

**CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

$$\dot{x} = y + z$$

$$\dot{y} = ax + z \quad \text{SİSTEMİNDE HOPF BİFURKASYONU ÜZERİNE}$$

$$\dot{z} = bz + x(y - c)$$

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Ali KONURALP**

**Anabilim Dalı : Matematik**  
**Programı : Uygulamalı Matematik**

**MANİSA 2005**

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + z \\ \dot{y} &= ax + z \\ \dot{z} &= bz + x(y - c)\end{aligned}$$




SİSTEMİNDE HOPF BİFURKASYONU ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ali KONURALP

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 12. 12. 2005

Tezin Savunulduğu Tarih : 23. 12. 2005

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Necdet BİLDİK (Celal Bayar Üniversitesi)   
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Turgut ÖZİŞ (Ege Üniv.Fen.Fak.Mat.Böl)   
: Yrd. Doç. Dr. Ali MUTLU (Celal Bayar Üniversitesi) 

MANİSA 2005

## İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vii
ÖNSÖZ	ix
1 TEMEL TANIM VE TEOREMLER	1
2 İKİ BOYUTLU BİR SİSTEMDEKİ HOPF BİFURKASYONU	7
3 ÜÇ BOYUTLU BİR SİSTEMDEKİ HOPF BİFURKASYONU	15
3.1. (6) Sisteminin Bazı Temel Özellikleri	16
3.2. Lineerleştirilmiş (6) Sistemin Orijindeki Kararlılığı	17
3.3. Lineerleştirilmiş (6) Sisteminin Analitik Çözümü	23
3.4. Üç Boyutlu Sisteminin İki Boyuta İndirgemesi (Normal Form)	25
3.5. (6) Sisteminin İncelenmesinde ve Çiziminde Kullanılan Araçlar ve Yazılımlar	28
3.6. (6) Sistemin Davranışlarının Maple Programıyla Gözlenmesi	28
KAYNAKLAR	33
ÖZGEÇMİŞ	34

## TEŞEKKÜR

Bu alıőma konusunu veren, çalıőmalarımın öncesinde olduğu kadar çalıőmalarım süresince de konular hakkındaki derin düőüncelerini, yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Prof. Dr. Necdet BİLDİK'e , bu çalıőmam sırasında ve eğitimimde emeiği geçen Yrd. Doç Dr. Ali MUTLU'ya ve diğer bütün hocalarıma, ayrıca bu süre içerinde maddi manevi desteğini esirgemeyen kıymetli eőim iėdem KONURALP'e sonsuz teőekkürlerimi sunarım.

Ali KONURALP

## ÖZET

Bifurkasyon Teorisinin yararlı konularından birisi olan, 1892 yıllarında Poincaré'in çalışmalarından kökenini alan Hopf bifurkasyonu olarak adlandırılan bu konu üç boyutlu uzaydaki adi diferansiyel denklem sistemlerinin ve dinamik sistemlerin geniş bir yelpazesine uygulamak için genişletilmiştir. Hopf bifurkasyon teorisinin iki ve üç boyutlu yapısını temel alan bu tez çalışması üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, Bifurkasyon Analizi teorisi ile ilgili teoremler ve kararlılık analizinin temelini teşkil eden Bifurkasyon, Kararlı Durağan Çözüm, Kararsız Durağan Çözüm, Dissipative Sistem, Hopf bifurkasyonu tanımları ifade edilmiştir.

İkinci bölümde iki boyutlu diferansiyel denklem sisteminde halihazırda literatürde incelenen Hopf bifurkasyonu ele alınmış olup burada ise sabit nokta civarında iki boyutlu bir sistemin davranışları şekiller ile gösterilerek bulunmaya çalışılmıştır.

Üçüncü bölümde Hopf bifurkasyonunun meydana geldiği çeşitli kaotik davranışlara sahip olan sistemlerin içerisinde seçilen özel bir sistem üzerinde çalışılmıştır. Bunun için serbestlik derecesi 3 olan orijinal olarak ortaya konan bir sistem tanımlanmıştır. Burada öncelikle, Hopf bifurkasyonunun meydana gelmesi için kendi tanım kümesi içerisinde bulunan bir sistem parametresi kendi eksenini boyunca değiştirilmiş, bunun sunucunda sistemin davranışını gösteren kritik nokta civarındaki bazı şekiller çizilmeye çalışılmıştır.

Buna ilaveten, iki sistem parametresi değiştirilerek ve diğer parametre ise sabit alınarak göz önüne alınan sistem incelenmeye devam edilmiştir. Son olarak ise üç boyutlu sistemin iki boyutlu bir sisteme indirgenmesi için gerekli dönüşümler bulunmuştur.

Teorik olarak yapılan bu çalışmanın ardından tercih edilen bilgisayar programının kullanışlı olduğu kadar çok yararlı, hassaslık derecesinin istenilen doğruluğa sahip olması ve daha çok zaman kazandırması dolayısıyla, yapılan işlemler ve sonuçları hatanın sonsuz küçük değerleri için hesaplanmıştır. Yazılan orijinal algoritmaların iki veya üç boyutlu sistemlerin Hopf bifurkasyonuna ilgi duyan ve bu konuda inceleme yapacak olan araştırmacılara da ışık tutacağı kaçınılmaz bir gerçektir.

## **ABSTRACT**

One of the useful subjects of bifurcation theory named Hopf bifurcation which had its origins in the works of Poincaré around 1892, is expanded to apply a wide spectrum of dynamical systems and the systems of ordinary differential equations in three dimensional space. This thesis consists of three chapters in which two and three dimensional structure of Hopf bifurcation theory was yielded.

In the first chapter, basic theorems concerning about Bifurcation analysis theory and definitions as bifurcation, stable stationary solution, unstable stationary solution, dissipative system, Hopf bifurcation are given in the sense of stability analysis.

In the second chapter, the Hopf bifurcation is already known in literature in a two dimensional system of differential equations is investigated. In here the behaviors of two dimensional system starting near the fixed point are pointed out and also the figures are tried to show related with the subject.

In the third chapter, it is worked on special system is selected having various chaotic behavior among the systems which causes the Hopf bifurcation (i.e., the values of the parameter increase or decrease in their domains). Here the original system is defined having 3 degree of freedom. Firstly, one of the system parameter in its domain is changed along its axes in order to occur Hopf bifurcation. At the end of this, it has shown some figures of the system near the critical point which shows the behavior of the system.

It is continued to investigate the system by changing two system parameters and the other remained fixed. At last the necessary transformations are obtained in order to reduce the three dimensional system to a two dimensional system.

At the end of the theoretical work, the operations and their results are calculated with small errors by means of the computer program is functional as well as it has a high accuracy and causes to earn much more time. Furthermore giving the original algorithm is clarified to the researcher who are interested in investigating Hopf bifurcation either in a two dimensional or three dimensional systems.

## ÖNSÖZ

Bu tez konusunun adı olan Hopf bifurkasyonu, kökenini Poincaré [6]'nın 1982 yılındaki çalışmalarından almış, 1930'larda da Andronov, Witt ve çalışma arkadaşları ile birlikte tartışılmış, Almanca dilinde Hopf'un temel makalesi olarak 1942 yılında yayınlanmıştır. Bundan dolayı bu çalışma konusunun ismi "Poincaré-Andronov-Hopf bifurkasyonu" olarak anılır. Şimdilerde ismi Hopf bifurkasyonu olarak ifade edilen ve sistemlerin kaotik davranışlarını inceleyen bu konu Matematik yanında Fizik, Biyoloji, Kimya gibi temel bilimlerde de kullanılmaktadır.

Bu çalışmanın kolay anlaşılabilmesi açısından, birinci bölümde temel tanım ve teoremler verilmiş konuya bir giriş yapılmıştır. İkinci bölümde iki boyutlu dinamik sistemler için bifurkasyon noktaları incelenerek noktalar civarındaki grafikler çizilmeye çalışılmıştır. Üçüncü bölümde ise Hopf bifurkasyonunun meydana geldiği çeşitli kaotik davranışlara sahip olan sistemlerin içerisinde seçilen özel bir sistem üzerinde çalışılmıştır. Son olarak bu sistem için kullandığımız ve orijinal olarak ele aldığımız gerekli bilgisayar programı algoritmaları verilmiştir.

## I. BÖLÜM

### TANIMLAR VE TEOREMLER

**Tanım 1.1:** Herhangi bir durumun *dinamiği*, zamanın gidişi boyunca durumun nasıl değiştiğini verir. Bir *dinamik sistem*, ayarın değişmesi ve belirli bir zamandan bir sonraki zamana hareket etmesi için gerekli kurallar ile birlikte bir fiziksel düzendir.

Dinamik sistemlerin matematiksel teorisinin temel bir amacı, sistemin uzun süreli davranışlarını bulmak ve karakterize etmektir. Yaygın olarak kullanılan üç çeşit dinamik sistem mevcuttur.

(i) Sembolik dinamik Sistemler (Buradaki fiziksel düzenek,biçimsel sembollerin bir dizgisidir)

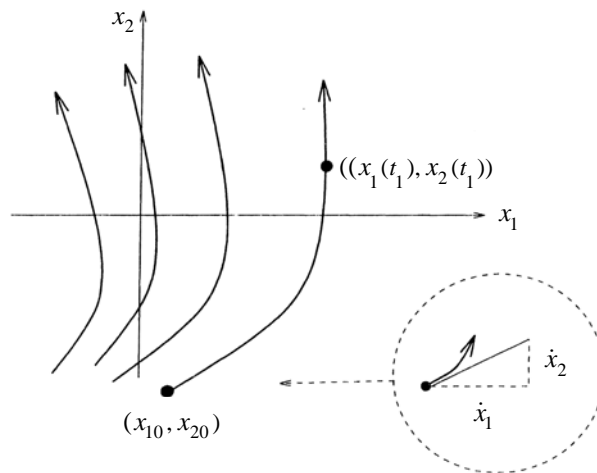
(ii) Discrete - zaman Sistemleri (Fiziksel düzenek, ölçümlerin bir kümesine indirgenmiştir)

(iii) Sürekli – zaman Sistemleri (Sistemin 1 zamanındaki, 2 zamanındaki,... konumun bir kural (bir fonksiyon) yardımıyla bulunması durumudur)

Biz burada sürekli-zaman sistemleri üzerinde çalışacağız.

**Tanım 1.2:**  $n$ -boyutlu  $n > 0$  için,  $\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  diferansiyel denklem sisteminin  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  çözümleri  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  faz uzayının tamamını veya bir kısmını örten *yörüngelerin (akış çizgileri,yörüngeler) bir kümesini* biçimlendirir.

**Tanım 1.3:** Seçilmiş yörüngelerin çizildiği aşağıdaki şekle benzeyen diyagrama *faz diyagramı*,  $(x_1, x_2)$  düzlemine de *faz düzlemi* denir. Burada  $x_1(t_0) = x_{10}, x_2(t_0) = x_{20}$  ise başlangıç değerleri olarak tanımlanır.



**Şekil 1.1** Bir faz düzleminde yörüngeler.

**Tanım 1.4:** Faz düzleminin belirli bir kısmından başlayıp belirli bir kısmına kadar olan bütün yörüngelerin kümesine *akış (flow)* denir. Akışlar vektör alanları tarafından üretilir.

**Tanım 1.5:**  $n > 0$  için  $n$ -boyutlu,  $\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  diferansiyel denklem sistemine *otonom denklem sistemi* ve eğer  $f_n$  fonksiyonu aynı zamanda  $t$  değişkenine de bağlı ise sisteme *otonom olmayan sistem* denir.

