz önüne alındığından bu olumsuzluk ortadan kalkmış olur.

Öncelikle, ele aldığımız problemi Kuhn-Tucker yöntemine uygun olarak modelleyelim ve daha sonra yukarıda bahsedilen Tabakalı tesadüfi örneklemede örnek çapının tabakalara paylaştırılması probleminde, Lagrange çarpanları yönteminin kullanılmasının dezavantajlarını gösteren küçük bir örnek verelim.

→ Varyansı amaç fonksiyonu, maliyeti kısıt olarak aldığımız durumda

$$\min V(\bar{x}_{tb}) = \min \left(\sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{n_h} - \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{N_h} \right)$$

$$c = \sum_{h=1}^L c_h n_h^\alpha$$

$$n_h \leq N_h \quad h=1, 2, \dots, L$$

olur. Problemimizi maksimum problemine dönüştürürsek;

$$\max V(\bar{x}_{tb}) = \max \left(-\sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{n_h} + \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{N_h} \right)$$

$$c = \sum_{h=1}^L c_h n_h^\alpha$$

$$n_1 + s_1^2 = N_1 \Rightarrow n_1 + s_1^2 - N_1 = 0$$

$$n_2 + s_2^2 = N_2 \Rightarrow n_2 + s_2^2 - N_2 = 0$$

•

•

•

$$n_L + s_L^2 = N_L \Rightarrow n_L + s_L^2 - N_L = 0$$

biçiminde ifade edilir. Görüldüğü gibi toplam $L+1$ tane kısıt vardır. Genel Lagrange fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$L(n_h, \lambda, s) = -\sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{n_h} + \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{N_h} - \lambda_1 \left(\sum_{h=1}^L c_h n_h^\alpha - c \right) - \sum_{h=1}^L \lambda_{h+1} (n_h + s_h^2 - N_h)$$

Kuhn-Tucker yöntemi için gerek şartlar:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \frac{\partial L(n_h, \lambda, s)}{\partial n_1} = \frac{W_1^2 S_1^2}{n_1^2} - \lambda_1 \alpha c_1 n_1^{\alpha-1} - \lambda_2 = 0 \\ & \frac{\partial L(n_h, \lambda, s)}{\partial n_2} = \frac{W_2^2 S_2^2}{n_2^2} - \lambda_1 \alpha c_2 n_2^{\alpha-1} - \lambda_3 = 0 \\ & \frac{\partial L(n_h, \lambda, s)}{\partial n_3} = \frac{W_3^2 S_3^2}{n_3^2} - \lambda_1 \alpha c_3 n_3^{\alpha-1} - \lambda_4 = 0 \\ & \dots \\ & \frac{\partial L(n_h, \lambda, s)}{\partial n_L} = \frac{W_L^2 S_L^2}{n_L^2} - \lambda_1 \alpha c_L n_L^{\alpha-1} - \lambda_{L+1} = 0 \end{aligned}$$

Bu gerek şarttan L tane denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} 2. \quad & \frac{\partial L(n_h, \lambda, s)}{\partial \lambda_1} = \sum_{h=1}^L c_h n_h^\alpha - c = 0 \\ & \frac{\partial L(n_h, \lambda, s)}{\partial \lambda_2} = n_1 + s_1^2 - N_1 = 0 \text{ veya } n_1 \leq N_1 \\ & \frac{\partial L(n_h, \lambda, s)}{\partial \lambda_3} = n_2 + s_2^2 - N_2 = 0 \text{ veya } n_2 \leq N_2 \\ & \dots \\ & \frac{\partial L(n_h, \lambda, s)}{\partial \lambda_{L+1}} = n_L + s_L^2 - N_L = 0 \text{ veya } n_L \leq N_L \end{aligned}$$

Bu gerek şarttan $L+1$ tane denklem elde edilir.

$$\begin{aligned}
3. \quad & \frac{\partial L(n_h, \lambda, s)}{\partial s_1} = -2\lambda_2 s_1 = \lambda_2 (n_1 - N_1) = 0 \\
& \frac{\partial L(n_h, \lambda, s)}{\partial s_2} = -2\lambda_3 s_2 = \lambda_3 (n_2 - N_2) = 0 \\
& \dots \\
& \frac{\partial L(n_h, \lambda, s)}{\partial s_L} = -2\lambda_{L+1} s_L = \lambda_{L+1} (n_L - N_L) = 0
\end{aligned}$$

Bu gerek şarttan L tane denklem elde edilir.

$$\begin{aligned}
4. \quad & \lambda_1 \text{ serbest (eşitlik kısıtı)} \\
& \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{L+1} \geq 0 \text{ (eşitsizlik kısıtları) olmalıdır.}
\end{aligned}$$

Görüldüğü gibi, bu dört gerek şart altında genelleme yapılamaz. Ancak λ_i 'lerin farklı durumları için mümkün çözüm aranır.

3.1. Örnek

500 tane süpermarket büyüklüklerine göre tabakalanmıştır. Market başına çalışan sayısı tahmin edilmek istenmektedir. Daha önceki yıllardan tabaka standart sapmaları ve her tabakadan örnek seçme maliyetleri aşağıda verildiği gibidir.

Tabaka	N_h	S_h	c_h (TL)
Büyük Market	80	12	1
Orta Market	160	8	4
Küçük Market	260	4	9
Toplam	500		

Bu araştırma için 5000TL. ayrılmış ve sabit masraflar için 3000TL. harcanmıştır. Maliyet kısıtımızın doğrusal olduğunu varsayarak bu bütçe planına göre varyansı minimum yapacak şekilde her tabakadan kaç örnek seçilmelidir?

Çözüm

1.yol: İlk olarak; temel örnekleme yöntemlerinde kullandığımız en uygun paylaştırma yöntemi mantığı ile örnek çaplarını Lagrange çarpanları yöntemini kullanarak elde etmeye çalışalım.

Doğrusal maliyet kısıtı $c = c_0 + \sum_{h=1}^3 c_h n_h$ olmak üzere;

$$5000 = 3000 + \sum_{h=1}^3 c_h n_h$$

$$\sum_{h=1}^3 c_h n_h = 2000$$

olarak elde edilir.

$$\min V(\bar{x}_{tb}) = \min \left(\sum_{h=1}^3 \frac{W_h^2 S_h^2}{n_h} - \sum_{h=1}^3 \frac{W_h^2 S_h^2}{N_h} \right)$$

$$\sum_{h=1}^3 c_h n_h = 2000 \text{ olmak üzere;}$$

Tabaka	N_h	$W_h = \frac{N_h}{N}$	W_h^2	$W_h^2 S_h^2$
Büyük Market	80	0.16	0.0256	3.6864
Orta Market	160	0.32	0.1024	6.5536
Küçük Market	260	0.52	0.2704	4.3264

$$\min V(\bar{x}_{tb}) = \frac{3.6864}{n_1} + \frac{6.5536}{n_2} + \frac{4.3264}{n_3} - \frac{3.6864}{80} - \frac{6.5536}{160} - \frac{4.3264}{260}$$

$$n_1 + 4n_2 + 9n_3 = 2000$$

Lagrange fonksiyonu;

$$L(n_h, \lambda) = \frac{3.6864}{n_1} + \frac{6.5536}{n_2} + \frac{4.3264}{n_3} - \text{sabit} + \lambda(n_1 + 4n_2 + 9n_3 - 2000)$$

$$\frac{\partial L(n_h, \lambda)}{\partial n_1} = -\frac{3.6864}{n_1^2} + \lambda = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{1.92}{n_1}$$

$$\frac{\partial L(n_h, \lambda)}{\partial n_2} = -\frac{6.5536}{n_2^2} + 4\lambda = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{1.28}{n_2}$$

$$\frac{\partial L(n_h, \lambda)}{\partial n_3} = -\frac{4.3264}{n_3^2} + 9\lambda = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{0.6933}{n_3}$$

$$\frac{1.92}{n_1} = \frac{1.28}{n_2} \Rightarrow n_2 = 0.6666n_1$$

$$\frac{1.92}{n_1} = \frac{0.6933}{n_3} \Rightarrow n_3 = 0.3610n_1$$

$$n_1 + 4n_2 + 9n_3 = 2000$$

$$n_1 + 4(0.6666n_1) + 9(0.3610n_1) = 2000$$

$$n_1 \cong 289$$

$$n_2 = 0.6666n_1 = 0.6666(289) \cong 193$$

$$n_3 = 0.3610n_1 = 0.3610(289) \cong 104$$

$$n = \sum_{h=1}^3 n_h = 289 + 193 + 104 = 586 \text{ olarak elde edilir.}$$

Görüldüğü gibi, $n_1 = 289$, $N_1 = 80$ olduğundan $n_1 > N_1$ 'dir.

$n_2 = 194$, $N_2 = 160$ olduğundan $n_2 > N_2$ 'dir.

$n_3 = 104$, $N_3 = 260$ olduğundan $n_3 < N_3$ 'dür.

Lagrange çarpanları yöntemi $n_h \leq N_h$ kısıtını göz önüne almamıştır. Dolayısıyla $n = 586 > N = 500$ çıkmıştır. Uygulamayı yöneten araştırmacı son derece dikkatli

olmalıdır. Uygulamada dikkatten kaçmayacak bu durum, teoride gözden kaçtığına varyansın negatif çıkmasına neden olur. Bu Lagrange Çarpanları yönteminin örnekleme açısından dezavantajıdır.

2.yol: Aynı problemi Kuhn-Tucker yöntemini kullanarak ve $n_h \leq N_h (h=1,2,3)$ kısıtını göz önüne alarak çözümleyelim.

$$\min V(\bar{x}_{tb}) = \frac{3.6864}{n_1} + \frac{6.5536}{n_2} + \frac{4.3264}{n_3} - \frac{3.6864}{80} - \frac{6.5536}{160} - \frac{4.3264}{260}$$

$$n_1 + 4n_2 + 9n_3 = 2000$$

$$n_1 \leq 80$$

$$n_2 \leq 160$$

$$n_3 \leq 260$$

Amaç fonksiyonumuzu maksimum problemine dönüştürürsek;

$$\max V(\bar{x}_{tb}) = -\frac{3.6864}{n_1} - \frac{6.5536}{n_2} - \frac{4.3264}{n_3} + \text{sabit}$$

$$n_1 + 4n_2 + 9n_3 = 2000$$

$$n_1 + s_1^2 = 80 \Rightarrow n_1 + s_1^2 - 80 = 0$$

$$n_2 + s_2^2 = 160 \Rightarrow n_2 + s_2^2 - 160 = 0$$

$$n_3 + s_3^2 = 260 \Rightarrow n_3 + s_3^2 - 260 = 0$$

Genel Lagrange fonksiyonu;

$$L(n_h, \lambda, s) = -\frac{3.6864}{n_1} - \frac{6.5536}{n_2} - \frac{4.3264}{n_3} + \text{sabit} - \lambda_1 (n_1 + 4n_2 + 9n_3 - 2000) \\ - \lambda_2 (n_1 + s_1^2 - 80) - \lambda_3 (n_2 + s_2^2 - 160) - \lambda_4 (n_3 + s_3^2 - 260)$$

Kuhn-Tucker gerek şartları;

$$1. \quad \frac{\partial L(n_h, \lambda, s)}{\partial n_1} = \frac{3.6864}{n_1^2} - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L(n_h, \lambda, s)}{\partial n_2} = \frac{6.5536}{n_2^2} - 4\lambda_1 - \lambda_3 = 0$$

$$\frac{\partial L(n_h, \lambda, s)}{\partial n_3} = \frac{4.3264}{n_3^2} - 9\lambda_1 - \lambda_4 = 0$$

$$2. \quad \frac{\partial L(n_h, \lambda, s)}{\partial \lambda_1} = n_1 + 4n_2 + 9n_3 = 2000$$

$$\frac{\partial L(n_h, \lambda, s)}{\partial \lambda_2} = n_1 + s_1^2 - 80 = 0 \Rightarrow n_1 \leq 80$$

$$\frac{\partial L(n_h, \lambda, s)}{\partial \lambda_3} = n_2 + s_2^2 - 160 = 0 \Rightarrow n_2 \leq 160$$

$$\frac{\partial L(n_h, \lambda, s)}{\partial \lambda_4} = n_3 + s_3^2 - 260 = 0 \Rightarrow n_3 \leq 260$$

$$3. \quad \frac{\partial L(n_h, \lambda, s)}{\partial s_1} = -2\lambda_2 s_1 = \lambda_2 (n_1 - 80) = 0$$

$$\frac{\partial L(n_h, \lambda, s)}{\partial s_2} = -2\lambda_3 s_2 = \lambda_3 (n_2 - 160) = 0$$

$$\frac{\partial L(n_h, \lambda, s)}{\partial s_3} = -2\lambda_4 s_3 = \lambda_4 (n_3 - 260) = 0$$

$$4. \quad \lambda_1 \text{ serbest}$$

$$\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0$$

** $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 0$ olsun. Bu durumda;

$$n_1 = 80$$

$$n_1 + 4n_2 + 9n_3 = 2000 \Rightarrow 4n_2 + 9n_3 = 1920$$

$$\frac{6.5536}{n_2^2} - 4\lambda_1 = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda_1} = \frac{1.28}{n_2}$$

$$\frac{4.3264}{n_3^2} - 9\lambda_1 = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda_1} = \frac{0.6933}{n_3}$$

$$\frac{1.28}{n_2} = \frac{0.6933}{n_3} \Rightarrow 0.6933n_2 - 1.28n_3 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 4n_2 + 9n_3 = 1920 \\ 0.6933n_2 - 1.28n_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow n_2 = 216.34 \cong 216$$

$n_2 > 160$ olduğundan bu durum mümkün çözüm değildir.

** $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \neq 0$, $\lambda_4 = 0$ olsun. Bu durumda;

$$n_2 = 160$$

$$n_1 + 4n_2 + 9n_3 = 2000 \Rightarrow n_1 + 9n_3 = 1360$$

$$\frac{3.6864}{n_1^2} - \lambda_1 = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda_1} = \frac{1.92}{n_1}$$

$$\frac{4.3264}{n_3^2} - 9\lambda_1 = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda_1} = \frac{0.6933}{n_3}$$

$$\frac{1.92}{n_1} = \frac{0.6933}{n_3} \Rightarrow 0.6933n_1 - 1.92n_3 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} n_1 + 9n_3 = 1360 \\ 0.6933n_1 - 1.92n_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow n_1 = 320.01 \cong 320$$

$n_1 > 80$ olduğundan bu durum mümkün çözüm değildir.

** $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$, $\lambda_4 = 0$ olsun. Bu durumda;

$$n_1 = 80, n_2 = 160$$

$$n_1 + 4n_2 + 9n_3 = 2000 \Rightarrow n_3 = 142.22 \cong 142$$

$$\frac{4.3264}{n_3^2} - 9\lambda_1 - \lambda_4 = 0 \Rightarrow \frac{4.3264}{142^2} - 9\lambda_1 - 0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0.00002384 \text{ serbest}$$

$$\frac{3.6864}{n_1^2} - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow \frac{3.6864}{80^2} - 0.00002384 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0.000552 \geq 0$$

$$\frac{6.5536}{n_2^2} - 4\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \Rightarrow \frac{6.5536}{160^2} - 4(0.00002384) - \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0.00016 \geq 0$$

$$(n_h^*, \lambda^*) = (80; 160; 142; 0.00002384; 0.000552; 0.00016; 0)$$

optimum çözümdür. Her tabaka için $n_h \leq N_h$ kısıtı sağlanmıştır. Ayrıca; $n = 80 + 160 + 142 = 382$ olarak elde edilir ve $n = 382 < N = 500$ 'dür. Elde edilen mümkün çözümün, örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapan örnek çapları olup olmadığını kontrol etmek için Heissian matrisinden faydalanılır.

$$H = \frac{\partial^2 L(n_h^*, \lambda^*)}{\partial n_i \partial n_j} = \begin{bmatrix} -\frac{7.3728}{n_1^3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{13.1072}{n_2^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8.6528}{n_3^3} \end{bmatrix}$$

$(n_h^*, \lambda^*) = (80; 160; 142; 0.00002384; 0.000552; 0.00016; 0)$ noktaları için;

$$H = \begin{bmatrix} -0.0000144 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0000032 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0000030 \end{bmatrix}$$

$$-H = \begin{bmatrix} 0.0000144 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0000032 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0000030 \end{bmatrix}$$

$-H$ pozitif tanımlı olduğundan, H negatif tanımlıdır. Bulunan optimum çözüm maksimum noktadır yani varyansımızı minimum yapan n_h 'lardır.

3.2.1. $c' = \sum_{h=1}^L t_h n_h^\alpha$ kısıtı altında örnek ortalaması istatistiğinin varyansının minimum yapılması

Bu alt bölümde, Chernyak(2001) tarafından önerilen doğrusal olmayan maliyet kısıtları ele alınmıştır. Simülasyon çalışması yardımı ile bu doğrusal olmayan maliyet kısıtları altında, tek değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemede örnek ortalaması istatistiğinin varyansı bulunarak, bu doğrusal olmayan maliyet kısıtlarının yapısı ve birbirlerine göre üstünlükleri incelenmeye çalışılmıştır. Simülasyon çalışması MATLAB programı kullanılarak yapılmıştır. Simülasyon sonuçlarının alındığı bilgisayar Pentium(R)4 CPU 2.60GHz., 248MB RAM özelliklerine sahiptir.

Öncelikle, $c' = \sum_{h=1}^L t_h n_h^\alpha$ doğrusal olmayan maliyet kısıtı göz önüne alınacaktır. α , tabakadan tabakaya seyahat etmenin maliyet kısıtı üzerine etkisini yansıtan sabit ve $\alpha > 0$ olmak üzere; α 'ya bağlı doğrusal olmayan maliyet kısıtına ilişkin simülasyon yapılarak, α 'nın hangi değerleri için örnek ortalaması istatistiğinin varyansının daha etkin olduğu incelenecektir. Bu maliyet kısıtı yardımı ile varyans değerinin bulunması için 1000 tekrarlı Monte Carlo simülasyonu kullanılacaktır. Simülasyon çalışmasında yığın çapı(N), yığından seçilecek örnek çapı(n), bütçe(c'), tabakadan tabakaya seyahat maliyeti(t_h) ve α başlangıçta verilmiştir. Belirlenen doğrusal olmayan maliyet kısıtı altında, örnek ortalaması istatistiğinin varyansının minimum yapılması için kullanılacak model;

Model :

$$\text{Min } V(\bar{x})$$

$$\sum_{h=1}^L n_h = n$$

$$\sum_{h=1}^L t_h n_h^\alpha \leq c'$$

$$r_h \leq n_h \leq k_h \quad h = 1, \dots, L$$

biçimindedir. Bu çalışmada, modelde tabaka varyanslarının ve tabakalara paylaştırılacak örnek çapının önceden bilindiği varsayılmaktadır. Bununla birlikte yığın çapı büyük olduğunda tabaka varyanslarının ve yığından seçilecek örnek çapının belirlenmesi zordur. Bunun için yığından seçilen bir pilot örnek yardımı ile tabaka varyansları tahmin edilip, yığından seçilecek örnek çapı belirlenebilir[Cochran, 1977; Hansen ve ark., 1953; Yamane, 2001]. Model kısıtlarında bulunan $r_h \leq n_h \leq k_h$ kısıtında alt sınır $r_h = 2$ alınmıştır. Bunun nedeni

$$s_h^2 = \frac{1}{n_h - 1} \sum_{i=1}^{n_h} (x_{hi} - \bar{x}_h)^2 \text{ olması ve } n_h = 1 \text{ durumunda } s_h^2 \text{ 'nin belirsiz olmasıdır. Üst}$$

sınır için ise h . tabakadaki örnek çapının alabileceği en büyük değer $k_h = N_h$ olarak verilmiştir. Ayrıca, bu çalışmada tabakalardaki örnek çapı için tamsayı kısıtına yer verilmemiştir. Çünkü tamsayı kısıtını sağlayacak örnek çaplarının bulunması mümkün çözümlerin sayısını oldukça azaltmaktadır. Amacımız bu maliyet kısıtı altında varyansı bulmak olduğundan mümkün çözümlerin sayısının artırılması hedeflenmiş ve bulunan örnek çapları tamsayı değerlere yuvarlanmıştır. Tabakalardaki örnek çaplarının tamsayı olması kısıtı da modele eklenir ise, tamsayılı programlama tekniği ile çözüm yapılabilir[Hamdy, 2000; Ravindran ve ark., 2006; Winston, 2003].

Modelin çözümünde, kısıtlı optimizasyon problemlerinde uygulanan yöntemlerden biri olan Kuhn-Tucker yöntemi kullanılmıştır.

Simülasyon çalışması aşağıdaki adımlara göre yapılmıştır.

Adım 1: Tabaka çaplarının belirlenmesi için Normal dağılımdan N birimlik sayı üretilip, kullanılan Normal dağılımın ortalaması ve kaç tabaka olduğu dikkate alınarak belirlenen tabaka sınırları çerçevesinde tabaka çapları ve tabakalardaki birimler elde edilmiştir(Örneğin iki tabaka olması durumunda ortalamanın üstündeki birimler bir tabakaya, ortalamanın altındaki birimler ise diğer tabakaya atılarak homojen tabakalar elde edilmiştir).

Adım 2: Belirlenen tabakadaki birimler yardımı ile tabaka varyansları hesaplanmıştır.

Adım 3: Belirlenen doğrusal olmayan maliyet kısıtı altında oluşturulan modelin çözümleri yapılmış, örnek ortalaması istatistiğinin varyans değerleri ve CPU time(Modelin çözülme süresi) değerleri elde edilmiştir. Burada modelin çözümü için gerekli olan başlangıç noktası, örnek çapı için belirlenen alt ve üst sınır arasında ortalama bir değer olarak seçilmiştir.

Adım 4: Adım 1-2-3 1000 defa tekrar edilmiştir.

Adım 5: Sonuçların genellenebilmesi için 1000 tekrardaki varyans ve CPU time değerlerinin ortalaması alınarak, tabakalardan seçilecek optimum örnek çapları, örnek ortalaması istatistiğinin varyans değerleri ve CPU time değerleri elde edilmiştir.

Simülasyon çalışması maliyetlerin farklı değerleri altında yapılmıştır. Simülasyon çalışması yığınınızın iki, üç, dört ve beş tabakadan oluşması durumunda yapılmış, sonuçlar dört farklı tabaka sayısı için genellenebildiğinden daha fazla tabaka sayısı dikkate alınmamıştır. Sonuçlar Çizelge 3.1-Çizelge 3.10'da özetlenmiştir.

Çizelge 3.1. $L = 2$, $N = 500$, $n = 100$, $c' = 500$, $t_1 = 1$ ve $t_2 = 1$ iken örnek çapları ve varyans değeri

α	n_1	n_2	$V(\bar{x})$	cpu	Kul. Bütçe
0.2	50.5360	49.4640	1.1722	92.9531	4.37
0.4	50.0070	49.9930	1.1655	95.9688	9.5635
0.5	49.8990	50.1010	1.1550	95.8750	14.1421
0.6	49.6110	50.3890	1.1717	97.9063	20.9126
0.8	50.1080	49.8920	1.1693	96.3906	45.7304
1	49.5870	50.4130	1.1702	96.8281	100
1.2	50.1640	49.8360	1.1639	96.9531	218.6727
1.5	39.5730	39.7700	1.5468	100.4844	499.7455
1.8	21.5240	21.4240	3.1170	102.3438	499.4304
2	15.8030	15.8290	4.3036	105.1719	500.2921

Çizelge 3.2. $L = 2$, $N = 500$, $n = 100$, $c' = 1000$, $t_1 = 1$ ve $t_2 = 50$ iken örnek çapları ve varyans değeri

α	n_1	n_2	$V(\bar{x})$	cpu	Kul. Bütçe
0.2	50.0610	49.9390	1.1614	89.8594	111.4968
0.4	49.5180	50.4820	1.1613	96.4531	244.7707
0.5	49.6980	50.3020	1.1612	96.8281	361.6692
0.6	49.7520	50.2480	1.1749	95.8438	534.7994
0.8	59.0030	40.9970	1.2171	108.6406	1001.5
1	82	18	2.1600	110.0313	982
1.2	63.6700	10.8040	3.7567	114.5313	1015.6
1.5	31.1870	6.4550	6.4354	112.2500	994.1658
1.8	18.9660	4.9710	9.3899	99.7813	1096.2
2	14.6070	4.0000	11.3667	111.6875	1013.4

Çizelge 3.3. $L = 2$, $N = 500$, $n = 100$, $c' = 1000$, $t_1 = 50$ ve $t_2 = 1$ iken örnek çapları ve varyans değeri

α	n_1	n_2	$V(\bar{x})$	cpu	Kul. Bütçe
0.2	49.8250	50.1750	1.1589	97.4375	111.4478
0.4	49.8430	50.1570	1.1596	97.5063	243.5753
0.5	49.6890	50.3110	1.1506	95.8594	359.5451
0.6	50.1520	49.8480	1.1841	98.0938	534.2101
0.8	41	59	1.2290	91.8594	1001.5
1	18	82	2.1495	100.0938	982
1.2	10.8620	62.4520	3.7328	115.6094	1017.9
1.5	6.4800	31.0070	6.4962	111.7656	997.4285
1.8	4.9830	18.8210	9.4416	108.9531	1097.4
2	4.0000	14.6720	11.1062	113.2813	1015.3

Çizelge 3.4. $L = 2$, $N = 500$, $n = 100$, $c' = 1500$, $t_1 = 25$ ve $t_2 = 35$ iken örnek çapları ve varyans değeri

α	n_1	n_2	$V(\bar{x})$	cpu	Kul. Bütçe
0.2	49.9840	50.0160	1.1598	98.3750	131.2048
0.4	49.8050	50.1950	1.7221	96.6094	286.9798
0.5	50.2780	49.7220	1.1524	97.2188	424.0659
0.6	49.9690	50.0310	1.1578	97.1406	627.4226
0.8	49.9660	50.0340	1.1673	99.0313	1372
1	27.3100	23.3600	2.6264	97.5469	1500.3
1.2	15.8650	13.6870	4.6423	102.9844	1497.8
1.5	9.2180	8.0180	8.1469	103.7344	1494.3
1.8	6.3060	5.8290	11.8392	107.7813	1523.7
2	5.1840	4.9390	14.3361	111.9219	1525.6

Çizelge 3.5. $L = 3$, $N = 10000$, $n = 500$, $c' = 550$, $t_1 = 1$, $t_2 = 1$ ve $t_3 = 1$ iken örnek çapları ve varyans değeri

α	n_1	n_2	n_3	$V(\bar{x})$	cpu	Kul. Bütçe
0.2	186.6570	126.9600	186.3600	13.9029	101.5469	8.3255
0.4	186.6550	126.7820	186.5790	13.8988	102.4531	23.1339
0.5	186.2860	126.9890	186.7600	13.8790	102.0469	38.5836
0.6	186.1960	126.8870	186.9200	19.8953	101.4688	64.3637
0.8	186.3820	127.0230	186.6150	13.8931	101.5156	179.2967
1	186.7010	126.9830	186.3440	13.8871	101.2656	500
1.2	85.0070	59.9170	85.2400	31.1245	101.5781	549.9351
1.5	35.1960	25.8940	35.2450	75.4666	90.7969	549.8099
1.8	19.6050	14.9500	19.5590	135.7870	92.9219	553.1549
2	14.5990	11.0490	14.6290	181.5751	86.2926	549.2188

Çizelge 3.6. $L = 3$, $N = 10000$, $n = 500$, $c' = 5000$, $t_1 = 15$, $t_2 = 75$ ve $t_3 = 50$ iken örnek çapları ve varyans değeri

α	n_1	n_2	n_3	$V(\bar{x})$	cpu	Kul. Bütçe
0.2	186.6190	126.9420	186.4450	13.9025	102.1406	382.5427
0.4	186.6100	126.7870	186.5850	13.9005	102.5781	1046.7
0.5	186.6980	127.0310	186.2950	13.8839	101.1094	1732.7
0.6	187.0180	126.8370	186.1330	13.9213	99.0313	2867.5
0.8	206.8670	55.0120	105.6990	24.4340	127.6250	5000
1	76.6920	23.3480	41.9550	57.0902	111.6719	4999.2
1.2	39.1050	13.1170	22.6580	106.0764	100.2188	4981.9
1.5	19.7190	7.8280	12.0090	197.4143	96.8125	5036.9
1.8	12.1910	5.0000	8.0000	299.1435	101.8125	4822.1
2	9.9570	4.0360	6.5920	368.2604	115.8750	4881.3

Çizelge 3.7. $L = 4$, $N = 10000$, $n = 2000$, $c' = 1000$, $t_1 = 1$, $t_2 = 1$, $t_3 = 1$ ve $t_4 = 1$ iken örnek çapları ve varyans değeri

α	n_1	n_2	n_3	n_4	$V(\bar{x})$	cpu	Kul. Bütçe
0.2	733.8060	266.0760	266.5110	733.5850	1.8031	102.4844	13.5948
0.4	731.7840	266.5420	266.5630	735.1060	1.8038	101.9844	46.6798
0.5	731.4390	266.3930	267.3550	734.8250	1.8010	101.1094	86.8253
0.6	729.6830	267.1610	266.8520	736.2820	1.8019	101.7500	161.8738
0.8	732.2990	266.2620	267.1280	734.3090	1.8020	102.3125	566.4926
1	326.2420	174.9420	174.9820	323.8370	3.9604	110.8506	1000
1.2	125.8850	71.6550	71.7770	126.0640	10.8408	129.9375	999
1.5	48.6320	29.6350	29.5750	48.5860	28.2296	130	999.9700
1.8	25.6830	16.4710	16.5200	25.6880	52.9235	88.5469	1000.1
2	18.7340	12.1610	12.1940	18.6870	72.4894	77.9688	996.7503

Çizelge 3.8. $L=4$, $N=10000$, $n=2000$, $c'=10000$, $t_1=75$, $t_2=80$, $t_3=65$ ve $t_4=90$ iken örnek çapları ve varyans değeri

α	n_1	n_2	n_3	n_4	$V(\bar{x})$	cpu	Kul. Bütçe
0.2	729.6830	267.1610	266.8520	736.2820	1.8019	100.4688	1060.6
0.4	730.9580	266.3950	266.2990	736.3470	1.8004	103.0938	3664.5
0.5	730.9740	267.8410	266.0630	735.1490	1.7980	71.4688	6837.5
0.6	446.2670	205.4630	235.7800	427.0220	2.9008	110.0625	10000
0.8	104.6610	50.5290	56.8550	94.0590	14.1526	119.8281	10000
1	42.2540	22.0260	24.4390	38.6600	34.8281	108.4063	9999.1
1.2	23.0860	12.8330	13.9980	21.2120	62.8693	112.8750	10013
1.5	12.5360	7.2910	8.0020	11.7470	113.3536	76.5469	9998.7
1.8	8.0770	5.0000	5.8820	7.9880	168.2109	110.2031	10039
2	6.9960	4.0220	4.9930	6.0460	205.1584	115.2340	9875.2

Çizelge 3.9. $L=5$, $N=12000$, $n=3000$, $c'=10000$, $t_1=1$, $t_2=1$, $t_3=1$, $t_4=1$ ve $t_5=1$ iken örnek çapları ve varyans değeri

α	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	$V(\bar{x})$	cpu	Kul. Bütçe
0.2	801.5010	237.8610	459.4280	700.8340	800.3640	1.6377	131.65	17.7190
0.4	801.4750	237.8600	458.1820	699.2720	803.1790	1.6393	131.51	63.2830
0.5	802.1250	237.9650	458.2470	702.0720	799.5770	1.6358	132.37	119.9281
0.6	801.2420	237.8470	458.6550	701.6660	800.6120	1.6372	132.59	227.6496
0.8	801.0610	238.0080	458.4530	702.4570	800.0170	1.6362	132.21	824.0974
1	800.0780	237.7700	459.7510	702.5150	799.9050	1.6368	131.20	3000
1.2	711.5900	222.9270	495.8220	641.3680	710.0050	1.8195	187.25	9995.1
1.5	192.6820	73.3810	142.7350	177.0750	190.7250	8.3048	169.95	9998.8
1.8	800.2560	34.1920	61.8680	75.4000	80.0950	20.3579	141.73	9998.5
2	51.8850	23.3880	40.7330	49.0580	51.9010	31.600	123.64	9998.6

Çizelge 3.10. $L=5$, $N=12000$, $n=3000$, $c'=25000$, $t_1=40$, $t_2=50$, $t_3=30$, $t_4=45$ ve $t_5=60$ iken örnek çapları ve varyans değeri

α	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	$V(\bar{x})$	cpu	Kul. Bütçe
0.2	802.4740	237.8370	458.0980	700.8240	800.7540	1.6362	132.57	799.24
0.4	799.3910	238.0600	458.7630	701.2130	802.6050	1.6374	131.06	2863.8
0.5	799.5520	238.0970	460.4520	701.9960	799.8810	1.6339	131.71	5435.5
0.6	798.3360	237.7940	459.7900	702.3600	801.7030	1.6366	132.56	10337
0.8	505.4980	119.9420	404.8550	435.3870	411.7380	3.0669	184.54	25002
1	150.5730	40.9310	121.1050	131.3670	123.0760	11.6829	142.54	24999
1.2	66.5880	20.3390	54.4390	58.4370	55.3340	26.7940	160.92	24999
1.5	29.2660	10.1640	24.4630	26.0180	24.8050	60.5490	140.07	24967
1.8	16.8570	6.8200	14.3020	15.0540	14.5710	103.5917	111.06	25033
2	12.8550	5.0580	10.9990	11.7030	11.0190	135.4833	99.59	24967

Simülasyon çalışmasından elde edilen sonuçlardan görüldüğü gibi $\alpha > 0$ olmak üzere Çizelge 3.1 için yapılacak genellemeler diğer Çizelgeler için de geçerlidir. α değeri büyüdükçe elde edilen mümkün çözümlerin sayısı azalmaktadır. Araştırma için ayrılan bütçe çok fazla değilken, α 'nın büyük durumları çözüm vermemektedir. α büyük iken mümkün çözüm elde etmek için maliyet kısıtının sağ taraf sabiti yani araştırma için ayrılan bütçe arttırılmalıdır. Bununla birlikte, maliyet kısıtının sağ taraf sabitinin arttırılması gerçek hayattaki uygulamalarda her zaman olanaklı değildir. α büyüdükçe çoğunlukla, tabakalardan seçilen örnek çapları toplamının, yığından seçilen örnek çapına eşit olması kısıtı ($\sum_{h=1}^L n_h = n$) ya da bütçe kısıtı sağlanmamaktadır. Çizelgelerde kısıtların sağlanmadığı çözümler italik olarak ifade edilmiştir. Çizelgelerden görüldüğü gibi mümkün çözümleri sağlayan α değerleri içinde en etkin olanı $\alpha = 0.5$ 'dir. $\alpha = 0.5$ iken, tabakalara seyahat maliyeti ne olursa olsun, mümkün çözümler içinde örnek ortalaması istatistiğinin varyansı en küçük olarak elde edilir. Ayrıca, mümkün çözümü veren α değerleri büyüdükçe araştırma için ayrılan bütçenin kullanılan kısmı da artmaktadır.

3.2.2. $c' = \sum_{h=1}^L t_h \ln(n_h)$ ve $c' = \sum_{h=1}^L t_h n_h^\alpha$ kısıtları altında örnek ortalaması istatistiğinin varyanslarının karşılaştırılması

Bu alt bölümde, $c' = \sum_{h=1}^L t_h \ln(n_h)$ ve $c' = \sum_{h=1}^L t_h n_h^\alpha$ doğrusal olmayan maliyet kısıtları göz önüne alınarak oluşturulan modellerde; hangi maliyet kısıtının, örnek ortalaması istatistiğinin varyansını nasıl etkilediği, araştırma için ayrılan bütçenin ne kadarının kullanıldığı ve problemlerin çözülme süreleri incelenmiştir. Bu araştırma için 1000 tekrarlı Monte Carlo simülasyonu kullanılmıştır. Simülasyon çalışmasında yığın çapı (N), yığından seçilecek örnek çapı (n), bütçe (c'), tabakadan tabakaya seyahat maliyeti (t_h) ve α başlangıçta verilmiştir. Belirlenen doğrusal olmayan maliyet kısıtları altında, örnek ortalaması istatistiğinin varyansının minimum yapılması için kullanılacak modeller aşağıdaki gibidir.

*Model 1**Model 2*

$$\text{Min } V(\bar{x})_1$$

$$\text{Min } V(\bar{x})_2$$

$$\sum_{h=1}^L n_h = n$$

$$\sum_{h=1}^L n_h = n$$

$$\sum_{h=1}^L t_h \ln(n_h) \leq c'$$

$$\sum_{h=1}^L t_h n_h^\alpha \leq c'$$

$$r_h \leq n_h \leq k_h \quad h = 1, \dots, L$$

$$r_h \leq n_h \leq k_h \quad h = 1, \dots, L$$

Simülasyon çalışmasında, tabaka varyanslarının ve tabakalara paylaştırılacak örnek çapının önceden bilindiği varsayılmaktadır. Modellerin çözümünde, kısıtlı optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılan yöntemlerden biri olan Kuhn-Tucker yönteminden yararlanılmıştır.

Simülasyon çalışmasının adımları alt bölüm 3.2.1'dekine benzer biçimde gerçekleştirilmiştir. Alt bölüm 3.2.1'den farklı olarak simülasyon çalışmasının üçüncü adımında, iki farklı doğrusal olmayan maliyet kısıtı altında oluşturulan Model 1 ve Model 2'nin çözümleri yapılmış, örnek ortalaması istatistiğinin varyans değerleri ve modellerin çözülme süreleri(CPU time değerleri) elde edilmiştir. Burada modellerin çözümü için gerekli olan başlangıç noktası, her tabakadan seçilecek örnek çapı n_h için belirlenen alt ve üst sınır arasında ortalama bir değer olarak seçilmiştir.

Simülasyon çalışması, tabakalara seyahat maliyetlerinin farklı değerleri altında yapılmıştır. Simülasyon çalışması yığınınızın iki, üç, dört ve beş tabakadan oluşması durumunda yapılmış, sonuçlar dört farklı tabaka sayısı için genellenebildiğinden daha fazla tabaka sayısı dikkate alınmamıştır. Sonuçlar Çizelge 3.11-Çizelge 3.20'de özetlenmiştir. Çizelgelerde yer alan n_{ih} gösterimi, i . modelden elde edilen h . tabakadan seçilmesi gereken örnek çapını ve i . Kul. Bütçe ise i . modelle çözüm yapıldığında, araştırma için ayrılan bütçenin ne kadarının kullanıldığını ifade etmektedir.

Çizelge 3.11. $L = 2$, $N = 500$, $n = 100$, $c' = 500$, $t_1 = 1$ ve $t_2 = 1$ iken örnek çapları ve varyans değerleri

α	n_{11}	n_{12}	n_{21}	n_{22}	$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul. Bütçe	2.Kul. Bütçe
0.2	50.3630	49.6370	50.3630	49.6370	1.1739	1.1739	94.2500	94.4844	7.8240	4.3734
0.4	50.2000	49.8000	50.2000	49.8000	1.1603	1.1603	92.0156	95.0313	7.8240	9.5635
0.5	50.0630	49.9370	50.0630	49.9370	1.1469	1.1469	91.8594	94.2969	7.8240	14.1421
0.6	50.0650	49.9350	50.0650	49.9350	1.1561	1.1561	91.8750	93.7813	7.8240	20.9128
0.8	50.3190	49.6810	50.3190	49.6810	1.1640	1.1640	92.3125	94.6406	7.8240	45.7304
1	50.4640	49.5360	50.4640	49.5360	1.1648	1.1648	92.6094	95.2188	7.8240	100
1.2	50.0300	49.9700	50.0300	49.9700	1.1599	1.1599	96.3438	97.2813	7.8240	218.6724
1.5	50.0400	49.9600	39.6710	39.6360	1.1520	1.5275	92.1563	95.8438	7.8240	499.4043
1.8	49.6090	50.3910	21.3610	21.5810	1.1777	3.1344	98.5781	98.6094	7.8240	499.3123
2	50.2090	49.7910	15.8450	15.7740	1.1677	4.3291	92.3281	103.2013	7.8240	499.8831

Çizelge 3.12. $L = 2$, $N = 500$, $n = 100$, $c' = 1000$, $t_1 = 1$ ve $t_2 = 50$ iken örnek çapları ve varyans değerleri

α	n_{11}	n_{12}	n_{21}	n_{22}	$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul. Bütçe	2.Kul. Bütçe
0.2	49.9370	50.0630	49.9370	50.0630	1.1720	1.1720	92.3438	92.7969	199.5740	111.5499
0.4	50.1970	49.8030	50.1970	49.8030	1.1616	1.1616	90.8594	92.0781	199.3197	243.5002
0.5	49.9160	50.0840	49.9160	50.0840	1.1580	1.1580	89.0469	90.5938	199.5954	360.9154
0.6	50.5650	49.4350	50.5650	49.4350	1.1605	1.1605	91.0156	93.1094	198.9562	529.7941
0.8	50	50	59.0010	40.9990	1.1654	1.2199	92.9063	96	199.5132	1001.5
1	49.4820	50.5180	82	18	1.1812	2.2021	92.4688	99.0156	200.0118	982
1.2	49.6180	50.3820	62.6420	10.8570	1.1777	3.7888	92.5000	96.4688	199.8861	1017.9
1.5	50.0280	49.9720	31.1210	6.4740	1.1758	6.5564	90.7031	110.8281	199.4857	997.2363
1.8	49.8440	50.1560	18.8400	4.9810	1.1627	9.4628	92.5156	108.4844	199.6658	1097.1
2	50.1550	49.8450	14.6730	4.0000	1.1565	11.2856	91.2031	113.1250	199.3610	1015.3

Çizelge 3.13. $L = 2$, $N = 500$, $n = 100$, $c' = 1000$, $t_1 = 50$ ve $t_2 = 1$ iken örnek çapları ve varyans değerleri

α'	n_{11}	n_{12}	n_{21}	n_{22}	$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul. Bütçe	2.Kul. Bütçe
0.2	50.3630	49.9370	50.3630	49.9370	1.1739	1.1739	96.4688	96.8281	199.8676	111.6780
0.4	50.2000	49.8000	50.2000	49.8000	1.1603	1.1603	92.5469	96.2500	199.7088	244.2443
0.5	50.0630	49.9370	50.0630	49.9370	1.1469	1.1469	92.2831	95.0781	199.5749	360.8427
0.6	50.0650	49.9350	50.0650	49.9350	1.1561	1.1561	92.6250	95.3750	199.5768	533.6757
0.8	50.3190	49.6810	41	59	1.1640	1.2210	90.5000	108.4063	199.8248	1001.5
1	50.4640	49.5360	18	82	1.1648	2.1679	93.8281	112.9219	199.9657	982
1.2	50.0300	49.9700	10.8310	63.2780	1.1599	3.6934	98.5625	103.2344	199.5426	1017.2
1.5	50.0400	49.9600	6.4880	31.0560	1.1520	6.4384	97.2969	101.7813	199.5524	999.3658
1.8	49.6090	50.3910	4.9810	19.0560	1.1777	9.4695	99.9063	104.0469	199.1284	1101.2
2	50.2090	49.7910	4.0000	14.5670	1.1677	11.4727	94.4844	113.7031	199.7175	1012.2

Çizelge 3.14. $L = 2$, $N = 500$, $n = 100$, $c' = 1500$, $t_1 = 25$ ve $t_2 = 35$ iken örnek çapları ve varyans değerleri

α'	n_{11}	n_{12}	n_{21}	n_{22}	$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul. Bütçe	2.Kul. Bütçe
0.2	50.3630	49.6370	50.3630	49.6370	1.1739	1.1739	95.7188	96.4375	234.6472	131.1711
0.4	50.2000	49.8000	50.2000	49.8000	1.1603	1.1603	92.5938	95.2188	234.6809	286.8287
0.5	50.0630	49.9370	50.0630	49.9370	1.1469	1.1469	92.8594	94.7031	234.7087	424.2194
0.6	50.0650	49.9350	50.0650	49.9350	1.1561	1.1561	92.6094	94.8281	234.7083	627.3020
0.8	50.3190	49.6810	50.3190	49.6810	1.1640	1.1640	92.2500	96.9219	234.6564	1370.7
1	50.4640	49.5360	27.7030	23.0460	1.1648	2.5970	97.1563	106.0313	234.6260	1499.2
1.2	50.0300	49.9700	15.9240	13.6540	1.1599	4.6389	93.0625	100.5781	234.7154	1498.6
1.5	50.0400	49.9600	9.2250	8.0330	1.1520	8.0915	91.9844	103.8438	234.7134	1497.3
1.8	49.6090	50.3910	6.3150	5.8250	1.1777	11.9776	92.6406	106.0156	234.7977	1524.5
2	50.2090	49.7910	5.1940	4.9190	1.1677	14.2485	92.7656	106.9063	234.6791	1521.3

Çizelge 3.15. $L = 3$, $N = 10000$, $n = 500$, $c' = 550$, $t_1 = 1$, $t_2 = 1$ ve $t_3 = 1$ iken örnek çapları ve varyans değerleri

α	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{21}	n_{22}	n_{23}	$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul Bütçe	2.Kul Bütçe
0.2	186.5460	127.0060	186.4490	186.5460	127.0060	186.4490	13.8894	13.8894	107.6094	115.4375	15.3011	8.3256
0.4	186.6440	126.7940	186.5600	186.6440	126.7940	186.5600	13.9021	13.9021	106.3594	114.0469	15.3015	23.1337
0.5	186.2860	126.9890	186.7600	186.2860	126.9890	186.7600	13.8790	13.8790	105.9063	113.3281	15.3012	38.5836
0.6	186.1960	126.8870	186.9200	186.1960	126.8870	186.9200	13.8953	13.8953	104.9844	115.3281	15.3008	64.3637
0.8	186.3820	127.0230	186.6150	186.3820	127.0230	186.6150	13.8931	13.8931	105.8750	114.6094	15.3012	179.2967
1	186.7010	126.9830	186.3440	186.7010	126.9830	186.3440	13.8871	13.8871	106.3906	113.0469	15.3012	500
1.2	186.5460	127.0060	186.4490	85.1090	60.0120	85.0800	13.8894	31.0984	103.0156	110.6875	15.3011	550.0242
1.5	186.6440	126.7940	186.5600	35.2420	25.8930	35.2280	13.9021	75.5283	101.9375	108.7188	15.3005	550.0604
1.8	186.6570	126.9600	186.3600	19.5890	14.9600	19.5370	13.9029	135.7264	101.0156	108.5000	15.3008	552.5732
2	186.6550	126.7820	186.5790	14.6180	11.0410	14.6220	13.8988	181.7803	101.6563	111.7969	15.3006	549.3925

Çizelge 3.16. $L = 3$, $N = 10000$, $n = 500$, $c' = 5000$, $t_1 = 15$, $t_2 = 75$ ve $t_3 = 50$ iken örnek çapları ve varyans değerleri

α	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{21}	n_{22}	n_{23}	$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul Bütçe	2.Kul Bütçe
0.2	186.5450	127.0060	186.4490	186.5450	127.0060	186.4490	13.8894	13.8894	102.0781	110.3438	703.1556	382.5599
0.4	186.6440	126.7940	186.5600	186.6440	126.7940	186.5600	13.9021	13.9021	100.5313	108.2500	703.0680	1046.7
0.5	186.6980	127.0310	186.2950	186.6980	127.0310	186.2950	13.8839	13.8839	102.4512	106.1094	703.1412	1732.7
0.6	187.0180	126.8370	186.1330	187.0180	126.8370	186.1330	13.9213	13.9213	91.0221	99.0313	703.0088	2867.5
0.8	186.1960	126.8870	186.9200	206.0660	55.0040	105.9530	13.8953	22.4292	103.5469	133.8125	703.1833	5000.5
1	186.3820	127.0230	186.6150	76.6070	23.3190	42.0140	13.8931	57.1487	99.7969	117.0156	703.1970	4998.7
1.2	186.7010	126.9830	186.3440	39.1470	13.1250	22.6180	13.8871	106.0763	106.9063	112.8750	703.1263	4980.2
1.5	186.3340	126.8900	186.7890	19.7020	7.8140	12.0280	13.8912	197.4272	104.2031	105.6094	703.1611	5035.7
1.8	186.7360	126.8540	186.3740	12.1950	5.0000	8.0000	13.9086	299.2560	104.6406	113.8438	703.0610	4822.9
2	186.3810	126.8910	186.7240	9.9520	4.0330	6.6120	13.8840	368.1473	100.0313	120.8125	703.1481	4891.4

Çizelge 3.17. $L = 4$, $N = 10000$, $n = 2000$, $c' = 1000$, $t_1 = 1$, $t_2 = 1$, $t_3 = 1$, $t_4 = 1$ iken örnek çapları ve varyans değerleri

c'	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{14}	n_{21}	n_{22}	n_{23}	n_{24}
0.2	734.6620	265.9080	266.4560	732.9460	734.6620	265.9080	266.4560	732.9460
0.4	733.8060	266.0760	266.5110	733.5850	733.8060	266.0760	266.5110	733.5850
0.5	731.4390	266.3930	267.3550	734.8250	731.4390	266.3930	267.3550	734.8250
0.6	733.2090	266.3770	266.3230	734.0870	733.2090	266.3770	266.3230	734.0870
0.8	732.2990	266.2620	267.1280	734.3090	732.2990	266.2620	267.1280	734.3090
1	733.6430	266.0110	267.0500	733.3050	733.6430	266.0110	267.0500	733.3050
1.2	729.6830	267.1610	266.8520	736.2820	729.6830	267.1610	266.8520	736.2820
1.5	730.9580	266.3950	266.2990	736.3470	730.9580	266.3950	266.2990	736.3470
1.8	733.4450	266.9660	266.1480	733.4540	733.4450	266.9660	266.1480	733.4540
2	731.4930	267.0650	266.7760	734.6510	731.4930	267.0650	266.7760	734.6510

$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul. Bütçe	2.Kul. Bütçe
1.8033	1.8033	104.1563	111.7969	24.3648	13.5946
1.8031	1.8031	104.5156	115.1250	24.3654	46.6763
1.8010	1.8010	101.1094	111.1543	24.3681	86.8253
1.8048	1.8048	104.2344	114.6250	24.3657	161.8467
1.8020	1.8020	101.3128	112.3048	24.3673	566.4926
1.7996	3.9576	95.5000	115.5781	24.3666	999.9810
1.8019	10.8237	100.8906	138.1406	24.3688	999.9309
1.8004	28.2064	102.8750	112.5625	24.3657	999.9442
1.8010	52.9544	102.1406	110.8594	24.3667	1000.9
1.7995	72.3973	103.5156	104.2188	24.3684	997.7521

Çizelge 3.18. $L = 4$, $N = 10000$, $n = 2000$, $c' = 10000$, $t_1 = 75$, $t_2 = 80$, $t_3 = 65$ ve $t_4 = 90$ iken örnek çapları ve varyans değerleri

α'	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{14}	n_{21}	n_{22}	n_{23}	n_{24}
0.2	736.3190	266.6310	266.8390	730.1810	736.3190	266.6310	266.8390	730.1810
0.4	732.5030	266.2610	266.9820	734.2270	732.5030	266.2610	266.9820	734.2270
0.5	730.9740	267.8410	266.0630	735.1490	730.9740	267.8410	266.0630	735.1490
0.6	733.6580	266.2380	267.1600	732.9820	447.0330	205.5350	235.8910	426.2130
0.8	735.2740	266.1030	266.3980	732.2580	104.5720	50.4880	56.7730	94.2600
1	736.9780	266.3710	266.1370	730.4870	42.4210	22.0370	24.4110	38.5350
1.2	734.3160	266.6700	266.3120	732.6820	23.0830	12.8290	13.9980	21.2110
1.5	734.5230	266.1310	265.6360	733.7180	12.5300	7.2690	8.0020	11.7520
1.8	735.0850	265.4700	266.2340	733.1950	8.0690	5.0000	5.8720	7.9940
2	734.7510	266.9310	267.1540	731.1570	6.9920	4.0290	4.9940	6.0310

$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul. Bütçe	2.Kul. Bütçe
1.8008	1.8008	118.0469	129.6563	1898.5	1060.5
1.8049	1.8049	118.6563	130.1406	1898.6	3664.4
1.7980	1.7980	117.4321	128.1680	1898.7	6837.5
1.7999	2.8969	131.4219	163.0938	1898.6	10001
1.8016	14.1587	142.2969	187.9375	1898.4	10001
1.8045	34.8088	130.9219	138.8750	1898.4	10001
1.8040	62.9522	133	148.2344	1898.5	10012
1.8044	113.6566	136.4844	140.5313	1898.3	9991.5
1.8048	168.5614	101.1250	115.3281	1898.3	10034
1.7984	204.4272	128.9531	146	1898.6	9881.6

Çizelge 3.19. $L = 5$, $N = 12000$, $n = 3000$, $c' = 10000$, $t_1 = 1$, $t_2 = 1$, $t_3 = 1$, $t_4 = 1$ ve $t_5 = 1$ iken örnek çapları ve varyans değerleri

α'	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{14}	n_{15}	n_{21}	n_{22}	n_{23}	n_{24}	n_{25}
0.2	801.1160	237.8970	457.9500	700.4690	802.5070	801.1160	237.8970	457.9500	700.4690	802.5070
0.4	801.5010	237.8610	459.4280	700.8340	800.3640	801.5010	237.8610	459.4280	700.8340	800.3640
0.5	801.1000	238.0790	458.1730	702.6940	799.9360	801.1000	238.0790	458.1730	702.6940	799.9360
0.6	804.3730	237.6020	458.8380	701.0330	798.1500	804.3730	237.6020	458.8380	701.0330	798.1500
0.8	803.1290	237.1700	458.5760	701.6080	799.5120	803.1290	237.1700	458.5760	701.6080	799.5120
1	799.7370	237.9840	459.0290	702.7100	800.5340	799.7370	237.9840	459.0290	702.7100	800.5340
1.2	801.5740	237.6820	458.0160	701.4630	801.2520	712.2130	219.7880	493.4960	643.0620	712.1830
1.5	801.5320	238.2760	458.9450	699.9500	801.3040	191.3360	73.5740	143.1050	177.3550	191.3240
1.8	801.4120	237.7730	458.7060	699.6910	802.4330	80.1930	34.1640	61.8270	75.3460	80.2360
2	801.2420	237.8470	458.6550	701.6660	800.6120	51.8990	23.3900	40.7140	49.0570	51.8710

$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul. Bütçe	2.Kul. Bütçe
1.6389	1.6389	128.4063	138.1875	31.5241	17.7182
1.6377	1.6377	126.8906	138.5469	31.5255	63.2877
1.6352	1.6352	126.5156	137.1719	31.5253	119.9300
1.6368	1.6368	123.0156	134.5781	31.5242	227.6424
1.6373	1.6373	131.9531	145.3125	31.5228	824.0469
1.6362	1.6362	132.3281	143.0781	31.5258	3000
1.6367	1.8228	126.7344	191.7031	31.5238	9994.3
1.6358	8.2653	132.7969	183.6250	31.5261	9998
1.6400	20.4113	132.8750	155.2031	31.5244	9997.2
1.6372	31.6146	132.3438	135.0469	31.5249	9995.4

Çizelge 3.20. $L = 5$, $N = 12000$, $n = 3000$, $c' = 25000$, $t_1 = 40$, $t_2 = 50$, $t_3 = 30$, $t_4 = 45$ ve $t_5 = 60$ iken örnek çapları ve varyans değerleri

α	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{14}	n_{15}	n_{21}	n_{22}	n_{23}	n_{24}	n_{25}
0.2	801.0610	238.0080	458.4530	702.4570	800.0170	801.0610	238.0080	458.4530	702.4570	800.0170
0.4	801.9430	238.4310	459.1970	702.3660	798.0370	801.9430	238.4310	459.1970	702.3660	798.0370
0.5	799.5520	238.0970	460.4520	701.9960	799.8810	799.5520	238.0970	460.4520	701.9960	799.8810
0.6	802.3910	237.9440	458.6230	700.2310	800.8220	802.3910	237.9440	458.6230	700.2310	800.8220
0.8	811.2830	237.6450	456.5170	697.8410	796.6690	511.3880	119.8740	403.2700	433.8070	410.0150
1	803.0120	238.0120	459.2530	700.4850	799.2040	150.9310	40.9740	121.0600	131.2320	122.9620
1.2	801.3360	237.5270	459.1040	700.7820	801.2410	66.6160	20.2960	54.4930	58.3930	55.3510
1.5	801.7120	237.8420	458.9440	700.3260	801.1970	29.2090	10.1650	24.4820	26.0150	24.8270
1.8	800.1830	237.9560	459.5050	704.4500	797.9020	16.8500	6.8250	14.2760	15.0760	14.5080
2	802.4740	237.8370	458.0980	700.8240	800.7540	12.8600	5.0500	11.0000	11.6840	11.0160

$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul. Bütçe	2.Kul. Bütçe
1.6362	1.6362	132.8594	144.5000	1420.9	799.2649
1.6342	1.6342	132.8438	143.4688	1420.9	2863.3
1.6339	1.6339	132.4515	145.1571	1420.9	5435.5
1.6366	1.6366	133.9219	143.5000	1420.9	10336
1.6425	3.0752	132.3125	196.0938	1420.7	25000.2
1.6362	11.6874	131.9219	153.2656	1420.9	25001
1.6362	26.8085	132.2500	172.9219	1420.9	24999
1.6383	60.5735	134.1875	153.5625	1420.9	24962
1.6323	103.4399	133.5625	148.0156	1420.9	24976
1.6362	135.8243	134.1563	141	1420.9	24945

Simülasyon çalışmasından elde edilen sonuçlardan görüldüğü gibi Çizelge 3.11 için

yapılacak genellemeler diğer Çizelgeler için de geçerlidir. $c' = \sum_{h=1}^L t_h n_h^\alpha$ kısıtının

kullanıldığı Model 2 için alt bölüm 3.2.1’de yapılan simülasyon çalışmasından elde edilen sonuçlar bu bölümde de geçerlidir. Çizelgelerden görüldüğü gibi Model 2 için mümkün çözümleri sağlayan α değerleri içinde en etkin olanı $\alpha = 0.5$ ’dir.

$c' = \sum_{h=1}^L t_h \ln(n_h)$ kısıtının kullanıldığı Model 1, çözüm olan α değerleri için Model 2

ile aynı sonuçları vermektedir. Ayrıca, 1. maliyet kısıtı altında oluşturulan Model 1, 2. maliyet kısıtı altında oluşturulan Model 2 ile mümkün olmayan çözümleri de sağlamaktadır. α ’nın küçük olduğu durumlar için 2. maliyet kısıtı bütçenin daha azını kullanmakla birlikte, α büyüdükçe 2. maliyet kısıtı neredeyse sağlanmamaktadır. 1.maliyet kısıtı ise, tabakalara seyahat maliyetinden etkilenmemekte ve bütçe kısıtını sağlayarak, araştırma için ayrılan bütçenin çok azını kullanmaktadır. Ayrıca, Model 1 kullanıldığında elde edilen çözümler, Model 2 kullanıldığı duruma göre daha kısa sürede tamamlanmaktadır. Kuhn-Tucker algoritması ile 1. maliyet kısıtı kullanıldığında, 2. maliyet kısıtına göre daha fazla mümkün çözüm elde edildiği, araştırma için ayrılan bütçenin daha azı kullanıldığı ve çözümler daha kısa sürede elde edildiği için örnek ortalaması istatistiğinin varyansı minimum yapılırken $c' = \sum_{h=1}^L t_h \ln(n_h)$ kısıtının kullanılması daha avantajlı olacaktır.