**Tanım 1.6:**  $n = 0, 1, 2, \dots$  için,

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$n$ -boyutlu diferansiyel denklem sisteminde,  $\dot{x}_n = 0$  ile tanımlanan  $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$  noktasına *denge noktası* denir. Denge noktasındaki çözümler ise sabit çözümlerdir. Burada  $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$  noktalarına sabit (*durağan*) *çözümler* de denir ve nadiren, tekil noktalar, kritik noktalar, rest(dinlenme) noktalar veya sabit noktalar olarak da adlandırılır.

**Tanım 1.7:** Karakteristik polinomun kökleri  $\lambda_1, \lambda_2$  olmak üzere,  $\lambda_1, \lambda_2$  reel,  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  olması durumunda, yani her iki öz değer reel ve aynı işarete sahip olmak üzere,  $(x_0, y_0)$  sabit (*durağan*) noktasına *düğüm (node) noktası* adı verilir. Burada iki durum söz konusudur.

(i)  $\lambda < 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda t} = 0$  ise, bu düğüm noktasına *kararlı (stable) düğüm noktası* adı verilir.

(ii)  $\lambda > 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda t} = \infty$  ise, bu düğüm noktasına da *kararsız (unstable) düğüm noktası* adı verilir.

**Tanım 1.8:** Karakteristik polinomun kökleri  $\lambda_1, \lambda_2$  reel,  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$  olmak üzere yani, reel öz değerler farklı işaretlere sahip ise bu sabit noktaya *eyer (saddles) noktası* adı verilir.

**Tanım 1.9:** Reel kısmı sıfır olmayan  $\lambda_1, \lambda_2$  kompleks eşlenikler  $\alpha$  ve  $\pm\beta$  sırasıyla reel ve sanal kısımları göstermek üzere  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ,  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$  biçiminde tanımlansın. Bu durumda denge noktasına yaklaşan herhangi bir yörünge şekil olarak bir *spirale* benzer.  $\alpha > 0$  ise sabit nokta *kararsız bir odak (focus) noktası*,  $\alpha < 0$  olması durumunda sabit noktaya ise *kararlı bir odak noktası* denir.

**Tanım 1.10:** Karakteristik polinomun kökleri, sıfır reel kısma sahip olmasına karşın hiçbir öz değere sahip değilse, denge noktasına *hiperbolik veya bozulmamış nokta* denir.

**Tanım 1.11:** Lineer olmayan bir dinamik sistemde, bir sistem parametresi değiştirildiğinde çekicilerin sayısı değişebilir. Bu değişime *bifurkasyon* denir.

**Tanım 1.12:** Kompleks bir eşlenik çift, kararlılık sınırına geçerken meydana gelen bifurkasyona *Hopf bifurkasyonu* adı verilir.

**Tanım 1.13:** Dengelilik halindeki bir daldan periyodik salınımların bir dalına geçerken oluşan bifurkasyona *Hopf bifurkasyonu* denir. Çoğu zaman bu bifurkasyon *salınımlı bifurkasyon* olarak da adlandırılır.

**Tanım 1.14:** Çift periyoda sahip periyodik yörüngelerin bir dalına geçen bifurkasyona *periyot doubling (Çift periyotlu) bifurkasyonu* denir.

**Tanım 1.15:** Kararlı bir sabit noktadan bir kararsız veya iki kararlı sabit noktaya geçişte meydana gelen bifurkasyona *Pitchfork bifurkasyonu (Çift periyotlu ağ)* denir.

**Tanım 1.16:** Eğer sistem  $n$ . mertebeden ise,  $a_i$  katsayıları reel olmak üzere karakteristik polinom

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

biçiminde genel formda ele alınabilir. Örneğin, üç boyutlu bir sistemin karakteristik polinomu  $n = 3$  için,

$$P(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

şeklindeki kübik bir polinomdur.

**Teorem 1.17:**  $P(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$  kübik polinomu için Routh-Hurwitz kararlılık şartları

$$a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0 \text{ ve } R \equiv a_1a_2 - a_3 > 0$$

dir. Kararlılık bölgesinin sınırları  $(a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 = 0)$  ve  $(a_1 > 0, a_2 > 0, R = 0)$  ile verilen iki yüzeydir. Karakteristik denklemin,  $a_3 = 0$  yüzeyinde en az bir kökü sıfır ise, bu durumda  $(R = 0, a_2 > 0)$  yüzeyinde sadece sanal kısma sahip bir çift kompleks kök vardır.

**Teorem 1.18:**  $P(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$  kübik denkleminin reel köklerinin sayısı

$$\Delta = -a_1^2a_2^2 + 4a_1^3a_3 + 4a_2^3 - 18a_1a_2 + 27a_3$$

diskriminantının işaretine bağlıdır.

- (i) Eğer  $\Delta > 0$  ise, kübik denklem bir gerçel ve iki kompleks eşlenik köke sahip;
- (ii) Eğer  $\Delta < 0$  ise, kübik denklem üç ayrık gerçel köke sahip;
- (iii)  $\Delta = 0$  olduğunda, eğer  $a_2 = \frac{1}{3}a_1^2$  ve  $a_3 = \frac{1}{27}a_1^3$  ise denklem üç katlı bir reel köke veya biri iki katlı kök olan iki reel köke sahiptir.

**Tanım 1.19:**  $P(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$  kübik karakteristik denkleme sahip bir sistem için,  $a_2 > 0$  ve  $R = a_1a_2 - a_3 = 0$  olduğunda bu taktirde, sistemin bir Hopf bifurkasyonu mevcuttur denir.

**Tanım 1.20:** Normlu ve bu norma göre tam olan uzaya *Banach uzayı* denir.

**Tanım 1.21:** Lokal olarak Öklidyen olan bir topolojik uzaya *manifold* denir.

**Transversality Hipotezi 1.22:**  $T_x$ ,  $x$ 'deki bir tanjant uzayı göstermek üzere,  $T_xG$  ve  $T_xH$  ise  $T_xX$ 'in alt uzayları olarak tanımlandığında, eğer herhangi bir  $x \in G \cap H$  noktasında

$$T_xG + T_xH = T_xX$$

bağıntısı sağlanıyorsa, bu taktirde bir  $M$  düzgün manifoldu iki düzgün  $G$  ve  $H$  alt manifoldları ile transversal (aykırı) olarak kesişirler denir.

**Tanım 1.23:**  $X$  bir metrik uzay ve  $f : X \rightarrow X$  bir sürekli örten fonksiyon olsun. Eğer  $x$ 'in her  $U$  komşuluğu için  $f^n(U) \cap U$  boş olmayacak şekilde bir  $n \geq 1$  sayısı varsa,  $x \in X$ 'e bir *nonwandering nokta* denir ve  $\Omega(f)$  ile gösterilir.

**Tanım 1.24:** Her bir blok mümkün olan ayrı  $\lambda_i$  sabitleri ile Jordan bloklarından ibaret olan blok matrisinin bir özel çeşididir. Bu taktirde klasik kanonik form olarak ta adlandırılan bu forma *Jordan Kanonik Formu* denir.

**Tanım 1.25:** Bir  $E$  Banach uzayında  $T : E \rightarrow E$  sınırlı bir lineer operatör olsun.

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ E'nin kompleksleştirilmesi üzerinde tersinir değildir}\}$$

şeklinde tanımlanan  $\sigma(T)$ 'ye *E Banach uzayının spektrumu* denir. Tanımından dolayı  $\sigma(T)$  boş değildir ve kompaktır.  $\lambda \in \sigma(T)$  için  $|\lambda| \leq \|T\|$ .  $r(T)$  spektral yarıçapı

$$r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$$

ile tanımlanmış olup, genellikle

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}$$

formülü ile de verilir.

**Tanım 1.26:**  $F(X, t, \mu)$  fonksiyonunun  $X_0$  vektörü civarında bir Taylor serisine açılımı

$$\begin{aligned} F(x_0 + u, t, \mu) &= F(x_0, t, \mu) + F_x(x_0 | u, t, \mu) + \frac{1}{2} F_{xx}(x_0 | u | u, t, \mu) \\ &+ \frac{1}{3!} F_{xxx}(x_0 | u | u | u, t, \mu) + O(\|u\|^4) \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada

$$F_{xx}(x_0 | a | b, t, \mu) = F_{xx}(x_0 | b | a, t, \mu) = \left. \frac{\partial^2 F(x_0 + \delta_1 a + \delta_2 b)}{\partial \delta_1 \partial \delta_2} \right|_{\delta_1 = \delta_2 = 0}$$

Bir bilineer operatörü olup, vektörleri vektörlere taşır.  $F_{xxx}(x_0 | u | u | u, t, \mu)$  operatörü de benzer yolla üretilen trilineer operatördür. Bu durum otonom denklem sistemleri için göz önüne alındığında

$$\frac{dx}{dt} = f(\mu, x) = f_x(\mu | x) + \frac{1}{2!} f_{xx}(\mu | x | x) + \frac{1}{3!} f_{xxx}(\mu | x | x | x) + O(\|x\|^4)$$

olur.

**Tanım 1.27:** Bir yörünge (veya akış) boyunca faz uzayı hacminin büzüldüğü dinamik sistemlere *dissipative sistem* denir. Bunun anlamı sistemin diverjansının sıfırdan küçük olmasıdır yani,  $\nabla \cdot f < 0$  'dır.

**Tanım 1.28:**  $V(t)$ ,  $M_t$  kümesinin hacmi olsun. Bu taktirde *hacimdeki değişiklik*

$$\frac{dV}{dt} = \int_{M_t} \nabla \cdot f \, dV$$

ile verilir.

Dissipative sistemlerde hacmin azalması (çekilmesi) bir karakteristik özelliktir. Buradan da anlaşılacağı gibi  $\text{div } f = \nabla \cdot f = 0$  ise, hacim  $M_t$  altında invaryant kalır. Eğer  $M_t$  akışları boyunca  $\nabla \cdot f < 0$  oluyorsa, sistem dissipative olmalıdır.

## II. BÖLÜM

### İKİ BOYUTLU SİSTEMDEKİ HOPF BİFURKASYONU

Bu bölümde, iki boyutlu bir sistemdeki Hopf bifurkasyonu için gerekli tanımları ve teoremleri vererek, sistemlere Hopf bifurkasyonu anlamında genel olarak bakacak ve daha sonraki bölümde ise sistemin iki boyuta indirgenmesinden sonra gerekli analizler yapılarak elde edilen sonuçlar şekiller çizilmek sureti ile irdelenecektir.

**Tanım 2.1:**  $F_t$ , bir  $M$  topolojik uzayı üzerinde bir  $C^0$  akışı (veya yarı-akışı) ve bütün  $t$ 'ler için  $F_t(G) \subset G$  olacak şekilde  $G$  bir invaryant küme olsun. Eğer  $x_0 \in V$  (sırasıyla  $\bigcap_{t \geq 0} F_t(V) = G$ ) ise,  $G$ 'nin herhangi bir  $U$  komşuluğu için  $x(x_0, t) \equiv F_t(x_0)$  akış doğruları (integral eğrileri)  $U$ 'nun elemanı olacak şekilde  $G$ 'nin bir  $V$  komşuluğu var ise  $G$ 'ye kararlı (sırasıyla asimtotik kararlı veya bir çekici) denir.

Şu halde başlangıç şartı  $G$ 'den hafifçe uzaklaştığında yine  $G$ 'nin civarında (sırasıyla  $G$ 'ye yaklaşıyorsa) kalıyorsa  $G$ 'ye kararlıdır (sırasıyla çekiliyor) denir. Eğer  $G$  kararlı değilse,  $G$ 'ye kararsızdır denir.

$x_0$  sabit noktasının kararlılığının en uygun olduğu temel durum sonlu boyutlu lineer durumdur.  $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  bir lineer dönüşüm olsun.  $X$ 'in akışı  $x(x_0, t) = e^{tX}(x_0)$ 'dir. Bu durumda orijin bir sabit noktadır.  $\{\lambda_j\}$   $X$ 'in özdeğerleri olsun. Bu taktirde  $\{e^{\lambda_j t}\}$   $e^{tX}$ 'in özdeğerleridir. Bütün  $j$ 'ler için  $\text{Re } \lambda_j < 0$  olduğunu kabul edelim. Bu taktirde  $t \rightarrow \infty$  iken  $|e^{\lambda_j t}| = e^{\text{Re } \lambda_j t} \rightarrow 0$ . Jordan kanonik formu kullanılırsa, 0 noktası asimtotik olarak kararlıdır ve eğer pozitif reel kısma sahip bir  $\lambda_j$  var ise, bu taktirde 0 noktası kararsızdır. Daha genel olarak aşağıdaki teoremi göz önüne alabiliriz.

**Teorem 2.2:** Bir  $E$  Banach uzayı üzerinde  $X : E \rightarrow E$  sürekli bir lineer dönüşüm olsun. Eğer  $X$ 'in  $\sigma(X)$  spektrumu açık sol yarı düzlemde ise; orijin,  $X$ 'in akışının sabit noktasını çeken kararlı bir noktadır. Eğer  $\text{Re}(z) > 0$  olacak şekilde  $z \in \sigma(X)$  mevcut ise, orijin kararsız bir noktadır.

Şimdi lineer olmayan durumu göz önüne alalım. Bir  $P$  Banach manifoldu için  $X$ ,  $P$  üzerinde bir  $C^1$  vektör alanı ve  $X(p_0) = 0$  olsun. Bu taktirde  $dX(p_0): T_{p_0}(P) \rightarrow T_{p_0}(P)$  Banach uzayında sürekli bir lineer dönüşümdür.

**Teorem 2.3:**  $X$ , bir  $P$  Banach manifoldu üzerinde bir  $C^1$  vektör alanı ve  $p_0$  ise  $X$ 'in bir sabit noktası yani,  $X(p_0) = 0$  olsun.  $F_t$   $X$ 'in akışı yani,  $\frac{\partial}{\partial t} F_t(x) = X(F_t(x))$ ,  $F_0(x) = x$  olarak tanımlansın (Bütün  $t$ 'ler için  $F_t(p_0) = p_0$  olduğuna dikkat edelim.). Eğer  $dX(p_0)$ 'nin spektrumu sol yarı-düzlemde bulunuyorsa yani  $\sigma(dX(p_0)) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0\}$  ise; bu taktirde  $p_0$  asimtotik olarak karardır.

Eğer  $\operatorname{Re} z > 0$  olacak şekilde izole edilmiş bir  $z \in \sigma(dX(p_0))$  noktası mevcut ise,  $p_0$  kararsızdır. Eğer  $\sigma(dX(p_0)) \subset \{z \mid \operatorname{Re} z \leq 0\}$  ve  $\operatorname{Re} z = 0$  olacak şekilde bir  $z \in \sigma(dX(p_0))$  noktası varsa, bu taktirde kararlılık lineerleştirilmiş denklemden elde edilemez.

Sabit noktaların birçok eğrisi, bir bifurkasyon noktasına gelebilir (Sabit noktaların bir eğrisi, bütün  $\mu$ 'ler için  $X_\mu(\alpha(\mu)) = 0$  olacak şekilde bir  $\alpha: I \rightarrow P$  eğrisidir. Böyle bir eğri açıkça  $\mu \rightarrow p(\mu)$ 'dir.).  $\mu > \mu_0$  için kararlı sabit noktaların eğrileri olabilir.

Örneğin, tavana asılı bir çember içerisinde bir topun olduğunu ve  $w$  frekansı ile topun merkezindeki dikey eksen civarında döndüğünü düşünelim. Küçük  $w$  değerleri için, topun çemberin altında olduğunu ve bu konumun kararlı olduğu görülür. Bununla beraber  $w$ ,  $w_0$  kritik noktasına ulaşırken top kararlı olan, çemberin yan tarafında yeni bir  $x(w)$  konumda yer alır. Topun çemberin sağ tarafına veya sol tarafına hareket edebilmesi, başlangıçta dikey eksenin hangi tarafına dayandığına bağlıdır. Çemberin altındaki bu durumda konum hala bir sabit noktadır, fakat kararsız hale gelmeye başlamıştır. Bu çemberdeki topun kararlı sabit noktalarının  $w \geq w_0$  olması durumunda, iki eğrisi vardır: Birisi çemberin sol tarafına diğeri ise çemberin sağ tarafına hareket eder.

Meydana gelebilen davranışın başka bir çeşidi de periyodik yörüngelere geçen bifurkasyonlardır. Bunun anlamı  $\alpha(\mu_0) = p(\mu_0)$  ve  $\alpha(\mu)$ ,  $X_\mu$ 'nin akışının kapalı bir  $\gamma_\mu$

yörüngesi üzerinde olacak şekilde  $\alpha : I \rightarrow P$  biçimindeki eğrilerin mevcut olmasıdır. Bu tipteki bir bifurkasyon Hopf bifurkasyonu olarak düşünülür.

Kararlı kapalı yörüngelerin (=periyodik çözümler) görünümü, orijinal sabit çözümden periyodik çözüme geçerken ki kararlılık değişimi olarak yorumlanır, yani orijinal sabit nokta civarındaki bir nokta çekilmiştir ve bu nokta kapalı yörüngeden seçilemez hale gelmiştir.

**Teorem 2.4:**  $\psi$ , bir  $P$  Banach manifoldundaki  $\alpha_0$ 'ın bir komşuluğu civarından  $P$ 'ye bir dönüşüm olsun.  $\psi$ 'nin sürekli  $k$ . mertebeden türeve sahip olduğunu ve  $\psi(\alpha_0) = \alpha_0$  olduğunu kabul edelim. Ayrıca  $d\psi(\alpha_0)$ 'ın spektral yarıçapının 1 olduğunu ve  $d\psi(\alpha_0)$ 'ın spektrumunun ise birim çember üzerinde bir kısma dağıldığını, geriye kalanlarında birim çemberden sıfır olmayan bir uzaklıkta olduğunu kabul edelim. Birim çember üzerinde spektrumunu ait bir kısmın elemanı olan  $d\psi(\alpha_0)$ 'ın genelleştirilmiş özuzayı ise  $Y$  ile gösterilsin ve  $Y$ 'nin sonlu bir boyuta sahip olduğunu varsayalım. Bu taktirde  $P$ 'de  $\alpha_0$ 'ın bir  $V$  komşuluğu ve

(i) (Yerel Değişmezlik) Eğer  $x \in M$  ve  $\psi(x) \in V$  ise, bu taktirde  $\psi(x) \in M$

(ii) (Yerel Çekme Gücünün Derecesi) Eğer bütün  $n = 1, 2, \dots$  için  $\psi^n(x) \in V$  ise, bu taktirde  $n \rightarrow \infty$  iken  $\psi^n(x) \rightarrow M$

ise, bu taktirde  $\alpha_0$ 'da  $Y$ 'ye teğet  $\alpha_0$ 'dan geçen  $d$  boyutlu  $\psi$  için bir *merkez manifoldu* olarak adlandırılan bir  $C^{k-1}$   $M$  altmanifoldu mevcuttur.

**Teorem 2.5:**  $f \in C^2$  için

(i)  $f(x_0, \mu_0) = 0$

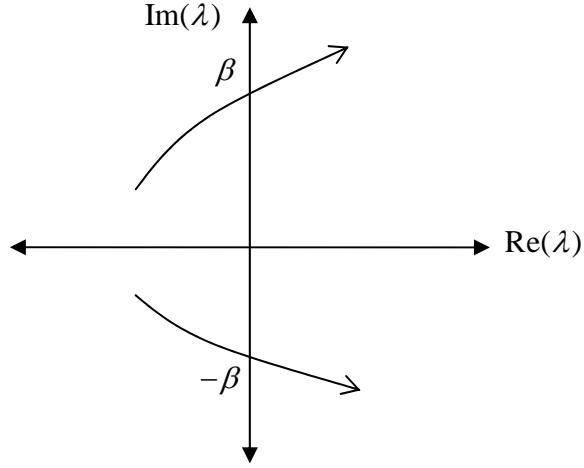
(ii)  $f_x(x_0, \mu_0)$ 'in  $\lambda(\mu_0) = \pm i\beta$  biçiminde sanal bir özdeğer çiftine haiz olduğunu, bunlardan başka sıfır reel kısmılı başka özdeğere sahip olmadığını;

(iii)  $d(\text{Re } \lambda(\mu_0)) / d\mu \neq 0$

olduğunu kabul edelim. Bu taktirde  $(x_0, \mu_0)$  noktasında bir limit dairesi oluşumu vardır. Başlangıç (sıfır genlikli salınımın) periyodu ise  $T_0 = 2\pi / \beta$ 'dir.

Teorem 2.5'in (i), (ii) ve (iii) hipotezleri Hopf bifurkasyonunun bir biçimsel tanımı olarak gözlenebilir. (ii) hipotezi, hiçbir özdeğerin  $\pm i\beta$ 'nin bir tamsayı katı olmasına izin vermeksizin

serbesttir. (iii) şartı transversality hipotezidir ve genellikle sağlanır. Bunu daha iyi anlamak için  $\lambda(\mu)$  özdeğerinin kompleks düzlemde nasıl görüldüğüne bakalım. Şekil 2.1,  $\lambda(\mu_0) = \pm i\beta$  bağıntısını sağlayan özdeğerler çiftinin mümkün bir yolunu gösterir. Teorem 2.5'in (iii) kabulü imajiner eksenin çapraz geçilmesini sağlamaktadır. Eğer bütün diğer özdeğerler tamamen negatif reel kısma sahip iseler, bu taktirde Şekil 2.1 kararlılığın ortadan kalktığı gözlenir ki bu durumda kararlılığın kazanılması için yapılması gereken sadece okların yönlerini değiştirmektir.



**Şekil 2.1.** Özdeğerlerin kompleks düzlemi;  $\lambda(\mu)$  özdeğerlerin yolu Hopf bifurkasyonuna bağlıdır.

Hopf bifurkasyonu için temel mekanizma şöyledir. Kararlı odak nokta olan bir sabit noktanın mevcut olduğu durumdan başlanır. Bunu basitleştirmek için orijinde bir sabit nokta alınır. Böylece sistemdeki parametre farklı değerler aldığıında bu sabit nokta bir kararsız noktaya dönüşür ve bu durumda faz düzlemindeki akışın öncelikle dışarıya doğru olduğu düşünülür. Başka bir yön olduğunda mesela faz düzlemindeki yön içe doğru olduğunda, esas arzu edilen bir durum ortaya çıkar. Böylece bu iki yön birbirleriyle karşılaşır ve kararlı bir limit dairesini oluşturur. Buradan da sistem kararlı bir limit dairesi olan Hopf bifurkasyonuna geçer.

Hopf bifurkasyonunu tanımlamaya yarayan aşağıdaki temel örneklerden birini göz önüne alalım.

**Örnek 2.6:**

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 + x_1(\mu - x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2(\mu - x_1^2 - x_2^2)\end{aligned}\tag{1}$$

Kuadratik nonlineeriğe sahip iki boyutlu (1) denklem sisteminde, bütün  $\mu$  değerleri için  $x_1 = x_2 = 0$  bir tek denge noktasıdır. Bu sistemin Jakobiyen matrisi

$$\frac{\partial F_i(x_1, x_2, \mu)}{\partial (x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$$

olup sadece  $\mu \pm i$  özdeğerlerine sahiptir. Böylece eğer  $\mu < 0$  ise,  $(0,0)$  denge noktası kararlı; eğer  $\mu > 0$  ise denge noktası kararsızdır,  $\mu = 0$  için ise kararlılıktan biraz uzaklaşır fakat denge uzayının içine doğru kararlılıkta ise herhangi bir değişiklik yoktur.