Çünkü bu kısıt, α ’ya bağlı değildir ve tabakalara seyahat maliyetinden $c' = \sum_{h=1}^L t_h n_h^\alpha$

kısıtı kadar etkilenmemektedir. Çizelgelerden görüldüğü gibi, mümkün çözümü

sağlayan α değerleri için, $c' = \sum_{h=1}^L t_h \ln(n_h)$ ve $c' = \sum_{h=1}^L t_h n_h^\alpha$ maliyet kısıtları altında

oluşturulan Model 1 ve Model 2’den elde edilen çözümler büyük çoğunlukla aynıdır.

Simülasyon çalışması boyunca, sadece Çizelge 3.12 ve Çizelge 3.13’de $\alpha=1$ iken iki Modelden elde edilen örnek ortalaması istatistiğinin varyans değerleri farklı bulunmuştur. Bu durumun neden böyle olduğu Örnek 3.2’de gösterilecektir.

3.2. Örnek

Yığınınımız iki tabakadan oluşsun. 1. tabakada 11, 2.tabakada 9 birim olduğunu ve yapılan bir pilot çalışmayla 1.tabakanın varyansının 81659, 2. tabakanın varyansının 60942 olarak tahmin edildiğini varsayalım. 1. ve 2. tabakaya seyahat maliyetleri

1TL., araştırma için ayrılan bütçe 10TL. iken 5 çaplı örneği $c' = \sum_{h=1}^L t_h \ln(n_h)$ ve

$c' = \sum_{h=1}^L t_h n_h^\alpha$ maliyet kısıtları altında tabakalara paylaştırılalım ($\alpha = 1$ olsun ve çözümü

Kuhn-Tucker algoritmasıyla gerçekleştirelim).

Çözüm

$N = 20$, $N_1 = 11$, $N_2 = 9$, $n = 5$, $c' = 10$, $t_1 = t_2 = 1$, $s_1^2 = 81659$, $s_2^2 = 60942$ ve $\alpha = 1$ olmak üzere örnek ortalaması istatistiğinin varyansı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$V(\bar{x}) = \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^L N_h^2 \frac{N_h - n_h}{N_h} \frac{s_h^2}{n_h} = \frac{1}{N^2} \left[\sum_{h=1}^L \frac{N_h^2 s_h^2}{n_h} - \underbrace{\sum_{h=1}^L N_h s_h^2}_{sabit} \right]$$

$$V(\bar{x}) = \frac{1}{20^2} \left[\frac{11^2 (81659)}{n_1} + \frac{9^2 (60942)}{n_2} - \text{sabit} \right]$$

$$V(\bar{x}) = \frac{24701.8475}{n_1} + \frac{12340.755}{n_2} - \text{sabit}$$

Model 1 : $c' = \sum_{h=1}^L t_h \ln(n_h)$ kısıtı altında örnek ortalaması istatistiğinin varyansının

minimum yapılması.

$$\max(V(\bar{x})) = \max \left[-\frac{24701.8475}{n_1} - \frac{12340.755}{n_2} + \text{sabit} \right]$$

$$n_1 + n_2 = 5 \quad \Rightarrow \quad n_1 + n_2 = 5$$

$$1 \times \ln(n_1) + 1 \times \ln(n_2) \leq 10 \quad \Rightarrow \quad \ln(n_1) + \ln(n_2) + s_1^2 = 10$$

$$n_1 \leq 11 \quad \Rightarrow \quad n_1 + s_2^2 = 11$$

$$n_2 \leq 9 \quad \Rightarrow \quad n_2 + s_3^2 = 9$$

Lagrange fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned} L(n_1, n_2, \lambda, s) = & -\frac{24701.8475}{n_1} - \frac{12340.755}{n_2} + \text{sabit} - \lambda_1(n_1 + n_2 - 5) \\ & - \lambda_2(\ln(n_1) + \ln(n_2) + s_1^2 - 10) - \lambda_3(n_1 + s_2^2 - 11) \\ & - \lambda_4(n_2 + s_3^2 - 9) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial n_1} = \frac{24701.8475}{n_1^2} - \lambda_1 - \frac{\lambda_2}{n_1} - \lambda_3 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial n_2} = \frac{12340.755}{n_2^2} - \lambda_1 - \frac{\lambda_2}{n_2} - \lambda_4 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = n_1 + n_2 - 5 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \ln(n_1) + \ln(n_2) + s_1^2 - 10 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = n_1 + s_2^2 - 11 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_4} = n_2 + s_3^2 - 9 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_1} = \lambda_2(\ln(n_1) + \ln(n_2) - 10) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_2} = \lambda_3(n_1 - 11) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_3} = \lambda_4(n_2 - 9) = 0$$

$$\lambda_1 \text{ serbest, } \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0$$

Kuhn-Tucker algoritmasında mümkün çözümler aranırken Lagrange çarpanları λ_i 'lerin farklı değerleri incelenir.

* $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ olsun.

$$\frac{24701.8475}{n_1^2} - \lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow n_1 = \frac{157.168214}{\sqrt{\lambda_1}}$$

$$\frac{12340.755}{n_2^2} - \lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow n_2 = \frac{111.0889508}{\sqrt{\lambda_1}}$$

$$n_1 + n_2 = 5 \quad \Rightarrow \frac{157.168214}{\sqrt{\lambda_1}} + \frac{111.0889508}{\sqrt{\lambda_1}} = 5$$

$$\sqrt{\lambda_1} = 53.65143297 \quad \Rightarrow \lambda_1 = 2878.47$$

$$n_1 = 2.929431803 \cong 3$$

$$n_2 = 2.070568197 \cong 2$$

Buradan, problemin mümkün çözümü

$$(2.929431803 \cong 3; 2.070568197 \cong 2; 2878.47; 0; 0; 0)$$

olarak elde edilir.

Model 2 : $c' = \sum_{h=1}^L t_h n_h^\alpha$ kısıtı altında örnek ortalaması istatistiğinin varyansının minimum yapılması ($\alpha = 1$).

$$\max(V(\bar{x})) = \max \left[-\frac{24701.8475}{n_1} - \frac{12340.755}{n_2} + \text{sabit} \right]$$

$$n_1 + n_2 = 5 \quad \Rightarrow n_1 + n_2 = 5$$

$$1 \times n_1^1 + 1 \times n_2^1 \leq 10 \quad \Rightarrow n_1 + n_2 + s_1^2 = 10$$

$$n_1 \leq 11 \quad \Rightarrow \quad n_1 + s_2^2 = 11$$

$$n_2 \leq 9 \quad \Rightarrow \quad n_2 + s_3^2 = 9$$

Lagrange fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned} L(n_1, n_2, \lambda, s) = & -\frac{24701.8475}{n_1} - \frac{12340.755}{n_2} + \text{sabit} - \lambda_1(n_1 + n_2 - 5) \\ & - \lambda_2(n_1 + n_2 + s_1^2 - 10) - \lambda_3(n_1 + s_2^2 - 11) \\ & - \lambda_4(n_2 + s_3^2 - 9) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial n_1} = \frac{24701.8475}{n_1^2} - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial n_2} = \frac{12340.755}{n_2^2} - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_4 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = n_1 + n_2 - 5 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = n_1 + n_2 + s_1^2 - 10 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = n_1 + s_2^2 - 11 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_4} = n_2 + s_3^2 - 9 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_1} = \lambda_2(n_1 + n_2 - 10) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_2} = \lambda_3(n_1 - 11) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_3} = \lambda_4(n_2 - 9) = 0$$

$$\lambda_1 \text{ serbest, } \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0$$

Kuhn-Tucker algoritmasında mümkün çözümler aranırken Lagrange çarpanları

λ_i 'lerin farklı değerleri incelenir.

* $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ olsun.

$$\frac{24701.8475}{n_1^2} - \lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow n_1 = \frac{157.168214}{\sqrt{\lambda_1}}$$

$$\frac{12340.755}{n_2^2} - \lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow n_2 = \frac{111.0889508}{\sqrt{\lambda_1}}$$

$$n_1 + n_2 = 5 \quad \Rightarrow \frac{157.168214}{\sqrt{\lambda_1}} + \frac{111.0889508}{\sqrt{\lambda_1}} = 5$$

$$\sqrt{\lambda_1} = 53.65143297 \quad \Rightarrow \lambda_1 = 2878.47$$

$$n_1 = 2.929431803 \cong 3$$

$$n_2 = 2.070568197 \cong 2$$

Buradan, problemin mümkün çözümü

$$(2.929431803 \cong 3; 2.070568197 \cong 2; 2878.47; 0; 0; 0)$$

olarak elde edilir.

Görüldüğü gibi, her iki modelde de aynı sonuçlar elde edilmiştir. Bunun nedeni, her iki modelde de maliyet kısıtlarına karşı gelen Lagrange çarpanı λ_2 'nin sıfır olmasıdır. Maliyet kısıtlarına karşı gelen $\lambda_2 = 0$ olduğu durumlarda Kuhn-Tucker algoritması ile her iki maliyet kısıtı kullanılarak aynı mümkün çözümler elde edilir. Bununla birlikte, mümkün çözümü sağlayan Lagrange çarpanlarında, maliyet kısıtlarına karşı gelen çarpan λ_2 , sıfırdan farklı olduğunda her iki modelden elde edilecek çözümler birbirinden farklı olacaktır. Bu durum Çizelge 3.12'nin 6. ve Çizelge 3.13'ün 6. satırlarında $\alpha = 1$ iken gözükmemektedir. Ayrıca, λ_2 , sıfırdan farklı olduğunda elde edilen çözümlerde $V(\bar{x})_1 < V(\bar{x})_2$ olduğu gözlenmiştir.

3.3. Geometrik Programlama

Doğrusal olmayan programlama problemlerinin çözümü için geliştirilen yöntemlerden birisi de geometrik programlamadır. Bu yöntem, Duffin, Peterson ve Zener tarafından 1967’de geliştirilmiştir ve geometrik-aritmetik ortalama eşitsizliğine dayanmaktadır. Geometrik programlama, ele alınan problemde değişken sayısı fazla iken, problemin dualini göz önüne alarak çözme temeline dayanmaktadır. Böylece, çözüm için göz önüne alınan değişken sayısı azalacak, bu ise hesaplama kolaylığı getirecektir. Ele alınan optimizasyon problemi, geometrik programlama yardımıyla çözülürken, normalite ve ortogonaliteye ilişkin gerek şartları sağlayan dual değişkenler elde edilir. Geometrik programlama kısıtlı ve kısıtsız olmak üzere iki gruba ayrılmakla beraber, kısıtlı geometrik programlama yöntemi, ele alınan problemi belli dönüşümler altında kısıtsız geometrik programlama problemine dönüştürerek çözmektedir. Tabakalı tesadüfi örneklemede doğrusal olmayan maliyet kısıtı altında örnek çapının tabakalara paylaştırılması problemi, kısıtlı geometrik programlama yapısına uymaktadır.

Kısıtlı geometrik programlama yöntemi, f_i ’ler posinomial(posynomial), g_i ’ler monomial fonksiyonlar ve x_i ’ler pozitif değişkenler olmak üzere Eş. 3.19’da verilen optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılmaktadır[Boyd ve ark., 2007].

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(x) \\ f_i(x) \leq 1, \quad & i = 1, 2, \dots, m \\ g_i(x) = 1, \quad & i = 1, 2, \dots, p \end{aligned} \tag{3.19}$$

Burada, p eşitlik kısıtlarının sayısı, m eşitsizlik kısıtlarının sayısı ve n ise değişken sayısıdır. Eş. 3.19’da verilen optimizasyon problemi standart formda geometrik programlama problemi olarak adlandırılır. Standart geometrik programlama probleminde, amaç fonksiyonu minimum ve posinomial formda olmak zorundadır. Ayrıca, eşitlik kısıtları monomial ve 1’e eşit, eşitsizlik kısıtları ise posinomial formda ve 1’e eşit ya da küçük olmak zorundadır.

3.3.1. Monomial ve posinomial fonksiyon

$x_1, x_2, \dots, x_n$, n tane pozitif değişkeni ifade etmek üzere, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ x_i 'lerin vektörü olsun. x 'in fonksiyonu olan f Eş. 3.20'deki formda ise;

$$f(x) = cx_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}, \quad c > 0 \text{ ve } a_i \in \mathfrak{R} \quad (3.20)$$

bu f fonksiyonu monomial olarak adlandırılır[Boyd ve ark., 2007]. Burada, c sabiti monomial fonksiyonun katsayısı, $a_1, a_2, \dots, a_n$ ise monomial fonksiyonun üsleri olarak adlandırılır. Örneğin, $2.3x_1^2 x_2^{-0.15}$ fonksiyonu, katsayısı 2.3 ve x_1 'in üssü 2, x_2 'nin üssü -0.15 olan iki değişkenli monomial bir fonksiyondur.

Her pozitif sabit ve her pozitif değişken monomialdir. Monomial fonksiyonlar, çarpmaya ve bölmeye göre kapalılık özelliğine sahiptir. Örneğin, f ve g fonksiyonları monomial fonksiyonlar ise fg ve f/g fonksiyonları da monomialdir. Monomial bir fonksiyonun herhangi bir dereceden kuvveti alındığında elde edilen fonksiyon yine monomial bir fonksiyondur. Örneğin, $f(x) = cx_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$ fonksiyonu ($c > 0$ ve $a_i \in \mathfrak{R}$) monomial bir fonksiyon olmak üzere;

$$f(x)^\gamma = \left(cx_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} \right)^\gamma = c^\gamma x_1^{\gamma a_1} x_2^{\gamma a_2} \dots x_n^{\gamma a_n}$$

fonksiyonu da monomialdir. Geometrik programlamada kullanılan monomial terimi, cebirde kullanılan standart tanımdan farklıdır. Cebirde, Eş. 3.20'de verilen fonksiyonun monomial bir fonksiyon olması için değişkenlerin üsleri a_i 'ler pozitif tamsayı olmak zorundadır ve c katsayısı 1'dir. Bununla birlikte, geometrik programlamada kullanılan monomial fonksiyon tanımında ise, c katsayısı herhangi pozitif bir sayı ve değişkenlerin üsleri ise pozitif ya da negatif kesirli sayıları da kapsayan herhangi bir reel sayı olabilir.

Bir veya daha fazla (K tane) monomial fonksiyonun toplamı, K terimli posinomial fonksiyon olarak adlandırılır ve aşağıdaki formda ifade edilir.

$$f(x) = \sum_{k=1}^K c_k x_1^{a_{1k}} x_2^{a_{2k}} \dots x_n^{a_{nk}}, \quad c_k > 0 \text{ ve } a_{ik} \in \mathfrak{R} \quad (3.21)$$

Her monomial fonksiyon, posinomial bir fonksiyondur. Eş. 3.21'deki posinomial fonksiyonlar, toplamaya, çarpmaya ve pozitif ölçeklendirmeye göre kapalılık özelliğine sahiptir. Posinomial fonksiyonlar, monomial fonksiyonlara bölünebilir ve elde edilen yeni fonksiyon yine bir posinomial fonksiyondur. f posinomial fonksiyon, g monomial fonksiyon olmak üzere; f/g posinomial bir fonksiyondur. γ pozitif tamsayı ve f posinomial fonksiyon ise, f^γ posinomial bir fonksiyondur. Aynı şekilde γ pozitif tamsayı ve f posinomial fonksiyon ise, γf 'de posinomial bir fonksiyondur.

Örneğin, x , y ve z pozitif değişkenler olmak üzere;

$$2x, \quad 0.23, \quad 2z\sqrt{x/y}, \quad 3x^2y^{-0.12}z$$

fonksiyonları monomial fonksiyonlardır. Her monomial fonksiyon aynı zamanda posinomial olduğundan, bu fonksiyonların hepsi posinomialdır.

$$0.23 + x/y, \quad 2(1+xy)^3, \quad 2x+3y+2z$$

Fonksiyonları posinomialdır fakat monomial değildir.

$$-1.1, \quad 2(1+xy)^{3.1}, \quad 2x+3y-2z, \quad x^2 + \tan x$$

Fonksiyonları posinomial değildir. Bundan dolayı monomial değildir.

3.3.2. Kısıtsız geometrik programlama

Kısıtsız geometrik programlamada, amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi monomial fonksiyonların toplamından oluşan posinomial bir fonksiyon olarak tanımlanır.

$$z = f(x) = \sum_{j=1}^N U_j$$

Burada,

$$U_j = c_j \prod_{i=1}^n x_i^{a_{ij}} \quad j = 1, 2, \dots, N$$

$$z = f(x) = \sum_{j=1}^N c_j \prod_{i=1}^n x_i^{a_{ij}}$$

olarak verilir. Her bir U_j terimi monomial bir fonksiyondur. Monomial fonksiyonun tanımından $c_j > 0$ ve $a_{ij} \in \Re$ 'dir. Ayrıca N , U_j terimlerinin sayısı sonlu kabul edilir.

Geometrik programlama problemlerinde, posinomial olarak tanımlanan $f(x)$ fonksiyonunun minimizasyonu ele alınır. Ele alınan problemin ilk hali primal olarak isimlendirilir. x_i değişkenleri kesinlikle pozitif değişkenler olarak tanımlanır ve $x_i \leq 0$ durumu ise mümkün olmayan bir çözümü gösterir. $x_i \neq 0$ olması sonuçların üretilmesinde önemli bir rol oynamaktadır.

$z = f(x)$ amaç fonksiyonunun birinci kısmi türevleri minimum noktada sıfır olacağından, amaç fonksiyonun değişkenlere göre türevleri alınarak minimum nokta elde edilir. Amaç fonksiyonu;

$$z = f(x) = \sum_{j=1}^N U_j \quad \text{ve} \quad U_j = c_j \prod_{i=1}^n x_i^{a_{ij}} \quad \text{olarak tanımlandığından;}$$

$$z = f(x) = \sum_{j=1}^N U_j = \sum_{j=1}^N c_j \prod_{i=1}^n x_i^{a_{ij}}$$

olarak elde edilir. Amaç fonksiyonunun x_k değişkenine göre kısmi türevi alınır;

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial U_j}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^N c_j a_{kj} (x_k)^{a_{kj}-1} \prod_{i \neq k} x_i^{a_{ij}} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n \quad x_k > 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^N c_j a_{kj} (x_k)^{a_{kj}-1} \prod_{i \neq k} x_i^{a_{ij}} = \sum_{j=1}^N \frac{a_{kj}}{x_k} c_j (x_k)^{a_{kj}} \prod_{i \neq k} x_i^{a_{ij}} = \sum_{j=1}^N \frac{a_{kj}}{x_k} c_j \underbrace{\prod_{i=1}^n x_i^{a_{ij}}}_{U_j} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^N \frac{a_{kj}}{x_k} U_j = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n$$

olarak elde edilir. Elde edilen son eşitlik ortogonalite şartının bulunmasında kullanılır. z^* , z amaç fonksiyonunun minimum değeri olsun. z posinomial ve z amaç fonksiyonunun minimum noktaları $x_k^* > 0$ olduğundan amaç fonksiyonunun minimum değeri $z^* > 0$ olur.

y_j^* terimini, j . terim U_j 'nin amaç fonksiyonunun optimum değeri z^* 'a göreli katkısı olarak tanımlarsak,

$$y_j^* = \frac{U_j}{z^*}$$

olarak ele alınır. Buradan $y_j^* > 0$ ve

$$\sum_{j=1}^N y_j^* = 1$$

olur. Yukarıdaki gerek şartlar;

$$\sum_{j=1}^N a_{kj} y_j^* = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^N y_j^* = 1 \quad y_j^* > 0 \quad \text{tüm } j \text{ 'ler için}$$

olarak yazılabilir. Bu şartlar sırayla ortogonalite ve normalite şartları olarak adlandırılır. Değişken sayısı n ve U_j terimlerinin sayısı N olmak üzere; $(n+1) = N$ ise, y_j^* değeri tek olarak belirlenir. Ancak $N > (n+1)$ olduğunda y_j^* 'ların tek olmaması nedeniyle problem daha kompleks bir hal alır. Yukarıdaki denklemlerden y_j^* 'ların tek olarak elde edildiğini varsayalım. Bu değerleri kullanarak z^* ve x_i^* ($i = 1, 2, \dots, n$) değerleri aşağıdaki gibi elde edilir.

Geometrik-aritmetik ortalama eşitsizliği kullanılarak,

$$z = f(x) = \sum_{j=1}^N c_j \prod_{i=1}^n x_i^{a_{ij}} = \sum_{j=1}^N y_j^* \left(\frac{c_j \prod_{i=1}^n x_i^{a_{ij}}}{y_j^*} \right) \quad y_j^* > 0 \text{ ve } \sum_{j=1}^N y_j^* = 1$$

olmak üzere;

$$f(x) \geq \prod_{j=1}^N \left(\frac{c_j \prod_{i=1}^n x_i^{a_{ij}}}{y_j^*} \right)^{y_j^*} = \prod_{j=1}^N \left(\frac{c_j}{y_j^*} \right)^{y_j^*} \left(\prod_{j=1}^N \prod_{i=1}^n x_i^{a_{ij} y_j^*} \right)$$

$$f(x) \geq \prod_{j=1}^N \left(\frac{c_j}{y_j^*} \right)^{y_j^*} \left(\prod_{j=1}^N \prod_{i=1}^n x_i^{a_{ij} y_j^*} \right) = \prod_{j=1}^N \left(\frac{c_j}{y_j^*} \right)^{y_j^*} \left(\prod_{i=1}^n x_i^{\sum_{j=1}^N a_{ij} y_j^*} \right)$$

elde edilir. Ortogonalite şartı $\sum_{j=1}^N a_{ij} y_j^* = 0$ olduğundan yukarıdaki eşitsizlik

$$f(x) \geq \prod_{j=1}^N \left(\frac{c_j}{y_j^*} \right)^{y_j^*}$$

olarak elde edilir. $v(y_j^*) = \prod_{j=1}^N \left(\frac{c_j}{y_j^*} \right)^{y_j^*}$ olarak kabul edilirse;

$$f(x) = \underbrace{\sum_{j=1}^N c_j \prod_{i=1}^n x_i^{a_{ij}}}_{\text{primal}} \geq v(y_j^*) = \underbrace{\prod_{j=1}^N \left(\frac{c_j}{y_j^*} \right)^{y_j^*}}_{\text{dual}}$$

elde edilen eşitsizliğe primal-dual eşitsizliği denir ve literatürde zayıf dualite teoremi olarak bilinir. Güçlü dualite teoremi ise yukarıdaki eşitsizliğin eşitlik olarak sağlanmasını kapsamaktadır. Geometrik programlamada, problemlerin çözümü için geometrik-aritmetik ortalama eşitsizliğinden elde edilen güçlü dualite teoremi göz önüne alınmaktadır [http://www.engineering.uiowa.edu/~dbricker/Stacks_pdf2/Constrained_GP.pdf, 2008]. Buradan;

$$f(x) = \underbrace{\sum_{j=1}^N c_j \prod_{i=1}^n x_i^{a_{ij}}}_{\text{primal}} = v(y_j^*) = \underbrace{\prod_{j=1}^N \left(\frac{c_j}{y_j^*} \right)^{y_j^*}}_{\text{dual}}$$

$$z^* = f(x) = \prod_{j=1}^N \left(\frac{c_j}{y_j^*} \right)^{y_j^*}$$

olarak elde edilir. Ortogonalite ve normalite şartları da göz önüne alınarak yukarıdaki denklemin çözümünden, önce y_j^* değerleri, sonra bulunan y_j^* değerleri yerine yazılarak z^* değeri bulunur. Amaç fonksiyonunun minimum değeri z^* ve U_j

terimlerinin amaç fonksiyonu üzerine görelî katkılarını ifade eden y_j^* arasındaki ilişki kullanılarak, amaç fonksiyonunu minimum yapan x_i^* değerleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$U_j = y_j^* z^*$$

$$U_j = c_j \prod_{i=1}^n (x_i^*)^{a_{ij}} = y_j^* z^*$$

Kısaca özetleyecek olursak; aşağıdaki formda olan primal bir model

$$\min(z) = \min f(x) = \min \left(\sum_{j=1}^N c_j \prod_{i=1}^n x_i^{a_{ij}} \right) \quad c_j > 0, \quad x_i > 0 \quad \text{ve} \quad a_{ij} \in \Re$$

geometrik-aritmetik ortalama eşitsizliği yardımı ile elde edilen güçlü dualite teoremi kullanılarak duali alınıp aşağıdaki modele dönüştürülür.

$$\max(v(y_j^*)) = \max \left(\prod_{j=1}^N \left(\frac{c_j}{y_j^*} \right)^{y_j^*} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Kısıtlar} \quad & \sum_{j=1}^N y_j^* = 1 \\ & \sum_{j=1}^N a_{ij} y_j^* = 0 \\ & y_j^* > 0 \end{aligned}$$

Dual problemin çözümünden elde edilen y_j^* optimum değerleri, $U_j = y_j^* z^*$ dönüşümü ile primal modelin optimum değerlerine eşit olur.

3.3.3. Kısıtlı geometrik programlama

Kısıtlı geometrik programlama problemi kendi arasında, kısıtlar eşitsizlik halinde ve kısıtlar hem eşitsizlik hem de eşitlik halinde olmak üzere iki gruba ayrılır. Kısıtlı geometrik programlama yöntemi, belli dönüşümler altında kısıtları amaç fonksiyonuna ekleyerek problemi kısıtsız geometrik programlama yöntemine dönüştürme temeline dayanmaktadır.

Eşitsizlik kısıtlı geometrik programlama

Eşitsizlik kısıtlı geometrik programlama probleminde, hem amaç fonksiyonu hem de eşitsizlik kısıtları posinomial fonksiyonlar ve eşitsizlik kısıtları 1'e eşit ya da küçük olmak zorundadır. Eşitsizlik kısıtlı geometrik programlama problemi için primal model;

$$\min f(x)$$

$$\text{Kısıtlar} \quad g_i(x) = \sum_{j=1}^{N_i} c_j \prod_{i=1}^n x_i^{a_{ij}} \leq 1 \quad c_j > 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_i > 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

olarak tanımlanır. Burada, m eşitsizlik kısıtlarının sayısını, n değişken sayısını ve N_i ise i . eşitsizlik kısıtındaki terim sayısını ifade etmektedir. Primal model, dual modele dönüştürüldüğünde elde edilen yeni modelin kısıtları doğrusal fonksiyonlardır. Dual modelde, amaç fonksiyonundaki ve kısıtlardaki terim sayıları kadar y_j^* değişkeni yer alır. Ayrıca, hem amaç fonksiyonuna hem de kısıtlara Lagrange çarpanları λ_i 'ler ilave edilir. Eşitsizlik kısıtlı geometrik programlama için gerekli dönüşümler yapıldıktan sonra dual model;

$$\max \quad v(y_j^*, \lambda) = \prod_{i=0}^m \left\{ \lambda_i^{\lambda_i} \prod_{j=1}^{N_k} \left(\frac{c_j}{y_j^*} \right)^{y_j^*} \right\}$$

$$\begin{aligned}
\text{Kısıtlar} \quad & \sum_{j=1}^{N_k} y_j^* = \lambda_i & i = 0, 1, 2, \dots, m \\
& \sum_{j=1}^{N_i} a_{ij} y_j^* = 0 & j = 1, 2, \dots, n \\
& \lambda_0 = 1 \\
& y_j^* \geq 0, \quad \lambda_i \geq 0 & \forall i, j
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Amaç fonksiyonuna eklenen Lagrange çarpanı λ_0 olmak üzere;

$\lambda_0 = 1$ kısıtına normalite şartı ve $\sum_{j=1}^{N_i} a_{ij} y_j^* = 0$ kısıtına ise ortogonalite şartı denir.

Dual modelin çözümünden (y_j^*, λ) optimum değerleri elde edilir. Dual modelden elde edilen optimum değerler yardımı ile primal modelin optimum değerlerini elde etmek istersek; primal model ile dual model değişkenleri arasında aşağıdaki ilişki yer almaktadır.

$$\frac{c_j \prod_{i=1}^n x_i^{*a_{ij}}}{g_i(x^*)} = \frac{y_j^*}{\lambda_i^*}$$

Eğer $i \geq 1$ ve $\lambda_i^* > 0$ ise bu durumda $g_i(x^*) = 1$ olur. Bu durumda yukarıda belirtilen kısıtların terimleri ile dual modelden elde edilen (y_j^*, λ) optimum değerleri arasındaki ilişki;

$$c_j \prod_{i=1}^n x_i^{*a_{ij}} = \frac{y_j^*}{\lambda_i^*}$$

halini alır. $i = 0$ ve $\lambda_i^* = 1$ ise bu durumda, amaç fonksiyonu terimleri ile (y_j^*, λ) optimum değerleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibi

$$\frac{c_j \prod_{i=1}^n x_i^{*a_{ij}}}{f(x^*)} = \frac{y_j^*}{\underbrace{\lambda_0^*}_1} = y_j^*$$

tanımlanır[http://www.engineering.uiowa.edu/~dbricker/Stacks_pdf2/Unconstrained_GP.pdf, 2008].

3.3. Örnek

Aşağıda verilen iki değişkenli kısıtlı geometrik programlama problemini çözünüz.

$$\min 2\pi x^2 + 2\pi xy$$

$$\text{Kısıtlar } 1000y^{-1}x^{-2} \leq 1$$

$$x, y > 0$$

Çözüm

Yukarıda verilen iki değişkenli primal modeli, dual probleme çevirmek istersek; amaç fonksiyonundaki ilk terimin katsayısı $c_1 = 2\pi$, ikinci terimin katsayısı $c_2 = 2\pi$ 'dir. Amaç fonksiyonunda iki terim yer aldığından her bir terimin dual problemdeki karşılığı olarak y_1^* ve y_2^* yazılır. Ayrıca, amaç fonksiyonu için atanan Lagrange çarpanı λ_0 'dır. Buradan, normalite şartı;

$$y_1^* + y_2^* = \lambda_0 = 1$$

olarak elde edilir. Eşitsizlik kısıtı tek olduğundan bu kısıta karşı gelen Lagrange çarpanı λ_1 ile ifade edilir. Bu kısıt tek bir terim içerdiğinden bu terimin dual modeldeki karşılığı olarak y_3^* yazılır ve bu terimin katsayısı $c_3 = 1000$ 'dir. Bu durumda dual problemin kısıtlarından bir diğeri;

$$y_3^* = \lambda_1$$

olarak elde edilir. Ortogonalite şartlarının elde edilebilmesi için, x değişkenine ait üsler amaç fonksiyonunun birinci teriminde 2, ikinci teriminde 1 ve kısıttaki terimde ise -2'dir. Aynı şekilde y değişkenine ait üsler amaç fonksiyonunun birinci teriminde 0, ikinci teriminde 1 ve kısıttaki terimde ise -1'dir. Buradan; $\sum_{j=1}^{N_i} a_{ij} y_j^* = 0$ ortogonalite şartları;

$$2y_1^* + y_2^* - 2y_3^* = 0$$

$$y_2^* - y_3^* = 0$$

olarak elde edilir. Tüm kısıtlar elde edildikten sonra dual model aşağıdaki gibi yazılır.

$$\max \left(\frac{2\pi}{y_1^*} \right)^{y_1^*} \left(\frac{2\pi}{y_2^*} \right)^{y_2^*} \left(\frac{1000}{y_3^*} \right)^{y_3^*} \lambda_1^{\lambda_1}$$

$$\text{Kısıtlar } y_1^* + y_2^* = \lambda_0 = 1$$

$$y_3^* = \lambda_1$$

$$2y_1^* + y_2^* - 2y_3^* = 0$$

$$y_2^* - y_3^* = 0$$

$$y_j^* \geq 0 \quad j=1, 2, 3 \quad \text{ve} \quad \lambda_1 \geq 0$$

Dual problemim çözümünden optimum noktaların değerleri;

$$(y_1^*, y_2^*, y_3^*, \lambda_0, \lambda_1) = (1/3, 2/3, 2/3, 1, 2/3)$$

olarak, amaç fonksiyonu değeri ise 1187,4476 olarak elde edilir. Primal model için optimum değerler ise, dual modelden elde edilen değişkenler ile primal model değişkenleri arasındaki ilişki yardımı ile;

$$1000x^{-2}y^{-1} = \frac{y_3^*}{\lambda_1^*} \Rightarrow 1000x^{-2}y^{-1} = \frac{2/3}{2/3} = 1$$

$$\frac{2\pi x^2}{f(x^*)} = y_1^* \Rightarrow \frac{2\pi x^2}{1187.4476} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2\pi xy}{f(x^*)} = y_2^* \Rightarrow \frac{2\pi xy}{1187.4476} = \frac{2}{3}$$

denklemlerinin çözümünden elde edilir. Bu denklemlerin çözümünden, primal model için optimum noktalar $(x, y) = (7.937, 15.874)$ olarak elde edilir.

Hem eşitsizlik hem de eşitlik kısıtlı geometrik programlama

Hem eşitsizlik hem de eşitlik kısıtlı geometrik programlama, yalnız eşitsizlik kısıtı olan geometrik programlama problemine çok benzemektedir. Bu problemlerde de hem amaç fonksiyonu hem de eşitsizlik kısıtları posinomial fonksiyonlar ve eşitsizlik kısıtları 1'e eşit ya da küçük olmak, bununla birlikte eşitlik kısıtları monomial fonksiyonlar ve 1'e eşit olmak zorundadır [http://www.stanford.edu/~boyd/ggplab/gpposy.pdf, 2009]. Hem eşitsizlik hem de eşitlik kısıtlı geometrik programlama problemi için primal model;

$$\min \sum_{k=1}^{K_0} b_k^{(0)} x_1^{a_{k1}^{(0)}} x_2^{a_{k2}^{(0)}} \dots x_n^{a_{kn}^{(0)}}$$

$$\text{Kısıtlar} \quad \sum_{k=1}^{K_i} b_k^{(i)} x_1^{a_{k1}^{(i)}} x_2^{a_{k2}^{(i)}} \dots x_n^{a_{kn}^{(i)}} \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$h_i x_1^{g_{i1}} x_2^{g_{i2}} \dots x_n^{g_{in}} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

olarak tanımlanır. Burada, n değişken sayısı ve $\forall x_i > 0$, amaç fonksiyonunda ve eşitsizlik kısıtlarında değişkenlerin üsleri $a_{kj}^{(i)}$ ile eşitlik kısıtlarındaki değişkenlerin üsleri g_{ij} değerleri negatif, pozitif ve kesirli sayıları da kapsayan herhangi bir reel sayı ($a_{kj}^{(i)}, g_{ij} \in \mathfrak{R}$), amaç fonksiyonunda ve eşitsizlik kısıtlarında terimlerin katsayıları $b_k^{(i)}$ ile eşitlik kısıtlarındaki terimlerin katsayıları h_i değerleri pozitif reel sayılardır ($b_k^{(i)}, h_i \in \mathfrak{R}^+$). m değeri eşitsizlik kısıtlarının sayısını, p değeri ise eşitlik kısıtlarının sayısını ifade etmektedir. Hem eşitsizlik hem de eşitlik kısıtlı primal geometrik programlama modelinin, dual modele dönüştürülmesi ve çözümü, eşitsizlik kısıtlı geometrik programlama problemlerinin çözümü ile aynıdır.

Yukarıdaki tanımlamalar altında, bu çalışmada ele alınan, yığından seçilen n çaplı örneğin tabakalara optimum şekilde paylaştırılması problemini Geometrik programlama yöntemine uygun olarak modelleyelim.

→ Varyansı amaç fonksiyonu, maliyeti kısıt olarak aldığımız durumda model

$$\min V(\bar{x}_{tb}) = \min \left(\sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{n_h} - \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{N_h} \right)$$

$$\sum_{h=1}^L t_h n_h^\alpha \leq c$$

$$n_h \leq N_h \quad h=1, 2, \dots, L$$

$$\sum_{h=1}^L n_h = n \quad h=1, 2, \dots, L$$

biçimindedir. Bu problem, geometrik programlama problemine dönüştürülmek istendiğinde hem eşitsizlik hem de eşitlik kısıtlı bir geometrik programla problemi

olur. Bununla birlikte, eşitlik kısıtı $\sum_{h=1}^L n_h = n_1 + n_2 + \dots + n_L = n$ ifadesi posinomial bir

fonksiyon olmakla beraber monomial değildir. Bu nedenle, bu problemin geometrik programlama ile çözümü söz konusu değildir. Problemi geometrik programlama

yöntemi ile çözülebilir hale getirmek için eşitlik kısıtı, eşitsizlik haline getirilip mümkün çözümler içinde sadece $\sum_{h=1}^L n_h = n$ kısıtını sağlayanlar dikkate alınmıştır. Eşitsizlik kısıtlı geometrik programlama yöntemi ile çözümlenecek olan örnek çapının tabakalara optimum şekilde paylaşılması probleminin primal modeli aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$\min V(\bar{x}_{tb}) = \min \left(\sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{n_h} - \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{N_h} \right)$$

$$\frac{1}{c} \sum_{h=1}^L t_h n_h^\alpha \leq 1$$

$$\frac{n_h}{N_h} \leq 1 \quad h=1, 2, \dots, L$$

$$\frac{1}{n} \sum_{h=1}^L n_h \leq 1 \quad h=1, 2, \dots, L$$

3.4. Örnek

100 çaplı bir yığın iki tabakaya ayrılmıştır. Daha önceki yıllardan tabaka standart sapmaları ve her bir tabakaya seyahat maliyetleri aşağıda verildiği gibidir.

Tabaka	N_h	S_h	t_h (TL)
1	30	4	20
2	70	9	10
Toplam	100		

Bu araştırma için 2000TL. ayrılmış ve sabit masraflar için 200TL. harcanmıştır.

Maliyet kısıtımızın $\sum_{h=1}^L t_h n_h^{0.5}$ yapısında olduğunu varsayarak bu bütçe planına göre 30

çaplı örneği varyansı minimum yapacak şekilde geometrik programlama kullanarak tabakalara paylaşalım.

Çözüm

Araştırma için ayrılan bütçe 2000TL. ve sabit masraflar için yapılan harcama 200TL. olduğundan bu problem için ayrılan bütçe $c = 2000 - 200 = 1800$ 'dür. Yukarıdaki problemin geometrik programlama için primal modeli;

$$\min V(\bar{x}_{tb}) = \min \left(\sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{n_h} \right) = \min \left(\frac{(0.30)^2 16}{n_1} + \frac{(0.70)^2 81}{n_2} \right)$$

$$\frac{1}{1800} (20n_1^{0.5} + 10n_2^{0.5}) \leq 1$$

$$\frac{n_1}{30} \leq 1$$

$$\frac{n_2}{70} \leq 1$$

$$\frac{1}{30} (n_1 + n_2) \leq 1$$

olarak elde edilir. Eşitsizlik kısıtlı geometrik programlama yardımı ile primal modelin duali;

$$\max \left\{ \left(\left(\frac{1.44}{y_1^*} \right)^{y_1^*} \left(\frac{39.69}{y_2^*} \right)^{y_2^*} \left(\frac{0.011}{y_3^*} \right)^{y_3^*} \left(\frac{0.0055}{y_4^*} \right)^{y_4^*} \left(\frac{0.033}{y_5^*} \right)^{y_5^*} \left(\frac{0.014}{y_6^*} \right)^{y_6^*} \left(\frac{0.033}{y_7^*} \right)^{y_7^*} \right) \left(\frac{0.033}{y_8^*} \right)^{y_8^*} \lambda_1^{\lambda_1} \lambda_2^{\lambda_2} \lambda_3^{\lambda_3} \lambda_4^{\lambda_4} \right\}$$

$$\text{Kısıtlar} \quad y_1^* + y_2^* = \lambda_0 = 1$$

$$y_3^* + y_4^* = \lambda_1$$

$$y_5^* = \lambda_2$$

$$y_6^* = \lambda_3$$

$$y_7^* + y_8^* = \lambda_4$$

$$-y_1^* + 0.5y_3^* + y_5^* + y_7^* = 0$$

$$-y_2^* + 0.5y_4^* + y_6^* + y_8^* = 0$$

$$y_j^* \geq 0 \quad j=1, 2, \dots, 8 \quad \text{ve} \quad \lambda_i \geq 0 \quad i=1, 2, 3, 4$$

olarak elde edilir. Elde edilen dual modelin kısıtlarının çözülmesi ile, örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapacak, tabakalardan seçilecek optimum örnek çapları;

$$(n_1, n_2) = (4.8, 25.2) \cong (5, 25)$$

olarak elde edilir. Bu örnek çapları kullanılarak amaç fonksiyonun yani örnek ortalaması istatistiğinin varyansının minimum değeri ise 1.875 olarak hesaplanır.

3.3.4. $c' = \sum_{h=1}^L t_h n_h^\alpha$ kısıtı altında geometrik programlama ve Kuhn-Tucker yöntemi kullanılarak örnek ortalaması istatistiğinin varyansının minimum yapılması

Bu alt bölümde, $c' = \sum_{h=1}^L t_h n_h^\alpha$ kısıtı göz önüne alınarak, $\alpha > 0$ olmak üzere; α 'ya bağlı doğrusal olmayan maliyet kısıtına ilişkin simülasyon yapılmış, geometrik programlama ve Kuhn-Tucker yöntemi kullanılarak α 'nın hangi değerleri için örnek ortalaması istatistiğinin varyansının daha etkin olduğu, ayrıca kullanılan yöntemlerin birbirlerine göre ne gibi üstünlükleri olduğu incelenmiştir. Bu maliyet kısıtı yardımı ile örnek ortalaması istatistiğinin varyans değerinin bulunması için 1000 tekrarlı Monte Carlo simülasyonu kullanılmıştır. Simülasyon çalışmasında yığın çapı (N), yığından seçilecek örnek çapı (n), bütçe (c'), tabakadan tabakaya seyahat maliyeti (t_h) ve α başlangıçta verilmiştir. Belirlenen doğrusal olmayan maliyet kısıtı altında, örnek ortalaması istatistiğinin varyansının minimum yapılması için kullanılacak olan, geometrik programlama ile çözülmek üzere oluşturulan Model 1 ve Kuhn-Tucker yöntemi ile çözülmek üzere oluşturulan Model 2 aşağıda verilmiştir. Simülasyon çalışması tabakalara seyahat maliyetlerinin farklı değerleri altında

yapılmıştır. Tabakalara seyahat etmenin farklı değerleri altında Model 1 ve Model 2'nin çözümleri elde edilerek, tabakalı tesadüfi örneklemede örnek çapının tabakalara paylaştırılması probleminde hangi optimizasyon yönteminin kullanılmasının ne gibi avantajlar sağladığı tartışılmıştır.

<i>Model 1:</i> Geometrik programlama için oluşturulan model	<i>Model 2:</i> Kuhn-Tucker yöntemi için oluşturulan model
$\min V(\bar{x})_1$	$\min V(\bar{x})_2$
$\frac{1}{n} \sum_{h=1}^L n_h \leq 1$	$\sum_{h=1}^L n_h = n$
$\frac{1}{c} \sum_{h=1}^L t_h n_h^\alpha \leq 1$	$\sum_{h=1}^L t_h n_h^\alpha \leq c'$
$\frac{n_h}{N_h} \leq 1$	$r_h \leq n_h \leq k_h \quad h = 1, \dots, L$
$n_h > 0 \quad h = 1, 2, \dots, L$	

Sonraki işlemler aşağıdaki adımlara göre yapılmıştır.

Adım 1: Tabaka çaplarının belirlenmesi için Normal dağılımdan N birimlik sayı üretilip, kullanılan Normal dağılımın ortalaması ve kaç tabaka olduğu dikkate alınarak belirlenen tabaka sınırları çerçevesinde tabaka çapları ve tabakalardaki birimler elde edilmiştir.

Adım 2: Belirlenen tabakadaki birimler yardımı ile tabaka varyansları hesaplanmıştır.

Adım 3: Belirlenen doğrusal olmayan maliyet kısıtı altında oluşturulan Model 1 ve Model 2'nin çözümleri yapılmış ve bu modellere ilişkin örnek ortalaması istatistiğinin varyans değerleri ve CPU time değerleri elde edilmiştir. Burada modelin çözümü için gerekli olan başlangıç noktası, örnek çapı için belirlenen alt ve üst sınır arasında ortalama bir değer olarak seçilmiştir. Ayrıca Model 1'deki geometrik programlama modelinin çözümü için <http://www.stanford.edu/~boyd/>

ggplab/gpposy.pdf ve <http://stanford.edu/~boyd/ggplab/ggplab.pdf>’de verilen Matlab alt modülü kullanılmış, Model 2’nin çözümü için simülasyon programı yazılmıştır.

Adım 4: Adım 1-2-3 1000 defa tekrar edilmiştir.

Adım 5: Sonuçların genellenebilmesi için 1000 tekrardaki örnek ortalaması istatistiğinin varyans değerleri ve CPU time değerlerinin ortalaması alınarak, tabakalardan seçilecek optimum örnek çapları, örnek ortalaması istatistiğinin varyansı ve CPU time değerleri elde edilmiştir.

Simülasyon çalışması yığınınımızın iki, üç, dört ve beş tabakadan oluşması durumunda yapılmış, sonuçlar dört farklı tabaka sayısı için genellenebildiğinden daha fazla tabaka sayısı dikkate alınmamıştır. Sonuçlar Çizelge 3.21-Çizelge 3.30’da özetlenmiştir. Çizelgelerde yer alan n_{ih} gösterimi, i . modelden elde edilen h . tabakadan seçilmesi gereken örnek çapını ve i . Kul. Bütçe ise i . modelle çözüm yapıldığında araştırma için ayrılan bütçenin ne kadarının kullanıldığını ifade etmektedir. Bununla beraber, mümkün çözümlerin sağlanmadığı durumlar italik olarak ifade edilmiştir.

Çizelge 3.21. $L = 2$, $N = 500$, $n = 100$, $c' = 500$, $t_1 = 1$ ve $t_2 = 1$ iken örnek çapları ve varyans değerleri

α	n_{11}	n_{12}	n_{21}	n_{22}	$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul. Bütçe	2.Kul. Bütçe
0.2	50.3134	49.6866	50.3630	49.6370	1.1738	1.1841	499.4219	86.0469	4.3734	4.3734
0.4	50.1828	49.8172	50.2000	49.8000	1.1601	1.1703	501.5156	87.2344	9.5635	9.5635
0.5	50.0566	49.9434	50.0630	49.9370	1.1468	1.1570	497.2656	82.6406	14.1421	14.1421
0.6	50.0607	49.9393	50.0650	49.9350	1.1560	1.1662	480.4844	87.0938	20.9128	20.9128
0.8	50.2635	49.7365	50.3190	49.6810	1.1638	1.1743	511.4063	90.6094	45.7304	45.7304
1	50.3869	49.6131	50.4640	49.5360	1.1646	1.1749	563.4219	90.5000	100	100
1.2	50.0066	49.9934	50.0300	49.9700	1.1598	1.1699	513.0469	92.5000	218.6724	218.6724
1.5	39.6880	39.6416	39.6710	39.6360	1.5274	1.5376	495.1719	94.0625	499.6178	499.4043
1.8	21.3712	21.5771	21.3610	21.5810	3.1344	3.1440	480.4063	96.5938	499.4426	499.3123
2	15.8361	15.7643	15.8450	15.7740	4.3291	4.3380	491.9531	98.2813	499.2925	499.8831

Çizelge 3.22. $L = 2$, $N = 500$, $n = 100$, $c' = 1000$, $t_1 = 1$ ve $t_2 = 50$ iken örnek çapları ve varyans değerleri

α	n_{11}	n_{12}	n_{21}	n_{22}	$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul. Bütçe	2.Kul. Bütçe
0.2	49.9508	50.0492	49.9370	50.0630	1.1718	1.1820	493.9844	90.0313	111.5440	111.5499
0.4	50.0870	49.9130	50.1970	49.8030	1.1614	1.1716	492.7813	89.8906	243.7067	243.5002
0.5	50.4720	49.5280	50.5650	49.4350	1.1604	1.1705	471.7500	86.5000	358.9850	358.6610
0.6	49.9852	50.0148	50	50	1.1653	1.1750	493.6563	89.2344	533.3671	533.2762
0.8	59.0834	40.9166	59.0040	40.9960	1.1956	1.2054	510.4844	103.9844	999.9765	1001.5
1	81.6327	18.3673	82	18	2.1896	2.2021	499.1563	73.0313	1000	982
1.2	63.3375	10.6498	63.3440	10.8240	3.7394	3.7398	494.9531	110.1094	999.8434	1016.7
1.5	30.9968	6.4914	30.9900	6.4860	6.5151	6.5181	386.6719	86.6875	999.5195	998.4323
1.8	18.9686	4.6645	18.9760	4.9760	9.3490	9.3500	480.9688	104.3906	999.2258	1098.04
2	14.7317	3.9549	14.7400	4.0000	11.4117	11.4189	491.3594	106.6406	999.0834	1017.3

Çizelge 3.23. $L = 2$, $N = 500$, $n = 100$, $c' = 1000$, $t_1 = 50$ ve $t_2 = 1$ iken örnek çapları ve varyans değerleri

α	n_{11}	n_{12}	n_{21}	n_{22}	$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul. Bütçe	2.Kul. Bütçe
0.2	49.7428	50.2572	49.6920	50.3080	1.1630	1.1731	496.5625	90.5938	111.4125	111.3906
0.4	49.9922	50.0078	49.9900	50.0100	1.1694	1.1785	493.2813	90.9531	243.8553	243.8511
0.5	50.0702	49.9298	50.0750	49.9250	1.1566	1.1664	494.5156	90.0469	360.8676	360.8842
0.6	49.7632	50.2368	49.7360	50.2640	1.1707	1.1818	495.0469	90.4219	531.8188	531.6512
0.8	40.9177	59.0823	40.9960	59.0040	1.2234	1.2332	513.3594	106.0313	999.9970	1001.5
1	18.3673	81.6327	18	82	2.1476	2.1577	565.4219	106.4375	1000	982
1.2	10.6605	62.9637	10.8350	62.9780	3.7807	3.7896	499.0156	113.5313	999.8425	1016.7
1.5	6.4978	30.8539	6.5230	30.8650	6.6507	6.6521	494.1719	106.7344	999.5550	1004.5
1.8	4.6735	18.8195	4.9860	18.8250	9.3971	9.3987	478.8906	104.9063	999.2155	1098.4
2	3.9659	14.5791	4.0000	14.5830	11.4052	11.4061	492.7813	105.6250	998.9814	1012.7

Çizelge 3.24. $L = 2$, $N = 500$, $n = 100$, $c' = 1500$, $t_1 = 25$ ve $t_2 = 35$ iken örnek çapları ve varyans değerleri

α	n_{11}	n_{12}	n_{21}	n_{22}	$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul. Bütçe	2.Kul. Bütçe
0.2	49.9270	50.0730	49.9100	50.0900	1.1623	1.1725	497.4375	90.0156	131.2098	131.2113
0.4	50.0095	49.9905	50.0270	49.9730	1.1616	1.1717	465.4219	85.8594	286.9021	286.8954
0.5	49.8786	50.1214	49.8540	50.1460	1.1541	1.1653	495.7188	90.4531	424.3496	424.3669
0.6	50.0243	49.9757	50.0430	49.9570	1.1571	1.1672	501.3438	86.0625	627.3532	627.3297
0.8	49.7486	50.2514	49.6970	50.3030	1.1630	1.1729	509.1094	83.4688	1372.83	1373.02
1	27.5093	23.2077	27.5160	23.1930	2.6400	2.6435	561.1875	89.5313	1500	1499.7
1.2	15.9733	13.6318	15.9760	13.6330	4.7035	4.7132	507.3906	93.8281	1499.6	1499.8
1.5	9.1936	8.0673	9.1880	8.0530	8.2007	8.2089	508.1094	98.9531	1498.9	1496.1
1.8	6.4373	5.6270	6.3970	5.7380	11.7507	11.7515	495.5000	99.6406	1498.3	1518.4
2	5.3302	4.7441	5.2060	4.9280	14.1099	14.1129	449.1875	91.3125	1498	1527.5

Çizelge 3.25. $L = 3$, $N = 10000$, $n = 500$, $c' = 550$, $t_1 = 1$, $t_2 = 1$ ve $t_3 = 1$ iken örnek çapları ve varyans değerleri

α	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{21}	n_{22}	n_{23}	$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul. Bütçe	2.Kul. Bütçe
0.2	186.6489	126.7895	186.5616	186.6390	126.8040	186.5550	13.9021	13.9134	494.15	108.56	8.3253	8.3254
0.4	186.6642	126.9427	186.3931	186.6650	126.9480	186.3610	13.9039	13.9140	495.98	108.09	23.1344	23.1339
0.5	186.6541	126.7694	186.5766	186.6530	126.7840	186.5800	13.8978	13.9071	522.32	108.35	38.5806	38.5814
0.6	186.2934	126.9664	186.7402	186.2780	126.9930	186.7630	13.9187	13.9273	518.34	107.46	64.3645	64.3673
0.8	186.3754	127.0214	186.6032	186.3620	127.0450	186.6080	13.9195	13.9286	495.20	105.92	179.2911	179.2958
1	186.2701	126.8552	186.8748	186.2270	126.8810	186.8930	13.9065	13.9175	521.95	108.65	500	500
1.2	85.0527	60.0037	85.1298	85.0480	60.0190	85.1330	31.1082	31.1094	522.14	108.45	549.9827	550.026
1.5	35.2497	25.8971	35.2051	35.2330	25.9070	35.2070	75.4384	75.4400	479.12	95.03	549.9565	549.9002
1.8	19.5254	14.8324	19.5673	19.5420	14.9440	19.6010	135.7365	135.7463	475.96	98.39	549.9349	552.6530
2	14.5408	11.2522	14.5558	14.5960	11.0380	14.6330	181.6167	181.6186	504.85	91.09	549.9174	549.0053

Çizelge 3.26. $L = 3$, $N = 10000$, $n = 500$, $c' = 5000$, $t_1 = 15$, $t_2 = 75$ ve $t_3 = 50$ iken örnek çapları ve varyans değerleri

α	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{21}	n_{22}	n_{23}	$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul. Bütçe	2.Kul. Bütçe
0.2	186.4195	126.8890	186.6915	186.3910	126.8950	186.7140	13.8840	13.8941	496.7031	106.9531	382.5547	382.5587
0.4	186.5380	127.0030	186.4590	186.5460	127.0060	186.4490	13.8893	13.8976	511.1875	108.9844	1046.91	1046.91
0.5	186.6537	126.7796	186.5667	186.6440	126.7940	186.5600	13.8720	13.8821	510.7344	107.6406	1732.35	1732.38
0.6	186.6554	126.9543	186.3903	186.6520	126.9600	186.3600	13.9028	13.9123	504.0313	106.9063	2868.8	2868.7
0.8	206.6771	54.9797	105.8111	206.6840	54.9910	105.8000	22.4107	22.4205	504.5000	134.3906	5000.2	5000.3
1	76.5662	23.3326	42.0312	76.5570	23.3050	42.0330	57.1003	57.1093	537.5938	116.8594	4999.9	4997.9
1.2	39.0743	13.2666	22.6269	39.0730	13.1280	22.6430	106.0091	106.0103	517.5156	104.4219	4999.8	4980.7
1.5	19.6513	7.5923	12.1742	19.6820	7.8100	12.0270	197.5304	197.5368	491.3906	100.0469	4999.6	5032.2
1.8	12.3286	5.2750	8.0257	12.1870	5.0000	8.0000	299.0872	299.0894	478.2188	109.8594	4999.4	4821.3
2	9.7406	4.4050	6.5127	9.9580	4.0370	6.5670	368.0693	368.0702	498.1563	119.7031	4999.3	4866

Çizelge 3.27. $L = 4$, $N = 10000$, $n = 2000$, $c' = 1000$, $t_1 = 1$, $t_2 = 1$, $t_3 = 1$ ve $t_4 = 1$ iken örnek çapları ve varyans değerleri

C'	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{14}	n_{21}	n_{22}	n_{23}	n_{24}
0.2	649.0600	350.1815	349.9469	650.8116	731.4930	267.0650	266.7760	734.6510
0.4	649.6434	349.4557	350.1375	650.7635	732.2990	266.2620	267.1280	734.3090
0.5	651.7205	349.8902	350.0601	648.3292	736.3190	266.6310	266.8390	730.1810
0.6	649.7347	349.4894	350.0709	650.7051	732.5030	266.2610	266.9820	734.2270
0.8	650.3267	350.0464	349.6313	649.9956	733.5640	266.9970	266.4900	732.9430
1	325.1494	174.7558	175.1337	324.9611	325.2240	174.8210	174.9720	324.9490
1.2	126.1699	71.6506	71.6949	125.8765	126.1720	71.6540	71.7010	125.8580
1.5	48.7268	29.5920	29.5807	48.5117	48.7490	29.5790	29.5940	48.4950
1.8	25.6983	16.4927	16.4829	25.6733	25.7120	16.4970	16.4760	25.6960
2	18.6605	12.3270	12.3178	18.6517	18.7310	12.1770	12.1670	18.7090

$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul Bütçe	2.Kul Bütçe
1.7198	1.7994	514.6719	113.5625	13.7592	13.5964
1.7222	1.8019	512.7031	112.1719	47.5075	46.6816
1.7110	1.7900	513.7031	113.5625	88.4064	86.8211
1.7249	1.8048	529.5156	111.6094	164.6593	161.8573
1.7220	1.8017	513.8125	113.1406	572.8299	566.4964
3.9579	3.9583	542.4043	119.8906	1000	1000
10.8194	10.8194	526.2344	140.1875	999.9513	999.9265
28.2679	28.2679	522.1719	110.5313	999.8815	999.9416
53.0594	53.0594	512.1250	113.0313	999.8098	1000.6
72.6110	72.6110	509.7969	103.2969	999.7815	997.1923

Çizelge 3.28. $L = 4$, $N = 10000$, $n = 2000$, $c' = 10000$, $t_1 = 75$, $t_2 = 80$, $t_3 = 65$ ve $t_4 = 90$ iken örnek çapları ve varyans değerleri

α'	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{14}	n_{21}	n_{22}	n_{23}	n_{24}
0.2	651.3864	348.8224	349.4574	650.3338	735.0850	265.4700	266.2340	733.1950
0.4	650.8256	350.0840	350.2546	648.8358	734.7510	266.9310	267.1540	731.1570
0.5	649.9256	349.9638	349.3482	650.7624	732.9000	266.7140	265.9280	734.4500
0.6	463.5812	204.8711	233.2072	416.0635	445.7750	205.0530	234.9860	428.6660
0.8	104.6127	50.4806	56.6299	94.3406	104.6210	50.4450	56.6650	94.3520
1	42.4093	21.9896	24.4046	38.5982	42.4030	21.9940	24.3820	38.6380
1.2	23.1285	12.7303	14.0026	21.1853	23.1120	12.8060	14.0180	21.1790
1.5	12.5044	7.4226	8.0654	11.6435	12.5130	7.2830	8.0010	11.7530
1.8	8.3001	5.2075	5.6068	7.7719	8.0620	5.0000	5.8830	7.9890
2	6.7544	4.3665	4.6748	6.3512	6.9910	4.0210	4.9940	6.0470

$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul Bütçe	2.Kul Bütçe
1.7244	1.8047	493.9844	110.0469	1070.5	1060.4
1.7188	1.7983	508.2344	112.1875	3711.1	3664.4
1.7022	1.7923	506.4531	112.8906	6919.4	6836
2.9076	2.9089	512.9688	126.0313	10001	10001
14.1850	14.1850	530.6875	130.1563	10000.4	10001
34.8591	34.8591	579.1719	112.8125	10000	10002
62.9693	62.9693	527.5156	116.9375	9999.5	10010
113.6675	113.6675	487.9531	102.8125	9998.8	9989.5
168.0211	168.0211	520.8125	113.4219	9998.2	10030
205.4752	205.4752	505.9844	118.1719	9997.8	9871.1

Çizelge 3.29. $L=5$, $N=12000$, $n=3000$, $c'=10000$, $t_1=1$, $t_2=1$, $t_3=1$, $t_4=1$ ve $t_5=1$ iken örnek çapları ve varyans değerleri

α	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{14}	n_{15}	n_{21}	n_{22}	n_{23}	n_{24}	n_{25}
0.2	763.5975	232.1128	532.5785	704.0244	767.6869	797.3650	237.7350	459.1890	701.5570	804.1090
0.4	764.2783	231.9444	532.4781	704.6091	766.6901	798.4840	237.5760	459.0140	702.4360	802.4610
0.5	765.9107	232.3560	531.7490	704.7932	765.1910	801.1000	238.0790	458.1730	702.6940	799.9360
0.6	767.8918	231.9384	532.3303	703.7314	764.1080	804.3730	237.6020	458.8380	701.0330	798.1500
0.8	767.1792	231.5347	532.1676	704.1355	764.9830	803.1290	237.1700	458.5760	701.6080	799.5120
1	765.0013	232.3365	532.4196	704.7333	765.5093	799.7370	237.9840	459.0290	702.7100	800.5400
1.2	699.8777	236.2034	502.0388	648.0478	699.7229	712.2130	219.7880	493.4960	643.0620	712.1830
1.5	191.0292	73.6073	142.7573	178.3331	191.0029	191.3360	73.5740	143.1050	177.3550	191.3240
1.8	80.1805	34.1674	61.8062	75.3962	80.2281	80.1930	34.1640	61.8270	75.3460	80.2360
2	51.8961	23.4168	40.7089	49.0648	51.8782	51.8990	23.3900	40.7140	49.0570	51.8710

$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul Bütçe	2.Kul Bütçe
1.6241	1.6360	516.4063	137.5469	17.7417	17.7187
1.6230	1.6348	515.8125	138.5156	63.4134	63.2852
1.6228	1.6341	515.7813	139.8281	120.1880	119.9300
1.6248	1.6367	508.9093	139.7344	228.1200	227.6424
1.6253	1.6372	516.1563	138.4688	825.2305	824.0469
1.6244	1.6362	548.8125	141.3438	3000	3000
1.8042	1.8228	526.5469	138.8125	9999.5	9994.3
8.2651	8.2653	492.5000	177.9375	9998.7	9998
20.4113	20.4113	511.0781	150.5469	9997.9	9997.2
31.6145	31.6145	512.9219	132.3594	9997.5	9995.4

Çizelge 3.30. $L = 5$, $N = 12000$, $n = 3000$, $c' = 25000$, $t_1 = 40$, $t_2 = 50$, $t_3 = 30$, $t_4 = 45$ ve $t_5 = 60$ iken örnek çapları ve varyans değerleri

α'	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{14}	n_{15}	n_{21}	n_{22}	n_{23}	n_{24}	n_{25}
0.2	765.8758	232.3072	531.9656	704.6197	765.2318	801.0610	238.0080	458.4530	702.4570	800.0170
0.4	766.3003	232.7625	532.5059	704.4893	763.9420	801.9430	238.4310	459.1970	702.3660	798.0370
0.5	765.1805	232.1668	532.9839	704.5913	765.0775	800.0780	237.7700	459.7510	702.5140	799.9050
0.6	766.6936	232.2469	532.0992	703.2148	765.7455	802.3910	237.9440	458.6230	700.2310	800.8220
0.8	516.8575	119.8911	399.4512	435.2738	407.3262	511.3880	119.8740	403.2700	433.8070	410.0150
1	151.1996	40.9656	121.2303	130.7159	123.0768	150.9310	40.9740	121.0600	131.2320	122.9620
1.2	66.5694	20.2972	54.5164	58.4037	55.3576	66.6160	20.2960	54.4930	58.3930	55.3510
1.5	29.2128	10.2791	24.4921	26.0210	24.8304	29.2090	10.1650	24.4820	26.0150	24.8270
1.8	16.7973	6.6202	14.3746	15.2025	14.5135	16.8500	6.8250	14.2760	15.0760	14.5080
2	12.7450	5.3341	10.9901	11.5722	11.1236	12.8600	5.0500	11.0000	11.6840	11.0160

$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul. Bütçe	2.Kul. Bütçe
1.6243	1.6362	497.9219	140.7813	798.3456	799.2649
1.6223	1.6342	494.7031	143.5000	2855.6	2863.3
1.6219	1.6338	514.9688	139.6406	5415	5435.5
1.6246	1.6365	506.4219	130.5938	10286.2	10336.5
3.0749	3.0752	506.7656	191.6406	25001	25002
11.6873	11.6874	497.5469	144.3438	25000	25001
26.8084	26.8084	506.7344	166.5469	24999	24999
60.5735	60.5735	505.1719	144.6719	24997	24962
103.4399	103.4399	509.8906	121.1563	24995	24976
135.8243	135.8243	505.0625	104.5156	24994	24945

Simülasyon çalışmasından elde edilen sonuçlardan görüldüğü gibi $\alpha > 0$ olmak üzere Çizelge 3.21 için yapılacak genellemeler diğer Çizelgeler için de geçerlidir. α değeri büyüdükçe elde edilen mümkün çözümlerin sayısı hem geometrik programlama ile çözülen Model 1 hem de Kuhn-Tucker yöntemi ile çözülen Model 2 için azalmakta, model kısıtları sağlanmamaktadır. Çizelgelerden görüldüğü gibi Geometrik programlama ile çözülen Model 1 ve Kuhn-Tucker yöntemi ile çözülen Model 2 için mümkün çözümleri sağlayan α değerleri içinde en etkin olanı $\alpha = 0.5$ 'dir. $\alpha = 0.5$ iken, tabakalara seyahat maliyeti ne olursa olsun, mümkün çözümler içinde örnek ortalaması istatistiğinin varyansı en küçük olarak elde edilir. Ayrıca, mümkün çözümü veren α değerleri büyüdükçe araştırma için ayrılan bütçenin kullanılan kısmı da artmaktadır.