Şimdi  $\rho, \vartheta$  kutupsal koordinatları kullanılarak

$$x_1 = \rho \cos \vartheta \text{ ve } x_2 = \rho \sin \vartheta$$

olmak üzere (1) sistemi

$$\begin{aligned} \dot{\rho} \cos \vartheta - \rho \dot{\vartheta} \sin \vartheta &= -\rho \sin \vartheta + \rho \cos \vartheta (\mu - \rho^2) \\ \dot{\rho} \sin \vartheta + \rho \dot{\vartheta} \cos \vartheta &= \rho \cos \vartheta + \rho \sin \vartheta (\mu - \rho^2) \end{aligned}$$

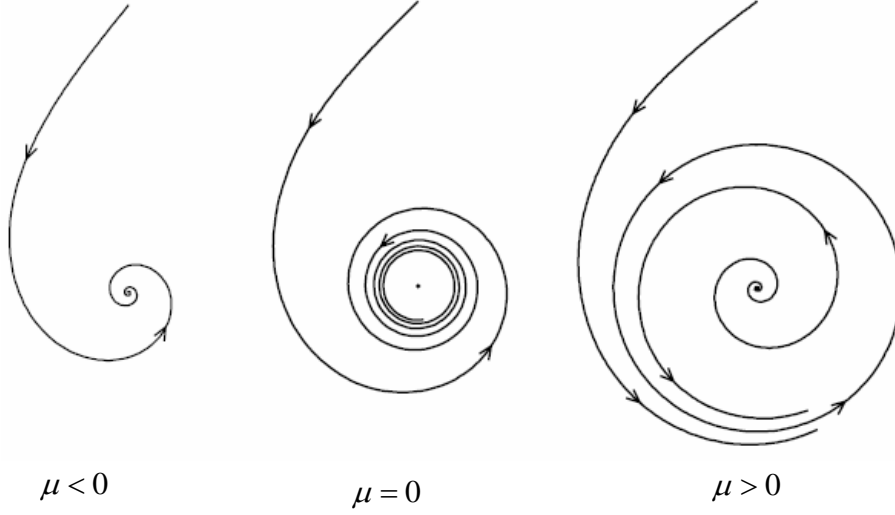
şeklinde iki denklem olarak yazılır. Birinci denklem  $\cos \vartheta$  ve ikinci denklem  $\sin \vartheta$  ile çarpılır, elde edilen bu iki denklemi taraf tarafa toplanır ve birinci denklem  $-\sin \vartheta$  ile ve ikinci denklem de  $\cos \vartheta$  ile çarpılır benzer işlemler yinelenirse

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \rho(\mu - \rho^2) \\ \dot{\vartheta} &= 1 \end{aligned}$$

diferansiyel denklemleri elde edilir. Buradan da  $\mu > 0$  ve  $\rho = \sqrt{\mu}$  için  $\dot{\rho} = 0$  denklemini bulunur. Böylece bir  $\rho(t) \equiv \sqrt{\mu}$  şeklinde bir periyodik yörünge vardır ve  $\vartheta(t) = t$ 'dir. Burada yörünge genliği  $\sqrt{\mu}$  ile büyümektedir. Çünkü

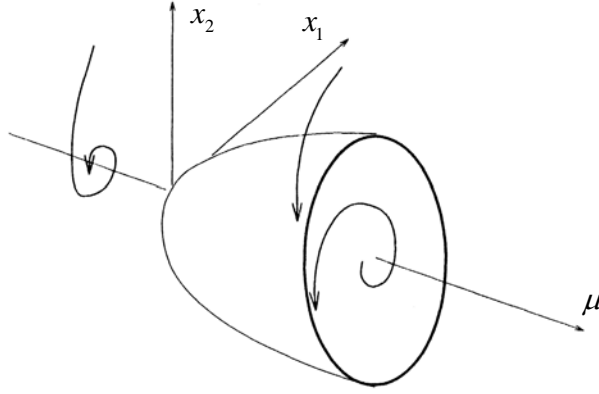
$$\begin{aligned} \rho > \sqrt{\mu} \text{ için } \dot{\rho} < 0, \\ 0 < \rho < \sqrt{\mu} \text{ için } \dot{\rho} > 0 \end{aligned}$$

yörüngesi kararlıdır ( Şekil 2.2 ).



**Şekil 2.2.** Hopf Bifurkasyonu Oluşumu

$\mu$ 'nın değiştirilmesiyle yörüngeler,  $\mu_0 = 0$ 'da dengeli bir dal ile birleşen bir dalı biçimlendirir. Şu halde (1) denklemi, Hopf bifurkasyonunun bir normal formu olarak gösterilebilir.  $\mu_0 = 0$ 'da kararlı dengelikten kararlı bir limit dairesine geçerken bir kararlılık değişimi vardır. Şekil 2.3'de görüldüğü üzere limit dairesi,  $(\mu - \mu_0)^{1/2}$  ile büyüyen bir genlik ile kararsız denge halini çevreler.



**Şekil 2.3:**  $\mu = 0$  'da limit dairelerinin oluşumu

Şimdi ise bu Hopf bifurkasyonunun Normal Formunu elde etmeye çalışalım. (1) sisteminin özdeğerleri  $\lambda_{1,2} = \mu \pm i$  olup,  $z = x_1 + ix_2$  ve  $\bar{z} = x_1 - ix_2$  biçiminde tanımlanırsa, bu taktirde  $|z|^2 = z\bar{z} = x_1^2 + x_2^2$  olarak yazılır. Bu yeni değişkenler de

$$\begin{aligned}\dot{z} = \dot{x}_1 + i\dot{x}_2 &= -x_2 + x_1(\mu - x_1^2 - x_2^2) + i(x_1 + x_2(\mu - x_1^2 - x_2^2)) \\ &= \mu(x_1 + ix_2) + i(x_1 + ix_2) - (x_1 + ix_2)(x_1^2 + x_2^2)\end{aligned}$$

diferansiyel denklemini sağlar. Bu durumda (1) sistemi

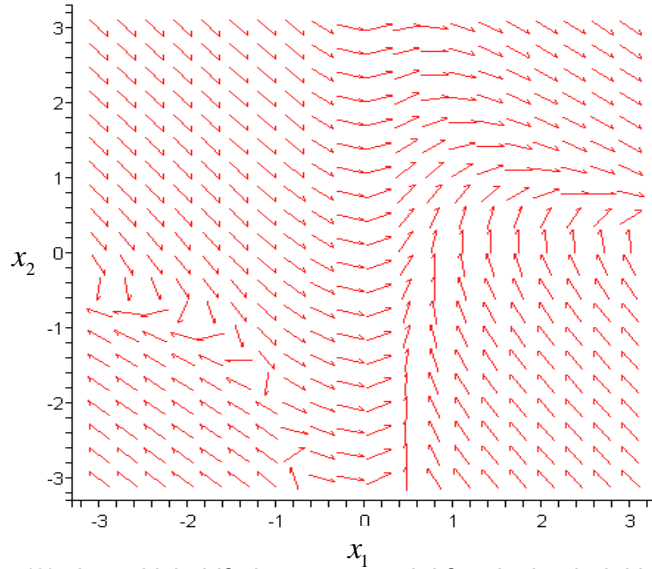
$$\dot{z} = (\mu + i)z - z|z|^2$$

biçiminde kompleks formda yazılabilir. Buna normal forma indirgenmiş diferansiyel denklem denir. Aynı zamanda  $z$  kompleks sayısı  $z = \rho e^{i\theta}$  şeklinde Euler formunda yazılarak yukarıdaki kutupsal koordinatlara tekrar dönülebilir.

**Örnek 2.7:** Kimyasal kinetiğin kullandığı

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= K_1 - (K_2 - 1)x_1 + x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 &= K_2 x_1 - x_1^2 x_2\end{aligned}\quad (2)$$

(2) sistemine *Brosselator denklemleri* denir. Eğer  $K_1 = 1$  alınırsa, (2) sistemi  $K_2 < 2 = 1 + K_1^2$  için kararlı bir odak noktasına ve  $K_2 > 2$  için kararsız bir odak noktasına sahiptir. Böylece eğer  $K_2 = 2$ ,  $K_1 = 1$  ise, (1) sistemi için bir bifurkasyon noktası  $(-1, -2)$  şeklinde oluşur (Şekil 1.4).



**Şekil 2.4:** (2) sistemi için bifurkasyona geçtiği faz düzlemindeki akış çizgileri

**Örnek 2.8:** Bir parametrelili

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f(r, \mu)x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + f(r, \mu)x_2\end{aligned}\quad (3)$$

eğri ailesi ile

$$g(r, \mu) = f(r, \mu)r = -r^2 + \mu \sin^2 r \quad (4)$$

fonksiyonunu göz önüne alalım.

Eğer  $\mu = 0$  ise, orijin bütün yörüngelerin yaklaştığı kararlı bir denge noktası,  $\mu \rightarrow 1$  iken orijin kararsızdır ve  $(\sin r)/r = 1/\mu$  olduğunda bir limit dairesi meydana gelir. Burada en yakın limit dairesi yerel kararlıdır, ondan sonraki kararsız, üçüncüsü kararlı ve bu şekilde devam eder. Eğer  $s = 1/\mu$  olmak üzere  $s = (\sin r)/r$  eğrilerinin kesişimlerine dikkatlice bakılacak olursa,  $\mu$  artarken elde edilen yeni periyodik yörünge çiftlerinin birinin kararlı diğerinin kararsız olduğu görülür. Bu denge noktalarının bifurkasyon noktaları ile aynı benzerliğe sahip olduğu aşikardır.

**Örnek 2.9:**  $\mu$  bir reel parametre olmak üzere

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2^3 + \mu x_2 - x_1\end{aligned}\quad (5)$$

sistemini göz önüne alalım. Açıkça orijinin bir sabit nokta olduğu görülür. Bu nokta civarında (5) sistemi lineerleştirilirse

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}$$

şeklinde karakteristik matrisi elde edilir. Böylece özdeğerler  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\mu \pm i\sqrt{4 - \mu^2})$  biçimindedir.  $-2 < \mu < 2$  için bir kompleks eşlenik çift vardır ve  $\mu$ ,  $(-2, 2)$  arasında sürekli olarak değişirken, kompleks  $\lambda$  düzlemindeki yollar belirlenir.  $\mu$ 'nün negatif değerleri için, sanal eksenin sol tarafı geçerli olup  $(0, 0)$  sabit noktası kararlı bir odak noktadır. Sanal eksenden geçerken bu değişir ve  $(0, 0)$  kararsız bir odak noktası haline gelir. Böylece  $\mu = 0$ 'da bir bifurkasyon ortaya çıkar.

### III. BÖLÜM

#### ÜÇ BOYUTLU BİR SİSTEMDEKİ HOPF BİFURKASYONU

Rössler, tepki reaksiyonları için çeşitli kaotik davranışlar sergileyen denklem sistemlerinde, kaosa geçme sınırında çeşitli bifurkasyonları incelemiştir. Daha sonraları ise kaos hakkındaki çalışmalar giderek artarak mühendislikte, fizikte, kimyada vb. temel alanlarda büyük bir potansiyel oluşturmuştur. 1963'te Lorenz [3], sadece iki nonlineriteye sahip fakat kompleks dinamik davranışlar sergileyen ilk kanonik kaotik attractörü (çekiciyi) bulmuştur. Burada bu sistemlere benzer aşağıdaki lineer olmayan adi diferansiyel denklem sistemi için, içerisinde sadece tek lineer olmayan terim olan ve literatürde genellikle nadir olarak karşılaşılan, üç boyutlu faz düzleminde parametrelerin belirli değerlerine bağlı olmak üzere çizildiğinde farklı formlar elde edilen ve kullanılabilirliğinin fazla olduğu düşünülen

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 &= ax_1 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= bx_3 + x_1(x_2 - c)\end{aligned}\tag{6}$$

formunda orijinal olarak ilk kez tarif edilen bir sistem üzerinde çalışacağız.