Geometrik programlama ile çözülen Model 1, Kuhn-Tucker yöntemi ile çözülen Model 2'ye göre, mümkün çözüm olan α değerleri için, örnek ortalaması istatistiğinin varyansını az farkla da olsa daha küçük olarak elde etmektedir. Bu sebeple, yığından seçilen n çaplı örneğin tabakalara optimum şekilde paylaştırılması probleminde geometrik programlamadan alınan sonuçlar daha iyidir. Ayrıca, geometrik programlamanın çözüm vermediği, Kuhn-Tucker yönteminin çözüm verdiği hiçbir durumla karşılaşmamıştır. Bunun yanında, Geometrik programlama ile çözüm elde edildiği halde Kuhn-Tucker yöntemiyle çözüm elde edilmediği durumlar söz konusudur(Çizelge 3.22 $\alpha = 0.8$ ve Çizelge 3.23 $\alpha = 0.8$ durumu). Elde edilen simülasyon sonuçlarından, araştırma için ayrılan bütçenin kullanılan kısmı her iki yöntemle de ya aynı ya da birbirine çok yakındır. Bununla birlikte, Kuhn-Tucker yöntemiyle elde edilen çözümler, geometrik programlamadan elde edilen çözümlere göre çok daha kısa sürede tamamlanmaktadır.

İki ve üç tabaka olması durumunda, hem geometrik programlama hem de Kuhn-Tucker yöntemi n çaplı örneği tabakalara benzer biçimde paylaştırmaktadır. Bununla birlikte, yığındaki tabaka sayısı arttıkça iki yöntem n çaplı örneği tabakalara oldukça farklı biçimde paylaştırmaktadır(Örneğin, Çizelge 3.27 $\alpha = 0.2$ durumu). Tabaka sayısı iki ya da üç iken geometrik programlama ve Kuhn-Tucker

yöntemlerinden elde edilen örnek ortalaması istatistiğinin varyans değerleri birbirlerine yakın iken, tabaka sayısı arttıkça iki yöntemden elde edilen varyans değerleri arasındaki fark açılmakta ve geometrik programlama yöntemi n çaplı örneği tabakalara daha iyi paylaştırdığı için örnek ortalaması istatistiğinin varyansı daha küçük olarak elde edilmektedir.

Bu alt bölümde elde edilen simülasyon sonuçlarından görüldüğü gibi, özellikle tabaka sayısı arttıkça geometrik programlama ile elde edilen örnek ortalaması istatistiğinin varyans değerleri, Kuhn-Tucker yöntemi ile elde edilen örnek ortalaması istatistiğinin varyans değerlerinden daha etkindir. Yani geometrik programlama, Kuhn-Tucker yöntemine göre örnek çapını tabakalara daha optimum şekilde paylaştırmaktadır. Geometrik programlama ile elde edilen örnek ortalaması istatistiğinin varyans değerleri daha küçük olmasına rağmen daha uzun sürede çözümlenmektedir. Bu yüzden yapılan araştırma ile ilgili zaman kısıtı yok ise geometrik programlama kullanılarak n çaplı örnek tabakalara paylaştırılabilir.

3.4. Hedef Programlama

İnsanlık tarihinin başlangıcından bu yana canlılar, çok amaçlı karar verme problemleriyle karşı karşıya kalmışlardır. Örneğin, canlılar açısından tüketilen yiyecekler hem lezzetli olmalı, hem güzel kokmalı, hem iyi görünmeli hem de besleyici olmalıdır. Diğer taraftan herkes iyi bir yaşama sahip olmak istemektedir, yani daha zengin, daha güçlü, daha saygıdeğer, kendisi için daha fazla zaman ve bunların yanı sıra daha sağlıklı bir yaşam istemektedir. Gerçekten insanlık tarihindeki raporlara göre tüm önemli siyasi, ekonomik ve kültürel olaylar kendi gelişimlerinde çok amaç içermektedir.

Tarihi gelişimde, çok amaçlı problemler analiz edilebilmesine rağmen, bu analizlerin matematiksel bir formda ifade edilebilmesi yakın tarihte gerçekleşmiştir. Hedef programlama yöntemi, ilk defa 1961 yılında Charnes ve Cooper tarafından çok amaçlı problemlerin çözümünde kullanılmaya başlanmıştır[Charnes ve Cooper, 1961]. Kısıtlı optimizasyon problemlerinin pek çoğu bir amacı açıklayan

terimlerden oluşan tek bir amaç fonksiyonuna sahiptir. Ayrıca, ele alınan probleme ilişkin modelin amaç fonksiyonu ya sadece minimize edilmek ya da maksimize edilmek istenir. Bu modellerin tek amaçlı olma özellikleri kullanım alanlarını sınırlamaktadır.

Hedef programlama yöntemi, karar vericiye birden fazla amaca sahip problemlerin çözümünde cevap veren bir tekniktir. Bunun yanı sıra, karar verici sistemde birbiri ile çelişen amaçlarla da karşı karşıya kalabilir. Örneğin, işletmeci hem karını maksimize etmek hem de işgücünü minimize etmek isteyebilir. Bununla birlikte, işletmelerin aynı birimle ölçeklendirilmeyen amaçları da olabilir. Karar vericinin amaçlarından biri üretim maliyetini minimize etmek diğeri üretimi maksimize etmek ise, burada üretim maliyeti TL. ile ölçülürken buna karşılık üretim adet olarak ölçeklendirilmektedir. Dolayısıyla, hedef programlama birbiriyle çelişen birden çok amacı belirli koşullar altında optimize etmeye çalışan bir çok amaçlı karar verme tekniğidir.

Hedef programlama modelinde, belirlenen hedeflerin hepsi modele dahil edilir. Bir hedefin aşılması yani pozitif sapma ya da hedefin altında seyretmesi negatif sapma olmak üzere, hedeflerden oluşabilecek sapmalar toplamı minimize edilmeye çalışılır. Bu modellerde her zaman çelişen amaçları optimum kılan tek bir çözüm bulmak olanaksız olabilir, modeldeki amaçlardan birine ulaşıldığında diğeri amaçlara ulaşamama durumu söz konusu olabilir. Bu nedenle, bu tür modellerle ilgili problemlerin sonucuna etkin çözüm denir.

Hedef programlama tekniğinin temel düşüncesi, orijinali çok amaçlı olan problemi tek amaçlı probleme dönüştürerek çözüm aramaktır. Hedef programlama ile tüm çelişen amaçlara uygun çözüm bulunmayabilir. Problemin çözümünde elde edilen etkin çözümlerin her zaman optimum çözüm olması gerekmez. Hedef programlama, modelin hedeflerini doğrulayacak biçimde bir çözüm bulmaya çalışır.

Daha önce belirtildiği gibi hedef programlamada amaçlardan birine ulaşıldığında diğeri ulaşamama durumu olabilir. Bu nedenle, çok amaçlı karar verme

modellerinin hedef programlama yaklaşımı ile çözümünde amaçların önem derecelerini yansıtan sıralamalara ihtiyaç vardır. Amaçların önem derecelerini yansıtan bu sıralamaya öncelik denir. Dolayısıyla her amacın önceliğini temel alan uzlaşık çözümler bulunabilir. Hedefler öncelikli verilmiş iken, önce birinci öncelikli hedefin sapması mümkün olduğunca minimum yapılır. Sonra, ikinci öncelikli hedefin sapması mümkün olduğunca minimum yapılır. Bu şekilde devam edilerek, en son öncelikli hedefin sapması mümkün olduğunca minimum yapılarak tüm hedefleri sağlayan optimum çözümler aranmaya çalışılır.

Hedef programlama, birden fazla amacın minimize edilmesini göz önüne aldığı için çok geniş bir kullanım alanına sahiptir[Carrizosa ve Morales, 2007; Reyes ve Frazier, 2007; Wei ve ark., 2004; Oliveira ve ark., 2003; Blake ve Carter, 2002; Yahya ve Kingsman, 2002; El-Gayar ve Leung, 2001; Ogryczak, 2001; Wise ve Perushek, 2000; Baki ve Fraser, 1997].

Günümüzde hedef programlama mühendislik ve mimarlık, enerji, üretim planlama, pazarlama, finans ve muhasebe, ziraat ve kalite kontrol gibi pek çok alanda kullanılmaktadır.

Hedef Programlama kendi içinde gruplara ayrılır:

- Doğrusal hedef programlama
- Doğrusal olmayan hedef programlama
 - Karar değişkenlerine göre hedef programlama
 - ❖ Sürekli değerler alabilen hedef programlama
 - ❖ Tamsayılı hedef programlama
 - ❖ 0-1 hedef programlama
 - Katsayıların özelliklerine göre hedef programlama
 - ❖ Deterministik hedef programlama
 - ❖ Stokastik hedef programlama
 - ❖ Belirsiz hedef programlama

Doğrusal olmayan hedef programlama problemlerini çözmek için kullanılan dört temel yaklaşım vardır:

- Simpleks yaklaşımı
- Direkt arama yaklaşımı
- Gradient arama yaklaşımı
- İnteraktif yaklaşım

Doğrusal olmayan hedef programlama problemlerini çözmede kullanılan yaklaşımlardan biri olan simpleks yaklaşımı, kendi içinde üçe ayrılır. Bu yaklaşımlar aşağıdaki gibi sıralanabilir:

- MAP(Method of Approximation Programming) Yaklaşımı
- Ayrılabilir Programlama Yaklaşımı
- Karesel Programlama Yaklaşımı

Hedef programlama, araştırmacının çoklu isteklerini göz önüne alarak problemi çözme temeline dayanmaktadır. Bu yöntem ile, arzu edilen amaçlara ulaşmayı sağlayan kaynak miktarı, verilen kaynaklar kullanılarak oluşturulan hedeflerin elde edilme derecesi belirlenebilir ve hedeflerin öncelik yapıları ve kaynak miktarlarının değişiminde mümkün olduğunca en iyi sonuçlar üretilir.

Çok sayıda hedef programlama yöntemi bulunmakla birlikte, bu çalışmada, yığından seçilen n çaplı örneğin tabakalara paylaştırılması probleminde, doğrusal olmayan hedef programlama yöntemlerinden biri olan değişkenlerin sürekli değer aldığı hedef programlama yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntem kullanılırken simpleks yaklaşımı kullanılmış ve simpleks yöntemi kullanılırken de MAP yönteminden yararlanılmıştır[Ignizio, 1976].

d_i^- : Hedeften negatif sapma

d_i^+ : Hedeften pozitif sapma

x_j : j . karar değişkeni

b_i : i . amacın istenilen düzeyi

c_{ij} : i . hedefte j . değişkene ilişkin katsayılar

$\rho_k(d^-, d^+)$: k . öncelikli hedefin doğrusal fonksiyonu

olmak üzere, öncelikli doğrusal hedef programlama modeli aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$Mina = \{\rho_1(d^-, d^+), \rho_2(d^-, d^+), \dots, \rho_k(d^-, d^+)\}$$

$$\sum_{j=1}^n c_{ij}x_j + d_i^- - d_i^+ = b_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x, d^-, d^+ > 0$$

Amaçların istenilen düzeyleri yani kısıtların sağ taraf sabitleri b_i 'ler bilinmiyorsa, araştırmacı tarafından mutlaka belirlenmelidir. Hedef programlama yöntemi kullanılarak çözüme ulaşmak için değişken sayısı ikiden fazla ise çok boyutlu simpleks yöntemi kullanılır. Çok boyutlu simpleks yönteminin alt bölüm 3.4.1'de tanımlanacak olmasının nedeni, doğrusal olmayan optimizasyon problemlerinin hedef programlama ile çözümünü yapılırken belli bir dönüşüm altında doğrusal hedef programlama problemine dönüştürölerek bu yöntemin kullanılmasıdır.

3.4.1. Çok boyutlu simpleks yöntemi

Öncelikli doğrusal hedef programlama modeli aşağıdaki gibi ifade edilmek üzere;

$$Mina = \{\rho_1(d^-, d^+), \rho_2(d^-, d^+), \dots, \rho_k(d^-, d^+)\}$$

$$\sum_{j=1}^n c_{ij}x_j + d_i^- - d_i^+ = b_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x, d^-, d^+ > 0$$

bu modelin çok boyutlu simpleks yardımı ile çözülmesi için aşağıdaki tanımların verilmesi gerekir:

w_{ks} : k . öncelikteki s . değişkene ait pozitif sapmanın ağırlığı

u_{ik} : i . hedefte k . öncelikli negatif sapmanın ağırlığı

I_{ks} : k . öncelikteki s . değişkenin marjinal katkısı

e_{is} : i . hedefteki s . değişkene ilişkin katsayı

b_i : i . hedefteki sağ taraf sabiti veya hedef değeri

a_k : k . öncelikteki hedeflerin başarı seviyesi

$$I_{ks} = \sum_{i=1}^m u_{ik} e_{is} - w_{ks} \quad \text{ve} \quad a_k = \sum_{i=1}^m u_{ik} b_i$$

olmak üzere; çok boyutlu simpleks tablosu aşağıdaki gibi dizayn edilir.

Çizelge 3.31. Çok boyutlu simpleks tablosu

		ρ_k	w_{k1}	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	w_{kn}	$w_{k\ n+1}$		$w_{k\ n+m}$							
		$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$							
		$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$							
		$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$							
		ρ_1	w_{11}	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	w_{1n}	$w_{1\ n+1}$		$w_{1\ n+m}$							
ρ_k	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	ρ_1	V	x_1	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	x_n	p_1	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	p_m	b
u_{1k}	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	u_{11}	n_1	e_{11}	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	e_{1n}	$e_{1\ n+1}$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$e_{1\ n+m}$	b_1
u_{2k}	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	u_{21}	n_2	e_{21}	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	e_{2n}	$e_{2\ n+1}$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$e_{2\ n+m}$	b_2
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
u_{mk}	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	u_{m1}	n_m	e_{m1}	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	e_{mn}	$e_{m\ n+1}$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$e_{m\ n+m}$	b_m
		ρ_1	I_{11}	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	I_{1n}	$I_{1\ n+1}$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$I_{1\ n+m}$					a_1
		$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$					$\cdot$
		$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$					$\cdot$
		$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$					$\cdot$
		ρ_k	I_{k1}	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	I_{kn}	$I_{k\ n+1}$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$I_{k\ n+m}$					a_k

Çok boyutlu simpleks algoritmasının adımları ise aşağıdaki gibidir:

1.Adım: 1.öncelik için yani $k = 1$ için simpleks tablosu oluşturulur.

2.Adım: Çözümün optimum olup olmadığı kontrol edilir. $k = 1$ için a_k ; sıfır ise 6. adıma değilse gösterge satırındaki pozitif en büyük $I_{ks} (I_{1s})$ seçilir(Eşitlik söz konusu olduğunda önceliği daha düşük olan seçilir veya keyfi seçim yapılır). Bu sütun s' ile gösterilir. I_{ks} 'lerin hepsi sıfır ya da negatifse 6.adıma değilse 3.adıma gidilir.

3.Adım: Temel çözüme girecek değişken belirlenir. s' sütunundaki değişken temel değişken olarak belirlenir.

4.Adım: Temel çözümden ayrılacak değişken belirlenir. Sırayla hedef değerleri s' sütunundaki değerlere oranlanır. $\min \{b_i/e_{is'} \mid e_{is'} > 0\}$ ile i satırındaki değişken ayrılacak değişken olarak belirlenir. Bu satır i' ile gösterilir.

5.Adım: Yeni tablo oluşturulur. Bu tabloda i' satırındaki değişkenle s' sütunundaki değişken yer değiştirir.

a) Yeni tablonun i' satırındaki elemanları “ $e_{i's'} = pivot$ ” dışında $e_{i's'}$ 'ne bölünür.

b) Yeni tablodaki pivot elemanının tersi alınır.

c) s' sütun elemanları ise pivot dışında $-e_{i's'}$ 'ne bölünür. Diğer elemanlar ise; e_{is}

ve b_i önceki tablonun elemanları olmak üzere yeni $\hat{e}_{is}$ ve $\hat{b}_i$ değerleri aşağıdaki formüller kullanılarak hesaplanır.

$$\hat{e}_{is} = e_{is} - \frac{e_{is} e_{is'}}{e_{i's'}} \quad \text{ve} \quad \hat{b}_i = b_i - \frac{b_i e_{is'}}{e_{i's'}}$$

d) Yeni I_{ks} ve a_k değerleri hesaplanır.

6.Adım: Öncelik sayısı k bir artırılır yani $k = k + 1$ alınır. $k \leq K$ ise Adım 2'ye dönülür, değilse ulaşılan çözüm en iyi çözüm olarak alınır.

Çok boyutlu simpleks yöntemi kullanıldığında karşılaşılabilecek bazı güçlükleri ve bu güçlükler karşısında ne yapılması gerektiğini aşağıdaki gibi özetleyebiliriz:

- Bazen sağ taraf sabitleri negatif olabilir. Bu durumda negatif b_i katsayısına sahip ilgili kısıt (-1) ile çarpılarak pozitif hale getirilir veya dual simpleks yöntemi uygulanır.
- Giren değişken için I_{ks} 'ler de eşitlik söz konusu olabilir yani pozitif en büyük birden fazla değer yer alabilir. Bu durumda seçim işlemi isteğe bağlı gerçekleştirilebilir.
- Minimum oranlarda eşitlik söz konusu olabilir. Burada seçim işlemi daha yüksek öncelikli değişken temel çözümünden çıkacak şekilde gerçekleştirilmelidir. Öncelik söz konusu değilse yine keyfi seçim yapılabilir.
- Uygun olmayan çözüm olabilir. Uygun olmayan çözüm; doğrusal programlamada kısıtları sağlamayan çözüm olarak ifade edilir. Hedef programlama da ise uygun olmayan çözüm ilk önceliğe ait hedefi sağlamanın mümkün olmadığı durumu ifade eder yani $a_i > 0$ olduğu çözümdür.
- Alternatif en iyi çözümler durumu söz konusu olabilir. Son en iyi çözüm tablosunda temel dışı değişkenlere ait herhangi bir I_{ks} 'nin sütunu tamamen sıfırlardan oluşuyor ve bu sütuna karşı gelen en az bir $e_{is} > 0$ değeri var ise alternatif en iyi çözümler söz konusudur.

3.4.2. Doğrusal olmayan hedef programlama

Gerçek uygulamalarda bütün fonksiyonlar doğrusal olarak ifade edilemeyebilir. Gerçek uygulamalar ile ilgili kararlar ile uğraşan araştırmacıların doğrusal olmayan fonksiyonları da olacaktır. Genellikle doğrusal olmayan programlama veya doğrusal olmayan optimizasyon tek amaçlı modellerin(verilen kısıtlar altında tek amacın en

iyi yapıldığı model) çözümü ile uğraşmaktadır. Doğrusal optimizasyonun aksine, burada problem çözümü için tek bir çözüm aracı(simpleks ya da çok boyutlu simpleks yöntemi) bulunmamaktadır[Ignizio, 1976]. Burada, modeller özel bir forma dönüştürülmeksizin verilen problemin mutlak optimumunun elde edilme garantisi yoktur. Bu araştırmacının yalnızca yerel optimumu elde etme ile yetinebileceği anlamına gelir.

Bu çalışmada, yığından seçilen n çaplı örneğin tabakalara paylaştırılması probleminde, doğrusal olmayan hedef programlama yöntemlerinden biri olan değişkenlerin sürekli değer aldığı hedef programlama yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntem kullanılırken simpleks yaklaşımı kullanılmış ve simpleks yaklaşımı kullanılırken de MAP yönteminden yararlanılmıştır.

MAP yöntemi ilk kez Griffith ve Stewart tarafından tek amaçlı doğrusal olmayan problemleri çözmek için kullanılmış ve daha sonra Ignizio tarafından doğrusal olmayan hedef programlama problemlerinin çözümüne genişletilmiştir[Ignizio, 1976; Griffith ve Stewart, 1961]. MAP yöntemi literatürde GS yöntemi olarak da kullanılmaktadır. Griffith ve Stewart(GS) yönteminin temel yaklaşımı aşağıdaki gibi verilebilir:

1.Adım : Karar modeli formüle edilir.

2.Adım : Keyfi bir başlangıç çözümü seçilir.

3.Adım : Bu başlangıç çözümüne ilişkin komşuluk(sınırlar) tanımlanır.

4.Adım : Doğrusal olmayan modelin doğrusal yaklaşımı geliştirilir.

5.Adım : 3.Adımda tanımlanan komşuluğa göre modelin doğrusal yaklaşımının optimizasyonu çok boyutlu simpleks yöntemi ile çözülür.

6.Adım : 5.Adımın sonucunda elde edilen çözüm, başlangıç noktasını keyfi seçtiğimiz için bizi ya daha iyi bir noktaya ya da daha kötü bir noktaya götürür. Birinci durumda Adım 3'e gidilir ikinci durumda ya yöntem durdurulur ya da doğrusal yaklaştırma modeli daha küçük bir komşulukta göz önüne alınır.

GS yaklaşımında, Taylor serisi kullanılarak doğrusal olmayan fonksiyon, doğrusal fonksiyona dönüştürülmektedir. GS yönteminin temelinde, verilen bir $\bar{x}_s$ başlangıç noktasında her $f_i(\bar{x}_s)$ 'in Taylor serisi açılımını kullanmak ve serideki doğrusal olmayan terimleri dikkate almamak yatmaktadır. Bunu yapabilmek için $f_i(\bar{x}_s)$ 'lerin türevlenebilir olması gerekir. Çok amaçlı karar modellerinde her bir amaç aşağıdaki gibi yazılabilmektedir.

$$G_i = f_i(\bar{x}) + d_i^- - d_i^+ = b_i$$

$\bar{x}_s$ amaçlar kümesinin mümkün bir çözümü ise, karşı gelen fonksiyonlar için karşı gelen doğrusal yaklaşımlar:

$$b_i - d_i^- + d_i^+ = f_i(\bar{x}) \cong f_i(\bar{x}_s) + \sum_{j=1}^J \frac{\partial f(\bar{x}_s)}{\partial x_j} (x_j - x_{s,j}) \quad (3.22)$$

olacaktır. Eş. 3.22'de $i = 1, 2, \dots, m$ ve $x_{s,j}$; $\bar{x}_s$ 'nin bir bileşenidir.

$$\bar{x}_s = (x_{s,1}, x_{s,2}, \dots, x_{s,j})$$

x_j ise $\bar{x}$ 'nin bir bileşenidir.

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_j)$$

G_i amaç fonksiyonunun doğrusal yaklaştırmasını $\hat{G}_i$ olarak gösterelim. Buradan:

$$\hat{G}_i = f_i(\bar{x}_s) + \sum_{j=1}^J \frac{\partial f_i(\bar{x}_s)}{\partial x_j} (x_j - x_{s,j}) + d_i^- - d_i^+ = b_i \quad (3.23)$$

yazılabilir. Eş. 3.23'ün doğrusal yaklaşımı vektör notasyonu ile aşağıdaki gibi tekrar yazılabilir:

$$\hat{G}_i = f_i(\bar{x}_s) + [\bar{\nabla} f_i(\bar{x}_s)]' (\bar{x} - \bar{x}_s) + d_i^- - d_i^+ = b_i \quad (3.24)$$

Eş. 3.24'deki $\bar{x} - \bar{x}_s$ terimini yeni bir $\bar{y}$ vektörüyle değiştirebiliriz.

$$\bar{y} = \bar{x} - \bar{x}_s \quad (3.25)$$

olsun. Sonuç olarak, Eş. 3.25'deki $\bar{y}$ vektörü; yeni $\bar{x}_s$ çözüm noktasıyla $\bar{x}$ noktası arasındaki değişimi temsil eder. Ancak $\bar{y}$ 'nin bileşenleri işaret bakımından serbest olabilirler. Bu nedenle simpleks yöntemi kullanılırken sorun söz konusu olabilir. Bu sorunu ortadan kaldırmak için, $\bar{y}$ değişkeni iki pozitif değişken cinsinden ifade edilebilir.

$$\bar{y} = \bar{u} - \bar{v} \quad (\bar{u} \geq 0, \bar{v} \geq 0) \quad (3.26)$$

Eş. 3.25 ve Eş. 3.26 arasındaki ilişkiden yararlanarak Eş. 3.24'ü tekrar aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\hat{G}_i = f_i(\bar{x}_s) + [\bar{\nabla} f_i(\bar{x}_s)]' (\bar{u} - \bar{v}) + d_i^- - d_i^+ = b_i \quad (3.27)$$

elde edilen Eş. 3.27, doğrusallaştırılmış fonksiyondur. Burada $[\bar{\nabla} f_i(\bar{x}_s)]'$, $[\bar{\nabla} f_i(\bar{x}_s)]$ 'nin transpozudur ve $\bar{\nabla} f_i(\bar{x}_s)$ değeri, $f_i(\bar{x}_s)$ 'nin gradyantıdır ya da aşağıdaki gibi $f_i(\bar{x}_s)$ 'nin kısmi türevlerinden oluşur:

$$\bar{\nabla} f_i(\bar{x}_s) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_i(\bar{x}_s)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_i(\bar{x}_s)}{\partial x_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial f_i(\bar{x}_s)}{\partial x_j} \end{pmatrix}$$

Bu durumda Eş. 3.27 herhangi bir doğrusal olmayan fonksiyonun doğrusal forma yaklaşımı olarak kullanılacaktır.

Doğrusal yaklaşım kullanımında göz önüne alınması gereken iki durum vardır. Birincisi; $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_j)$ 'nin her bileşeni alttan ve üstten sınırlı olmalıdır. Eğer U_j , x_j bileşeninin üst sınırı ise o zaman

$$0 \leq x_j \leq U_j \quad (3.28)$$

yazılabilir. U_j 'nin bu değeri amaçlar kümesine bakılarak bulunabilir. İkinci problem ise, $\bar{x}_s$ komşuluğunda doğrusal yaklaşım $\hat{G}_i$ 'nin iyi bir yaklaşım olup olmamasıdır.

d_j : x_j 'nin hareket edebileceği maksimum uzaklık olsun. Böylece d_j komşuluk tanımında bize yardımcı olacaktır. Çünkü,

$$-d_j \leq y_j \leq d_j \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (3.29)$$

$y_j = u_j - v_j$ olmak üzere;

$$-d_j \leq u_j - v_j \leq d_j \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad u_j \geq 0, \quad v_j \geq 0 \quad (3.30)$$

olduğundan Eş. 3.30;

$$0 \leq u_j \leq d_j \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (3.31)$$

$$0 \leq v_j \leq d_j \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (3.32)$$

olarak yazılabilir. Eş. 3.25 ve Eş. 3.28'den

$$0 \leq x_j \leq U_j \quad j = 1, 2, \dots, J$$

ve

$$\bar{y} = \bar{x} - \bar{x}_s \quad \text{ya da} \quad y_j = x_j - x_{s,j} \quad j = 1, 2, \dots, J$$

olduğu hatırlanırsa ve bu denklemler Eş. 3.31 ve Eş. 3.32 ile birleştirilerek:

$$0 \leq u_j \leq \min\{d_j, U_j - x_{s,j}\} \quad (3.33)$$

$$0 \leq v_j \leq \min\{d_j, x_{s,j}\} \quad (3.34)$$

elde edilir. Sonuç olarak Eş. 3.33 ve Eş. 3.34'den oluşan üst sınırlar seti, en üstün amaçların ve x_j karar değişkenlerinin her hangi bir üst sınırı aşamayacağını ve G_i 'ye yaklaşımın yapıldığı bölgenin görece olarak küçük kalmasını ya da böylece geçerli olmasını sağlamaktadır. En üstün amaçlar diğer bütün öncelikli amaçlardan daha öncelikli olurlar. Eş. 3.33 ve Eş. 3.34 aşağıdaki formda yazılabilir.

$$u_j + d_t^- - d_t^+ = \min\{d_j, U_j - x_{s,j}\} \quad (3.35)$$

$$v_j + d_q^- - d_q^+ = \min\{d_j, x_{s,j}\} \quad (3.36)$$

Cooper ve Steinberg d_j için Eş. 3.37'deki aralığı önermiştir[Cooper ve Steinberg, 1970].

$$U_j/10 \leq d_j \leq U_j/5 \quad (3.37)$$

Eğer doğrusal modelin optimum çözümünde iyileşme olmazsa d_j değeri uygun olarak azaltılır.

Eş. 3.35 ve Eş. 3.36 en üstün amaçlar olduklarından, Eş. 3.35'deki d_t^+ ve Eş. 3.36'daki d_q^+ 'yi minimum yapmak isteriz. Burada en açık problem d_j 'nin seçimidir.

Yukarıdaki tanımlamalar ışığında, bu çalışmada ele alınan, yığından seçilen n çaplı örneğin tabakalara optimum şekilde paylaşılması problemini hedef programlama yöntemine uygun olarak modelleyelim.

İlgilendiğimiz problemde ilk hedefimizi örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapmak, ikinci hedefimizi araştırma için ayrılan bütçenin kullanılan kısmını minimum yapmak ve son hedefimizi ise tabakalardan seçilen örnek çapı toplamının, toplam örnek çapına eşit olması olarak göz önüne alabiliriz. Ayrıca, hedef programlama problemlerinde sağ taraf kaynağının belirlenmesi zorunlu olduğundan örnek ortalaması istatistiğinin varyansı için sağ taraf kaynağı, araştırmacının görüşleri doğrultusunda belirleyebileceği biçimde;

$$\frac{\text{duyarlılık}^2}{\text{güvenilirlik}^2} = \frac{d^2}{z^2} = D^2$$

arzu edilen varyans olarak alınabilir. Yığının iki tabakadan oluşması durumunda hedef programlama modeli:

$$f_1 : \frac{1}{N^2} \frac{N_1^2 S_1^2}{n_1} + \frac{1}{N^2} \frac{N_2^2 S_2^2}{n_2} \leq D^2 = \frac{d^2}{z^2} \quad \text{örnek ortalaması istatistiğinin varyansı}$$

$$f_2 : t_1 n_1^\alpha + t_2 n_2^\alpha \leq c' \quad \text{maliyet fonksiyonu}$$

$$f_3 : n_1 + n_2 = n$$

biçiminde ifade edilir. Her bir amacı aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$G_1 : \frac{1}{N^2} \frac{N_1^2 S_1^2}{n_1} + \frac{1}{N^2} \frac{N_2^2 S_2^2}{n_2} + d_1^- - d_1^+ = D^2$$

$$G_2 : t_1 n_1^\alpha + t_2 n_2^\alpha + d_2^- - d_2^+ = c'$$

$$G_3 : n_1 + n_2 + d_3^- - d_3^+ = n$$

$$\min \left(\{d_1^+\}, \{d_2^+\}, \{d_3^- + d_3^+\} \right)$$

Doğrusal olmayan model yukarıdaki gibi kurulduktan sonra, değişkenlerin sınırlarının belirlenmesi, n_j 'nin hareket edebileceği maksimum uzaklık d_j değerinin ve başlangıç noktası $\bar{n}_s$ 'nin keyfi seçimi yapılır.

$$\left. \begin{array}{l} n_1 \leq n-1 \\ n_2 \leq n-1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} U_1 = n-1 \\ U_2 = n-1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{U_1}{10} \leq d_1 \leq \frac{U_1}{5} \\ \frac{U_2}{10} \leq d_2 \leq \frac{U_2}{5} \end{array}$$

$\bar{n}_s = (n_{1s}, n_{2s})$ başlangıç noktası araştırmacının öngörüsü doğrultusunda keyfi olarak belirlendikten sonra doğrusal olmayan hedef programlama problemi aşağıdaki gibi doğrusallaştırılır.

$$\hat{G}_1 : f_l(\bar{n}_s) + [\nabla f_l(\bar{n}_s)]'(\bar{u} - \bar{v}) + d_1^- - d_1^+ = D^2$$

$$f_l(\bar{n}_s) + \left(\begin{array}{c} -\frac{N_1^2 S_1^2}{N^2 n_1^2} \\ -\frac{N_2^2 S_2^2}{N^2 n_2^2} \end{array} \right)_{\bar{n}_s} \left(\begin{array}{c} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \end{array} \right) + d_1^- - d_1^+ = D^2$$

$$f_l(\bar{n}_s) + \left(-\frac{N_1^2 S_1^2}{N^2 n_1^2} \quad -\frac{N_2^2 S_2^2}{N^2 n_2^2} \right)_{\bar{n}_s} \left(\begin{array}{c} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \end{array} \right) + d_1^- - d_1^+ = D^2$$

$$f_1(\bar{n}_s) - \frac{N_1^2 S_1^2}{N^2 n_1^2} (u_1 - v_1) - \frac{N_2^2 S_2^2}{N^2 n_2^2} (u_2 - v_2) + d_1^- - d_1^+ = D^2$$

$$\hat{G}_2 : f_2(\bar{n}_s) + [\nabla f_2(\bar{n}_s)]'(\bar{u} - \bar{v}) + d_2^- - d_2^+ = c'$$

$$f_2(\bar{n}_s) + \left(\frac{\alpha t_1 n_1^{\alpha-1}}{\alpha t_2 n_2^{\alpha-1}} \right)_{\bar{n}_s} \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \end{pmatrix} + d_2^- - d_2^+ = c'$$

$$f_2(\bar{n}_s) + \begin{pmatrix} \alpha t_1 n_1^{\alpha-1} & \alpha t_2 n_2^{\alpha-1} \end{pmatrix}_{\bar{n}_s} \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \end{pmatrix} + d_2^- - d_2^+ = c'$$

$$f_2(\bar{n}_s) + \alpha t_1 n_1^{\alpha-1} (u_1 - v_1) + \alpha t_2 n_2^{\alpha-1} (u_2 - v_2) + d_2^- - d_2^+ = c'$$

$$\hat{G}_3 : f_3(\bar{n}_s) + [\nabla f_3(\bar{n}_s)]'(\bar{u} - \bar{v}) + d_3^- - d_3^+ = n$$

$$f_3(\bar{n}_s) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\bar{n}_s} \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \end{pmatrix} + d_3^- - d_3^+ = n$$

$$f_3(\bar{n}_s) + (1 \quad 1)_{\bar{n}_s} \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \end{pmatrix} + d_3^- - d_3^+ = n$$

$$f_3(\bar{n}_s) + (u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + d_3^- - d_3^+ = n$$

$$\hat{G}_4 : u_1 + d_4^- - d_4^+ = \min\{d_1, U_1 - n_{1s}\}$$

$$\hat{G}_5 : v_1 + d_5^- - d_5^+ = \min\{d_1, n_{1s}\}$$

$$\hat{G}_6 : u_2 + d_6^- - d_6^+ = \min\{d_2, U_2 - n_{2s}\}$$

$$\hat{G}_7 : v_2 + d_7^- - d_7^+ = \min\{d_2, n_{2s}\}$$

Bu durumda iki tabakadan oluşan yığın için, örnek çapının tabakalara paylaştırılması problemi doğrusallaştırılmış olarak yeniden aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned}
& \min \left(\{d_4^+ + d_5^+ + d_6^+ + d_7^+\}, \{d_1^+\}, \{d_2^+\}, \{d_3^- + d_3^+\} \right) \\
& f_1(\bar{n}_s) - \frac{N_1^2 S_1^2}{N^2 n_1^2} (u_1 - v_1) - \frac{N_2^2 S_2^2}{N^2 n_2^2} (u_2 - v_2) + d_1^- - d_1^+ = D^2 \\
& f_2(\bar{n}_s) + \alpha t_1 n_1^{\alpha-1} (u_1 - v_1) + \alpha t_2 n_2^{\alpha-1} (u_2 - v_2) + d_2^- - d_2^+ = c' \\
& f_3(\bar{n}_s) + (u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + d_3^- - d_3^+ = n \\
& u_1 + d_4^- - d_4^+ = \min \{d_1, U_1 - n_{1s}\} \\
& v_1 + d_5^- - d_5^+ = \min \{d_1, n_{1s}\} \\
& u_2 + d_6^- - d_6^+ = \min \{d_2, U_2 - n_{2s}\} \\
& v_2 + d_7^- - d_7^+ = \min \{d_2, n_{2s}\}
\end{aligned}$$

Yukarıdaki şekilde doğrusallaştırılmış optimizasyon problemi çok boyutlu simpleks yöntemiyle çözülür.

Yığının üç tabakadan oluşması durumunda hedef programlama modeli:

$$\begin{aligned}
f_1 &: \frac{1}{N^2} \frac{N_1^2 S_1^2}{n_1} + \frac{1}{N^2} \frac{N_2^2 S_2^2}{n_2} + \frac{1}{N^2} \frac{N_3^2 S_3^2}{n_3} \leq D^2 \\
f_2 &: t_1 n_1^\alpha + t_2 n_2^\alpha + t_3 n_3^\alpha \leq c' \\
f_3 &: n_1 + n_2 + n_3 = n
\end{aligned}$$

biçiminde ifade edilir. Her bir amacı aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
G_1 &: \frac{1}{N^2} \frac{N_1^2 S_1^2}{n_1} + \frac{1}{N^2} \frac{N_2^2 S_2^2}{n_2} + \frac{1}{N^2} \frac{N_3^2 S_3^2}{n_3} + d_1^- - d_1^+ = D^2 \\
G_2 &: t_1 n_1^\alpha + t_2 n_2^\alpha + t_3 n_3^\alpha + d_2^- - d_2^+ = c' \\
G_3 &: n_1 + n_2 + n_3 + d_3^- - d_3^+ = n \\
& \min \left(\{d_1^+\}, \{d_2^+\}, \{d_3^- + d_3^+\} \right)
\end{aligned}$$

Doğrusal olmayan model yukarıdaki gibi kurulduktan sonra, değişkenlerin sınırlarının belirlenmesi, n_j 'nin hareket edebileceği maksimum uzaklık d_j değerinin ve başlangıç noktası $\bar{n}_s$ 'nin keyfi seçimi yapılır.

$$\left. \begin{array}{l} n_1 \leq n-2 \\ n_2 \leq n-2 \\ n_3 \leq n-2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} U_1 = n-2 \\ U_2 = n-2 \\ U_3 = n-2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{U_1}{10} \leq d_1 \leq \frac{U_1}{5} \\ \frac{U_2}{10} \leq d_2 \leq \frac{U_2}{5} \\ \frac{U_3}{10} \leq d_3 \leq \frac{U_3}{5} \end{array} \right\}$$

$\bar{n}_s = (n_{1s}, n_{2s}, n_{3s})$ başlangıç noktası araştırmacının öngörüsü doğrultusunda keyfi olarak belirlendikten sonra doğrusal olmayan hedef programlama problemi aşağıdaki gibi doğrusallaştırılır.

$$\hat{G}_1 : f_1(\bar{n}_s) + [\nabla f_1(\bar{n}_s)]'(\bar{u} - \bar{v}) + d_1^- - d_1^+ = D^2$$

$$f_1(\bar{n}_s) + \left(\begin{array}{c} -\frac{N_1^2 S_1^2}{N^2 n_1^2} \\ -\frac{N_2^2 S_2^2}{N^2 n_2^2} \\ -\frac{N_3^2 S_3^2}{N^2 n_3^2} \end{array} \right)_{\bar{n}_s} \left(\begin{array}{c} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \\ u_3 - v_3 \end{array} \right) + d_1^- - d_1^+ = D^2$$

$$f_1(\bar{n}_s) + \left(-\frac{N_1^2 S_1^2}{N^2 n_1^2} \quad -\frac{N_2^2 S_2^2}{N^2 n_2^2} \quad -\frac{N_3^2 S_3^2}{N^2 n_3^2} \right)_{\bar{n}_s} \left(\begin{array}{c} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \\ u_3 - v_3 \end{array} \right) + d_1^- - d_1^+ = D^2$$

$$f_1(\bar{n}_s) - \frac{N_1^2 S_1^2}{N^2 n_1^2} (u_1 - v_1) - \frac{N_2^2 S_2^2}{N^2 n_2^2} (u_2 - v_2) - \frac{N_3^2 S_3^2}{N^2 n_3^2} (u_3 - v_3) + d_1^- - d_1^+ = D^2$$

$$\hat{G}_2 : f_2(\bar{n}_s) + [\nabla f_2(\bar{n}_s)]'(\bar{u} - \bar{v}) + d_2^- - d_2^+ = c'$$

$$f_2(\bar{n}_s) + \begin{pmatrix} \alpha t_1 n_1^{\alpha-1} \\ \alpha t_2 n_2^{\alpha-1} \\ \alpha t_3 n_3^{\alpha-1} \end{pmatrix}_{\bar{n}_s}' \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \\ u_3 - v_3 \end{pmatrix} + d_2^- - d_2^+ = c'$$

$$f_2(\bar{n}_s) + \begin{pmatrix} \alpha t_1 n_1^{\alpha-1} & \alpha t_2 n_2^{\alpha-1} & \alpha t_3 n_3^{\alpha-1} \end{pmatrix}_{\bar{n}_s} \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \\ u_3 - v_3 \end{pmatrix} + d_2^- - d_2^+ = c'$$

$$f_2(\bar{n}_s) + \alpha t_1 n_1^{\alpha-1} (u_1 - v_1) + \alpha t_2 n_2^{\alpha-1} (u_2 - v_2) + \alpha t_3 n_3^{\alpha-1} (u_3 - v_3) + d_2^- - d_2^+ = c'$$

$$\hat{G}_3 : f_3(\bar{n}_s) + [\nabla f_3(\bar{n}_s)]'(\bar{u} - \bar{v}) + d_3^- - d_3^+ = n$$

$$f_3(\bar{n}_s) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\bar{n}_s}' \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \\ u_3 - v_3 \end{pmatrix} + d_3^- - d_3^+ = n$$

$$f_3(\bar{n}_s) + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{\bar{n}_s} \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \\ u_3 - v_3 \end{pmatrix} + d_3^- - d_3^+ = n$$

$$f_3(\bar{n}_s) + (u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + (u_3 - v_3) + d_3^- - d_3^+ = n$$

$$\hat{G}_4 : u_1 + d_4^- - d_4^+ = \min\{d_1, U_1 - n_{1s}\}$$

$$\hat{G}_5 : v_1 + d_5^- - d_5^+ = \min\{d_1, n_{1s}\}$$

$$\hat{G}_6 : u_2 + d_6^- - d_6^+ = \min\{d_2, U_2 - n_{2s}\}$$

$$\hat{G}_7 : v_2 + d_7^- - d_7^+ = \min\{d_2, n_{2s}\}$$

$$\hat{G}_8 : u_3 + d_8^- - d_8^+ = \min\{d_3, U_3 - n_{3s}\}$$

$$\hat{G}_9 : v_3 + d_9^- - d_9^+ = \min\{d_3, n_{3s}\}$$

Bu durumda üç tabakadan oluşan yığın için, örnek çapının tabakalara paylaştırılması problemi doğrusallaştırılmış olarak yeniden aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned}
& \min \left(\{d_4^+ + d_5^+ + d_6^+ + d_7^+ + d_8^+ + d_9^+\}, \{d_1^+\}, \{d_2^+\}, \{d_3^- + d_3^+\} \right) \\
& f_1(\bar{n}_s) - \frac{N_1^2 S_1^2}{N^2 n_1^2} (u_1 - v_1) - \frac{N_2^2 S_2^2}{N^2 n_2^2} (u_2 - v_2) - \frac{N_3^2 S_3^2}{N^2 n_3^2} (u_3 - v_3) + d_1^- - d_1^+ = D^2 \\
& f_2(\bar{n}_s) + \alpha t_1 n_1^{\alpha-1} (u_1 - v_1) + \alpha t_2 n_2^{\alpha-1} (u_2 - v_2) + \alpha t_3 n_3^{\alpha-1} (u_3 - v_3) + d_2^- - d_2^+ = c' \\
& f_3(\bar{n}_s) + (u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + (u_3 - v_3) + d_3^- - d_3^+ = n \\
& u_1 + d_4^- - d_4^+ = \min \{d_1, U_1 - n_{1s}\} \\
& v_1 + d_5^- - d_5^+ = \min \{d_1, n_{1s}\} \\
& u_2 + d_6^- - d_6^+ = \min \{d_2, U_2 - n_{2s}\} \\
& v_2 + d_7^- - d_7^+ = \min \{d_2, n_{2s}\} \\
& u_3 + d_8^- - d_8^+ = \min \{d_3, U_3 - n_{3s}\} \\
& v_3 + d_9^- - d_9^+ = \min \{d_3, n_{3s}\}
\end{aligned}$$

Yukarıdaki şekilde doğrusallaştırılmış optimizasyon problemi çok boyutlu simpleks yöntemiyle çözülür. Daha fazla sayıda tabaka sayısı için modeller benzer şekilde oluşturulur.

3.5. Örnek

Yığınınımızın $N_1 = 10$ ve $N_2 = 20$ olan iki tabakadan oluştuğunu varsayalım. Birinci tabakaya seyahat maliyetinin 2TL., ikinci tabakaya seyahat maliyetinin 5TL. olduğunu ve tabaka varyanslarının önceki araştırmalardan sırasıyla 1 ve 25 olarak belirlendiğini varsayalım. Tabakalara seyahat etmenin maliyet kısıtı üzerine etkisi 0.5, araştırma için ayrılan bütçe 40TL. iken 10 çaplı örneği aşağıdaki hedefleri dikkate alarak tabakalara paylaştırınız.

1. *Hedef:* Örnek ortalaması istatistiğinin varyansı 15'e eşit ya da küçük olmalıdır($z = 2$, $d^2 = 60$).
2. *Hedef:* Kullanılan bütçe, araştırma için ayrılan bütçeyi geçmemelidir.
3. *Hedef:* İki tabakadan seçilecek örnek çapı toplamı 10 olmalıdır.

Çözüm

$N = 30$, $N_1 = 10$, $N_2 = 20$, $z = 2$, $d^2 = 60$, $D^2 = \frac{d^2}{z^2} = 15$, $t_1 = 2$, $t_2 = 5$, $S_1^2 = 1$,
 $S_2^2 = 25$, $\alpha = 0.5$, $n = 10$, $c' = 40$ olmak üzere;

$$f_1 : \frac{1}{N^2} \frac{N_1^2 S_1^2}{n_1} + \frac{1}{N^2} \frac{N_2^2 S_2^2}{n_2} \leq D^2 = \frac{d^2}{z^2} \quad \text{örnek ortalaması istatistiğinin varyansı}$$

$$f_2 : t_1 n_1^\alpha + t_2 n_2^\alpha \leq c' \quad \text{maliyet fonksiyonu}$$

$$f_3 : n_1 + n_2 = n$$

$$f_1 : \frac{1}{30^2} \frac{10^2 * 1}{n_1} + \frac{1}{30^2} \frac{20^2 * 25}{n_2} \leq \frac{60}{4} = 15$$

$$f_2 : 2n_1^{0.5} + 5n_2^{0.5} \leq 40$$

$$f_3 : n_1 + n_2 = 10$$

Her bir amacı aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$G_1 : \frac{1}{9n_1} + \frac{100}{9n_2} + d_1^- - d_1^+ = 15$$

$$G_2 : 2n_1^{0.5} + 5n_2^{0.5} + d_2^- - d_2^+ = 40$$

$$G_3 : n_1 + n_2 + d_3^- - d_3^+ = 10$$

$$\min(\{d_1^+\}, \{d_2^+\}, \{d_3^- + d_3^+\})$$

d_j değerinin ve başlangıç noktası $\bar{n}_s$ 'nin keyfi seçimi yapılır.

$$\left. \begin{matrix} n_1 \leq 10 \\ n_2 \leq 10 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} U_1 = 10 \\ U_2 = 10 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} d_1 \leq \frac{U_1}{5} \Rightarrow d_1 = 2 \\ d_2 \leq \frac{U_2}{5} \Rightarrow d_2 = 2 \end{matrix}$$

$\bar{n}_s = (1, 1)$ başlangıç noktası araştırmacının öngörüsü doğrultusunda keyfi olarak belirlendikten sonra doğrusal olmayan hedef programlama problemi aşağıdaki gibi doğrusallaştırılır.

$$\hat{G}_1 : f_1(\bar{n}_s) + [\nabla f_1(\bar{n}_s)]'(\bar{u} - \bar{v}) + d_1^- - d_1^+ = D^2$$

$$11.23 + \left(\begin{matrix} -\frac{0.112}{n_1^2} \\ -\frac{11.112}{n_2^2} \end{matrix} \right)_{\bar{n}_s}' \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \end{pmatrix} + d_1^- - d_1^+ = D^2$$

$$11.23 + (-0.11 \quad -11.11) \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \end{pmatrix} + d_1^- - d_1^+ = 15$$

$$-0.11(u_1 - v_1) - 11.11(u_2 - v_2) + d_1^- - d_1^+ = 3.77$$

$$-0.11u_1 + 0.11v_1 - 11.11u_2 + 11.11v_2 + d_1^- - d_1^+ = 3.77$$

$$\hat{G}_2 : f_2(\bar{n}_s) + [\nabla f_2(\bar{n}_s)]'(\bar{u} - \bar{v}) + d_2^- - d_2^+ = c'$$

$$7 + \left(\begin{matrix} n_1^{-0.5} \\ 2.5n_2^{-0.5} \end{matrix} \right)_{\bar{n}_s}' \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \end{pmatrix} + d_2^- - d_2^+ = 40$$

$$7 + (1 \quad 2.5) \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \end{pmatrix} + d_2^- - d_2^+ = 40$$

$$(u_1 - v_1) + 2.5(u_2 - v_2) + d_2^- - d_2^+ = 33$$

$$u_1 - v_1 + 2.5u_2 - 2.5v_2 + d_2^- - d_2^+ = 33$$

$$\hat{G}_3 : f_3(\bar{n}_s) + [\nabla f_3(\bar{n}_s)]'(\bar{u} - \bar{v}) + d_3^- - d_3^+ = n$$

$$2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\bar{n}_s}' \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \end{pmatrix} + d_3^- - d_3^+ = 10$$

$$2 + (1 \quad 1) \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \end{pmatrix} + d_3^- - d_3^+ = 10$$

$$u_1 - v_1 + u_2 - v_2 + d_3^- - d_3^+ = 8$$

$$\hat{G}_4 : u_1 + d_4^- - d_4^+ = \min\{d_1, U_1 - n_{1s}\}$$

$$u_1 + d_4^- - d_4^+ = \min\{2, 10 - 1\}$$

$$u_1 + d_4^- - d_4^+ = 2$$

$$\hat{G}_5 : v_1 + d_5^- - d_5^+ = \min\{d_1, n_{1s}\}$$

$$v_1 + d_5^- - d_5^+ = \min\{2, 1\}$$

$$v_1 + d_5^- - d_5^+ = 1$$

$$\hat{G}_6 : u_2 + d_6^- - d_6^+ = \min\{d_2, U_2 - n_{2s}\}$$

$$u_2 + d_6^- - d_6^+ = \min\{2, 10 - 1\}$$

$$u_2 + d_6^- - d_6^+ = 2$$

$$\hat{G}_7 : v_2 + d_7^- - d_7^+ = \min\{d_2, n_{2s}\}$$

$$v_2 + d_7^- - d_7^+ = \min\{2, 1\}$$

$$v_2 + d_7^- - d_7^+ = 1$$

Bu durumda iki tabakadan oluşan yığın için, örnek çapının tabakalara paylaştırılması problemi doğrusallaştırılmış olarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\min(\{d_4^+ + d_5^+ + d_6^+ + d_7^+\}, \{d_1^+\}, \{d_2^+\}, \{d_3^- + d_3^+\})$$

$$-0.11u_1 + 0.11v_1 - 11.11u_2 + 11.11v_2 + d_1^- - d_1^+ = 3.77$$

$$u_1 - v_1 + 2.5u_2 - 2.5v_2 + d_2^- - d_2^+ = 33$$

$$u_1 - v_1 + u_2 - v_2 + d_3^- - d_3^+ = 8$$

$$u_1 + d_4^- - d_4^+ = 2$$

$$v_1 + d_5^- - d_5^+ = 1$$

$$u_2 + d_6^- - d_6^+ = 2$$

$$v_2 + d_7^- - d_7^+ = 1$$

Doğrusallaştırılmış optimizasyon problemi çok boyutlu simpleks yöntemiyle aşağıdaki gibi çözülür.