Bir dinamik sistemin çözümlerinin davranışları ile sistem içerisinde bulunan parametreler arasında çok güçlü bir bağın olduğu ve bu bağa göre kaotik davranışların sergilendiği bilinmektedir. Bir parametre sürekli olarak değişirken denge noktaları da parametrelerin özel ele alındığı tanım değerlerinde bunlara göre doğrulan limit daireleri civarında gidip gelirler.

İki boyutlu uzayı göz önüne alalım. Faz düzleminde yatay eksen  $x_1$ -ekseni, dikey eksen de  $x_2$ -ekseni olsun.  $\delta$ , genellikle sıfıra yakın çok küçük bir pozitif bir reel sayı veya pozitif bir reel sayı olmak üzere,  $\delta$  yarıçaplı limit dairesi üzerine pozitif yönde (saat yönünün tersi) limit dairesinin sınırına yaklaşmaya başlayan eğri, parametrenin değişimiyle negatif yönde dairenin içerisinden aynı dairenin sınırına doğru yönlenebilir. Yani  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  ve  $\xi$ ,  $\mathbb{R}^2$ 'de bileşeni olduğu ikilinin yatay eksen üzerindeki dik izdüşümüne karşılık gelen nokta,  $\eta$ 'da aynı düzlemde bileşeni olduğu ikilinin dikey eksene olan dik izdüşümüne karşılık gelen nokta ve  $0 < \delta \in \mathbb{R}$  olacak şekilde  $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - \xi)^2 + (x_2 - \eta)^2 = \delta^2\}$  çemberinin bir limit dairesi olduğunu kabul edelim. Sistemin bir parametre değişimiyle hareket etmeye

başlamadan sonra, fiziksel olarak, sistem üzerine uygulanan kuvvette bir değişiklik veya sistemin maruz kaldığı aniden ortaya çıkıveren ve sisteme farklı bir yön kazandıran (örneğin popülasyonlardaki canlıların doğum ve ölüm oranlarının, habitat içerisinde canlıların yaşamak için ihtiyaç duydukları besin kaynaklarının azalması veya çoğalmasına göre değişimini sağlayan değer veya popülasyondaki o canlının, besin zincirinin bir üstünde bulunduğu başka bir canlının habitat içerisinde artması veya azalması nedeniyle popülasyondaki canlı oranının değişmesini sağlayan değer parametreye birer örnek olabilir.) durumun ortaya çıkması ile önce pozitif yönde  $D$ 'nin sınırına sonsuzdan gelen bir eğrinin aldığı en uç noktalarındaki koordinatları ile çemberin sınırında bulunan koordinatları arasındaki farkın da sonsuz küçük olduğu düşünölsün. Daha sonra yine parametrenin aldığı farklı bir değer ile bu sefer orijinden hareket etmeye başlayan eğrinin  $D$ 'nin sınırına aynı şekilde pozitif yönde yaklaştığı farz edilsin. Bu taktirde meydana gelen bifurkasyon gelen bifurkasyon yine bir Hopf bifurkasyonu biçiminde adlandırılır. Bu bifurkasyona Hopf bifurkasyonu diyebiliriz.

### 3.1. (6) Sistemin Bazı Temel Özellikleri

(i) Sistemin sadece üçüncü denkleminde  $x_1x_2$  bulunduğundan dolayı bir nonlineerlik vardır.

(ii) Sistemin haciminde azalma görülmesi için, yani sistemin dissipative olması için  $\nabla \cdot f < 0$  olması gerekir. Halbuki

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_3} = b$$

olduğundan sistemin dissipative olması için  $b < 0$  olmalıdır ki, daha sonraki hesaplamalarda göröleceği üzere, sistemin karakteristik denkleminin köklerinin Hopf bifurkasyonunu oluşturmak üzere incelediğimizde  $b$  parametresinin negatif değerli olması gerektiği görülür. Bu taktirde (6) sistemi aynı zamanda dissipative bir sistemdir.

(iii) Sistemin  $(x_1, x_2, x_3)$  çözümleri göz önüne alındığında simetrik olmadığı görülür. Ancak sistemin ilk iki denkleme dikkate alındığında, bu denklemlerin  $(x_1, x_2, x_3)$  ve  $(-x_1, -x_2, -x_3)$  çözümlerinin her denkleme için de sağlandığı açıktır.

(iv) Sistemin bütün parametre değerleri için sabit noktası  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (0, 0, 0)$ 'dır. Aynı zamanda  $a \neq 0$  olmak üzere,  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (b + c/a, ab + c, -ab - c)$  noktası da sistemin bir sabit noktasıdır.

### 3.2. Lineerleştirilmiş (6) Sistemin Orijindeki Kararlılığı

Lineer olmayan (6) sisteminin orijin civarındaki davranışlarının; küresel koordinatlar dikkate alınarak sistemin lineer olmayan kısımlarının, yarıçapın sifıra gittiğinde kendisi sifıra yakınsayacağından, bunun lineer olmayan kısımlardan arındırılarak elde edilen lineer denklem sisteminin orijin civarındaki davranışlarıyla aynı olacağı açıktır.  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ ,  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  ve  $F(x) = [F_i(x)]_{3 \times 1}$  lineer olmayan kısım olmak üzere, (6) sistemi

$$\dot{x} = Ax + F(x)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece (6) sistemine göre  $i = 1, 2$  için  $F_i(x) = 0$  ve  $F_3(x) = x_1 x_2$ 'dir.

Üç boyutlu  $x_1 x_2 x_3$  -uzayında küresel koordinatlar

$$x_1 = \delta \cos \theta \sin \phi$$

$$x_2 = \delta \sin \theta \sin \phi$$

$$x_3 = \delta \cos \phi$$

olarak tanımlandığında

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{F_3(x)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta^2 \cos \theta \sin \phi \sin \theta \sin \phi}{\delta} = 0$$

olduğundan, orijin civarındaki (6) lineer olmayan sistemi

$$\dot{x} = Ax$$

biçimindeki lineer sisteminin davranışları incelenerek yorumlanabilir. Bunun için karakteristik polinomun katsayılarına bakarak, Routh-Hurwitz kriteri kullanıldığında

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ a & -\lambda & 1 \\ -c & 0 & b - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - b\lambda^2 + (c - a)\lambda + ab + c = 0$$

olup, sistemin kararlı bir yapıda olması için  $a_1 = -b > 0$ ,  $a_2 = c - a > 0$  ve  $a_3 = ab + c = 0$  veya  $R = a_1 a_2 - a_3 = -bc - c = 0$  olmalıdır. Buradan  $b < -1$ ,  $c > a$  veya  $b = -1$  ve  $c > a$  eşitlik ve eşitsizlikleri sağlanmalıdır. Eğer  $b \leq -1$  ve  $c > a$  ise, sistem tamamen sanal iki kompleks köke ve bir reel köke sahip olacak, dolayısıyla kararlı bir bifurkasyon meydana gelecektir.

Şimdi (6) sisteminin sahip olduğu periyodik çözümlerin var olduğu tanım cümlesini bulalım.  $a \neq 0$  ve  $b$  sabitler olmak üzere (6) sisteminin kritik noktalarını önce belirleyelim. Hopf bifurkasyonu noktasında, karakteristik polinom sadece  $\pm i\beta$  sanal kök çiftine sahiptir. Bu yüzden (6) sisteminin, üçüncü dereceden karakteristik polinomunun köklerine bakmadan önce sistemin sağlandığı kritik noktayı parametreler cinsinden bulalım. Eğer (6) denklem sistemi

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 0 \\ ax_1 + x_3 &= 0 \\ bx_3 + x_1(x_2 - c) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

biçiminde yazılırsa, bu denklem sisteminin kritik noktası

$$x^*(c) = \left( \frac{(ab+c)}{a}, ab+c, -ab-c \right)^T \quad (8)$$

olarak elde edilir. Şimdi karakteristik denklemin kökleri olmasını istediğimiz  $\lambda_{1,2}(c) = \alpha(c) \pm i\omega(c)$  ve  $\lambda_3(c)$  değerlerini bulalım. Sistemin katsayılar matrisi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ x_2 - c & x_1 & b \end{pmatrix} \quad (9)$$

ve karakteristik denklemdaki  $I$  üç boyutlu uzayda bir birim matrisi göstermek üzere

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ a & -\lambda & 1 \\ x_2 - c & x_1 & b - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

olup

$$\lambda^2(b-\lambda) + ax_1 + x_2 - c + \lambda(x_2 - c) + \lambda x_1 - (b-\lambda)a = 0 \quad (11)$$

$$\lambda^3 - b\lambda^2 + (x_1 + x_2 + a - c)\lambda + ax_1 + x_2 - c - ba = 0 \quad (12)$$

üçüncü dereceden karakteristik polinomu elde edilir. (8) eşitliğindeki her bir  $x_1^*, x_2^*, x_3^*$  bileşeni  $a, b$  sabitler olmak üzere  $c$  bağımsız değişkeninin birer fonksiyonudurlar. O halde  $x_2^*, x_3^*$  bileşenleri ile  $x_1^*$  bileşeni arasında fonksiyonel bir bağıntı olup,  $x_1^* = y(c)$  olarak alındığında (8) eşitliği

$$\bar{x}^*(c) = (y(c), a y(c), -ay(c))^T \quad (13)$$

halini alır.

Şimdi  $\lambda_{1,2}(c^*) = \pm iw(c^*) = \pm iw_0$  ve  $\lambda_3(c^*) = d < 0$  olacak şekilde bir  $c^*$  sayısını bulmaya çalışalım. (13) ifadesindeki değerlere göre (12) denklemini yeniden yazılacak olursa

$$\begin{aligned} \lambda^3(c) - b\lambda^2(c) + (y(c) + ay(c) + a - c)\lambda(c) + ay(c) + ay(c) - c - ba &= 0 \\ \lambda^3(c) - b\lambda^2(c) + ((a+1)y(c) + a - c)\lambda(c) + ay(c) &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