Çizelge 3.32. Çok boyutlu simpleks 1. aşamanın 1. çözüm tablosu

				ρ_4	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
				ρ_3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
				ρ_2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	
				ρ_1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	
ρ_4	ρ_3	ρ_2	ρ_1	v	u_1	v_1	u_2	v_2	d_1^+	d_2^+	d_3^+	d_4^+	d_5^+	d_6^+	d_7^+	b
0	0	0	0	d_1^-	-0.11	0.11	-11.11	11.11	1	0	0	0	0	0	0	3.77
0	0	0	0	d_2^-	1	-1	2.5	-2.5	0	1	0	0	0	0	0	33
1	0	0	0	d_3^-	1	-1	1	-1	0	0	1	0	0	0	0	8
0	0	0	0	d_4^-	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2
0	0	0	0	d_5^-	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	d_6^-	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	2
0	0	0	0	d_7^-	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1
				ρ_1	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	0
				ρ_2	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
				ρ_3	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
				ρ_4	1	-1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	8



İlk tablodan görüldüğü gibi 4. hedef sağlanmamıştır(8 olarak elde edilmiştir). 4. hedefin sağlanmadığı son satırdan temele girecek değişken u_1 ya da u_2 olarak belirlenir. İki değişkenden biri keyfi olarak seçilir. Temele girecek değişkeni u_1 olarak belirleyelim. Bu durumda, temelden çıkacak değişken;

$$\min \left\{ \frac{33}{1}, \frac{8}{1}, \frac{2}{1} \right\}$$

olmak üzere, d_4^- olarak belirlenir.

Çizelge 3.33. Çok boyutlu simpleks 1. aşamanın 2. çözüm tablosu

				ρ_4	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
				ρ_3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
				ρ_2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	
				ρ_1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	
ρ_4	ρ_3	ρ_2	ρ_1	v	d_4^-	v_1	u_2	v_2	d_1^+	d_2^+	d_3^+	d_4^+	d_5^+	d_6^+	d_7^+	b
0	0	0	0	d_1^-	0.11	0.11	-11.11	11.11	1	0	0	0.11	0	0	0	4
0	0	0	0	d_2^-	-1	-1	2.5	-2.5	0	1	0	-1	0	0	0	31
1	0	0	0	d_3^-	-1	-1	1	-1	0	0	1	-1	0	0	0	6
0	0	0	0	u_1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2
0	0	0	0	d_5^-	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	d_6^-	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	2
0	0	0	0	d_7^-	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1
				ρ_1	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	0
				ρ_2	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
				ρ_3	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
				ρ_4	-1	-1	1	-1	0	0	0	-1	0	0	0	6



İkinci tablodan görüldüğü gibi 4. hedef sağlanmamıştır(6 olarak elde edilmiştir). 4. hedefin sağlanmadığı son satırdan temele girecek değişken u_2 olarak belirlenir. Bu durumda, temelden çıkacak değişken;

$$\min \left\{ \frac{31}{2.5}, \frac{6}{1}, \frac{2}{1} \right\}$$

olmak üzere, d_6^- olarak belirlenir.

Çizelge 3.34. Çok boyutlu simpleks 1. aşamanın optimum tablosu

					ρ_4	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
					ρ_3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
					ρ_2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	
					ρ_1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	
ρ_4	ρ_3	ρ_2	ρ_1	v	d_4^-	v_1	d_6^-	v_2	d_1^+	d_2^+	d_3^+	d_4^+	d_5^+	d_6^+	d_7^+	b	
0	0	0	0	d_1^-	0.11	0.11	11.11	11.11	1	0	0	0.11	0	11.11	0	26.2	
0	0	0	0	d_2^-	-1	-1	-2.5	-2.5	0	1	0	-1	0	-2.5	0	26	
1	0	0	0	d_3^-	-1	-1	-1	-1	0	0	1	-1	0	-1	0	4	
0	0	0	0	u_1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	
0	0	0	0	d_5^-	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	
0	0	0	0	u_2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	2	
0	0	0	0	d_7^-	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	
					ρ_1	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	0
					ρ_2	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
					ρ_3	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
					ρ_4	-1	-1	-1	-1	0	0	0	-1	0	-1	0	4

Üçüncü tablodan görüldüğü gibi 4. hedef sağlanmamıştır(4 olarak elde edilmiştir). Bununla birlikte, 4. hedef sağlanmamasına rağmen tablo optimumdur. Bu tablodan sonuçlar $u_1 = 2$, $u_2 = 2$, $v_1 = 0$, $v_2 = 0$ olarak elde edilir. Buradan, yeni gidilen nokta;

$$(\bar{n} - \bar{n}_s) = (\bar{u} - \bar{v})$$

$$\left(\begin{matrix} n_1 - 1 \\ n_2 - 1 \end{matrix} \right) = \left(\begin{matrix} 2 - 0 \\ 2 - 0 \end{matrix} \right) \Rightarrow \left(\begin{matrix} n_1 \\ n_2 \end{matrix} \right) = \left(\begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \right)$$

olarak elde edilir.

$$\bar{n}_s = (1, 1) \Rightarrow \min\{0, 0, 0, 8\}$$

$$\bar{n}_y = (3, 3) \Rightarrow \min\{0, 0, 0, 4\}$$

Hedefler birebir karşılaştırıldığında amaç fonksiyonu değerinde iyileşme olduğundan yeni başlangıç noktası $\bar{n}_s = (3, 3)$ alınır. $\bar{n}_s = (3, 3)$ iken;

$$\hat{G}_1 : 3.741 + \begin{pmatrix} -0.0124 \\ -1.234 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \end{pmatrix} + d_1^- - d_1^+ = 15$$

$$-0.0124u_1 + 0.0124v_1 - 1.234u_2 + 1.234v_2 + d_1^- - d_1^+ = 11.259$$

$$\hat{G}_2 : 12.124 + \begin{pmatrix} 0.577 \\ 1.443 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \end{pmatrix} + d_2^- - d_2^+ = 40$$

$$0.577u_1 - 0.577v_1 + 1.443u_2 - 1.443v_2 + d_2^- - d_2^+ = 27.876$$

$$\hat{G}_3 : 6 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \end{pmatrix} + d_3^- - d_3^+ = 10$$

$$u_1 - v_1 + u_2 - v_2 + d_3^- - d_3^+ = 4$$

$$\hat{G}_4 : u_l + d_4^- - d_4^+ = \min\{2, 10 - 3\}$$

$$u_l + d_4^- - d_4^+ = 2$$

$$\hat{G}_5 : v_1 + d_5^- - d_5^+ = \min\{2, 3\}$$

$$v_1 + d_5^- - d_5^+ = 2$$

$$\hat{G}_6 : u_2 + d_6^- - d_6^+ = \min\{2, 10-3\}$$

$$u_2 + d_6^- - d_6^+ = 2$$

$$\hat{G}_7 : v_2 + d_7^- - d_7^+ = \min\{2, 3\}$$

$$v_2 + d_7^- - d_7^+ = 2$$

Bu durumda iki tabakadan oluşan yığın için, örnek çapının tabakalara paylaştırılması problemi doğrusallaştırılmış olarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\min\left(\{d_4^+ + d_5^+ + d_6^+ + d_7^+\}, \{d_1^+\}, \{d_2^+\}, \{d_3^- + d_3^+\}\right)$$

$$-0.0124u_1 + 0.0124v_1 - 1.234u_2 + 1.234v_2 + d_1^- - d_1^+ = 11.259$$

$$0.577u_1 - 0.577v_1 + 1.443u_2 - 1.443v_2 + d_2^- - d_2^+ = 27.876$$

$$u_1 - v_1 + u_2 - v_2 + d_3^- - d_3^+ = 4$$

$$u_1 + d_4^- - d_4^+ = 2$$

$$v_1 + d_5^- - d_5^+ = 2$$

$$u_2 + d_6^- - d_6^+ = 2$$

$$v_2 + d_7^- - d_7^+ = 2$$

Doğrusallaştırılmış optimizasyon problemi çok boyutlu simpleks yöntemiyle aşağıdaki gibi çözülür.

Çizelge 3.35. Çok boyutlu simpleks 2. aşamanın 1. çözüm tablosu

				ρ_4	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
				ρ_3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
				ρ_2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	
				ρ_1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	
ρ_4	ρ_3	ρ_2	ρ_1	v	u_1	v_1	u_2	v_2	d_1^+	d_2^+	d_3^+	d_4^+	d_5^+	d_6^+	d_7^+	b
0	0	0	0	d_1^-	-0.012	0.012	-1.23	1.23	1	0	0	0	0	0	0	11.2
0	0	0	0	d_2^-	0.57	-0.57	1.44	-1.44	0	1	0	0	0	0	0	27.8
1	0	0	0	d_3^-	1	-1	1	-1	0	0	1	0	0	0	0	4
0	0	0	0	d_4^-	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2
0	0	0	0	d_5^-	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2
0	0	0	0	d_6^-	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	2
0	0	0	0	d_7^-	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	2
				ρ_1	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	0
				ρ_2	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
				ρ_3	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
				ρ_4	1	-1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	4



İkinci durumun ilk tablosunda, görüldüğü gibi 4. hedef sağlanmamıştır(4 olarak elde edilmiştir). 4. hedefin sağlanmadığı son satırdan temele girecek değişken u_1 ya da u_2 olarak belirlenir. Temele girecek değişkeni keyfi biçimde u_1 olarak belirleyelim. Bu durumda, temelden çıkacak değişken;

$$\min \left\{ \frac{27.876}{0.577}, \frac{4}{1}, \frac{2}{1} \right\}$$

olmak üzere, d_4^- olarak belirlenir.

Çizelge 3.36. Çok boyutlu simpleks 2. aşamanın 2. çözüm tablosu

				ρ_4	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
				ρ_3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
				ρ_2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	
				ρ_1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	
ρ_4	ρ_3	ρ_2	ρ_1	v	d_4^-	v_1	u_2	v_2	d_1^+	d_2^+	d_3^+	d_4^+	d_5^+	d_6^+	d_7^+	b
0	0	0	0	d_1^-	0.012	0.012	-1.23	1.23	1	0	0	0.012	0	0	0	11.28
0	0	0	0	d_2^-	-0.57	-0.57	1.44	-1.44	0	1	0	-0.57	0	0	0	26.72
1	0	0	0	d_3^-	-1	-1	1	-1	0	0	1	-1	0	0	0	2
0	0	0	0	u_1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2
0	0	0	0	d_5^-	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2
0	0	0	0	d_6^-	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	2
0	0	0	0	d_7^-	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	2
				ρ_1	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	0
				ρ_2	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
				ρ_3	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
				ρ_4	1	-1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	2



İkinci durumun ikinci tablosunda, görüldüğü gibi 4. hedef sağlanmamıştır(2 olarak elde edilmiştir). 4. hedefin sağlanmadığı son satırdan temele girecek değişken u_2 olarak belirlenir. Bu durumda, temelden çıkacak değişken;

$$\min \left\{ \frac{26.722}{1.443}, \frac{2}{1}, \frac{2}{1} \right\}$$

olmak üzere, d_3^- ya da d_6^- olarak belirlenir. İki değişkenden biri keyfi olarak seçilir. Temele girecek değişkeni d_6^- olarak belirleyelim.

Çizelge 3.37. Çok boyutlu simpleks 2. aşamanın optimum tablosu

	ρ_4	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
	ρ_3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
	ρ_2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	
	ρ_1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	
ρ_4 ρ_3 ρ_2 ρ_1	v	d_4^-	v_1	d_6^-	v_2	d_1^+	d_2^+	d_3^+	d_4^+	d_5^+	d_6^+	d_7^+	b
0 0 0 0	d_1^-	0.012	0.012	1.23	1.23	1	0	0	0.012	0	1.23	0	13.7
0 0 0 0	d_2^-	-0.57	-0.57	-1.44	-1.44	0	1	0	-0.57	0	-1.44	0	23.8
1 0 0 0	d_3^-	-1	-1	-1	-1	0	0	1	-1	0	-1	0	0
0 0 0 0	u_1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2
0 0 0 0	d_5^-	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2
0 0 0 0	u_2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	2
0 0 0 0	d_7^-	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	2
	ρ_1	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	0
	ρ_2	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
	ρ_3	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
	ρ_4	-1	-1	-1	-1	0	0	0	-1	0	-1	0	0

İkinci durumun son tablosunda, görüldüğü gibi 4 hedef de sağlanmıştır. Çok boyutlu simpleks tablosu optimumdur. Bu tablodan sonuçlar $u_1 = 2$, $u_2 = 2$, $v_1 = 0$, $v_2 = 0$ olarak elde edilir. Buradan, yeni gidilen nokta;

$$(\bar{n} - \bar{n}_s) = (\bar{u} - \bar{v})$$

$$\begin{pmatrix} n_1 - 3 \\ n_2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 0 \\ 2 - 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.

$$\bar{n}_s = (3, 3) \Rightarrow \min\{0, 0, 0, 4\}$$

$$\bar{n}_y = (5, 5) \Rightarrow \min\{0, 0, 0, 0\}$$

Görüldüğü gibi, yeni gelinen nokta tüm hedeflerin tam olarak sağlandığı optimum noktadır. Bu nedenle 10 çaplı örneğin tabaklara 4 hedefi de aynı anda sağlayacak şekilde paylaştırılması probleminde, $n_1 = 5$, $n_2 = 5$ olarak belirlenir. Elde edilen optimum örnek çaplarını hedeflerde yerine yazdığımızda;

$$V(\bar{x}) = 2.2448$$

Kullanılan bütçe : 15.65

Örnek çapı : 10

olarak elde edilmiş olur.

3.4.3. $c' = \sum_{h=1}^L t_h n_h^\alpha$ kısıtı altında hedef programlama ve Kuhn-Tucker yöntemi kullanılarak simülasyon çalışması ile örnek ortalaması istatistiğinin varyansının minimum yapılması

Bu alt bölümde, $c' = \sum_{h=1}^L t_h n_h^\alpha$ kısıtı göz önüne alınarak, $\alpha > 0$ olmak üzere; α 'ya bağlı maliyet kısıtına ilişkin simülasyon çalışması yapılmıştır. Hedef programlama ve Kuhn-Tucker yöntemi kullanılarak α 'nın hangi değerleri için örnek ortalaması istatistiğinin varyansının daha etkin olduğu, ayrıca kullanılan yöntemlerin birbirlerine göre üstünlükleri incelenmiştir. Bu maliyet kısıtı yardımı ile örnek ortalaması istatistiğinin varyans değerinin bulunması için 1000 tekrarlı Monte Carlo simülasyonu kullanılmıştır. Simülasyon çalışmasında yığın çapı(N), yığından seçilecek örnek çapı(n), bütçe(c'), tabakadan tabakaya seyahat maliyeti(t_h) ve α başlangıçta verilmiştir. Belirlenen doğrusal olmayan maliyet kısıtı altında, örnek

ortalaması istatistiğinin varyansının minimum yapılması için kullanılacak modeller aşağıdaki gibidir.

<i>Model 1:</i> Hedef programlama için oluşturulan model	<i>Model 2:</i> Kuhn-Tucker yöntemi için oluşturulan model
$\min(\{d_1^+\}, \{d_2^+\}, \{d_3^- + d_3^+\})$	$\min V(\bar{x})_2$
$\frac{1}{N^2} \frac{N_1^2 S_1^2}{n_1} + \dots + \frac{1}{N^2} \frac{N_h^2 S_h^2}{n_h} + d_1^- - d_1^+ = D^2$	$\sum_{h=1}^L n_h = n$
$t_1 n_1^\alpha + \dots + t_h n_h^\alpha + d_2^- - d_2^+ = c'$	$\sum_{h=1}^L t_h n_h^\alpha \leq c'$
$n_1 + \dots + n_h + d_3^- - d_3^+ = n \quad h = 1, \dots, L$	$r_h \leq n_h \leq k_h \quad h = 1, \dots, L$

Bu çalışmada, modelde tabaka varyanslarının ve tabakalara paylaştırılacak örnek çapının önceden bilindiği varsayılmaktadır. Bununla birlikte gerçek uygulamalarda tabaka varyanslarının ve yığından seçilecek örnek çapının belirlenmesi zordur. Bunun için yığından seçilen bir pilot örnek yardımı ile tabaka varyansları tahmin edilip, yığından seçilecek örnek çapı belirlenebilir. Hedef programlamada, problemlerin çözülebilmesi için sağ taraf kaynağının belirlenmesinin zorunlu olduğunu daha önce belirtmiştik. Bu nedenle, örnek ortalaması istatistiğinin varyansının sağ taraf kaynağının belirlenmesi araştırmacı tarafından gerçekleştirilecektir. Araştırmacı, daha önceki araştırmalardan ya da konuyla ilgili kendi uzmanlığı doğrultusunda belli bir duyarlılık ve güvenilirlik ile arzu edilen varyansı belirleyebilir. Duyarlılığın artması, örnek ortalaması istatistiğinin varyansını küçülteceğinden yapılan tahminlerin daha hassas olmasını sağlayacaktır.

Modellerin çözümünde, kısıtlı doğrusal olmayan optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılan yöntemlerden hedef programlama ve Kuhn-Tucker yöntemlerinden yararlanılmıştır. Modellerin çözümü için yapılan işlemler aşağıdaki adımlara göre gerçekleştirilmiştir.

Adım 1: Tabakalı tesadüfi örneklemede amaç; birbirine benzer nitelik, özellik ve vasıftaki birimleri bir araya getirip, homojen tabakalar oluşturmaktır. Böylece,

homojen tabakalardan örnekler seçilerek hem yığının daha iyi temsil edilmesi hem de örnek ortalaması istatistiğinin varyansının küçültülmesi hedeflenir. Araştırmanın başında tabaka çapları belli olduğundan, her biri farklı ortalamalı ve varyanslı Normal dağılımdan N_h birimlik sayı üretilip, belirlenen tabaka sınırları çerçevesinde tabakalardaki birimler elde edilmiştir. Tabakaların homojen olması hedeflendiğinden, tabaka ortalamaları oldukça farklı, bununla birlikte tabaka içi homojen olacak biçimde tabaka varyansları küçük olan Normal dağılım verileri kullanılmıştır.

Adım 2: Belirlenen tabakadaki birimler yardımı ile tabaka varyansları hesaplanmıştır.

Adım 3: Belirlenen doğrusal olmayan maliyet kısıtı altında oluşturulan Model 1 ve Model 2'nin yazılan simülasyon programı yardımı ile çözümleri yapılmış, varyans değerleri ve CPU time değerleri saniye olarak elde edilmiştir. Doğrusal olmayan modellerin çözümünde en önemli problemlerden biri, çözüm için gerekli olan başlangıç noktasının belirlenmesidir. Başlangıç noktasının yanlış belirlenmesi, çözüm olan bir model için çözüm elde edilememesi veya çözümün yerel çözümlere takılması gibi durumları beraberinde getirebilir. Modelin çözümü için gerekli olan başlangıç noktası, tabaka çapları, tabaka varyansları ve tabakalara seyahat maliyetleri göz önünde bulundurularak, araştırmacının uzmanlığı doğrultusunda tabakalardan kaçır birimlik örnek seçmesi gerektiği öngörüsü altında belirlenebilir. Çözümler birkaç farklı başlangıç noktası için yapıp, çıkan sonuçlar doğrultusunda sezgisel yeni bir başlangıç noktası belirlenebilir.

Adım 4: Adım 1-2-3 1000 defa tekrar edilmiştir.

Adım 5: Sonuçların genellenebilmesi için 1000 tekrardaki örnek ortalaması istatistiğinin varyans ve CPU time değerlerinin ortalaması alınarak, tabakalardan seçilecek optimum örnek çapları, örnek ortalaması istatistiğinin varyans değeri ve CPU time değerleri elde edilmiştir.

Simülasyon çalışması tabakalara seyahat maliyetlerinin farklı değerleri altında yapılmıştır. Simülasyon çalışması yığının iki, üç, dört ve beş tabakadan oluştuğu durum için yapılmış, sonuçlar dört farklı tabaka sayısı için genellenebildiğinden daha fazla tabaka sayısı dikkate alınmamıştır. Sonuçlar Çizelge 3.38-Çizelge 3.47’de özetlenmiştir. Çizelgelerde yer alan n_{ih} gösterimi, i . modelden elde edilen h . tabakadan seçilmesi gereken örnek çapını ve i . Kul. Bütçe ise i . modelle çözüm yapıldığında, araştırma için ayrılan bütçenin ne kadarının kullanıldığını ifade etmektedir. Bununla beraber, mümkün çözümlerin sağlanmadığı durumlar italik olarak ifade edilmiştir.

Çizelge 3.38. $L = 2$, $N = 500$, $N_1 = 300$, $N_2 = 200$, $d^2 = 15$, $z = 1.96$, $D^2 = 3.904$, $n = 100$, $c' = 500$, $t_1 = 1$ ve $t_2 = 1$ iken örnek çapları ve varyans değerleri

α	n_{11}	n_{12}	n_{21}	n_{22}	$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul. Bütçe	2.Kul. Bütçe
0.2	59.9259	40.0741	66.4350	33.5650	0.00797	0.00815	72.6094	171.4219	4.3594	4.3338
0.4	59.8200	40.1800	66.4680	33.5320	0.00801	0.00819	72.2344	171.0313	9.5187	9.4340
0.5	59.7521	40.2479	65.1000	34.9000	0.00757	0.00771	70.1410	170.1848	14.0741	13.9761
0.6	59.6984	40.3016	66.4070	33.5930	0.00800	0.00818	72.8594	171.4844	20.8174	20.6340
0.8	60.0820	39.9180	66.5490	33.4510	0.00799	0.00817	72.0938	169.0625	45.5804	45.3196
1	59.9930	40.0070	66.5180	33.4820	0.00801	0.00819	74.4375	169.6563	100	100
1.2	59.4315	40.5685	66.4930	33.5070	0.00801	0.00819	74.3125	167.4844	219.6101	221.5664
1.5	52.9511	34.2319	51.1820	26.1450	0.00946	0.01114	77.4375	181.7500	585.5960	499.8493
1.8	21.0856	29.8000	27.1240	14.2380	0.02049	0.02252	77.3281	172.8281	692.0338	499.4029
2	15.0667	29.8000	17.8550	13.5680	0.02718	0.02999	77.8906	183.0313	1115.04	502.8916

Çizelge 3.39. $L = 2$, $N = 500$, $N_1 = 400$, $N_2 = 100$, $d^2 = 20$, $z = 1.96$, $D^2 = 5.20$, $n = 100$, $c' = 1000$, $t_1 = 1$ ve $t_2 = 50$ iken örnek çapları ve varyans değerleri

α	n_{11}	n_{12}	n_{21}	n_{22}	$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul. Bütçe	2.Kul. Bütçe
0.2	80.0862	19.9138	89.6830	10.3170	0.00798	0.00897	83.3438	176.1094	93.3523	82.1986
0.4	76.9092	23.0908	89.6760	10.3240	0.00805	0.00898	84.7031	176.3125	181.2084	133.2469
0.5	79.8969	20.1031	89.7000	10.3000	0.00782	0.00880	83.6230	177.1290	233.1210	169.9391
0.6	77.9281	22.0719	89.6630	10.3370	0.00802	0.00898	85.2813	174.0469	333.7377	217.8963
0.8	81.7607	18.2393	89.6400	10.3600	0.00803	0.00900	83.4531	175.2656	544.1297	361.0077
1	83.5063	16.4937	89.6200	10.3800	0.00810	0.00899	76.1563	178.4531	908.1934	608.6200
1.2	91.4891	8.5109	88.7000	9.9000	0.00963	0.00925	77.1840	176.1341	878.7992	1000.5
1.5	98.9907	0.4512	40.1180	6	0.03583	0.03332	83.5625	187.1094	1000.1	988.9494
1.8	89.8000	1.2512	24	4	0.05922	0.04193	81.1047	185.1216	3355.02	911.3431
2	82.7923	5.2851	18.1000	4	0.02614	0.06165	79.1310	183.1200	8251.17	1127.61

Çizelge 3.40. $L = 2$, $N = 500$, $N_1 = 350$, $N_2 = 150$, $d^2 = 0.055$, $z = 1.96$, $D^2 = 0.0143$, $n = 100$, $c' = 3500$, $t_1 = 50$ ve $t_2 = 1$ iken örnek çapları ve varyans değerleri

α	n_{11}	n_{12}	n_{21}	n_{22}	$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul. Bütçe	2.Kul. Bütçe
0.2	61.5136	38.4864	79.8660	20.1340	0.00827	0.00836	88.6094	171.4688	116.0383	121.8952
0.4	74.1757	25.8243	79.9330	20.0670	0.00806	0.00857	86.7031	170.7188	283.6174	291.7622
0.5	66.7660	33.2340	79.8680	20.1320	0.00803	0.00851	86.6094	170.2188	414.3172	451.3314
0.6	72.3142	27.6858	79.8520	20.1480	0.00804	0.00839	86.6250	167.0156	659.7195	698.4361
0.8	35.8545	64.1455	79.9010	20.0990	0.01212	0.00859	87.9688	165.4688	904.1116	1674.5
1	48.5219	51.4781	70	17.8670	0.00986	0.01009	82.4531	163.4219	2477.6	3517.9
1.2	32.3490	67.6510	33.1170	60.4590	0.00763	0.01498	81.9063	185.3394	3399.08	3471.8
1.5	12.4437	87.4920	16	39.2840	0.03850	0.03063	73.2969	204.1094	3013.2	3446.2
1.8	13.9906	59.6000	10	22	0.03654	0.03360	75.1819	187.1334	7342.3	3415.6
2	3.7477	85.3552	8	16.8140	1.15266	0.06442	98.7656	182.1875	7987.7	3482.7

Çizelge 3.41. $L = 2$, $N = 500$, $N_1 = 200$, $N_2 = 300$, $d^2 = 15$, $z = 1.96$, $D^2 = 3.904$, $n = 100$, $c' = 4000$, $t_1 = 25$ ve $t_2 = 35$ iken örnek çapları ve varyans değerleri

α	n_{11}	n_{12}	n_{21}	n_{22}	$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul. Bütçe	2.Kul. Bütçe
0.2	39.4349	60.5651	33.6350	66.3650	0.00798	0.00816	84.2656	165.6563	131.6600	131.4954
0.4	36.3212	63.6788	33.5330	66.4670	0.00804	0.00817	82.4688	165.0938	289.5569	289.4365
0.5	33.8115	66.1885	33.5590	66.4410	0.00717	0.00799	82.2500	164.9375	430.1162	430.1150
0.6	30.2006	69.7994	33.7660	66.2340	0.00810	0.00815	82.1250	165.5000	640.2479	639.7793
0.8	37.3318	62.6682	33.5180	66.4820	0.00806	0.00820	87.0938	165.0938	1411.2	1420.3
1	41.4459	58.5541	33.5450	66.4550	0.00801	0.00818	81.2813	164.4844	3085.5	3164.5
1.2	53.6262	18.6233	21.1230	41.1430	0.02640	0.01429	81.1094	163.0313	4142.8	4000.4
1.5	20.1000	18.8260	14.6370	17.6970	0.03089	0.02932	79.5469	177.9375	5111.8	4005.6
1.8	21.5485	1.4106	9	11	0.02581	0.04904	80.1460	173.1888	6346.9	3926.5
2	23.2020	10.3768	7.3010	8.9110	0.39750	0.06126	82.5313	164.7188	17227.04	4111.8

Çizelge 3.42. $L = 3$, $N = 10000$, $N_1 = 2000$, $N_2 = 3000$, $N_3 = 5000$, $d^2 = 20$, $z = 1.96$, $D^2 = 5.206$, $n = 250$, $c' = 600$, $t_1 = 1$, $t_2 = 1$ ve $t_3 = 1$ iken örnek çapları ve varyans değerleri

α'	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{21}	n_{22}	n_{23}	$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul. Bütçe	2.Kul. Bütçe
0.2	54.5623	75.2175	120.2202	30.3749	62.7066	156.9185	0.00391	0.00424	81.53	178.95	7.2042	7.0160
0.4	55.2662	74.9087	119.8251	30.3732	62.6513	156.9755	0.00394	0.00426	80.15	177.76	17.3811	16.7073
0.5	55.7726	74.7288	119.4986	30.3968	62.7347	156.8685	0.00390	0.00423	80.78	179.40	27.0442	25.9586
0.6	55.0128	75.5546	119.4326	30.3154	62.7022	156.9824	0.00392	0.00424	80.81	177.62	42.0996	40.4957
0.8	51.7445	77.9879	120.2676	30.3636	62.6714	156.9630	0.00391	0.00425	80.21	178.37	102.2760	99.8371
1	52.2178	76.3912	121.3910	30.3962	62.6918	156.9120	0.00395	0.00427	80.29	179.43	250	250
1.2	65.3490	82.9819	101.6691	28.9916	59.7999	149.6917	0.00405	0.00445	80.75	183.37	607.7959	599.9839
1.5	73.7972	5.4000	50.1930	12.2231	23.8702	57.9031	0.02208	0.01126	79.85	173.51	1002.1	599.9651
1.8	74.6000	5.4000	43.6787	8.1202	13.7433	29.4068	0.02284	0.02025	80.71	181.35	3266.4	594.9546
2	74.6000	5.4000	49.6300	9.9089	12.9871	18.2517	0.02215	0.02457	82.04	224.81	8057.5	599.9756

Çizelge 3.43. $L = 3$, $N = 10000$, $N_1 = 2000$, $N_2 = 3000$, $N_3 = 5000$, $d^2 = 15$, $z = 1.96$, $D^2 = 3.904$, $n = 200$, $c' = 6000$, $t_1 = 15$, $t_2 = 45$ ve $t_3 = 30$ iken örnek çapları ve varyans değerleri

α'	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{21}	n_{22}	n_{23}	$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul. Bütçe	2.Kul. Bütçe
0.2	38.2386	55.4012	106.3602	24.5884	50.1954	125.2162	0.00492	0.00531	84.68	178.29	207.8218	205.7626
0.4	34.4243	57.1950	108.3807	24.5467	50.2696	125.1837	0.00494	0.00533	83.09	178.54	484.3263	476.6858
0.5	35.8860	58.0852	106.0288	24.5531	50.2977	125.1492	0.00491	0.00530	82.46	178.53	741.7297	729.0808
0.6	33.3014	61.6950	105.0036	24.5212	50.2051	125.2737	0.00493	0.00531	81.64	177.57	1146.3	1118.3
0.8	42.2565	40.5942	117.1493	24.5499	50.2628	125.1873	0.00519	0.00535	83.60	176.98	2526.3	2656.9
1	47.2288	42.6132	110.1580	23.1348	47.2666	117.5327	0.00512	0.00565	77.64	178.89	5930.8	6000
1.2	59.6000	10.0391	60.4000	11.8696	23.1151	56.0072	0.01367	0.01162	81.28	172.76	6856.3	5999.8
1.5	59.6000	7.4406	60.4000	14.1825	12.6375	22.3839	0.01737	0.02101	79.04	233.89	21897.4	5999.8
1.8	59.6000	10.4000	50.4238	9.0027	8.1281	13.5287	0.01419	0.03391	78.95	216.03	61395.2	5999.8
2	59.6000	10.4000	56.9900	7.1805	6.5276	10.5023	0.01360	0.04303	81.3281	215.2656	155585.4	5999.8

Çizelge 3.44. $L = 4$, $N = 1000$, $N_1 = 100$, $N_2 = 200$, $N_3 = 300$, $N_4 = 400$, $d^2 = 20$, $z = 1.96$, $D^2 = 5.206$, $n = 100$, $c' = 1000$, $t_1 = 1$, $t_2 = 1$, $t_3 = 1$ ve $t_4 = 1$ iken örnek çapları ve varyans değerleri

α	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{14}	n_{21}	n_{22}	n_{23}	n_{24}
0.2	11.6620	16.4847	25.8373	46.0160	5.3446	14.8393	29.8520	49.9641
0.4	11.6715	15.3638	26.2182	46.7465	5.3617	14.8893	29.8537	49.8953
0.5	11.7328	14.8165	26.4429	47.0078	5.3751	14.8867	29.7877	49.9505
0.6	11.1577	15.4032	26.7265	46.7126	5.3558	14.9177	29.9243	49.8022
0.8	13.1829	14.2111	26.2442	46.3618	5.3459	14.8959	29.7930	49.9652
1	12.3246	15.5130	26.0819	46.0805	5.3748	14.8930	29.7786	49.9536
1.2	11.7264	15.1722	26.3065	46.7949	5.3563	14.8997	29.8951	49.8489
1.5	14.7988	17.2227	25.2845	42.6940	5.4127	14.8442	29.8729	49.8702
1.8	21.6330	25.1580	24.8463	28.3627	10.6851	17.8399	23.6727	29.7707
2	23.4000	29.4000	13.7360	25.6000	8.4000	13.2503	17.5019	21.1418

$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul.Bütçe	2.Kul.Bütçe
0.00921	0.00973	85.1069	165.2500	7.4529	7.2721
0.00930	0.00975	84.0938	163.5000	14.0030	13.5712
0.00919	0.00966	85.1563	165.4219	19.2730	18.7021
0.00928	0.00975	85.6719	164.8125	26.6295	25.9140
0.00947	0.00978	84.6094	163.1406	51.4058	50.4652
0.00929	0.00974	83.1094	165.3594	100	100
0.00934	0.00976	81.8750	163.5625	196.8957	200.9894
0.00928	0.00974	82.9375	165.5000	534.5096	585.2358
0.01032	0.01139	78.1563	251	1321.9	997.1487
0.01356	0.01586	81.8594	239.5156	2256	999.4226

Çizelge 3.45. $L = 4$, $N = 6000$, $N_1 = 500$, $N_2 = 1500$, $N_3 = 2000$, $N_4 = 2000$, $d^2 = 15$, $z = 1.96$, $D^2 = 3.904$, $n = 200$, $c' = 6000$, $t_1 = 40$, $t_2 = 30$, $t_3 = 20$ ve $t_4 = 10$ iken örnek çapları ve varyans değerleri

α'	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{14}	n_{21}	n_{22}	n_{23}	n_{24}
0.2	20.8958	36.5880	66.3393	76.1769	6.9756	43.8051	74.6437	74.5756
0.4	10.8546	41.8949	69.0709	78.1796	6.9772	43.8402	74.6470	74.5356
0.5	13.8823	44.8132	67.7512	73.5533	6.9659	43.9237	74.4975	74.6129
0.6	17.9376	39.5912	67.9811	74.4901	6.9678	43.9581	74.5774	74.4967
0.8	16.8837	42.1778	68.1577	72.7808	6.9658	43.9611	74.5173	74.5558
1	11.8215	40.8603	69.8039	77.5143	6.9702	43.8968	74.5731	74.5599
1.2	44.5663	45.7008	47.1889	50.9382	5.6142	32.4102	55.2438	56.5820
1.5	40.2333	40.4000	40.4000	40.4000	5.6386	15.1061	22.3414	29.3569
1.8	23.8444	40.4000	40.4000	40.4000	3.8896	9.5109	13.3573	17.2521
2	15.6500	40.4000	40.4000	40.4000	3.2859	7.4929	10.4050	13.1067

$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul.Bütçe	2.Kul.Bütçe
0.00500	0.00523	84.6563	169.2188	205.1605	193.9499
0.00499	0.00522	85.0625	167.9531	403.4899	391.4667
0.00488	0.00520	84.9531	168.9531	600.2493	563.3994
0.00492	0.00524	84.7188	168.0156	883.0817	817.2237
0.00490	0.00523	85.7500	171.3906	1877.1	1751.9
0.00496	0.00522	81.5313	170.1382	3869.9	3832.8
0.00583	0.00688	80.1275	164.0625	9912.2	5999.7
0.00701	0.01388	81.4688	164.5469	25615.1	5999.6
0.00712	0.02278	81.3750	164.4688	58794.7	5999.4
0.00732	0.02945	80.5313	165.5469	107726.5	5999.4

Çizelge 3.46. $L = 5$, $N = 12000$, $N_1 = 500$, $N_2 = 1500$, $N_3 = 2000$, $N_4 = 3000$, $N_5 = 5000$, $d^2 = 15$, $z = 1.96$, $D^2 = 3.904$, $n = 3000$, $c' = 10000$, $t_1 = 1$, $t_2 = 1$, $t_3 = 1$, $t_4 = 1$ ve $t_5 = 1$ iken örnek çapları ve varyans değerleri

$\mathcal{C}$	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{14}	n_{15}	n_{21}	n_{22}	n_{23}	n_{24}	n_{25}
0.2	383.8852	469.3990	549.0027	723.8627	873.8504	23.0248	182.9513	317.1620	685.2190	1791.6429
0.4	389.7346	468.4325	547.6591	722.1248	872.0490	23.0595	183.1433	317.6459	685.3889	1790.7624
0.5	390.4496	467.0902	546.4128	723.3082	872.7392	22.9835	182.8854	317.4297	685.3558	1791.3456
0.6	394.0425	458.4847	544.5004	729.1695	873.8029	23.0836	182.7230	317.5309	686.1007	1790.5618
0.8	388.1765	449.5937	530.9316	749.2129	882.0853	23.0915	181.9827	315.1197	678.1884	1801.6177
1	380.6586	459.5457	538.6283	735.5823	885.5851	23.0277	182.8430	317.2660	685.1607	1791.7026
1.2	519.1677	560.5407	582.2710	638.4316	699.5890	19.8913	156.4575	270.6815	583.9678	1527.0064
1.5	619.2000	769.2000	228.9295	0.8000	150.8000	6.2727	39.6574	67.5611	146.7108	379.7887
1.8	599.9969	599.9990	600.0004	600.0033	600.0004	3.7291	16.8254	27.4395	57.9506	146.8292
2	599.9978	599.9991	600.0001	600.0020	600.0010	15.2575	31.6147	37.7754	49.4929	69.9348

$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul Bütçe	2.Kul Bütçe
0.0002901	0.0003531	81.7344	214.5625	17.8477	16.0358
0.0002908	0.0003530	81.2344	214.3438	63.9487	55.1987
0.0002896	0.0003517	80.0938	214.3281	121.1841	104.6378
0.0002904	0.0003529	83.6719	221.0469	229.8087	200.8568
0.0002912	0.0003532	81.5625	213.9688	828.2816	762.7089
0.0002976	0.0003529	82.0156	215.4688	3000	3000
0.0003416	0.0004270	75.9063	217.4688	10797.4	9999.6
0.07928	0.00186	76.5938	213.7344	42057.6	9999.2
0.0003831	0.00463	81.4375	213.8906	500774.5	9999.1
0.0003845	0.00499	77.4375	215.2500	1800000	9999.7

Çizelge 3.47. $L = 5$, $N = 12000$, $N_1 = 500$, $N_2 = 1500$, $N_3 = 2000$, $N_4 = 3000$, $N_5 = 5000$, $d^2 = 40$, $z = 1.96$, $D^2 = 10.412$, $n = 1000$, $c' = 25000$, $t_1 = 10$, $t_2 = 20$, $t_3 = 30$, $t_4 = 40$ ve $t_5 = 50$ iken örnek çapları ve varyans değerleri

α'	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{14}	n_{15}	n_{21}	n_{22}	n_{23}	n_{24}	n_{25}
0.2	75.0570	113.6166	114.1282	150.0917	547.1065	8.9476	61.9672	106.3287	228.4535	594.3030
0.4	81.3125	103.0263	121.9716	153.5278	540.1618	8.9351	61.9087	106.1899	228.3533	594.6130
0.5	79.2506	104.2901	122.0161	157.4363	537.0069	8.9596	61.9427	106.4002	228.6803	594.0172
0.6	79.1165	105.5777	127.3873	153.2341	534.6844	8.9546	61.8709	106.3984	228.2108	594.5653
0.8	42.3120	64.7840	111.3294	194.1176	587.4570	8.9463	61.8421	106.4447	228.5068	594.2601
1	200.2000	200.2000	200.2000	200.2000	99.6000	5.9247	35.9314	61.9546	131.5188	342.0546
1.2	200.2000	200.2000	200.2000	200.2000	16.7667	10.3352	21.1204	30.7460	56.5519	129.0020
1.5	100.8454	100.2317	100.4790	100.3852	9.1250	11.8989	22.1846	23.8122	29.2027	40.1087
1.8	50.5259	50.2295	50.4916	50.4331	4.1759	7.5169	12.8554	13.6792	16.5465	22.0206
2	25.2665	25.4220	25.0001	25.0002	2.0714	5.9107	9.7882	10.4284	12.4855	16.2690

$V(\bar{x})_1$	$V(\bar{x})_2$	cpu_1	cpu_2	1.Kul.Bütçe	2.Kul.Bütçe
0.00105	0.00118	84.3906	200.1406	438.0407	435.3464
0.00104	0.00119	85.9219	200.6875	1309.7	1316.9
0.00103	0.00108	82.1875	201.3281	2285.2	2320.3
0.00108	0.00120	79.9688	199.3438	4000.8	4117.8
0.00106	0.00119	79.9219	200.0781	12977.5	13222
0.00219	0.00205	81.5156	203.9063	25000	24999.9
0.01087	0.00465	81.3906	204.3594	59250.6	24890.7
0.08367	0.00843	81.4844	206.9063	102022	24999.3
0.08497	0.01510	79.6094	206.0781	116712.8	24999.1
0.08319	0.02016	75.5000	205.4219	63274.6	24997.6

Simülasyon çalışması yaparken, yığın çaplarının, tabaka çaplarının, tabakalara seyahat maliyetlerinin, tabakalara paylaştırılacak örnek çaplarının ve duyarlılığın farklı durumları göz önüne alınarak tabakalara seyahat etmenin maliyet kısıtı üzerine etkisini yansıtan α değerinin sıfırdan büyük durumları için mümkün çözümler aranmıştır. Araştırma için kullanılan maliyet kısıtı $c' = \sum t_h n_h^\alpha$ biçimde doğrusal olmayan yapıdadır. Simülasyon çalışmasında bu yapıdaki maliyet kısıtının kullanılmasının nedeni, alt bölüm 3.2.2’de $c' = \sum t_h \ln(n_h)$ ve $c' = \sum t_h n_h^\alpha$ yapısındaki maliyet kısıtlarının simülasyon yolu ile karşılaştırılması ve bu iki farklı yapıdaki maliyet kısıtının sadece, maliyet kısıtına karşı gelen Lagrange çarpanının sıfırdan farklı olması durumunda farklı sonuçlar verdiğinin elde edilmesidir. Bununla birlikte, bu iki maliyet kısıtının farklı sonuçlar vermesi durumuyla çok az karşı karşıya kalındığı için, iki maliyet kısıtı arasındaki bu fark göz ardı edilmiştir.

α değeri büyüdükçe elde edilen mümkün çözümlerin sayısı hem hedef programlamayla çözülen Model 1 hem de Kuhn-Tucker yöntemiyle çözülen Model 2 için azalmaktadır. α büyüdükçe her iki Model için de kısıtlar sağlanmamaktadır. Çizelgelerden görüldüğü gibi, daha önceki alt bölümlerde geometrik programlama ve Kuhn-Tucker yöntemleri için geçerli olan $\alpha = 0.5$ iken örnek ortalaması istatistiğinin varyansının mümkün çözümler içinde minimum olması durumu hedef programlama için de geçerlidir. Bu alt bölümde de, $\alpha = 0.5$ iken, tabakalara seyahat maliyetleri ne olursa olsun, mümkün çözümler içinde örnek ortalaması istatistiğinin varyansı en küçük olarak elde edilmiştir.

Hedef programlama ile çözülen Model 1, Kuhn-Tucker yöntemi ile çözülen Model 2’ye göre, mümkün çözümü olan α değerleri için, örnek ortalaması istatistiğinin varyansını daha küçük olarak elde etmektedir. Bununla birlikte, hedef programlamada, yalnızca bir amaç olmadığı göz önünde bulundurulmalıdır. Kuhn-Tucker yöntemi sadece örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapmayı hedeflerken, hedef programlama yöntemi aynı anda hem örnek ortalaması istatistiğinin varyansını hem de araştırmada kullanılan bütçeyi minimum yaparak örnek çapını tabakalara paylaştırmayı hedeflemektedir. Çizelge 3.38’de görüldüğü

gibi tabakalara seyahat maliyetleri aynı ya da birbirine yakinken, hedef programlama ve Kuhn-Tucker yöntemleri araştırma için ayrılan bütçeyi hemen hemen aynı biçimde kullanmaktadır. Çizelge 3.39’de olduğu gibi tabakalara seyahat maliyetleri arasında farklılık varken, Kuhn-Tucker yöntemi, hedef programlamaya göre genellikle araştırma için ayrılan bütçenin daha azını kullanmaktadır. α değeri arttıkça hedef programlamada örnek çapı, Kuhn-Tucker yöntemine göre daha iyi paylaşılmasına karşın, araştırma için ayrılan bütçenin kullanılan kısmı daha fazla artma eğilimindedir. Bu durumu, α değeri arttıkça hedef programlamada kullanılan bütçe, Kuhn-Tucker yöntemine göre daha fazladır biçiminde genelleleyebiliriz. Genellikle hedef programlama örnek ortalaması istatistiğinin varyans değerini, Kuhn-Tucker yöntemi ise maliyeti küçük bulmasına karşın, nadir olarak tersi durumla da karşılaşmıştır. Örneğin Çizelge 3.40’da $\alpha=0.8$ iken hedef programlama $V(\bar{x})_1$ değerini 0.01212, araştırma için kullanılan bütçeyi 904.1116 bulmasına karşın, Kuhn-Tucker yöntemi $V(\bar{x})_2$ değerini 0.00859, araştırma için kullanılan bütçeyi 1674.5 olarak elde etmiştir. Ayrıca Çizelge 3.40’da arzu edilen varyansın küçük olduğu durum göz önüne alınmıştır. Yani hedef programlama için ilk önceliğin hedef değeri mümkün olduğunca küçük tutulmuştur. Bu nedenle bu çizelgede hedef programlama için $\alpha=1.5, 1.8$ ve 2 durumunda örnek ortalaması istatistiğinin 0.0143 değerinden küçük olması 1.öncelikli hedef değeri sağlanmamıştır. Hedef programlama yönteminin aynı anda hem örnek ortalaması istatistiğinin varyans değerini hem de araştırma için kullanılan bütçeyi daha küçük bulduğu durumlar söz konusuysen, Kuhn-Tucker yönteminde böyle bir durumla karşılaşmamıştır. Örneğin, Çizelge 3.38’de $\alpha=1.2$ iken, Çizelge 3.40’da $\alpha=0.2, 0.4, 0.5$ ve 0.6 iken, Çizelge 3.41’de $\alpha=0.8$ ve 1 iken, Çizelge 3.43’de $\alpha=0.8$ iken, Çizelge 3.44’de $\alpha=1.2$ iken, Çizelge 3.47’de $\alpha=0.4, 0.5, 0.6$ ve 0.8 iken hedef programlama yöntemi hem örnek ortalaması istatistiğinin varyans değerini hem de araştırma için kullanılan bütçeyi, Kuhn-Tucker yöntemine göre daha küçük bulmaktadır. Ayrıca hedef programlamanın çözüm vermediği, Kuhn-Tucker yönteminin çözüm verdiği hiçbir durumla karşılaşmamıştır. Bunun yanında, hedef programlamayla çözüm elde edildiği halde Kuhn-Tucker yöntemiyle çözüm elde edilemeyen durumlar söz konusudur. Örneğin, Çizelge 3.39’da $\alpha=1.2$ iken, Çizelge

3.40'da $\alpha=1$ ve 1.2 iken, Çizelge 3.43'de $\alpha=1$ iken hedef programlamayla tüm hedefler sağlanmasına ve mümkün çözümler elde edilmesine karşın Kuhn-Tucker yöntemiyle mümkün çözüm elde edilememiştir. Ayrıca, simülasyon yoluyla elde edilen sonuçlara bakıldığında, hedef programlamanın problemi çözme süresi, Kuhn-Tucker yönteminin problemi çözme süresinden daha kısadır.

Sonuç olarak, hedef programlamadan elde edilen örnek ortalaması istatistiğinin varyans değeri, Kuhn-Tucker yönteminden elde edilen değerlere göre daha küçüktür. Hedef programlama yöntemi aynı anda hem örnek ortalaması istatistiğinin varyansını hem de araştırma için kullanılan bütçeyi Kuhn-Tucker yöntemine göre daha küçük elde edebilmektedir. Kuhn-Tucker yöntemiyle çözüm elde edilemeyen durumlarda, tüm hedefler sağlanarak hedef programlamada mümkün çözümler elde edilmiştir. Ayrıca, hedef programlama daha kısa sürede çözüm vermektedir. Bu nedenlerden dolayı, örnek çapının optimum şekilde tabakalara paylaşılması probleminde, hem birden fazla amacı göz önüne aldığı hem de Kuhn-Tucker yöntemindeki tek amaç olan örnek ortalaması istatistiğinin varyans değerini daha küçük elde ettiği için hedef programlama yönteminin kullanılması önerilmektedir.

4. ÇOK DEĞİŞKENLİ TABAKALI TESADÜFİ ÖRNEKLEME

Önceki bölümlerde, tek değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemede doğrusal olmayan maliyet kısıtları altında yığından seçilen n çaplı örneğin, tabakalara optimum şekilde paylaşılması için, doğrusal olmayan optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılan yöntemlerden Kuhn-Tucker, geometrik ve hedef programlama yöntemleri tanıtılmış ve bu yöntemler kullanılarak elde edilen simülasyon sonuçları verilmiştir. Bu bölümde, tabakalarda birden fazla değişken olması durumunda yığından seçilen n çaplı örneğin tabakalara optimum şekilde paylaşılmasına ilişkin literatür çalışması sonuçları ve doğrusal olmayan maliyet kısıtları göz önüne alındığında, çok değişkenli tabakalı tesadüfi örnekleme için yığından seçilen n çaplı örneğin tabakalara optimum şekilde paylaşılması problemi incelenecektir.

Örnekleme yöntemleri çok çeşitli olmasına rağmen, uygulamalarda en çok tabakalı tesadüfi örnekleme kullanıldığını belirtmiştik. Tabakalı tesadüfi örneklemede, tabakalardan seçilecek örnek çapının belirlenmesinde, araştırma için ayrılan bütçe çok önemli rol oynamaktadır. Tabakalı tesadüfi örneklemede tek değişken ve maliyet kısıtı doğrusal yapıda olduğunda, örnek çapının tabakalara paylaşılması için geliştirilmiş, bilinen klasik yöntemler kolaylıkla sonuç vermektedir. Bununla birlikte, araştırmalarda genellikle, bir birime ait birden fazla değişken ile ilgili bilginin toplanması tercih edilir. Çok değişkenle çalışıldığında, yığının birçok açıdan tanımlanması mümkün olur. Çok değişkenli araştırmalarda, bir değişken için uygun olan bir çözüm diğer bir değişken için uygun olmayabileceğinden, klasik yöntemlerin kullanılması uygun olmaz. Bu problem ilk defa 1934 yılında Neyman tarafından ele alınmıştır[Neyman, 1934]. Literatürde, çok değişkenli tabakalı tesadüfi örnekleme için doğrusal maliyet fonksiyonu altında pek çok çalışma yapılmıştır.

Tabakalı tesadüfi örneklemede, tabakalardaki birimlerin aynı anda birden fazla değişkene göre gözlem değerleri elde edildiğinde, tabaka varyansları ve maliyet değerleri ilgilenilen değişkene göre farklılık gösterebilir. Örnek çapının tabakalara paylaşılması probleminde, bir değişken için optimum olan örnek çapları, diğer bir değişken için optimum olmaktan uzak olabilir. Dolayısıyla, verilen bir bütçe ile

bütün değişkenlerin tahmin edicilerine ait varyansların aynı anda minimum yapılması ya da varyans kısıtı altında araştırma için ayrılan bütçenin minimum yapılması tek değişkenli duruma göre oldukça zordur. Çok değişkenli tabakalı tesadüfi örnekleme için notasyonlar aşağıda verilmiştir.

N : Yığın çapı

n : Örnek çapı

L : Yığındaki tabaka sayısı ($h = 1, 2, \dots, L$)

p : Her bir tabakadaki değişken sayısı ($j = 1, 2, \dots, p$)

N_h : h . tabakadaki birim sayısı (h . tabakanın çapı, $N = \sum_{h=1}^L N_h$)

n_h : h . tabakadan seçilen örnek çapı ($n = \sum_{h=1}^L n_h$)

$W_h = \frac{N_h}{N}$: h . tabakanın ağırlığı ($h = 1, 2, \dots, L$)

$X_{hi}^{(j)}$: Yığında h . tabakada j . değişkene ait i . birimin gözlem değeri ($h = 1, 2, \dots, L$,
 $i = 1, 2, \dots, N_h$, $j = 1, 2, \dots, p$)

$x_{hi}^{(j)}$: h . tabakadaki j . değişkene ait örneğe seçilen i . birimin gözlem değeri
($h = 1, 2, \dots, L$, $i = 1, 2, \dots, n_h$, $j = 1, 2, \dots, p$)

$$\bar{X}_{hj} = \bar{X}_h = \mu_h^{(j)} = \frac{1}{N_h} \sum_{i=1}^{N_h} X_{hi}^{(j)} : h. \text{ tabakada } j. \text{ değişkene ait yığın ortalaması}$$

$$(h = 1, 2, \dots, L, j = 1, 2, \dots, p)$$

$$\bar{x}_{hj} = \bar{x}_h = \frac{1}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} x_{hi}^{(j)} : h. \text{ tabakada } j. \text{ değişkene ait rnek ortalaması} (h = 1, 2, \dots, L,$$

$$j = 1, 2, \dots, p)$$

$$\bar{X}_j = \bar{X}_{..} = \mu^{(j)} = \sum_{h=1}^L \frac{N_h}{N} \bar{X}_{hj} : j. \text{ değişkene ait yığın ortalaması} (j = 1, 2, \dots, p)$$

$$\bar{x}_{tb} = \bar{x}_j = \bar{x}_{..} = \sum_{h=1}^L \frac{N_h}{N} \bar{x}_{hj} : j. \text{ değişkene ait rnek ortalaması} (j = 1, 2, \dots, p)$$

$$S_{hj}^2 = \frac{1}{N_h - 1} \sum_{i=1}^{N_h} (X_{hi}^{(j)} - \bar{X}_{hj})^2 : h. \text{ tabakada } j. \text{ değişkene ait yığın varyansı}$$

$$(h = 1, 2, \dots, L, j = 1, 2, \dots, p)$$

$$s_{hj}^2 = \frac{1}{n_h - 1} \sum_{i=1}^{n_h} (x_{hi}^{(j)} - \bar{x}_{hj})^2 : h. \text{ tabakada } j. \text{ değişkene ait rnek varyansı}$$

$$(h = 1, 2, \dots, L, j = 1, 2, \dots, p)$$

$$V_j(\bar{x}_j) = \sigma_j^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^L N_h^2 \frac{N_h - n_h}{N_h} \frac{S_{hj}^2}{n_h} : j. \text{ değişkene ait rnek ortalaması}$$

istatistiğinin varyansı($j = 1, 2, \dots, p$)

$$Cov(\bar{x}_k, \bar{x}_j) = \sigma_{kj} = \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^L N_h^2 \rho_{hkj} S_{hk} S_{hj} \frac{(N_h - n_h)}{N_h n_h} : k. \text{ ve } j. \text{ değişkenler arasındaki}$$

kovaryans($k \neq j = 1, 2, \dots, p$)

$$\rho_{h kj} = \rho_h^{(k,j)} = \frac{\sum_{i=1}^{N_h} (X_{hi}^{(k)} - \bar{X}_{hk})(X_{hi}^{(j)} - \bar{X}_{hj})}{N_h S_{hk} S_{hj}} : h. \text{ tabakadaki } k \text{ ve } j \text{ de\u0131i\u015fenleri}$$

arasındaki korelasyon katsayısı
($k \neq j = 1, 2, \dots, p$)

$$\Sigma = Cov(\bar{x}_j, \bar{x}_j) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \sigma_{p3} & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_p^2 \end{bmatrix} : \text{Varyans-kovaryans matrisi}$$

Literatürde, çok de\u0131i\u015fenli tabakalı tesadüfi örneklemede doğrusal maliyet kısıtı altında varyansın minimum yapılması ya da varyans kısıtı altında doğrusal maliyet fonksiyonunun minimum yapılmasına ilişkin pek çok çalışma yapılmıştır ve bu çalışmaların bazılarına izleyen alt bölümlerde yer verilmiştir.

4.1. Ghosh(1958) Tarafından Geliştirilen Yöntem

Ghosh'un geliştirdi\u011fi yöntemde, çok de\u0131i\u015fenli tabakalı tesadüfi örneklemede, örnek \u00e7apının tabakalara optimum \u015fekilde paylaştırılması i\u00e7in genelle\u015ftirilmiş varyans esas alınmıştır. Ghosh bu yöntemde, varyans-kovaryans matrisini $n = \sum_{h=1}^L n_h$ kısıtı altında minimize eden örnek \u00e7aplarını(n_h) Lagrange \u00e7arpanları yöntemini kullanarak elde etmiştir. Bununla birlikte, varyans-kovaryans matrisini minimize eden örnek \u00e7aplarını bulurken, büt\u00e7e kısıtını göz önüne almamıştır[Ghosh, 1958].

$$\min(\Sigma) = \min(V) = \min \left(\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \sigma_{p3} & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_p^2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\text{Kısıt:} \quad n_1 + n_2 + \dots + n_L = n$$

Lagrange çarpanları yöntemi kullanılarak;

$$L = V + \lambda \left(\sum_{h=1}^L n_h - n \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial n_h} = \frac{\partial}{\partial n_h} (V + \lambda (\sum_{h=1}^L n_h - n)) = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial n_h} + \frac{\partial}{\partial n_h} (\lambda (\sum_{h=1}^L n_h - n)) = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial n_h} + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial n_h} = -\lambda \quad (4.1)$$

elde edilir. Ayrıca varyans-kovaryans matrisinin n_h 'a göre türevi aşağıdaki gibi alınır.

$$\frac{\partial V}{\partial n_h} = \sum_{j=1}^p \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdot & \sigma_{1j} & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \cdot & \sigma_{2j} & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_{p1} & \cdot & \sigma_{pj} & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_p^2 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Eş. 4.2'deki σ_{kj} ' , k ve j değişkenleri arasındaki kovaryansın n_h 'a göre türevidir ve aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\sigma_{kj} = \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^L N_h^2 \rho_{h kj} S_{hk} S_{hj} \frac{(N_h - n_h)}{N_h n_h} \text{ olmak üzere;}$$

$$\frac{\partial \sigma_{kj}}{\partial n_h} = \begin{cases} \frac{1}{N^2} N_h^2 \rho_{h kj} S_{hk} S_{hj} \left(-\frac{1}{n_h^2} \right) & k \neq j \\ \frac{1}{N^2} N_h^2 S_{hj}^2 \left(-\frac{1}{n_h^2} \right) & k = j \end{cases}$$

olarak elde edilir. Buradan, Eş. 4.2'de verilen matris formu aşağıdaki gibi yazılır.

$$\frac{\partial V}{\partial n_h} = \sum_{j=1}^p \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdot & \frac{1}{N^2} N_h^2 \rho_{h1j} S_{h1} S_{hj} \left(-\frac{1}{n_h^2} \right) & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \cdot & \frac{1}{N^2} N_h^2 \rho_{h2j} S_{h2} S_{hj} \left(-\frac{1}{n_h^2} \right) & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_{p1} & \cdot & \frac{1}{N^2} N_h^2 \rho_{hpj} S_{hp} S_{hj} \left(-\frac{1}{n_h^2} \right) & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_p^2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial V}{\partial n_h} = -\frac{N_h^2}{N^2} \frac{1}{n_h^2} \sum_{j=1}^p S_{hj} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdot & \rho_{h1j} S_{h1} & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \cdot & \rho_{h2j} S_{h2} & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_{p1} & \cdot & \rho_{hpj} S_{hp} & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_p^2 \end{bmatrix}}_{B_h}$$

$$|B_h| = \sum_{j=1}^p S_{hj} \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \cdot & \rho_{h1j} S_{h1} & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \cdot & \rho_{h2j} S_{h2} & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_{p1} & \cdot & \rho_{h pj} S_{hp} & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_p^2 \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial V}{\partial n_h} = -\frac{N_h^2}{N^2} \frac{1}{n_h^2} |B_h| \quad (4.3)$$

Eş. 4.1 ile Eş. 4.3 birbirine eşitlenirse;

$$-\frac{N_h^2}{N^2} \frac{1}{n_h^2} |B_h| = -\lambda$$

$$n_h = \frac{N_h}{N} \frac{|B_h|^{1/2}}{\sqrt{\lambda}} \quad (4.4)$$

elde edilir. Buradan, Eş. 4.4'ün tabaka üzerinden toplamı alınırsa;

$$\sum_{h=1}^L n_h = \sum_{h=1}^L \frac{N_h}{N} \frac{|B_h|^{1/2}}{\sqrt{\lambda}} = n \quad (4.5)$$

elde edilir. Eş. 4.4 ve Eş. 4.5 oranlanırsa;

$$\frac{n_h}{n} = \frac{\frac{N_h}{N} \frac{|B_h|^{1/2}}{\sqrt{\lambda}}}{\sum_{h=1}^L \frac{N_h}{N} \frac{|B_h|^{1/2}}{\sqrt{\lambda}}}$$

$$n_h = \frac{N_h |B_h|^{1/2}}{\sum_{h=1}^L N_h |B_h|^{1/2}} n \quad \text{olarak elde edilir.}$$

4.2. Kokan(1963) Tarafından Geliştirilen Yöntem

Kokan tarafından geliştirilen bu yöntemde, varyanslara üst sınır getirmek koşuluyla optimallik kriteri oluşturularak, doğrusal maliyet fonksiyonuna sahip olduğu varsayılmıştır. Bu yöntemde, tabaka örnek çaplarının, belirli bir güvenilirlik düzeyinde, değişkenlere ait tahmin edicilerin hata payları belirli bir üst düzeyi aşmayacak biçimde araştırma maliyetinin minimum yapılması amaçlanmıştır. Amaç fonksiyonunun maliyeti minimum yapmak olduğu optimizasyon problemi aşağıdaki gibi formüle edilmektedir[Kokan, 1963].

j . değişkene ait örnek ortalaması istatistiğinin varyansı($j = 1, 2, \dots, p$)

$$V_j(\bar{x}_j) = \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^L N_h^2 \frac{N_h - n_h}{N_h} \frac{S_{hj}^2}{n_h} = \sum_{h=1}^L W_h^2 S_{hj}^2 \left(\frac{1}{n_h} - \frac{1}{N_h} \right) \quad (4.6)$$

olmak üzere;

$$a_{hj} = W_h^2 S_{hj}^2 \quad (4.7)$$

$$y_h = \left(\frac{1}{n_h} - \frac{1}{N_h} \right) \quad (4.8)$$

olarak tanımlanırsa, Eş. 4.7 ve Eş. 4.8 yardımı ile Eş. 4.6 aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$V_j(\bar{x}_j) = \sum_{h=1}^L a_{hj} y_h \quad (4.9)$$

Problemin amaç fonksiyonu olan, doğrusal maliyet fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$c = c_0 + \sum_{h=1}^L c_h n_h \quad (4.10)$$

Eş. 4.10, Eş. 4.8 yardımı ile aşağıdaki gibi tekrar düzenlenebilir.

$$c = c_0 + \sum_{h=1}^L c_h \frac{N_h}{(1 + N_h y_h)} \quad (4.11)$$

Problemin kısıtları ise Eş. 4.12 ve Eş. 4.13 aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\sum_{h=1}^L a_{hj} y_h \leq v_j \quad (4.12)$$

$$1 \leq n_h \leq N_h \Rightarrow 1 \leq \frac{N_h}{1 + N_h y_h} \leq N_h \Rightarrow 0 \leq y_h \leq 1 - \frac{1}{N_h} \quad (4.13)$$

Eş. 4.12'deki v_j değeri, varyanslar için, araştırmacı tarafından belirlenen arzu edilen varyans değeridir. Buradan, Kokan'ın yöntemine göre, çok değişkenli tabakalı tesadüfi örnekleme için, maliyeti minimum yapacak örnek çaplarını bulmak için paylaşırma problemi aşağıdaki gibi modellenir.

$$Max(C) = - \sum_{h=1}^L c_h \frac{N_h}{(1 + N_h y_h)}$$

$$\sum_{h=1}^L a_{hj} y_h \leq v_j$$

$$0 \leq y_h \leq 1 - \frac{1}{N_h}$$

Bu problemin çözümü için, doğrusal olmayan optimizasyon yöntemlerinden herhangi biri kullanılabilir. Kokan, problemin çözümünün Kuhn-Tucker yöntemi ile yapılmasını önermiştir.

4.3. Jagannathan(1965) Tarafından Geliştirilen Yöntem

Jagannathan tarafından geliştirilen bu yöntemde, değişkenlere ait tahmin ediciler için, ön görülen duyarlılık düzeylerine göre örnek çapı belirlenmiştir. Jagannathan'ın yönteminde de, amaç doğrusal maliyet fonksiyonunu minimum yapacak örnek çaplarının belirlenmesidir[Jagannathan, 1965a; Jagannathan, 1965b]. Problemin formülasyonu aşağıdaki gibidir.

j . değişkene ait örnek ortalaması istatistiğinin varyansı($j = 1, 2, \dots, p$)

$$V_j(\bar{x}_j) = \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^L N_h^2 \frac{N_h - n_h}{N_h} \frac{S_{hj}^2}{n_h} = \sum_{h=1}^L W_h^2 S_{hj}^2 \left(\frac{1}{n_h} - \frac{1}{N_h} \right)$$

Doğrusal maliyet fonksiyonu,

$$c = c_0 + \sum_{h=1}^L c_h n_h$$

olmak üzere, $a_{hj} = W_h^2 S_{hj}^2$ ve düzeltme terimi $a_{0j} = \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_{hj}^2}{N_h}$ olarak ifade edilirse,

$$V_j(\bar{x}_j) = \sum_{h=1}^L \frac{a_{hj}}{n_h} - a_{0j}$$

olarak yazılabilir. Bu durumda, model aşağıdaki gibi yazılır.

$$\min(c) = c_0 + \sum_{h=1}^L c_h n_h$$

$$\sum_{h=1}^L \frac{a_{hj}}{n_h} - a_{0j} \leq v_j \quad j = 1, 2, \dots, p$$

$$n_h \leq N_h \quad h = 1, 2, \dots, L$$

Aşağıdaki dönüşümler uygulansın.

$$\begin{aligned}
 y_h &= \left(\frac{1}{n_h} - \frac{1}{N_h} \right) \\
 n_h &= \frac{N_h}{N_h y_h + 1} = \frac{1}{y_h + \frac{1}{N_h}} \\
 m_h &= \frac{1}{N_h}
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

olarak alınırsa Eş. 4.14 aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$n_h = \frac{1}{y_h + m_h}$$

Buradan, Jagannathan'ın yöntemine göre, çok değişkenli tabakalı tesadüfi örnekleme için, maliyeti minimum yapacak örnek çaplarını bulmak için paylaştırma problemi aşağıdaki gibi modellenir.

$$\begin{aligned}
 \min(c) &= \sum_{h=1}^L c_h \left(\frac{1}{y_h + m_h} \right) \\
 \sum_{h=1}^L a_{hj} y_h &\leq b_j \quad j = 1, 2, \dots, p \\
 y_h &\geq 0 \quad h = 1, 2, \dots, L
 \end{aligned}$$

Burada, $b_j = v_j + a_{j0} - \sum_{h=1}^L a_{hj} m_h$ olarak elde edilir. v_j 'ler ise arzu edilen varyanstır

ve araştırmacının isteği doğrultusunda belirlenir. Problem modellendikten sonra, eşitsizlik kısıtı altında herhangi bir optimizasyon yöntemi ile işlem yapılabilir. Bununla birlikte, Jagannathan yukarıdaki modelin çözümü için, araştırmacı tarafından belirlenen bir başlangıç noktası etrafında iteratif bir yöntem geliştirmiştir.

4.4. Folks ve Antle(1965) Tarafından Geliştirilen Yöntem

Folks ve Antle tarafından geliştirilen bu yöntem, $\sum_{j=1}^p \alpha_j = 1$ ve $\alpha_j > 0$ olacak biçimde, tabakalardaki her bir değişkenin varyansının α_j 'lerle ağırlıklandırılması temeline dayanmaktadır. Bu yöntemde de, arzu edilen varyanslar için üst sınırlar oluşturulur. Varyanslar için belirlenen üst sınırların oranı alındığında elde edilen değere karşı gelen α_j değeri kullanılarak örnek çapları bulunur. Bu yöntem için, problem modellenirken ve çözülürken sadece $\sum_{h=1}^L n_h = n$ kısıtından faydalanılmış, maliyet kısıtı dikkate alınmamıştır. Problemin formülasyonu aşağıdaki gibidir[Folks ve Antle, 1965].

j . değişkene ait örnek ortalaması istatistiğinin varyansı($j = 1, 2, \dots, p$)

$$V_j(\bar{x}_j) = \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^L N_h^2 \frac{N_h - n_h}{N_h} \frac{S_{hj}^2}{n_h} = \sum_{h=1}^L \frac{N_h^2 S_{hj}^2}{N^2 n_h} - \sum_{h=1}^L \frac{N_h S_{hj}^2}{N^2} \quad (4.15)$$

Eş. 4.15 için aşağıdaki kısaltmalar yapılabilir:

$$k_{hj} = \frac{N_h^2 S_{hj}^2}{N^2} \quad (4.16)$$

$$c_j = \sum_{h=1}^L \frac{N_h S_{hj}^2}{N^2} \quad (4.17)$$

olmak üzere, Eş. 4.16 ve Eş. 4.17 yardımı ile Eş. 4.15 aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$V_j(\bar{x}_j) = \sum_{h=1}^L \frac{k_{hj}}{n_h} - c_j$$

Varyansın negatifi alındığında;

$$-V_j(\bar{x}_j) = x_j(n) = c_j - \sum_{h=1}^L \frac{k_{hj}}{n_h} \quad (4.18)$$

elde edilir. Amaç fonksiyonu Eş. 4.18'deki gibi olduğunda, tabakalardan seçilecek n_h 'lar, bu fonksiyonun değeri en büyük olacak şekilde belirlenmelidir. Amacımız,

$$\sum_{h=1}^L n_h = n \quad (4.19)$$

$$n_h > 0 \quad (4.20)$$

Eş. 4.19 ve Eş. 4.20 kısıtları altında Eş. 4.18'i maksimum yapmaya çalışmaktır. Tüm j değişkenleri için, α_j ağırlıkları yardımı ile aşağıdaki fonksiyon tanımlansın yani varyanslara ağırlıklar verilsin.

$$x(n, \alpha) = \sum_{j=1}^p \alpha_j x_j(n) \quad (4.21)$$

ve

$$\sum_{j=1}^p \alpha_j = 1 \text{ ve } \alpha_j > 0$$

Amacımız, değişken sayısı kadar yani p tane $x_j(n)$ fonksiyonu için optimum noktaların bulunmasıdır.

Eş. 4.19; $n_L = n - \sum_{h=1}^{L-1} n_h$ olarak yazılıp, Eş. 4.18'deki amaç fonksiyonunda yerine yazılırsa,

$$x_j(n) = c_j - \sum_{h=1}^L \frac{k_{hj}}{n_h} = c_j - \sum_{h=1}^{L-1} \frac{k_{hj}}{n_h} - \frac{k_{Lj}}{n_L}$$

$$x_j(n) = c_j - \sum_{h=1}^{L-1} \frac{k_{hj}}{n_h} - \frac{k_{Lj}}{n - \sum_{h=1}^{L-1} n_h} \quad (4.22)$$

elde edilir ve kısıt aşağıdaki forma dönüşür.

$$n_L = n - \sum_{h=1}^{L-1} n_h > 0$$

Eş. 4.22'deki amaç fonksiyonu, Eş. 4.21'deki gibi varyansların ağırlıklandırılması biçiminde yazıldığında;

$$\sum_{j=1}^p \alpha_j x_j(n) = \sum_{j=1}^p \alpha_j c_j - \sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{h=1}^{L-1} \frac{k_{hj}}{n_h} - \sum_{j=1}^p \alpha_j \frac{k_{Lj}}{n - \sum_{h=1}^{L-1} n_h} \quad (4.23)$$

elde edilir. Eş. 4.23'ün n_h 'a göre türevi alınıp sıfıra eşitlenirse,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n_h} \sum_{j=1}^p \alpha_j x_j(n) &= 0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j \frac{k_{hj}}{n_h^2} - \sum_{j=1}^p \alpha_j \frac{k_{Lj}}{\left(n - \sum_{h=1}^{L-1} n_h\right)^2} = 0 \\ \sum_{j=1}^p \alpha_j \frac{k_{hj}}{n_h^2} &= \sum_{j=1}^p \alpha_j \frac{k_{Lj}}{\left(n - \sum_{h=1}^{L-1} n_h\right)^2} \end{aligned} \quad (4.24)$$

elde edilir. Eş. 4.19'daki $n_L = n - \sum_{h=1}^{L-1} n_h$ değeri, Eş. 4.24'de yerine yazılırsa,

$$\sum_{j=1}^p \alpha_j \frac{k_{hj}}{n_h^2} = \sum_{j=1}^p \alpha_j \frac{k_{Lj}}{n_L^2} \quad (4.25)$$

elde edilir. Eş. 4.25'de gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$n_h^2 = \frac{\sum_{j=1}^p \alpha_j k_{hj}}{\sum_{j=1}^p \alpha_j \frac{k_{Lj}}{n_L^2}}$$

$$n_h = \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^p \alpha_j k_{hj}}}{\sqrt{\sum_{j=1}^p \alpha_j k_{Lj}}} n_L \quad h = 1, 2, \dots, L \quad (4.26)$$

elde edilir. Eş. 4.26'nın L üzerinden toplamı alınırsa;

$$\sum_{h=1}^L n_h = \sum_{h=1}^L \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^p \alpha_j k_{hj}}}{\sqrt{\sum_{j=1}^p \alpha_j k_{Lj}}} n_L$$

$$n = \sum_{h=1}^L \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^p \alpha_j k_{hj}}}{\sqrt{\sum_{j=1}^p \alpha_j k_{Lj}}} n_L \quad (4.27)$$

bulunur. Eş. 4.26 ve Eş. 4.27 oranlanırsa;

$$\frac{n_h}{n} = \frac{\frac{\sqrt{\sum_{j=1}^p \alpha_j k_{hj}}}{\sqrt{\sum_{j=1}^p \alpha_j k_{Lj}}} n_L}{\sum_{h=1}^L \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^p \alpha_j k_{hj}}}{\sqrt{\sum_{j=1}^p \alpha_j k_{Lj}}} n_L}$$

$$n_h = \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^p \alpha_j k_{hj}}}{\sum_{h=1}^L \sqrt{\sum_{j=1}^p \alpha_j k_{hj}}} n \quad h = 1, 2, \dots, L \quad (4.28)$$

elde edilerek, çok değişkenli tabakalı tesadüfi örnekleme için her tabakadan seçilecek örnek çapları belirlenmiş olur. Ayrıca Eş. 4.28'de, $k_{hj} = \sum_{h=1}^L \frac{N_h^2 S_{hj}^2}{N^2}$ değeri yerine yazılarak,

$$n_h = \frac{N_h \sqrt{\sum_{j=1}^p \alpha_j S_{hj}^2}}{\sum_{h=1}^L N_h \sqrt{\sum_{j=1}^p \alpha_j S_{hj}^2}} n \quad \sum_{j=1}^p \alpha_j = 1 \text{ ve } \alpha_j > 0 \quad (4.29)$$

Eş. 4.29 elde edilebilir. Bu yöntemin dezavantajı, ağırlıkların belirlenmesinin araştırmacıya bırakılmış olmasıdır. Bu nedenle, ağırlıklar için olası kombinasyonlar denenerek en uygun n_h değerleri bulunabilir.

4.5. Chatterje(1968) Tarafından Geliştirilen Yöntem

Chatterje tarafından geliştirilen bu yöntem, çok değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemede örnek çapının tabakalara paylaştırılması probleminde, her değişkene ait arzu edilen varyanslar altında doğrusal maliyet fonksiyonunu minimum yapma temeline dayanmaktadır[Chatterje, 1968].

Her bir değişkene ait arzu edilen varyans v_j ve doğrusal maliyet fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$c = \sum_{h=1}^L c_h n_h$$

$$\begin{aligned}
V_j(\bar{x}_j) &= \sum_{h=1}^L W_h^2 S_{hj}^2 \left(\frac{1}{n_h} - \frac{1}{N_h} \right) \leq v_j \\
\frac{\sum_{h=1}^L W_h^2 S_{hj}^2}{n_h} &\leq v_j + \frac{\sum_{h=1}^L W_h^2 S_{hj}^2}{N_h} \\
2 \leq n_h &\leq N_h
\end{aligned} \tag{4.30}$$

elde edilir. Eş. 4.30'un sağ tarafındaki düzeltme terimi ihmal edilir ve $y_h = \frac{1}{n_h}$ yazılırsa, model aşağıdaki şekle dönüşür.

$$\begin{aligned}
\min(c) &= \sum_{h=1}^L \frac{c_h}{y_h} \\
\sum_{h=1}^L W_h^2 S_{hj}^2 y_h &\leq v_j \quad j = 1, 2, \dots, p \\
\frac{1}{N_h} &\leq y_h \leq 0.5
\end{aligned}$$

elde edilen model, doğrusal olmayan optimizasyon problemlerinin çözümü için geliştirilen herhangi bir yöntem yardımı ile çözülebilir.

4.6. Ahsan ve Khan(1977) Tarafından Geliştirilen Yöntem

Ahsan ve Khan tarafından geliştirilen bu yöntem, önsel ve sonsal dağılım bilgisi kullanma temeline dayanmaktadır. Bu yöntemde, varyans kısıtı altında maliyet minimize edilmeye çalışılırken, problemin çözümü için bir algoritma geliştirilmiş ve hiçbir kısıtı sağlamayan bir başlangıç noktası seçimi altında çözüme başlanmıştır. Problemin formülasyonu aşağıdaki gibidir[Ahsan ve Khan, 1977].

$\underline{W}$: Tabaka ağırlıklarının vektörü

$\underline{\bar{X}}_j = (\bar{X}_{1j}, \bar{X}_{2j}, \dots, \bar{X}_{hj})$: j . değişkene ait yığın ortalaması vektörü

$\underline{\bar{x}}_j = (\bar{x}_{1j}, \bar{x}_{2j}, \dots, \bar{x}_{hj}) : j. \text{ de\u0131i\u015fkene ait \u00f6rnek ortalaması vekt\u00f6r\u00fc}$

Burada, $\underline{\bar{x}}_j$ 'lerin ortalaması $\underline{\bar{X}}_j$ ve varyansı kö\u015fegen elemanları $\frac{S_{hj}^2}{n_{hj}}$ ($h = 1, 2, \dots, L$ ve $j = 1, 2, \dots, p$) olan M_j kö\u015fegen varyans-kovaryans matrisine sahip p de\u0131i\u015fkenli kısıtlı normal da\u011fılıma sahip oldu\u011fu varsayılmıştır.

$\underline{\bar{X}}_{hj}$ 'lere ilişkin \u00f6n bilgi ise, $\underline{m}_j$ ortalama vekt\u00f6r\u00fc ve A_j kö\u015fegen varyans kovaryans matrisine sahip olundu\u011fu bi\u00e7imindedir. $\underline{\bar{X}}_j$ 'lerin p de\u0131i\u015fkenli sonsal da\u011fılımına ait $\underline{\bar{m}}_j$ ortalama vekt\u00f6r\u00fc;

$$\underline{\bar{m}}_j = [\underline{\bar{x}}_j v_j + \underline{m}_j V_j] [\underline{\bar{V}}_j]$$

$$\underline{\bar{V}}_j = [v_j + V_j]^{-1} = M_j^{-1}$$

$$V_j = A_j^{-1}$$

bi\u00e7imindedir. Sonu\u00e7 olarak, $\underline{\bar{X}}_{hj}$ 'lerin do\u011frusal bir kombinasyonu olan $\underline{\bar{X}}_j$ $j.$ de\u0131i\u015fken i\u00e7in yığın ortalamasının, tek de\u0131i\u015fkenli \u00f6nsel da\u011fılımının $\underline{m}_j = \underline{W} \underline{m}_j'$ ortalamalı ve $\underline{a}_j = \underline{W} \underline{A}_j \underline{W}'$ varyanslı, sonsal da\u011fılımının ise $\underline{\bar{a}}_j = \underline{W} \underline{\bar{V}}_j \underline{W}'$ varyanslı tek de\u0131i\u015fkenli normal da\u011fılıma sahip oldu\u011fu s\u00f6ylenebilir.

c_h , $h.$ tabakadaki ba\u015flangı\u00e7 maliyeti ve c_{hj} , $h.$ tabakadaki $j.$ de\u0131i\u015fkenin \u00f6l\u00e7\u00fcm maliyeti olmak \u00fczere, do\u011frusal maliyet fonksiyonu;

$$c = \sum_{h=1}^L c_h n_h + \sum_{h=1}^L \sum_{j=1}^p c_{hj} n_{hj} \quad (4.31)$$

olarak verilebilir. Bu maliyet fonksiyonu aynı zamanda minimum yapılmak istenen amaç fonksiyonudur. Örnek çapının tabakalara paylaştırılması problemi, $\bar{X}_j$ 'lerin sonsal varyansları için arzu edilen varyans kısıtı altında doğrusal maliyet fonksiyonunu minimum yapan n_{hj} 'lerin bulunmasıdır. $\bar{X}_j$ 'lerin sonsal varyansları için arzu edilen varyansların üst sınırları v_j olarak tanımlanırsa, amaç fonksiyonu ve kısıtlar aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned} \min(c) &= \sum_{h=1}^L c_h n_h + \sum_{h=1}^L \sum_{j=1}^p c_{hj} n_{hj} \\ \bar{a}_j &= \underline{W} \bar{V}_j \underline{W}' \leq v_j \quad j = 1, 2, \dots, p \\ n_{hj} &\geq 0 \quad h = 1, 2, \dots, L \text{ ve } j = 1, 2, \dots, p \end{aligned} \quad (4.32)$$

A_j köşegen bir matris olarak tanımlandığından ve $V_j = A_j^{-1}$ olduğundan Eş. 4.32'deki varyans kısıtı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\bar{a}_j = \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2}{(v_j)_{hh} + \frac{n_{hj}}{S_{hj}^2}} \leq v_j \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (4.33)$$

Eş. 4.33'deki $(v_j)_{hh}$, $\bar{V}_j$ matrisinin köşegen elemanlarıdır. Eş. 4.33'ün paydasındaki terim u_{hj} olarak tanımlanırsa,

$$\begin{aligned} u_{hj} &= (v_j)_{hh} + \frac{n_{hj}}{S_{hj}^2} \\ n_{hj} &= (u_{hj} - (v_j)_{hh}) S_{hj}^2 \end{aligned} \quad (4.34)$$

olarak elde edilir. Eş.4.34, Eş. 4.31'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
c &= \sum_{h=1}^L c_h n_h + \sum_{h=1}^L \sum_{j=1}^p c_{hj} (u_{hj} - (v_j)_{hh}) S_{hj}^2 \\
c &= \sum_{h=1}^L c_h n_h + \sum_{h=1}^L \sum_{j=1}^p c_{hj} u_{hj} S_{hj}^2 - \sum_{h=1}^L \sum_{j=1}^p c_{hj} (v_j)_{hh} S_{hj}^2
\end{aligned} \tag{4.35}$$

olur ve buradan kısıtlar

$$\begin{aligned}
\bar{a}_j &= \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2}{u_{hj}} \leq v_j & h &= 1, 2, \dots, L \\
u_{hj} &\geq (v_j)_{hh} & h &= 1, 2, \dots, L \text{ ve } j = 1, 2, \dots, p
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Eş. 4.35'in son terimi sabittir bu nedenle ihmal edilebilir. Aynı şekilde başlangıç maliyetleri de ihmal edilip, $\frac{1}{u_{hj}}$ yerine y_{hj} , $c_{hj} S_{hj}^2$ yerine $\bar{c}_{hj}$ yazıldığında amaç fonksiyonu ve kısıtlar aşağıdaki forma dönüşür.

$$\min(c) = \sum_{h=1}^L \sum_{j=1}^p \bar{c}_{hj} y_{hj} \tag{4.36}$$

$$\bar{a}_j = \sum_{h=1}^L W_h^2 y_{hj} \leq v_j \tag{4.37}$$

$$y_{hj} \leq \frac{1}{(v_j)_{hh}} \tag{4.38}$$

Bu problem, doğrusal olmayan programlama problemidir. B , $\{1, 2, \dots, p\}$ indislerinin bir alt kümesi ve Eş. 3.36'da verilen hiperyüzey ile,

$$\sum_{h=1}^L W_h^2 y_{hj} = v_j \quad j \in B \tag{4.39}$$

şeklinde verilen hiperdüzlemlerin kesişim noktası olsun. Eğer Eş. 4.39'da verilen denklemler tutarlıysa $y_{hj} > 0$ için Eş. 4.36 konveks olduğundan $\underline{Y}^B$ noktası pozitif

çeyrek içinde tek bir nokta olarak belirlenebilir. B 'nin olası tüm mümkün kombinasyonları için Eş. 4.39 kısıtı altında Eş. 4.36 minimize edilir.

$$\min(c) = \sum_{h=1}^L \sum_{j=1}^p \frac{\bar{c}_{hj}}{y_{hj}}$$

$$\sum_{h=1}^L W_h^2 y_{hj} = v_j \quad (4.40)$$

Lagrange çarpanları yardımı ile elde edilen kök Eş. 4.41'deki gibi bulunur.

$$y_{hj} = \frac{v_j \sqrt{\bar{c}_{hj}}}{W_h \sum_{h=1}^L W_h \sqrt{\bar{c}_{hj}}} \quad (4.41)$$

Bundan sonra izlenecek yol aşağıdaki gibidir:

- 1- Mümkün çözüm dışında herhangi bir pozitif başlangıç noktası alınır. Hiçbir kısıtı sağlamayan nokta aşağıdaki eşitlik yardımı ile elde edilebilir.

$$y_{hj}^0 = \frac{v_j}{W_h^2} \quad (4.42)$$

Tüm $j = 1, 2, \dots, p$ için $\sum_{h=1}^L W_h^2 y_{hj}^0 - v_j$ farkları hesaplanır ve büyüklük sırasına koyulur.

- 2- Eş. 4.41 kullanılarak, tüm y_{hj} 'ler bulunur. Bulunan y_{hj} 'ler için optimallik kontrol edilir. Bu aşamada hiçbir kısıtı bozmayan nokta maliyeti minimum yapan noktadır. Eğer kısıtların bazıları sağlanmıyorsa, diğer aşamaya geçilir.

3- İkinci maksimum nokta için Eş. 4.41 kullanılarak, y_{hj} 'ler yeniden hesaplanır.

Bu değerler için optimallik kontrol edilir. Eğer tüm kısıtlar sağlanıyorsa optimum çözüm bulunmuş olur. Sağlanmıyorsa, üçüncü maksimum fark için işlemler tekrarlanır. Optimum nokta bulunana kadar maksimum farklar incelenmeye devam edilir.

4.7. Omule(1985) Tarafından Geliştirilen Yöntem

Omule tarafından geliştirilen bu yöntem, örnek çapının paylaşılması probleminin çok aşamalı bir karar süreci olarak ele alınması temeline dayanmaktadır. Omule, tabakalardan seçilecek örnek çaplarının belirlenmesi sürecini, çok aşamalı bir süreç olarak düşünmüş ve çözüm için dinamik programlama yöntemini kullanmıştır[Omule, 1985]. Her aşama, 1. tabakadan n_1 birimin seçilmesi, 2. tabakadan n_2 birimin seçilmesi, ..., L . tabakadan n_L birimin seçilmesi şeklinde oluşturulmuştur. Dolayısıyla, çok aşamalı karar modeli aşağıdaki gibi formüle edilebilir: h . tabaka h . aşama ve n_h ise h . aşamadaki karar değişkeni olsun. h . aşama için örnek ortalaması istatistiğinin varyans büyüklüğü $Y_{j,h}$, $(h-1)$. aşama için örnek ortalaması istatistiğinin varyans büyüklüğü $Y_{j,h-1}$ olmak üzere; $Y_{j,h}$ ve $Y_{j,h-1}$ arasındaki ilişki aşağıdaki geçiş fonksiyonu ile tanımlanır.

$$Y_{j,h} = Y_{j,h-1} + W_h^2 S_{hj}^2 \left(\frac{1}{n_h} - \frac{1}{N_h} \right)$$

Buradan yola çıkarak, problemin formülasyonu aşağıdaki gibidir:

Amacımız her tabaka için arzu edilen varyans kısıtları altında, doğrusal maliyet fonksiyonunu minimum yapmaktır.

$$\min(c) = \sum_{h=1}^L c_h n_h$$

$$W_h^2 S_{hj}^2 \left(\frac{1}{n_h} - \frac{1}{N_h} \right) \leq v_j$$

$$2 \leq n_h \leq N_h$$

Bu durumda, bu problemin dinamik programlama ile çözümü iki aşamada ele alınır.

- 1- Amaç fonksiyonu ve kısıtlar durum bileşenlerine yani tüm h 'ler için birbirinden bağımsız olan n_h fonksiyonlarına ayrılır. Bu ayırım zaten mevcuttur, çünkü, her n_h karar değişkeni, amaç fonksiyonu ve kısıtlarda ayrı birer ek terim olarak ortaya çıkar.
- 2- L karar değişkeninde oluşan problem, L tane duruma karşılık gelecek biçimde, L tane problem olarak ele alınır. Bu problemlerin her birinde yalnızca bir tane n_h karar değişkeni yer alır. Dolayısıyla, h . aşamaya ait karar probleminde, n_h optimum örnek çapının elde edilmeye çalışıldığı belirtilebilir. n_h 'lar aşağıdaki ifade sağlanacak şekilde elde edilir.

$$f_h(y_h) = \min\{c_h n_h + f_{h-1}(y_{h-1})\}$$

$$2 \leq n_h \leq N_h \quad \forall y_h = [0 \leq y_{h1} \leq v_1, \dots, 0 \leq y_{Lp} \leq v_p]$$

Yukarıdaki tüm y_{h-1} terimleri $y_{j,h} = y_{j,h-1} + W_h^2 S_{hj}^2 \left(\frac{1}{n_h} - \frac{1}{N_h} \right)$ eşitliğinden

bulunmuştur ve genellikle $f_0(y_0) = 0$ alır. Dinamik programlama, esas olarak birbirine bağımlı birçok değişken içeren, çok aşamalı bir karar sürecini ele alır ve bunu, optimizasyon yöntemleri ile sonucun daha kolay bulunmasını sağlayan bir forma dönüştürür. Bununla birlikte, dinamik programlama ile bulunan sonuçların genellikle etkin olmadığı görülmüştür. Tabaka sayısı arttıkça, dinamik programlama yaklaşımının uygulanması zorlaşmaktadır.

4.8. Khan ve Ahsan(2003) Tarafından Geliştirilen Yöntem

Khan ve Ahsan çok değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemede örnek çapının tabakalara paylaştırılması için, doğrusal maliyet kısıtını göz önüne almışlardır. Bunu yaparken, değişkenlere ait örnek ortalaması istatistiğinin varyansını ağırlıklandırmış ve p değişken için ağırlıklandırılmış toplam varyansı minimize etmeye çalışmışlardır. Ayrıca modellenen problemin çözümünde, doğrusal olmayan programlama yaklaşımlarından biri olan dinamik programlamayı kullanmışlardır[Khan ve Ahsan, 2003]. Problemin formülasyonu aşağıdaki gibidir:

L tabakanın her birinde p tane değişken olduğu varsayılın. j . değişken için örnek ortalaması istatistiğinin varyansı aşağıdaki gibidir.

$$V_j(\bar{x}_j) = \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_{hj}^2}{n_h} - \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_{hj}^2}{N_h} \quad j = 1, 2, \dots, p$$

Burada önemli olan nokta, tabaka içi yapının homojen olmasıdır. Eğer tabaka içindeki değişkenlerden biri kendi içinde homojen değil ise bu durum S_{hj}^2 değerinin ve dolayısıyla $V_j(\bar{x}_j)$ değerinin artmasına neden olacaktır. $V_j(\bar{x}_j)$ değerinin artması ise, duyarlılıkta azalışa neden olacaktır. Khan ve Ahsan, duyarlılıktaki azalışı engellemek için, kendi içinde heterojen olan j . değişkene maksimum ağırlık w_j 'nin atanmasını önermişlerdir.

$$w_j = \max(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{Lj}) \quad (4.43)$$

a_{hj} ; h . tabakadaki j . değişkene ait ağırlıktır ve bu ağırlık h . tabakadaki j .

değişkenin tabaka varyansı S_{hj}^2 ile orantılı olarak elde edilir. $\sum_{j=1}^p a_{hj} = 1$ olmak üzere,

$$a_{hj} = \frac{S_{hj}^2}{\sum_{j=1}^p S_{hj}^2} \quad j = 1, 2, \dots, p \text{ ve } h = 1, 2, \dots, L \quad (4.44)$$

Amaç, doğrusal maliyet kısıtı altında, daha heterojen olan değişkenin varyansına daha yüksek ağırlığı atayıp, elde edilen amaç fonksiyonunu minimum yapmaktır.

Problem aşağıdaki gibi modellenir:

$$\min \sum_{j=1}^p w_j V_j(\bar{x}_j) = \sum_{j=1}^p w_j \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_{hj}^2}{n_h} - \sum_{j=1}^p w_j \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_{hj}^2}{N_h} \quad (4.45)$$

$$c_0 + \sum_{h=1}^L n_h c_h \leq c$$

$$2 \leq n_h \leq N_h$$

Amaç fonksiyonunun ikinci terimi sabit olduğundan yani n_h 'dan bağımsız olduğundan ihmal edilebilir. Ayrıca, Eş. 4.45'deki amaç fonksiyonunun ikinci terimi ihmal edilip sadeleştirmeler yapılmıca aşağıdaki gibi tekrar ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} \min \sum_{j=1}^p w_j V_j(\bar{x}_j) &= \sum_{j=1}^p w_j \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_{hj}^2}{n_h} - \sum_{j=1}^p w_j \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_{hj}^2}{N_h} \\ \min \sum_{j=1}^p w_j V_j(\bar{x}_j) &= \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2}{n_h} \sum_{j=1}^p w_j S_{hj}^2 \end{aligned} \quad (4.46)$$

Eş. 4.46'da, $\sum_{h=1}^L w_j S_{hj}^2 = A_h^2$ yerine yazılırsa, Eş. 4.45'deki model aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\min \sum_{j=1}^p w_j V_j(\bar{x}_j) = \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 A_h^2}{n_h} \quad (4.47)$$

$$\sum_{h=1}^L n_h c_h \leq c - c_0 = C_0$$

$$2 \leq n_h \leq N_h$$

Eş. 4.47'deki gibi modellenen problemin çözümü için Khan ve Ahsan dinamik programlama yöntemini kullanmışlardır. Eş. 4.47'deki modelin çözümü için yöntem aşağıdaki gibidir:

Eş. 4.47'deki amaç fonksiyonu ve kısıtlar her bir n_h değeri için ayrılabilir. Problem çok aşamalı karar verme problemi olarak ele alınır. Dinamik programlama bu modeli, L aşamalı tek değişkenli bir problem olarak ele alabilir. k . aşama ($k = 1, 2, \dots, L$), k . tabaka için optimum paylaştırma n_k^* 'ı sağlar. Bu durum ilk k tabaka için göz önüne alınırsa;

$$\min \sum_{h=1}^k \frac{W_h^2 A_h^2}{n_h} \quad (4.48)$$

$$\sum_{h=1}^k n_h c_h \leq C_k$$

$$2 \leq n_h \leq N_h \quad h = 1, 2, \dots, k$$

olarak yazılabilir. Burada, C_k değeri, ilk k tabaka için gerekli olan bütçedir ve araştırmanın tamamı için ayrılan bütçe C_0 değerinden küçüktür ($C_k \leq C_0$, $k \leq L$).

Eş. 4.48'deki modelin amaç fonksiyonu $f(C_k)$ ile tanımlanırsa;

$$f(C_k) = \min \sum_{h=1}^k \frac{W_h^2 A_h^2}{n_h} \quad (4.49)$$

$$\sum_{h=1}^k n_h c_h \leq C_k$$

$$2 \leq n_h \leq N_h \quad h = 1, 2, \dots, k$$

olarak yazılabilir. Eş. 4.47'nin, Eş. 4.49'daki gibi tanımlanması ile $f(C_k)$ 'nin bulunmasıyla birlikte $f(C_L)$ tekrarlanarak bulunabilir.

$$\sum_{h=1}^L n_h c_h = \sum_{h=1}^k n_h c_h + \sum_{h=k+1}^L n_h c_h \leq C_0$$

Eş. 4.49'daki problemin ikinci kısıtından, n_h yerine en küçük değeri olan 2 yazılırsa;

$$2 \sum_{h=1}^L c_h = 2 \sum_{h=1}^k c_h + 2 \sum_{h=k+1}^L c_h \leq C_0 \quad \Rightarrow \quad 2 \sum_{h=1}^k c_h \leq C_0 - 2 \sum_{h=k+1}^L c_h \quad (4.50)$$

$$\sum_{h=1}^k n_h c_h = 2 \sum_{h=1}^k c_h \leq C_k \quad (4.51)$$

$C_k \leq C_0$ olduğu bilindiğinden, Eş. 4.50 ve Eş. 4.51 yardımı ile aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$2 \sum_{h=1}^k c_h \leq C_k \leq C_0 - 2 \sum_{h=k+1}^L c_h \quad (4.52)$$

Buradan model aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$f(C_k) = \min \left[\frac{W_k^2 A_k^2}{n_k} + \sum_{h=1}^{k-1} \frac{W_h^2 A_h^2}{n_h} \right] \quad (4.53)$$

$$\sum_{h=1}^{k-1} n_h c_h \leq C_k - n_k c_k$$

$$2 \leq n_h \leq N_h \quad h = 1, 2, \dots, k$$

n_k üzerine bir değer sabitlemek için;

$$2 \leq n_k \leq \min(C'_k, N_k) \quad (4.54)$$

Eş. 4.54’de, C_k' değeri, k . tabaka için elde edilebilir bütçe C_k altında bu tabakadan seçilebilecek maksimum örnek çapıdır ve C_k' değeri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$C_k' = \frac{C_k - 2 \sum_{h=1}^{k-1} c_h}{c_k} \quad (4.55)$$

$f(C_k)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi verilir.

$$f(C_k) = \frac{W_k^2 A_k^2}{n_k} + \min \left[\sum_{h=1}^{k-1} \frac{W_h^2 A_h^2}{n_h} \right] \quad (4.56)$$

$$\sum_{h=1}^{k-1} n_h c_h \leq C_k - n_k c_k$$

$$2 \leq n_h \leq N_h \quad h = 1, 2, \dots, k-1$$

Eş. 4.56’daki;

$$\min \left[\sum_{h=1}^{k-1} \frac{W_h^2 A_h^2}{n_h} \right] \left| \sum_{h=1}^{k-1} n_h c_h \leq C_k - n_k c_k \quad \text{ve} \quad 2 \leq n_h \leq N_h, h = 1, 2, \dots, k-1 \right.$$

terimi $f(C_{k-1})$ ’dir. Sonuç olarak, eğer Eş. 4.52’yi sağlayan tüm mümkün C_{k-1} değerleri için $f(C_{k-1})$ biliniyorsa, Eş. 4.48 için $f(C_1), f(C_2), \dots, f(C_k)$ fonksiyonları aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$f(C_k) = \min_{2 \leq n_k \leq \min(C_k, N_k)} \left[\frac{W_k^2 A_k^2}{n_k} + \sum_{h=1}^{k-1} \frac{W_h^2 A_h^2}{n_h} \right] \quad (4.57)$$

Eş. 4.57’nin çözümü için başlangıçta $f(C_0) = 0$ alınır. Eş. 4.47 modelinin çözümü, Eş. 4.57 modelinin çözümüne denktir. Eş. 4.57 her $k = 1, 2, \dots, L$ için sırasıyla

çözülürse, $f(C_L)$ çözülmüş olur. $f(C_L)$ 'den n_L^* , $f(C_{L-1})$ 'den n_{L-1}^* ve bu şekilde devam edilerek $f(C_1)$ 'den n_1^* optimum paylaştırmaları elde edilir.

4.1. Örnek

$N = 4190$ olan bir yığın 4 tabakaya ayrılmıştır ve her bir tabakada 2 değişken ile ilgilenilmektedir. Tabakalardan birim seçme maliyetinin her tabaka için 1TL. olduğunu ve araştırma için 1000TL. ayrıldığını varsayalım. Veriler aşağıdaki gibi iken bu bütçe kısıtı altında her bir tabakadan kaç birimlik örnek seçilmelidir?

h	N_h	W_h	s_{h1}^2	s_{h2}^2
1	1419	0.3387	4817.72	130121.15
2	619	0.1477	6251.26	7613.52
3	1253	0.2990	3066.16	1456.40
4	899	0.2146	56207.25	66977.72

Çözüm

$$a_{hj} = \frac{s_{hj}^2}{\sum_{j=1}^p s_{hj}^2}$$

$$a_{11} = \frac{4817.72}{4817.72 + 130121.15} = 0.0357 \quad a_{12} = \frac{130121.15}{4817.72 + 130121.15} = 0.9643$$

$$a_{21} = \frac{6251.26}{6251.26 + 7613.52} = 0.4509 \quad a_{22} = \frac{7613.52}{6251.26 + 7613.52} = 0.5491$$

$$a_{31} = \frac{3066.16}{3066.16 + 1456.40} = 0.6780 \quad a_{32} = \frac{1456.40}{3066.16 + 1456.40} = 0.3220$$

$$a_{41} = \frac{56207.25}{56207.25 + 66977.72} = 0.4563 \quad a_{42} = \frac{66977.72}{56207.25 + 66977.72} = 0.5437$$

$$a_{hj} = \begin{pmatrix} 0.0357 & 0.9643 \\ 0.4509 & 0.5491 \\ 0.6780 & 0.3220 \\ 0.4563 & 0.5437 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Buradan tabaka varyanslarıyla orantılı olarak j . değişkene atanan ağırlıklar;

$$w_1 = \max(a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41}) = 0.6780$$

$$w_2 = \max(a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{42}) = 0.9643$$

olarak bulunur. $A_h^2 = \sum_{j=1}^2 w_j s_{hj}^2$ olmak üzere, her tabaka için aşağıdaki gibi bulunur.

$$A_1^2 = 0.6780(4817.72) + 0.9643(130121.15) = 128742.2391$$

$$A_2^2 = 0.6780(6251.26) + 0.9643(7613.52) = 11580.0716$$

$$A_3^2 = 0.6780(3066.16) + 0.9643(1456.40) = 3483.2630$$

$$A_4^2 = 0.6780(56207.25) + 0.9643(66977.72) = 102695.1309$$

Amaç fonksiyonu ve kısıtlar aşağıdaki gibi yazılır.

$$\min z = \min \sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 A_h^2}{n_h} = \min \left[\frac{14769.0123}{n_1} + \frac{252.6226}{n_2} + \frac{311.4072}{n_3} + \frac{4729.4353}{n_4} \right]$$

$$\sum_{h=1}^L c_h n_h \leq C_0 \Rightarrow n_1 + n_2 + n_3 + n_4 \leq 1000$$

$$2 \leq n_h \leq N_h \Rightarrow 2 \leq n_1 \leq 1419$$

$$2 \leq n_2 \leq 619$$

$$2 \leq n_3 \leq 1253$$

$$2 \leq n_4 \leq 899$$

$k = 1, 2, 3, 4$ için C_k değerleri;

$$C_4 = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 1000$$

$$C_3 = C_4 - n_4 \Rightarrow 6 \leq C_3 \leq 998$$

$$C_2 = C_3 - n_3 \Rightarrow 4 \leq C_2 \leq 996$$

$$C_1 = C_2 - n_2 \Rightarrow 2 \leq C_1 \leq 994$$

elde edilir. Başlangıç için $f(C_0) = 0$ olmak üzere;

$k = 1$ için;

$$f(C_1) = \min_{2 \leq n_1 \leq \min(C_1, N_1)} \left[\frac{14769.0123}{n_1} + f(C_0) \right]$$

$$C'_k = \frac{C_k - 2 \sum_{h=1}^{k-1} C_h}{C_k} \Rightarrow C'_1 = \frac{C_1 - 0}{1} = C_1$$

$$2 \leq n_1 \leq \min(C_1, 1419) \Rightarrow 2 \leq n_1 \leq C_1$$

$$f(C_1) = \min_{2 \leq n_k \leq C_1} \left[\frac{14769.0123}{n_1} \right]$$

$f(C_1)$ 'in değerinin minimum olması için n_1 'in en büyük değerini alması

gerektiğinden ve $2 \leq n_1 \leq C_1$ olduğundan $n_1^* = C_1$ 'dir ve $f(C_1) = \frac{14769.0123}{C_1}$ olur.

$k = 2$ için;

$$f(C_2) = \min_{2 \leq n_2 \leq \min(C_2, N_2)} \left[\frac{252.6226}{n_2} + f(C_1) \right]$$

$$f(C_2) = \min_{2 \leq n_2 \leq \min(C_2, 619)} \left[\frac{252.6226}{n_2} + \frac{14769.0123}{C_1} \right]$$

$$C'_k = \frac{C_k - 2 \sum_{h=1}^{k-1} c_h}{c_k} \Rightarrow C'_2 = \frac{C_2 - 2c_1}{1} = C_2 - 2$$

$$2 \leq n_2 \leq \min(C_2 - 2, 619)$$

$$f(C_2) = \min_{2 \leq n_2 \leq \min(C_2 - 2, 619)} \left[\frac{252.6226}{n_2} + \frac{14769.0123}{C_2 - n_2} \right]$$

$f(C_2)$ 'in klasik optimizasyon yöntemleri ile çözülmesiyle $n_2^* = 0.1156591652C_2$ 'olarak bulunur ve

$$f(C_2) = \frac{252.6226}{0.1156591652C_2} + \frac{14769.0123}{C_2 - 0.1156591652C_2} = \frac{18884.78713}{C_2} \text{ olur.}$$

$k = 3$ için;

$$f(C_3) = \min_{2 \leq n_3 \leq \min(C_3, N_3)} \left[\frac{311.4072}{n_3} + f(C_2) \right]$$

$$f(C_3) = \min_{2 \leq n_3 \leq \min(C_3, 1253)} \left[\frac{311.4072}{n_3} + \frac{18884.78713}{C_2} \right]$$

$$C'_k = \frac{C_k - 2 \sum_{h=1}^{k-1} c_h}{c_k} \Rightarrow C'_3 = \frac{C_3 - 2(c_1 + c_2)}{1} = C_3 - 4$$

$$2 \leq n_3 \leq \min(C_3 - 4, 1253)$$

$$f(C_3) = \min_{2 \leq n_3 \leq \min(C_3 - 4, 1253)} \left[\frac{311.4072}{n_3} + \frac{18884.78713}{C_3 - n_3} \right]$$

$f(C_3)$ 'ün klasik optimizasyon yöntemleri ile çözülmesiyle $n_3^* = 0.1137994802C_3$ 'olarak bulunur ve

$$f(C_3) = \frac{311.4072}{0.1137994802C_3} + \frac{18884.78713}{C_3 - 0.1137994802C_3} = \frac{24046.29069}{C_3} \text{ olur.}$$

$k = 4$ için;

$$f(C_4) = \min_{2 \leq n_4 \leq \min(C_4, N_4)} \left[\frac{4729.4353}{n_4} + f(C_3) \right]$$

$$f(C_4) = \min_{2 \leq n_4 \leq \min(C_4, 899)} \left[\frac{4729.4353}{n_4} + \frac{24046.29069}{C_3} \right]$$

$$C_k' = \frac{C_k - 2 \sum_{h=1}^{k-1} c_h}{c_k} \Rightarrow C_4' = \frac{C_4 - 2(c_1 + c_2 + c_3)}{1} = C_3 - 6$$

$$2 \leq n_4 \leq \min(C_3 - 6, 899)$$

$$f(C_4) = \min_{2 \leq n_4 \leq \min(C_4 - 6, 899)} \left[\frac{4729.4353}{n_4} + \frac{24046.29069}{C_4 - n_4} \right]$$

$f(C_4)$ 'ün klasik optimizasyon yöntemleri ile çözülmesiyle $n_4^* = 307.2329647$ olarak elde edilir. $n_4^* = 307.2329647$ iken $f(C_4) = 50.1041461$ 'dir.

$$\Rightarrow C_3 = C_4 - n_4 = 1000 - 307.2329647 = 692.7670353$$

$$n_3^* = 0.1137994801C_3 = 78.83652838$$

$$\Rightarrow C_2 = C_3 - n_3 = 692.7670353 - 78.83652838 = 613.9305069$$

$$n_2^* = 0.1156591652C_2 = 71.0066898$$

$$\Rightarrow C_1 = C_2 - n_2 = 613.9305069 - 71.0066898 = 542.9238171$$

$$n_1^* = C_1 = 542.9238171$$

Buradan; $n_1^* = 543$, $n_2^* = 71$, $n_3^* = 79$, $n_4^* = 307$ ve $\min z = 50.1042$ olarak elde edilir.

5. ÇOK DEĞİŞKENLİ TABAKALI TESADÜFİ ÖRNEKLEMEDE TABAKALARDAN SEÇİLECEK ÖRNEK ÇAPININ BELİRLENMESİ İÇİN YENİ BİR MODEL

Bu bölümde, tabakalarda birden fazla değişken ile ilgilenildiğinde yani çok değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemede, yığından seçilen n çaplı örneğin tabakalara optimum şekilde paylaştırılmasında kullanılan klasik modele alternatif bir model önerilmiştir. Doğrusal olmayan maliyet kısıtı göz önüne alınarak, klasik model ile önerilen model yapılan simülasyon çalışması ile karşılaştırılmış ve hangi koşullar altında kullanılan modellerin örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yaptığı ve hangi modelin tabakalardan seçilmesi gereken örnek çaplarını daha optimum şekilde belirlediği incelenmiştir.

Dördüncü bölümde ele alındığı gibi literatürde, çok değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemede tabakalardan seçilecek örnek çapının belirlenmesine ilişkin pek çok çalışma yapılmıştır. Bununla birlikte, bu çalışmalarda ya maliyet kısıtı göz önüne alınmamış ya da alınsa bile doğrusal yapıdaki maliyet fonksiyonu ile çalışılmıştır. Maliyet fonksiyonunun kullanıldığı modellerde ya doğrusal maliyet kısıtı altında varyansın minimum yapılması ya da varyans kısıtı altında doğrusal maliyet fonksiyonunun minimum yapılması amaçlanmıştır. Ayrıca Folks ve Antle(1965) ile Khan ve Ahsan(2003) tarafından geliştirilen yöntemler hariç diğer çalışmalar aynı modelin farklı biçimlerde çözümlenmesi mantığına dayanmaktadır. Folks ve Antle(1965) ile Khan ve Ahsan(2003) ise modele ağırlıklar eklemişlerdir. Bununla birlikte, Folks ve Antle'nin(1965) yöntemlerinde ağırlıkların belirlenmesi tabaka içi yapıyı yansıtmayacak biçimde araştırmacının inisiyatifine bırakılmıştır. Literatürdeki çalışmalar içinde, Khan ve Ahsan'ın(2003) sundukları alternatif model hem modele eklenen tabaka içi yapıyı yansıtan ağırlıkların kullanılması hem de tüm değişkenlere ait toplam varyansı aynı anda minimize etmeye çalışması açısından diğer yöntemlere göre üstünlük göstermektedir. Bununla birlikte, bu yöntemde de doğrusal yapıdaki maliyet fonksiyonu kullanılmıştır.

Bu bölümde, hem doğrusal olmayan maliyet kısıtını göz önüne alan hem de literatürde kullanılan modelden farklı olan yeni bir model göz önüne alınarak, tabakalardan seçilecek örnek çapları belirlenmeye çalışılmıştır. Tek değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemede kullanılan, Bretthauer ve ark.(1999) ile Chernyak(2001) tarafından önerilen doğrusal olmayan maliyet kısıtları çok değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemeyle adapte edilmiş ve tabaka içindeki değişkenler arasındaki ilişki yapısı göz önünde bulundurularak elde edilen ağırlıkların modele eklenmesi ile klasik modele alternatif yeni bir model sunulmuştur. Bu modelin özelliği, çok değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemede, doğrusal olmayan maliyet fonksiyonunun kullanılması ve Khan ve Ahsan(2003) modeline benzer biçimde tabaka içi yapıyı yansıtacak ağırlıkların modelde yer almasıdır. Maliyet fonksiyonunun elemanları ve değişim katsayısı aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

c_0 : Sabit giderler

c_h : h . tabakadan bir birim seçme maliyeti ($h = 1, 2, \dots, L$)

t_h : h . tabakaya seyahat maliyeti ($h = 1, 2, \dots, L$)

α : Tabakadan tabakaya seyahat etmenin maliyet fonksiyonu üzerine etkisi

$C_{hj} = \frac{S_{hj}}{\bar{X}_{hj}}$: h . tabakadaki j . değişkene ait değişim katsayısı ($h = 1, \dots, L, j = 1, \dots, p$)

5.1. Çok Değişkenli Tabakalı Tesadüfi Örneklemede Tabakalardan Seçilecek Örnek Çapının Belirlenmesi İçin Önerilen Yeni Modelin Oluşturulması

Araştırmalarda tabakalı tesadüfi örnekleme kullanıldığı zaman, araştırmacının üstesinden gelmesi gereken üç temel problem olduğunu belirtmiştik. Bu problemler tabaka sayısının, tabaka sınırlarının ve tabakalardan seçilecek örnek çaplarının belirlenmesidir. Bu çalışmada amaç, tabakalarda birden fazla değişken olduğunda, tabakalardan seçilecek örnek çapının belirlenmesidir. Araştırma için ayrılan sabit bir bütçe kısıtı altında, değişkenlere ait örnek ortalaması istatistiğinin toplam varyansını minimize etmek için doğrusal olmayan programlama modeli formüle edilecektir.

Her bir tabakada ilgilenilen p değişken olduğu varsayımı altında, her bir j . değişken için örnek ortalaması istatistiğinin varyansının tahmini, j . değişken için örnek ortalaması istatistiğinin varyansı için yansız birer tahmin edicidir.

$$E(\hat{V}_j(\bar{x}_j)) = V_j(\bar{x}_j) \quad j = 1, 2, \dots, p$$

Tabakalı tesadüfi örneklemede, yapılan tahminin hassaslığının yüksek olması, tabaka içi yapı ile birebir ilişkilidir. Tabaka içi yapı ne kadar homojen olursa tabaka içi varyans o kadar küçük olacağından örnek ortalaması istatistiğinin varyansı o denli küçük olacaktır ve yapılan tahminlerin hassaslığı artacaktır. Bununla birlikte, tabaka içi yapı heterojen olursa, tabaka içi varyans büyüyeceğinden, örnek ortalaması istatistiğinin varyansı büyüyecek ve yapılan tahminin hassaslığı o derece azalacaktır.

Çok değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemede, her bir tabakada p tane değişken olduğundan, tabaka içi yapı ile ilgili olarak bu p değişkenin her biri farklı özellik gösterebilir. Aynı tabaka içinde i . değişkene göre tabaka içi yapı homojen iken, j . değişkene göre heterojen olabilir. Bu durumda, yapılan tahminlerin hassaslığını arttırmak ve tabakalardan seçilecek örnek çapını değişkenlere ait örnek ortalaması istatistiğinin toplam varyansını minimum yapacak biçimde belirleyebilmek için, aynı tabakadaki farklı değişkenlerin tabaka içi yapılarının modele yansıtılması gerekmektedir. Tabaka içi yapı homojen olduğunda, küçük çaplı örnek tabaka hakkında gerçeğe yakın tahminler yapmak için yeterli olurken, tabaka içi yapı heterojen olduğunda aynı duyarlılıkta tahminler yapmak için çok daha fazla örnek çapı ile çalışmak gerekmektedir.

Çok değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemede, diğer bir göz önüne alınması gereken nokta ise tabaka içindeki değişkenlerin ilişkili olup olmadığıdır. Değişkenler arasında ilişki yapısı göz önüne alınırken ilişkinin yönü ile değil şiddeti ile ilgilenmek uygun olacaktır. Tabakalı tesadüfi örnekleme, yığının normal dağıldığı varsayımı altında kullanıldığından değişkenler arasındaki ilişki kontrol edilir iken Pearson korelasyon katsayısı kullanılacaktır. h . tabakadaki i . ve j . değişkenler arasındaki korelasyon

ρ_{hij} mutlak değerce 0.67'den büyük ise bu iki değişken arasında istatistiksel olarak bir ilişki olduğu söylenir. Değişkenler arasında ilişki olmasının tabakalardan seçilecek örnek çapının belirlenmesi problemine katkısı, birbiri ile ilişkili değişkenleri arındırarak modeldeki değişken sayısını azaltmaya yöneliktir.

Çok değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemede, tabakalardan seçilecek örnek çapının belirlenmesi probleminde değişkenler arasındaki ilişkiden yola çıkarak, ilişkili değişkenler var ise bu değişkenlerden tabaka içi yapısı daha heterojen olanını modelde tutmak, daha homojen olanını modele dahil etmemek uygun olacaktır. Değişkenlerin tabaka içindeki homojenlik ya da heterojenlik durumuna değişim katsayısından faydalanılarak bakılmaktadır. Bu düşüncenin altında, tabaka içi yapısı heterojen olan değişken için hassaslık sağlanıyor ise tabaka içi yapısı homojen olan değişken için bu hassaslığın zaten sağlanıyor olması mantığı yatmaktadır.

İlişkili değişkenlerden değişim katsayısı büyük olan yani tabaka içi yapısı daha heterojen olan, ilişkisiz diğer değişkenlerin ise hepsi modele dahil edildikten sonra modelde değişim katsayıları ile orantılı olarak ağırlıklandırılarak tabakalardan seçilecek örnek çapının belirlenmesi amaçlanmaktadır. Böylece, hem ilişkili değişkenler arındırılarak değişken sayısını azaltırız hem de değişim katsayıları ile orantılı ağırlıklar kullanılarak tabaka içi yapı değişkenler bazında modele yansıtılmış olur.