şeklinde ve eğer  $c = c^*$  olarak alınır da (14) denklemini

$$\lambda^3(c^*) - b\lambda^2(c^*) + ((a+1)y(c^*) + a - c^*)\lambda(c^*) + ay(c^*) = 0 \quad (15)$$

biçiminde yazılır. (15) denklemini  $\lambda_1(c^*) = +iw(c^*) = +iw_0$  kökünü sağlayacağından,

$$-iw_0^3 + bw_0^2 + i[(a+1)y(c^*) + a - c^*]w_0 + ay(c^*) = 0 \quad (16)$$

ve (15) denklemini yine  $\lambda_2(c^*) = -iw(c^*) = -iw_0$  kökünü de sağlayacağından

$$iw_0^3 + bw_0^2 - i[(a+1)y(c^*) + a - c^*]w_0 + ay(c^*) = 0 \quad (17)$$

elde edilir. (16) ve (17) denklemleri taraf tarafa toplanır

$$2bw_0^2 + 2ay(c^*) = 0 \quad (18)$$

$$w_0^2 = -\frac{a}{b}y(c^*)$$

olarak hesaplanmış olur. Diğer taraftan (17) denkleminin reel ve sanal kısımları

$$\text{Im} : bw_0^2 + ay(c^*) = 0 \quad (19)$$

$$\text{Re} : w_0^3 - [(a+1)y(c^*) + a - c^*]w_0 = 0.$$

biçiminde ayrıştırılırsa ve  $w_0 \neq 0$  olmak üzere

$$w_0\{w_0^2 - [(a+1)y(c^*) + a - c^*]\} = 0 \quad (20)$$

$$w_0^2 = (a+1)y(c^*) + a - c^* > 0$$

bulunur. Karakteristik denklemin kökleri  $\lambda_{1,2}(c^*) = \pm iw_0$  ve  $\lambda_3(c^*) = d < 0$  olmak üzere yeniden göz önüne alınırsa, karakteristik polinom

$$(\lambda(c^*) - iw_0)(\lambda(c^*) + iw_0)(\lambda(c^*) - d) = 0 \quad (21)$$

$$\lambda^3(c^*) - d\lambda^2(c^*) + w_0^2\lambda(c^*) - dw_0^2 = 0$$

şeklinde elde edilir. O halde (15) denklemleri ile (21) denklemleri birbirlerine denktir. Böylece

$$\lambda^3 - d\lambda^2 + w_0^2\lambda - dw_0^2 \equiv \lambda^3 - b\lambda^2 + ((a+1)y(c^*) + a - c^*)\lambda + ay(c^*) \quad (22)$$

olup  $d = b$ ,  $dw_0^2 = -ay(c^*)$  eşitlikleri bulunmuş olur. Bu eşitlikler birbirleri cinsinden yazılırsa yani  $d = b$  ise,  $w_0^2 = -ay(c^*)/b$  elde edilir. Bu ise (18) denklemleri ile aynıdır. Buradan

$$y(c^*) = \frac{-b(a - c^*)}{a + b + ab} \quad w_0^2 = -\frac{a}{b}y(c^*) = \frac{a(a - c^*)}{a + b + ab} > 0 \quad b < 0 \quad (23)$$

$$w_0^2 = (a+1)y(c^*) + a - c^*$$

eşitlik ve eşitsizlikleri çözülebilir. Dolayısı ile  $a y(c^*) > 0$  olmalıdır.

Şimdi de kaosa geçiş değeri olan  $c_{1,2}^*$  parametrelerini elde etmeye çalışalım. Bunun için önce (7) denklem sistemi düzenlenecek olursa,

$$y^2(c^*) - (a + b + c^*)y(c^*) = 0 \quad (24)$$

bulunur. (23) denklemdeki ilk eşitlik (24) denklemde yerine yazılırsa, buradan

$$\begin{aligned} & \left( \frac{-b(a - c^*)}{a + b + ab} \right)^2 + (a + b + c^*) \frac{b(a - c^*)}{a + b + ab} = 0 \\ & \frac{a^2 b^2 - 2ab^2 c^* + b^2 (c^*)^2}{[a(1+b) + b]^2} + \frac{a^2 b + ab^2 - b^2 c^* - b(c^*)^2}{a(1+b) + b} = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

ve

$$(-ab - ab^2)(c^*)^2 - (3ab^2 + ab^3 + b^3)c^* + a^3(b^2 + b) + 3a^2 b^2 + b^3(a^2 + a) = 0$$

biçiminde  $c^*$ 'a bağlı kuadratik bir denklem elde edilir ve çözümleri ise diskriminant değeri hesaplanarak bulunur.  $c_1^*$  ve  $c_2^*$  değerlerine bakıldığında sistemin iki farklı noktada Hopf bifurkasyonuna geçtiği görülür. Bu yüzden, sistemde bulunan sadece bir non-lineerliğin iki ayrı noktada hesap edilen bir bifurkasyon meydana getirdiği gözlemlenir. Bu noktaların

$$\begin{aligned} c_{1,2}^* &= \frac{3ab^2 + (1+a)b^3 \mp \sqrt{[3ab^2 + (a+1)b^3]^2 + 4(ab + ab^2)[a^3(b^2 + b) + 3a^2 b^2 + b^3(a^2 + a)]}}{-2(ab + ab^2)} \\ &= \frac{b^3(1+a) + 3b^2 a}{-2(ab + ab^2)} \\ & \mp \frac{\sqrt{b^6(a+1)^2 + b^5(4a^3 + 10a^2 + 6a) + b^4(4a^4 + 16a^3 + 13a^2) + b^3(8a^4 + 12a^3) + 4b^2 a^4}}{-2(ab + ab^2)} \\ &= \frac{b^3(1+a) + 3b^2 a}{-2(ab + ab^2)} \mp \frac{\sqrt{(b^3 + 3ab^2 + ab^3 + 2a^2 b + 2a^2 b^2)^2}}{-2(ab + ab^2)} \end{aligned}$$

$$= \frac{b^3(1+a) + 3b^2a \mp (b^3 + 3ab^2 + ab^3 + 2a^2b + 2a^2b^2)}{-2(ab + ab^2)}$$

ve son olarak

$$c_1^* = -\frac{ab^2 + b^2 + 3ab + a^2b + a^2b}{a(1+b)} \quad \text{ve} \quad c_2^* = a$$

olduğu kolayca elde edilir.

Şimdiye kadar Hopf bifurkasyonunun meydana gelmesi için gerekli şartlardan birisi olan sadece sanal kısma sahip iki eşlenik kompleks sayının bulunumu gerçekleştirildi. Fakat aynı zamanda sistemin kökünün reel kısmının parametreye göre birinci türevinin pozitif değerli olması yani,  $\alpha'(c^*) = \frac{d(\text{Re } \lambda(c^*))}{dc^*} > 0$  olması da gerekir. Şu halde,  $\lambda(c)$ 'nin türevini, (14) kapalı fonksiyonunun türevini alarak bulabiliriz. (14) denkleminin  $c$ 'ye göre türevi alınır;

$$\lambda'(c) = \frac{\lambda(c)[y'(c)(a+1) - 1] + ay'(c)}{3\lambda^2(c) - 2b\lambda(c) + [(a+1)y(c) + a - c]} \quad (26)$$

elde edilir. (24) denkleminin  $c^*$ 'a göre türevinin alınmasıyla da

$$2y'(c^*)y(c^*) - y(c^*) - (a+b+c^*)y'(c^*) = 0 \quad (27)$$

ve nihayet

$$y'(c^*) = \frac{y(c^*)}{2y(c^*) - (a+b+c^*)} \quad (28)$$

bulunur.  $\lambda_1(c^*) = iw_0$  olduğundan

$$\lambda_1(c^*) = \frac{iw_0[y'(c^*)(a+1) - 1] + ay'(c^*)}{-3w_0^2 - 2biw_0 + [y(c^*)(a+1) + a - c^*]} \quad (29)$$

$$\lambda_1(c^*) = \frac{ay'(c^*) + iw_0[y'(c^*)(a+1) - 1]}{[-3w_0^2 + [y(c^*)(a+1) + a - c^*]] - i2bw_0}$$

ve (28) eşitliği yukarıda yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\lambda_1(c^*) &= \frac{a \left[ \frac{y(c^*)}{2y(c^*) - (a+b+c^*)} \right] + iw_0 \left[ \left( \frac{y(c^*)}{2y(c^*) - (a+b+c^*)} \right) (a+1) - 1 \right]}{[-3w_0^2 + [y(c^*)(a+1) + a - c^*]] - i2bw_0} \\
&= \frac{\frac{ay(c^*)}{2y(c^*) - (a+b+c^*)} + i \frac{w_0 \{ (a+1)y(c^*) - 2y(c^*) + (a+b+c^*) \}}{2y(c^*) - (a+b+c^*)}}{[-3w_0^2 + [y(c^*)(a+1) + a - c^*]] - i2bw_0} \\
&= \frac{ay(c^*) + iw_0 \{ (a+1)y(c^*) - 2y(c^*) + (a+b+c^*) \}}{[2y(c^*) - (a+b+c^*)][ -3w_0^2 + y(c^*)(a+1) + a - c^* - i2bw_0]} \\
&= \frac{ay(c^*) + iw_0 [(a+1)y(c^*) - 2y(c^*) + (a+b+c^*)]}{[2y(c^*) - (a+b+c^*)]} \cdot \frac{[-3w_0^2 + y(c^*)(a+1) + a - c^* + i2bw_0]}{[-3w_0^2 + y(c^*)(a+1) + a - c^*]^2 + 4b^2w_0^2} \\
&= \frac{a(a+1)y^2(c^*) + (a - c^* - 3w_0^2)ay(c^*) - 2bw_0^2[(a-1)y(c^*) + a + b + c^*]}{[2y(c^*) - (a+b+c^*)]\{ [y(c^*)(a+1) + a - c^* - 3w_0^2]^2 + 4b^2w_0^2 \}} \\
&\quad + i \frac{(2abw_0y(c^*) + w_0[(a-1)y(c^*) + a + b + c^*][(a+1)y(c^*) + a - c^* - 3w_0^2])}{[2y(c^*) - (a+b+c^*)]\{ [y(c^*)(a+1) + a - c^* - 3w_0^2]^2 + 4b^2w_0^2 \}}
\end{aligned} \tag{30}$$

elde edilir. Böylece  $\alpha'(c^*) = \frac{d(\text{Re } \lambda_1(c^*))}{dc^*}$  olmak üzere

$$\alpha'(c^*) = \frac{a(a+1)y^2(c^*) + a(a - c^* - 3w_0^2)y(c^*) - 2bw_0^2[(a-1)y(c^*) + a + b + c^*]}{[2y(c^*) - a - b - c^*]\{ [y(c^*)(a+1) + a - c^* - 3w_0^2]^2 + 4b^2w_0^2 \}} > 0 \tag{31}$$

şeklinde bulunur.

### 3.3. Lineerleştirilmiş (6) Sisteminin Analitik Çözümü

Serbestlik derecesi üç olan (6) lineer olmayan diferansiyel denklem sisteminin lineerleştirilmiş biçimi

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + x_3 \\
\dot{x}_2 &= ax_1 + x_3 \\
\dot{x}_3 &= bx_3 - cx_1
\end{aligned}$$

şeklindedir. Şimdi ise bu denklem sisteminin parametreler ve sabitler cinsinden genel çözümünü bulalım. Lineerleştirilmiş sistemin çözümü için, sistemin karakteristik polinomunun kökleri

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ a & -\lambda & 1 \\ -c & 0 & b - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - b\lambda^2 + (c - a)\lambda + ab + c = 0$$

eşitliğinden bulunur. Burada dikkat edilmesi gereken, Bölüm 3.2'de Routh-Hurwitz kararlılık şartları kullanılarak elde edilen  $b \leq -1$  ve  $c > a$  eşitsizliklerinin sağlanmasıdır. Onun için istenilen kararlılık yapısının korunması için de  $b = -1$  olarak alınır. Böylece

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \lambda^3 + \lambda^2 + (c - a)\lambda - a + c = 0$$

olarak elde edilir. Bu kübik karakteristik denklemin kökleri  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = \sqrt{a - c}$ ,  $\lambda_3 = -\sqrt{a - c}$  olarak bulunur. Burada eğer  $c > a$  ise, bu köklerden birisi reel ve diğer ikisi ise eşlenik kompleks sayıdır. O halde

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = i\sqrt{c - a}, \quad \lambda_3 = -i\sqrt{c - a}$$

olup çözümler  $e^{-t}$ ,  $\cos(\sqrt{c - a}t)$ ,  $\sin(\sqrt{c - a}t)$  fonksiyonlarına bağlı olmak üzere

$$x_1(t) = c_2 \sin(\sqrt{c - a}t) + c_3 \cos(\sqrt{c - a}t)$$

$$x_2(t) = \frac{1}{a - 1 - c} \left( -c_2 \cos(\sqrt{c - a}t)\sqrt{c - a} + c_2 \cos(\sqrt{c - a}t)\sqrt{c - a}a + c_3 \sin(\sqrt{c - a}t)\sqrt{c - a} - c_3 \sin(\sqrt{c - a}t)\sqrt{c - a}a - cc_2 \sin(\sqrt{c - a}t) - cc_3 \cos(\sqrt{c - a}t) + c_1 e^{-t} + cc_1 e^{-t} - ac_1 e^{-t} \right)$$

$$x_3(t) = \frac{1}{a - 1 - c} \left( -cc_2 \cos(\sqrt{c - a}t)\sqrt{c - a} + cc_2 \sin(\sqrt{c - a}t)\sqrt{c - a} + cc_3 \cos(\sqrt{c - a}t) + cc_3 \sin(\sqrt{c - a}t)\sqrt{c - a} - c_1 e^{-t} + cc_1 e^{-t} + ac_1 e^{-t} \right)$$

olarak elde edilir.