Klasik modele alternatif olarak önerilen yeni modelin nasıl oluşturulduğu ve ağırlıkların belirlenmesi $h=2$ tabaka ve her bir tabakada $p=3$ değişken olması durumunda, tabakalardaki değişkenler ilişkisiz, bazıları ilişkili ve hepsinin ilişkili olduğu durumlar için aşağıda verilmiştir:

1.Durum: Tabaka içindeki değişkenlerin ilişkili olmadığı durumda problemin modellenmesi

$\hat{\rho}_{hij}$, h . tabakadaki i . ve j . değişkenler arasındaki korelasyon tahmini olmak üzere

1.tabakada $|\hat{\rho}_{112}|$, $|\hat{\rho}_{113}|$ ve $|\hat{\rho}_{123}|$ 0.67'den küçük ise bu tabakadaki bütün değişkenler ilişkisizdir. Benzer biçimde, 2.tabakada $|\hat{\rho}_{212}|$, $|\hat{\rho}_{213}|$ ve $|\hat{\rho}_{223}|$ 0.67'den küçük ise bu tabakadaki bütün değişkenler ilişkisizdir. Tabakalardaki bütün değişkenler istatistiksel olarak ilişkisiz olduğundan, her bir değişken tabaka içi yapısıyla orantılı olarak yani değişim katsayısı ile orantılı olarak modelde yer alacaktır.

a_{hj} : h . tabakadaki j . değişkene ilişkin ağırlık katsayısı

n_{hj} : h . tabakada j . değişken için seçilmesi gereken örnek çapı

n_h : h . tabakadan seçilmesi gereken örnek çapı

$c_{hj} = \frac{S_{hj}}{\bar{X}_{hj}}$: h . tabakadaki j . değişkene ait değişim katsayısının tahmini olmak üzere

$$a_{11} = \frac{c_{11}}{c_{11} + c_{12} + c_{13}}, \quad a_{12} = \frac{c_{12}}{c_{11} + c_{12} + c_{13}}, \quad a_{13} = \frac{c_{13}}{c_{11} + c_{12} + c_{13}} \text{ ve } \sum_{j=1}^p a_{1j} = 1$$

$$a_{21} = \frac{c_{21}}{c_{21} + c_{22} + c_{23}}, \quad a_{22} = \frac{c_{22}}{c_{21} + c_{22} + c_{23}}, \quad a_{23} = \frac{c_{23}}{c_{21} + c_{22} + c_{23}} \text{ ve } \sum_{j=1}^p a_{2j} = 1$$

ağırlıkları belirlenir. Bu ağırlıklar yardımı ile, 1. ve 2. tabakadan seçilecek örnek çapları ve yığından seçilecek toplam örnek çapı aşağıdaki formda yazılabilir.

$$n_1 = \sum_{j=1}^p a_{1j} n_{1j} = a_{11} n_{11} + a_{12} n_{12} + a_{13} n_{13}$$

$$n_2 = \sum_{j=1}^p a_{2j} n_{2j} = a_{21} n_{21} + a_{22} n_{22} + a_{23} n_{23}$$

$$n = \sum_{j=1}^p \sum_{h=1}^L a_{hj} n_{hj} = \sum_{j=1}^p a_{1j} n_{1j} + \sum_{j=1}^p a_{2j} n_{2j} = a_{11} n_{11} + a_{12} n_{12} + a_{13} n_{13} + a_{21} n_{21} + a_{22} n_{22} + a_{23} n_{23}$$

Belirlenen ağırlıklar, tabaka içinde daha heterojen olan değişkene daha büyük ağırlığı, daha homojen değişkene ise daha küçük ağırlığı verecek şekilde belirlenmiş olur. İki tabaka ve her bir tabakada üç değişken var iken değişkenler arasında ilişki

yoksa problemimizde 6 bilinmeyen olur. Buradan, çok değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemede, doğrusal olmayan maliyet kısıtı altında, değişkenlere ait örnek ortalaması istatistiğinin toplam varyansını minimum yapacak, tabakalardan seçilecek örnek çaplarının belirlenmesine ilişkin model aşağıdaki gibi oluşturulur.

Amaç, değişkenlere ait örnek ortalaması istatistiğinin varyanslarının ortalamasını minimum yapmaktır.

$$\text{Amaç fonksiyonu : } \min \left(\frac{1}{p} \sum_{j=1}^p V_j(\bar{x}_j) \right)$$

Amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$\min \left[\frac{1}{p} \frac{1}{N^2} \left[\begin{aligned} & N_1^2 \frac{N_1 - (a_{11}n_{11} + a_{12}n_{12} + a_{13}n_{13})}{N_1} \frac{S_{11}^2}{a_{11}n_{11} + a_{12}n_{12} + a_{13}n_{13}} \\ & + N_2^2 \frac{N_2 - (a_{21}n_{21} + a_{22}n_{22} + a_{23}n_{23})}{N_2} \frac{S_{21}^2}{a_{21}n_{21} + a_{22}n_{22} + a_{23}n_{23}} \\ & + N_1^2 \frac{N_1 - (a_{11}n_{11} + a_{12}n_{12} + a_{13}n_{13})}{N_1} \frac{S_{12}^2}{a_{11}n_{11} + a_{12}n_{12} + a_{13}n_{13}} \\ & + N_2^2 \frac{N_2 - (a_{21}n_{21} + a_{22}n_{22} + a_{23}n_{23})}{N_2} \frac{S_{22}^2}{a_{21}n_{21} + a_{22}n_{22} + a_{23}n_{23}} \\ & + N_1^2 \frac{N_1 - (a_{11}n_{11} + a_{12}n_{12} + a_{13}n_{13})}{N_1} \frac{S_{13}^2}{a_{11}n_{11} + a_{12}n_{12} + a_{13}n_{13}} \\ & + N_2^2 \frac{N_2 - (a_{21}n_{21} + a_{22}n_{22} + a_{23}n_{23})}{N_2} \frac{S_{23}^2}{a_{21}n_{21} + a_{22}n_{22} + a_{23}n_{23}} \end{aligned} \right] \right]$$

$$\min \left[\frac{1}{p} \frac{1}{N^2} \left[\begin{aligned} & N_1^2 \frac{N_1 - (a_{11}n_{11} + a_{12}n_{12} + a_{13}n_{13})}{N_1} \frac{S_{11}^2 + S_{12}^2 + S_{13}^2}{a_{11}n_{11} + a_{12}n_{12} + a_{13}n_{13}} \\ & + N_2^2 \frac{N_2 - (a_{21}n_{21} + a_{22}n_{22} + a_{23}n_{23})}{N_2} \frac{S_{21}^2 + S_{22}^2 + S_{23}^2}{a_{21}n_{21} + a_{22}n_{22} + a_{23}n_{23}} \end{aligned} \right] \right]$$

Amaç fonksiyonunu en genel hali ile aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\min \left[\frac{1}{p} \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^L N_h^2 \frac{N_h - \sum_{j=1}^p a_{hj} n_{hj}}{N_h} \frac{\sum_{j=1}^p S_{hj}^2}{\sum_{j=1}^p a_{hj} n_{hj}} \right]$$

Kısıtlar ise aşağıdaki gibi ifade edilebilir. İlk kısıtımız araştırma için ayrılan sabit bir bütçenin aşılmaması kısıtı, ikinci kısıtımız ise tabakalardan seçilecek örnek çapının tabaka çapını geçmemesi kısıtıdır. Bununla birlikte, bütçe kısıtı tabakadan tabakaya seyahat etmenin maliyet fonksiyonu üzerine etkisini yansıtan α ($\alpha > 0$) sabitini içeren doğrusal olmayan yapıdaki maliyet kısıtıdır.

Maliyet kısıtı;

$$c_0 + t_1 (a_{11}n_{11} + a_{12}n_{12} + a_{13}n_{13})^\alpha + t_2 (a_{21}n_{21} + a_{22}n_{22} + a_{23}n_{23})^\alpha \leq c, \quad \alpha > 0$$

olarak ifade edilir. Maliyet kısıtını en genel hali ile aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$c_0 + \sum_{h=1}^L t_h \left(\sum_{j=1}^p a_{hj} n_{hj} \right)^\alpha \leq c$$

Örnek çapının, tabaka çapını aşmaması kısıtı;

$$n_{11} \leq N_1 \quad \text{ya da} \quad 2 \leq n_{11} \leq N_1$$

$$n_{12} \leq N_1 \quad \text{ya da} \quad 2 \leq n_{12} \leq N_1$$

$$n_{13} \leq N_1 \quad \text{ya da} \quad 2 \leq n_{13} \leq N_1$$

$$n_{21} \leq N_2 \quad \text{ya da} \quad 2 \leq n_{21} \leq N_2$$

$$n_{22} \leq N_2 \quad \text{ya da} \quad 2 \leq n_{22} \leq N_2$$

$$n_{23} \leq N_2 \quad \text{ya da} \quad 2 \leq n_{23} \leq N_2$$

olarak ifade edilir. Örnek çapının, tabaka çapını aşmaması kısıtını en genel hali ile aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$n_{hj} \leq N_h \quad h = 1, 2, \dots, L \quad j = 1, 2, \dots, p$$

ya da

$$2 \leq n_{hj} \leq N_h \quad h = 1, 2, \dots, L \quad j = 1, 2, \dots, p$$

Çok değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemede, tabakalardaki değişkenler arasında ilişki yok iken doğrusal olmayan maliyet kısıtı altında tabakalardan seçilecek örnek çapının belirlenmesi için klasik modele alternatif olarak önerilen yeni modelin en genel hali aşağıda verilmiştir.

$$\min \left[\frac{1}{p} \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^L N_h^2 \frac{N_h - \sum_{j=1}^p a_{hj} n_{hj}}{N_h} \frac{\sum_{j=1}^p S_{hj}^2}{\sum_{j=1}^p a_{hj} n_{hj}} \right]$$

$$c_0 + \sum_{h=1}^L t_h \left(\sum_{j=1}^p a_{hj} n_{hj} \right)^\alpha \leq c$$

$$n_{hj} \leq N_h \quad h = 1, 2, \dots, L \quad j = 1, 2, \dots, p$$

Klasik yöntem ile önerilen yöntem arasındaki farkları aşağıdaki gibi sıralayabiliriz:

- Klasik yöntem, önce maliyet kısıtı altında yığından seçilecek örnek çapını belirleyip daha sonra tabakalara paylaştırma temeline dayanmaktadır. Önerilen yöntem ise, önce tabakalardan seçilecek örnek çaplarını belirleyip sonra bu örnek çaplarının toplanması ile yığından seçilecek toplam örnek çapını belirlemektedir.
- Klasik yöntem, çok değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemede, tabakalardan seçilecek örnek çaplarını belirlerken, tek değişkenli tabakalı tesadüfi

örneklemede elde edilen formülleri kullanarak, önce tabakalarda tek değişken varmış gibi her bir değişken için ayrı ayrı örnek çapı bulup, daha sonra her değişken için bulunan örnek çaplarının ortalamasını alarak tabakalardan seçilecek ortalama bir örnek çapı bulmaktadır. Önerilen alternatif yöntem ise, değişkenlerin her birini tabaka içi yapılarına göre ağırlıklandırarak aynı anda modele yansıtmaktadır.

- Klasik yöntem, modellemede eşitlik kısıtlı bir optimizasyon problemi olarak ele alındığından $n_h \leq N_h$ kısıtını göz önüne alamamakta ve $n_h > N_h$ durumu ile karşılaşmakta, bununla birlikte önerilen yöntemde her bir değişkene ilişkin $n_{hj} \leq N_h$ kısıtı modele yansıtılmaktadır.

Klasik model ile önerilen modelin işleyişleri ve çözümleri ile ilgili sayısal örnek Örnek 5.1’de verilecektir.

2.Durum: Tabakalar içindeki değişkenlerin bazılarının ilişkili olduğu durumda problemin modellenmesi

1.tabakada $|\hat{\rho}_{112}|$ 0.67’den büyük, $|\hat{\rho}_{113}|$ ve $|\hat{\rho}_{123}|$ 0.67’den küçük ise bu tabakada 1. ve 2. değişkenler ilişkili, 1. ve 3. ile 2. ve 3. değişkenler ilişkisizdir. 2.tabakada $|\hat{\rho}_{212}|$, $|\hat{\rho}_{213}|$ 0.67’den küçük, $|\hat{\rho}_{223}|$ 0.67’den büyük ise bu tabakada 1. ve 2. ile 1. ve 3. değişkenler ilişkisiz, 2. ve 3. değişkenler ilişkilidir. Bu durumda, 1. tabaka için 1. ve 2. değişkenlerden yalnızca değişim katsayısı büyük olan değişken ile 3. değişken modelde değişim katsayıları ile orantılı ağırlıklarla yer alacaktır. Benzer biçimde, 2. tabakada 1. değişken ile 2. ve 3. değişkenlerden değişim katsayısı büyük olan modelde değişim katsayıları ile orantılı ağırlıklarla yer alacaktır. 1. tabaka için $c_{11} > c_{12}$, 2. tabaka için $c_{22} > c_{23}$ olduğunu varsayarsak, modelde yer alacak değişkenlerin ağırlıklarının belirlenmesi aşağıdaki gibidir:

1.tabaka için $c_{11} > c_{12}$ olduğundan 2. değişken modelde yer almaz ve $a_{12} = 0$ kabul edilir.

$$a_{11} = \frac{c_{11}}{c_{11} + c_{13}}, \quad a_{12} = 0, \quad a_{13} = \frac{c_{13}}{c_{11} + c_{13}} \text{ ve } a_{11} + a_{13} = 1$$

2.tabaka için $c_{22} > c_{23}$ olduğundan 3. değişken modelde yer almaz ve $a_{23} = 0$ kabul edilir.

$$a_{21} = \frac{c_{21}}{c_{21} + c_{22}}, \quad a_{22} = \frac{c_{22}}{c_{21} + c_{22}}, \quad a_{23} = 0 \text{ ve } a_{21} + a_{22} = 1$$

ağırlıkları belirlenir. Bu ağırlıklar yardımı ile, 1. ve 2. tabakadan seçilecek örnek çapları ve yığından seçilecek toplam örnek çapı aşağıdaki formda yazılabilir.

$$n_1 = a_{11}n_{11} + 0n_{12} + a_{13}n_{13} = a_{11}n_{11} + a_{13}n_{13}$$

$$n_2 = a_{21}n_{21} + a_{22}n_{22} + 0n_{23} = a_{21}n_{21} + a_{22}n_{22}$$

$$n = a_{11}n_{11} + a_{13}n_{13} + a_{21}n_{21} + a_{22}n_{22}$$

İlişkili olan değişkenlerden, değişim katsayısı büyük olan yani tabaka içi yapısı daha heterojen olan değişken modele dahil edildiğinde modeldeki bilinmeyen değişken sayısı da azalmış olur. İki tabaka ve her bir tabakada üç değişken var iken yukarıdaki gibi her tabakada 2 değişkenin ilişkili olduğu varsayılır ise problemimizde 6 değil, 4 bilinmeyen olur. Bu durum, modelin çözümünde tabaka içindeki değişkenlere ait bilgiyi ihmal etmeden daha az bilinmeyenli problemlerin çözümü ile uğraşmamızı sağlar. Buradan amaç fonksiyonu ve kısıtlar aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\min \left(\frac{1}{p} \sum_{j=1}^p V_j(\bar{x}_j) \right)$$

$$\min \left[\frac{1}{p} \frac{1}{N^2} \left[\left(N_1^2 \frac{N_1 - (a_{11}n_{11} + a_{13}n_{13})}{N_1} \frac{S_{11}^2 + S_{12}^2 + S_{13}^2}{a_{11}n_{11} + a_{13}n_{13}} \right) + N_2^2 \frac{N_2 - (a_{21}n_{21} + a_{22}n_{22})}{N_2} \frac{S_{21}^2 + S_{22}^2 + S_{23}^2}{a_{21}n_{21} + a_{22}n_{22}} \right] \right]$$

$$c_0 + t_1 (a_{11}n_{11} + a_{13}n_{13})^\alpha + t_2 (a_{21}n_{21} + a_{22}n_{22})^\alpha \leq c \quad \alpha > 0$$

$$n_{11} \leq N_1, \quad n_{13} \leq N_1$$

$$n_{21} \leq N_2, \quad n_{22} \leq N_2$$

3.Durum: Tabakalar içindeki değişkenlerin hepsi ilişkili olduğu durumda problemin modellenmesi

1.tabakada $|\hat{\rho}_{112}|$, $|\hat{\rho}_{113}|$ ve $|\hat{\rho}_{123}|$ 0.67'den büyük ise bu tabakadaki tüm değişkenler ilişkilidir. 2.tabakada $|\hat{\rho}_{212}|$, $|\hat{\rho}_{213}|$ ve $|\hat{\rho}_{223}|$ 0.67'den büyük ise bu tabakadaki tüm değişkenler ilişkilidir. Bu durumda, 1. tabaka için 1., 2. ve 3. değişkenlerden yalnızca değişim katsayısı en büyük olan değişken modelde yer alacaktır. Benzer biçimde, 2. tabakada 1., 2. ve 3. değişkenlerden değişim katsayısı en büyük olan modelde yer alacaktır. 1. tabaka için $c_{13} > c_{11} > c_{12}$, 2. tabaka için $c_{21} > c_{22} > c_{23}$ olduğunu varsayarsak, modelde yer alacak değişkenlerin ağırlıklarının belirlenmesi aşağıdaki gibidir:

1.tabaka için $c_{13} > c_{11} > c_{12}$ olduğundan 1. ve 2. değişkenler modelde yer almaz ve $a_{11} = a_{12} = 0$ kabul edilir.

$$a_{11} = 0, \quad a_{12} = 0, \quad a_{13} = 1$$

2.tabaka için $c_{21} > c_{22} > c_{23}$ olduğundan 2. ve 3. değişkenler modelde yer almaz ve $a_{22} = a_{23} = 0$ kabul edilir.

$$a_{21} = 1, \quad a_{22} = 0, \quad a_{23} = 0$$

ağırlıkları belirlenir. Bu ağırlıklar yardımı ile, 1. ve 2. tabakadan seçilecek örnek çapları ve yığından seçilecek toplam örnek çapı aşağıdaki formda yazılabilir.

$$n_1 = 0n_{11} + 0n_{12} + a_{13}n_{13} = a_{13}n_{13} = n_{13}$$

$$n_2 = a_{21}n_{21} + 0n_{22} + 0n_{23} = a_{21}n_{21} = n_{21}$$

$$n = a_{13}n_{13} + a_{21}n_{21} = n_{13} + n_{21}$$

İki tabaka ve her bir tabakada üç değişken var iken yukarıdaki gibi tabakalardaki bütün değişkenlerin ilişkili olduğu varsayılır ise problemimizde 6 değil, 2 bilinmeyen olur. Buradan amaç fonksiyonu ve kısıtlar aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} & \min \left(\frac{1}{p} \sum_{j=1}^p V_j(\bar{x}_j) \right) \\ & \min \left[\frac{1}{p} \frac{1}{N^2} \left[\left(N_1^2 \frac{N_1 - n_{13}}{N_1} \frac{S_{11}^2 + S_{12}^2 + S_{13}^2}{n_{13}} + N_2^2 \frac{N_2 - n_{21}}{N_2} \frac{S_{21}^2 + S_{22}^2 + S_{23}^2}{n_{21}} \right) \right] \right] \\ & c_0 + t_1 n_{13}^\alpha + t_2 n_{21}^\alpha \leq c \quad \alpha > 0 \\ & n_{13} \leq N_1 \\ & n_{21} \leq N_2 \end{aligned}$$

Tabaka sayısı ve tabakalardaki değişken sayısı arttıkça, klasik modele alternatif olarak önerilen yeni model yukarıdaki üç farklı duruma benzer olarak oluşturulabilir. Bununla birlikte, önerilen yeni model oluşturulurken, araştırmayı yöneten araştırmacıların çok dikkatli olması gerekir. Çünkü, değişkenler arasında ilişki aranırken, değişkenlerin özellikleri göz önünde bulundurulmalıdır. Tabaka içinde yer alan değişkenlerin hepsi için ikili ilişkilerine bakmak her zaman anlamlı olmayabilir. Uygulamalarda, aslında arasındaki ilişkiye bakmanın anlamsız olduğu değişkenler olabilir. Örneğin, bir bireyin boyu ile derse devam süresi arasında ilişkiye bakıldığında belki korelasyon katsayısının tahmini 0.67'den büyük çıkacaktır, bununla birlikte aranan ilişki anlamsızdır. Bu gibi durumlarda, bu değişkenler arasında ilişki aranmadan, değişkenlerin değişim katsayıları ile orantılı ağırlıklar ile birlikte modele yansıtılmaları anlamlı olacaktır.

5.1. Örnek

Yığınınımızda iki tabaka ve her bir tabakada 3 değişken olduğunu varsayalım. Birinci tabakada 300, ikinci tabakada 200 birim bulunmaktadır. Birinci tabakaya seyahat etmenin maliyeti 1TL., ikinci tabakaya seyahat etmenin maliyeti 30TL.'dir. Tabakadan tabakaya seyahat etmenin maliyet fonksiyonu üzerine etkisi 0.8 iken araştırma için sabit giderlere yapılan harcamalardan sonra 500TL. ayrılmıştır. Yapılan pilot çalışma ile aşağıdaki istatistikler elde edilmiştir.

h	N_h	$\bar{x}_{h1}$	$\bar{x}_{h2}$	$\bar{x}_{h3}$	s_{h1}^2	s_{h2}^2	s_{h3}^2	$\hat{\rho}_{h12}$	$\hat{\rho}_{h13}$	$\hat{\rho}_{h23}$
1	300	18.4988	96.6218	250.2327	1013.6	957.6	976.6	0.05	0.90	-0.1
2	200	51.3173	82.4342	397.7884	233.1	1111.1	2973.7	0.89	0.27	0.14

Hem klasik modelle hem de önerilen yeni modelle, değişkenlerin hepsi için örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapmak için her bir tabakalardan seçilmesi gereken örnek çapını bulunuz.

Klasik modelle çözüm

Klasik model, çok değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemede tek değişken varmış gibi davranıp, her bir değişken için ayrı ayrı tabakalardan seçilmesi gereken örnek çapını bulup daha sonra bulunan örnek çaplarının ortalamasını alarak, ortalama bir örnek çapı bulma mantığına dayandırılmaktadır. Tek değişkenli tabakalı tesadüfi örnekleme için klasik modelin genel formu aşağıdaki gibidir:

$$\min V(\bar{x}_{tb}) = \min \left(\frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^L \frac{N_h^2 S_h^2}{n_h} - \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^L N_h S_h^2 \right)$$

$$c = \sum_{h=1}^L t_h n_h^\alpha$$

Tek değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemede, klasik modelin doğrusal olmayan maliyet kısıtı altında Lagrange çarpanları yöntemi ile çözümü Chernyak(2001) tarafından elde edilmiş ve yığından seçilmesi gereken örnek çapı ile her tabakadan seçilmesi gereken örnek çapları aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$n = \frac{c^{1/\alpha} \sum_{h=1}^L (N_h^2 S_h^2 / c_h)^{1/(1+\alpha)}}{\left[\sum_{h=1}^L (N_h^2 S_h^2 c_h^{1/\alpha})^{1/(1+\alpha)} \right]^{1/\alpha}}$$

$$n_h = \frac{(N_h^2 S_h^2 / c_h)^{1/(1+\alpha)}}{\sum_{h=1}^L (N_h^2 S_h^2 / c_h)^{1/(1+\alpha)}} n$$

Buradan; tabakalarda sadece 1. değişkenin olduğu varsayıldığında yığından ve tabakalardan seçilmesi gereken örnek çapı:

$$n = \frac{500^{1/0.8} \left[(300^2 (1013.6) / 1)^{1/1.8} + (200^2 (233.1) / 30)^{1/1.8} \right]}{\left[\left(300^2 (1013.6) 1^{1/0.8} \right)^{0.8/1.8} + \left(200^2 (233.1) 30^{1/0.8} \right)^{0.8/1.8} \right]^{1/0.8}} = 533.70 \cong 534$$

Görüldüğü gibi, 2. ve 3. değişken yok kabul edildiğinde araştırmamızda sadece 1. değişkenin olduğu varsayıldığında klasik yöntem yığından seçilmesi gereken örnek çapını 534 olarak bulmaktadır. Bununla birlikte, yığın çapı $N = 500$ 'dür. Klasik yöntemin en büyük dezavantajı $n_h \leq N_h$ kısıtının modelde yer almaması ve araştırmacının bu gibi durumlarda müdahale etmesi gerektiğidir. $n > N$ olduğundan, $n = N = 500$ alınarak örnek çapı tabakalara dağıtılır.

$$n_1 = \frac{(300^2(1013.6)/1)^{\frac{1}{1+0.8}}}{(300^2(1013.6)/1)^{\frac{1}{1+0.8}} + (200^2(233.1)/30)^{\frac{1}{1+0.8}}} 500 = 479.58 \cong 480$$

$$n_2 = \frac{(200^2(233.1)/30)^{\frac{1}{1+0.8}}}{(300^2(1013.6)/1)^{\frac{1}{1+0.8}} + (200^2(233.1)/30)^{\frac{1}{1+0.8}}} 500 = 20.41 \cong 20$$

Görüldüğü gibi, 2. ve 3. değişken yok kabul edildiğinde araştırmamızda sadece 1. değişkenin olduğu varsayıldığında klasik yöntem yığından seçilmesi gereken 500 çaplı örneği tabakalara paylaştığında, 1. tabakadan seçilmesi gereken örnek çapı 480'dir. Bununla birlikte, 1. tabakadaki birim sayısı 300'dür. Bu durumda, $n_1 = N_1 = 300$ alınarak 1. tabakadan tamsayım yapılır. Yapılan düzeltmelerden sonra yığında sadece 1. değişken olduğu varsayımı altında, örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapan örnek çapları $n_1 = 300$, $n_2 = 20$ ve $n = 320$ 'dir.

Tabakalarda sadece 2. değişkenin olduğu varsayıldığında yığından ve tabakalardan seçilmesi gereken örnek çapı:

$$n = \frac{500^{\frac{1}{0.8}} \left[(300^2(957.6)/1)^{\frac{1}{1+0.8}} + (200^2(1111.1)/30)^{\frac{1}{1+0.8}} \right]}{\left[\left(300^2(957.6)1^{\frac{1}{0.8}} \right)^{\frac{0.8}{1+0.8}} + \left(200^2(1111.1)30^{\frac{1}{0.8}} \right)^{\frac{0.8}{1+0.8}} \right]^{\frac{1}{0.8}}} = 282.266 \cong 282$$

Görüldüğü gibi, 1. ve 3. değişken yok kabul edildiğinde araştırmamızda sadece 2. değişkenin olduğu varsayıldığında klasik yöntem yığından seçilmesi gereken örnek çapını 282 olarak bulmaktadır.

$$n_1 = \frac{(300^2(957.6)/1)^{\frac{1}{1+0.8}}}{(300^2(957.6)/1)^{\frac{1}{1+0.8}} + (200^2(1111.1)/30)^{\frac{1}{1+0.8}}} 282 = 255.29 \cong 255$$

$$n_2 = \frac{(200^2(1111.1)/30)^{\frac{1}{1+0.8}}}{(300^2(957.6)/1)^{\frac{1}{1+0.8}} + (200^2(1111.1)/30)^{\frac{1}{1+0.8}}} 282 = 26.70 \cong 27$$

Görüldüğü gibi, 1. ve 3. değişken yok kabul edildiğinde araştırmamızda sadece 2. değişkenin olduğu varsayıldığında klasik yöntem yığından seçilmesi gereken 282 çaplı örneği tabakalara paylaştırdığında, örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapan örnek çapları $n_1 = 255$, $n_2 = 27$ ve $n = 282$ 'dir.

Tabakalarda sadece 3. değişkenin olduğu varsayıldığında yığından ve tabakalardan seçilmesi gereken örnek çapı:

$$n = \frac{500^{\frac{1}{0.8}} \left[(300^2(976.6)/1)^{\frac{1}{1+0.8}} + (200^2(2973.7)/30)^{\frac{1}{1+0.8}} \right]}{\left[\left(300^2(976.6)1^{\frac{1}{0.8}} \right)^{\frac{0.8}{1+0.8}} + \left(200^2(2973.7)30^{\frac{1}{0.8}} \right)^{\frac{0.8}{1+0.8}} \right]^{\frac{1}{0.8}}} = 190.111 \cong 190$$

Görüldüğü gibi, 1. ve 2. değişken yok kabul edildiğinde araştırmamızda sadece 3. değişkenin olduğu varsayıldığında klasik yöntem yığından seçilmesi gereken örnek çapını 190 olarak bulmaktadır.

$$n_1 = \frac{(300^2(976.6)/1)^{\frac{1}{1+0.8}}}{(300^2(976.6)/1)^{\frac{1}{1+0.8}} + (200^2(2973.7)/30)^{\frac{1}{1+0.8}}} 190 = 161.180 \cong 161$$

$$n_2 = \frac{(200^2(2973.7)/30)^{\frac{1}{1+0.8}}}{(300^2(976.6)/1)^{\frac{1}{1+0.8}} + (200^2(2973.7)/30)^{\frac{1}{1+0.8}}} 190 = 28.8 \cong 29$$

Görüldüğü gibi, 1. ve 2. değişken yok kabul edildiğinde araştırmamızda sadece 3. değişkenin olduğu varsayıldığında klasik yöntem yığından seçilmesi gereken 190

çaplı örneği tabakalara paylaştığında, örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapan örnek çapları $n_1 = 161$, $n_2 = 29$ ve $n = 190$ 'dır.

Klasik yöntem, örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapacak, tabakalardan seçilecek örnek çaplarını belirlerken, tek değişkenli tabakalı tesadüfi örnekleme mantığı ile hareket ederek, her tabaka için değişkenlere göre seçilmesi gereken örnek çaplarının ortalamasını alıp yeni bir örnek çapı elde eder. Buradan, yukarıdaki örnek için klasik yöntem ile tabakalardan seçilecek örnek çapları, kullanılan bütçe ve değişkenler için ortalama örnek ortalaması istatistiğinin varyansı aşağıdaki gibi elde edilir:

Klasik yönteme göre 1. tabakadan seçilmesi gereken ortalama örnek çapı;

$$n_1 = \frac{300 + 255 + 161}{3} = 238.66 \cong 239$$

Klasik yönteme göre 2. tabakadan seçilmesi gereken ortalama örnek çapı;

$$n_2 = \frac{20 + 27 + 29}{3} = 25.33 \cong 25$$

Klasik yönteme göre yığından seçilmesi gereken toplam örnek çapı ise;

$$n = n_1 + n_2 = 239 + 25 = 264$$

olarak elde edilir. Klasik yönteme göre; araştırma için kullanılan bütçe;

$$c = 1(239)^{0.8} + 30(25)^{0.8} = 473.91$$

olarak elde edilir. Düzeltme terimi ihmal edildiğinde her bir değişken için elde edilen amaç fonksiyonu değeri ;

1.değişken için $V(\bar{x}_1) = 3.0186$

2.değişken için $V(\bar{x}_2) = 8.5534$

3.değişken için $V(\bar{x}_3) = 20.5027$

biçimindedir. Bu üç değişken için ortalama amaç fonksiyonu değeri; 10.691'dir.

Önerilen modelle çözüm

Önerilen model, öncelikle tabakalar içindeki değişkenler arasındaki ilişkilere bakarak, değişken sayısını azaltmayı amaçlamaktadır. İlişkili değişkenlerden, değişim katsayısı büyük olan ve ilişkisiz değişkenlerin tamamı değişim katsayıları ile orantılı ağırlıklarla modele dahil edilerek, tabaka içi yapıların iyi temsil edilmesi sağlanmaktadır.

Yukarıdaki örnek için, 1. tabakada 1. ve 3. değişkenler, 2. tabakada ise 1. ve 2. değişkenler ilişkilidir. Bu durumda, 1. tabaka için 1. ve 3. değişkenlerden değişim katsayısı büyük olan ve 2. değişken, 2. tabakada ise, 1. ve 2. değişkenlerden değişim katsayısı büyük olan ve 3. değişken modelde yer alacaktır.

1.tabaka için modelde yer alacak değişkenlerin ve ağırlıkların belirlenmesi

$$c_{11} = \frac{\sqrt{1013.6}}{18.4988} = 1.7210 \quad c_{12} = \frac{\sqrt{957.6}}{96.6218} = 0.3202 \quad c_{13} = \frac{\sqrt{976.6}}{250.2327} = 0.1248$$

$c_{11} > c_{13}$ olduğundan 1.tabaka için modelde 1. değişken olacak, 3. değişken yer almayacaktır. Buradan modelde yer alacak 1. ve 2. değişkenler için ağırlıklar aşağıdaki gibi belirlenir.

$$a_{11} = \frac{c_{11}}{c_{11} + c_{12}} = \frac{1.7210}{1.7210 + 0.3202} = 0.8431$$

$$a_{12} = \frac{c_{12}}{c_{11} + c_{12}} = \frac{0.3202}{1.7210 + 0.3202} = 0.1569$$

$$a_{13} = 0$$

$$a_{11} + a_{12} = 1$$

2.tabaka için modelde yer alacak değişkenlerin ve ağırlıkların belirlenmesi

$$c_{21} = \frac{\sqrt{233.1}}{51.3173} = 0.2975 \quad c_{22} = \frac{\sqrt{1111.1}}{82.4342} = 0.4043 \quad c_{23} = \frac{\sqrt{2973.7}}{397.7884} = 0.1370$$

$c_{22} > c_{21}$ olduğundan 2.tabaka için modelde 2. değişken olacak, 1. değişken yer almayacaktır. Buradan modelde yer alacak 2. ve 3. değişkenler için ağırlıklar aşağıdaki gibi belirlenir.

$$a_{21} = 0$$

$$a_{22} = \frac{c_{22}}{c_{22} + c_{23}} = \frac{0.4043}{0.4043 + 0.1370} = 0.7469$$

$$a_{23} = \frac{c_{23}}{c_{22} + c_{23}} = \frac{0.1370}{0.4043 + 0.1370} = 0.2531$$

$$a_{22} + a_{23} = 1$$

Ağırlıklar belirlendikten sonra önerilen model aşağıdaki gibi kurulur.

$$\min \left[\frac{1}{3} \frac{1}{500^2} \left[300^2 \frac{300 - (0.8431n_{11} + 0.1569n_{12})}{300} \frac{(1031.6 + 957.6 + 976.6)}{0.8431n_{11} + 0.1569n_{12}} + 200^2 \frac{200 - (0.7469n_{22} + 0.2531n_{23})}{200} \frac{(233.1 + 1111.1 + 2973.7)}{0.7469n_{22} + 0.2531n_{23}} \right] \right]$$

Düzeltilme terimini ihmal edebiliriz.

$$\min \left[\frac{1}{3} \frac{1}{500^2} \left[300^2 \frac{2647.8}{0.8431n_{11} + 0.1569n_{12}} + 200^2 \frac{4317.9}{0.7469n_{22} + 0.2531n_{23}} \right] \right]$$

Gerekli kısaltmaların ardından önerilen model aşağıdaki gibi kurulur.

$$\begin{aligned} & \min \left[\frac{353.736}{0.8431n_{11} + 0.1569n_{12}} + \frac{230.288}{0.7469n_{22} + 0.2531n_{23}} \right] \\ & (0.8431n_{11} + 0.1569n_{12})^{0.8} + 30(0.7469n_{22} + 0.2531n_{23})^{0.8} \leq 500 \\ & n_{11} \leq 300 \\ & n_{12} \leq 300 \\ & n_{22} \leq 200 \\ & n_{23} \leq 200 \end{aligned}$$

Eşitsizlik kısıtlı optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılan en yaygın yöntem Kuhn-Tucker yöntemidir. Bu yüzden, bu sayısal örneğin çözümü için Kuhn-Tucker yöntemi kullanılmıştır. Bununla birlikte, yukarıdaki modelin çözümünde sezgisel yöntemler dahil pek çok yöntem kullanılabilir. Simülasyon çalışmasında, önerilen modelin çözümünde araştırmacı tarafından belirlenen bir başlangıç noktası etrafında doğrusal olmayan programlama mantığı kullanılarak çözümler elde edilmiştir.

Eşitsizlik kısıtlarının, eşitlik haline getirilip genel Lagrange fonksiyonunun oluşturulması ve Kuhn-Tucker gerek ve yeter şartları aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} & \min \left[\frac{353.736}{0.8431n_{11} + 0.1569n_{12}} + \frac{230.288}{0.7469n_{22} + 0.2531n_{23}} \right] \\ & (0.8431n_{11} + 0.1569n_{12})^{0.8} + 30(0.7469n_{22} + 0.2531n_{23})^{0.8} + S_1^2 = 500 \\ & n_{11} + S_2^2 = 300 \\ & n_{12} + S_3^2 = 300 \end{aligned}$$

$$n_{22} + S_4^2 = 200$$

$$n_{23} + S_5^2 = 200$$

$$L = \frac{353.736}{0.8431n_{11} + 0.1569n_{12}} + \frac{230.288}{0.7469n_{22} + 0.2531n_{23}} +$$

$$\lambda_1 \left((0.8431n_{11} + 0.1569n_{12})^{0.8} + 30(0.7469n_{22} + 0.2531n_{23})^{0.8} + S_1^2 - 500 \right) +$$

$$\lambda_2 (n_{11} + S_2^2 - 300) + \lambda_3 (n_{12} + S_3^2 - 300) + \lambda_4 (n_{22} + S_4^2 - 200) + \lambda_5 (n_{23} + S_5^2 - 200)$$

$$\frac{\partial L}{\partial n_{11}} = -\frac{353.736(0.8431)}{(0.8431n_{11} + 0.1569n_{12})^2} + \lambda_1 0.8(0.8431n_{11} + 0.1569n_{12})^{-0.2} 0.8431 + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial n_{12}} = -\frac{353.736(0.1569)}{(0.8431n_{11} + 0.1569n_{12})^2} + \lambda_1 0.8(0.8431n_{11} + 0.1569n_{12})^{-0.2} 0.1569 + \lambda_3 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial n_{22}} = -\frac{230.288(0.7469)}{(0.7469n_{22} + 0.2531n_{23})^2} + \lambda_1 (0.8)30(0.7469n_{22} + 0.2531n_{23})^{-0.2} 0.7469 + \lambda_4 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial n_{23}} = -\frac{230.288(0.2531)}{(0.7469n_{22} + 0.2531n_{23})^2} + \lambda_1 (0.8)30(0.7469n_{22} + 0.2531n_{23})^{-0.2} 0.2531 + \lambda_5 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = (0.8431n_{11} + 0.1569n_{12})^{0.8} + 30(0.7469n_{22} + 0.2531n_{23})^{0.8} + S_1^2 - 500 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = n_{11} + S_2^2 - 300 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = n_{12} + S_3^2 - 300 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_4} = n_{22} + S_4^2 - 200 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_5} = n_{23} + S_5^2 - 200 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial S_1} = \lambda_1 \left((0.8431n_{11} + 0.1569n_{12})^{0.8} + 30(0.7469n_{22} + 0.2531n_{23})^{0.8} - 500 \right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial S_2} = \lambda_2 (n_{11} - 300) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial S_3} = \lambda_3 (n_{12} - 300) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial S_4} = \lambda_4 (n_{22} - 200) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial S_5} = \lambda_5 (n_{23} - 200) = 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \text{ ve } \lambda_5 \geq 0$$

Kuhn-Tucker gerek ve yeter koşullarından bulunan yukarıdaki denklemler, Lagrange çarpanlarının farklı kombinasyonları için denendiğinde elde edilen çözümler aşağıdaki gibidir:

$$n_{11} = 240.8399 \cong 241$$

$$n_{12} = 166.9052 \cong 167$$

$$n_1 = (0.8431)241 + (0.1569)167 = 229.3894 \cong 229$$

$$n_{22} = 12.6875 \cong 13$$

$$n_{23} = 70.4126 \cong 70$$

$$n_2 = (0.7469)13 + (0.2531)70 = 27.42 \cong 27$$

Önerilen yönteme göre yığından seçilmesi gereken toplam örnek çapı ise;

$$n = n_1 + n_2 = 229 + 27 = 256$$

olarak elde edilir. Önerilen yönteme göre; araştırma için kullanılan bütçe;

$$c = 1(229)^{0.8} + 30(27)^{0.8} = 496.24$$

olarak elde edilir. Düzeltme terimi ihmal edildiğinde üç değişken için ortalama amaç fonksiyonu değeri;

$$\min \left[\frac{1}{p} \sum_{j=1}^p V(\bar{x}_j) \right] = 10.07$$

olarak bulunur. Her bir değişken için ayrı ayrı elde edilen amaç fonksiyonu değeri ise

$$1.\text{değişken için } V(\bar{x}_1) = 2.9747$$

$$2.\text{değişken için } V(\bar{x}_2) = 8.0896$$

$$3.\text{değişken için } V(\bar{x}_3) = 19.1571$$

biçimindedir.

5.2. Simülasyon Çalışması

Simülasyon çalışması MATLAB programı kullanılarak yapılmıştır. Bu bölümde, $\alpha > 0$ olmak üzere; α 'ya bağlı doğrusal olmayan maliyet kısıtı altında çok değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemede, tüm değişkenler için örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapacak tabakalardan seçilecek örnek çaplarının belirlenmesinde klasik model ve önerilen yeni modelin karşılaştırılması için simülasyon çalışması yapılmıştır. α 'nın farklı değerleri için örnek ortalaması istatistiğinin varyans değerleri elde edilmiş ve iki modelin birbirlerine göre üstünlükleri incelenmiştir. Doğrusal olmayan yapıdaki maliyet kısıtı yardımı ile varyans değerinin bulunması için 1000 tekrarlı Monte Carlo simülasyonu kullanılmıştır.

Simülasyon çalışmasında yığın çapı(N), tabaka çapları(N_h), bütçe(c), tabakadan tabakaya seyahat maliyeti(t_h) ve α başlangıçta verilmiştir. Belirlenen doğrusal

olmayan maliyet kısıtı altında, örnek ortalaması istatistiğinin varyansının minimum yapılması için kullanılacak modeller aşağıdaki gibidir.

Model 1: Klasik Model

Model 2: Önerilen Yeni Model

$\min V(\bar{x}_j)$ $\min \left(\frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^L \frac{N_h^2 S_{hj}^2}{n_h} - \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^L N_h S_{hj}^2 \right)$ $c = \sum_{h=1}^L t_h n_h^\alpha \quad j = 1, 2, \dots, p$	$\min \left[\frac{1}{p} \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^L N_h^2 \frac{N_h - \sum_{j=1}^p a_{hj} n_{hj}}{N_h} \frac{\sum_{j=1}^p S_{hj}^2}{\sum_{j=1}^p a_{hj} n_{hj}} \right]$ $c_0 + \sum_{h=1}^L t_h \left(\sum_{j=1}^p a_{hj} n_{hj} \right)^\alpha \leq c$ $n_{hj} \leq N_h \quad h = 1, 2, \dots, L \quad j = 1, 2, \dots, p$
--	---

Önceki bölümlerde, tek değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemede, doğrusal olmayan maliyet kısıtı altında, yığından seçilecek örnek çapı belli iken, bu örnek çapının örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapacak şekilde tabakalara dağıtılmasında kullanılabilecek farklı optimizasyon tekniklerinin birbirlerine göre üstünlükleri ve sabit bir örnek çapının tabakalara paylaştırılmasında α sabitinin paylaştırmaya katkısı incelenmişti. Bu bölümde, örnek çapı önceden bilinmediğinde doğrusal olmayan maliyet kısıtı altında ele alınan iki modelin tabakalardan seçilecek örnek çaplarını nasıl belirledikleri üzerinde durulmuştur.

Simülasyon çalışması aşağıdaki adımlar göz önüne alınarak yapılmıştır.

Adım 1: Tabaka sayısı ve tabakalardaki değişken sayıları araştırmanın başında belirlendikten sonra tabakalardaki her bir değişken için değişken ortalamaları ve varyansları belirlenmiştir. Ayrıca, hem değişkenler arasındaki ilişkiye müdahale edebilmek hem de varyans-kovaryans matrisinin tekil olmaması için h . tabaka içindeki i . ve j . değişkenler arasındaki korelasyonlar belirlenmiştir. Daha sonra değişkenler için belirlenen ortalama ve varyanslar altında p değişkenli Normal dağılımdan her tabaka için N_h birimlik sayı üretilip, tabakalardaki tüm değişkenlere

ait birimler elde edilmiştir. Tabakaların homojen olması hedeflendiğinden, tabakalar içindeki aynı değişkenlere ait ortalamaların farklı olmasına dikkat edilmiştir.

Adım 2: Çok değişkenli Normal dağılımdan üretilen birimler yardımı ile tabakalardaki değişkenlere ait varyanslar, korelasyonlar, değişim katsayıları ve ağırlıklar hesaplanmıştır.

Adım 3: Belirlenen doğrusal olmayan maliyet kısıtı altında oluşturulan Model 1(Klasik model) ve Model 2(Önerilen yeni model)'nin yazılan simülasyon programı yardımı ile çözümleri yapılmış, her tabakadan seçilmesi gereken örnek çapları ve amaç fonksiyonu değerleri elde edilmiştir. Model 1'in çözümü için Chernyak(2001) tarafından türetilen formülasyon kullanılırken, Model 2'nin çözümü için program yazılmıştır. Model 2'nin çözümü için yazılan program, doğrusal olmayan problemlerin çözümünde kullanılan başlangıç noktasına ihtiyaç duymaktadır. Başlangıç noktasının yanlış belirlenmesi, çözüm olan bir model için çözüm elde edilememesi veya çözümün yerel çözümlere takılması gibi durumları beraberinde getirebilir. Modelin çözümü için gerekli olan başlangıç noktası, tabaka çapları, tabaka varyansları ve tabakalara seyahat maliyetleri göz önünde bulundurularak, araştırmacının uzmanlığı doğrultusunda tabakalardan kaçır birimlik örnek seçmesi gerektiği öngörüsü altında belirlenebilir. Çözümler birkaç farklı başlangıç noktası için yapıp, çıkan sonuçlar doğrultusunda sezgisel yeni bir başlangıç noktası belirlenebilir. Bu çalışmada, başlangıç noktaları her tabakadaki birim sayıları göz önünde bulundurularak belirlenmiştir.

Adım 4: Adım 1-2-3 1000 defa tekrar edilmiştir.

Adım 5: Sonuçların genellenebilmesi için 1000 tekrardan elde edilen tabakalardan seçilecek örnek çapı ve amaç fonksiyonu değerlerinin ortalaması alınarak, tabakalardan seçilecek optimum örnek çapları ve varyans değerleri elde edilmiştir.

Simülasyon çalışması tabakalara seyahat maliyetlerinin farklı değerleri altında yapılmıştır. Simülasyon çalışmasında yığının iki, üç, dört ve beş tabakadan oluştuğu

durum için, tabakalarda 3, 4 ve 5 değişken olması durumları göz önüne alınmıştır. Elde edilen sonuçlar genellenebilir olduğundan daha fazla tabaka ya da tabakalarda daha fazla değişken olması durumu dikkate alınmamıştır. Simülasyon deneyi yapılırken, tabaka sayısı ve tabakalardaki değişken sayılarının yanı sıra tabaka içindeki değişkenlerin ilişkisiz, bazılarının ilişkili ve hepsinin ilişkili olduğu durumlar incelenmiştir. Sonuçlar Çizelge 5.1-Çizelge 5.39’da özetlenmiştir. Çizelgelerde yer alan n_{hK} gösterimi, klasik modelden elde edilen h . tabakadan seçilmesi gereken örnek çapını, n_K klasik modelle yığından seçilmesi gereken toplam örnek çapını ve K. Bütçe ise, klasik modelle çözüm yapıldığında bütçenin ne kadarının kullanıldığını ifade etmektedir. Benzer şekilde, $n_{h\ddot{O}}$ gösterimi, önerilen modelden elde edilen h . tabakadan seçilmesi gereken örnek çapını, $n_{\ddot{O}}$ önerilen modelle yığından seçilmesi gereken toplam örnek çapını ve Ö. Bütçe ise, önerilen modelle çözüm yapıldığında bütçenin ne kadarının kullanıldığını ifade etmektedir. Ayrıca, $Min(Var(K))$ klasik modelden elde edilen amaç fonksiyonu değerini, $Min(Var(\ddot{O}))$ ise, önerilen modelden elde edilen amaç fonksiyonu değerini ifade etmektedir. Bununla beraber, kısıtların sağlanmadığı durumlar italik olarak ifade edilmiştir. “**” sembolü ise, klasik modelin çözüm vermediği durumu ifade etmektedir.

Çizelge 5.1. Tabakalardaki değişkenler arasında ilişki yok iken $L = 2$, $p = 3$, $N = 500$, $N_1 = 300$, $N_2 = 200$, $c = 500$, $t_1 = 1$ ve $t_2 = 50$ için örnek çapları ve varyans değerleri

Model 1: Klasik Model						Model 2: Önerilen Yeni Model				
α	n_{1K}	n_{2K}	n_K	$MSE(Var(K))$	K. Bütçe	n_{1O}	n_{2O}	n_O	$MSE(Var(O))$	Ö. Bütçe
0.2	**	**	**	**	**	267.5375	194.3411	461.8786	0.0396	146.5025
0.4	**	**	**	**	**	267.2354	194.5237	461.7591	0.0349	421.0281
0.5	**	**	**	**	**	269.2110	93.5446	362.7556	0.3501	500
0.6	**	**	**	**	**	268.9810	42.0614	311.0424	1.0884	500
0.8	196.5992	14.9036	211.5028	3.4878	502.4829	145.0014	15.4331	160.4345	3.4895	500
1	85.9303	8.2814	94.2117	6.6003	500	74.9309	5.5014	83.4323	6.4766	500
1.2	43.7751	5.6949	49.4700	12.7731	496.4432	37.5292	5.9209	43.4502	11.6340	500
1.5	22.8653	3.8829	26.7482	16.5474	491.8992	21.9881	3.9793	25.9673	16.3485	500
1.8	14.5727	2.9981	17.5708	24.7895	485.0982	13.7076	3.1246	16.8322	24.3027	500
2	11.4251	2.6404	14.0656	28.2762	479.1226	10.8931	2.7617	13.6548	27.6015	500

Çizelge 5.2. Tabakalardaki değişkenler arasında ilişki yok iken $L = 2$, $p = 3$, $N = 450$, $N_1 = 150$, $N_2 = 300$, $c = 1250$, $t_1 = 7$ ve $t_2 = 10$ için örnek çapları ve varyans değerleri

Model 1: Klasik Model						Model 2: Önerilen Yeni Model					
α	n_{1K}	n_{2K}	n_K	$MSE(Var(K))$	K. Bütçe	n_{1O}	n_{2O}	n_O	$MSE(Var(O))$	Ö. Bütçe	
0.2	**	**	**	**	**	148.2533	300	448.2533	0.0149	50.3152	
0.4	**	**	**	**	**	148.1640	300	448.1640	0.0156	149.6035	
0.5	**	**	**	**	**	147.7222	300	447.7222	0.0193	258.2838	
0.6	**	**	**	**	**	148.4940	300	448.4940	0.0141	447.0334	
0.8	150	253.5330	403.5330	0.5150	1223.42	147.7652	265.3795	413.1447	0.3092	1250	
1	63.5171	80.5380	144.0551	8.9427	1250	53.8342	87.3161	141.1502	7.9938	1250	
1.2	28.6667	40.5178	69.1845	20.9584	1242.1	24.8764	43.2546	68.1309	19.9159	1250	
1.5	15.3036	18.7918	34.0984	43.4182	1233.8	14.4778	19.5496	34.0274	42.8996	1250	
1.8	9.4977	11.5746	21.0723	73.4818	1223.5	8.6272	12.2668	20.8940	72.0639	1250	
2	7.5023	9.0744	16.5767	93.3472	1217.4	6.9132	9.5680	16.4811	91.5610	1250	

Çizelge 5.3. Tabakalardaki değişkenlerin bazıları ilişkili iken $L = 2$, $p = 3$, $N = 500$, $N_1 = 300$, $N_2 = 200$, $c = 1000$, $t_1 = 1$ ve $t_2 = 50$ için örnek çapları ve varyans değerleri

α	Model 1: Klasik Model					Model 2: Önerilen Yeni Model				
	n_{1K}	n_{2K}	n_K	$MSE(Var(K))$	K. Bütçe	n_{1O}	n_{2O}	n_O	$MSE(Var(O))$	Ö. Bütçe
0.2	**	**	**	**	**	281.4173	199.5350	480.9523	0.0171	147.2922
0.4	**	**	**	**	**	276.9826	197.7422	474.7248	0.0237	423.8742
0.5	**	**	**	**	**	279.8028	198.1090	477.9118	0.0232	720.4833
0.6	**	**	**	**	**	300	139.9134	439.9134	0.1098	1000
0.8	**	**	**	**	**	280.1219	37.5524	317.6743	1.1884	1000
1	170.1978	16.5960	186.7939	3.4606	1000	148.3327	17.0333	165.3661	3.3453	1000
1.2	77.9917	10.1423	88.1340	6.8324	992.4036	69.7068	10.4674	80.1742	5.9705	1000
1.5	37.5797	6.0947	43.6744	9.3726	982.6876	36.3789	6.2464	42.6254	9.2515	1000
1.8	21.5362	4.3658	25.9319	16.8123	969.5220	20.8412	4.5462	25.3874	16.4966	1000
2	16.5335	3.7081	20.2416	19.1801	960.8725	16.0729	3.8514	19.9243	18.7658	1000

Çizelge 5.4. Tabakalardaki değişkenlerin bazıları ilişkili iken $L = 2$, $p = 3$, $N = 500$, $N_1 = 300$, $N_2 = 200$, $c = 1000$, $t_1 = 50$ ve $t_2 = 1$ için örnek çapları ve varyans değerleri

α	Model 1: Klasik Model					Model 2: Önerilen Yeni Model				
	n_{1K}	n_{2K}	n_K	$MSE(Var(K))$	K. Bütçe	n_{1O}	n_{2O}	n_O	$MSE(Var(O))$	Ö. Bütçe
0.2	**	**	**	**	**	281.2668	200	481.2668	0.0158	157.3375
0.4	**	**	**	**	**	281.0498	196.7392	477.7890	0.0239	485.2325
0.5	**	**	**	**	**	278.8060	200	478.8060	0.0176	849.0164
0.6	**	**	**	**	**	141.5087	200	341.5087	0.3017	1000
0.8	**	**	**	**	**	38.9117	182.8613	221.7730	1.7299	1000
1	17.5490	122.5519	140.1008	4.5800	1000	18.0610	96.9498	115.0108	4.4766	1000
1.2	10.6144	63.2499	73.8642	6.9060	996.1893	10.7386	60.2689	71.0075	6.8789	1000
1.5	6.5085	29.1167	35.6252	13.2097	987.3225	6.6041	28.4084	35.0126	13.0898	1000
1.8	4.6690	17.8498	22.5189	18.1038	979.9403	4.7618	17.3559	22.1177	17.8871	1000
2	3.9710	13.5227	17.4938	24.9817	971.3206	4.0549	13.3377	17.3926	24.6058	1000

Çizelge 5.5. Tabakalardaki değişkenlerin hepsi ilişkili iken $L = 2$, $p = 3$, $N = 450$, $M_1 = 150$, $N_2 = 300$, $c = 200$, $t_1 = 1$ ve $t_2 = 1$ için örnek çapları ve varyans değerleri

α	Model 1: Klasik Model					Model 2: Önerilen Yeni Model				
	n_{1K}	n_{2K}	n_K	$\Delta \ln(Var(K))$	K. Bütçe	n_{1O}	n_{2O}	n_O	$\Delta \ln(Var(O))$	Ö. Bütçe
0.2	**	**	**	**	**	150	300	450	0	5.8532
0.4	**	**	**	**	**	150	300	450	0	17.2120
0.5	**	**	**	**	**	150	300	450	0	29.5680
0.6	**	**	**	**	**	150	300	450	0	50.8115
0.8	**	**	**	**	**	150	300	450	0	150.9378
1	63.8790	136.1210	200	0.8825	200	62.4981	137.5019	200	0.8802	200
1.2	28.1814	62.6290	90.8104	2.4538	198.2102	26.1157	65.0196	91.1353	2.4226	200
1.5	14.4977	27.0522	41.5499	6.1163	195.9044	13.7801	28.0861	41.8662	6.0117	200
1.8	8.9446	15.7252	24.6698	12.8545	194.1388	8.6121	16.2852	24.8972	12.6134	200
2	7.1932	11.8564	19.0495	14.6517	192.3150	7.0902	12.2364	19.3266	14.3461	200

Çizelge 5.6. Tabakalardaki değişkenlerin hepsi ilişkili iken $L = 2$, $p = 3$, $N = 450$, $M_1 = 150$, $N_2 = 300$, $c = 500$, $t_1 = 15$ ve $t_2 = 25$ için örnek çapları ve varyans değerleri

α	Model 1: Klasik Model					Model 2: Önerilen Yeni Model				
	n_{1K}	n_{2K}	n_K	$\Delta \ln(Var(K))$	K. Bütçe	n_{1O}	n_{2O}	n_O	$\Delta \ln(Var(O))$	Ö. Bütçe
0.2	**	**	**	**	**	150	300	450	0	119.0894
0.4	**	**	**	**	**	150	300	450	0	356.0954
0.5	106.2165	203.4292	309.6457	0.2965	511.1636	87.0962	207.3738	294.4700	0.3322	500
0.6	44.2100	86.0954	130.3054	1.6795	507.8642	37.4870	88.4311	125.9181	1.7281	500
0.8	16.0449	28.6484	44.6933	6.0454	504.2702	14.2710	29.4419	43.7129	6.0932	500
1	9.0284	14.5830	23.6113	11.5054	500	8.1470	15.1118	23.2588	11.4626	500
1.2	5.5506	9.6260	15.1766	18.0684	495.8081	5.0661	9.9717	15.0378	17.8833	500
1.5	3.8587	6.1040	9.9627	29.6812	490.7118	3.6242	6.3126	9.9368	29.2469	500
1.8	3.0853	4.4819	7.5671	40.7739	485.9957	2.9649	4.6264	7.5914	40.0757	500
2	2.6198	3.9090	6.5287	46.4140	484.9468	2.4874	4.0358	6.5232	45.6251	500

Çizelge 5.7. Tabakalardaki değişkenler arasında ilişki yok iken $L = 2$, $p = 4$, $N = 500$, $N_1 = 300$, $N_2 = 200$, $c = 750$, $t_1 = 1$ ve $t_2 = 50$ için örnek çapları ve varyans değerleri

α	Model 1: Klasik Model					Model 2: Önerilen Yeni Model				
	n_{1K}	n_{2K}	n_K	$M\hat{M}(Var(K))$	K. Bütçe	n_{1O}	n_{2O}	n_O	$M\hat{M}(Var(O))$	Ö. Bütçe
0.2	**	**	**	**	**	260.2447	198.1849	458.4297	0.0496	147.0486
0.4	**	**	**	**	**	261.7840	198.9314	460.7154	0.0402	424.6575
0.5	**	**	**	**	**	262.2507	198.6149	460.8656	0.0422	720.8481
0.6	**	**	**	**	**	258.9351	85.6176	344.5527	0.6712	750
0.8	245.4522	25.6893	271.1415	3.3851	752.7301	200.9146	26.1378	227.0523	3.3892	749.9
1	99.4613	13.0108	112.4721	7.8654	750	87.5438	13.2491	100.7929	7.3474	750
1.2	48.7927	8.3733	57.1660	13.7266	746.5698	43.6808	8.5542	52.2350	13.1140	750
1.5	25.8387	5.2919	31.1306	20.8395	740.0126	24.1638	5.4218	29.5856	20.3205	750
1.8	16.3467	3.9104	20.2571	28.1142	734.8769	15.6091	4.0113	19.6204	27.7579	750
2	12.4439	3.3853	15.8292	36.3228	727.8557	11.8055	3.4947	15.3001	35.7106	750