### 3.4. Üç Boyutlu Sisteminin İki Boyuta İndirilmesi (Normal Form)

Bu kısımda üç boyutlu (6) sisteminin iki boyuta indirgenmesini inceleyelim. Bir önceki bölümde de belirtildiği gibi, kompleks değişkenler yardımıyla iki boyutlu sistemleri bir boyuta indirgeyebildiğimiz gibi burada da üç boyutlu sistemi iki boyuta indirmeye çalışacağız. Bunun için (6) sistemine;  $x^*(c)$ , (8) denklemdeki parametrelere bağlı olan bir sabit,  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$  ve  $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ 'da  $\mathbb{R}^3$ 'te göz önüne alınan kolon vektörleri olmak üzere

$$x(t) = x^*(c) + P(\mu)u(t) \quad (32)$$

değişken değiştirmesini uygulayalım. Her iki tarafın türevi alınırsa,

$$\dot{x}(t) = P(\mu)\dot{u}(t) \quad (33)$$

olarak bulunur. (32) ve (33) eşitlikleri (6) denklemde yerlerine yazılacak olursa, (6) denklem sistemi  $N = [n_i]_{3 \times 1}$  sabit bir kolon vektörü olmak üzere

$$P(\mu)\dot{u}(t) = A[x^*(c) + P(\mu)u(t)] + N \quad (34)$$

biçiminde yazılır. (34) denkleminin her iki tarafı regüler  $P(\mu)$  matrisinin tersi olan  $P^{-1}(\mu)$  ile soldan çarpılırsa,

$$\begin{aligned} P^{-1}(\mu)P(\mu)\dot{u}(t) &= P^{-1}(\mu)A[x^*(c) + P(\mu)u(t)] + P^{-1}(\mu)N \\ \dot{u}(t) &= P^{-1}(\mu)A[x^*(c) + P(\mu)u(t)] + P^{-1}(\mu)N \\ &= P^{-1}(\mu)Ax^*(c) + [P^{-1}(\mu)AP(\mu)u(t) + P^{-1}(\mu)N] \\ &= [P^{-1}(\mu)AP(\mu)]u(t) + [P^{-1}(\mu)Ax^*(c) + P^{-1}(\mu)N] \end{aligned} \quad (34)$$

bulunur. Burada  $u(t)$  kolon vektörünün sadece imajiner kısımlı bir çift kompleks eşlenik köke sahip olacak biçimde tasarlanmış bir

$$A(\mu) = \begin{bmatrix} 0 & -w_0 & 0 \\ w_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(\mu) \end{bmatrix} \quad (35)$$

katsayılar matrisi olduğunu düşünelim.  $P^{-1}(\mu)AP(\mu)$  matris gösterimini genel haldeki (35) matrisine eşit ve  $F(u, \mu)$  matrisini de (34) denkleminin sağ yanındaki geriye kalan matrislere denk olmak üzere alalım. Böylece  $u(t)$  kolon vektörü, üç boyutlu

$$\dot{u}(t) = A(\mu)u + F(u, \mu) \quad (36)$$

denkleminin bir çözümü olur. (36) denkleminde (35) matrisinin yazılmasıyla elde edilen sistemde,  $z = u_1 + iu_2$  indirgeme dönüşümü yapılırsa

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -w_0 & 0 \\ w_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1(u, \mu) \\ F_2(u, \mu) \\ F_3(u, \mu) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -w_0 \\ w_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1(u, \mu) \\ F_2(u, \mu) \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$\dot{u}_3 = \lambda_3(\mu)u_3 + F_3(u, \mu)$$

ve (37) denklemini de kompleks formda yeniden yazılırsa

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= iw_0z + [F_1(u, \mu) + iF_2(u, \mu)] \\ \dot{u}_3 &= \lambda_3(\mu)u_3 + F_3(u, \mu) \end{aligned} \quad (38)$$

biçiminde iki boyutlu diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Burada

$$[F_1(u, \mu) + iF_2(u, \mu)] = G(z, \bar{z}, u_3) \text{ ve } F_3(u, \mu) = H(z, \bar{z}, u_3) \quad (39)$$

olup,  $G$  ve  $H$  fonksiyonları  $z, \bar{z} \in \mathbb{C}^1$  olmak üzere  $z, \bar{z}$ 'nin düzgün kompleks değerli fonksiyonlarıdır. Gerçekten  $z$ , (37) denklem sisteminin kritik özuzayı  $T^c = \{u_3 = 0\}$  üzerinde yeni bir koordinat olarak görülebilir. Bu nedenle bilinmeyen  $w_{ij} \in \mathbb{C}$  ile birlikte  $W^c$  merkez manifoldu

$$u_3 = V(z, \bar{z}) = \frac{1}{2}w_{20}z^2 + w_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}w_{02}\bar{z}^2 + O(|z|^3) \quad (40)$$

gösterimine sahiptir.  $V$  'nin reel olması gerektiğinden, dolayısı ile  $w_{11}$  reel ve  $w_{20} = \bar{w}_{02}$  'dir. Şimdi

$$\begin{aligned}\dot{z} &= iw_0 z + G(z, \bar{z}, u_3) \\ \dot{u}_3 &= \lambda_3(\mu)u_3 + H(z, \bar{z}, u_3)\end{aligned}\quad (41)$$

sisteminin  $z, \bar{z}$  ve  $u_3$  noktası civarındaki Taylor açılımları göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\dot{z} &= iw_0 z + \frac{1}{2}G_{20}z^2 + G_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}G_{02}\bar{z}^2 + \frac{1}{2}G_{21}z^2\bar{z} + \langle G_{10}, u_3 \rangle z + \langle G_{01}, u_3 \rangle \bar{z} + \dots \\ \dot{u}_3 &= \lambda_3(\mu)u_3 + \frac{1}{2}H_{20}z^2 + H_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}H_{02}\bar{z}^2 + \dots\end{aligned}\quad (42)$$

bulunur. Burada  $G_{20}, G_{11}, G_{02}, G_{21}, G_{01}, G_{10}, H_{ij} \in \mathbb{C}^1$ ;  $H_{11}$  reel ve  $H_{20} = \bar{H}_{02}$  'dir. Aynı zamanda iç çarpım  $\langle G, u_3 \rangle = \bar{G}u_3$  olarak tanımlanmıştır.  $G$  ve  $H$  fonksiyonlarına göre (41) denklem sisteminden,

$$\begin{aligned}i + j \geq 2, \quad G_{ij} &= \frac{\partial^{i+j}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} G(z, \bar{z}, 0) \Big|_{z=0} \\ \bar{G}_{10,1} &= \frac{\partial^2}{\partial u_3 \partial z} G(z, \bar{z}, u_3) \Big|_{z=0, u_3=0} \\ \bar{G}_{01,1} &= \frac{\partial^2}{\partial u_3 \partial \bar{z}} G(z, \bar{z}, u_3) \Big|_{z=0, u_3=0} \\ i + j = 2, \quad H_{ij} &= \frac{\partial^{i+j}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} H(z, \bar{z}, 0) \Big|_{z=0}\end{aligned}\quad (43)$$

bulunur. (40) açılımı (42) sisteminde yerine yazılırsa, kuadratik mertebeden

$$\begin{aligned}(2iw_0 I - \lambda_3)w_{20} &= H_{20} \\ -\lambda_3 w_{11} &= H_{11} \\ (-2iw_0 I - \lambda_3)w_{02} &= H_{02}\end{aligned}\quad (44)$$

eşitlikleri ve böylelikle

$$\begin{aligned}
w_{20} &= (2iw_0I - \lambda_3)^{-1} H_{20} \\
w_{11} &= -\lambda_3^{-1} H_{11} \\
w_{02} &= (-2iw_0I - \lambda_3)^{-1} H_{02}
\end{aligned} \tag{45}$$

olarak bulunur. Burada,  $I$ 'nin birim matris olduğuna,  $0$  ve  $\pm 2iw_0$ 'nın ise  $\lambda_3$ 'ün özdeğerleri olmadığına, ayrıca  $(2iw_0I - \lambda_3)$ ,  $\lambda_3$ ,  $(-2iw_0I - \lambda_3)$  matrislerinin de terslenebilir olduğuna dikkat etmek gerekir. Şimdi (41) sistemini merkezi manifolduna kısıtlayalım: kübik mertebeden terimlere bakılacak olunursa

$$\dot{z} = iw_0z + \frac{1}{2}G_{20}z^2 + G_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}G_{02}\bar{z}^2 + \frac{1}{2}(G_{21} - 2\langle G_{10}, \lambda_3^{-1}H_{11} \rangle + \langle G_{01}, (2iw_0I - \lambda_3)^{-1}H_{20} \rangle)z^2\bar{z} + \dots$$

elde edilir.

Şu halde (6) sistemine karşılık gelen iki boyutlu normal form, (42), (43) denklemleri ile ifade edilmiş denklemlerdir.

### 3.5. (6) Sisteminin İncelenmesinde ve Çiziminde Kullanılan Araçlar ve Yazılımlar

(6) sisteminin parametrelerin belirli değerlerine bağlı görünümünü incelemeye ve bunun için gerekli iterasyonları hesaplamaya olanak sağlayan bilgisayarların, matematiksel verilerin hatasız veya sonsuz küçük hata ile yapılmasını sağlaması açısından, işlemcisi yüksek ve geçici hafızası olan Ram'lerin daha büyük Megabyte değerlerinde olması gerekmektedir. Yapılan hesaplamaların çoğunda kullanılan algoritma içerisinde binden fazla döngüye sahip komutların çıktılarının alınması gerçekten zaman gerektirmektedir. Nadiren de olsa kapasite yetersizliğinden dolayı, çok büyük aralıklardaki adım uzunluklarının çok küçük olduğu durumlarda bile bilgisayarın kilitlendiği olmuştur. Bu tez çalışmasında, Maple 9.5 ve Mathematica 4.0 programlarının kullanılmasıyla yapılan hesaplamalar Intel Celeron 367 Mhz işlemcili, 320 MB Ram'a sahip bir bilgisayar yardımıyla gerçekleştirilmiştir.