Çizelge 5.8. Tabakalardaki değişkenlerin bazıları ilişkili iken $L = 2$, $p = 4$, $N = 600$, $N_1 = 350$, $N_2 = 250$, $c = 2000$, $t_1 = 45$ ve $t_2 = 10$ için örnek çapları ve varyans değerleri

α	Model 1: Klasik Model					Model 2: Önerilen Yeni Model				
	n_{1K}	n_{2K}	n_K	$M\hat{M}(Var(K))$	K. Bütçe	n_{1O}	n_{2O}	n_O	$M\hat{M}(Var(O))$	Ö. Bütçe
0.2	**	**	**	**	**	286.4789	250	536.4789	0.0495	169.6891
0.4	**	**	**	**	**	281.8497	250	531.8497	0.0519	520.7818
0.5	**	**	**	**	**	299.1808	250	549.1808	0.0405	936.4718
0.6	**	**	**	**	**	276.9597	250	526.9597	0.0569	1588.8
0.8	68.5361	198.2866	266.8277	1.0324	2012.6	68.9796	191.3177	260.2973	1.0451	2000
1	27.8623	74.6197	102.4820	3.7211	2000	28.4040	72.1818	100.5859	3.2184	2000
1.2	15.9543	35.9646	51.9189	7.0152	1985.6	16.0756	36.0870	52.1625	6.9693	2000
1.5	8.8639	18.2158	27.0797	14.0220	1965	9.0488	18.1792	27.2280	13.8482	2000
1.8	6.0493	11.4154	17.4647	20.4579	1949.6	6.1337	11.5837	17.7173	20.1614	2000
2	5	9.0135	14.0134	27.2776	1937.4	5.1022	9.0949	14.2001	26.8358	2000

Çizelge 5.9. Tabakalardaki değişkenlerin hepsi ilişkili iken $L = 2$, $p = 4$, $N = 325$, $M_1 = 125$, $N_2 = 200$, $c = 1500$, $t_1 = 15$ ve $t_2 = 50$ için örnek çapları ve varyans değerleri

α	Model 1: Klasik Model					Model 2: Önerilen Yeni Model				
	n_{1K}	n_{2K}	n_K	$M\hat{M}(Var(K))$	K. Bütçe	n_{1O}	n_{2O}	n_O	$M\hat{M}(Var(\hat{O}))$	Ö. Bütçe
0.2	**	**	**	**	**	125	200	325	0	183.6679
0.4	**	**	**	**	**	125	200	325	0	519.7563
0.5	**	**	**	**	**	125	200	325	0	874.8119
0.6	**	**	**	**	**	125	200	325	0	1472.9
0.8	48.7547	51.6206	100.3753	2.7042	1508.9	43.1536	52.8518	96.0054	2.7206	1500
1	17.8524	24.6443	42.4967	11.0345	1500	16.0330	25.1901	41.2231	10.3966	1500
1.2	12.3144	13.9920	26.3063	17.0559	1491	11.3686	14.3536	25.7221	16.9302	1500
1.5	7.4344	8.2085	15.6429	30.2375	1479.9	7.0349	8.4131	15.4479	29.9166	1500
1.8	4.9847	5.8448	10.8296	45.8658	1470.2	4.7104	5.9947	10.7051	45.2811	1500
2	4.1002	4.9204	9.0206	52.5756	1462.7	3.9474	5.0324	8.9799	51.8611	1500

Çizelge 5.10. Tabakalardaki değişkenler arasında ilişki yok iken $L = 2$, $p = 5$, $N = 200$, $M_1 = 140$, $N_2 = 60$, $c = 1200$, $t_1 = 25$ ve $t_2 = 40$ için örnek çapları ve varyans değerleri

α	Model 1: Klasik Model					Model 2: Önerilen Yeni Model				
	n_{1K}	n_{2K}	n_K	$M\hat{M}(Var(K))$	K. Bütçe	n_{1O}	n_{2O}	n_O	$M\hat{M}(Var(\hat{O}))$	Ö. Bütçe
0.2	**	**	**	**	**	140	60	200	0	157.8858
0.4	**	**	**	**	**	140	60	200	0	386.2051
0.5	**	**	**	**	**	140	60	200	0	605.6427
0.6	**	**	**	**	**	140	60	200	0	951.4670
0.8	56.2709	27.9093	84.1802	3.9262	1202	58.8833	26.3856	85.2689	3.6276	1200
1	25.7931	13.8793	39.6724	10.3151	1200	26.7118	13.3051	40.0169	10.2961	1200
1.2	15.0902	8.8708	23.9610	19.7142	1198.2	15.8365	8.8703	24.2068	19.6185	1200
1.5	8.9548	5.5727	14.5275	35.0828	1196.1	9.2201	5.3867	14.6068	34.9553	1200
1.8	6.3342	4.0856	10.4198	45.4495	1197.3	6.4974	3.9498	10.4471	45.3325	1200
2	5.3375	3.4740	8.8115	55.2425	1195	5.4754	3.3560	8.8314	55.0476	1200

Çizelge 5.11. Tabakalardaki değişkenlerin bazılarının ilişkili iken $L = 2$, $p = 5$, $N = 400$, $N_1 = 130$, $N_2 = 270$, $c = 1700$, $t_1 = 25$ ve $t_2 = 5$ için örnek çapları ve varyans değerleri

Model 1 : Klasik Model						Model 2: Önerilen Yeni Model					
α	n_{1K}	n_{2K}	n_K	$M\hat{S}n(Var(K))$	K. Bütçe	$n_{1\phi}$	$n_{2\phi}$	n_{ϕ}	$M\hat{S}n(Var(\hat{O}))$	Ö. Bütçe	
0.2	**	**	**	**	**	130	270	400	0	81.4997	
0.4	**	**	**	**	**	130	270	400	0	222.1303	
0.5	**	**	**	**	**	130	270	400	0	367.2022	
0.6	**	**	**	**	**	130	270	400	0	607.5833	
0.8	**	**	**	**	**	130	270	400	0	1668.3	
1	27.2125	203.9376	231.1501	2.0890	1700	29.3425	193.2877	222.6302	1.5760	1700	
1.2	14.8114	87.0670	101.8783	5.1736	1698.5	15.4389	84.9555	100.3945	5.1508	1700	
1.5	7.8182	37.5605	45.3787	14.3845	1697.5	8.0619	37.0531	45.1150	14.3598	1700	
1.8	5.3227	20.8678	26.1905	24.2130	1692.8	5.5952	20.4689	26.0642	24.1143	1700	
2	4.1767	15.8508	20.0275	34.5636	1692.4	4.4013	15.5931	19.9943	34.4297	1700	

Çizelge 5.12. Tabakalardaki değişkenlerin hepsi ilişkili iken $L = 2$, $p = 5$, $N = 700$, $N_1 = 300$, $N_2 = 400$, $c = 6000$, $t_1 = 15$ ve $t_2 = 10$ için örnek çapları ve varyans değerleri

Model 1: Klasik Model						Model 2: Önerilen Yeni Model				
α	n_{1K}	n_{2K}	n_K	$MSE(Var(K))$	K. Bütçe	$n_{1\phi}$	$n_{2\phi}$	n_{ϕ}	$MSE(Var(\hat{O}))$	Ö. Bütçe
0.2	**	**	**	**	**	300	400	700	0	80.0816
0.4	**	**	**	**	**	300	400	700	0	256.7283
0.5	**	**	**	**	**	231.7410	400	631.7410	0.0616	428.3456
0.6	**	**	**	**	**	244.7806	400	644.7806	0.0545	770.8909
0.8	**	**	**	**	**	243.6826	400	643.6826	0.0565	2424.6
1	144.6244	383.0633	527.6878	0.3046	6000	152.5473	371.1791	523.7264	0.2726	6000
1.2	63.2035	141.8897	205.0932	2.3091	5995	65.0278	139.7050	204.7329	2.2833	6000
1.5	24.7745	55.5280	80.3025	7.5294	5987.5	25.8773	54.5183	80.3956	7.5085	6000
1.8	14.5686	28.3619	42.9305	13.7898	5983.4	15.1558	27.8971	43.0530	13.7529	6000
2	11.1865	20.2621	31.4487	18.5341	5982.6	11.5569	19.9914	31.5483	18.4924	6000

Çizelge 5.13. Tabakalardaki değişkenlerin arasında ilişki yok iken $L = 3$, $p = 3$, $N = 1000$, $N_1 = 200$, $N_2 = 300$, $N_3 = 500$, $c = 1000$, $t_1 = 1$, $t_2 = 10$ ve $t_3 = 20$ için örnek çapları ve varyans değerleri

Model 1: Klasik Model										Model 2: Önerilen Yeni Model					
α	n_{1K}	n_{2K}	n_{3K}	n_K	$Mdn(Var(K))$	K. Bütçe	n_{1O}	n_{2O}	n_{3O}	n_O	$Mdn(Var(O))$	Ö. Bütçe			
0.2	**	**	**	**	**	**	150.9806	263.7819	429.1889	843.9514	0.0674	100.453			
0.4	**	**	**	**	**	**	154.4348	263.1350	453.1880	870.7579	0.0548	331.381			
0.5	**	**	**	**	**	**	149.4544	263.3767	433.2294	846.0605	0.0648	590.797			
0.6	**	**	**	**	**	**	144.7978	240.0726	385.4061	770.2765	0.1206	1000			
0.8	129.0143	59.0531	84.3830	272.4505	1.7433	1005.1	93.2708	56.6079	86.6265	236.5052	1.7510	1000			
1	49.3185	25.4019	34.8331	109.5535	4.9327	1000	40.0769	24.1144	35.9389	100.1302	4.8166	1000			
1.2	26.8805	14.9015	19.0495	60.8315	8.3367	994.6	23.0544	14.6392	19.4998	57.1963	8.2039	1000			
1.5	13.9229	8.5576	10.5447	33.0252	16.0365	987.1	12.3551	8.4443	10.8136	31.6130	15.8737	1000			
1.8	8.9696	5.7942	7.1719	21.9357	24.1898	981.8	8.1599	5.6873	7.3655	21.2127	23.9104	1000			
2	7.1495	4.8404	5.8711	17.8607	26.9586	974.7	6.7361	4.8038	6.0161	17.5560	26.5939	1000			

Çizelge 5.14. Tabakalardaki değişkenlerin bazıları ilişkili iken $L = 3$, $p = 3$, $N = 750$, $N_1 = 250$, $N_2 = 150$, $N_3 = 350$, $c = 1500$, $t_1 = 7.5$, $t_2 = 2.5$ ve $t_3 = 10$ için örnek çapları ve varyans değerleri

Model 1: Klasik Model										Model 2: Önerilen Yeni Model					
α	n_{1K}	n_{2K}	n_{3K}	n_K	$Mdn(Var(K))$	K. Bütçe	n_{1O}	n_{2O}	n_{3O}	n_O	$Mdn(Var(O))$	Ö. Bütçe			
0.2	**	**	**	**	**	**	208.6535	143.3804	330.8695	682.9034	0.0389	60.4839			
0.4	**	**	**	**	**	**	189.2043	141.9269	334.5453	665.6765	0.0499	181.4941			
0.5	**	**	**	**	**	**	198.5238	142.6194	331.0645	672.2077	0.0458	317.4815			
0.6	**	**	**	**	**	**	192.1305	143.2039	329.3596	664.6939	0.0540	549.0725			
0.8	**	**	**	**	**	**	170.5102	141.8993	281.3492	593.7587	0.1279	1500			
1	54.7867	72.9924	90.6619	218.4410	1.4659	1500	49.4150	68.3792	95.8440	213.6381	1.3574	1500			
1.2	28.1863	34.1057	42.5534	104.8453	3.3084	1485.9	26.1919	33.5997	44.5869	104.3784	3.2672	1500			
1.5	13.1281	16.6104	20.7113	50.4498	7.8827	1468.6	12.4863	16.5090	21.5644	50.5596	7.7499	1500			
1.8	8.5198	10.0171	12.5133	31.0503	12.3671	1457.6	8.0998	9.8928	13.0688	31.0614	12.1359	1500			
2	7.0067	8.4258	9.4224	24.8549	17.0136	1433.5	6.7302	8.3665	9.9262	25.0228	16.5796	1500			

Çizelge 5.15. Tabakalardaki değişkenlerin hepsi ilişkili iken $L = 3$, $p = 3$, $N = 500$, $N_1 = 200$, $N_2 = 125$, $N_3 = 175$, $c = 2000$, $t_1 = 17$, $t_2 = 12$ ve $t_3 = 25$ için örnek çapları ve varyans değerleri

Model 1: Klasik Model						Model 2: Önerilen Yeni Model						
α	n_{1K}	n_{2K}	n_{3K}	n_K	$\widehat{M\hat{M}}(Var(K))$	K. Bütçe	n_{1O}	n_{2O}	n_{3O}	n_O	$\widehat{M\hat{M}}(Var(\hat{O}))$	Ö. Bütçe
0.2	**	**	**	**	**	*	200	125	175	500	0	150.8042
0.4	**	**	**	**	**	**	200	125	175	500	0	421.6306
0.5	**	**	**	**	**	**	200	125	175	500	0	705.2993
0.6	**	**	**	**	**	**	200	125	175	500	0	1180.1
0.8	85.6589	83.6423	101.8240	271.1252	0.5562	2021.8	77.7806	79.7639	106.6384	264.1829	0.5693	2000
1	38.6909	33.1078	37.7984	109.5972	2.5100	2000	35.9680	32.2087	40.0816	108.2583	2.4988	2000
1.2	21.6454	17.8150	20.1332	59.5937	5.4351	1978.5	20.7934	17.3782	21.3100	59.4816	5.3655	2000
1.5	10.9083	10.1223	11.2683	32.2989	10.7598	1944.6	10.6968	10.2038	11.8060	32.7065	10.5342	2000
1.8	7.4283	6.6924	7.4677	21.5884	13.5474	1928.2	7.3240	6.6852	7.8527	21.8620	13.2451	2000
2	6.0541	5.7074	5.9639	17.7253	18.5769	1903.2	5.9715	5.8064	6.2904	18.0683	18.0806	2000

Çizelge 5.16. Tabakalardaki değişkenler arasında ilişki yok iken $L = 3$, $p = 4$, $N = 600$, $N_1 = 180$, $N_2 = 250$, $N_3 = 170$, $c = 4000$, $t_1 = 35$, $t_2 = 20$ ve $t_3 = 15$ için örnek çapları ve varyans değerleri

Model 1: Klasik Model						Model 2: Önerilen Yeni Model						
α	n_{1K}	n_{2K}	n_{3K}	n_K	$M\hat{Mn}(Var(K))$	K. Bütçe	n_{1O}	n_{2O}	n_{3O}	n_O	$M\hat{Mn}(Var(O))$	Ö. Bütçe
0.2	**	**	**	**	**	**	129.2383	210.5122	144.5988	484.3193	0.1197	191.40
0.4	**	**	**	**	**	**	157.2173	225.1918	150.7080	533.1171	0.0659	550.76
0.5	**	**	**	**	**	**	159.2647	228.9515	156.8299	545.0461	0.0542	932.17
0.6	**	**	**	**	**	**	160.2541	229.6302	158.0972	547.9816	0.0508	1571
0.8	105.4878	250	150.8073	506.2951	0.1987	3941	133.2193	214.2840	139.9072	487.4105	0.1185	3998.9
1	38.6172	90.0988	56.4282	185.1441	1.1893	4000	37.7417	88.8180	60.1787	186.7384	1.1787	4000
1.2	19.9274	44.4304	27.6903	92.0480	2.7095	3973.6	18.9990	45.6856	28.6147	93.2994	2.6880	4000
1.5	10.2517	21.1297	14.5940	45.9754	6.4717	3927.7	9.9298	21.7281	15.0892	46.7470	6.3803	4000
1.8	7.0426	12.5829	9.2589	28.8844	10.4262	3907	6.9065	12.8063	9.7005	29.4133	10.2755	4000
2	5.6545	9.8810	7.3130	22.8485	12.6851	3873.9	5.5834	10.1278	7.5608	23.2719	12.4692	4000

Çizelge 5.17. Tabakalardaki değişkenlerin bazıları ilişkili iken $L = 3$, $p = 4$, $N = 400$, $N_1 = 130$, $N_2 = 100$, $N_3 = 170$, $c = 2000$, $t_1 = 18$, $t_2 = 12$ ve $t_3 = 28$ için örnek çapları ve varyans değerleri

α	Model 1: Klasik Model						Model 2: Önerilen Yeni Model					
	n_{1K}	n_{2K}	n_{3K}	n_K	$M\hat{S}n(Var(K))$	K. Bütçe	n_{1O}	n_{2O}	n_{3O}	n_O	$M\hat{S}n(Var(O))$	Ö. Bütçe
0.2	**	**	**	**	**	**	126.6306	98.7382	165.6318	391.0005	0.0168	155.2677
0.4	**	**	**	**	**	**	126.2654	99.1940	166.0200	391.4793	0.0143	416.5297
0.5	**	**	**	**	**	**	125.2838	98.4602	164.5970	388.3411	0.0202	679.7741
0.6	**	**	**	**	**	**	127.4221	99.0293	165.7559	392.2072	0.0152	1120
0.8	74.7556	100	82.2832	257.0388	0.4086	1999.2	70.8962	87.6269	90.1499	248.6731	0.4086	2000
1	32.6668	39.0629	33.6873	105.4169	2.2012	2000	30.9619	38.3502	35.0887	104.4008	2.1962	2000
1.2	17.6701	20.5329	19.2235	57.4265	4.5521	1988	16.9116	20.3475	19.9756	57.2347	4.5185	2000
1.5	9.8750	11.2977	10.4942	31.6668	8.6806	1966.1	9.8133	11.3754	10.7454	31.9341	8.5722	2000
1.8	6.6881	7.4866	7.1341	21.3088	13.2711	1962.2	6.5274	7.4239	7.4104	21.3617	13.1084	2000
2	5.4378	6.1022	5.8626	17.4027	17.3879	1941.5	5.2519	6.2114	6.0961	17.5594	17.0955	2000

Çizelge 5.18. Tabakalardaki değişkenlerin hepsi ilişkili iken $L = 3$, $p = 4$, $N = 300$, $N_1 = 80$, $N_2 = 150$, $N_3 = 70$, $c = 500$, $t_1 = 9$, $t_2 = 3$ ve $t_3 = 6$ için örnek çapları ve varyans değerleri

α	Model 1: Klasik Model						Model 2: Önerilen Yeni Model					
	n_{1K}	n_{2K}	n_{3K}	n_K	$M\hat{S}n(Var(K))$	K. Bütçe	n_{1O}	n_{2O}	n_{3O}	n_O	$M\hat{S}n(Var(O))$	Ö. Bütçe
0.2	**	**	**	**	**	*	80	150	70	300	0	43.8261
0.4	**	**	**	**	**	**	80	150	70	300	0	107.0228
0.5	**	**	**	**	**	**	80	150	70	300	0	167.4404
0.6	**	**	**	**	**	**	80	150	70	300	0	262.1817
0.8	35.4778	150	44.9308	230.4086	0.3100	447.5302	41.8736	150	58.8244	250.6980	0.1790	500
1	18.2430	74.0541	18.9419	111.2389	2.0155	500	17.3487	75.4808	19.5699	112.3994	2.0117	500
1.2	10.3832	38.9319	10.7976	60.1127	4.6345	496.4250	9.9261	39.8246	11.2038	60.9544	4.5931	500
1.5	6.0616	18.4966	7.3409	31.8991	8.5973	492.2998	5.8558	18.9068	7.6051	32.3676	8.4894	500
1.8	4.2564	12.0170	4.7985	21.0718	15.1527	486.4847	4.1399	12.3853	4.9226	21.4478	14.8931	500
2	3.7422	9.2114	4.1379	17.0915	16.9242	483.3207	3.6415	9.4742	4.3083	17.4241	16.6046	500

Çizelge 5.19. Tabakalardaki değişkenler arasında ilişki yok iken $L = 3$, $p = 5$, $N = 1200$, $N_1 = 500$, $N_2 = 250$, $N_3 = 450$, $c = 2500$, $t_1 = 30$, $t_2 = 5$ ve $t_3 = 20$ için örnek çapları ve varyans değerleri

Model 1: Klasik Model							Model 2: Önerilen Yeni Model						
α	n_{1K}	n_{2K}	n_{3K}	n_K	$Mdn(Var(K))$	K. Bütçe	n_{1O}	n_{2O}	n_{3O}	n_O	$Mdn(Var(O))$	Ö. Bütçe	
0.2	**	**	**	**	**	**	275.8221	196.9638	373.0119	845.7977	0.1802	172.062	
0.4	**	**	**	**	**	**	277.4639	197.0345	375.2789	849.7773	0.1745	540.266	
0.5	**	**	**	**	**	**	278.9563	197.8669	375.5690	852.3922	0.1745	958.984	
0.6	**	**	**	**	**	**	277.6407	194.3815	373.3525	845.3747	0.1770	1694.2	
0.8	67.0902	142.5610	197.3798	407.0310	1.1161	2503.9	69.4250	135.3007	194.2917	399.0174	1.1192	2500	
1	27.1397	51.7041	71.3644	150.2082	4.1345	2500	28.0216	51.5836	70.0716	149.6769	4.0321	2500	
1.2	14.8091	27.9598	35.7705	78.5394	8.2610	2496.9	15.2224	28.0367	35.2946	78.5536	8.2484	2500	
1.5	8.3092	14.0466	17.8657	40.2216	17.0380	2492.1	8.5542	14.0803	17.6678	40.3022	16.9937	2500	
1.8	5.6834	9.2384	11.1323	26.0541	25.6038	2488.8	5.8495	9.2214	11.0337	26.1046	25.5284	2500	
2	4.6216	7.3603	8.8605	20.8424	31.9514	2481.8	4.7785	7.3811	8.7823	20.9419	31.8165	2500	

Çizelge 5.20. Tabakalardaki değişkenlerin bazıları ilişkili iken $L = 3$, $p = 5$, $N = 450$, $N_1 = 160$, $N_2 = 120$, $N_3 = 170$, $c = 4000$, $t_1 = 23$, $t_2 = 17$ ve $t_3 = 32$ için örnek çapları ve varyans değerleri

Model 1: Klasik Model							Model 2: Önerilen Yeni Model						
α	n_{1K}	n_{2K}	n_{3K}	n_K	$Mdn(Var(K))$	K. Bütçe	n_{1O}	n_{2O}	n_{3O}	n_O	$Mdn(Var(O))$	Ö. Bütçe	
0.2	**	**	**	**	**	**	141.9971	120	163.9923	425.9894	0.0400	194.997	
0.4	**	**	**	**	**	**	142.5339	119.3185	164.0979	425.9503	0.0401	528.482	
0.5	**	**	**	**	**	**	138.9846	118.2801	163.4968	420.7615	0.0503	865.208	
0.6	**	**	**	**	**	**	140.6021	120	166.2154	426.8175	0.0318	1435.7	
0.8	133.9144	120	149.8440	403.7583	0.0877	3700.3	140.5529	118.5499	164.4108	423.5137	0.0428	3874	
1	46.9774	68.9761	54.5914	170.5450	1.5536	4000	44.5486	63.2690	59.3690	167.1867	1.4457	4000	
1.2	24.1890	34.5508	27.8682	86.6079	4.2375	3979.9	22.9101	31.8318	30.4971	85.2389	4.1790	4000	
1.5	13.4581	16.5175	14.0374	44.0129	8.7898	3959.7	13.1300	15.3035	15.1554	43.5889	8.6724	4000	
1.8	8.4938	10.8019	8.8246	28.1204	13.6987	3926.3	8.3338	10.3607	9.4149	28.1094	13.5013	4000	
2	6.8412	8.5518	7.0485	22.4414	16.9415	3909.5	6.6886	8.2872	7.5073	22.4831	16.6852	4000	

Çizelge 5.21. Tabakalardaki değişkenlerin hepsi ilişkili iken $L = 3$, $p = 5$, $N = 7500$, $N_1 = 1500$, $N_2 = 2500$, $N_3 = 3500$, $c = 10000$, $t_1 = 15$, $t_2 = 30$ ve $t_3 = 55$ için örnek çapları ve varyans değerleri

α	Model 1: Klasik Model						Model 2: Önerilen Yeni Model					
	n_{1K}	n_{2K}	n_{3K}	n_K	$M\hat{M}(Var(K))$	K. Bütçe	$n_{1\phi}$	$n_{2\phi}$	$n_{3\phi}$	n_{ϕ}	$M\hat{M}(Var(\hat{O}))$	Ö. Bütçe
0.2	**	**	**	**	**	*	750	1250	1750	3750	0.0602	426.149
0.4	**	**	**	**	**	**	750	1250	1750	3750	0.0611	1822.1
0.5	**	**	**	**	**	**	750	1250	1750	3750	0.0588	3772.3
0.6	1355.5	2500	2079.9	5935.4	0.0200	9801.1	750	1250	1750	3750	0.0603	7815.4
0.8	205.0408	401.8601	305.3448	912.2457	0.4829	10004.3	201.6897	355.2321	327.8207	884.7425	0.4821	10000
1	69.0696	121.9881	96.4421	287.4998	1.6765	10000	64.4734	111.0707	103.6505	279.1946	1.5662	10000
1.2	31.4731	57.1061	44.0824	132.6615	3.6216	9958.1	29.7182	52.6722	47.3283	129.7187	3.5871	10000
1.5	15.7051	24.8169	20.9033	61.4253	7.5690	9898.8	15.0168	23.1223	22.2992	60.4384	7.4780	10000
1.8	9.5900	15.0394	12.2758	36.9052	13.1476	9843	9.2555	14.2131	13.0615	36.5301	12.9721	10000
2	7.4836	11.4027	9.6041	28.4903	17.0943	9813.8	7.2509	10.8091	10.1858	28.2458	16.8597	10000

Çizelge 5.22. Tabakalardaki değişkenler arasında ilişki yok iken $L = 4$, $p = 3$, $N = 1000$, $N_1 = 100$, $N_2 = 200$, $N_3 = 300$, $N_4 = 400$, $c = 600$, $t_1 = 1$, $t_2 = 5$, $t_3 = 1$ ve $t_4 = 6$ için örnek çapları ve varyans değerleri

Model 1: Klasik Model							
α	n_{1K}	n_{2K}	n_{3K}	n_{4K}	n_K	$Min(Var(K))$	K. Bütçe
0.2	**	**	**	**	**	**	**
0.4	**	**	**	**	**	**	**
0.5	**	**	**	**	**	**	**
0.6	**	**	**	**	**	**	**
0.8	67.5896	66.7673	208.0823	166.7966	509.2358	0.5564	604.4003
1	27.4891	26.7906	70.3894	61.3614	186.0306	2.3820	600
1.2	15.3765	14.8050	37.4432	30.6453	98.2700	4.4839	595.3127
1.5	8.2011	8.2695	17.4224	15.7323	49.6252	8.8801	589.5115
1.8	5.5758	5.5998	11.4191	9.8678	32.3625	15.1283	582.1672
2	4.6373	4.6589	8.6953	7.8861	25.8776	18.1092	578.7813

Model 2: Önerilen Yeni Model							
α	n_{1O}	n_{2O}	n_{3O}	n_{4O}	n_O	$Min(Var(\hat{O}))$	Ö. Bütçe
0.2	90.5371	177.1490	196.1745	354.8742	818.7348	0.0734	38.8341
0.4	83.4380	178.3607	187.7877	355.0383	804.6247	0.0823	116.5947
0.5	86.0917	173.3213	186.7360	353.5438	799.6928	0.0799	201.5860
0.6	92.1867	179.1410	195.6009	357.3944	824.3230	0.0707	355.4217
0.8	49.6062	62.4575	149.5831	182.0457	443.6926	0.5576	600
1	21.8003	25.0759	58.2610	65.7599	170.8970	2.2563	600
1.2	13.0329	14.3715	32.4179	32.4689	92.2913	4.3240	600
1.5	7.1082	8.1058	15.5497	16.5602	47.3240	8.7299	600
1.8	4.8927	5.4510	10.2871	10.4579	31.0887	14.7914	600
2	4.2715	4.5548	7.9792	8.3102	25.1157	17.7082	600

Çizelge 5.23. Tabakalardaki değişkenlerin bazıları ilişkili iken $L = 4$, $p = 3$, $N = 850$, $N_1 = 125$, $N_2 = 175$, $N_3 = 200$, $N_4 = 350$, $c = 1500$, $t_1 = 2$, $t_2 = 5$, $t_3 = 8$ ve $t_4 = 10$ için örnek çapları ve varyans değerleri

Model 1: Klasik Model							
α	n_{1K}	n_{2K}	n_{3K}	n_{4K}	n_K	$\hat{Min}(Var(K))$	K. Bütçe
0.2	**	**	**	**	**	**	**
0.4	**	**	**	**	**	**	**
0.5	**	**	**	**	**	**	**
0.6	**	**	**	**	**	**	**
0.8	125	125.2469	96.6754	261.5161	608.4384	0.1908	1502.5
1	53.7470	49.3914	36.1416	85.6417	224.9216	1.4952	1500
1.2	24.8947	25.5622	17.5384	42.5073	110.5027	3.5289	1487.7
1.5	12.8890	13.3426	9.6232	20.0328	55.8876	7.6550	1471.7
1.8	8.1771	8.1730	6.2868	12.4011	35.0380	12.4675	1455.6
2	6.8473	6.6064	5.1886	9.6166	28.2589	15.7147	1452.2

Model 2: Önerilen Yeni Model							
α	n_{1O}	n_{2O}	n_{3O}	n_{4O}	n_O	$Min(Var(O))$	Ö. Bütçe
0.2	99.1587	157.5408	137.0961	324.3921	718.1878	0.0628	71.95
0.4	97.1925	144.8692	126.2063	326.1186	694.3866	0.0827	205.70
0.5	98.3132	150.6123	129.2834	325.2875	703.4964	0.0739	352.51
0.6	97.6889	156.6205	138.1801	324.0617	716.5513	0.0669	609.8274
0.8	102.0886	121.7494	81.7157	283.0241	588.5779	0.1888	1500
1	48.2120	48.7341	31.8767	90.4892	219.3120	1.3840	1500
1.2	21.7696	25.2265	15.7075	44.8966	107.6002	3.3825	1500
1.5	11.5423	12.9291	8.7167	21.3030	54.4912	7.5080	1500
1.8	7.4534	8.0498	5.7047	13.1178	34.3257	12.1917	1500
2	6.3375	6.4848	4.7943	10.1268	27.7435	15.3909	1500

Çizelge 5.24. Tabakalardaki değişkenlerin hepsi ilişkili iken $L = 4$, $p = 3$, $N = 1000$, $N_1 = 220$, $N_2 = 170$, $N_3 = 180$, $N_4 = 430$, $c = 750$, $t_1 = 5$, $t_2 = 3$, $t_3 = 4$ ve $t_4 = 7$ için örnek çapları ve varyans değerleri

Model 1: Klasik Model							
α	n_{1K}	n_{2K}	n_{3K}	n_{4K}	n_K	$\text{Min}(\text{Var}(K))$	K. Bütçe
0.2	**	**	**	**	**	**	**
0.4	**	**	**	**	**	**	**
0.5	**	**	**	**	**	**	**
0.6	**	**	**	**	**	**	**
0.8	66.3340	76.0223	52.4711	168.8826	363.7099	0.6526	758.1139
1	25.3385	32.7214	21.8265	62.5482	142.4346	2.7366	750
1.2	14.3972	15.6710	12.4064	32.4834	74.9580	5.8051	742.4822
1.5	8.6727	9.1377	6.8990	16.0276	40.4370	11.3074	732.2115
1.8	5.3123	6.0371	5.0507	10.4077	26.8078	15.6906	725.7685
2	4.3876	4.9797	4.0697	8.3337	21.7707	19.3353	723.0545

Model 2: Önerilen Yeni Model							
α	n_{1O}	n_{2O}	n_{3O}	n_{4O}	n_O	$\text{Min}(\text{Var}(\hat{O}))$	Ö. Bütçe
0.2	175.1262	167.6570	140.3958	430	913.1790	0.0207	56.6972
0.4	176.4078	170	149.9343	430	926.3422	0.0170	171.8271
0.5	173.7671	170	141.8457	430	915.6128	0.0209	297.8203
0.6	181.3993	170	157.5461	430	938.9454	0.0149	528.1067
0.8	57.4347	71.7874	44.4025	180.7557	354.3803	0.6564	750
1	21.9770	31.1568	18.7470	67.3795	139.2603	2.7078	750
1.2	12.7466	14.9901	10.9577	34.8287	73.5232	5.7060	750
1.5	7.9368	8.8428	6.2535	17.1409	40.1740	11.0522	750
1.8	4.9626	5.8929	4.6417	10.9979	26.4952	15.3345	750
2	4.0993	4.8459	3.7340	8.7811	21.4604	18.8986	750

Çizelge 5.25. Tabakalardaki değişkenler arasında ilişki yok iken $L = 4$, $p = 4$, $N = 750$, $N_1 = 180$, $N_2 = 210$, $N_3 = 100$, $N_4 = 260$, $c = 3500$, $t_1 = 23$, $t_2 = 15$, $t_3 = 8$ ve $t_4 = 25$ için örnek çapları ve varyans değerleri

Model 1: Klasik Model						
α	n_{1K}	n_{2K}	n_{3K}	n_{4K}	n_K	$Min(Var(K))$ K. Bütçe
0.2	**	**	**	**	**	**
0.4	**	**	**	**	**	**
0.5	**	**	**	**	**	**
0.6	**	**	**	**	**	**
0.8	112.8208	160.3442	86.0058	148.0627	507.2335	0.1751 3524.3
1	41.2374	57.0904	32.9664	57.2581	188.5523	1.0869 3500
1.2	22.1977	28.9551	17.3152	29.1067	97.5747	2.3718 3473.6
1.5	11.8020	14.9786	9.5935	14.6535	51.0276	5.1350 3442.1
1.8	7.5997	9.5788	6.3206	9.4482	32.9473	7.7005 3406.6
2	6.2501	7.6870	5.2638	7.3686	26.5695	10.6406 3363.9

Model 2: Önerilen Yeni Model						
α	n_{1O}	n_{2O}	n_{3O}	n_{4O}	n_O	$Min(Var(O))$ Ö. Bütçe
0.2	137.7982	180.3347	84.3939	178.3149	580.8367	0.1080 193.9159
0.4	138.7235	179.8085	85.1990	177.8927	581.6238	0.1038 531.0531
0.5	159.1816	180.0069	89.1587	189.8486	618.1958	0.0752 911.4375
0.6	138.0338	179.8900	85.6049	184.5990	588.1276	0.1010 1468.3
0.8	117.2291	143.5893	70.7547	156.0818	487.6549	0.1834 3500
1	41.3972	58.6251	32.5936	56.3096	188.9255	1.0755 3500
1.2	22.3072	29.9017	17.3940	28.8683	98.4712	2.3539 3500
1.5	12.0483	15.4758	9.5343	14.5633	51.6217	5.0723 3500
1.8	7.6441	10.0847	6.2698	9.4566	33.4552	7.5751 3500
2	6.3915	8.1301	5.2908	7.3349	27.1473	10.4144 3500

Çizelge 5.26. Tabakalardaki değişkenlerin bazılarları ilişkili iken $L = 4$, $p = 4$, $N = 10000$, $N_1 = 1500$, $N_2 = 3000$, $N_3 = 2000$, $N_4 = 3500$, $c = 7000$, $t_1 = 5$, $t_2 = 25$, $t_3 = 15$ ve $t_4 = 20$ için örnek çapları ve varyans değerleri

Model 1: Klasik Model							
α	n_{1K}	n_{2K}	n_{3K}	n_{4K}	n_K	$\hat{Min}(Var(K))$	K. Bütçe
0.2	**	**	**	**	**	**	**
0.4	**	**	**	**	**	**	**
0.5	**	**	**	**	**	**	**
0.6	1500	2258.1	1658.6	3367.3	8784	0.0039	6870.5
0.8	413.6527	318.3198	248.1382	454.6296	1434.7	0.1704	7042.5
1	123.9295	98.5839	77.7189	137.4985	437.7309	0.6308	7000
1.2	56.2268	45.0131	36.6425	61.2487	199.1311	1.3402	6958.1
1.5	25.0184	20.7920	17.3674	27.0738	90.2516	3.0651	6899
1.8	14.5328	12.4054	10.4601	15.7969	53.1953	5.1389	6843.5
2	11.0036	9.5472	8.2980	12.0390	40.8879	6.5684	6815.7

Model 2: Önerilen Yeni Model							
α	n_{1O}	n_{2O}	n_{3O}	n_{4O}	n_O	$\hat{Min}(Var(\hat{O}))$	Ö. Bütçe
0.2	750	1500	1000	1750	5000	0.0253	275.4932
0.4	750	1500	1000	1750	5000	0.0256	1170.9
0.5	750	1500	1000	1750	5000	0.0254	2416.2
0.6	750	1500	1000	1750	5000	0.0254	4989.2
0.8	149.8741	157.1965	134.0716	402.3282	843.4703	0.3150	4884.3
1	91.4760	82.9267	44.0891	190.4059	408.8976	0.6240	7000
1.2	54.5355	47.6194	36.2356	59.6203	198.0108	1.3312	7000
1.5	24.5178	22.0418	17.2056	26.5456	90.3108	3.0302	7000
1.8	14.4531	13.1073	10.4300	15.5690	53.5594	5.0672	7000
2	10.9703	10.0833	8.2721	11.8954	41.2212	6.4719	7000

Çizelge 5.27. Tabakalardaki değişkenlerin hepsi ilişkili iken $L=4$, $p=4$, $N=1550$, $N_1=450$, $N_2=500$, $N_3=350$, $N_4=250$, $c=5750$, $t_1=25$, $t_2=35$, $t_3=18$ ve $t_4=10$ için örnek çapları ve varyans değerleri

Model 1: Klasik Model								
α	n_{1K}	n_{2K}	n_{3K}	n_{4K}	n_K	$\hat{Min}(Var(K))$	K. Bütçe	
0.2	**	**	**	**	**	**	**	**
0.4	**	**	**	**	**	**	**	**
0.5	**	**	**	**	**	**	**	**
0.6	**	**	**	**	**	**	**	**
0.8	227.2511	182.1434	149.3255	182.9734	741.6933	0.2010	5803.5	
1	74.4564	62.3411	56.9299	68.1916	261.9189	0.8593	5750	
1.2	36.6052	31.7099	27.5356	31.9171	127.7678	1.9348	5695.7	
1.5	17.2716	15.9461	13.9567	16.2649	63.4393	3.9713	5617.7	
1.8	11.1673	9.7761	8.8889	9.6192	39.4513	6.8962	5551.4	
2	8.6734	7.6996	7.2549	7.7764	31.4044	8.7300	5507.8	

Model 2: Önerilen Yeni Model								
α	n_{1O}	n_{2O}	n_{3O}	n_{4O}	n_O	$\hat{Min}(Var(\hat{O}))$	Ö Bütçe	
0.2	225.0005	250.0004	175.0004	125.0004	775.0017	0.1700	256.2864	
0.4	225.0005	250.0005	175.0003	125.0005	775.0018	0.1678	747.8301	
0.5	225.0005	250.0004	175.0003	125.0004	775.0016	0.1648	1278.3	
0.6	225.0005	250.0005	175.0003	125.0005	775.0018	0.1715	2186.1	
0.8	198.6739	213.9115	155.0679	113.1564	680.8098	0.2159	5741.1	
1	69.5938	65.3520	59.8916	64.4784	259.3159	0.8491	5750	
1.2	35.8811	33.3771	27.0197	31.0758	127.3536	1.9154	5750	
1.5	17.2186	16.7550	13.8477	15.9301	63.7514	3.9035	5750	
1.8	11.2352	10.2838	8.8162	9.5153	39.8505	6.7532	5750	
2	8.7424	8.1091	7.2452	7.6998	31.7965	8.5325	5750	

Çizelge 5.28. Tabakalardaki değişkenler arasında ilişki yok iken $L = 4$, $p = 5$, $N = 750$, $N_1 = 300$, $N_2 = 200$, $N_3 = 100$, $N_4 = 150$, $c = 475$, $t_1 = 2$, $t_2 = 3$, $t_3 = 1$ ve $t_4 = 1$ için örnek çapları ve varyans değerleri

Model 1: Klasik Model							
α	n_{1K}	n_{2K}	n_{3K}	n_{4K}	n_K	$\hat{Min}(Var(K))$	K. Bütçe
0.2	**	**	**	**	**	**	**
0.4	**	**	**	**	**	**	**
0.5	**	**	**	**	**	**	**
0.6	**	**	**	**	**	**	**
0.8	300	152.4931	100	150	702.4931	0.0313	454.0086
1	99.7327	54.6501	44.2829	67.3016	265.9672	0.6531	475
1.2	46.2725	27.6203	23.2833	33.4817	130.6578	1.5990	471.4427
1.5	22.7312	13.3033	11.7685	15.8066	63.6096	3.7844	465.5340
1.8	13.5348	8.4874	7.3334	10.1607	39.5163	6.3096	459.5295
2	10.4691	6.8410	5.9228	7.9656	31.1985	8.0412	458.1321

Model 2: Önerilen Yeni Model							
α	n_{1O}	n_{2O}	n_{3O}	n_{4O}	n_O	$\hat{Min}(Var(O))$	Ö. Bütçe
0.2	196.8275	166.5852	84.8585	115.5438	563.8150	0.1235	19.1141
0.4	199.8738	165.1953	86.2261	118.3426	569.6378	0.1154	52.4803
0.5	192.2388	166.4852	85.0401	114.5072	558.2714	0.1230	86.3613
0.6	188.5019	166.4644	85.3737	112.2055	552.5456	0.1280	142.3179
0.8	190.8084	166.9606	82.1170	115.5160	555.4021	0.1315	392.1687
1	103.6942	57.6921	36.4514	58.0839	255.9217	0.6403	475
1.2	47.0898	27.8201	22.6143	33.2467	130.7708	1.5867	475
1.5	23.0897	13.5865	11.5970	15.8945	64.1677	3.7291	475
1.8	13.7526	8.8280	7.1803	10.1723	39.9331	6.1859	475
2	10.7149	6.9738	5.9303	8.0195	31.6385	7.8907	475

Çizelge 5.29. Tabakalardaki değişkenlerin bazıları ilişkili iken $L = 4$, $p = 5$, $N = 1300$, $N_1 = 220$, $N_2 = 440$, $N_3 = 330$, $N_4 = 310$, $c = 4000$, $t_1 = 10$, $t_2 = 31$, $t_3 = 22$ ve $t_4 = 13$ için örnek çapları ve varyans değerleri

Model 1: Klasik Model								
α	n_{1K}	n_{2K}	n_{3K}	n_{4K}	n_K	$Min(Var(K))$	K. Bütçe	
0.2	**	**	**	**	**	**	**	**
0.4	**	**	**	**	**	**	**	**
0.5	**	**	**	**	**	**	**	**
0.6	**	**	**	**	**	**	**	**
0.8	65.8925	122.0379	147.7750	250.5476	586.2530	1.0209	4008.6	
1	27.5380	45.8001	54.9199	84.3524	212.6103	4.6560	4000	
1.2	13.7852	23.7684	28.0394	42.4615	108.0545	10.1014	3991.3	
1.5	7.7644	12.5196	14.2107	20.5459	55.0405	21.3333	3978.8	
1.8	5.1136	8.0838	9.2349	12.6384	35.0708	30.8741	3975.5	
2	4.5186	6.4977	7.5245	9.6457	28.1865	42.2172	3968.1	

Model 2: Önerilen Yeni Model								
α	n_{1O}	n_{2O}	n_{3O}	n_{4O}	n_O	$Min(Var(O))$	Ö. Bütçe	
0.2	160.0210	297.3473	294.6281	310	1062	0.1324	233.9654	
0.4	155.8944	296.6473	299.5399	310	1062.1	0.1323	721.7833	
0.5	156.3442	304.9695	294.1164	310	1065.4	0.1285	1272.6	
0.6	157.5176	298.8708	298.2807	310	1064.7	0.1319	2233.8	
0.8	59.1104	114.7892	151.2798	268.5840	593.7634	1.0205	4000	
1	26.6283	42.8486	57.7712	87.2648	214.5130	4.5913	4000	
1.2	13.5173	22.2059	28.9105	44.8099	109.4437	10.0485	4000	
1.5	7.5675	11.8276	14.6586	21.5017	55.5554	21.1985	4000	
1.8	5.0696	7.7280	9.4993	13.0188	35.3158	30.7143	4000	
2	4.4460	6.2159	7.7438	9.9433	28.3491	41.9703	4000	

Çizelge 5.30. Tabakalardaki değişkenlerin hepsi ilişkili iken $L = 4$, $p = 5$, $N = 1500$, $N_1 = 180$, $N_2 = 390$, $N_3 = 520$, $N_4 = 410$, $c = 3750$, $t_1 = 5$, $t_2 = 33$, $t_3 = 54$ ve $t_4 = 45$ için örnek çapları ve varyans değerleri

Model 1: Klasik Model								
α	n_{1K}	n_{2K}	n_{3K}	n_{4K}	n_K	$\hat{M}\hat{a}\hat{n}(Var(K))$	K. Bütçe	
0.2	**	**	**	**	**	**	**	**
0.4	**	**	**	**	**	**	**	**
0.5	**	**	**	**	**	**	**	**
0.6	135.2871	172.0729	262.2464	312.9497	882.5561	0.6445	3759.7	
0.8	32.9414	45.4709	66.7136	74.7330	219.8589	5.7606	3755.5	
1	15.6267	21.1066	28.7473	31.6221	97.1027	13.9912	3750	
1.2	9.7996	15.5652	16.4056	17.8503	56.6207	24.2083	3744.9	
1.5	5.9555	7.2475	9.1809	10.4504	32.8343	42.6279	3739	
1.8	4.0757	5.0525	6.5413	6.9491	22.6186	69.7493	3733.7	
2	3.5447	4.4421	5.2911	5.7816	19.0595	78.6675	3730	

Model 2: Önerilen Yeni Model								
α	n_{1O}	n_{2O}	n_{3O}	n_{4O}	n_O	$\hat{M}\hat{a}\hat{n}(Var(O))$	O. Bütçe	
0.2	143.1193	318.1779	520	410	1391.3	0.0318	456.4883	
0.4	145.9490	340.5717	520	410	1416.5	0.0251	1534.8	
0.5	145.1779	335.8862	520	410	1411.1	0.0261	2807.6	
0.6	106.2695	154.3301	263.6246	329.3706	853.5948	0.6471	3750	
0.8	30.3360	40.1283	68.2377	77.2374	215.9394	5.6924	3750	
1	14.5704	19.0861	29.3871	32.4533	95.4970	13.9574	3750	
1.2	9.3327	11.4226	16.7307	18.3371	55.8230	24.1251	3750	
1.5	5.7957	6.7111	9.3247	10.6722	32.5037	42.4768	3750	
1.8	3.9278	4.7115	6.6205	7.0986	22.3585	69.4820	3750	
2	3.4561	4.1669	5.3519	5.9078	18.8826	78.3489	3750	

Çizelge 5.31. Tabakalardaki değişkenler arasında ilişki yok iken $L = 5$, $p = 3$, $N = 825$, $N_1 = 300$, $N_2 = 200$, $N_3 = 100$, $N_4 = 150$, $N_5 = 75$, $c = 3000$, $t_1 = 28$, $t_2 = 16$, $t_3 = 14$, $t_4 = 18$ ve $t_5 = 7$ için örnek çapları ve varyans değerleri

Model 1: Klasik Model									
α	n_{1K}	n_{2K}	n_{3K}	n_{4K}	n_{5K}	n_K	$\hat{Min}(Var(K))$	K. Bütçe	
0.2	**	**	**	**	**	**	**	**	**
0.4	**	**	**	**	**	**	**	**	**
0.5	**	**	**	**	**	**	**	**	**
0.6	**	**	**	**	**	**	**	**	**
0.8	84.0599	75.1387	65.6743	118.5171	75	418.3901	1.3564	2917.3	
1	34.5547	29.3895	29.0279	45.6897	47.6328	186.2947	4.8763	3000	
1.2	19.1931	17.1866	15.7305	24.6907	23.0263	99.8272	10.2041	2983.9	
1.5	10.5271	9.4715	8.9657	13.3320	11.8845	54.1809	20.6667	2961.6	
1.8	6.7773	6.3469	6.3706	9.0389	7.9422	36.4760	29.3477	2953.4	
2	5.6776	5.4134	4.9844	7.0641	6.6723	29.8117	39.2550	2929.1	

Model 2: Önerilen Yeni Model									
α	n_{1O}	n_{2O}	n_{3O}	n_{4O}	n_{5O}	n_O	$\hat{Min}(Var(\hat{O}))$	Ö. Bütçe	
0.2	284.2687	146.9184	97.0762	150	75	753.2634	0.0716	230.6732	
0.4	284.2484	144.3801	96.9582	150	75	750.5867	0.0732	645.4248	
0.5	283.9048	145.5078	96.9213	150	75	751.3340	0.0730	1083.7	
0.6	282.2312	146.7173	95.5496	150	75	749.4980	0.0701	1819.3	
0.8	101.3247	76.2249	61.1525	108.2364	75	421.9385	1.2167	3000	
1	40.2945	27.1763	26.0651	43.3793	41.5991	178.5144	4.7910	3000	
1.2	22.6081	15.8499	14.2286	23.0127	20.5847	96.2840	9.9666	3000	
1.5	12.1861	9.1288	8.2371	12.4294	10.7824	52.7638	20.1740	3000	
1.8	7.6757	6.1415	5.9719	8.6667	7.3821	35.8378	28.7862	3000	
2	6.4616	5.2370	4.6470	6.7547	6.1936	29.2939	38.3080	3000	

Çizelge 5.32. Tabakalardaki değişkenlerin bazıları ilişkili iken $L = 5$, $p = 3$, $N = 1125$, $N_1 = 325$, $N_2 = 130$, $N_3 = 260$, $N_4 = 190$, $N_5 = 220$, $c = 2500$, $t_1 = 7$, $t_2 = 3$, $t_3 = 9$, $t_4 = 1$ ve $t_5 = 12$ için örnek çapları ve varyans değerleri

Model 1: Klasik Model									
α	n_{1K}	n_{2K}	n_{3K}	n_{4K}	n_{5K}	n_K	$\hat{Min}(Var(K))$	K. Bütçe	
0.2	**	**	**	**	**	**	**	**	**
0.4	**	**	**	**	**	**	**	**	**
0.5	**	**	**	**	**	**	**	**	**
0.6	**	**	**	**	**	**	**	**	**
0.8	196.8660	114.4942	228.5310	190	220	949.8912	0.1609	2270.5	
1	67.1670	40.5825	77.7111	221.7027	82.2484	489.4117	2.2484	2500	
1.2	33.9355	19.7725	38.9411	95.6774	37.5799	225.9064	5.6535	2487.1	
1.5	15.8066	11.1477	17.7735	39.1019	18.9836	102.8133	14.2694	2463	
1.8	9.9904	6.4420	11.3015	22.8914	11.2257	61.8509	23.6678	2446.9	
2	7.5495	5.3316	8.5830	16.7129	9.1770	47.3540	33.1459	2437.2	

Model 2: Önerilen Yeni Model									
α	n_{1O}	n_{2O}	n_{3O}	n_{4O}	n_{5O}	n_O	$\hat{Min}(Var(O))$	Ö. Bütçe	
0.2	315.9670	120.2554	243.1111	190	220	1089.3	0.0269	95.1007	
0.4	316.5810	120.8507	244.8731	190	220	1092.3	0.0251	283.6440	
0.5	316.3534	113.1122	242.3856	190	220	1081.9	0.0310	488.3020	
0.6	262.0917	99.8655	238.4228	190	220	1010.4	0.0796	814.0558	
0.8	299.0879	120.2261	242.5511	190	220	1071.9	0.0387	2500	
1	82.2247	36.1477	76.1380	176.5358	79.5172	450.5633	2.1357	2500	
1.2	39.3241	19.3304	37.6201	94.8716	36.0541	227.2003	5.5798	2500	
1.5	18.7402	11.0067	17.2451	38.5634	18.2890	103.8443	13.9810	2500	
1.8	11.5614	6.4660	11.0402	22.6365	10.9193	62.6234	23.2022	2500	
2	8.7477	5.3180	8.4323	16.5960	8.9635	48.0576	32.4793	2500	

Çizelge 5.33. Tabakalardaki değişkenlerin hepsi ilişkili iken $L = 5$, $p = 3$, $N = 1600$, $N_1 = 500$, $N_2 = 350$, $N_3 = 200$, $N_4 = 150$, $N_5 = 400$, $c = 3000$, $t_1 = 13$, $t_2 = 5$, $t_3 = 7$, $t_4 = 3$ ve $t_5 = 9$ için örnek çapları ve varyans değerleri

Model 1: Klasik Model										
α	n_{1K}	n_{2K}	n_{3K}	n_{4K}	n_{5K}	n_K	$\hat{Min}(Var(K))$	K. Bütçe		
0.2	**	**	**	**	**	**	**	**	**	**
0.4	**	**	**	**	**	**	**	**	**	**
0.5	**	**	**	**	**	**	**	**	**	**
0.6	**	**	**	**	**	**	**	**	**	**
0.8	179.2447	205.5592	171.8326	150	400	1106.6	0.3189	2860.8		
1	63.9509	64.1932	47.2276	77.4503	142.7476	395.5696	2.4249	3000		
1.2	31.3288	30.1754	28.5575	38.3539	60.6102	189.0258	5.8274	2978.4		
1.5	14.7921	15.4952	13.5368	18.0606	27.9137	89.7983	14.6959	2950.8		
1.8	8.9059	9.8609	8.0750	11.9392	16.5125	55.3235	22.4077	2936.2		
2	7.3536	7.6095	6.8418	8.9452	12.2278	42.9779	28.4009	2905.9		

Model 2: Önenilen Yeni Model										
α	n_{1O}	n_{2O}	n_{3O}	n_{4O}	n_{5O}	n_O	$\hat{Min}(Var(O))$	O. Bütçe		
0.2	316.7916	219.2283	197.2417	150	400	1283.3	0.1202	113.9626		
0.4	311.2815	215.9173	196.9089	150	400	1274.1	0.1253	351.1542		
0.5	313.1966	213.4322	200	150	400	1276.6	0.1247	618.8496		
0.6	313.2722	213.3838	191.4666	150	400	1268.1	0.1342	1085.8		
0.8	218.8695	199.3678	174.2150	150	400	1142.5	0.2492	3000		
1	74.8206	62.2979	44.1752	75.1513	131.2403	387.6852	2.2899	3000		
1.2	36.9079	29.1016	26.8607	37.0362	56.3218	186.2283	5.7064	3000		
1.5	17.1686	15.1600	12.9677	17.6752	26.5360	89.5076	14.3756	3000		
1.8	10.2327	9.7047	7.8265	11.7633	15.9002	55.4274	21.9446	3000		
2	8.46964	7.4937	6.6302	8.7783	11.7749	43.1465	27.6691	3000		

Çizelge 5.34. Tabakalardaki değişkenler arasında ilişki yok iken $L = 5$, $p = 4$, $N = 890$, $N_1 = 220$, $N_2 = 140$, $N_3 = 180$, $N_4 = 100$, $N_5 = 250$, $c = 2000$, $t_1 = 10$, $t_2 = 8$, $t_3 = 7$, $t_4 = 2$ ve $t_5 = 12$ için örnek çapları ve varyans değerleri

Model 1: Klasik Model									
α	n_{1K}	n_{2K}	n_{3K}	n_{4K}	n_{5K}	n_K	$\hat{Min}(Var(K))$	K. Bütçe	
0.2	**	**	**	**	**	**	**	**	**
0.4	**	**	**	**	**	**	**	**	**
0.5	**	**	**	**	**	**	**	**	**
0.6	**	**	**	**	**	**	**	**	**
0.8	138.7337	108.2238	133.6284	100	173.2666	653.8526	0.5066	2029.2	
1	51.2480	39.0092	48.8410	47.1088	61.6119	247.8188	3.4431	2000	
1.2	25.5861	19.9863	24.9102	24.8605	31.3113	126.6543	7.2445	1954.8	
1.5	13.0800	10.3193	12.1942	12.4894	16.0934	64.1764	15.2686	1899.3	
1.8	8.5384	6.9135	8.1294	7.7149	9.6799	40.9762	26.5131	1831.9	
2	6.6241	5.3230	6.5824	6.4087	8.0064	32.9447	31.2493	1820.1	

Model 2: Önerilen Yeni Model

α	n_{1O}	n_{2O}	n_{3O}	n_{4O}	n_{5O}	n_O	$\hat{Min}(Var(O))$	Ö. Bütçe	
0.2	204.5611	132.7290	162.8441	93.9349	230.3018	824.3709	0.0955	110.2116	
0.4	202.0117	133.2738	167.4709	92.5396	230.7453	826.0414	0.0862	312.5172	
0.5	211.6901	136.0776	172.0181	95.1307	235.9668	850.8834	0.0537	534.4681	
0.6	205.8097	133.5492	168.5657	93.9409	233.9281	835.7936	0.0766	894.1926	
0.8	168.8156	87.1882	122.8774	87.1891	163.9215	629.9918	0.5078	2000	
1	61.5572	35.2912	47.8943	37.7182	57.6168	240.0777	3.3771	2000	
1.2	29.6819	19.1730	24.3352	22.4915	30.7432	126.4248	7.0268	2000	
1.5	15.8192	10.0642	12.1232	10.9509	15.7132	64.6707	14.5114	2000	
1.8	10.1436	7.3038	8.0755	7.2224	9.5357	42.2810	24.9331	2000	
2	7.6933	5.5690	6.6847	6.1095	8.0237	34.0804	29.5623	2000	

Çizelge 5.35. Tabakalardaki değişkenlerin bazıları ilişkili iken $L = 5$, $p = 4$, $N = 1430$, $N_1 = 170$, $N_2 = 410$, $N_3 = 240$, $N_4 = 330$, $N_5 = 280$, $c = 2500$, $t_1 = 4$, $t_2 = 9$, $t_3 = 3$, $t_4 = 10$ ve $t_5 = 8$ için örnek çapları ve varyans değerleri

Model 1: Klasik Model										
α	n_{1K}	n_{2K}	n_{3K}	n_{4K}	n_{5K}	n_K	$Min(Var(K))$	K. Kul. Bütçe		
0.2	**	**	**	**	**	**	**	**		
0.4	**	**	**	**	**	**	**	**		
0.5	**	**	**	**	**	**	**	**		
0.6	**	**	**	**	**	**	**	**		
0.8	170	241.9364	240	161.6523	254.6950	1068.3	0.2667	2467.9		
1	68.2113	78.0385	99.0194	54.5822	85.2410	385.0924	1.9627	2500		
1.2	30.9123	37.8983	47.0930	26.8932	39.6483	182.4452	4.6082	2438.1		
1.5	14.7706	17.5287	22.0793	13.8030	18.5904	86.7720	10.5447	2352.9		
1.8	9.0734	10.7145	12.7722	8.7426	11.4234	52.7260	16.9879	2285.6		
2	7.4558	8.4091	9.9153	6.8809	8.7107	41.3718	22.4259	2234.2		