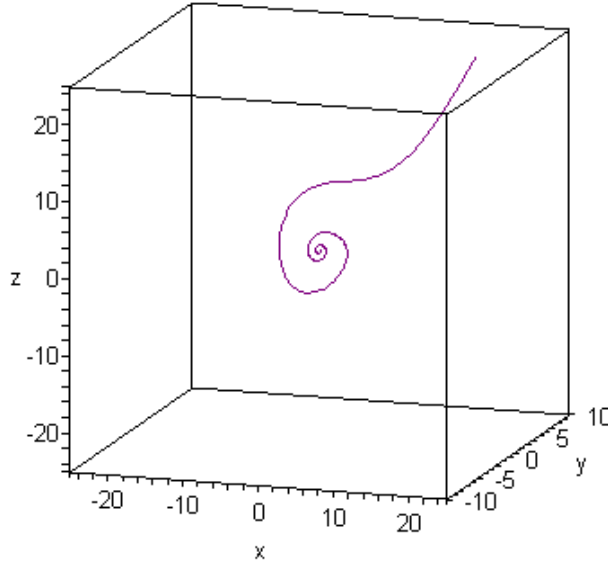
### 3.6. (6) Sistemin Davranışlarının Maple Programıyla Gözlenmesi

(6) sisteminde,  $a = 0.15$ ,  $b = -1$  ve  $c$ 'nin değişken bir parametre olması halinde  $h = 0.05$  adım aralığıyla elde edilen sisteminin çözüm eğrisi Şekil 2.1 de gösterildiği gibidir. Buradaki görüntüler sistemin kararlı bir yapıya (limit dairesine) geçiş halindeki görüntüleri olup, 50 parçalık animasyonun en son görüntüleridir. Bu sistem için görüntülerin alınan her adım

aralığının küçültülmesi ve de başlangıç değerlerinin değişmesi ile sistem farklı davranışlar göstermektedir. Sistemin bir spiral yapıya sahip olmasından da anlaşılacağı üzere, sistemin iki eşlenik karakteristik denklem köküne sahip olduğu görülür. Aşağıdaki şekilleri çizmemizi sağlayan Maple algoritması şöyledir:

```
> with(DEtools):
> with(plots):
> dd1 := diff(x(t),t) = y(t)+z(t);
> dd2 := diff(y(t),t) = a*x(t)+z(t);
> dd3:=diff(z(t),t)=b*z(t)+x(t)*(y(t)-c);
> bifdd1a := subs(a=0.15, b=-1, de1);
> bifdd2a := subs(a=0.15, b=-1, de2);
> bifdd3a := subs(a=0.15, b=-1, de3);
> bifdd1b := (parameter) -> subs(c=parameter, bifdd1a);
> bifdd2b := (parameter) -> subs(c=parameter, bifdd2a);
> bifdd3b := (parameter) -> subs(c=parameter, bifdd3a);
> hopfc:=seq(DEplot3d({bifdd1b('i/15'),bifdd2b('i/15'),bifdd3b('i/15')},[x(t),y(t),z(t)] ,0..1
40,[[x(0)=0.1,y(0)=0.1,z(0)=0.1]],z=-25..25,y=-10..10, x=-25..25, arrows= NONE,
stepsize=0.05,linecolour=COLOUR(0.5, 0, 0.5)),i=0..50):
> hopfc := subs(THICKNESS(3)=THICKNESS(0),[hopfc]):
> display(hopfc, insequence=true);
```

Program çalıştırıldığında elde ettiğimiz şekiller aşağıdaki gibidir.



**Şekil 3.1 (a)**  $a = 0.15$ ,  $b = -1$  ve  $c$ 'nin değişken bir parametre olması halinde  $h = 0.05$  adım aralığıyla elde edilen (6) sisteminin çözümü.

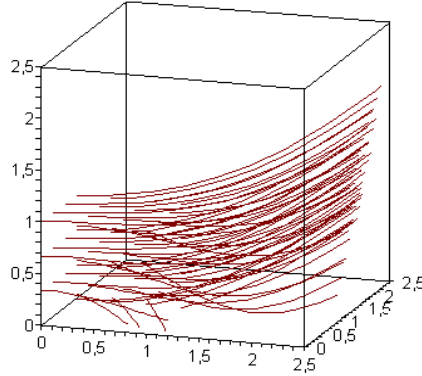


```

> hopfc := seq(DEplot3d({bifdd1b('h/10'), bifdd2b('h/10'), bifdd3b('h/10')}, [x(t),y(t),z(t)], 0..50,[
"'x(0)=i/3','y(0)=j/3','z(0)=k/3' $i=0..3' $j=0..3' $k=0..3 ], z=0..2.5, y=0..2.5, x=0..2.5,
arrows=NONE, stepsize=0.1, linecolour=COLOUR(RGB, 0.5, 0, 0)),h=0..16):
> display([op(subs(THICKNESS(3)=THICKNESS(0),[hopfc])), insequence=true);
> bifdd1c := (cparam, aparam) -> subs(c=cparam, a=aparam, b=-0.1, dd1);
> bifdd2c := (cparam, aparam) -> subs(c=cparam, a=aparam, b=-0.1, dd2);
> bifdd3c := (cparam, aparam) -> subs(c=cparam, a=aparam, b=-0.1, dd3);
> hopfa := (aparam) -> seq(DEplot3d({bifdd1c('h/8', aparam), bifdd2c('h/8', aparam),
bifdd3c('h/8', aparam)}, [x(t), y(t),z(t)], 0..120, [[x(0)=0.1,y(0)=0.1,z(0)=0.1]],z=-10..10, y=-10..10,
x=-10..10, arrows=NONE, stepsize=0.1, linecolour=COLOUR(RGB, 0, 0, 0.8)),h=0..20):
> hopf_big := hopfa(0.3), hopfa(0.35), hopfa(0.4), hopfa(0.45), hopfa(0.5), hopfa(0.55),
hopfa(0.6):
> display(hopf_big, insequence=true);

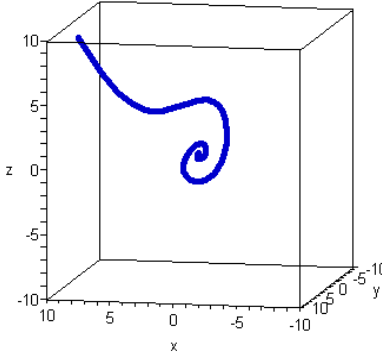
```

Buna göre (6) sisteminin birden fazla yörüngelerinin üzerinde bulunduğu şekil aşağıdaki gibidir.



**Şekil 3.2**  $a = 0.15$ ,  $b = -1$  ve  $c$ 'nin değişken bir parametre olması halinde (6) sistemi için elde edilen birden fazla yörüngelerin gösterilmesi.

Diğer yandan  $b$  ve  $c$  parametrelerin değişimine bağlı şekil ise aşağıdaki gibidir.



**Şekil 3.3**  $a = 0.15$ ,  $b$  ve  $c$ 'nin değişken bir parametre olması halinde elde edilen (6) sisteminin çözümü.

Böylece (6) sisteminin bir parametreye bağlı bifurkasyonunu, iki parametreye bağlı bifurkasyonunu ve düzlem üzerinde birden fazla yörüngelerini gösteren bir algoritma teşkil edilmiş olunur.

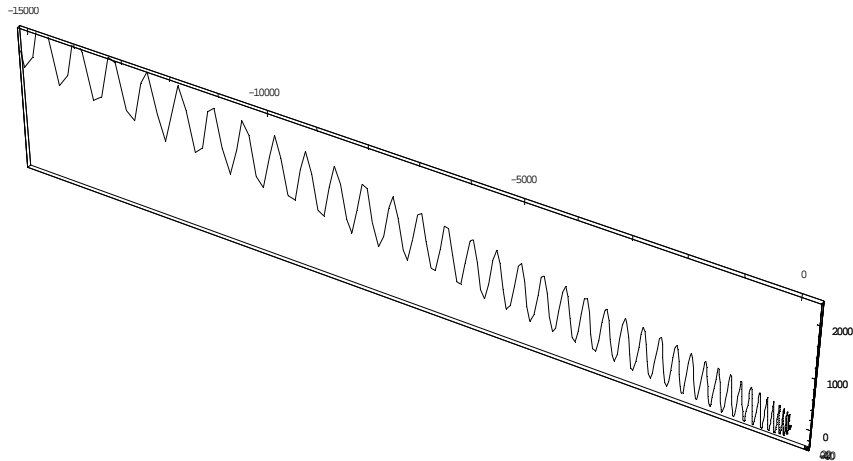
Şimdi de Mathematica programının kullanılmasıyla (6) sisteminin çözümünün bilinen her  $a$ ,  $b$  ve  $c$  parametrelerine göre çizilmesiyle elde edilen şekline bakalım. Bunun için Mathematica algoritması şöyledir:

```
NDSolve [ {x'[t] == x[t] + y[t],
           y'[t] == a x[t] + z[t],
           z'[t] == b z[t] + x[t] ( y[t] - c),
           x[0] == 0.1, y[0] == 0.1, z[0] == 0.1}, {x, y, z}, {t, 0, 20}, MaxSteps->5000]
```

```
ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]} /. %],
                  {t, 0, 20}, PlotPoints -> 1000]
```

Burada  $a, b$  ve  $c$  parametrelerine göre verilen değerler yerlerine yazılarak program çalıştırılır. Örneğin sistemin çok farklı bir hale geldiği  $a = 0.15$ ,  $b = -0.1$  ve  $c = 0.1$  değerleri ile  $x_1(0) = 0.1$ ,  $x_2(0) = 0.405$ ,  $x_3(0) = -0.45$  başlangıç değerleri göz önüne alındığında program aşağıdaki gibi bir çıktı vermektedir.

```
NDSolve[ {x'[t] == x[t] + y[t],
          y'[t] == 0.15 x[t] + z[t],
          z'[t] == -0.1 z[t] + x[t] ( y[t] - 0.1),
          x[0] == 0.1, z[0] == -0.45, y[0] == 0.405},
          {x, y, z}, {t, 0, 13}, MaxSteps->5000]
ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]} /. %],
                  {t, 0, 13}, PlotPoints -> 1000]
```



**Şekil 3.3** Mathematica Programı kullanımıyla üç boyutlu uzayda göz önüne alınan (6) sisteminin olası çözümlerinden birisi

**KAYNAKLAR**

- [1] Char B. W., "Maple 9 Learning Guide", *Waterloo Inc., Canada*, (2003).
- [2] looss G., Joseph Daniel D., "Elementary Stability and Bifurcation Theory" second edition, *Springer-Verlag New York Inc.*, (1989).
- [3] Lorenz En, "Deterministic Non-periodic Flows", *J. Atmos. Sci.*, No. 20, 130-141(1963).
- [4] Magnitskii N. A., "The Hopf Bifurcation in the Rössler System", *Differential Equations. Vol. 31*, No. 3., (1995).
- [5] Marsden J. E., McCracken M., "The Hopf Bifurcation and Its Applications", *Springer-Verlag New York*, (1976).
- [6] Nikolov S., Bozhkov B., "Bifurcations and Chaotic Behavior on the Lanford System", *Chaos, Solitons and Fractals*, **21**, 803-808,(2004).
- [7] Poincaré H., "Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste", Vol. I, Paris (1892).
- [8] Puu T., "Attractors, Bifurcations & Chaos Nonlinear Phenomena in Economics" Second Edition, *Springer-Verlag Berlin Heidelberg Printed in Germany*, (2003).
- [9] Seydel R., "Practical Bifurcation and Stability Analysis from Equilibrium to Chaos" Second Edition, *Springer-Verlag New York Inc.*, (1994).
- [10] Shilnikov Leonid P., Shilnikov Andrey L., Turaev Dmitry V.&Chua Leon O., "Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics Part II", *World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.*, (2001).
- [11] Yu Y., Zhang S., "Hopf Bifurcation Analysis of the Lü System", *Chaos, Solitons and Fractals*, **21**, 1215-1220, (2004).

**ÖZGEÇMİŞ**

Adı ve Soyadı : Ali KONURALP  
Baba Adı : Tahir  
Ana Adı : Nigar  
Doğum Tarihi : 04 / 07 / 1980  
Doğum Yeri : Torbalı / İzmir

İlk öğrenimini Cengiz Topel İlkokulunda 1987-1991 yılları arasında, Ortaokulu Torbalı Lisesi Ortaokul kısmında 1991-1993 yılları arasında, liseyi Torbalı Lisesi Yabancı Dil Ağırlıklı Lise kısmında 1994-1998 yılları arasında tamamladı. 1998-2002 yılları arasında Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde öğrenim gördü. 2002-2003 Öğretim yılında Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Yüksek Lisansa başlamış olup halen öğrenimine devam etmektedir.