Model 2: Önerilen Yeni Model										
α	n_{1O}	n_{2O}	n_{3O}	n_{4O}	n_{5O}	n_O	$Min(Var(O))$	O. Kul. Bütçe		
0.2	166.6852	330.6835	229.3530	266.0288	266.9173	1259.7	0.0766	103.7443		
0.4	166.9224	364.5710	227.6448	290.9419	269.9743	1320.1	0.0514	324.3706		
0.5	166.6080	328.1143	222.7184	261.6756	266.9204	1246	0.0866	551.8928		
0.6	167.0580	356.9567	227.4532	290.7538	270.6829	1312.9	0.0532	1001.3		
0.8	165.9969	265.5591	166.7418	214.7688	204.6925	1017.8	0.2466	2500		
1	72.1858	90.8590	87.7918	53.6165	74.2481	378.7013	1.8262	2500		
1.2	32.8437	44.8525	42.2365	26.8306	35.8213	182.5845	4.4271	2500		
1.5	16.1082	20.6384	21.0527	13.9798	17.4884	89.2674	9.9851	2500		
1.8	10.2224	12.6817	12.1065	8.8918	10.8932	54.7955	15.9253	2500		
2	8.3872	9.8864	9.6126	7.0855	8.3644	43.3360	20.9260	2500		

Çizelge 5.36. Tabakalardaki değişkenlerin hepsi ilişkili iken $L = 5$, $p = 4$, $N = 1460$, $N_1 = 150$, $N_2 = 460$, $N_3 = 280$, $N_4 = 330$, $N_5 = 240$, $c = 5500$, $t_1 = 7$, $t_2 = 15$, $t_3 = 10$, $t_4 = 27$ ve $t_5 = 12$ için örnek çapları ve varyans değerleri

Model 1: Klasik Model									
α	n_{1K}	n_{2K}	n_{3K}	n_{4K}	n_{5K}	n_K	$\hat{M}\hat{m}(Var(K))$	K. Bütçe	
0.2	**	**	**	**	**	**	**	**	**
0.4	**	**	**	**	**	**	**	**	**
0.5	**	**	**	**	**	**	**	**	**
0.6	**	**	**	**	**	**	**	**	**
0.8	150	321.4726	280	147.9111	240	1339.4	0.1980	5245.1	
1	65.2426	103.8320	92.8386	52.0671	95.9687	409.9490	1.7424	5500	
1.2	32.8242	47.3833	47.9073	24.2076	42.7996	195.1220	4.0068	5363.1	
1.5	15.8511	22.0209	20.7380	12.9784	18.8155	90.4039	9.9852	5178	
1.8	9.5407	13.0039	12.6349	7.9583	11.5689	54.7067	15.9838	4999.2	
2	7.6031	10.1137	9.3808	6.3001	9.2056	42.6033	21.5826	4907.5	

Model 2: Önerilen Yeni Model									
α	n_{1O}	n_{2O}	n_{3O}	n_{4O}	n_{5O}	n_O	$\hat{M}\hat{m}(Var(\hat{O}))$	Ö Bütçe	
0.2	150	415.7013	280	267.7984	240	1353.5	0.0422	218.5324	
0.4	150	403.2756	280	287.3810	240	1360.7	0.0397	679.8453	
0.5	150	394.1750	280	278.9754	240	1343.2	0.0475	1187.7	
0.6	150	397.5258	280	269.1975	240	1336.7	0.0519	2076.4	
0.8	150	312.4696	209.4661	217.2965	223.6800	1112.9	0.1785	5500	
1	66.7926	123.9361	78.0780	51.4846	83.5455	403.8368	1.6069	5500	
1.2	34.9133	55.8873	43.6187	24.1757	38.7330	197.3280	3.8520	5500	
1.5	17.0976	26.1649	19.3791	13.1266	17.2584	93.0267	9.4290	5500	
1.8	10.2302	15.5674	11.9948	8.1516	10.9119	56.8559	14.9098	5500	
2	8.3006	11.9493	9.0972	6.4480	8.7832	44.5784	20.1059	5500	

Çizelge 5.37. Tabakalardaki değişkenler arasında ilişki yok iken $L = 5$, $p = 5$, $N = 1025$, $N_1 = 300$, $N_2 = 200$, $N_3 = 100$, $N_4 = 150$, $N_5 = 275$, $c = 900$, $t_1 = 7$, $t_2 = 3$, $t_3 = 1$, $t_4 = 5$ ve $t_5 = 9$ için örnek çapları ve varyans değerleri

Model 1: Klasik Model									
α	n_{1K}	n_{2K}	n_{3K}	n_{4K}	n_{5K}	n_K	$Min(Var(K))$	K. Bütçe	
0.2	**	**	**	**	**	**	**	**	**
0.4	**	**	**	**	**	**	**	**	**
0.5	**	**	**	**	**	**	**	**	**
0.6	**	**	**	**	**	**	**	**	**
0.8	100.5597	127.7319	100	77.8866	75.5544	481.7326	0.9471	914.2990	
1	38.8543	47.6758	36.5422	34.0637	30.9035	188.0395	3.4900	900	
1.2	21.7496	25.9008	20.2900	18.0368	16.2806	102.2578	6.6348	884.7117	
1.5	11.2957	12.7279	10.7546	10.1110	9.5478	54.4370	12.5747	863.5146	
1.8	7.5198	8.6539	6.9296	6.3941	6.4484	35.9458	20.8922	841.7591	
2	6.1889	6.8335	5.6534	5.3870	5.2239	29.2867	25.2247	830.8704	

Model 2: Önerilen Yeni Model									
α	n_{1O}	n_{2O}	n_{3O}	n_{4O}	n_{5O}	n_O	$Min(Var(\hat{O}))$	Ö. Bütçe	
0.2	256.2798	183.9949	90.1345	142.3062	218.3032	891.0184	0.1015	72.1030	
0.4	257.2755	183.5190	91.6064	143.3657	215.0701	890.8368	0.0969	208.2558	
0.5	257.7057	183.8062	90.8046	138.8582	226.2969	897.4715	0.0911	356.8817	
0.6	259.0379	184.3395	89.5159	136.7937	202.1678	871.8548	0.1152	593.0839	
0.8	97.1329	123.6164	77.9608	69.9792	81.4312	450.1205	0.9733	900	
1	39.6110	45.3312	34.7563	30.6115	33.2128	183.5229	3.4417	900	
1.2	21.9227	26.3011	18.1655	17.4211	17.3860	101.1964	6.5173	900	
1.5	11.5931	13.1283	10.2209	9.7513	10.2665	54.9601	12.1899	900	
1.8	7.7647	9.0441	6.8328	6.2509	6.9464	36.8389	20.0728	900	
2	6.3967	7.1987	5.5090	5.2731	5.6641	30.0416	24.1615	900	

Çizelge 5.38. Tabakalardaki değişkenlerin bazıları ilişkili iken $L = 5$, $p = 5$, $N = 825$, $N_1 = 100$, $N_2 = 125$, $N_3 = 150$, $N_4 = 200$, $N_5 = 250$, $c = 850$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 4$, $t_4 = 6$ ve $t_5 = 8$ için örnek çapları ve varyans değerleri

Model 1: Klasik Model									
α	n_{1K}	n_{2K}	n_{3K}	n_{4K}	n_{5K}	n_K	$M\hat{m}(Var(K))$	K. Bütçe	
0.2	**	**	**	**	**	**	**	**	**
0.4	**	**	**	**	**	**	**	**	**
0.5	**	**	**	**	**	**	**	**	**
0.6	**	**	**	**	**	**	**	**	**
0.8	100	116.0793	80.9604	129.8317	94.8508	521.7223	0.6114	863.6474	
1	45.0420	41.7074	33.7058	49.1946	36.4441	206.0939	3.1363	850	
1.2	23.2955	24.5654	16.2323	25.2962	20.1732	109.5626	5.9679	834.2330	
1.5	12.5886	12.0131	9.4688	13.2710	10.5289	57.8704	12.8845	807.8747	
1.8	7.4572	8.5204	6.2220	8.3710	7.0412	37.6119	19.6225	782.5628	
2	6.4532	5.9817	5.2485	6.8505	5.7718	30.3057	24.0716	771.4772	

Model 2: Önerilen Yeni Model									
α	n_{1O}	n_{2O}	n_{3O}	n_{4O}	n_{5O}	n_O	$M\hat{m}(Var(\hat{O}))$	Ö. Bütçe	
0.2	95.2899	122.1474	130.3671	181.8989	216.0752	745.7786	0.0869	58.7413	
0.4	95.4243	122.4337	139.9270	190.6981	222.5251	771.0081	0.0551	167.2637	
0.5	95.2708	122.2989	135.7221	194.2108	222.8659	770.3684	0.0539	281.5236	
0.6	96.0794	122.4888	134.0200	190.5167	222.1400	765.2450	0.0616	471.5158	
0.8	93.4853	113.3893	72.0427	122.7234	100.7353	502.3759	0.6343	850	
1	44.2501	42.7351	32.5177	46.1971	39.1283	204.8282	3.1224	850	
1.2	22.9818	26.6172	15.3801	23.8995	22.0547	110.9334	5.8273	850	
1.5	12.7451	13.0473	9.5448	13.0794	11.4135	59.8302	12.3937	850	
1.8	7.4424	9.4689	6.4841	8.2111	7.7269	39.3334	18.6287	850	
2	6.6382	6.4722	5.4610	6.8875	6.3072	31.7661	22.8461	850	

Çizelge 5.39. Tabakalardaki değişkenlerin hepsi ilişkili iken $L = 5$, $p = 5$, $N = 1400$, $N_1 = 170$, $N_2 = 340$, $N_3 = 220$, $N_4 = 410$, $N_5 = 260$, $c = 5000$, $t_1 = 10$, $t_2 = 13$, $t_3 = 12$, $t_4 = 14$ ve $t_5 = 11$ için örnek çapları ve varyans değerleri

Model 1: Klasik Model									
α	n_{1K}	n_{2K}	n_{3K}	n_{4K}	n_{5K}	n_K	$Min(Var(K))$	K. Bütçe	
0.2	**	**	**	**	**	**	**	**	**
0.4	**	**	**	**	**	**	**	**	**
0.5	**	**	**	**	**	**	**	**	**
0.6	**	**	**	**	**	**	**	**	**
0.8	155.8370	305.4515	174.2722	410	208.9718	1254.5	0.0560	5090.2	
1	49.9245	94.3429	53.9568	131.4014	71.5633	401.1889	1.2647	5000	
1.2	25.4566	43.1796	25.8109	59.3800	33.4807	187.3077	3.5566	4896.5	
1.5	13.1167	20.7339	12.8868	25.4107	15.9471	88.0952	8.2784	4751.3	
1.8	7.7603	12.1069	8.2776	15.2127	9.7424	53.0998	13.8562	4637.6	
2	6.1088	9.3719	6.6640	11.4486	7.8055	41.3987	17.3460	4553.1	

Model 2: Önerilen Yeni Model									
α	n_{1O}	n_{2O}	n_{3O}	n_{4O}	n_{5O}	n_O	$Min(Var(O))$	Ö. Bütçe	
0.2	170	340	207.0743	379.0846	240.1181	1336.3	0.0263	183.3354	
0.4	170	340	206.0773	400.2142	257.6908	1374	0.0090	568.1328	
0.5	170	340	199.0755	398.8771	258.5516	1366.5	0.0114	995.8868	
0.6	170	340	192.3861	409.0699	241.0514	1352.5	0.0134	1741.1	
0.8	142.6771	315.7258	196.1125	350.1339	224.0451	1228.7	0.0725	5000	
1	47.3946	102.0854	48.4604	129.8597	72.6712	400.4713	1.2591	5000	
1.2	24.6416	47.9706	25.1818	58.1466	34.4471	190.3876	3.4713	5000	
1.5	12.9258	23.1599	13.0141	25.1393	16.8130	91.0520	7.9541	5000	
1.8	7.7749	13.5127	8.3953	15.3048	10.3297	55.3174	13.2278	5000	
2	6.1402	10.4789	6.8760	11.5804	8.2608	43.3363	16.4825	5000	

Simülasyon çalışması 2, 3, 4 ve 5 tabaka durumu için yapılmış, ayrıca her bir tabakada 3, 4 ve 5 değişken olması durumu dikkate alınmıştır. Bunun yanı sıra, değişkenler arasındaki ilişki yapısı modele yansıtıldığından değişkenlerin ilişkisiz olduğu, bazılarının ilişkili olduğu ve hepsinin ilişkili olduğu durumlara bakılmıştır. Sonuçlar genellenebilir olduğundan daha fazla tabaka ve değişken sayısı ile çalışılmamıştır. Simülasyon çalışması yaparken, yığın çaplarının, tabaka çaplarının, tabakalara seyahat maliyetlerinin farklı durumları göz önüne alınarak tabakalara seyahat etmenin maliyet fonksiyonu üzerine etkisini yansıtan α değerinin sıfırdan büyük durumları için mümkün çözümler aranmıştır. Araştırma için kullanılan maliyet kısıtı $c' = \sum t_h n_h^\alpha$ biçimde doğrusal olmayan yapıdadır.

Simülasyon çalışmasının en zor aşaması α sabiti için mümkün çözümler aranırken, tabakalara seyahat maliyetlerinin ve araştırma için ayrılan bütçenin belirlenmesi olmuştur. Bunun nedeni, α değeri küçükken, yani tabakalara seyahat etmenin ya da tabakadan bir birim seçmenin maliyet fonksiyonu üzerine etkisi küçükken klasik modelin, tabakalardan seçilecek örnek çaplarını yığın çapının çok üstünde belirlemesi ve bu durumun mümkün çözümler içinde yer almaması, tabakalara seyahat etmenin ya da tabakadan bir birim seçmenin maliyet fonksiyonu üzerine etkisi büyükken yani α değeri büyükken ise, her iki modelinde tabakalardan seçilecek örnek çaplarını tabaka çaplarına göre çok küçük bulması ile karşılaşılmasıdır. α değeri büyüdükçe, tabakalardan seçilen örnek çapı değeri azalmakta ve örnek ortalaması istatistiğinin varyansı büyümektedir. Ayrıca, α değeri büyüdükçe, tabakalardan seçilecek örnek çapı değerleri küçüldüğünden, klasik model ile önerilen model arasındaki farkları belirlemek zorlaşmaktadır. Bu yüzden, araştırmanın simülasyon deneyinden elde edilen sonuçlar çoğunlukla $\alpha = 0.6, 0.8, 1$ ve 1.2 olduğu durumlar için yorumlanacaktır.

α değeri küçükken, klasik model $n_h \leq N_h$ kısıtını içermediğinden, tabakalardan seçilecek örnek çapını çok büyük bulmaktadır. Uygulamalarda araştırmacı isterse $n_h > N_h$ ya da $n_h \gg N_h$ olması durumunda $n_h = N_h$ alarak tamsayım yapabilir. Bununla birlikte, bütçe kısıtı tamsayım yapmaya izin verse bile tamsayıya ayrılacak

zaman ve araştırma için çalışacak kalifiye eleman olmayabilir ya da yığındaki tüm birimlere ulaşılması her zaman mümkün olmayabilir. Bu noktada örneklemenin önemi ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle, bu çalışmada α değeri küçükken klasik modelin $n_h > N_h$ ya da $n_h \gg N_h$ bulunduğu durumlar mümkün olmayan çözüm olarak nitelendirilmiş ve çizelgelerde “***” olarak ifade edilmiştir. Önerilen yöntem ise, araştırma için ayrılan bütçe çok büyük ve tabakalara seyahat etme ya da tabakalardan bir birim seçme maliyeti küçük olmadıkça α değeri ne kadar küçük olursa olsun örnekleme yapmaya izin vermekte ve $n_h \leq N_h$ kısıtı modele yansıtıldığından hiçbir zaman $n_h > N_h$ ya da $n_h \gg N_h$ olması durumuyla karşılaşmamaktadır.

Araştırma boyunca, önerilen modelin çözüm vermediği, klasik modelin mümkün bir çözüm elde ettiği hiçbir durumla karşılaşmamıştır. Bununla birlikte, yukarıda bahsedilen α ’nin küçük değerleri haricinde de klasik modelin çözüm vermediği fakat önerilen modelin çözüm verdiği pek çok durum söz konusudur. Örneğin iki tabaka olması durumunda klasik modelden elde edilen çözümlerde, Çizelge 5.1’de $\alpha=0.8$ iken, Çizelge 5.6’da $\alpha=0.5, 0.6$ ve 0.8 iken, Çizelge 5.7, 5.8, 5.9 ve 5.10’da $\alpha=0.8$ iken, $n_{1K} < N_1$ ve $n_{2K} < N_2$ olmasına rağmen elde edilen çözümler maliyet kısıtını sağlamayan uygun olmayan çözümlerdir. Aynı şartlar altında önerilen modelden elde edilen çözümler ise, hem $n_{1\bar{O}} < N_1$ ve $n_{2\bar{O}} < N_2$ hem de maliyet kısıtını sağlayan uygun çözümlerdir. Benzer durumlar ile, üç tabaka olması durumunda Çizelge 5.13, 5.15, 5.19 ve 5.21’de $\alpha=0.8$ iken, dört tabaka olması durumunda Çizelge 5.22, 5.23, 5.24, 5.25, 5.26, 5.27 ve 5.29’da $\alpha=0.8$ iken ve Çizelge 5.30’da $\alpha=0.6$ ve 0.8 iken, beş tabaka olması durumunda ise Çizelge 5.34, 5.37, 5.38 ve 5.39’da $\alpha=0.8$ iken karşılaşmıştır. Bu durumların hepsi için, klasik model $n_{hK} < N_h$ olan fakat bütçe kısıtını sağlamayan çözümler verir iken, önerilen model bütün kısıtları sağlayan uygun çözümler vermiştir.

Klasik yöntem, tabakalarda yer alan değişkenler arasındaki ilişki durumunu göz önüne almadığı için araştırmada yer alan p değişkenin her biri için ayrı ayrı örnek çapı bulup daha sonra bu örnek çaplarının ortalamasını almaktadır. Klasik model ile

önerilen modelin aynı sayıda değişkeni göz önüne aldıkları tek durum tabaka içindeki değişkenlerin ilişkisiz olduğu durumdur. Bununla birlikte, tabaka içindeki değişkenler ilişkisiz olduklarında bu iki model aynı sayıda değişkeni göz önüne almalarına rağmen, klasik model tabaka içi yapıyı modele yansıtamaz iken, önerilen model daha heterojen değişkene daha büyük ağırlığı vererek tabaka içi yapıyı modele yansıtmaktadır. Tabaka içindeki değişkenlerin bazılarının ilişkili ya da hepsinin ilişkili olduğu durumda ise önerilen model çok daha az sayıda değişkeni modele dahil ederek daha iyi sonuçlar verebilmektedir.

Yığından seçilen örnek çapı arttıkça, örnek ortalaması istatistiğinin varyansının küçülmesi ve yapılan tahminin hassaslığının büyümesi beklenen bir durumdur. Bununla birlikte, yapılan simülasyon deneyinde, özellikle $\alpha=1$ ve 1.2 olduğu durumlarda önerilen model çoğunlukla yığından seçilen daha az örnek çapı ile örnek ortalaması istatistiğinin varyansını daha küçük bulmuştur. Bunun nedeni, önerilen modelin toplamda yığından daha az örnek çapı seçmesine rağmen tabaka içi yapıyı değişim katsayısına bağlı ağırlıklarla yansıtan bir model olduğundan bu örnek çapını tabakalara daha iyi bir biçimde paylaştırmasıdır. Bununla birlikte, tersi bir durumla yapılan simülasyon deneyi boyunca karşılaşılmamıştır; yani klasik modelin yığından seçilecek toplam örnek çapını daha küçük belirleyip, aynı anda örnek ortalaması istatistiğinin varyansını da daha küçük elde ettiği hiçbir durumla karşılaşılmamıştır. Örneğin, Çizelge 5.21’de üç tabaka olması durumunda, $\alpha=1$ iken, klasik modele göre yığından seçilmesi gereken toplam örnek çapı $n_K=287.4998 \cong 287$ ve tabakalardan seçilmesi gereken örnek çapları $n_{1K}=69.0696 \cong 69$, $n_{2K}=121.9881 \cong 122$, $n_{3K}=96.4421 \cong 96$, önerilen modele göre yığından seçilmesi gereken toplam örnek çapı ise $n_{\bar{0}}=279.1946 \cong 279$ ve tabakalardan seçilmesi gereken örnek çapları $n_{1\bar{0}}=64.4734 \cong 64$, $n_{2\bar{0}}=111.0707 \cong 111$, $n_{3\bar{0}}=103.6505 \cong 104$ iken, klasik model yığından seçilmesi gereken toplam örnek çapını, önerilen modele göre daha fazla belirlemesine rağmen önerilen modelden elde edilen amaç fonksiyonu değeri daha küçüktür. Klasik model örnek ortalaması istatistiğinin varyans değerini 1.6765 olarak elde ederken, önerilen model daha az örnek çapı ile 1.5662 olarak elde etmiştir. Bu durumu gösteren örneklerden bir diğeri; Çizelge 5.16’da üç tabaka

olması durumunda, $\alpha=0.8$ iken, klasik modele göre yığından seçilmesi gereken toplam örnek çapı $n_K=506.2951 \cong 506$ ve tabakalardan seçilmesi gereken örnek çapları $n_{1K} = 105.4878 \cong 105$, $n_{2K} = 250$, $n_{3K} = 150.8073 \cong 151$, önerilen modele göre yığından seçilmesi gereken toplam örnek çapı ise $n_{\bar{o}}=487.4105 \cong 487$ ve tabakalardan seçilmesi gereken örnek çapları $n_{1\bar{o}} = 133.2193 \cong 133$, $n_{2\bar{o}} = 214.2840 \cong 214$, $n_{3\bar{o}} = 139.9072 \cong 140$ iken, klasik model örnek ortalaması istatistiğinin varyans değerini 0.1987 olarak elde ederken, önerilen model daha az örnek çapı ile 0.1185 olarak elde etmiştir. Önerilen model, çok daha az örnek çapı ile, klasik modelin bulduğu örnek ortalaması istatistiği varyans değerinden daha küçük varyans değeri elde edebilmektedir. Benzer örnekler, Çizelge 5.1'de $\alpha=1$ ve 1.2 iken, Çizelge 5.2'de $\alpha=1$, Çizelge 5.3, 5.4, 5.7'de $\alpha=1$ ve 1.2 iken, Çizelge 5.11, 5.12, 5.13, 5.14'de $\alpha=1$ iken, Çizelge 5.16'da $\alpha=0.8$ iken, Çizelge 5.20'de $\alpha=1$ iken, Çizelge 5.21, 5.22, 5.23'de $\alpha=1$ ve 1.2 iken, Çizelge 5.24, 5.26, 5.28, 5.31, 5.32, 5.33, 5.34'de $\alpha=1$ iken, Çizelge 5.35, 5.36'da $\alpha=0.8$ ve 1 iken, Çizelge 5.37'de $\alpha=1$ iken görülebilir.

İki modelin belirledikleri, yığından seçilecek toplam örnek çapı değerleri yaklaşık olarak aynı olduğunda bile, önerilen model tabakalardan seçilen örnek çaplarını daha iyi belirlediği için, örnek ortalaması istatistiğinin varyansını yine daha küçük elde edebilmektedir. Örneğin dört tabaka, beş değişen ve değişkenlerin bazılarının ilişkili olması durumunda Çizelge 5.29'da $\alpha=1$ iken klasik model yığından seçilecek toplam örnek çapını yaklaşık olarak 213, önerilen model ise yaklaşık olarak 214 olarak belirlemektedir. Bununla birlikte, her iki modelden elde edilen yığından seçilmesi gereken toplam örnek çapları neredeyse aynı olmasına rağmen, önerilen yöntem daha az değişkeni modele dahil ederek, tabaka içi yapıyı daha iyi yansıtır tabakalardan seçilecek örnekleri daha iyi belirlemiş ve örnek ortalaması istatistiğinin varyansını daha küçük elde etmiştir.

Simülasyon deneyi boyunca, önerilen model tabakalardan seçilecek örnek çapını daha iyi belirlemiş ve örnek ortalaması istatistiğinin varyansını daha küçük elde

etmiştir. Yapılan çalışmada Çizelge 5.17’de üç tabaka, dört değişken ve değişkenlerin bazılarının ilişkili olduğu durumda $\alpha=0.8$ iken, klasik model yığından seçilecek örnek çapını yaklaşık olarak 257, önerilen model ise yaklaşık olarak 249 olarak elde etmiştir. Bu modellere göre tabakalardan seçilecek örnek çapları da oldukça farklıdır. Klasik model, yığından seçilecek örnek çapını daha büyük bulmasına rağmen, önerilen modelden daha iyi sonuçlar elde edememiştir ve amaç fonksiyonu değerini aynı bulmuşlardır. Önerilen model, daha az örnek çapı ile klasik modelin yakaladığı minimum değeri yakalamıştır.

Çalışma boyunca sadece Çizelge 5.21 ve Çizelge 5.26’da $\alpha=0.6$ iken, Çizelge 5.28’de $\alpha=0.8$ iken, klasik model, önerilen modele göre örnek ortalaması istatistiğinin varyansını daha küçük bulmuştur. Bunun nedeni ise, klasik modelin yığından seçilecek toplam örnek çapını, önerilen modele göre çok büyük bulmasıdır. Örnek çapı arttıkça, örnek ortalaması istatistiğinin varyansının küçülmesi istatistiksel olarak beklenen bir durumdur. Bununla birlikte, klasik model, önerilen modelin yapabildiği daha az örnek çapı ile daha küçük varyans elde etme durumunu başaramamaktadır.

Klasik model, çok değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemede tek değişken varmış gibi davranıp, önce her bir değişken için örnek çapı bulup daha sonra ortalama bir örnek çapı bulduğu için araştırma için ayrılan bütçeyi zaman zaman önerilen modele göre daha az kullanmaktadır. Bununla beraber, klasik modelden elde edilen ortalama örnek çapı, elde edilen tahmin edicinin hassaslığını azaltmaktadır. Önerilen model ise, α ’nın küçük olduğu durumlar hariç, araştırma için ayrılan bütçenin hepsini kullanarak elde edilen tahmin edicinin hassaslığını arttıracak dolayısıyla örnek ortalaması istatistiğinin varyansını küçültecek örnek çaplarını bulmayı amaçlamaktadır.

Sonuç olarak, simülasyon çalışmasından elde edilen bulgular incelendiğinde, yapılan 100 denemeden yaklaşık olarak 99’unda önerilen yeni modelden elde edilen örnek ortalaması istatistiğinin varyans değerleri, klasik modelden elde edilen değerlere göre daha küçüktür. Ayrıca, önerilen model yığından seçilecek daha az örnek çapı ile

klasik modelden elde edilen varyans değerlerinden daha küçük varyans değerleri bulabilmektedir. Önerilen model, değişkenler arasındaki ilişki yapısını göz önüne alarak modelleme yaptığından hem daha az sayıda değişkenle işlem yapmakta hem de değişkenlerin tabaka içindeki homojenlik-heterojenlik durumlarını değişim katsayıları ile orantılı ağırlıklarla modele yansıttığı için daha iyi paylaşırma yapmaktadır. Klasik model, α 'nın küçük olduğu durumlar için mümkün çözümler vermemekte, önerilen model ise α ne olursa olsun bütün kısıtları sağlayacak uygun çözümler sunmaktadır. Dolayısıyla, araştırma için ayrılan bütçenin hemen hemen hepsini kullanarak, önerilen modelle, klasik modele göre daha hassas tahminler yapılabilir. Bu nedenlerden dolayı, çok değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemede, örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapacak, tabakalardan seçilecek örnek çaplarının belirlenmesi probleminde klasik modele alternatif olarak sunulan yeni modelin kullanılması önerilmektedir.

6. SONUÇ

Tabakalı tesadüfi örneklemede, en önemli aşamalardan biri tabakalardan seçilecek örnek çaplarının belirlenmesidir. Araştırma için ayrılan bütçe kısıtı altında ilgilenilen istatistiğin varyansının minimum yapılması ya da arzu edilen varyans kısıtı altında araştırmada kullanılacak bütçenin minimum yapılması için tabakalardan seçilecek örnek çaplarının belirlenmesi kısıtlı optimizasyon problemleridir. Literatürde, amaç fonksiyonu ister ilgilenilen istatistiğin varyansını, ister araştırma için ayrılan bütçeyi minimum yapmak olsun konuyla ilgili pek çok çalışma yapılmıştır. Bununla birlikte, yapılan çalışmalarda ya doğrusal maliyet fonksiyonu kullanılmış ya da maliyet fonksiyonuna yer verilmemiştir.

Bu çalışmada hem tek değişkenli hem de çok değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemede, tabakalardan seçilecek örnek çaplarının belirlenmesi için doğrusal olmayan maliyet kısıtları kullanılmıştır. Bunun anlamı, tabakalara seyahat etmenin ya da tabakalardan bir birim seçmenin maliyet kısıtı üzerine etkisinin bir birim artış olarak yansımamasıdır.

Tek değişkenli tabakalı tesadüfi örnekleme için, Neyman (1934) tarafından Lagrange çarpanları yöntemi kullanılarak elde edilen örnek çapının tabakalara paylaştırılması formülünün dezavantajları bulunmaktadır. Eşitlik kısıtlı optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılan Lagrange çarpanları yöntemi $n_h \leq N_h$ kısıtını göz önüne alamadığı için elde edilen çözümlerde $n_h > N_h$ ya da $n > N$ gibi sonuçlarla karşılaşılabilir. Bu nedenle, çalışma boyunca $n_h \leq N_h$ ($h=1, 2, \dots, L$) eşitsizlik kısıtını da göz önüne alabilen ve Lagrange Çarpanları yöntemini de kapsayan Kuhn-Tucker yöntemi kullanılarak, Lagrange Çarpanları yönteminin kullanılmasından ortaya çıkan bu olumsuzluk ortadan kaldırılmıştır.

Tek değişkenli tabakalı tesadüfi örnekleme için Breathaur ve ark. (1999) ve Chernyak (2001) tarafından önerilen, doğrusal olmayan yapıdaki iki farklı maliyet kısıtı ayrıntılı olarak incelenmiş ve hangi maliyet kısıtının örnek ortalaması

istatistiğinin varyansını, hangi şartlar altında daha minimum yaptığı simülasyon

çalışması ile karşılaştırılmıştır. Örnek çapının belirlenmesi probleminde $c' = \sum_{h=1}^L t_h n_h^\alpha$

doğrusal olmayan maliyet kısıtı kullanıldığında, tabakaya seyahat etmenin ya da tabakadan bir birim seçmenin maliyet fonksiyonu üzerine etkisini yansıtan α değeri büyüdükçe elde edilen mümkün çözümlerin sayısı azalmaktadır. Araştırma için ayrılan bütçe çok fazla değilken, α 'nın büyük durumları çözüm vermemektedir. α büyük iken mümkün çözüm elde etmek için maliyet kısıtının sağ taraf sabiti arttırılmalıdır. Bununla birlikte, maliyet kısıtının sağ taraf sabitinin yani araştırma için ayrılan bütçenin arttırılması gerçek hayattaki uygulamalarda her zaman olanaklı olmamaktadır. α büyüdükçe çoğunlukla, tabakalardan seçilen örnek çapları toplamının, yığından seçilen toplam örnek çapına eşit olması kısıtı ($\sum_{h=1}^L n_h = n$) ya da

bütçe kısıtı sağlanmamaktadır. Mümkün çözümleri sağlayan α değerleri içinde en etkin olanı $\alpha = 0.5$ 'dir. $\alpha = 0.5$ iken, tabakalara seyahat maliyeti ne olursa olsun, mümkün çözümler içinde örnek ortalaması istatistiğinin varyansı en küçük olarak elde edilmektedir. Ayrıca, mümkün çözümü veren α değerleri büyüdükçe araştırma için ayrılan bütçenin kullanılan kısmı da artmaktadır.

Mümkün çözümleri sağlayan α değerleri için, $c' = \sum_{h=1}^L t_h \ln(n_h)$ ve $c' = \sum_{h=1}^L t_h n_h^\alpha$

maliyet kısıtları altında oluşturulan modellerden elde edilen çözümler büyük çoğunlukla aynı olmaktadır. Bunun nedeni, her iki modelde de maliyet kısıtlarına karşı gelen Lagrange çarpanının sıfır olmasıdır. Maliyet kısıtlarına karşı gelen Lagrange çarpanı sıfır olduğu durumlarda Kuhn-Tucker algoritması ile her iki maliyet kısıtı kullanılarak aynı mümkün çözümler elde edilmektedir. Bununla birlikte, mümkün çözüm sağlandığında maliyet kısıtlarına karşı gelen Lagrange çarpanı sıfırdan farklı olduğunda her iki modelden elde edilen çözümler birbirinden farklı olmaktadır. Maliyet kısıtlarına karşı gelen Lagrange çarpanı sıfırdan farklı olduğunda elde edilen çözümlerde $c' = \sum_{h=1}^L t_h \ln(n_h)$ kısıtından elde edilen $V(\bar{x})$

değerinin, $c' = \sum_{h=1}^L t_h n_h^\alpha$ kısıtından elde edilen $V(\bar{x})$ değerinden daha minimum olduğu görülmüştür.

α büyüdükçe $c' = \sum_{h=1}^L t_h n_h^\alpha$ maliyet kısıtı ile tabakalardan seçilecek örnek çapı belirlenemezken, $c' = \sum_{h=1}^L t_h \ln(n_h)$ maliyet kısıtı α 'dan etkilenmediği için tabakalardan seçilecek örnek çapı belirlenebilmektedir. α 'nın küçük olduğu durumlar için $c' = \sum_{h=1}^L t_h n_h^\alpha$ maliyet kısıtı bütçenin daha azını kullanmakla birlikte, α büyüdükçe araştırma için kullanılan bütçenin arttığı görülmektedir. $c' = \sum_{h=1}^L t_h \ln(n_h)$ maliyet kısıtı ise, tabakalara seyahat maliyetinden etkilenmemekte ve bütçe kısıtını sağlayarak, araştırma için ayrılan bütçenin çok azını kullanmaktadır. $c' = \sum_{h=1}^L t_h \ln(n_h)$ kullanıldığında elde edilen çözümler, $c' = \sum_{h=1}^L t_h n_h^\alpha$ kullanıldığı duruma göre daha kısa sürede tamamlanmaktadır.

Tek değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemede, $c' = \sum_{h=1}^L t_h n_h^\alpha$ doğrusal olmayan maliyet kısıtı altında Kuhn-Tucker, Geometrik programlama ve Hedef programlama yöntemleri ile oluşturulan modeller simülasyon çalışması ile çözülmüştür. Kuhn-Tucker yöntemi, örnek çapının belirlenmesinde kullanılan en temel yöntem olduğundan, Kuhn-Tucker ve Geometrik programlama, Kuhn-Tucker ve Hedef programlama yöntemlerinin birbirlerine göre üstünlükleri simülasyon çalışması ile incelenmiştir.

Tek değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemede, α değeri büyüdükçe elde edilen mümkün çözümlerin sayısı hem geometrik programlama ile hem de Kuhn-Tucker yöntemi ile çözülen modeller için azalmakta, kısıtlar sağlanmamaktadır. Ayrıca, bu

modeller için mümkün çözümleri sağlayan α değerleri içinde örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapan $\alpha = 0.5$ 'dir.

Geometrik programlama ile çözülen model, Kuhn-Tucker yöntemi ile çözülen modele göre, mümkün çözüm olan α değerleri için, örnek ortalaması istatistiğinin varyansını az farkla da olsa daha küçük olarak elde etmektedir. Ayrıca, Geometrik programlamanın çözüm vermediği, Kuhn-Tucker yönteminin çözüm verdiği hiçbir durumla karşılaşmamıştır. Bunun yanında, Geometrik programlama ile çözüm elde edildiği halde Kuhn-Tucker yöntemiyle çözüm elde edilmediği durumlar söz konusudur. Elde edilen simülasyon sonuçlarından, araştırma için ayrılan bütçenin kullanılan kısmı her iki yöntemle de ya aynı ya da birbirine çok yakındır. Bununla birlikte, Kuhn-Tucker yöntemiyle elde edilen çözümler, Geometrik programlamadan elde edilen çözümlere göre çok daha kısa sürede tamamlanmaktadır.

Tabaka sayısı iki ya da üç iken Geometrik programlama ve Kuhn-Tucker yöntemlerinden elde edilen örnek ortalaması istatistiğinin varyans değerleri birbirlerine yakın olarak elde edilirken, tabaka sayısı arttıkça iki yöntemden elde edilen varyans değerleri arasındaki fark açılmakta ve Geometrik programlama yöntemi n çaplı örneği tabakalara daha iyi paylaştırdığı için örnek ortalaması istatistiğinin varyansı daha küçük olarak elde edebilmektedir.

Geometrik programlama ile elde edilen örnek ortalaması istatistiğinin varyans değeri, Kuhn-Tucker yöntemi ile elde edilen örnek ortalaması istatistiğinin varyans değerinden daha etkindir. Geometrik programlama, Kuhn-Tucker yöntemine göre örnek çapını tabakalara daha optimum şekilde paylaştırmaktadır. Geometrik programlama ile elde edilen örnek ortalaması istatistiğinin varyans değerleri daha küçük olmasına rağmen daha uzun sürede çözümlenmektedir. Bu yüzden yapılan araştırma ile ilgili zaman kısıtı yok ise geometrik programlama kullanılarak n çaplı örnek tabakalara paylaştırılabilir.

Tek değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemede, örnek çapının tabakalara paylaştırılması problemi $c' = \sum_{h=1}^L t_h n_h^\alpha$ doğrusal olmayan maliyet kısıtı altında Kuhn-Tucker yönteminin yanı sıra araştırmacının hedeflerini göz önüne alarak birden fazla amacı minimize etmeyi amaçlayan Hedef programlama ile de çözülmüştür. α değeri büyüdükçe elde edilen mümkün çözümlerin sayısı hem Hedef programlama hem de Kuhn-Tucker yöntemi ile çözülen model için azalmakta, kısıtlar sağlanmamaktadır. Ayrıca, Geometrik programlama ve Kuhn-Tucker yöntemleri için geçerli olan $\alpha = 0.5$ iken örnek ortalaması istatistiğinin varyansının mümkün çözümler içinde minimum olması durumu Hedef programlama için de geçerlidir.

Hedef programlama ile çözülen model, Kuhn-Tucker yöntemi ile çözülen modele göre mümkün çözümü olan α değerleri için, örnek ortalaması istatistiğinin varyansını daha küçük olarak elde etmektedir. Bununla birlikte, hedef programlamada, yalnızca bir amaç olmadığı göz önünde bulundurulmalıdır. Kuhn-Tucker yöntemi sadece örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapmayı amaçlarken, Hedef programlama yöntemi aynı anda hem örnek ortalaması istatistiğinin varyansını hem de araştırmada kullanılan bütçeyi minimum yaparak örnek çapını tabakalara paylaştırmayı amaçlamaktadır. Tabakalara seyahat maliyetleri aynı ya da birbirine yakınsa, Hedef programlama ve Kuhn-Tucker yöntemleri araştırma için ayrılan bütçeyi hemen hemen aynı biçimde kullanmaktadır. Tabakalara seyahat maliyetleri arasında farklılık varken, Kuhn-Tucker yöntemi, Hedef programlamaya göre genellikle araştırma için ayrılan bütçenin daha azını kullanmaktadır. α değeri arttıkça Hedef programlama örnek çapını, Kuhn-Tucker yöntemine göre daha iyi paylaştırmasına karşın, araştırma için ayrılan bütçenin kullanılan kısmı daha fazla artma eğilimindedir. Genellikle Hedef programlama örnek ortalaması istatistiğinin varyans değerini, Kuhn-Tucker yöntemi ise maliyeti küçük bulmasına karşın, nadir olarak tersi durumla da karşılaşmıştır. Hedef programlama yönteminin aynı anda hem örnek ortalaması istatistiğinin varyans değerini hem de araştırma için kullanılan bütçeyi daha küçük bulduğu durumlar söz konusuysa, Kuhn-Tucker yönteminde böyle bir durumla karşılaşmamıştır. Ayrıca, Hedef programlama, Kuhn-Tucker yönteminin çözüm vermediği durumlarda da

çözüm vermektedir. Simülasyon yoluyla elde edilen sonuçlara bakıldığında, hedef programlamanın problemi çözme süresi, Kuhn-Tucker yönteminin problemi çözme süresinden daha kısadır.

Sonuç olarak, Hedef programlamadan elde edilen örnek ortalaması istatistiğinin varyans değeri, Kuhn-Tucker yönteminden elde edilen değerlere göre daha küçüktür. Hedef programlama yöntemi aynı anda hem örnek ortalaması istatistiğinin varyansını hem de araştırma için kullanılan bütçeyi Kuhn-Tucker yöntemine göre daha küçük elde edebilmektedir. Kuhn-Tucker yöntemiyle çözüm elde edilemeyen durumlarda, tüm hedefler sağlanarak Hedef programlamada mümkün çözümler elde edilmiştir. Ayrıca, hedef programlama daha kısa sürede çözüm vermektedir. Bu nedenlerden dolayı, örnek çapının optimum şekilde tabakalara paylaştırılması probleminde, hem birden fazla amacı göz önüne aldığı hem de Kuhn-Tucker yöntemindeki tek amaç olan örnek ortalaması istatistiğinin varyans değerini daha küçük elde ettiği için hedef programlama yönteminin kullanılması önerilmektedir.

Çok değişkenli tabakalı tesadüfi örnekleme için, $c' = \sum t_h n_h^\alpha$ biçimde ifade edilen doğrusal olmayan yapıdaki maliyet kısıtı kullanılarak yeni bir model önerilmiştir. Tek değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemede kullanılan, Bretthauer ve ark. (1999) ile Chernyak(2001) tarafından önerilen doğrusal olmayan maliyet kısıtları çok değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemeye adapte edilmiş ve tabaka içindeki değişkenler arasındaki ilişki yapısı göz önünde bulundurularak elde edilen ağırlıkların modele eklenmesi ile klasik modele alternatif yeni bir model sunulmuştur. Klasik model ve önerilen yeni model simülasyon yolu ile karşılaştırıldığında, α değeri büyüdükçe, tabakalardan seçilen örnek çapı değeri azalmakta ve örnek ortalaması istatistiğinin varyansı büyümektedir. Ayrıca, α değeri büyüdükçe, tabakalardan seçilecek örnek çapı değerleri küçüldüğünden, klasik model ile önerilen model arasındaki farkları belirlemek zorlaşmaktadır.

Araştırma boyunca, önerilen modelin çözüm vermediği, klasik modelin mümkün bir çözüm elde ettiği hiçbir durumla karşılaşılmamıştır. Klasik model ile α 'nın küçük

olduğu durumlarda $n_{hK} < N_h$ kısıtını sağlayan mümkün çözümler elde edilememektedir. Ayrıca, α 'nin küçük değerleri haricinde de klasik modelin çözüm vermediği fakat önerilen modelin çözüm verdiği pek çok durum söz konusudur. Klasik model $n_{hK} < N_h$ olan fakat bütçe kısıtını sağlamayan çözümler verir iken, önerilen model bütün kısıtları sağlayan uygun çözümler vermiştir.

Klasik model ile önerilen modelin aynı sayıda değişkeni göz önüne aldıkları tek durum tabaka içindeki değişkenlerin ilişkisiz olduğu durumdur. Bununla birlikte, tabaka içindeki değişkenler ilişkisiz olduklarında bu iki model aynı sayıda değişkeni göz önüne almalarına rağmen, klasik model tabaka içi yapıyı modele yansıtamaz iken, önerilen model daha heterojen değişkene daha büyük ağırlığı vererek tabaka içi yapıyı modele yansıtmaktadır. Tabaka içindeki değişkenlerin bazılarının ilişkili ya da hepsinin ilişkili olduğu durumda ise önerilen model çok daha az sayıda değişkeni modele dahil ederek daha iyi sonuçlar vermektedir.

Yığından seçilen örnek çapı arttıkça, örnek ortalaması istatistiğinin varyansının küçülmesi ve yapılan tahminin hassaslığının artması beklenen bir durumdur. Bununla birlikte, özellikle $\alpha = 1$ ve 1.2 olduğu durumlarda önerilen model çoğunlukla yığından seçilen daha az örnek çapı ile örnek ortalaması istatistiğinin varyansını daha küçük bulmaktadır. Bunun nedeni, önerilen modelin toplamda yığından daha az örnek çapı seçmesine rağmen tabaka içi yapıyı değişim katsayısına bağlı ağırlıklarla yansıtan bir model olduğundan bu örnek çapını tabakalara daha iyi bir biçimde paylaştırmasıdır. Bununla birlikte, tersi bir durumla karşılaşılmamıştır; yani klasik modelin yığından seçilecek toplam örnek çapını daha küçük belirleyip, aynı anda örnek ortalaması istatistiğinin varyansını da daha küçük elde ettiği hiçbir durumla karşılaşılmamıştır.

İki modelin belirledikleri, yığından seçilecek toplam örnek çapı değerleri yaklaşık olarak aynı olduğunda bile, önerilen model tabakalardan seçilen örnek çaplarını daha iyi belirlediği için, örnek ortalaması istatistiğinin varyansını yine daha küçük elde edebilmektedir.

Klasik modelin, önerilen modele göre örnek ortalaması istatistiğinin varyans değerini daha küçük bulduğu durumlarda olmuştur. Bunun nedeni, bu durumlarda klasik modelin yığından seçilecek toplam örnek çapını, önerilen modele göre çok büyük bulmasıdır. Örnek çapı arttıkça, örnek ortalaması istatistiğinin varyansının küçülmesi istatistiksel olarak beklenen bir durumdur. Bununla birlikte, klasik model, önerilen modelin yapabildiği daha az örnek çapı ile daha küçük varyans elde etme durumunu başaramamaktadır.

Klasik model, çok değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemede tek değişken varmış gibi davranıp, önce her bir değişken için örnek çapı bulup daha sonra ortalama bir örnek çapı bulduğu için araştırma için ayrılan bütçeyi zaman zaman önerilen modele göre daha az kullanmaktadır. Bununla beraber, klasik modelden elde edilen ortalama örnek çapı, elde edilen tahmin edicinin hassaslığını azaltmaktadır. Önerilen model ise, α 'nın küçük olduğu durumlar hariç, araştırma için ayrılan bütçenin hepsini kullanarak elde edilen tahmin edicinin hassaslığını arttıracak dolayısıyla örnek ortalaması istatistiğinin varyansını küçültecek örnek çaplarını bulmayı amaçlamaktadır.

Sonuç olarak, önerilen yeni modelden elde edilen örnek ortalaması istatistiğinin varyans değerleri, klasik modelden elde edilen değerlere göre neredeyse her zaman daha küçüktür. Ayrıca, önerilen model yığından seçilecek daha az örnek çapı ile klasik modelden elde edilen varyans değerlerinden daha küçük varyans değerleri bulabilmektedir. Önerilen model, değişkenler arasındaki ilişki yapısını göz önüne alarak modelleme yaptığından hem daha az sayıda değişkenle işlem yapmakta hem de değişkenlerin tabaka içindeki homojenlik-heterojenlik durumlarını değişim katsayıları ile orantılı ağırlıklarla modele yansıttığı için daha iyi paylaştırma yapmaktadır. Klasik model, α 'nın küçük olduğu durumlar için mümkün çözümler vermemekte, önerilen model ise α ne olursa olsun bütün kısıtları sağlayacak uygun çözümler sunmaktadır. Dolayısıyla, araştırma için ayrılan bütçenin hemen hemen hepsini kullanarak, önerilen modelle, klasik modele göre daha hassas tahminler yapılabilmektedir. Bu nedenlerden dolayı, çok değişkenli tabakalı tesadüfi örneklemede, örnek ortalaması istatistiğinin varyansını minimum yapacak,

tabakalardan seçilecek örnek çaplarının belirlenmesi probleminde klasik modele alternatif olarak sunulan yeni modelin kullanılması önerilmektedir.

KAYNAKLAR

- Ahsan, M. J. And Khan, S. U., "Optimum allocation in multivariate stratified random sampling using prior information", *Journal of The Indian Statistical Association*, 15: 57-67 (1977).
- Baki, M. F. And Fraser, N. M., "Error noted in a case study on fund allocation using goal programming", *European Journal of Operational Research*, 97: 213-214 (1997).
- Bal, H., "Optimizasyon teknikleri", *Gazi Üniversitesi*, Ankara, 1-207 (1995).
- Blake, J. T. And Carter, M. W., "A goal programming approach to strategic resource allocation in acute care hospitals", *European Journal of Operational Research*, 140: 541-561 (2002).
- Bosch, V. And Wildner, R., "Optimum allocation of stratified random samples designed for multiple mean estimates and multiple observed variables", *Communications in Statistics*, 32 (10): 1897-1909 (2003).
- Boyd, S. P., Kim, S. J., Vandenberghe, L. And Hassibi, A., "A tutorial on geometric programming", *Optimization and Engineering*, 8 (1): 67-127 (2007).
- Bretthauer, K. M. And Shetty , B., "The nonlinear resource allocation problem", *Operations Research*, 43 (4): 670-683 (1995).
- Bretthauer, K. M., Ross, A., Shetty , B., "Nonlinear integer programming for optimal allocation in stratified sampling", *European Journal of Operational Research*, 116: 667-680 (1999).
- Carrizosa, E. And Morales, D. R., "A biobjective method for sample allocation in stratified sampling", *European Journal of Operational Research*, 177: 1074-1089 (2007).
- Charnes, A. And Cooper, W. W., "Management models and industrial applications of linear programming", *John Wiley & Sons*, New York, 44-72 (1961).
- Chatterjee, S., "Multivariate stratified surveys", *Journal of The American Statistical Association*, 63: 530-534 (1968).
- Chernyak, A., "Optimal allocation in stratified and double random sampling with a nonlinear cost function", *Journal of Mathematical Sciences*, 103 (4): 525-528 (2001).
- Clark, R. G. And Steel, D. G., "Optimum allocation of sample to strata and stages with simple additional constraints", *The Statistician*, 49 (2): 197-207 (2000).

Cochran, W.G., "Sampling techniques", 3rd Ed., **John Wiley and Sons Inc.**, New York, 89-111 (1977).

Cooper, L. And Steinberg, D., "Introduction to methods of optimization", **Philadelphia:W. B. Saunders**, 103-152 (1970).

Csenki, A., "Optimum allocation in stratified random sampling via Holder's inequality", **The Statistician**, 46 (3): 439-441 (1997).

Davis, M. And Finch, R. H., "Sample allocation by geometric programming", **Proceedings of the Survey Research Methods Section, American Statistical Association**, USA, 733-737 (1983).

Diaz-Garcia, J. A., "Optimum allocation in multivariate stratified sampling:Multi-objective programming", **I-06-07(PE)**, 1-22 (2006).

Diaz-Garcia, J. A. And Garay-Tapia M. M., "Optimum allocation in stratified surveys", **I-05-14(PE)**, 1-16 (2005).

Duffin ,R., Peterson, E. And Zener, C., "Geometric programming-theory and application", **Wiley**, New York, 69-87 (1967).

El-Gayar, O. F. And Leung, P., "A multiple criteria decision making framework for regional aquaculture development", **European Journal of Operational Research**, 133: 462-482 (2001).

Ernst, L. R., "Further applications of linear programming to sampling problems", **American Statistical Association, Proceeding of the Section on Survey Research Methods**, 688-692 (1989).

Evans, W. D., "On stratification and optimum allocations", **Journal of the American Statistical Association**, 46 (253): 95-104 (1951).

Folks, J. L. And Antle, C. E., "Optimum allocation of sampling units to strata when there are R resposes of interest", **American Statistical Association Journal**, 225-233 (1965).

Ghosh, S. P., "Note on stratified random sampling with multiple characters", **Calcutta Statistical Association Bulletin**, 8: 81-90 (1958).

Green, J. L., "Mathematical programming for sample design and allocation problems", **American Statistical Association Proceedings of the Section on Survey Research Methods**, 688-692 (2000).

Griffith, R. E. And Stewart R. A., "A nonlinear programming tecnique for the optimization of continious processing systems", **Management Science**, 7: 379-392 (1961).

Hamdy, A. T., “Yöneylem araştırması”, Baray, Ş. A. ve Esnaf, Ş., *Literatür Yayıncılık*, İstanbul, 343-358, 735-807 (2000).

Hansen, M. H., Hurwitz, W. N., Madow, W. G., “Sample survey methods and theory”, *Wiley*, New York, 179-234 (1953).

Ignizio, J. P., “Goal programming and extension”, *Lexington Books*, Lexington, 1-263 (1976).

Jagannathan, R., “The programming approach in multiple character studies”, *Econometrica*, 33: 236-237 (1965a).

Jagannathan, R., “A method for solving a nonlinear programming problem in sample survey”, *Econometrica*, 33: 841-846 (1965b).

Judez, L., Chaya, C., Miguel, J. M. And Bru, R., “Stratification and sample size of data sources for agricultural mathematical programming models”, *Mathematical and Computer Modelling*, 43: 530-535 (2006).

Kao, T. C. And McCabe, G. P., “Optimal sample allocation for normal discrimination and logistic regression under stratified sampling”, *Journal of the American Statistical Association*, 86 (414): 432-436 (1991).

Khan, M. G. M. And Ahsan, M. J., “A note on optimum allocation in multivariate stratified sampling”, *S. Pac. J. Nat. Sci.*, 21: 91-95 (2003).

Khan, M. G. M., Khan, E. A. And Ahsan, M. J., “An optimal multivariate stratified sampling design using dynamic programming”, *Australian&New Zeland Journal of Statistics*, 45 (1): 107-113 (2003).

Kokan, A. R., “Optimum allocation in multivariate surveys”, *Journal of the Royal Society*, 126 (4): 557-565 (1963).

Kokan, A. R. And Khan, S., “Optimum allocation in multivariate surveys:An analytical solution”, *Journal of the Royal Statistical Society*, 29 (1): 115-125 (1967).

McCallion, T., “Optimum allocation in stratified random sampling with ratio estimation as applied to northern Ireland december agricultural sample”, *Journal of Applied Statistics*, 41 (1): 39-45 (1992).

Mulvey, J. M., Rush, R., Mitchell, J. E. And Willemain, T. R., “Stratified filtered sampling in stochastic optimization”, *Journal of Applied Mathematics and Decision Sciences*, 4 (1): 17-38 (2000).

Newbold, P., “Optimum allocation in stratified two-phase sampling for proportions”, *Biometrika*, 58 (3): 681-683 (1971).

Neyman, J., "On the two different aspects of the representative methods: The method stratified sampling and the method of purposive selection", *Royal Statistical Society*, 97: 558-606 (1934).

Ogryczak, W., "Comments properties of the minmax solutions in goal programming", *European Journal of Operational Research*, 132: 17-21 (2001).

Oliveira, F., Volpi, N. M. P. And Sanquetta, C. R., "Goal programming in a planning problem", *Applied Mathematics and Computation*, 140: 165-178 (2003).

Omule, S. A. Y., "Optimum design in multivariate stratified sampling", *Biometrika*, 27: 907-912 (1985).

Öztoprak, D., "Tabakalı rasgele örneklemede birden çok değişkene göre çeşitli dağıtım yöntemleri", Bilim Uzmanlığı Tezi, *Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara, 1-129 (1997).

Ramachandran, G. And Rao, T. J., "Allocation to strata and relative efficiencies of stratified and unstratified π PS sampling schemes", *Journal of the Royal Statistical Society*, 36 (2): 292-298 (1974).

Rao, S. S., "Engineering optimization: theory and practice", 3rd Ed., *Wiley*, 272-427 (1996).

Ravindran, A., Ragsdell, K. M. And Reklatis, G. V., "Engineering optimization: methods and application", 2nd Ed., *John Wiley & Sons*, 481-494 (2006).

Reyes, P. M. And Frazier G. V., "Goal programming model for grocery shelf space allocation", *European Journal of Operational Research*, 181: 634-644 (2007).

Sanathanan, L., "On an allocation problem with multistage constraints", *Operations Research*, 19 (7): 1647-1663 (1971).

Semiz, M., "Determination of compromise integer strata sample sizes using goal programming", *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 33: 91-96 (2004).

Serfling, R. J., "Approximately optimal stratification", *Journal of the American Statistical Association*, 63 (324): 1298-1309 (1968).

Srikantan, K. S., "A problem in optimum allocation", *Operations Research*, 11 (2): 265-273 (1963).

Swindel, B. F. And Yandle, D. O., "Allocation in stratified sampling as a game", *Journal of the American Statistical Association*, 67 (339): 684-686 (1972).

Valliant, R. And Gentle, J. E., "An application of mathematical programming to sample allocation", *Computational Statistics & Data Analysis*, 25: 337-360 (1997).

Wei, Y., Hu, Q. And Fan, Y., “Mathematical model for the optimization of the allocation of nonferrous raw materials in China”, *Computers & Industrial Engineering*, 46: 293-303 (2004).

Winston, L. W., “Operation research: applications and algorithms” *Duxbury Pres*, 477-564 (2003).

Wise, K. And Perushek, D. E., “Goal programming as a solution technique for the acquisitions allocation problem”, *Library & Information Science Research*, 22: 165-183 (2000).

Yahya, S. And Kingsman, B., “Modelling a multi-objective allocation problem in a government sponsored entrepreneur development programme”, *European Journal of Operational Research*, 136: 430-448 (2002).

Yamane, T., “Temel Örneklem Yöntemleri”, Esin, A., Bakır, M. A., Aydın, C. ve Gürbüzsel, E., *Literatür Yayıncılık*, İstanbul, 121-195 (2001).

Zinger, A., “A note on optimum allocation for a one-way layout”, *Biometrika*, 49 (3/4): 563-564 (1962).

İnternet : Stanford University “A matlab solver for geometric programs in psynomial form” <http://www.stanford.edu/~boyd/ggplab/gpposy.pdf> (2009).

İnternet : Stanford University “A matlab toolbox for geometric programming” <http://stanford.edu/~boyd/ggplab/ggplab.pdf> (2009).

İnternet : University of Iowa “Constrained geometric programming” http://www.engineering.uiowa.edu/~dbricker/Stacks_pdf2/Constrained_GP.pdf (2008).

İnternet : University of Iowa “Unconstrained geometric programming” http://www.engineering.uiowa.edu/~dbricker/Stacks_pdf2/Unconstrained_GP.pdf (2008).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : ŞAHİN, Sinem Tuğba
 Uyruğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 07.01.1980 / ANKARA
 Medeni hali : Bekar
 Telefon : 0 (312) 202 14 87
 e-mail : sinemsahin@gazi.edu.tr

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi / İstatistik Bölümü	2004
Lisans	Gazi Üniversitesi / İstatistik Bölümü	2001
Lise	Namık Kemal Lisesi / TEKİRDAĞ	1996

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2002-2010	Gazi Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce