İçindekiler

PARALEL REGLE YÜZEYLER ÜZERİNE

Pınar ÇİMEN

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

2005

ON THE PARALLEL RULED SURFACES

Pınar ÇİMEN

Department of Mathematics

Thesis for Master Degree

2005

PARALEL REGLE YÜZEYLER ÜZERİNE

Pınar ÇİMEN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Cumali EKİCİ

Temmuz 2005

Pınar ÇİMEN 'nin Yüksek lisans tezi olarak hazırladığı,

"PARALEL REGLE YÜZEYLER ÜZERİNE"

başlıklı bu çalışma jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye: Prof. Dr. Ali GÖRGÜLÜ

Üye: Yrd. Doç. Dr. Cumali EKİCİ

Üye: Yrd. Doç. Dr. Nevin GÜRBÜZ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu′ nun .... gün ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Abdurrahman KARAMANCIOĞLU

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu yüksek lisans tezi üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde Dual Sayılar, Dual vektörlerin uzayı ($\mathbb{D}$-Modül), Regle yüzeyler, Eğrilikler, E^3 de yüzeyler ve eğrilikler ile ilgili bazı temel kavramlar ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde regle yüzeyin boğaz çizgisi üzerindeki Blaschke ve Darboux üçyüzlüleri aralarındaki ilişki verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise paralel regle yüzeylerin büyüklükleri ve boğaz çizgilerinin normal eğrilikleri, jeodezik burulmaları ve jeodezik eğrilikleri, verilen regle yüzeyin büyüklükleri cinsinden ifade edilmiş ve bunlarla ilgili sonuçlar verilmiştir.

SUMMARY

This master thesis consists of three chapters.

In the first chapter, we give some basic concepts and thereoms such as dual numbers, the dual vector space, ruled surfaces the curvatures, the surfaces and curvatures on E^3 .

In the second chapter, firstly we give the some relations between Blaschke and Darboux trihedions on striction curvature of the ruled surface.

Finally, it gives results that the curvatures of striction curve on parallel ruled surfaces.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında maddi ve manevi her türlü yardım ve desteklerini benden esirgemeyen değerli hocam Sayın;

Yrd. Doç. Dr. Cumali EKİCİ

ye teşekkürlerimi sunarım.

Eskişehir, 2005 Pınar ÇİMEN

Bölüm 1

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmaya esas olan tanım ve teoremler referans gösterilmemiş olanlar hariç, (Hacısalihoğlu, 2004), (Hacısalihoğlu, 1983) ve (Hacısalihoğlu, 2000) kaynaklarından alınmıştır.

1.1 Dual Sayılar

Reel sayılar cümlesi $(+)$ toplama ve $(.)$ çarpma işlemlerine göre bir cisimdir. Reel sayılar cümlesi $\mathbb{R}$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.1: $\forall\ a,\ \bar{a} \in \mathbb{R}$ olmak üzere bir $A = (a, \overline{a})$ ikilisine bir **sıralı ikili** denir.

Bu şekilde tanımlanan sıralı ikililerin $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cümlesi $\mathbb{D}$ ile gösterilsin.

$$\mathbb{D} = \left\{(a, \overline{a}) : a, \overline{a} \epsilon \mathbb{R}\right\}$$

üzerinde iki iç işlem ve bir eşitlik şu şekilde tanımlanır:

Tanım 1.1.2: $A = (a, \overline{a})$ ve $B = \left(b, \overline{b}\right)$ olmak üzere

$$\oplus : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$$

iç işlemi

$$A \oplus B = (a, \overline{a}) \oplus \left(b, \overline{b}\right) = \left(a + b, \overline{a} + \overline{b}\right)$$

şeklinde tanımlanır ve $\mathbb{D}$ deki **toplama** olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.3: $A = (a, \overline{a})$ ve $B = \left(b, \overline{b}\right)$olmak üzere

$$\odot : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$$

iç işlemi

$$A \odot B = (a, \overline{a}) \odot \left(b, \overline{b}\right) = \left(a \cdot b, a\overline{b} + \overline{a}b\right)$$

şeklinde tanımlanır ve $\mathbb{D}$ deki **çarpma** olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.4: $A = (a, \overline{a})$ ve $B = \left(b, \overline{b}\right) \in \mathbb{D}$ için

$$a = b \ , \ \overline{a} = \overline{b}$$

ise A ile B **eşittir** denir ve $A = B$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.5: $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi olmak üzere

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

cümlesi üzerinde toplama, çarpma ve eşitlik işlemleri yukarıdaki gibi tanımlanmış ise $\mathbb{D}$ cümlesine **dual sayılar sistemi** ve $\forall \left(a, \bar{a}\right) \in \mathbb{D}$ elemanına bir **dual sayı** denir.

Teorem 1.1.1: $(\mathbb{D}, \ \oplus, \ \odot)$ üçlüsü birimli ve değişimli bir halkadır.

Bu halkanın toplamaya göre birim elemanı $(0, 0)$, çarpmaya göre birim elemanı ise, $(1, 0)$ dır.

Teorem 1.1.2: $(\mathbb{D}, \ \oplus, \ \odot)$ üçlüsü bir cisim değildir.

Tanım 1.1.6: $A \neq (0, \overline{a})$ ve $X = (x, \overline{x})$ olmak üzere

$$A \odot X = B$$

denkleminin bir tek çözümü vardır. Gerçekten Tanım 1.1.3. den

$$(ax, a\overline{x} + \overline{a}x) = \left(b, \overline{b}\right)$$

ve Tanım 1.1.4. den de

$$X = \left(\frac{b}{a}, \frac{a\bar{b} - \bar{a}b}{a^2} \right)$$

ve dolayısıyla $X \in \mathbb{D}$ elde edilir. X dual sayısına, B nin A ya **bölümü** denir.

Teorem 1.1.3: Dual sayılar halkası, $\mathbb{R}$ reel sayılar cismine izomorf bir alt cümleyi, alt cisim olarak kapsar (Hacısalihoğlu, 1983).

Bu teoremin bir sonucu olarak, reel sayılar cümlesine izomorf olan,

$$\{(a,0) : a, 0 \in \mathbb{R}\}$$

dual sayılar cümlesinin herbir elemanı, izomorfu olan reel sayı ile gösterilebilir.

Kısaca,

$$(a,0) \cong a \quad , \quad (1,0) \cong 1$$

olarak alınabilir. Genel olarak bu notasyonu kullanacağız ve ayrıca "$\oplus$" ve "$\odot$" işlemleri yerine " $+$ " ve " $\cdot$ " işaretlerini tercih edeceğiz.

$\mathbb{D}$ halkasında, $(0,1)$ dual sayısı **dual birim** olarak adlandırılır ve

$$\varepsilon = (0,1)$$

ile gösterilir. Çarpma işleminin tanımına göre,

$$\varepsilon \odot \varepsilon = \varepsilon^2 = (0,0) \cong 0$$

olduğu kolayca görülebilir.

Teorem 1.1.4: Her $A = (a, \bar{a})$ dual sayısı,

$$A = a + \varepsilon\bar{a} \; , \; \varepsilon = (0,1)$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 1.1.7: Bir $A = a + \varepsilon\bar{a} \in \mathbb{D}$ dual sayısındaki "a" reel sayısına A nın **reel kısmı**, "$\bar{a}$" reel sayısınada A nın **dual kısmı** denir.

Tanım 1.1.8: $(0,1)=1$ dual sayısına $\mathbb{D}$ deki çarpma işleminin **birim elemanı** veya $\mathbb{D}$ deki **reel birim** denir.

Teorem 1.1.5: İki dual sayının çarpımı sıfır ise, çarpanlardan biri sıfır olmak zorunda değildir.

Tanım 1.1.9: $Z=x+\varepsilon\overline{x}$ dual sayısının **modül değeri** diye $|x|$ reel sayısına denir ve,

$$\begin{aligned} |Z| &= |x+\varepsilon\overline{x}| \\ &= |x| \end{aligned}$$

ile gösterilir.

1.2 Dual Vektörlerin Uzayı ($\mathbb{D}$ - Modül)

$$\mathbb{D}\times\mathbb{D}\times\mathbb{D}=\mathbb{D}^3=\{(A_1,A_2,A_3):A_1,A_2,A_3\in\mathbb{D}\ \}$$

cümlesinin her bir elemanı bir büyük harf ile gösterilirse, $A\in\mathbb{D}^3$ için $A=(A_1,A_2,A_3)$ veya $A=(A_i)\,;\ (i=1,2,3)$ notasyonlarından birisi kullanılabilir.

Bu cümle içinde aşağıdaki tanımları verelim.

Tanım 1.2.1: Her $A=(A_i)$, $B{=}(B_i)\in\mathbb{D}^3$ için

$$A=B\Longleftrightarrow A_i=B_i\quad,(i=1,2,3)$$

dır.

Tanım 1.2.2: Her $A=(A_i)$, $B=(B_i)\in\mathbb{D}^3$ için, $(i=1,2,3)$,

$$+:\mathbb{D}^3\times\mathbb{D}^3\longrightarrow\mathbb{D}^3$$

iç işlemi

$$A+B=(A_i+B_i)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $A+B$ ye $\mathbb{D}^3$ de A ile B nin **toplamı** denir.

Tanım 1.2.3: $\lambda \in \mathbb{D}$ ve $A \in \mathbb{D}^3$ için,

$$\cdot : \mathbb{D} \times \mathbb{D}^3 \longrightarrow \mathbb{D}^3$$

dış işlemi

$$\lambda.A = (\ \lambda A_i) \quad , \quad (i = 1, 2, 3)$$

şeklinde tanımlanır. Burada λA ya A **nın** λ **skaları ile çarpımı** denir.

Teorem 1.2.1: $(\mathbb{D}^3, +, \cdot)$ sistemi $\mathbb{D}$ halkası üzerinde bir modüldür.

Tanım 1.2.4: $(\mathbb{D}^3, +, \cdot)$ üçlüsüne $\mathbb{D}$ -Modül ve bunun elemanları olan sıralı dual üçlülere, dual vektörler diyeceğiz ve $\overrightarrow{A} = (A_i)$ şeklinde göstereceğiz.

Teorem 1.2.2: $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{\overline{a}} \in \mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^3$ üç boyutlu reel vektör uzayını göstermektedir.) olmak üzere $\mathbb{D}$ -Modül de her bir $\overrightarrow{A}$ dual vektörü

$$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{a} + \varepsilon \overrightarrow{\overline{a}} \quad , \quad \varepsilon = (0, 1) \in \mathbb{D}$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 1.1.3 ile eş anlamlı olarak; $\mathbb{R}^3$ vektör uzayı, $\mathbb{D}$ -Modülün elemanları $(\overrightarrow{a}, 0) = \overrightarrow{a} + \varepsilon \vec{0}$ şeklinde olan alt cümlesine izomorftur.

$\mathbb{D}$-Modülün toplamaya göre birim elemanı,

$$\vec{0} = \vec{0} + \varepsilon \vec{0}$$

şeklinde gösterilir. Buna **sıfır dual vektörü** denir.

$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{a} + \varepsilon \overrightarrow{\overline{a}}$ ve $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{b} + \varepsilon \overrightarrow{\overline{b}}$ dual vektörlerinin eşitliği,

$$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{B} \Longleftrightarrow \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} \text{ ve } \overrightarrow{\overline{a}} = \overrightarrow{\overline{b}}$$

ile verilir. Bu tanım 1.2.1 ile eş anlamlıdır.

Tanım 1.2.5: Her $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B} \in \mathbb{D}$-Modül için,

$$\begin{array}{lll} \langle , \rangle \ : \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 & \longrightarrow & \mathbb{D} \\ \left(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}\right) & \longrightarrow & \left\langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right\rangle + \varepsilon (\left\langle \overrightarrow{\overline{a}}, \overrightarrow{b} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{\overline{b}} \right\rangle) \end{array}$$

ile tanımlanan $\langle , \rangle$ fonksiyonuna $\mathbb{D}$-Modülde bir **iç çarpım fonksiyonu** denir.

Tanım 1.2.6: Bir $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{a} + \varepsilon \overrightarrow{\overline{a}}$ dual vektörünün **normu** diye

$$\left\| \overrightarrow{A} \right\| = \left(\left\langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{A} \right\rangle \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\| \overrightarrow{a} \|, \frac{\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{\overline{a}} \right\rangle}{\| \overrightarrow{a} \|} \right), \ \overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$$

dual sayısına denir.

Tanım 1.2.7: Normu reel birime karşılık gelen $(1, 0)$ dual sayısı olan dual vektöre **birim dual vektör** denir.

Teorem 1.2.3: $\overrightarrow{A} \neq \left(\overrightarrow{0}, \overrightarrow{\overline{a}} \right) \in \mathbb{D}$-Modül olmak üzere, her $\overrightarrow{A} \in \mathbb{D}$-Modül için,

$$\overrightarrow{A}_0 = \frac{\overrightarrow{A}}{\left\| \overrightarrow{A} \right\|}$$

bir birim dual vektördür.

Tanım 1.2.8: $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{a} + \varepsilon \overrightarrow{\overline{a}} \in \mathbb{D}$-Modül olmak üzere,

$$\overrightarrow{A}_0 = \frac{\overrightarrow{A}}{\left\| \overrightarrow{A} \right\|}$$

birim dual vektörüne, $\overrightarrow{A}$ **dual vektörünün ekseni** denir.

$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{a} + \varepsilon \overrightarrow{\overline{a}}$, $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$, dual vektörünün eksenini, $k = \dfrac{\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{\overline{a}} \right\rangle}{\| \overrightarrow{a} \|^2}$ olmak üzere,

$$\overrightarrow{A}_0 = \frac{\overrightarrow{A}}{\left\| \overrightarrow{A} \right\|} + \varepsilon \frac{\overrightarrow{\overline{a}} - k \overrightarrow{a}}{\left\| \overrightarrow{A} \right\|}$$

şeklinde yazabiliriz.

Tanım 1.2.9: $\mathbb{D}$-Modülde bir $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{a} + \varepsilon \overrightarrow{\overline{a}}$ dual vektörü için,

$$k = \frac{\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{\overline{a}} \right\rangle}{\| \overrightarrow{a} \|^2}$$

sayısına, $\overrightarrow{A}$ dual vektörünün **adımı** veya **yükselişi** denir.

Bu tanımlmalarımızdan sonra, bir $\overrightarrow{A}$ dual vektörünü,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A} &= \left\|\overrightarrow{A}\right\| \overrightarrow{A}_0 \\ &= \left(\left\|\overrightarrow{A}\right\| + \varepsilon \frac{\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{\overline{a}} \right\rangle}{\|\overrightarrow{a}\|}\right) \overrightarrow{A}_0\end{aligned}$$

veya

$$\overrightarrow{A} = \left\|\overrightarrow{A}\right\| (1 + \varepsilon k) \overrightarrow{A}_0$$

şeklinde yazabiliriz. Reel kısmı sıfırdan farklı olan dual vektörlere **has dual vektörler** adını vereceğiz.

Tanım 1.2.10: $K = \left\{ \overrightarrow{X} = \vec{x} + \varepsilon \overrightarrow{\overline{x}} : \left\|\overrightarrow{X}\right\| = (1,0)\,; \vec{x}, \overrightarrow{\overline{x}} \in \mathbb{R}^3 \right\}$ cümlesine $\mathbb{D}$-Modül de **birim dual küre** denir.

Teorem 1.2.4 (E. Study): $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{a} + \varepsilon \overrightarrow{\overline{a}}$, $\overrightarrow{a} \neq \vec{0}$ olmak üzere $\mathbb{D}$-Modül de denklemi,

$$\left\|\overrightarrow{A}\right\| = (1,0)$$

olan birim dual kürenin dual noktaları, $\mathbb{R}^3$ deki yönlü doğrulara birebir karşılık gelir.

Birim dual küre üzerindeki bir A dual noktasını merkeze birleştiren birim dual yer vektörü,

$$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{a} + \varepsilon \overrightarrow{\overline{a}}$$

ise Teorem 1.2.4. den dolayı, çizgiler uzayında bir tek yönlü doğruya karşılık gelir. Burada $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^3$ vektörü, bu yönlü doğrunun doğrultman vektörü, $\overrightarrow{\overline{a}} \in \mathbb{R}^3$ vektörü ise, X bu doğrunun üzerinde bir nokta ve O bir başlangıç noktası olmak üzere,

$$\overrightarrow{\overline{a}} = \overrightarrow{OX} \wedge \overrightarrow{a}$$

ile belirlenen bir moment vektörüdür. Bu vektöre, çizgiler uzayındaki doğrunun başlangıca göre **vektörel momenti** denir.

Tanım 1.2.11 (Taylor Açılımı): $Z = x + \varepsilon\overline{x} \in \mathbb{D}$ olmak üzere

$$f(Z) = f(Z_0) + \tfrac{Z-Z_0}{1!}f^{'}(Z_0) + \tfrac{(Z-Z_0)^2}{2!}f^{''}(Z_0) + ... + \tfrac{(Z-Z_0)^n}{n!}f^{(n)}(Z_0) + ...$$

serisine f dual fonksiyonunun $Z_0 \in \mathbb{D}$ noktasındaki **Taylor açılımı** denir.

Bu tanım gereğince, f dual fonksiyonunun $Z_0 = 0$ noktasındaki Taylor açılımı,

$$f(x + \varepsilon\overline{x}) = f(x) + \varepsilon\overline{x}f^{'}(x)$$

şeklini alır. O halde, $f(x+\varepsilon\overline{x}) = \cos(x+\varepsilon\overline{x})$, $\sin(x+\varepsilon\overline{x})$, $sh(x+\varepsilon\overline{x})$ ve $\cosh(x+\varepsilon\overline{x})$ dual fonksiyonlarının $0 = (0,0)$ dual noktasındaki Taylor açılımları:

$$\begin{aligned}
\cos(x+\varepsilon\overline{x}) &= \cos x - \varepsilon\overline{x}\sin x \\
\sin(x+\varepsilon\overline{x}) &= \sin x + \varepsilon\overline{x}\cos x \\
\sinh(x+\varepsilon\overline{x}) &= \sinh x + \varepsilon\overline{x}\cosh x \\
\cosh(x+\varepsilon\overline{x}) &= \cosh x + \varepsilon\overline{x}\sinh x
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Tanım 1.2.12: $\mathbb{D}$-Modül'de açı, $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ birer birim dual vektör olmak üzere,

$$\cos\Phi = \left\langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} \right\rangle$$

ifadesi ile verilir. $\Phi = \varphi + \varepsilon\bar{\varphi}$ dual sayısına $\overrightarrow{A}$ ile $\overrightarrow{B}$ birim dual vektörleri arasındaki **dual açı** denir.

Şimdi, iki birim dual vektör arasındaki dual açının, $\mathbb{R}^3$ deki yönlü doğruların uzayı olan çizgiler uzayındaki anlamını araştıralım. Bunun için $\overrightarrow{A}$ ile $\overrightarrow{B}$ birim dual vektörlerinin

$$\left\langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right\rangle + \varepsilon\left(\left\langle \overrightarrow{\overline{a}}, \overrightarrow{b} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{\overline{b}} \right\rangle\right)$$

iç çarpımından hareket edelim. (E. Study) teoremi gereğince $\overrightarrow{A}$ ve $\overrightarrow{B}$ birim dual vektörleri $\mathbb{R}^3$ de iki yönlü $d_1$ve d_2 doğrularına karşılık gelirler, d_1 in yönü $\overrightarrow{a}$, yeri (momenti) $\overrightarrow{\overline{a}}$, d_2 nin yönü $\overrightarrow{b}$, yeri $\overrightarrow{\overline{b}}$ ile belli olduğundan $\overrightarrow{a}$ ile $\overrightarrow{b}$ arasındaki açı φ ise, yukarıdaki iç çarpımın reel kısmı,

$$\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right\rangle = \cos\varphi$$

dır. Şimdi de dual iç çarpımdaki $\left\langle \overrightarrow{\overline{a}}, \overrightarrow{b} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{\overline{b}} \right\rangle$ dual kısmın anlamını araştıralım.

$\overrightarrow{\overline{a}}$ ve $\overrightarrow{\overline{b}}$ momentleri, doğrular üzerindeki noktaların seçilişinden bağımsız olduğundan, X ve Y noktalarını, d_1 ve d_2 doğrularının ortak dikmesinin ayakları olarak seçebiliriz. Bu ortak dikme doğrultusundaki birim vektör;

$$\overrightarrow{n} = \pm \frac{\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}}{\left\| \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \right\|}$$

ile belirtilebilir. d_1 ve d_2 - doğruları arasındaki en kısa uzaklık $\overline{\varphi}$ ile gösterilirse;

$$\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y} = \pm \overline{\varphi} \frac{\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}}{\left\| \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \right\|}$$

yazılabilir. Vektörel momentler $\overrightarrow{\overline{a}} = \overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{\overline{b}} = \overrightarrow{y} \wedge \overrightarrow{b}$ olduğundan,

$$\left\langle \overrightarrow{\overline{a}}, \overrightarrow{b} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \right\rangle$$

ve

$$\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{\overline{b}} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{y} \wedge \overrightarrow{b} \right\rangle = -\left\langle \overrightarrow{y}, \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \right\rangle$$

olur. Buradan dual kısım için,

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{\overline{a}}, \overrightarrow{b} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{\overline{b}} \right\rangle &= \left\langle \overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}, \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \right\rangle \\
&= \pm \left\langle \overline{\varphi} \frac{\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}}{\left\| \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \right\|}, \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \right\rangle \\
&= \pm \overline{\varphi} \sin\varphi
\end{aligned}$$

bulunur. Reel ve dual kısımlar için bulduğumuz değerleri, dual iç çarpım ifadesinde yerine koyarsak,

$$\left\langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} \right\rangle = \cos\varphi \pm \varepsilon\overline{\varphi}\sin\varphi$$

elde edilir. Bu ifade de $(-)$ işareti gözönüne alınırsa, $\Phi = \varphi + \varepsilon\overline{\varphi}$ bir dual sayı olmak üzere, Taylor formülü gereğince,

$$\left\langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} \right\rangle = \cos\Phi$$

yazılabilir. O halde $\overrightarrow{A}$ ve $\overrightarrow{B}$ birim dual vektörleri arasındaki $\Phi = \varphi + \varepsilon\overline{\varphi}$ dual açısı, bunların $\mathbb{R}^3$ de temsil ettikleri d_1 ve d_2- yönlü doğrularının arasındaki φ açısı ve en kısa uzaklığı gösteren $\overline{\varphi}$ reel çiftinden oluşur.

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{A}$ ve $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{B}$ birim dual vektörlerinin uçları $\mathbb{D}$-Modül'de O merkezli birim dual kürenin A ve B dual noktalarını belirteceğinden $\overrightarrow{A}$ ile $\overrightarrow{B}$ arasındaki $\Phi = \varphi + \varepsilon\overline{\varphi}$ dual açısı A ve B dual noktalarından geçen dual büyük dairenin $\overset{\frown}{AB}$ dual yay uzunluğu olarak düşünülebilir.

Tanım 1.2.13: Her $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} \in \mathbb{D}$-Modül dual vektörlerinin dış çarpımı

$$\Lambda : \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \longrightarrow \mathbb{D}^3$$

şeklinde bir iç işlemdir ve

$$\overrightarrow{A} \Lambda \overrightarrow{B} = \overrightarrow{a} \Lambda \overrightarrow{b} + \varepsilon \left(\overrightarrow{a} \Lambda \overrightarrow{\overline{b}} + \overrightarrow{\overline{a}} \Lambda \overrightarrow{b} \right)$$

olarak tanımlanır.

Teorem 1.2.5: Her $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} \in \mathbb{D}$-Modül için,

$$\overrightarrow{A} \Lambda \overrightarrow{B} = \left\| \overrightarrow{A} \right\| \cdot \left\| \overrightarrow{B} \right\| \sin\Phi \overrightarrow{N}$$

Burada $\overrightarrow{N}$, $\overrightarrow{A}$ ile $\overrightarrow{B}$ dual vektörlerine $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen doğruların ortak dikmesinin E. Study resmi olan bir dual vektördür.

Teorem 1.2.6: $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ gibi iki has dual vektörün dış çarpımı sıfır ise bu dual vektörlerin eksenleri çakışıktır.

Tanım 1.2.14: $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C} \in \mathbb{D}$ - Modül dual vektörlerinin **karma çarpımı**

$$f : \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \longrightarrow \mathbb{D}$$

şeklinde bir dönüşümdür ve

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}) &= \langle \overrightarrow{A} \Lambda \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C} \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \rangle + \varepsilon \left[\langle \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}, \overrightarrow{\bar{c}} \rangle + \langle \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{\bar{b}}, \overrightarrow{c} \rangle + \langle \overrightarrow{\bar{a}} \wedge \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \rangle \right] \end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 1.2.15: $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C} \in \mathbb{D}$ - Modül has dual vektörler ve $\lambda_i = c_i + \varepsilon c_i \in \mathbb{D}$, $1 \leq i \leq 3$, olmak üzere

$$\lambda_1 \overrightarrow{A} + \lambda_2 \overrightarrow{B} + \lambda_3 \overrightarrow{C} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \forall \lambda_i = 0$$

ise $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C}$ has dual vektörleri **lineer bağımsızdır** denir.

Tanım 1.2.16: $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C} \in \mathbb{D}$ - Modül ve $\lambda_i = c_i + \varepsilon c_i \in \mathbb{D}$; $c_i \neq 0$, $1 \leq i \leq 3$ için,

$$\lambda_1 \overrightarrow{A} + \lambda_2 \overrightarrow{B} + \lambda_3 \overrightarrow{C} = \overrightarrow{0}$$

eşitliği en az bir $\lambda_i \neq 0$ için sağlanıyorsa, $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C}$ dual vektörleri **lineer bağımlıdır** denir.

Tanım 1.2.17: $\overrightarrow{A_1}$, $\overrightarrow{A_2}$, $\overrightarrow{A_3}$ birim dual vektörlerinin $\mathbb{R}^3$ deki temsil ettikleri yönlü doğrular bir noktada dik olarak kesişirlerse $\overrightarrow{A_1}$, $\overrightarrow{A_2}$ ve $\overrightarrow{A_3}$ birim dual vektörlerine **ortonormal dual vektörler** denir.

Tanım 1.2.18: $\mathbb{D}$ - Modül ün bir S alt cümlesi aşağıdaki iki özelliğe sahipse $\mathbb{D}$ - Modül 'ün bir **bazı** adını alır :

(i) S lineer bağımsızdır.

(ii) $S_P\{S\} = \mathbb{D}$ - Modül dür.

Yani, $\forall\ \overrightarrow{A} \in \mathbb{D}$ - Modül elemanı S deki sonlu sayıda elemanın bir lineer kombinezonudur.

Tanım 1.2.19: Elemanları dual sayılar olan bir A matrisine **dual matris** denir ve,

$$A = [A_{ij}]\,, A_{ij} = a_{ij} + \varepsilon\overline{a_{ij}},\ a_{ij},\ \overline{a_{ij}} \in \mathbb{R}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 1.2.20: $A \in \mathbb{D}_n^n$ ($n \times n$ tipi matris) için,

$$A \cdot A^T = A^T \cdot A = I_n$$

ise A dual matrisine **ortogonal dual matris** denir.

Tanım 1.2.21:f dual fonksiyonu bir G bölgesinde tanımlanmış olsun. Eğer $\forall\eta < 0$ için bir $\delta > 0$ bulunabilirse öyle ki bütün $0 < |h| < \delta$ için

$$\left|\frac{f\,(z_0 + h) - f\,(z_0)}{h} - f^{\shortmid}\,(z_0)\right| < \delta$$

olacak şekilde bir $f^{\shortmid}\,(z_0)$ mevcut ise bu halde$f, z_0 \in G$ noktasında **diferensiyellenebilirdir**.

1.3 Regle Yüzeyler

Tanım 1.3.1: Uzayda hareket eden (x, y, z) noktalarının koordinatları arasında

$$F(x, y, z) = 0$$

biçiminde herhangi bir denklem geçerli ise bu noktaların geometrik yerine **yüzey** denir.

E^n, n-boyutlu Öklit uzayında $(n-1)-$ boyutlu bir yüzey, veya $(n-1)$ $-$yüzey diye E^n deki boş olmayan bir M cümlesine denir, öyleki bu M cümlesi

$$M = \left\{x \in U \subset E^n \;\middle|\; f :^{U} \overset{\text{dif.bliir}}{\longrightarrow}\ \mathbb{R},\ f\,(x) = c,\ U \text{ bir açık alt cümle}\right\}$$

$\forall\ P \in M$ için $\nabla f\,|_p \neq 0$, biçiminde tanımlanır. E^2 de bir $1-$yüzeye **düzlemsel eğri** denir. E^3 de bir $2-$yüzeye genellikle sadece **yüzey** denir.

Tanım 1.3.2: M_1 ve M_2, E^n in iki hiperyüzeyi ve M_1 in birim normal vektör alanı,

$$N_1 = \sum^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad a_i \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$$

olsun. Eğer, bir $r \in \mathbb{R}$ sabit sayısı ve $\forall P \in M_1$için

$$f(P) = (p_1 + ra_1(P), ..., p_n + ra_n(P))$$

olacak şekilde bir $f : M_1 \to M_2$ fonksiyonu bulunabilirse, M_2 ye M_1 in **paralel hiperyüzeyi** denir.

Tanım 1.3.3: $M \subset E^3$ yüzeyi verilsin. $\forall P \in M$ noktasında, E^3 ün M de kalan bir doğrusu var ise M bir **regle yüzey** ve $P \in M$ noktasından geçen ve M de kalan doğruya da M nin bir **doğrultmanı** denir.

Başka bir tanımla, bir doğrunun herhangi bir biçimde belirlenen hareketiyle oluşturulan yüzeye regle yüzey denir. Hareket eden doğruya da yüzeyin **ana doğrusu** veya **üreteci** denir.

Tanım 1.3.4: E^3, 3-boyutlu Öklid uzayında, verilen l doğrusunun, verilen r eğrisi boyunca hareket ettirilmesi ile bir yüzey elde edilebiliyorsa, bu yüzeye 3-boyutlu Öklid uzayında bir **regle yüzey** denir. Bu durumda verilen l doğrusu regle yüzeyin anadoğrusu ve r eğrisi de regle yüzeyin dayanak eğrisi olarak adlandırılır.

E^3, 3-boyutlu Öklid uzayında $\{0\} \subset I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere diferensiyellenebilir birim hızlı bir eğri

$$\begin{aligned} r :\ & I \to E^3 \\ & t \to r(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t)) \end{aligned}$$

olsun. Her $t \in I$ için $r(t)$ noktasındaki $T_{r(t)}$ teğet vektörü ile anadoğrunun doğrultman vektörü lineer bağımsız olacak şekilde

$$\begin{aligned} l: \ & \mathbb{R} \to E^3 \\ & v \to l(v) = (r_1(t) + va_1(t), r_2(t) + va_2(t), r_3(t) + va_3(t)) \end{aligned}$$

doğrusunu seçelim. Burada $1 \leq i \leq 3$ olmak üzere $a_i(t) \in \mathbb{R}$ skalarları $r(t)$ noktasındaki doğrultman vektörün bileşenleridir.

l doğrusunun r eğrisi boyunca hareket etmesiyle, $(I \times \mathbb{R}, \varphi)$ parametrizasyonu ile verilen bir

$$\begin{aligned} \varphi: \ I \times \mathbb{R} \ & \to \ E^3 \\ (t, v) \ & \to \ \varphi(t, v) = (r_1(t) + va_1(t), r_2(t) + va_2(t), r_3(t) + va_3(t)) \end{aligned} \tag{1.7}$$

regle yüzeyi elde edilir. Bağımsız bir parametreye bağlı (∞^1) sayıdaki $\overrightarrow{R}$ doğrularının cümlesine regle yüzey veya ışın yüzeyi denir.

Tanım 1.3.5: Bir $\varphi(t, v)$ regle yüzeyinin merkez noktasının $\bar{r}$ yer vektörü, dayanak eğrisinin $\vec{r}(s)$ yervektörü, $x(s)$ doğrultman vektörü ve dayanak eğrisine olan $\bar{u}$ uzaklığı cinsinden

$$\bar{r}(s, \bar{u}) = r(s) + \bar{u}x(s) \tag{1.8}$$

şeklinde ifade edilir . $\bar{u}$ parametresi regle yüzeyin dayanak eğrisinin yer vektörü ve doğrultman cinsinden bulunabilir. Regle yüzeyin ilk ikisi $x(s)$ ve $x(s) + dx(s)$ olan komşu üç anadoğrusunu seçelim . Burada P ve Q farklı iki boğaz noktasıdır. Buna göre,

$$\bar{r}(s, \bar{u}) = r(s) - \frac{\left\langle \frac{dx}{ds}, t \right\rangle}{\left\| \frac{dx}{ds} \right\|^2} x(s) \tag{1.1}$$

şeklindedir. Eğer $\left\| \frac{dx}{ds} \right\|^2 = 0$ ise regle yüzey, striksiyon eğrisine sahip değildir. Bu durum regle yüzeyin silindir olmasını karakterize eder.

Regle yüzeyler için striksiyon eğrisi dayanak eğrisi olarak alınabilir. Bunun için $\bar{u} = 0$ veya $\left\langle \dfrac{dx}{ds}, t \right\rangle = 0$ alınması yeterlidir.

Tanım 1.3.6:

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & I \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{E}^3 \\ & (t,v) & \to & \varphi(t,v) = \; r(t) + vx(t) \end{array}$$

regle yüzeyi $\forall t \in I$ için

$$\varphi(t + 2\pi, v) = \varphi(t, v) \tag{1.10}$$

olacak şekilde periyodik ise regle yüzeye **kapalıdır** denir.

Kapalı regle yüzeylerin dayanak eğrileri ve anadoğrularının küresel göstergeleri kapalı eğrilerdir. Yani, bir periyot sonra her anadoğru kendi üzerine gelir.

Tanım 1.3.7 (Lagrange Özdeşliği): Uzayda herhangi a, b, c, d vektörleri için

$$\langle (a \wedge b), (c \wedge d) \rangle = \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle - \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle \tag{1.11}$$

özdeşliği geçerlidir (Kaya, R., 1996).

Tanım 1.3.8: Uzayda herhangi a, b, c vektörlerinin bir vektörel ve bir skalar çarpımının bileşimi olan

$$\langle a, b \wedge c \rangle$$

skalar değerine bu üç vektörün **karma çarpımı** denir. Bu karma çarpım

$$\langle a, b \wedge c \rangle = \det(a, b, c) \tag{1.12}$$

şeklinde de tanımlanabilir (Kaya, R., 1996).

Tanım 1.3.9: 3-boyutlu Öklid uzayı, E^3 de bir α eğrisi $s \in I$ yay parametresi ile verilsin. α eğrisinin birim teğet vektörü T olmak üzere, $\overrightarrow{PQ} = T$ alındığında, P noktası α eğrisini çizerken, Q noktasının birim küre yüzeyi üzerinde çizdiği eğriye α eğrisinin **birinci küresel göstergesi** veya **teğetler göstergesi** adı verilir.

α eğrisinin teğetler göstergesini (T) ile gösterelim. (T) nin denklemi, $\alpha_T = T$ dir. ve (T) nin parametresine s_T dersek, $s_T \neq s$ olup yay elementi ise $ds_T = \left\| T^{'} \right\| ds$ olacaktır (Hacısalihoğlu, H. H., 1993).

Teorem 1.3.1: Bir $\varphi(s, v)$ regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır.

Tanım 1.3.10: E^3 Öklid uzayında birer vektör alanı V_1, V_2, V_3 olsun.

Eğer $\forall P \in E^3$ noktası için $\{V_1, V_2, V_3\}$ sistemi P noktasındaki $T_{\mathbb{E}^3}(P)$ tanjant uzayının bir bazı ise bu vektör alanları üçlüsüne E^3 de bir **çatı alanı** denir.

E^3 Öklid uzayında $\forall P \in E^3$ için

$$e_1(P) = (1, 0, 0)|_P, \quad e_2(P) = (0, 1, 0)|_P, \quad e_3(P) = (0, 0, 1)|_P$$

şeklindeki $\{e_1, e_2, e_3\}$ çatı alanına **doğal çatı alanı** denir.

E^3, Öklid uzayında her $P \in E^3$ için sabit doğal çatı alanı $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ ve diğer bir ortonormal çatı alanı $V = \{V_1, V_2, V_3\}$ olsun.

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \quad , \quad V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

olarak alırsak $A \in O(3)$ olmak üzere

$$V = Ae \tag{1.14}$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 1.3.11: E^n Öklid uzayının bir f izometrisi için

$$f(0) = 0$$

olacak şekilde bir $0 \in E^n$ noktası varsa f ye “0” noktası etrafında bir **dönme** denir.

Tanım 1.3.12: Bir $\varphi(t, v)$ regle yüzeyinde komşu iki doğrultmanın ortak dikmesinin esas doğrultman üzerindeki ayağına **boğaz (merkez veya striksiyon) noktası** denir.

Tanım 1.3.13: Bir $\varphi(t, v)$ regle yüzeyinin anadoğrusu dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine regle yüzeyin **boğaz (striksiyon) çizgisi (eğrisi)** adı verilir.

Tanım 1.3.14: Bir $\varphi(t, v)$ regle yüzeyinin merkez noktasının $\vec{r}$ yer vektörü, dayanak eğrisinin $\vec{r}(s)$ yervektörü, $x(s)$ doğrultman vektörü ve dayanak eğrisine olan $\bar{u}$ uzaklığı cinsinden

$$\bar{r}(s, \bar{u}) = r(s) + \bar{u}x(s) \tag{1.29}$$

şeklinde ifade edilir. $\bar{u}$ parametresi regle yüzeyin dayanak eğrisinin yer vektörü ve doğrultmanı cinsinden bulunabilir. Regle yüzeyin ilk ikisi $x(s)$ ve $x(s) + dx(s)$ olan komşu üç anadoğrusunu seçelim. Burada P ve Q farklı iki boğaz noktasıdır.

Böylece,

$$\bar{r}(s, \bar{u}) = r(s) - \frac{\left\langle \frac{dx}{ds}, t \right\rangle}{\left\| \frac{dx}{ds} \right\|^2} x(s) \tag{1.30}$$

bulunur.

Tanım 1.3.15: Bir regle yüzeyin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye **açılabilirdir** denir.

Teorem 1.3.2: Bir $\varphi(s, v)$ regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır.

Tanım 1.3.16: $\overrightarrow{R}_1 = \overrightarrow{R}_1(s)$ bir regle yüzeyi ve $\Theta = \theta + \varepsilon\overline{\theta}$ =sabit açısı da bir dual açı olsun. O halde $\left[\overrightarrow{R}_1^*\right]$ regle yüzeyi

$$\overrightarrow{R}_1^*(s)=\overrightarrow{R}_1\cos\Theta+\overrightarrow{R}_3\sin\Theta$$

biçiminde dual birim vektörüyle ifade edersek, $\left[\overrightarrow{R}_1^*\right]$ regle yüzeyine $\left[\overrightarrow{R}_1\right]$ regle yüzeyin **paralel regle yüzeyi** denir.

1.4 Eğrilikler

Tanım 1.4.1: Eğri üzerindeki bir P noktası eğriyi çizerken T,N,B vektörleri değişirler, dolayısıyla küresel göstergeleri oluştururlar. Eğrinin T,N,B üç ayaklısının her s anında, bir eksen etrafında, ani helis hareketi yaptığı kabul edilir. Bu eksene eğrinin bu s paremetresine karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki **Darboux** veya **ani dönme ekseni** denir. Bu eksenin yön ve doğrultusunu veren vektör,

$$W=\tau T+\kappa B=N\wedge N'=\begin{vmatrix} T & N & B \\ 0 & 1 & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \end{vmatrix}$$

B ile W arasındaki açı ϕ ile gösterilirse

$$\begin{aligned}\kappa &= \|W\|\cos\phi \\ \tau &= \|W\|\sin\phi\end{aligned}$$

W vektörü yönündeki birim vektör C ise

$$\|W\|=\sqrt{\tau^2+\kappa^2}\geq 0$$

olmak üzere,

$$C=\frac{\tau}{\left\|\overrightarrow{W}\right\|}T+\frac{\kappa}{\left\|\overrightarrow{W}\right\|}B$$

olur. κ ile τ nın yerleri değiştirilirse,

$$C=\sin\phi T+\cos\phi B$$

olduğu görülür.

Tanım 1.4.2: $M \subset E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda, $\Psi = (\alpha', \alpha'', \alpha''')$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^k \in Sp\{\Psi\}$ olmak üzere, Ψ den elde edilen $\left\{\overrightarrow{V}_1, \overrightarrow{V}_2, \overrightarrow{V}_3\right\}$ ortonormal sistemine, M eğrisinin **Frenet 3-ayaklı alanı** ve $m \in M$ için $\left\{\overrightarrow{V}_1, \overrightarrow{V}_2, \overrightarrow{V}_3\right\}$ ye ise $m \in M$ noktasındaki **Frenet 3-ayaklısı** denir. Herbir V_i ye **Frenet vektörü** denir.

Tanım 1.4.3: E^3de bir α eğrisi boyunca $\left\{\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}, \overrightarrow{B}\right\}$ ortonormal bir sistem teşkil ediyorsa, $\left\{\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}, \overrightarrow{B}\right\}$ üçyüzlüsüne **Frenet üçyüzlüsü** denir.

Tanım 1.4.4: α' ne dik olan $\overrightarrow{G}$ seçiliyor ve $(\alpha' \perp \overrightarrow{G})$, $\overrightarrow{N} \wedge \alpha' = \overrightarrow{G}$ olmak üzere $\left\{\overrightarrow{X}_1, \overrightarrow{G} = \overrightarrow{N} \wedge \overrightarrow{X}_1, \overrightarrow{N}\right\}$ üçyüzlüsüne **Darboux üçyüzlüsü** denir.

Tanım 1.4.5: $M \subset E^3$ ve (α, M), M üzerinde bir şerittir. $\left(\overrightarrow{R}_1, \overrightarrow{R}_2, \overrightarrow{R}_3\right)$ üçyüzlüsüne bir **Blaschke üçyüzlüsü** denir

Tanım 1.4.6: α, E^3 de bir eğri olsun. α nın Darboux üçyüzlüsü $\left\{\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{N}\right\}$ olmak üzere,

$$\rho_g = \left\langle \overrightarrow{X_1}', \overrightarrow{G} \right\rangle$$

eğriliğine **geodezik eğrilik** denir.

Tanım 1.4.7: α, E^3 de bir eğri olsun. α nın Darboux üçyüzlüsü $\left\{\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{N}\right\}$ olmak üzere,

$$\rho_g = \left\langle \overrightarrow{X_1}', \overrightarrow{N} \right\rangle$$

eğriliğine **normal eğrilik** denir.

Tanım 1.4.8: α, E^3 de bir eğri olsun. α nın Darboux üçyüzlüsü $\left\{\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{N}\right\}$ olmak üzere,

$$\tau_g = \left\langle \overrightarrow{G}', \overrightarrow{N} \right\rangle$$

eğriliğine **geodezik torsiyon** veya **geodezik burulma** denir.

1.5 E^3 de Yüzeyler ve Eğriler

Tanım 1.5.1: $\alpha : I \longrightarrow E^3$ eğrisi yay parametresi ile verilsin. Bu eğrinin birim teğet vektör alanı $T = X$, yani

$$T = \sum^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

olsun. O zaman,

$$\varphi : I \times \mathbb{R} \longrightarrow E^3$$
$$\varphi(t, v) = (\alpha_1(t) + va_1(t), \alpha_2(t) + va_2(t), \alpha_3(t) + va_3(t))$$

olmak üzere $\{(I \times \mathbb{R}, \varphi)\}$ atlası ile verilen M yüzeyine $\alpha : I \longrightarrow E^3$ eğrisinin teğetlerinin **tors(Torus) yüzeyi** denir.

Tanım 1.5.2: $\theta, h \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\varphi : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow E^3$$
$$\varphi(u, v) = (u \cos \theta(v), u \sin \theta(v), h(v))$$

şeklinde tanımlı $\{\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \varphi\}$ atlasının belirttiği yüzeye bir **konoid** denir.

Tanım 1.5.3:Verilen sabit bir düzleme paralel kalarak, verilen sabit bir doğruyu keserek ve bir başka koşula da uyarak hareket eden doğruların oluşturduğu doğrusal yüzeye **konoid** denir. Özel olarak verilen sabit doğru ile sabit düzlem birbirlerine dikse bu kanoide **dik konoid** denir.

Tanım 1.5.4: $\mathbb{R}^n$ de verilen bir eğriye dayanan ve verilen bir doğrultuya paralel kalarak hareket eden doğruların oluşturduğu geometrik yere **silindir** denir.

Tanım 1.5.5: Uç noktaları $t = a$ ve $t = b$ olan bir eğri yayına temsil edilmiş

$$s = \int_a^b \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2} dt$$

integraline, eğrimizin yay uzunluğu denir.

x ler üzerindeki üs işareti, t ye göre türev alındığını gösterir.

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

formülü ile gösterirsek, buna kısaca ds " yay elementi " eğrinin komşu noktalarının uzaklığını verir denir.

Tanım 1.5.6: Her noktasındaki teğeti, verilen sabit bir doğrultu ile sabit açı yapan eğrilere **helis** denir.

Tanım 1.5.7: $S^2 \subset E^3$ küresi üzerindeki bir $\alpha \subset S^2$ eğrisi eğilim çizgisi ise α ya **küresel helis** denir.

Tanım 1.5.8: Normal eğriliği sıfır olan şeritlere **oskülatör şerit** denir.

1.6 Regle yüzeyin dual vektörel ifadesi

$\overrightarrow{X} = \overrightarrow{x} + \varepsilon \overrightarrow{\overline{x}} = X(x_1, x_2, x_3; \overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$ doğrusunun $(x_1, x_2, x_3; \overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$ normlanmış homogen olmayan altı Plücker doğru koordinatları arasında

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \\ x_1\overline{x}_1 + x_2\overline{x}_2 + x_3\overline{x}_3 = 0 \end{cases}$$

bağıntılarından başka

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3; \overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) &= 0 \\ \Phi(x_1, x_2, x_3; \overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) &= 0 \\ \Psi(x_1, x_2, x_3; \overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) &= 0 \end{aligned}$$

bağıntıları da varsa $\overrightarrow{X}$ doğrusunun bağımsız parametre sayısı bir tanedir.

E. Study tekabülüne uyan ve bağımsız bir parametreye bağlı (∞^1) sayıdaki X doğrularının cümlesine **regle yüzey** veya **ışın yüzeyi** denir.

$\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}$ belli has dual vektörler olmak üzere,

$$\begin{aligned} F \; ... \; \left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{\overline{x}} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\overline{a}}, \overrightarrow{x} \right\rangle &= 0 \\ \Phi \; ... \; \left\langle \overrightarrow{b}, \overrightarrow{\overline{x}} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\overline{b}}, \overrightarrow{x} \right\rangle &= 0 \\ \Psi \; ... \; \left\langle \overrightarrow{c}, \overrightarrow{\overline{x}} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\overline{c}}, \overrightarrow{x} \right\rangle &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde verilebilir. O zaman bir regle yüzey $F = 0$, $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ ışın komplekslerinin üçünde de ortak olan (∞^1) doğrunun cümlesi olarak düşünülebilir.

Bir regle yüzey, bir t parametresine bağlı $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X}(t)$ birim dual vektörel fonksiyon olmak üzere

$$\overrightarrow{X} = \overrightarrow{x}(t) + \varepsilon \overrightarrow{\overline{x}}(t)$$

birim dual vektörüne

$$\left\| \overrightarrow{X} \right\| = \left\| \overrightarrow{OX} \right\| = (1, 0)$$

birim dual küresi üzerinde bir dual X noktası karşılık gelir. Biliniyorki; bu noktaya da $\mathbb{R}^3$ de bir $\overrightarrow{X}$ doğrusu karşılık gelir. t parametresi değiştikçe

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{X}(t) = \overrightarrow{x}(t) + \varepsilon \overrightarrow{\overline{x}}(t)$$

birim dual vektörü birim dual küre üzerinde bir eğri çizer. Bu eğriye de $\mathbb{R}^3$ de bir regle yüzey karşılık gelir.

X dual eğrisine regle yüzeyin **dual küresel resmi** denir. Birim dual küre üzerinde $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X}(t)$ dual eğrisinin

$$d\Phi = d\varphi + \varepsilon d\overline{\varphi}$$

dual yay elementi için

$$d\Phi^2 = \left\langle d\overrightarrow{X}, d\overrightarrow{X} \right\rangle = \left\langle \dot{\overrightarrow{X}}, \dot{\overrightarrow{X}} \right\rangle dt^2 \tag{1.2}$$

yazılabilir. Tanım 1.1.4 den (1.6) ifadesi

$$d\Phi^2 = \langle d\overrightarrow{x}, d\overrightarrow{x} \rangle \quad \text{ve} \quad d\varphi d\overline{\varphi} = \left\langle d\overrightarrow{x}, d\overrightarrow{\overline{x}} \right\rangle$$

şeklinde elde edilir. $d\Phi$ dual büyüklüğü bilindiği gibi $\overrightarrow{X}(t)$ ve $\overrightarrow{X}(t+dt)$ komşu birim dual vektörler arasındaki dual açı, yani bu iki birim dual vektörün birim dual küre üzerindeki uç noktalarının dual kısımlarına $\overrightarrow{X}(t)$ ve $\overrightarrow{X}(t+dt)$ birim dual vektörlerine regle yüzeyde karşılık gelen komşu iki anadoğru arasındaki açı ile bu komşu iki anadoğru arasındaki en kısa uzaklık karşılık gelir.

$$\left\langle d\overrightarrow{X}, d\overrightarrow{X} \right\rangle = \langle d\overrightarrow{x}, d\overrightarrow{x} \rangle + 2\varepsilon \langle d\overrightarrow{x}, d\overrightarrow{x} \rangle$$

dual ifadesi, iç çarpım olması nedeniyle koordinat değişimlerine karşı değişmezdir. Bu nedenle,

$$\langle d\overrightarrow{x}, d\overrightarrow{x} \rangle \text{ ve } \left\langle d\overrightarrow{x}, d\overrightarrow{\overline{x}} \right\rangle$$

reel büyüklükleri de koordinat değişimlerine karşı değişmezdir. Dolayısıyla onların oranı regle yüzeyin en basit (yani en küçük mertebeden) diferensiyel değişmezi olur.

Tanım 1.6.1:

$$\frac{1}{d} = \frac{\left\langle d\overrightarrow{x}, d\overrightarrow{\overline{x}} \right\rangle}{\langle d\overrightarrow{x}, d\overrightarrow{x} \rangle} = \frac{d\varphi . d\overline{\varphi}}{d\varphi . d\varphi} = \frac{d\overline{\varphi}}{d\varphi}$$

ifadesindeki $\dfrac{1}{d}$ büyüklüğüne regle yüzeyin t parametresine ait olan $\overrightarrow{X}$ anadoğrusu boyunca **dağılma parametresi** veya **drali** denir. Başka bir deyişle; regle yüzeyin komşu iki anadoğrusu arasındaki en kısa uzaklığın bu iki komşu anadoğru arasındaki açıya oranına regle yüzeyin **dağılma parametresi (dral)** denir.

Tanım 1.6.2: Komşu anadoğruları kesişen regle yüzeylere **toruslar** veya **açılabilir regle yüzeyler** denir.

Toruslar için dağılma parametresinin sıfır olması bir karakteristiktir. Zira,

$$\frac{1}{d} = \frac{d\overline{\varphi}}{d\varphi} = 0 \Rightarrow d\overline{\varphi} = 0$$

dır. Bu ise, $\overrightarrow{X}(t)$ ve $\overrightarrow{X}(t+dt)$ birim dual vektörlerine regle yüzeyde karşılık gelen komşu iki anadoğru arasındaki anadoğrularının kesişmesi demektir. Dral'in bu tanımı silindirler için geçerli değildir. Dral'in sıfır olmayan bir regle yüzeyde komşu anadoğrular aykırıdır, yani komşu iki anadoğru bir düzlem teşkil etmez.

Tanım 1.6.3: $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X}(t)$, $\left\| \overrightarrow{X}(t) \right\| = 1$, $t \in \mathbb{R}$ regle yüzeyinde $\overrightarrow{X}(t)$ ve $\overrightarrow{X}(t+dt)$ komşu anadoğruların ortak dikmesinin , $\overrightarrow{X}(t)$ anadoğrusu üzerindeki ayağına, **merkez noktası** veya **striksiyon noktası** denir. Bu noktaların geometrik yerine ise **boğaz çizgisi** veya **striksiyon çizgisi** denir.

Verilen bir regle yüzeyde, bütün anadoğruları kesen bir (C) eğrisi yüzeyin dayanak eğrisi olarak alınabilir.

Tanım 1.6.4: $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X}(t)$, $\left\| \overrightarrow{X}(t) \right\| = 1, t \in \mathbb{R}$ regle yüzeyinin bütün anadoğrularını dik kesen eğriye regle yüzeyin **ortogonal yörünge eğrisi** denir.

Bölüm 2

REGLE YÜZEYLER

Bağımsız bir parametreye bağlı (∞^1) sayıdaki $\overrightarrow{R}$ doğrularının cümlesine regle yüzey veya ışın yüzeyi denir. s boğaz çizgisinin yay uzunluğu olmak üzere $[R_1]$ regle yüzeyini,

$$\overrightarrow{R_1} = \overrightarrow{r_1}\,(s) + \varepsilon\overrightarrow{\overline{r_1}}\,(s) \tag{2.1}$$

dual birim vektörüyle ifade ederiz.

Şimdi regle yüzeyimize bağlı olmak üzere $\overrightarrow{R_1}, \overrightarrow{R_2}, \overrightarrow{R_3}$ üçyüzlüsünü ele alalım.

$$P = \sqrt{R'^2} \tag{2.2}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R} &= \overrightarrow{R_1} \\ \overrightarrow{R_2} &= \frac{\overrightarrow{R}'}{P} \\ \overrightarrow{R_3} &= \overrightarrow{R_1} \times \overrightarrow{R_2} \end{aligned} \tag{2.3}$$

doğrusundan ibaret olsun. $\overrightarrow{R_2}\ ve\ \overrightarrow{R_3}$ ün geometrik yorumu için, $\overrightarrow{R}$ birim dual vektör olduğundan,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R}^2 &= \left\langle \overrightarrow{R}, \overrightarrow{R} \right\rangle \\ &= \left\| \overrightarrow{R} \right\|^2 \\ &= 1 \end{aligned} \tag{2.4}$$

dir.

(2.4) ün t ye göre türevini alırsak,

$$\begin{aligned} \left[\left(\overrightarrow{R} \right)^2 \right]' &= \left[\left\langle \overrightarrow{R}, \overrightarrow{R} \right\rangle \right]' \\ &= \left\langle \overrightarrow{R}', \overrightarrow{R} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{R}, \overrightarrow{R}' \right\rangle \\ &= 2 \left\langle \overrightarrow{R}', \overrightarrow{R} \right\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. Öyleyse

$$\left\langle \overrightarrow{R}' , \overrightarrow{R} \right\rangle = 0 \tag{2.5}$$

elde ederiz. Önce şunu iddia ediyoruz:

Birbirine yakın $\overrightarrow{R}$ ve $\overrightarrow{R} + \overrightarrow{R}' \, dt$ doğrularının ortak dikmesi $\overrightarrow{R}_3$ tür. Bunun için $\overrightarrow{R}$ ve $\overrightarrow{R}^*$ gibi iki doğrunun dik olarak kesişmesi için

$$\left\langle \overrightarrow{R}, \overrightarrow{R}^* \right\rangle = 0 \tag{2.6}$$

olması şartından faydalanarak,

$$\left\langle \overrightarrow{R}_3, \overrightarrow{R} \right\rangle = 0$$

dır. Buradan da

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{R}_3, \overrightarrow{R} + \overrightarrow{R}' \, dt \right\rangle &= \left\langle \overrightarrow{R}_3, \overrightarrow{R}' dt \right\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur.

$\overrightarrow{R_3}$ ün karesi alınırsa,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{R}_3^2 &= \left\langle \overrightarrow{R}_3, \overrightarrow{R}_3 \right\rangle \\
&= \left\langle \overrightarrow{R}_1 \times \overrightarrow{R_2}, \overrightarrow{R}_1 \times \overrightarrow{R_2} \right\rangle \\
&= \left\| \overrightarrow{R}_1 \times \overrightarrow{R_2} \right\|^2 \\
&= \left\langle \overrightarrow{R}_1, \overrightarrow{R_1} \right\rangle \left\langle \overrightarrow{R}_2, \overrightarrow{R}_2 \right\rangle - \left\langle \overrightarrow{R}_1, \overrightarrow{R_2} \right\rangle \left\langle \overrightarrow{R}_2, \overrightarrow{R}_1 \right\rangle \\
&= \overrightarrow{R}_1^2 . \overrightarrow{R_2}^2 - \left\langle \overrightarrow{R}_1, \overrightarrow{R_2} \right\rangle^2 \\
&= 1 - \frac{\left\langle \overrightarrow{R}, \overrightarrow{R}^{\prime} \right\rangle^2}{P}
\end{aligned}$$

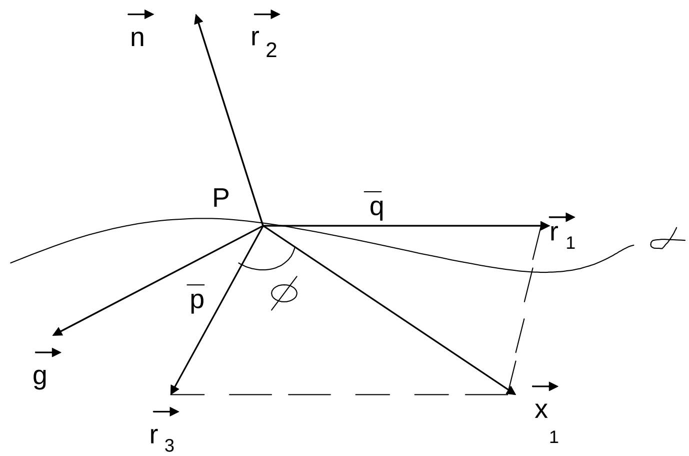
olur. $\left\langle \overrightarrow{R}, \overrightarrow{R}^{\prime} \right\rangle = 0$ olduğundan

$$\overrightarrow{R}_3^2 = \left\langle \overrightarrow{R}_3, \overrightarrow{R}_3 \right\rangle = 1 \tag{2.7}$$

bulunur.

$\overrightarrow{R}_1, \overrightarrow{R_2}, \overrightarrow{R}_3$ üçyüzlü eksenlerinin $\overrightarrow{x}$ kesişme noktası, $\overrightarrow{R_1}$üzerindedir ve bu nokta komşu doğrultmana en kısa uzaklığa sahiptir. Bu noktaya yüzeyin "**boğaz noktası**" ve $x\left(t\right)$ noktalarının geometrik yerine de yüzeyin "**boğaz çizgisi**" diyeceğiz. $\overrightarrow{R}_3$ doğrusu $\overrightarrow{R}_1$ doğrultmanına dik yüzeyimizin boğaz noktasındaki teğetidir. $\overrightarrow{R_2}$ ise yüzeyin boğaz noktasındaki normalidir.

Boğaz çizgisinin yay uzunluğu s olmak üzere $[R_1]$ regle yüzeyini $\overrightarrow{R_1} = \overrightarrow{r_1}\left(s\right) + \varepsilon \overrightarrow{\overline{r_1}}\left(s\right)$ dual birim vektörleriyle temsil edelim. $[R_1]$ regle yüzeyinin boğaz çizgisi (x) olsun. Boğaz çizgisindeki her x noktasında, $(\overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{r}_2, \overrightarrow{r}_3)$ Blaschke üçyüzlüsü ve $(\overrightarrow{x}_1 = \overrightarrow{x}, \overrightarrow{n} \times \overrightarrow{x}_1 = \overrightarrow{g}, \overrightarrow{n})$ Darboux üçyüzlüsü arasında bağıntılar vardır.



ŞEKİL-1

$\overrightarrow{x}_1$ vektörünü $\overrightarrow{r}_1$ ve $\overrightarrow{r}_3$ reel bileşenleri cinsinden aralarındaki açıyı ϕ kabul ederek yazalım. α yüzey eğrisinin P noktasından geçmek üzere, $\overrightarrow{r}_1$ ve $\overrightarrow{r}_3$ vektörlerinin oluşturduğu düzlemde bulunan birim vektör $\overrightarrow{x}_1$ olsun. $\overrightarrow{x}_1$ vektörüne dik ve P noktasından geçen $\overrightarrow{r}_2 = \overrightarrow{n}$ eşitliğini sağlayan birim vektör $\overrightarrow{n}$ ve benzer şekilde P noktasından geçen, $\overrightarrow{x}_1$ ile $\overrightarrow{n}$ birim vektörlerinin vektörel çarpımından oluşan üçüncü birim vektör de $\overrightarrow{g}$ ($\overrightarrow{g} = \overrightarrow{x}_1 \wedge \overrightarrow{n}$) dir.

$$\sin\phi = \frac{\overline{q}}{\|\overrightarrow{x}_1\|} \text{ ve } \cos\phi = \frac{\overline{p}}{\|\overrightarrow{x}_1\|}$$

olduğundan

$$\overline{q} = \sin\phi\,\|\overrightarrow{x}_1\|$$

ve

$$\overline{p} = \cos\phi\,\|\overrightarrow{x}_1\|$$

olur.

$\overrightarrow{x}_1$ birim dual vektör olduğundan,

$$\|\overrightarrow{x}_1\| = 1$$

dir. Buradan

$$\overline{q} = \sin\phi$$

ve

$$\overline{p} = \cos\phi$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\overline{q}^2 + \overline{p}^2 = \sin\phi^2 + \cos\phi^2 = 1$$

olur.

$$\overline{q}^2 + \overline{p}^2 = 1 \tag{2.8}$$

elde edilir.

$\overrightarrow{x}_1$ i lineer bileşenler cinsinden yazarsak,

$$\overrightarrow{x}_1 = \overline{q}\,\overrightarrow{r}_1 + \overline{p}\,\overrightarrow{r}_3$$

olur. $\overrightarrow{x}_1$ vektörü yardımı ile $\overrightarrow{g}$ Darboux vektörünün eşitini bulalım.

$$\overrightarrow{g} = \overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{x}_1$$

olduğunu biliyoruz. $\overrightarrow{x}_1$ in eşitini yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{g} &= \overrightarrow{n} \wedge (\overline{q}\,\overrightarrow{r}_1 + \overline{p}\,\overrightarrow{r}_3) \\ &= \overline{q}\,(\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{r}_1) + \overline{p}\,(\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{r}_3) \end{aligned}$$

dir. Burada $\overrightarrow{r}_2 = \overrightarrow{n}$ olduğundan

$$\begin{aligned}\overrightarrow{g} &= \overline{q}\,(\overrightarrow{r}_2 \wedge \overrightarrow{r}_1) + \overline{p}\,(\overrightarrow{r}_2 \wedge \overrightarrow{r}_3) \\ &= \overline{q}\,(-\overrightarrow{r}_3) + \overline{p}\,(\overrightarrow{r}_1) \\ &= \overline{p}\,\overrightarrow{r}_1 - \overline{q}\,\overrightarrow{r}_3\end{aligned}$$

elde edilir.

$\overrightarrow{x}_1$, $\overrightarrow{g}$, $\overrightarrow{n}$ Darboux vektörlerinin $\overrightarrow{r}_1$, $\overrightarrow{r}_2$, $\overrightarrow{r}_3$ Blaschke vektörleri cinsinden eşitleri aşağıdaki gibi

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x}_1 &= \overline{q}\,\overrightarrow{r}_1 + \overline{p}\,\overrightarrow{r}_3 \\ \overrightarrow{g} &= \overline{p}\,\overrightarrow{r}_1 - \overline{q}\,\overrightarrow{r}_3 \\ \overrightarrow{n} &= \overrightarrow{r}_2\end{aligned} \tag{2.9}$$

bulunur.

Şimdi $\overrightarrow{r}_1$, $\overrightarrow{r}_2$, $\overrightarrow{r}_3$ Blaschke ücyüzlüsüyle $\overrightarrow{x}_1$, $\overrightarrow{g}$, $\overrightarrow{n}$ Darboux üçyüzlüsü arasındaki ilişkiyi ifade edelim:

Bir α eğrisi alalım ve bu eğrinin herhangi bir P noktasındaki teğeti $\overrightarrow{r}_1$ olsun. P noktasından geçen ve $\overrightarrow{r}_1$ vektörüne dik olan vektör $\overrightarrow{r}_2$ dir; yine P noktasından geçmek üzere $\overrightarrow{r}_1$ ve $\overrightarrow{r}_2$ nin vektörel çarpımından oluşan üçüncü vektör de $\overrightarrow{r}_3$ ($\overrightarrow{r}_3 = \overrightarrow{r}_1 \wedge \overrightarrow{r}_2$) tür.

Yukarıdaki eşitliklerden faydalanarak, $\overrightarrow{r}_1$, $\overrightarrow{r}_2$, $\overrightarrow{r}_3$ Blaschke vektörlerini $\overrightarrow{x}_1$, $\overrightarrow{g}$, $\overrightarrow{n}$ Darboux vektörleri bileşenleri cinsinden yazalım.

$\overrightarrow{x}_1$ ve $\overrightarrow{g}$ nin eşitliklerinden yararlanarak lineer denklem çözümü yapılırsa,

$$\begin{aligned}\overline{q}\,\overrightarrow{x}_1 &= \overline{q}^2\overrightarrow{r}_1 + \overline{pq}\,\overrightarrow{r}_3 \\ \overline{p}\,\overrightarrow{g} &= \overline{p}^2\overrightarrow{r}_1 - \overline{qp}\,\overrightarrow{r}_3\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca taraf tarafa toplarsak,

$$\overline{q}\,\overrightarrow{x}_1 + \overline{p}\,\overrightarrow{g} = \left(\overline{q}^2 + \overline{p}^2\right)\overrightarrow{r}_1$$

dir. $(\overline{q}^2 + \overline{p}^2) = 1$ olduğundan,

$$\overrightarrow{r}_1 = \overline{q}\,\overrightarrow{x}_1 + \overline{p}\,\overrightarrow{g}$$

elde edilir. Benzer yolla $\overrightarrow{r}_3$ vektörünün eşitliğini gösterelim.

$$\begin{aligned} \overline{p}\,\overrightarrow{x}_1 &= \overline{pq}\,\overrightarrow{r}_1 + \overline{p}^2\overrightarrow{r}_3 \\ -\overline{q}\,\overrightarrow{g} &= -\overline{qp}\,\overrightarrow{r}_1 + \overline{q}^2\overrightarrow{r}_3 \end{aligned}$$

Taraf tarafa topladığımız zaman,

$$\overline{p}\,\overrightarrow{x}_1 - \overline{q}\,\overrightarrow{g} = \left(\overline{q}^2 + \overline{p}^2\right)\overrightarrow{r}_3$$

olur ve $(\overline{q}^2 + \overline{p}^2) = 1$ olduğundan,

$$\overrightarrow{r}_3 = \overline{p}\,\overrightarrow{x}_1 - \overline{q}\,\overrightarrow{g}$$

bulunur. $\overrightarrow{r}_2 = \overrightarrow{n}$ olduğunu biliyoruz.

$\overrightarrow{r}_1$, $\overrightarrow{r}_2$, $\overrightarrow{r}_3$ Blaschke vektörlerini lineer denklem sistemi olarak yazarsak,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r}_1 &= \overline{q}\,\overrightarrow{x}_1 + \overline{p}\,\overrightarrow{g} \\ \overrightarrow{r}_2 &= \overrightarrow{n} \\ \overrightarrow{r}_3 &= \overline{p}\,\overrightarrow{x}_1 - \overline{q}\,\overrightarrow{g} \end{aligned} \tag{2.10}$$

olur.

Şimdi $\overrightarrow{r}_1$, $\overrightarrow{r}_2$, $\overrightarrow{r}_3$ Blaschke vektörlerinin türevlerini $\overrightarrow{r}_1$, $\overrightarrow{r}_2$, $\overrightarrow{r}_3$ cinsinden elde etmeye çalışalım.

$$\overrightarrow{R_k^{'}} = \sum a_{kl}\overrightarrow{R}_l \tag{2.11}$$

denklemini kullanarak,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R}_1^{'} &= a_{11}\overrightarrow{R}_1 + a_{12}\overrightarrow{R}_2 + a_{13}\overrightarrow{R}_3 \\ \\ \overrightarrow{R}_2^{'} &= a_{21}\overrightarrow{R}_1 + a_{22}\overrightarrow{R}_2 + a_{23}\overrightarrow{R}_3 \\ &= \\ \overrightarrow{R}_3^{'} &= a_{31}\overrightarrow{R}_1 + a_{32}\overrightarrow{R}_2 + a_{33}\overrightarrow{R}_3 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi yazılır.

Şimdi regle yüzeyimize bağlı olmak üzere $\overrightarrow{R_k}$ vektörünün katsayıları için aşağıdaki,

$$a_{kl} = \left\langle \overrightarrow{R}'_{kl}, \overrightarrow{R}_l \right\rangle \tag{2.12}$$

bağıntısını kullanabiliriz.

$\overrightarrow{R_k}$ ve $\overrightarrow{R}_l$ vektörlerinin iç çarpımlarını alırsak,

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{R_k}, \overrightarrow{R}_l \right\rangle &= 0 \qquad k \neq l \\ \left\langle \overrightarrow{R_k}, \overrightarrow{R}_l \right\rangle &= 1 \qquad k = l \end{aligned} \tag{2.13}$$

olur.

$\left\langle \overrightarrow{R_k}, \overrightarrow{R}_l \right\rangle$ bağıntısının türevi

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{R_k}, \overrightarrow{R}_l \right\rangle' &= \left\langle \overrightarrow{R'_k}, \overrightarrow{R}_l \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{R_k}, \overrightarrow{R}'_l \right\rangle \\ &= \left\langle \sum a_{kl} \overrightarrow{R}_l, \overrightarrow{R}_l \right\rangle + \left\langle \sum a_{lk} \overrightarrow{R}_k, \overrightarrow{R}_k \right\rangle \\ &= \sum a_{kl} \left\langle \overrightarrow{R_l}, \overrightarrow{R}_l \right\rangle + \sum a_{lk} \left\langle \overrightarrow{R_k}, \overrightarrow{R}_k \right\rangle \end{aligned}$$

olur. $\overrightarrow{R_k}$ ve $\overrightarrow{R}_l$ ler birim dual vektör olduklarından, $\left\langle \overrightarrow{R_k}, \overrightarrow{R}_k \right\rangle = \overrightarrow{R}_k^2 = 1$ ve $\overrightarrow{R}_l^2 = 1$ dir. O halde

$$\left\langle \overrightarrow{R_k}, \overrightarrow{R}_l \right\rangle' = \sum a_{kl} + \sum a_{lk} = 0 \tag{2.14}$$

dir. Yani

$$a_{lk} = -a_{lk}$$

dir. (2.14) den dolayı

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{11} &= 0 \Rightarrow a_{11} = 0 \\ a_{22} + a_{22} &= 0 \Rightarrow a_{22} = 0 \\ a_{33} + a_{33} &= 0 \Rightarrow a_{33} = 0 \end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} a_{12} + a_{21} &= 0 \Rightarrow a_{12} = -a_{21} \\ a_{13} + a_{31} &= 0 \Rightarrow a_{13} = -a_{31} \\ a_{23} + a_{32} &= 0 \Rightarrow a_{23} = -a_{32} \end{aligned}$$

bulunur. Bulduğumuz bu eşitlikleri, (2.11) den faydalanarak elde ettiğimiz lineer denklem sisteminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{R}'_1 &= a_{12}\overrightarrow{R}_2 + a_{13}\overrightarrow{R}_3 &= a_{12}\overrightarrow{R}_2 - a_{31}\overrightarrow{R}_3 \\
\overrightarrow{R}'_2 &= a_{21}\overrightarrow{R}_1 + a_{23}\overrightarrow{R}_3 &= a_{23}\overrightarrow{R}_3 - a_{12}\overrightarrow{R}_1 \\
\overrightarrow{R}'_3 &= a_{31}\overrightarrow{R}_1 + a_{32}\overrightarrow{R}_2 &= a_{31}\overrightarrow{R}_1 - a_{23}\overrightarrow{R}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Şimdi bu denklem sistemindeki $\overrightarrow{R}_1$, $\overrightarrow{R}_2$, $\overrightarrow{R}_3$ ün katsayılarını hesaplayalım.

$\overrightarrow{R}'_1$ ni $\overrightarrow{R}_2$ ile iç çarpalım. $\overrightarrow{R}' = \overrightarrow{R}'_1 = P\overrightarrow{R}_2$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{R}'_1, \overrightarrow{R}_2 \right\rangle &= \left\langle a_{12}\overrightarrow{R}_2 + a_{13}\overrightarrow{R}_3, \overrightarrow{R}_2 \right\rangle \\
\left\langle \overrightarrow{R}'_1, \overrightarrow{R}_2 \right\rangle &= \left\langle P\overrightarrow{R}_2, \overrightarrow{R}_2 \right\rangle \\
&= P
\end{aligned}$$

dir. O halde

$$a_{12} = P$$

bulunur. Benzer şekilde $\overrightarrow{R}'_1$ ni $\overrightarrow{R}_3$ ile iç çarpalım.

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{R}'_1, \overrightarrow{R}_3 \right\rangle &= \left\langle a_{12}\overrightarrow{R}_2 + a_{13}\overrightarrow{R}_3, \overrightarrow{R}_3 \right\rangle \\
&= \left\langle P\overrightarrow{R}_2, \overrightarrow{R}_3 \right\rangle \\
&= P\left\langle \overrightarrow{R}_2, \overrightarrow{R}_3 \right\rangle \\
&= P.0
\end{aligned}$$

dir. O halde

$$a_{13} = 0$$

olur.

$$a_{23} = \left\langle \overrightarrow{R}'_2, \overrightarrow{R}_3 \right\rangle$$

olduğundan ve (2.3) eşitliğinin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{R}_2^{'} &= \left(\frac{\overrightarrow{R}^{'}}{P}\right)^{'} \\
&= \left(\overrightarrow{R}^{'}\frac{1}{P}\right)^{'} \\
&= \overrightarrow{R}^{''}\frac{1}{P} + \overrightarrow{R}^{'}\left(\frac{1}{P}\right)^{'}
\end{aligned}$$

bulunur ve diğer taraftan (2.3) gereğince

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{R}_3 &= \overrightarrow{R}_1 \times \overrightarrow{R}_2 \\
&= \frac{\overrightarrow{R} \times \overrightarrow{R}^{'}}{P}
\end{aligned}$$

olmasından dolayı,

$$\begin{aligned}
a_{23} &= \left\langle \overrightarrow{R}_2^{'}, \overrightarrow{R}_3 \right\rangle \\
&= \left\langle \left(\overrightarrow{R}^{''}\frac{1}{P} + \overrightarrow{R}^{'}\left(\frac{1}{P}\right)^{'}\right), \frac{\overrightarrow{R} \times \overrightarrow{R}^{'}}{P} \right\rangle \\
&= \left(\frac{\overrightarrow{R}, \overrightarrow{R}^{'}, \overrightarrow{R}^{''}}{P^2}\right) + \left(\frac{\overrightarrow{R}^{'}, \overrightarrow{R}, \overrightarrow{R}^{'}}{P}\right)\left(\frac{1}{P}\right)^{'} \\
&= \left(\frac{\overrightarrow{R}, \overrightarrow{R}^{'}, \overrightarrow{R}^{''}}{P^2}\right) + \frac{0}{P}\left(\frac{1}{P}\right)^{'} \\
&= \left(\frac{\overrightarrow{R}, \overrightarrow{R}^{'}, \overrightarrow{R}^{''}}{P^2}\right)
\end{aligned}$$

bulunur. a_{23} yerine Q ifadesi yazılırsa,

$$a_{23} = Q = \left(\frac{\overrightarrow{R}, \overrightarrow{R}^{'}, \overrightarrow{R}^{''}}{P^2}\right) \tag{2.15}$$

ifadesi elde edilir.

a_{kl} matrisi ters simetriktir. Bu yüzden (2.14) den dolayı,

$$\begin{aligned} a_{12} &= P \Rightarrow a_{21} = -P \\ a_{13} &= 0 \Rightarrow a_{31} = 0 \\ a_{23} &= Q \Rightarrow a_{32} = -Q \end{aligned}$$

olur. O halde $\overrightarrow{R}_1, \overrightarrow{R_2}, \overrightarrow{R}_3$ vektörlerinin türevlerini $\overrightarrow{R}_1, \overrightarrow{R_2}, \overrightarrow{R}_3$ cinsinden lineer olarak yazarsak,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R}_1^{'} &= P\overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{R_2}^{'} &= -P\overrightarrow{R}_1 + Q\overrightarrow{R}_3 \\ \overrightarrow{R}_3^{'} &= -Q\overrightarrow{R_2} \end{aligned} \tag{2.16}$$

elde ederiz.

Şimdi $\overrightarrow{R}_1, \overrightarrow{R_2}, \overrightarrow{R}_3$ birim dual vektörlerini reel ve dual kısımlarına ayırırsak (2.16) daki denklemde yerine yazarsak

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R}_1 \text{ ve } \overrightarrow{R}_1^{'} = P\overrightarrow{R_2}$$

dir. O halde

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R}^{'} &= \overrightarrow{R}_1^{'} + P\overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{r}_1^{'} + \varepsilon\overrightarrow{\overline{r}_1}^{'} &= (p + \varepsilon\overline{p})\left(\overrightarrow{r}_2^{'} + \varepsilon\overrightarrow{\overline{r}_2}\right) \\ &= p\overrightarrow{r}_2 + \varepsilon\left(p\overrightarrow{\overline{r}_2} + \overline{p}\overrightarrow{r}_2\right) \end{aligned}$$

dual sayıların eşitliğinden,

$$\overrightarrow{r}_1^{'} = p\overrightarrow{r}_2$$

olur.

$$\overrightarrow{R_2}^{'} = -P\overrightarrow{R}_1 + Q\overrightarrow{R}_3$$

eşitliğini reel ve dual kısımlara ayıralım. Buradan

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{r}'_2 + \varepsilon\overrightarrow{\overline{r}_2}' &= -\left(p + \varepsilon\overline{p}\right)\left(\overrightarrow{r}_1 + \varepsilon\overrightarrow{\overline{r}_1}\right) + \left(q + \varepsilon\overline{q}\right)\left(\overrightarrow{r}_3 + \varepsilon\overrightarrow{\overline{r}_3}\right) \\
&= -p\overrightarrow{r}_1 + q\overrightarrow{r}_3 + \varepsilon\left(-p\overrightarrow{\overline{r}_1} - \overline{p}\,\overrightarrow{r}_1 + \overline{q}\,\overrightarrow{r}_3 + q\overrightarrow{\overline{r}_3}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Dual sayıların eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{r}'_2 &= -p\overrightarrow{r}_1 + q\overrightarrow{r}_3 \\
\overrightarrow{\overline{r}_2}' &= -p\overrightarrow{\overline{r}_1} - \overline{p}\,\overrightarrow{r}_1 + \overline{q}\,\overrightarrow{r}_3 + q\overrightarrow{\overline{r}_3}
\end{aligned}$$

dir. Ayrıca

$$\overrightarrow{R}'_3 = -Q\overrightarrow{R_2}$$

eşitliği, reel ve dual kısımlara ayrılırsa,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{r}'_3 + \varepsilon\overrightarrow{\overline{r}_3}' &= -\left(q + \varepsilon\overline{q}\right)\left(\overrightarrow{r}_2 + \varepsilon\overrightarrow{\overline{r}_2}\right) \\
&= -q\overrightarrow{r}_2 + \varepsilon\left(-q\;\overrightarrow{\overline{r}_2} - \overline{q}\,\overrightarrow{r}_2\right)
\end{aligned}$$

olur. Dual sayıların eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{r}'_3 &= -q\overrightarrow{r}_2 \\
\overrightarrow{\overline{r}_3}' &= -q\;\overrightarrow{\overline{r}_2} - \overline{q}\,\overrightarrow{r}_2
\end{aligned}$$

bulunur. Buna göre $\overrightarrow{r}_1$, $\overrightarrow{r}_2$, $\overrightarrow{r}_3$ Blaschke vektörlerinin türevlerini $\overrightarrow{r}_1$, $\overrightarrow{r}_2$, $\overrightarrow{r}_3$ cinsinden lineer olarak yazarsak,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{r}'_1 &= p\overrightarrow{r}_2 \\
\overrightarrow{r}'_2 &= -p\overrightarrow{r}_1 + q\overrightarrow{r}_3 \qquad (2.17) \\
\overrightarrow{r}'_3 &= -q\overrightarrow{r}_2
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi $\overrightarrow{x}'_1$, $\overrightarrow{g}'$, $\overrightarrow{n}'$ vektörlerinin lineer yazılımındaki $\overrightarrow{x}_1$, $\overrightarrow{g}$, $\overrightarrow{n}$ vektörlerinin katsayılarının elde edilişini inceleyelim,

$$\overrightarrow{x}'_1 = a_1\overrightarrow{x}_1 + a_2\overrightarrow{g} + a_3\overrightarrow{n}$$

denklemini $\overrightarrow{x}_1$ ile iç çarpalım

$$\begin{aligned}\left\langle \overrightarrow{x}'_1, \overrightarrow{x}_1 \right\rangle &= a_1 \langle \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_1 \rangle + a_2 \langle \overrightarrow{g}, \overrightarrow{x}_1 \rangle + a_3 \langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{x}_1 \rangle \\ &= a_1.1 + a_2.0 + a_3.0 \\ &= a_1\end{aligned}$$

bulunur.

(2.4) den dolayı $\langle \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_1 \rangle = 1$ dir. Her iki tarafin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_1 \rangle' &= \left\langle \overrightarrow{x}'_1, \overrightarrow{x}_1 \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}'_1 \right\rangle \\ &= 2\left\langle \overrightarrow{x}'_1, \overrightarrow{x}_1 \right\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

dir. O halde

$$\left\langle \overrightarrow{x}'_1, \overrightarrow{x}_1 \right\rangle = 0$$

olduğu için

$$\left\langle \overrightarrow{x}'_1, \overrightarrow{x}_1 \right\rangle = a_1 = 0$$

yazılır.

$$\overrightarrow{x}'_1 = a_1\overrightarrow{x}_1 + a_2\overrightarrow{g} + a_3\overrightarrow{n}$$

denklemini $\overrightarrow{g}$ ile iç çarpalım.

$$\left\langle \overrightarrow{x}'_1, \overrightarrow{g} \right\rangle = a_1 \langle \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{g} \rangle + a_2 \langle \overrightarrow{g}, \overrightarrow{g} \rangle + a_3 \langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{g} \rangle$$

dır ve

$$\langle \overrightarrow{g}, \overrightarrow{x}_1 \rangle = 0, \;\; \langle \overrightarrow{g}, \overrightarrow{g} \rangle = 1, \;\; \langle \overrightarrow{g}, \overrightarrow{n} \rangle = 0$$

olur. Yukarıdaki eşitlikte $\left\langle \overrightarrow{x}_1^{'}, \overrightarrow{g} \right\rangle = \rho_g$ ve ayrıca, $\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{g}, \overrightarrow{n}$ birbirleri ile ortonormal olduğundan,

$$\begin{aligned} \rho_g &= a_1.0 + a_2.1 + a_3.0 \\ \rho_g &= a_2 \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca

$$\overrightarrow{x}_1^{'} = a_1 \overrightarrow{x}_1 + a_2 \ \overrightarrow{g} + a_3 \overrightarrow{n}$$

denklemini $\overrightarrow{n}$ ile iç çarpalım. Öyleyse

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{x}_1^{'}, \overrightarrow{n} \right\rangle &= a_1 \langle \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{n} \rangle + a_2 \langle \overrightarrow{g}, \overrightarrow{n} \rangle + a_3 \langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{n} \rangle \\ &= a_1.0 + a_2.0 + a_3.1 \\ &= a_3 \end{aligned}$$

olur.

$$\left\langle \overrightarrow{x}_1^{'}, \overrightarrow{n} \right\rangle = \rho_n$$

olduğu için

$$a_3 = \rho_n$$

yazılır.

$$\overrightarrow{g}^{'} = b_1 \overrightarrow{x}_1 + b_2 \overrightarrow{g} + b_3 \overrightarrow{n}$$

denklemini $\overrightarrow{x}_1$ ile iç çarparsak,

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{g}^{'}, \overrightarrow{x}_1 \right\rangle &= b_1 \langle \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_1 \rangle + b_2 \langle \overrightarrow{g}, \overrightarrow{x}_1 \rangle + b_3 \langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{x}_1 \rangle \\ &= b_1.1 + b_{2.}0 + b_3.0 \\ &= b_1 \end{aligned}$$

buluruz. (2.6) dan dolayı

$$\langle \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{g} \rangle = 0$$

dır. Eşitliğin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$\left\langle \overrightarrow{x}_1^{'}, \overrightarrow{g} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{g}^{'} \right\rangle = 0$$

olur. $\left\langle \overrightarrow{x}^{'}_1, \overrightarrow{g} \right\rangle = \rho_g$ olduğunu kullanırsak,

$$\rho_g + \left\langle \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{g}^{'} \right\rangle \;=\; 0$$

ayrıca

$$\left\langle \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{g}^{'} \right\rangle \;=\; -\rho_g$$

veya

$$\left\langle \overrightarrow{g}^{'}, \overrightarrow{x}_1 \right\rangle = -\rho_g$$

elde ederiz. Diğer taraftan

$$\left\langle \overrightarrow{g}^{'}, \overrightarrow{x}_1 \right\rangle = b_1$$

olup

$$b_1 = -\rho_g$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\overrightarrow{g}^{'} = b_1 \overrightarrow{x}_1 + b_2 \overrightarrow{g} + b_3 \overrightarrow{n}$$

denklemini $\overrightarrow{g}$ ile iç çarparsak,

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{g}^{'}, \overrightarrow{g} \right\rangle &= b_1 \langle \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{g} \rangle + b_2 \langle \overrightarrow{g}, \overrightarrow{g} \rangle + b_3 \langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{g} \rangle \\ &= b_1.0 + b_2.1 + b_3.0 \end{aligned}$$

dir. (2.5) bağıntısından dolayı

$$\left\langle \overrightarrow{g}^{'}, \overrightarrow{g} \right\rangle = 0$$

yazılır. Buradan

$$b_2 = 0$$

bulunur.

$$\overrightarrow{g}^{'} = b_1 \overrightarrow{x}_1 + b_2 \overrightarrow{g} + b_3 \overrightarrow{n}$$

denklemini $\overrightarrow{n}$ ile iç çarparsak,

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{g}', \overrightarrow{n} \right\rangle &= b_1 \langle \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{n} \rangle + b_2 \langle \overrightarrow{g}, \overrightarrow{n} \rangle + b_3 \langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{n} \rangle \\ &= b_1.0 + b_2.0 + b_3.1 \\ &= b_3 \end{aligned}$$

olur. $\left\langle \overrightarrow{g}', \overrightarrow{n} \right\rangle = \tau_g$ olduğu kullanılırsa

$$\left\langle \overrightarrow{g}', \overrightarrow{n} \right\rangle = b_3$$

veya

$$b_3 = \tau_g$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\overrightarrow{n}' = c_1 \overrightarrow{x}_1 + c_2 \overrightarrow{g} + c_3 \overrightarrow{n}$$

denklemini $\overrightarrow{x}_1$ ile iç çarpalım.

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{n}', \overrightarrow{x}_1 \right\rangle &= c_1 \langle \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_1 \rangle + c_2 \langle \overrightarrow{g}, \overrightarrow{x}_1 \rangle + c_3 \langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{x}_1 \rangle \\ &= c_1.1 + c_2.0 + c_3.0 \\ &= c_1 \end{aligned}$$

elde ederiz.

$$\left\langle \overrightarrow{x}'_1, \overrightarrow{n} \right\rangle = \rho_n$$

veya

$$\left\langle \overrightarrow{n}', \overrightarrow{x}_1 \right\rangle = -\rho_n$$

olur. Buradan

$$c_1 = -\rho_n$$

bulunur.

$$\overrightarrow{n}' = c_1 \overrightarrow{x}_1 + c_2 \overrightarrow{g} + c_3 \overrightarrow{n}$$

denklemini $\overrightarrow{g}$ ile iç çarpalım.

$$\begin{aligned}\left\langle \overrightarrow{n}^{'}, \overrightarrow{g} \right\rangle &= c_1 \langle \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{g} \rangle + c_2 \langle \overrightarrow{g}, \overrightarrow{g} \rangle + c_3 \langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{g} \rangle \\ &= c_1.0 + c_2.1 + c_3.0 \\ &= c_2\end{aligned}$$

ve

$$\left\langle \overrightarrow{g}^{'}, \overrightarrow{n} \right\rangle = \tau_g$$

dir. O halde

$$\left\langle \overrightarrow{n}^{'}, \overrightarrow{g} \right\rangle = c_2$$

veya

$$c_2 = -\tau_g$$

olur.

$$\overrightarrow{n}^{'} = c_1 \overrightarrow{x}_1 + c_2 \overrightarrow{g} + c_3 \overrightarrow{n}$$

denklemini $\overrightarrow{n}$ ile iç çarpalım.

$$\left\langle \overrightarrow{n}^{'}, \overrightarrow{n} \right\rangle = c_1 \langle \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{n} \rangle + c_2 \langle \overrightarrow{g}, \overrightarrow{n} \rangle + c_3 \langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{n} \rangle$$

(2.5) bağıntısından dolayı

$$\left\langle \overrightarrow{n}^{'}, \overrightarrow{n} \right\rangle = 0$$

dır. Buna göre,

$$\left\langle \overrightarrow{n}^{'}, \overrightarrow{n} \right\rangle = c_1.0 + c_2.0 + c_3.1$$

ya da

$$c_3 = 0$$

bulunur.

O halde $\overrightarrow{x}'_1, \overrightarrow{g}', \overrightarrow{n}'$ vektörlerinin lineer yazılımı

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{x}'_1 &= \rho_n \overrightarrow{n} + \rho_g \overrightarrow{g} \\
\overrightarrow{g}' &= -\rho_g \overrightarrow{x}_1 + \tau_g \overrightarrow{n} \qquad (2.18) \\
\overrightarrow{n}' &= -\rho_n \overrightarrow{x}_1 - \tau_g \overrightarrow{g}
\end{aligned}$$

biçiminde olur. (2.18) deki, ρ_n, τ_g, ρ_g büyüklükleri sırasıyla (x) boğaz çizgisinin normal eğriliği, geodezik torsiyonu ve geodezik eğriliği anlamına gelir.

Şimdi regle yüzeyine bağlı $p, \overline{p}, q, \overline{q}$ invaryantları ile ρ_n, τ_g, ρ_g büyüklükleri arasındaki bağıntıları bulalım.

(2.10) dan faydalanarak $\overrightarrow{r}_1$ vektörünün türevini alırsak,

$$\overrightarrow{r}^{\cdot}_1 = \overline{q}' \overrightarrow{x}_1 + \overline{q}\overrightarrow{x}'_1 + \overline{p}' \overrightarrow{g} + \overline{p}\overrightarrow{g}' \qquad (2.19)$$

eşitliğini elde ederiz. (2.17) ve (2.19) daki bağıntıları birbirine eşitlersek,

$$\overline{q}' \overrightarrow{x}_1 + \overline{q}\overrightarrow{x}'_1 + \overline{p}' \overrightarrow{g} + \overline{p}\overrightarrow{g}' = p\overrightarrow{r}_2 \qquad (2.20)$$

olur.

(2.20) de $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{r}_2$ eşitliğini yerine yazarsak,

$$\overline{q}' \overrightarrow{x}_1 + \overline{q}\overrightarrow{x}'_1 + \overline{p}' \overrightarrow{g} + \overline{p}\overrightarrow{g}' = p\overrightarrow{n}$$

bulunur. Son eşitlikte $\overrightarrow{x}'_1$ ve $\overrightarrow{g}'$ vektörlerinin yerine (2.18) deki eşitlerini kullanalım.

$$\overline{q}' \overrightarrow{x}_1 + \overline{q}.\left(\rho_g \overrightarrow{g} + \rho_n \overrightarrow{n}\right) + \overline{p}' \overrightarrow{g} + \overline{p}\left(-\rho_g \overrightarrow{x}_1 + \tau_g \overrightarrow{n}\right) = p\overrightarrow{n}$$

Eşitliğin sol tarafı ortak çarpan parantezine alınırsa,

$$\overrightarrow{x}_1\left(\overline{q}' - \overline{p}\rho_g\right) + \overrightarrow{g}\left(\overline{q}\rho_g + \overline{p}'\right) + \overrightarrow{n}\left(\overline{q}.\rho_n + \overline{p}\tau_g\right) = p\overrightarrow{n}$$

dir. Yukarıdaki ifadede $\overrightarrow{x}_1$ in katsayıları eşitliğinden,

$$\overline{q}^{'} - \overline{p}\rho_g = 0$$

dir ya da

$$\rho_g = \frac{\overline{q}^{'}}{\overline{p}} \tag{2.21}$$

bulunur.

$\overrightarrow{g}$ nin katsayıları eşitliğinden,

$$\overline{q}\rho_g + \overline{p}^{'} = 0$$

dir veya

$$\rho_g = -\frac{\overline{p}^{'}}{\overline{q}} \tag{2.22}$$

olur. (2.21) ve (2.22) bağıntılarının her iki tarafının da karelerini alırsak,

$$\rho_g^2 = \frac{\overline{q}^{'2}}{\overline{p}^2} \tag{2.23}$$

ve

$$\rho_g^2 = \frac{\overline{p}^{'2}}{\overline{q}^2} \tag{2.24}$$

elde ederiz.

(2.23) ve (2.24) bağıntılarında eşitliğin iki tarafı sırasıyla $\overline{p}^2$ ve $\overline{q}^2$ ile çarpılırsa,

$$\rho_g^2\overline{p}^2 = \overline{q}^{'2}$$

ve

$$\rho_g^2\overline{q}^2 = \overline{p}^{'2}$$

bulunur. Bu son iki bağıntıyı taraf tarafa toplayalım.

$$\rho_g^2\left(\overline{p}^2 + \overline{q}^2\right) = \overline{q}^{'2} + \overline{p}^{'2}$$

ya da

$$\overline{p}^2 + \overline{q}^2 = 1$$

eşitliğinden dolayı

$$\rho_g^2 = \overline{q}'^2 + \overline{p}'^2$$

olur.

$$\overrightarrow{r}_2 = \overrightarrow{n}$$

bağıntısının her iki tarafının türevi alınırsa,

$$\overrightarrow{r}'_2 = \overrightarrow{n}' \tag{2.25}$$

olur. (2.25) deki bağıntıda (2.17) ve (2.18) eşitlikleri yerlerine yazılırsa,

$$-p\overrightarrow{r_1} + q\overrightarrow{r_3} = \rho_n \overrightarrow{x}_1 - \tau_g \overrightarrow{g}$$

dir. Bu son eşitliğin sol tarafında $\overrightarrow{r_1}$ ve $\overrightarrow{r_3}$ vektörleri yerine (2.8) deki eşitleri yazılırsa,

$$-p(\overline{q}\,\overrightarrow{x}_1 + \overline{p}\,\overrightarrow{g}) + q(\overline{p}\,\overrightarrow{x}_1 - \overline{q}\,\overrightarrow{g}) = -\rho_n \overrightarrow{x}_1 - \tau_g \overrightarrow{g}$$

olur. Eşitliği düzenlersek,

$$\overrightarrow{x}_1(-p\overline{q} + q\overline{p}) + \overrightarrow{g}(-q\overline{q} + p\overline{p}) = -\rho_n \overrightarrow{x}_1 - \tau_g \overrightarrow{g}$$

yazılır. İki vektörün eşitliği kullanılırsa,

$$-\rho_n = -p\overline{q} + q\overline{p}$$

veya eşitliği (-1) ile çarparsak,

$$\rho_n = p\overline{q} - q\overline{p} \tag{2.26}$$

buluruz. Benzer şekilde $\overrightarrow{g}$ nin katsayılarının eşitliğinden

$$-\tau_g = -q\overline{q} + p\overline{p}$$

yada

$$\tau_g = q\overline{q} - p\overline{p} \tag{2.27}$$

buluruz.

$[R_1]$ regle yüzeyi, $\overrightarrow{R_1}$ in ayrıtıyla oluşur. Bir eğri üzerindeki bir P noktası eğriyi çizerken $\overrightarrow{R_1}, \overrightarrow{R_2}, \overrightarrow{R_3}$ vektörleri değişirler, dolayısıyla küresel göstergeler oluşurlar. Eğrinin $\overrightarrow{R_1}, \overrightarrow{R_2}, \overrightarrow{R_3}$ üç ayaklısının her s anında, bir eksen etrafında bir ani helis hareketi yaptığı kabul edilir. Bu eksen eğrinin s parametresine karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Darboux eksenidir. Bu eksenin yön ve doğrultusunu veren Darboux vektörüne W diyelim.

$\overrightarrow{W}$ yi $\overrightarrow{R_1}$ ve $\overrightarrow{R_3}$ ün lineer birleşimi olarak gösterirsek,

$$\overrightarrow{W} = P\overrightarrow{R_1} + Q\overrightarrow{R_3}$$

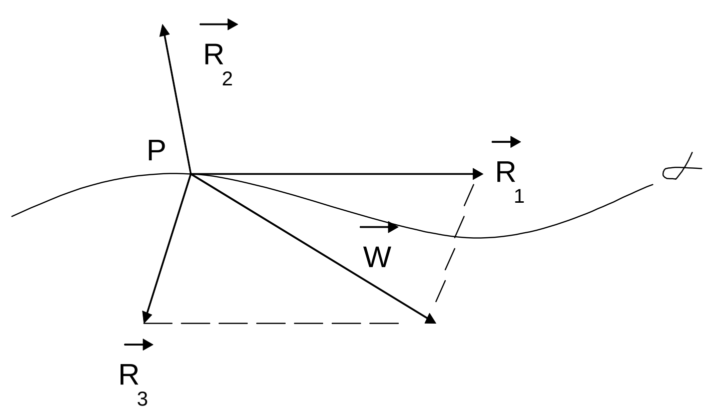
olur veya

$$\overrightarrow{W} = P\overrightarrow{R_1} + Q\overrightarrow{R_3} = \overrightarrow{R_2} \Lambda \overrightarrow{R_2}' \tag{2.28}$$

yazılabilir. Burada

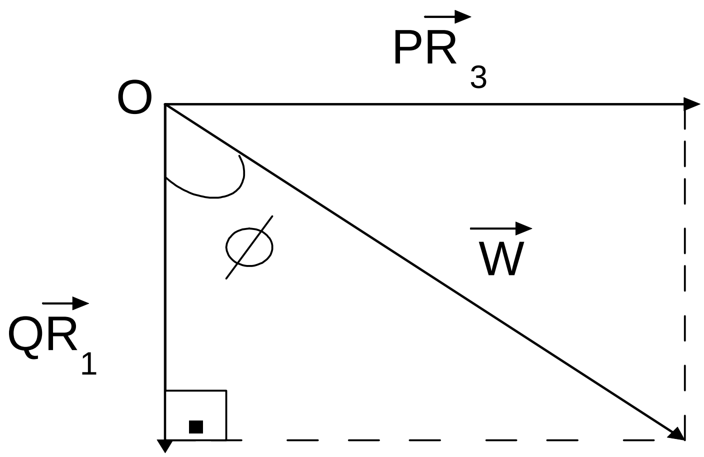
$$\overrightarrow{R_2} \Lambda \overrightarrow{R_2}' = \begin{vmatrix} \overrightarrow{R_1} & \overrightarrow{R_2} & \overrightarrow{R_3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -P & 0 & Q \end{vmatrix}$$

dır. $\overrightarrow{R_1}, \overrightarrow{R_2}, \overrightarrow{R_3}$ ve W yi (Şekil-2) de olduğu gibi gösterebiliriz.



ŞEKİL-2

Ayrıca



ŞEKİL-3

Ayrıca (Şekil-3) teki dik üçgenden faydalanarak

$$\tan\phi = \frac{P}{Q} \tag{2.29}$$

ve

$$Q = \|W\| \,.\cos\phi$$

$$P = \|W\| \,.\sin\phi$$

olur. Q ve P nin karelerini alır, taraf tarafa toplayıp karekökünü alırsak,

$$\|W\| = \sqrt{P^2 + Q^2} \tag{2.30}$$

yazabiliriz. Darboux vektörü yönündeki birim vektör E_1 ise,

$$E_1 = \frac{\overrightarrow{W}}{\|W\|}$$

dir. (2.28) den $\overrightarrow{W}$ nin eşitini yerine yazarsak,

$$E_1 = \frac{\overrightarrow{W}}{\|W\|} = \frac{\overrightarrow{R_2}\Lambda\overrightarrow{R_2'}}{\left\|\overrightarrow{R_2}\Lambda\overrightarrow{R_2'}\right\|} \tag{2.31}$$

elde edilir. (2.31) eşitliğinde (2.16) daki eşitini yazarsak,

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\overrightarrow{R_2}\Lambda\overrightarrow{R_2}^{\shortmid}}{\left\|\overrightarrow{R_2}\Lambda\overrightarrow{R_2}^{\shortmid}\right\|} \\ &= \frac{\overrightarrow{R_2}\Lambda(-P\overrightarrow{R_1}+Q\overrightarrow{R_3})}{\left(\left\langle\overrightarrow{R_2}\Lambda\overrightarrow{R_2}^{\shortmid},\overrightarrow{R_2}\Lambda\overrightarrow{R_2}^{\shortmid}\right\rangle\right)^{1/2}} \\ &= \frac{-P\left(\overrightarrow{R_2}\Lambda\overrightarrow{R_1}\right)+Q\left(\overrightarrow{R_2}\Lambda\overrightarrow{R_3}\right)}{\left(\left\langle -P\left(\overrightarrow{R_2}\Lambda\overrightarrow{R_1}\right)+Q\left(\overrightarrow{R_2}\Lambda\overrightarrow{R_3}\right), -P\left(\overrightarrow{R_2}\Lambda\overrightarrow{R_1}\right)+Q\left(\overrightarrow{R_2}\Lambda\overrightarrow{R_3}\right)\right\rangle\right)^{1/2}} \\ &= \frac{Q\overrightarrow{R_1}+P\overrightarrow{R_3}}{\left(Q^2\left\langle\overrightarrow{R_1},\overrightarrow{R_1}\right\rangle+P^2\left\langle\overrightarrow{R_3},\overrightarrow{R_3}\right\rangle\right)^{1/2}} \end{aligned}$$

$\left\langle\overrightarrow{R_1},\overrightarrow{R_1}\right\rangle=\left\langle\overrightarrow{R_3},\overrightarrow{R_3}\right\rangle=1$ olduğundan

$$E_1=\frac{Q\overrightarrow{R_1}+P\overrightarrow{R_3}}{\sqrt{Q^2+P^2}}$$

dır. Son eşitliğin pay ve paydası P ile bölünürse,

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\left(Q\overrightarrow{R_1}+P\overrightarrow{R_3}\right):P}{\sqrt{Q^2+P^2}:P} \\ &= \frac{\frac{Q}{P}.\overrightarrow{R_1}+\frac{P}{P}\overrightarrow{R_3}}{\sqrt{\frac{Q^2}{P^2}+\frac{P^2}{P^2}}} \\ &= \frac{\frac{Q}{P}.\overrightarrow{R_1}+\overrightarrow{R_3}}{\sqrt{\frac{Q^2}{P^2}+1}} \end{aligned}$$

bulunur.

$$\sum=\frac{Q}{P} \tag{2.32}$$

alınırsa

$$E_1 = \frac{Q\overrightarrow{R_1} + P\overrightarrow{R_3}}{\sqrt{Q^2+P^2}} = \frac{\sum\overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{R_3}}{\sqrt{\sum^2 +1}} \tag{2.33}$$

ifadesini elde ederiz.

(2.29) ve (2.32) den faydalanarak,

$$\frac{1}{\sum} = \frac{P}{Q}$$

ve

$$\tan\phi = \frac{P}{Q} = \frac{1}{\sum} \tag{2.34}$$

olur.

$$\tan\phi = \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{P}{Q}$$

dır.

Taylor açılımından $\sin\phi$ ve $\cos\phi$ nın eşiti yerine yazılır ve P ile Q da reel ve dual kısımlarına ayrılırsa,

$$\begin{aligned} \tan\phi &= \frac{\sin\phi}{\cos\phi} \\ &= \frac{\sin\varphi + \varepsilon\overline{\varphi}\cos\varphi}{\cos\varphi - \varepsilon\overline{\varphi}\sin\varphi} \\ &= \frac{p+\varepsilon\overline{p}}{q+\varepsilon\overline{q}} \end{aligned}$$

elde edilir. Paydaları eşleniği ile çarparak yazarsak,

$$\begin{array}{cc} \dfrac{\sin\varphi + \varepsilon\overline{\varphi}\cos\varphi}{\cos\varphi - \varepsilon\overline{\varphi}\sin\varphi} & = \dfrac{p+\varepsilon\overline{p}}{q+\varepsilon\overline{q}} \\ (\cos\varphi + \varepsilon\overline{\varphi}\sin\varphi) & (q-\varepsilon\overline{q}) \end{array}$$

olur. Gerekli işlemler yapılırsa, reel ve duallerin eşitliğinden,

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{p}{q}$$

veya

$$\tan\varphi = \frac{p}{q} \tag{2.35}$$

bulunur. Dual kısımların eşitliğinden,

$$\overline{\varphi} = \cos\varphi^2 . \left(\frac{-p.\overline{q} + q\overline{p}}{q^2} \right)$$

dır.

$$\tan\varphi = \frac{p}{q}$$

bağıntısından faydalanırsak

$$\cos\varphi = \left(\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} \right)$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapılırsa,

$$\overline{\varphi} = \left(\frac{q\overline{p} - p.\overline{q}}{p^2+q^2} \right) \tag{2.36}$$

olur. Şimdi de $\overline{\varphi}$ nin eşitini ρ_n ve τ_g ler cinsinden gösterelim.

(2.26) ve (2.27) den faydalanarak ρ_n ve τ_g nin karelerini alıp taraf tarafa toplarsak,

$$\begin{aligned}
\rho_n^2 + \tau_g^2 &= (p\overline{q} - q\overline{p})^2 + (q\overline{q} - p\overline{p})^2 \\
&= p^2\overline{q}^2 - 2pq\overline{pq} + q^2\overline{p}^2 + p^2\overline{p}^2 + 2pq\overline{pq} + q^2\overline{q}^2 \\
&= p^2\left(\overline{p}^2 + \overline{q}^2\right) + q^2\left(\overline{p}^2 + \overline{q}^2\right)
\end{aligned}$$

dır.

$$\left(\overline{p}^2 + \overline{q}^2\right) = 1$$

olduğundan

$$\rho_n^2 + \tau_g^2 = p^2 + q^2 \tag{2.37}$$

elde edilir. (2.36) da (2.27) ve(2.37) nin eşitleri yerine yazılırsa

$$\overline{\varphi} = \frac{\overline{p}.q - p\overline{q}}{p^2+q^2}$$

eşitliğinden

$$\overline{\varphi} = -\frac{\rho_n}{\rho_n^2 + \tau_g^2} \tag{2.38}$$

bulunur.

Küresel $\overrightarrow{R}_1(t)$ eğrisinin " dual uzunluğu" için

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_b^a \left\| \alpha^{\prime} \right\| dt \\ &= \int \left\| \overrightarrow{R}_1^{\prime} \right\| dt \\ &= \int \sqrt{\left\langle \overrightarrow{R}_1^{\prime}, \overrightarrow{R}_1^{\prime} \right\rangle} dt \\ &= \sqrt{\left\langle \overrightarrow{r}_1^{\prime} + \varepsilon \overrightarrow{\overline{r}}_1^{\prime}, \overrightarrow{r}_1^{\prime} + \varepsilon \overrightarrow{\overline{r}}_1^{\prime} \right\rangle} dt \\ &= \int P dt \\ &= \int (p + \varepsilon \overline{p})\, dt \end{aligned}$$

ve $\overrightarrow{R}_3(t)$ eğrisinin dual uzunluğu için de

$$\begin{aligned} S_3 &= \int \sqrt{\overrightarrow{R}_3^{\prime 2}} dt \\ &= \int \left\langle \overrightarrow{R}_3^{\prime}, \overrightarrow{R}_3^{\prime} \right\rangle \\ &= \int Q dt \\ &= \int (q + \varepsilon \overline{q})\, dt \end{aligned}$$

elde edilir. Burada P ve Q sabit olduğundan sadece işaret keyfi kalır, bu nedenle

$$\int p dt, \int \overline{p} dt, \int q dt, \int \overline{q} dt$$

integralleri $\overrightarrow{R}(t)$ regle yüzeyinin integral invaryantı olurlar.

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{r}(t) + \varepsilon \overrightarrow{\overline{r}}(t)$$

birim dual vektörünü t parametresine bağlı gösterdiğimizde bir regle yüzey elde ederiz. Birbirine yakın iki doğrultmanın arasındaki açıya Φ dersek,

$$\Phi = \varphi + \varepsilon\overline{\varphi}$$

olarak tanımlayabiliriz. Φ dual açısının diferensiyelini alıp, sonra da karesini alırsak,

$$\begin{aligned} d\Phi &= d\varphi + \varepsilon d\overline{\varphi} \\ d\Phi^2 &= (d\varphi + \varepsilon d\overline{\varphi})^2 \\ &= d\varphi^2 + 2\varepsilon d\varphi d\overline{\varphi} + \varepsilon^2 d\overline{\varphi}^2 \end{aligned}$$

elde edilir. $\varepsilon^2 = 0$ olduğundan,

$$d\Phi^2 = d\varphi^2 + 2\varepsilon d\varphi d\overline{\varphi}$$

bulunur. Dual açının diferensiyelinin karesi ile birim dual vektörünün diferensiyelinin karesi birbirine eşit olacağından,

$$d\overrightarrow{R} = d\overrightarrow{r} + \varepsilon d\overrightarrow{\overline{r}}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} (d\overrightarrow{R})^2 &= \left(d\overrightarrow{r} + \varepsilon d\overrightarrow{\overline{r}}\right)^2 \\ &= dr^2 + \varepsilon d\overrightarrow{r} d\overrightarrow{\overline{r}} + \varepsilon^2 d\overrightarrow{\overline{r}}^2 \end{aligned}$$

elde edilir. $\varepsilon^2 = 0$ olduğundan,

$$d\overrightarrow{R}^2 = dr^2 + \varepsilon d\overrightarrow{r} d\overrightarrow{\overline{r}}$$

Dual sayıların eşitliğinden,

$$d\Phi^2 = d\overrightarrow{R}^2$$

ve

$$d\varphi^2 + \varepsilon 2 d\varphi d\overline{\varphi} = dr^2 + \varepsilon 2 d\overrightarrow{r} d\overrightarrow{\overline{r}}$$

dır. Buradan

$$d\varphi^2 = d\overrightarrow{r}^2$$

ayrıca

$$d\varphi d\overline{\varphi} = d\overrightarrow{r} d\overrightarrow{\overline{r}}$$

bulunur. Bu son eşitliğin her iki tarafı $d\varphi^2$ ile bölünürse,

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi d\overline{\varphi}}{d\varphi^2} &= \frac{d\overrightarrow{r} d\overrightarrow{\overline{r}}}{d\varphi^2} \\ &= \frac{d\overrightarrow{r} d\overrightarrow{\overline{r}}}{d\overrightarrow{r}^2} \\ &= \frac{\overrightarrow{r}' \overrightarrow{\overline{r}}'}{\overrightarrow{r}' \overrightarrow{r}'} \end{aligned}$$

olup, dağılma parametresinin tanımından dolayı,

$$\begin{aligned} \frac{1}{d} &= \frac{d\overline{\varphi}}{d\varphi} \\ \frac{1}{d} &= \frac{\overrightarrow{r}' \overrightarrow{\overline{r}}'}{\overrightarrow{r}' \overrightarrow{r}'} \end{aligned}$$

dır. Dralin bağıntısı ile regle yüzeyin en basit diferensiyeli bulunmuş olur. $\frac{1}{d}$ bağıntısına kısaca regle yüzeyin drali diyeceğiz.

Yukarıdaki dral formülünü kullanarak $\overrightarrow{R}_1(t)$ yüzeyimizin d_1 drali için

$$\frac{1}{d_1} = \frac{\overrightarrow{r}'_1 \overrightarrow{\overline{r}}'_1}{\overrightarrow{r}'^2_1}$$

yazabiliriz. $p = \sqrt{\overrightarrow{r}'^2_1}$ ve $\overline{p} = \dfrac{\overrightarrow{r}'_1 \overrightarrow{\overline{r}}'_1}{\sqrt{\overrightarrow{r}'^2_1}}$ olduğunu biliyoruz. O halde

$$p.\overline{p} = \overrightarrow{r}'_1 \overrightarrow{\overline{r}}'_1$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{1}{d_1} &= \frac{\overrightarrow{r}'_1 \overrightarrow{\overline{r}}'_1}{\overrightarrow{r}'^2_1} \\ &= \frac{p.\overline{p}}{p^2} \\ &= \frac{\overline{p}}{p} \end{aligned}$$

elde edilir. $\overrightarrow{R}_2(t)$ yüzeyinin drali için

$$\frac{1}{d_2} = \frac{\overrightarrow{r}'_2 \overrightarrow{\overline{r}}'_2}{\overrightarrow{r}'^2_2}$$

olduğunu biliyoruz. Burada $\overrightarrow{r}'_2$ ve $\overrightarrow{\overline{r}}'_2$ yerlerine eşitlerini yazarsak

$$\begin{aligned} \frac{1}{d_2} &= \frac{(-p\overrightarrow{r}_1 + q\overrightarrow{r}_3)\left(-\overline{p}\overrightarrow{r}_1 + \overline{q}\overrightarrow{r}_3 - p\overrightarrow{\overline{r}}_1 + q\overrightarrow{\overline{r}}_3\right)}{(-p\overrightarrow{r}_1 + q\overrightarrow{r}_3)(-p\overrightarrow{r}_1 + q\overrightarrow{r}_3)} \\ &= \frac{p\overline{p}\overrightarrow{r}^2_1 - p\overline{q}\overrightarrow{r}_1\overrightarrow{r}_3 + p^2\overrightarrow{r}_1\overrightarrow{\overline{r}}_1 - pq\overrightarrow{r}_3\overrightarrow{\overline{r}}_3 - q\overline{p}\overrightarrow{r}_1\overrightarrow{r}_3 + q\overline{q}\overrightarrow{r}^2_3 - qp\overrightarrow{\overline{r}}_1\overrightarrow{r}_3 + q^2\overrightarrow{r}_3\overrightarrow{\overline{r}}_3}{p^2\overrightarrow{r}^2_1 - pq\overrightarrow{r}_1\overrightarrow{r}_3 - pq\overrightarrow{r}_1\overrightarrow{r}_3 + q^2\overrightarrow{r}^2_3} \\ &= \frac{p\overline{p}1 - p\overline{q}0 + p^2 0 - pq0 - q\overline{p}0 + q\overline{q}1 - qp0 + q^2 0}{p^2 1 - pq0 - pq0 + q^2 1} \end{aligned}$$

dir. Buna göre

$$\frac{1}{d_2} = \frac{p\overline{p} + q\overline{q}}{p^2 + q^2}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\overrightarrow{R}_3(t)$ yüzeyinin drali için,

$$\frac{1}{d_3} = \frac{\overrightarrow{r}'_3 \overrightarrow{\overline{r}}'_3}{\overrightarrow{r}^2_3}$$

yazabiliriz. Burada $\overrightarrow{r}'_3$ ve $\overrightarrow{\overline{r}}'_3$ eşitliklerini yerlerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{d_3} &= \frac{(-q\overrightarrow{r}_2)\left(-\overline{q}\,\overrightarrow{r}_2 - q\overrightarrow{\overline{r}}_2\right)}{(-q\overrightarrow{r}_2)^2} \\
&= \frac{q\overline{q}\,\overrightarrow{r}_2^2 + q^2\overrightarrow{r}_2\overrightarrow{\overline{r}}_2}{q^2\overrightarrow{r}_2^2}
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{r}_2^2 = 1$ ve $\overrightarrow{r}_2\overrightarrow{\overline{r}}_2 = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{d_3} &= \frac{q\overline{q}1 + q^2 0}{q^2 1} \\
&= \frac{q\overline{q}}{q^2}
\end{aligned}$$

veya

$$\frac{1}{d_3} = \frac{\overline{q}}{q}$$

olur.

Bölüm 3

PARALEL REGLE YÜZEYLER

$\overrightarrow{R_1} = \overrightarrow{R_1}(s)$ bir regle yüzey ve

$$\Theta = \theta + \varepsilon\overline{\theta} = sbt$$

bir dual açı olsun. O zaman $[R_1^*]$ regle yüzeyi,

$$\overline{R_1^*}(s) = \overrightarrow{R_1}\cos\Theta + \overrightarrow{R_3}\sin\Theta$$

biçiminde bir birim vektörüyle ifade edersek, $[R_1^*]$ regle yüzeyine $[R_1]$ regle yüzeyinin paralel regle yüzeyi denildiğini biliyoruz.

$[R_1^*]$ regle yüzeyini ve Blaschke üçyüzlüsünü gözönünde bulundurarak, $\overrightarrow{R_1} = \overrightarrow{R_1}(s)$ regle yüzeyi ve $\Theta = \theta + \varepsilon\overline{\theta} = sbt$ bir dual açısı tanımlayalım.

$\overrightarrow{R_1^*}$, dual birim vektörü olmak üzere, bunun yardımıyla ifade edilecek paralel regle yüzeyi,

$$\overrightarrow{R_1^*} = \overrightarrow{R_1}\cos\Theta + \overrightarrow{R_3}\sin\Theta \tag{3.1}$$

ile gösterebiliriz.

$\left[\overrightarrow{R_1^*}\right]$, regle yüzeyini gözönüne alarak, $\overrightarrow{R_1^*}$ yardımıyla Blaschke üçyüzlüsünü oluşturalım. Buna göre

$$\overrightarrow{R_2^*}=\frac{\overrightarrow{R_1^{*\prime}}}{\sqrt{\overrightarrow{R_1^{*\prime 2}}}}=\overrightarrow{R_2}\quad \text{ve}\quad \overrightarrow{R_3^*}=\overrightarrow{R_1^*}\wedge\overrightarrow{R_2^*} \tag{3.2}$$

dır. Buna göre

$$\overrightarrow{R_1^*}=\overrightarrow{R_1}\cos\Theta+\overrightarrow{R_3}\sin\Theta \tag{3.3}$$

eşitliğinin türevini alırsak,

$$\overrightarrow{R_1^*}'=\overrightarrow{R_1}'\cos\Theta+\overrightarrow{R_3}'\sin\Theta$$

dir. (2.16) dan $\overrightarrow{R_1}'$ ve $\overrightarrow{R_3}'$ eşitlerini yerlerine yazarsak,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{R_1^*}' &= P\overrightarrow{R_2}\cos\Theta+\left(-Q\overrightarrow{R_2}\right)\sin\Theta\\ &= \overrightarrow{R_2}\left(P\cos\Theta-Q\sin\Theta\right)\end{aligned}$$

bulunur. Bu ifade kendisi ile iç çarpılır ve karekökü alınırsa

$$\begin{aligned}\sqrt{\overrightarrow{R_1^{*\prime 2}}} &= \sqrt{\overrightarrow{R_2}^2\left(P\cos\Theta-Q\sin\Theta\right)^2}\\ &= \sqrt{1.\left(P\cos\Theta-Q\sin\Theta\right)^2}\\ &= \left(P\cos\Theta-Q\sin\Theta\right)\end{aligned}$$

olur. Buna göre, (3.2) de bulunan eşitlikler yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{R_2^*} &= \frac{\overrightarrow{R_1^{*\prime}}}{\sqrt{\overrightarrow{R_1^{*\prime 2}}}}\\ &= \frac{R_2\left(P\cos\Theta-Q\sin\Theta\right)}{\left(P\cos\Theta-Q\sin\Theta\right)}\\ &= \overrightarrow{R_2}\end{aligned}$$

elde edilir. $\overrightarrow{R_3^*} = \overrightarrow{R_1^*} \wedge \overrightarrow{R_2^*}$ eşitliğinde $\overrightarrow{R_1^*}$ yerine (3.1) deki eşitini ve $\overrightarrow{R_2^*}$ yerine (3.2) deki eşitini yazalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}\overrightarrow{R_3^*} &= \left(\overrightarrow{R_1}\cos\Theta + \overrightarrow{R_3}\sin\Theta\right) \wedge \overrightarrow{R_2} \\ &= \cos\Theta\left(\overrightarrow{R_1} \wedge \overrightarrow{R_2}\right) + \sin\Theta\left(\overrightarrow{R_3} \wedge \overrightarrow{R_2}\right)\end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki vektörel çarpım işlemlerinden,

$$\overrightarrow{R_3^*} = \overrightarrow{R_3}\cos\Theta - \overrightarrow{R_1}\sin\Theta$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{R_1^*} &= \overrightarrow{R_1}\cos\Theta + \overrightarrow{R_3}\sin\Theta \\ \overrightarrow{R_2^*} &= \overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{R_3^*} &= \overrightarrow{R_3}\cos\Theta - \overrightarrow{R_1}\sin\Theta\end{aligned} \tag{3.4}$$

denklemlerini yazarız. Ayrıca açıklamalardan yola çıkarak (2.2) ve (2.15) bağıntılarını gözönüne alırsak,

$$P^* = \sqrt{\overrightarrow{R_1^{*'2}}} \tag{3.5}$$

ve

$$Q^* = \frac{\det\left(\overrightarrow{R_1^*}, \overrightarrow{R_1^{*'}}, \overrightarrow{R_1^{*''}}\right)}{\overrightarrow{R_1^{*'2}}}$$

oluşur.

(3.4) den $\overrightarrow{R_1^*}$ ın eşitini yazıp, türevini alırsak

$$\overrightarrow{R_1^*} = \overrightarrow{R_1}\cos\Theta + \overrightarrow{R_3}\sin\Theta$$

olduğundan

$$\overrightarrow{R_1^{*'}} = \overrightarrow{R_1^{'}}\cos\Theta + \overrightarrow{R_3^{'}}\sin\Theta$$

olur. (2.16) dan $\overrightarrow{R_1^{'}}$ ve $\overrightarrow{R_3^{'}}$ eşiti yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R_1^{*'}} &= \left(P\overrightarrow{R_2}\right)\cos\Theta + \left(-Q\overrightarrow{R_2}\right)\sin\Theta \\ &= P\overrightarrow{R_2}\cos\Theta - Q\overrightarrow{R_2}\sin\Theta \\ &= \overrightarrow{R_2}\left(P\cos\Theta - Q\sin\Theta\right) \end{aligned} \tag{3.6}$$

bulunur. Buradan $\overrightarrow{R_1^{*'}}^2$ ni hesaplarsak,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R_1^{*'}}^2 = \left\langle \overrightarrow{R_1^{*'}}, \overrightarrow{R_1^{*'}} \right\rangle &= \left\langle \left(P\cos\Theta - Q\sin\Theta\right)\overrightarrow{R_2}, \left(P\cos\Theta - Q\sin\Theta\right)\overrightarrow{R_2} \right\rangle \\ &= \left(P\cos\Theta - Q\sin\Theta\right)^2 \left\langle \overrightarrow{R_2}, \overrightarrow{R_2} \right\rangle \\ &= \left(P\cos\Theta - Q\sin\Theta\right)^2 .1 \\ &= \left(P\cos\Theta - Q\sin\Theta\right)^2 \end{aligned} \tag{3.7}$$

dir. (3.5) te $\overrightarrow{R_1^{*'}}^2$ yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} P^* &= \sqrt{\left(P\cos\Theta - Q\sin\Theta\right)^2} \\ &= \left(P\cos\Theta - Q\sin\Theta\right) \end{aligned} \tag{3.8}$$

elde edilir. (3.6) dan $\overrightarrow{R_1^{*'}}$ türevini alalım.

$$\overrightarrow{R_1^{*''}} = \left(R_1^{*'}\right)^{'} = \left[\left(P\cos\Theta - Q\sin\Theta\right)\overrightarrow{R_2}\right]^{'} = \left(P\cos\Theta - Q\sin\Theta\right)\overrightarrow{R_2^{'}}$$

olur. Burada (2.16) dan $\overrightarrow{R_2^{'}}$ yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{R_1^{*''}} = \left(P\cos\Theta - Q\sin\Theta\right)\left(-P\overrightarrow{R_1} + Q\overrightarrow{R_3}\right) \tag{3.9}$$

bulunur. (3.5) ifadesindeki Q^* ın denkleminde, $\overrightarrow{R}_1^*$, $\overrightarrow{R}_1^{*'}$ ve $\overrightarrow{R}_1^{*''}$ yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
Q^* &= \frac{\det\left(\overrightarrow{R_1^*}, \overrightarrow{R_1^{*'}}, \overrightarrow{R_1^{*''}}\right)}{\overrightarrow{R}_1^{*'2}} \\
&= \frac{\det\left[\left(\overrightarrow{R_1}\cos\Theta+\overrightarrow{R_3}\sin\Theta\right),\ (P\cos\Theta-Q\sin\Theta)\overrightarrow{R_2},\ (P\cos\Theta-Q\sin\Theta)\left(-P\overrightarrow{R_1}+Q\overrightarrow{R_3}\right)\right]}{(P\cos\Theta-Q\sin\Theta)^2} \\
&= \frac{(P\cos\Theta-Q\sin\Theta)^2\det\left[\left(\overrightarrow{R_1}\cos\Theta+\overrightarrow{R_3}\sin\Theta\right), R_2, \left(-P\overrightarrow{R_1}+Q\overrightarrow{R_3}\right)\right]}{(P\cos\Theta-Q\sin\Theta)^2}
\end{aligned}
$$

dır, gerekli sadeleşmeler yapılırsa,

$$
\begin{aligned}
Q^* &= \det\left[\left(\overrightarrow{R_1}\cos\Theta+\overrightarrow{R_3}\sin\Theta\right), \overrightarrow{R_2}, \left(-P\overrightarrow{R_1}+Q\overrightarrow{R_3}\right)\right] \\
&= \left\langle\left(\overrightarrow{R_1}\cos\Theta+\overrightarrow{R_3}\sin\Theta\right)\wedge\overrightarrow{R_2}, \left(-P\overrightarrow{R_1}+Q\overrightarrow{R_3}\right)\right\rangle \\
&= \left\langle\cos\Theta\overrightarrow{R_3}+\sin\Theta\left(-\overrightarrow{R_1}\right), \left(-P\overrightarrow{R_1}+Q\overrightarrow{R_3}\right)\right\rangle \\
&= Q\cos\Theta\left\langle\overrightarrow{R_3}, \overrightarrow{R_1},\right\rangle + P\sin\Theta\left\langle\overrightarrow{R_1}, \overrightarrow{R_1},\right\rangle \\
&= Q\cos\Theta + P\sin\Theta
\end{aligned}
$$

elde edilir. O halde

$$
\begin{aligned}
P^* &= P\cos\Theta - Q\sin\Theta \\
Q^* &= P\sin\Theta + Q\cos\Theta
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

bağıntıları bulunur.

P ve Q bağıntıları invaryant olduklarından

$$\Theta = \theta + \varepsilon\overline{\theta} = sbt$$

dual açı olmak üzere $\left[\overrightarrow{R}_1^*\right]$ regle yüzeyinin P^* ve Q^* büyüklükleri de aynı zamanda invaryanttır. Böylece s parametresi de $[R_1]$ regle yüzeyinin invaryant parametresidir. (3.10) daki büyüklüklerin reel ve dual kısımlarını

Taylor açılımı yardımıyla bulalım.

$$P^* = p^* + \varepsilon\overline{p^*}, \quad Q^* = q^* + \varepsilon\overline{q^*}, \quad P = p + \varepsilon\overline{p}, \quad Q = q + \varepsilon\overline{q}, \tag{3.11}$$

dır. (3.10) daki eşitlikler ve Taylor açılımı yardımıyla,

$$\begin{aligned} p^* + \varepsilon\overline{p^*} &= (p + \varepsilon\overline{p})\left[\cos\theta - \varepsilon\overline{\theta}\sin\theta\right] - (q + \varepsilon\overline{q})\left[\sin + \varepsilon\overline{\theta}\cos\theta\right] \\ &= p\cos\theta - \varepsilon\overline{\theta}p\sin\theta + \varepsilon\overline{p}\cos\theta - q\sin\theta - \varepsilon\overline{\theta}q\cos\theta - \varepsilon\overline{q}\sin\theta \\ &= p\cos\theta - q\sin\theta + \varepsilon\left(\overline{p}\cos\theta - \overline{q}\sin\theta - \overline{\theta}p\sin\theta - \overline{\theta}q\cos\theta\right) \end{aligned}$$

dır. Reel ve dual kısımların eşitliğinden,

$$\begin{aligned} p^* &= p\cos\theta - q\sin\theta \\ \overline{p}^* &= \overline{p}\cos\theta - \overline{q}\sin\theta - \overline{\theta(}p\sin\theta + q\cos\theta) \end{aligned} \tag{3.12}$$

elde edilir. (3.10) dan

$$Q^* = p\sin\Theta + q\cos\Theta$$

dir. Benzer şekilde Q^* ı reel ve dual kısımlarına ayırıp, Taylor açılımı yardımıyla yazalım.

$$\begin{aligned} q^* + \varepsilon\overline{q^*} &= (p + \varepsilon\overline{p}) . \left[\sin\theta + \varepsilon\overline{\theta}\cos\theta\right] - (q + \varepsilon\overline{q})\left[\cos\theta - \varepsilon\overline{\theta}\sin\theta\right] \\ &= p\cos\theta - \varepsilon\overline{\theta}p\sin\theta + \varepsilon\overline{p}\cos\theta - q\sin\theta - \varepsilon\overline{\theta}q\cos\theta - \varepsilon\overline{q}\sin\Theta\theta \\ &= p\sin\theta - q\cos\theta + \varepsilon\left(\overline{p}\sin\theta + \overline{q}\cos\theta + \overline{\theta}p\cos\theta - \overline{\theta}q\sin\theta\right) \end{aligned}$$

reel ve dual kısımların eşitliğinden,

$$\begin{aligned} q^* &= p\sin\theta + q\cos\theta \\ \overline{q}^* &= \overline{p}\sin\theta + \overline{q}\cos\theta + \overline{\theta}\,(p\cos\theta - q\sin\theta) \end{aligned} \tag{3.13}$$

şeklinde buluruz. Eğer $\theta = 0$ seçilir ve Taylor açılımı yardımıyla $\sin\Theta$ ve $\cos\Theta$ açılırsa

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{R_1^*} &= \cos\Theta\overrightarrow{R_1} + \sin\Theta\overrightarrow{R_3} \\
&= \overrightarrow{R_1}\left[\cos\theta - \varepsilon\overline{\theta}\sin\theta\right] + \overrightarrow{R_3}\left[\sin\theta + \varepsilon\overline{\theta}\cos\theta\right] \\
&= \overrightarrow{R_1}\left[\cos 0 - \varepsilon\overline{\theta}\sin 0\right] + \overrightarrow{R_3}\left[\sin 0 + \varepsilon\overline{\theta}\cos 0\right] \\
&= \overrightarrow{R_1}.1 + \overrightarrow{R_3}\varepsilon\overline{\theta}.1
\end{aligned}$$

veya

$$\overrightarrow{R_1^*} = \overrightarrow{R_1} + \varepsilon\overline{\theta}\overrightarrow{R_3}$$

bulunur. $\overline{\theta} = 0$ olarak aldığımızda $\overrightarrow{R_1^*} = \overrightarrow{R_1}$ olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{R_1^*} &= \cos\Theta\overrightarrow{R_1} + \sin\Theta\overrightarrow{R_3} \\
&= \overrightarrow{R_1}\left[\cos\theta - \varepsilon\overline{\theta}\sin\theta\right] + \overrightarrow{R_3}\left[\sin\theta + \varepsilon\overline{\theta}\cos\theta\right] \\
&= \overrightarrow{R_1}\left[\cos\theta - \varepsilon 0\sin\theta\right] + \overrightarrow{R_3}\left[\sin\theta + \varepsilon 0\cos\theta\right] \\
&= \overrightarrow{R_1}\cos\theta + \overrightarrow{R_3}\sin\theta
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $\theta = 0$ seçilirse (3.12) ve (3.13) deki bağıntılardan faydalanarak

$$\begin{aligned}
p^* &= p\cos\theta - q\sin\theta \\
&= p\cos 0 - q\sin 0 \\
&= p1 - q0 \\
&= p
\end{aligned}$$

yani

$$p^* = p \tag{3.14}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
\overline{p}^{*} &= \overline{p}\cos\theta - \overline{q}\sin\theta - \overline{\theta}\,(p\sin\theta - q\cos\theta) \\
&= \overline{p}\cos 0 - \overline{q}\sin 0 - \overline{\theta}\,(p\sin 0 - q\cos 0) \\
&= \overline{p}.1 - \overline{q}.0 - \overline{\theta}\,(p.0 - q.1) \\
&= \overline{p} - \overline{\theta}q
\end{aligned}$$

veya

$$\overline{p}^{*} = \overline{p} - \overline{\theta}q \tag{3.15}$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
q^{*} &= p\sin\theta + q\cos\theta + \overline{\theta}\,(p\cos\theta - q\sin\theta) \\
&= p\sin 0 + q\cos 0 + \overline{\theta}\,(p\cos 0 - q\sin 0) \\
&= p.0 + q.1 + \overline{\theta}\,(p.1 - q.0) \\
&= q
\end{aligned}$$

ya da

$$q^{*} = q \tag{3.16}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
\overline{q}^{*} &= \overline{p}\sin\theta + \overline{q}\cos\theta + \overline{\theta}\,(p\cos\theta - q\sin\theta) \\
&= \overline{p}\sin 0 + \overline{q}\cos 0 + \overline{\theta}\,(p\cos 0 - q\sin 0) \\
&= \overline{p}.0 + \overline{q}.1 + \overline{\theta}\,(p.1 - q.0) \\
&= \overline{q} + \overline{\theta}p
\end{aligned}$$

veya

$$\overline{q}^{*} = \overline{q} + \overline{\theta}p \tag{3.17}$$

elde edilir. Aynı işlemler bir de $\overline{\theta} = 0$ seçilerek tekrarlanırsa,

$$\begin{aligned} p^* &= p\cos\theta - q\sin\theta \\ q^* &= p\sin\theta + q\cos\theta \\ \overline{p}^* &= \overline{p}\cos\theta - \overline{q}\sin\theta \\ \overline{q}^* &= \overline{p}\sin\theta + \overline{q}\cos\theta \end{aligned} \tag{3.18}$$

olarak bulunur. $[R_1]$ regle yüzeyinin (x) boğaz çizgisi bir helis biçimindedir. Yani $\frac{q}{p} = sbt$ olduğu doğrulanmıştır. $[R_1]$ regle yüzeyi helistir.

Helislerde eğrilik ile burulma arasındaki oran sabittir. Buna göre, $\frac{1}{\rho} = \frac{p}{\overline{q}}$ ve $\frac{1}{\tau} = \frac{q}{\overline{q}}$ olmak üzere

$$\frac{\frac{1}{\rho}}{\frac{1}{\tau}} = \frac{\frac{p}{\overline{q}}}{\frac{q}{\overline{q}}} = \frac{p}{q}$$

sabit oranı elde edilir. Buna göre $\left[\overrightarrow{R_1}\right]$ regle yüzeyinin (x) boğaz çizgisinin bir helis biçiminde olduğu doğrulanmış olur.

Şimdi paralel regle yüzeyin dik konoid ve silindir olma şartlarını inceleyelim.

Dik konoid olabilmesi için sabit doğru ile sabit düzlem birbirine dik olmak zorundadır. Öyleyse birbirine dik iki doğrunun eğimleri çarpımı -1 olacağından,

$$\tan\Theta . \tan\phi = -1$$

olur. Taylor açılımı yardımıyla eşitliği düzenlersek,

$$\begin{aligned} \left(\tan\theta - \varepsilon\overline{\theta}\frac{1}{\cos^2\theta}\right)\left(\tan\varphi - \varepsilon\overline{\varphi}\frac{1}{\cos^2\varphi}\right) &= -1 \\ \tan\theta\tan\varphi - \varepsilon\left(\overline{\theta}\frac{1}{\cos^2\theta}\tan\varphi + \overline{\varphi}\frac{1}{\cos^2\varphi}\tan\theta\right) &= -1 \end{aligned}$$

olur. Dual sayıların ve reel kısımlarının eşitliğinden, $\tan\theta.\tan\varphi = -1$, veya $\tan\theta = -\dfrac{1}{\tan\varphi}$ olur. (2.35) den $\tan\varphi = \dfrac{p}{q}$ dir. Buna göre $\tan\theta = \dfrac{-1}{\frac{p}{q}} = -\dfrac{q}{p}$ öyleyse $\tan(-\theta) = \dfrac{q}{p}$ ve buradan da $-\theta = \arctan\dfrac{q}{p}$ bulunur. Böylece

$$\theta = -\arctan\frac{q}{p} \tag{3.19}$$

dir. Dual kısımların eşitliğinden

$$\overline{\theta}\frac{1}{\cos^2\theta}\tan\varphi + \overline{\varphi}\frac{1}{\cos^2\varphi}\tan\theta = 0$$

$$\frac{\overline{\theta}}{\overline{\varphi}} = -\frac{\tan\theta}{\cos^2\varphi}.\frac{\cos^2\theta}{\tan\varphi}$$

dir.

$$\tan\theta = -\frac{q}{p}$$

ve

$$\tan\varphi = \frac{q}{p}$$

olduğundan $\cos\theta = p$ ve $\cos\varphi = q$ elde edilir. Buna göre,

$$\frac{\overline{\theta}}{\overline{\varphi}} = -\frac{\frac{-q}{p}}{q^2}.\frac{p^2}{\frac{p}{q}} = \frac{qp^2q}{p^2q^2} = 1$$

veya

$$\frac{\overline{\theta}}{\overline{\varphi}} = 1$$

ise

$$\overline{\theta} = \overline{\varphi} = sbt \tag{3.20}$$

elde edilir. $\theta = -\arctan\dfrac{q}{p}$, $\overline{\theta} = \overline{\varphi} = sbt$ olduğunda paralel regle yüzeyi dik konoid olur.

Paralel regle yüzeyinde $p^* = 0$ olması silindiri karakterize eder. (3.18) den,

$$p^* = p\cos\theta - q\sin\theta$$

dır. O halde,

$$\begin{aligned} p^* &= p\cos\theta - q\sin\theta = 0 \\ p\cos\theta &= q\sin\theta \\ \frac{\sin\theta}{\cos\theta} &= \frac{p}{q} \\ \tan\theta &= \frac{p}{q} \end{aligned}$$

olur. Burada θ yalnız bırakılırsa

$$\theta = \arctan\frac{p}{q} \tag{3.21}$$

olacaktır. Öyleyse $\theta = \arctan\dfrac{p}{q}$ olduğunda paralel regle yüzey silindirdir.

3.1 Paralel Regle Yüzeyin Ani Dönme Eksenleri ve Blaschke Üçyüzlüleri ile İlişkisi

Ani dönme eksenini (2.31), (2.33), (3.5) ve (3.10) daki bağıntıları dikkate alarak inceleyecek olursak,

$$E_1 = \frac{\overrightarrow{R_2}\Lambda\overrightarrow{R_2'}}{\left\|\overrightarrow{R_2}\Lambda\overrightarrow{R_2'}\right\|}$$

ve (3.2) den $\overrightarrow{R_2}^* = \overrightarrow{R_2}$ olduğunu biliyoruz. O halde,

$$\overrightarrow{E_1} = \frac{\overrightarrow{R_2}\Lambda\overrightarrow{R_2^{'}}}{\left\|\overrightarrow{R_2}\Lambda\overrightarrow{R_2^{'}}\right\|} = \frac{\overrightarrow{R_2}^*\Lambda\overrightarrow{R_2^{'}}^*}{\left\|\overrightarrow{R_2}^*\Lambda\overrightarrow{R_2^{'}}^*\right\|} = \overrightarrow{E_1}^* \tag{3.22}$$

yazabiliriz. Yani,

$$\overrightarrow{E_1}^* = \frac{\overrightarrow{R_2}^*\Lambda\overrightarrow{R_2^{'}}^*}{\left\|\overrightarrow{R_2}^*\Lambda\overrightarrow{R_2^{'}}^*\right\|} \tag{3.23}$$

olur.

$$\overrightarrow{R_2^{'}}^* = -P^*\overrightarrow{R_1}^* + Q^*\overrightarrow{R_3}^*$$

ve (2.28) ve (2.30) denklemlerinden dolayı

$$\left\|\overrightarrow{R_2}^*\Lambda\overrightarrow{R_2^{'}}^*\right\| = \sqrt{P^{*2} + Q^{*2}}$$

olacağı için bu eşitlikleri (3.23) te yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{E_1}^* &= \frac{\overrightarrow{R_2}^*\Lambda\left(-P^*\overrightarrow{R_1}^* + Q^*\overrightarrow{R_3}^*\right)}{\sqrt{P^{*2}+Q^{*2}}} \\
&= \frac{\overrightarrow{R_2}^*\Lambda\left(-P^*\overrightarrow{R_1}^*\right) + \overrightarrow{R_2}^*\left(Q^*\overrightarrow{R_3}^*\right)}{\sqrt{P^{*2}+Q^{*2}}} \\
&= \frac{-P^*\left(\overrightarrow{R_2}^*\Lambda\overrightarrow{R_1}^*\right) + Q^*\left(\overrightarrow{R_2}^*\Lambda\overrightarrow{R_3}^*\right)}{\sqrt{P^{*2}+Q^{*2}}}
\end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki eşitlikte vektörel çarpımlar yapılırsa,

$$\overrightarrow{E_1}^* = \frac{Q^*\left(\overrightarrow{R_1}^*\right) + P^*\left(\overrightarrow{R_3}^*\right)}{\sqrt{P^{*2}+Q^{*2}}} \tag{3.24}$$

bulunur. (3.24) ün pay ve paydasını P^* a bölersek ,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{E_1}^* &= \frac{\left(Q^*\left(\overrightarrow{R_1}^*\right)+P^*\left(\overrightarrow{R_3}^*\right)\right):P^*}{\left(\sqrt{P^{*2}+Q^{*2}}\right):P^*}\\ &= \frac{\left(\frac{Q^*}{P^*}\left(\overrightarrow{R_1}^*\right)+\frac{P^*}{P^*}\left(\overrightarrow{R_3}^*\right)\right)}{\left(\sqrt{\frac{P^{*2}}{P^{*2}}+\frac{Q^{*2}}{P^{*2}}}\right)}\\ &= \frac{\left(\frac{Q^*}{P^*}\left(\overrightarrow{R_1}^*\right)+\left(\overrightarrow{R_3}^*\right)\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{Q^{*2}}{P^{*2}}}\right)}\end{aligned}$$

dir. (2.32) ten $\sum = \dfrac{Q}{P}$ ise $\sum^* = \dfrac{Q^*}{P^*}$ olur. O halde

$$\overrightarrow{E_1}^* = \frac{\sum^* \overrightarrow{R_1}^* + \overrightarrow{R_3}^*}{\sqrt{1+\sum^{*2}}} \tag{3.25}$$

olur. (3.24) ve (3.25) den

$$\begin{aligned}\overrightarrow{E_1}^* &= \frac{Q^*\overrightarrow{R_1}^* + P^*\overrightarrow{R_3}^*}{\sqrt{P^{*2}+Q^{*2}}}\\ &= \frac{\sum^* \overrightarrow{R_1}^* + \overrightarrow{R_3}^*}{\sqrt{1+\sum^{*2}}}\end{aligned} \tag{3.26}$$

yazılabilir.

Benzer bir yolla $\overrightarrow{E_1}^* = \overrightarrow{E_1}$ olduğu gösterilebilir. (3.26) dan

$$\overrightarrow{E_1}^* = \frac{Q^*\overrightarrow{R_1}^* + P^*\overrightarrow{R_3}^*}{\sqrt{P^{*2}+Q^{*2}}}$$

dır. (3.12) den P^* ve Q^* ın eşitliklerini ayrıca (3.4) den de $\overrightarrow{R_1}^*$ ile $\overrightarrow{R_3}^*$ eşitliklerini E_1^* denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{E_1}^{*} &= \tfrac{[P\sin\phi+Q\cos\phi][R_1\cos\phi+R_3\sin\phi]+[P\cos\phi-Q\sin\phi][-R_1\sin\phi+R_3\cos\phi]}{\sqrt{P^2\sin^2\phi+Q^2\cos^2\phi+P^2\cos^2\phi+Q^2\sin^2\phi}} \\
&= \frac{\left[P\sin\phi\cos\phi+Q\cos^2\phi-P\sin\phi\cos\phi+Q\sin^2\phi\right]R_1}{\sqrt{P^2\left(\sin^2\phi+\cos^2\phi\right)+Q^2\left(\cos^2\phi+\sin^2\phi\right)}} \\
&\quad+\frac{\left[P\sin^2\phi+Q\sin\phi\cos\phi+P\cos^2\phi-Q\sin\phi\cos\phi\right]R_3}{\sqrt{P^2\left(\sin^2\phi+\cos^2\phi\right)+Q^2\left(\cos^2\phi+\sin^2\phi\right)}} \\
&= \frac{Q\left(\sin^2\phi+\cos^2\phi\right)R_1+P\left(\sin^2\phi+\cos^2\phi\right)R_3}{\sqrt{P+Q^2}} \\
&= \frac{QR_1+PR_3}{\sqrt{P+Q^2}} \\
&= \overrightarrow{E_1}
\end{aligned}$$

olur. Bu son eşitligin pay ve paydasını P ye böler, (2.32) ten $\sum = \dfrac{Q}{P}$ olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{E_1}^{*} &= \frac{Q\overrightarrow{R}_1+P\overrightarrow{R}_3}{\sqrt{P^2+Q^2}} \\
&= \frac{\frac{Q}{P}\overrightarrow{R_1}+\overrightarrow{R_3}}{\sqrt{\left(\frac{P}{Q}\right)^2+1}} \\
&= \frac{\sum\overrightarrow{R_1}+\overrightarrow{R_3}}{\sqrt{1+\sum^2}} = \overrightarrow{E_1}
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}\overrightarrow{E_1}^* &= \frac{Q\overrightarrow{R}_1 + P\overrightarrow{R}_3}{\sqrt{P^2+Q^2}} \\ &= \frac{\sum \overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{R_3}}{\sqrt{1+\sum^2}} \\ &= \overrightarrow{E_1}\end{aligned} \tag{3.27}$$

formülüne sahip oluruz.

$[R_1]$ regle yüzeylerinin paralel regle yüzeyleri, ani dönme eksenleri ve Blaschke nin üçyüzlülerindeki gibi dual birim vektörü tarafından tanımlanan regle yüzeyleridir. O halde son bağıntı

$$\Theta = \theta + \varepsilon\overline{\theta} = sbt$$

dual açısına bağlı değildir.

Eğrinin $\left(\overrightarrow{R}_1, \overrightarrow{R}_2, \overrightarrow{R}_3\right)$ Blaschke üçyüzlüsünün her s anında bir eksen etrafında, ani bir helis hareketi yaptığı kabul edilir. Bu eksene eğrinin s parametresine karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki **Darboux ekseni** denir. Darboux vektörü yönündeki birim vektör E_1 olmak üzere (3.27) den $\overrightarrow{E_1}^* = \overrightarrow{E_1}$ olduğunu biliyoruz.

$$\Theta = \theta + \varepsilon\overline{\theta} = sbt$$

regle yüzeyinin dual açısı ve $\phi = \varphi + \varepsilon\overline{\varphi}$ açısı da dual dönme ekseninin açısı olmak üzere,

$$\left\langle \overrightarrow{R_1}^*, \overrightarrow{E_1}^* \right\rangle = \left\|\overrightarrow{R_1}^*\right\| \left\|\overrightarrow{E_1}^*\right\| \cos\phi^*$$

dir ve $\overrightarrow{R_1^*}$ ve $\overrightarrow{E_1^*}$ birim vektör olduğu için

$$\begin{aligned}\left\langle \overrightarrow{R_1}^*, \overrightarrow{E_1}^* \right\rangle &= 1.1.\cos\phi^* \\ &= \cos\phi^*\end{aligned}$$

olur. (3.23) den $\overrightarrow{E_1^*}$ in eşiti yazılırsa,

$$\begin{aligned}\left\langle \overrightarrow{R_1}^*, \overrightarrow{E_1}^* \right\rangle &= \langle \overrightarrow{R_1}^*, \frac{\left(\overrightarrow{R_2}^* \wedge \overrightarrow{R_2}^{*'}\right)}{\left\|\overrightarrow{R_2}^* \wedge \overrightarrow{R_2}^{*'}\right\|}\rangle \\ &= \frac{\det\left(\overrightarrow{R_1}^*, \overrightarrow{R_2}^*, \overrightarrow{R_2}^{*'}\right)}{\sqrt{P^{*2}+Q^{*2}}} \\ &= \frac{\left\langle \overrightarrow{R_1}^* \wedge \overrightarrow{R_2}^*, \overrightarrow{R_2}^{*'} \right\rangle}{\sqrt{P^{*2}+Q^{*2}}} \\ &= \frac{\left\langle \overrightarrow{R_3}^*, \overrightarrow{R_2}^{*'} \right\rangle}{\sqrt{P^{*2}+Q^{*2}}}\end{aligned}$$

bulunur. (3.4) ten $\overrightarrow{R_3}^*$ ve $\overrightarrow{R_2}^{*'}$nin eşitleri son denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\left\langle \overrightarrow{R_1}^*, \overrightarrow{E_1}^* \right\rangle &= \frac{\left\langle -\sin\Theta\overrightarrow{R_1} + \cos\Theta\overrightarrow{R_3}, -P\overrightarrow{R_1} + Q\overrightarrow{R_3} \right\rangle}{\sqrt{P^{*2}+Q^{*2}}} \\ &= \frac{P\sin\Theta\left\langle \overrightarrow{R_1}, \overrightarrow{R_1} \right\rangle + Q\cos\Theta\left\langle \overrightarrow{R_3}, \overrightarrow{R_3} \right\rangle}{\sqrt{P^{*2}+Q^{*2}}} \\ &= \frac{P\sin\Theta.1 + Q\cos\Theta.1}{\sqrt{P^{*2}+Q^{*2}}} \\ &= \frac{P\sin\Theta + Q\cos\Theta}{\sqrt{P^{*2}+Q^{*2}}}\end{aligned}$$

olur. (3.10) dan $P\sin\Theta + Q\cos\Theta = Q^*$ dır. O halde

$$\overrightarrow{R_1}^*.\overrightarrow{E_1}^* = \frac{Q^*}{\sqrt{P^{*2}+Q^{*2}}}$$

dır. Son eşitliğin pay ve paydasını P^* ile bölersek

$$\left\langle \overrightarrow{R_1}^*, \overrightarrow{E_1}^* \right\rangle = \frac{Q^* : P^*}{\sqrt{P^{*2}+Q^{*2}} : P^*}$$

veya

$$\left\langle \overrightarrow{R_1}^*, \overrightarrow{E_1}^* \right\rangle = \frac{\dfrac{Q^*}{P^*}}{\sqrt{\dfrac{P^{*2}}{P^{*2}} + \dfrac{Q^{*2}}{P^{*2}}}}$$

bulunur. $\sum^* = \dfrac{Q^*}{P^*}$ alınırsa

$$\begin{aligned}\left\langle \overrightarrow{R_1}^*, \overrightarrow{E_1}^* \right\rangle &= \frac{\sum^*}{\sqrt{1+\sum^{*2}}} \\ &= \cos\phi^*\end{aligned}$$

olur. $\left\langle \overrightarrow{R_1}^*, \overrightarrow{E_1}^* \right\rangle$ çarpımında (3.4) ve (3.27) den faydalanarak $\overrightarrow{R_1}^*$ ve $\overrightarrow{E_1}^*$ ifadesinin eşitini yazarsak,

$$\begin{aligned}\left\langle \overrightarrow{R_1}^*, \overrightarrow{E_1}^* \right\rangle &= (\overrightarrow{R_1}\cos\Theta + \overrightarrow{R_3}\sin\Theta)\left(\frac{\sum \overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{R_3}}{\sqrt{1+\sum^2}}\right) \\ &= \frac{\sum \cos\Theta \left\langle \overrightarrow{R_1}, \overrightarrow{R_1} \right\rangle + \cos\Theta \left\langle \overrightarrow{R_3}, \overrightarrow{R_3} \right\rangle}{\sqrt{1+\sum^2}} \\ &\quad + \frac{\sum \sin\Theta \left\langle \overrightarrow{R_1}, \overrightarrow{R_3} \right\rangle + \sin\Theta \left\langle \overrightarrow{R_3}, \overrightarrow{R_3} \right\rangle}{\sqrt{1+\sum^2}} \\ &= \frac{\sum \cos\Theta.1 + \cos\Theta.0 + \sum \sin\Theta..0 + \sin\Theta.1}{\sqrt{1+\sum^2}} \\ &= \frac{\sum \cos\Theta + \sin\Theta}{\sqrt{1+\sum^2}}\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$\langle \overrightarrow{R_1}^*, \overrightarrow{E_1}^* \rangle = \cos\phi^* = \frac{\sum^*}{\sqrt{1+\sum^{*2}}} = \frac{\sum \cos\Theta + \sin\Theta}{\sqrt{1+\sum^2}} \tag{3.28}$$

denklemlerini yazarız.

$\sin\phi^* = \sqrt{1-\cos^2\phi^*}$ yazabiliriz. (3.28) den faydalanırsak

$$\begin{aligned}\sin\phi^* &= \sqrt{1-\frac{\sum^{*2}}{1+\sum^{*2}}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\sum^{*2}}}\end{aligned}$$

bulunur. Yine

$$\sin^2\phi^* = 1-\cos^2\phi^*$$

eşitliğinde (3.28) den faydalanırsak,

$$\begin{aligned}\sin^2\phi^* &= 1-\left(\frac{\sum\cos\Theta+\sin\Theta}{\sqrt{1+\sum^2}}\right)^2\\ &= \frac{1+\sum^2-\sum^2\cos^2\Theta-\sin^2\Theta-2\sum\cos\Theta\sin\Theta}{1+\sum^2}\\ &= \frac{\cos^2\Theta+\sin^2\Theta+\sum^2-\sum^2\cos^2\Theta-\sin^2\Theta-2\sum\cos\Theta\sin\Theta}{1+\sum^2}\\ &= \frac{\cos^2\Theta+\sum^2\sin^2\Theta-2\sum\cos\Theta\sin\Theta}{1+\sum^2}\\ &= \frac{\left(\cos\Theta-\sum\sin\Theta\right)^2}{\left(\sqrt{1+\sum^2}\right)^2}\end{aligned}$$

olur. Buna göre,

$$\sin\phi^* = \frac{\cos\Theta-\sum\sin\Theta}{\sqrt{1+\sum^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\sum^{*2}}} \tag{3.29}$$

elde edilir. (3.28) ve (3.29) dan faydalanırsak,

$$\cot\phi^* = \frac{\cos\phi^*}{\sin\phi^*} = \frac{\dfrac{\sum^*}{\sqrt{1+\sum^{*2}}}}{\dfrac{1}{\sqrt{1+\sum^{*2}}}} = \sum^* \tag{3.30}$$

veya

$$\begin{aligned}\sum^* &= \cot\phi^* = \frac{\cos\phi^*}{\sin\phi^*} \\ &= \frac{\dfrac{\sum\cos\Theta+\sin\Theta}{\sqrt{1+\sum^2}}}{\dfrac{\cos\Theta-\sum\sin\Theta}{\sqrt{1+\sum^2}}} \\ &= \frac{\sum\cos\Theta+\sin\Theta}{\cos\Theta-\sum\sin\Theta}\end{aligned} \tag{3.31}$$

dır. (3.31) de

$$\sum = \tau + \varepsilon\overline{\tau} \tag{3.32}$$

eşitliğini, Taylor formüllerini de kullanarak yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}\sum^* &= \frac{\sum\cos\Theta+\sin\Theta}{\cos\Theta-\sum\sin\Theta} \\ &= \frac{(\tau+\varepsilon\overline{\tau})\left(\cos\theta-\varepsilon\overline{\theta}\sin\theta\right)+\left(\sin\theta+\varepsilon\overline{\theta}\cos\theta\right)}{\left(\cos\theta-\varepsilon\overline{\theta}\sin\theta\right)-(\tau+\varepsilon\overline{\tau})\left(\sin\theta+\varepsilon\overline{\theta}\cos\theta\right)} \\ &= \frac{(\tau+\varepsilon\overline{\tau})\left(\cos\theta-\varepsilon\overline{\theta}\sin\theta\right)+\left(\sin\theta+\varepsilon\overline{\theta}\cos\theta\right)}{(\cos\theta-\tau\sin\theta))-\varepsilon(\overline{\tau}\sin\theta+\overline{\theta}\sin\theta+\tau\overline{\theta}\cos\theta)}\end{aligned}$$

olur. Bu eşitliğin pay ve paydası eşleniği ile çarpılır ve $\varepsilon^2 = 0$ olduğu dikkate alınırsa

$$
\begin{aligned}
\sum{}^{*} &= \frac{\tau\cos\theta+\sin\theta+\varepsilon\left(\overline{\tau}\cos\theta-\overline{\theta}\tau\sin\theta+\overline{\theta}\cos\theta\right)}{\left(\cos\theta-\tau\sin\theta\right)^{2}} \\
&= \frac{\tau\cos^{2}\theta+\sin\theta\cos\theta-\tau^{2}\sin\theta\cos\theta-\tau\sin^{2}\theta}{\left(\cos\theta-\tau\sin\theta\right)^{2}} \\
&\quad+\frac{\varepsilon\left[\overline{\tau}\cos^{2}\theta-\overline{\theta}\tau\sin\theta\cos\theta+\overline{\theta}\cos^{2}\theta-\tau\overline{\tau}\sin\theta\cos\theta\right]}{\left(\cos\theta-\tau\sin\theta\right)^{2}} \\
&\quad+\frac{\overline{\theta}\tau^{2}\sin^{2}\theta-\overline{\theta}\tau\sin\theta\cos\theta+\overline{\theta}\tau\sin\theta\cos\theta+\overline{\theta}\sin^{2}\theta}{\left(\cos\theta-\tau\sin\theta\right)^{2}} \\
&\quad+\frac{\overline{\theta}\tau^{2}\cos^{2}\theta+\overline{\theta}\tau\sin\theta\cos\theta+\tau\overline{\tau}\sin\theta\cos\theta+\overline{\tau}\sin^{2}\theta}{\left(\cos\theta-\tau\sin\theta\right)^{2}} \\
&= \frac{\tau\cos\theta.\left(\cos\theta+\tau\sin\theta\right)+\sin\theta\left(\cos\theta-\tau\sin\theta\right)}{\left(\cos\theta-\tau\sin\theta\right)^{2}} \\
&\quad+\frac{\varepsilon\left[\overline{\tau}+\overline{\theta}\left(\cos^{2}\theta+\tau^{2}\sin^{2}\theta+\sin^{2}\theta+\tau^{2}\cos^{2}\theta\right)\right]}{\left(\cos\theta-\tau\sin\theta\right)^{2}} \\
&= \frac{\tau\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\tau\sin\theta}+\varepsilon\frac{\overline{\tau}+\overline{\theta}\left(1+\tau^{2}\right)}{\left(\cos\theta-\tau\sin\theta\right)^{2}}=\tau^{*}+\varepsilon\overline{\tau}^{*}
\end{aligned}
$$

bulunur.

$$
\sum{}^{*}=\tau^{*}+\varepsilon\overline{\tau}^{*} \tag{3.33}
$$

olarak alalım. Reel ve dual kısımların eşitliğinden

$$
\tau^{*}=\frac{\tau\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\tau\sin\theta},\ \overline{\tau}^{*}=\frac{\overline{\tau}+\overline{\theta}\left(1+\tau^{2}\right)}{\left(\cos\theta-\tau\sin\theta\right)^{2}} \tag{3.34}
$$

olur. (3.34) deki eşitliklerde $\theta=0$ seçilirse

$$
\begin{aligned}
\tau^{*} &= \frac{\tau\cos0+\sin0}{\cos0-\tau\sin0} \\
\tau^{*} &= \tau
\end{aligned} \tag{3.35}
$$

bulunur. Ayrıca

$$
\overline{\tau}^{*}=\frac{\overline{\tau}+\overline{\theta}\left(1+\tau^{2}\right)}{\left(\cos0-\tau\sin0\right)^{2}}
$$

veya

$$
\overline{\tau}^{*}=\overline{\tau}+\overline{\theta}\left(1+\tau^{2}\right) \tag{3.36}
$$

elde edilir. (3.33) eşitliğinde (3.35) ve (3.36) eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \sum{}^{*} &= \tau + \varepsilon\left(\overline{\tau} + \overline{\theta}\left(1+\tau^{2}\right)\right) \\ &= \tau + \varepsilon\overline{\tau} + \varepsilon\overline{\theta}\left(1+\tau^{2}\right) \end{aligned}$$

dır. $\sum{}^{*} = \tau + \varepsilon\overline{\tau}$ olduğunu biliyoruz. O halde

$$\sum{}^{*} = \sum + \varepsilon\overline{\theta}\left(1+\tau^{2}\right) \tag{3.37}$$

olur. $\sum = \tau + \varepsilon\overline{\tau}$ denkleminde eşitliğin iki tarafınının da karesi alınırsa

$$\begin{aligned} \sum{}^{2} &= \left(\tau + \varepsilon\overline{\tau}\right)^{2} \\ &= \tau^{2} + 2\varepsilon\tau\overline{\tau} + \varepsilon^{2}\overline{\tau}^{2} \\ &= \tau^{2} + 2\varepsilon\tau\overline{\tau} \end{aligned}$$

dir. Buradan,

$$\tau^{2} = \sum{}^{2} - 2\varepsilon\tau\overline{\tau}$$

bulunur. (3.37) de bu son eşitliği yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} \sum{}^{*} &= \sum + \varepsilon\overline{\theta}\left(1+\tau^{2}\right) \\ &= \sum + \varepsilon\overline{\theta}\left(\sum{}^{2} - 2\varepsilon\tau\overline{\tau} + 1\right) \\ &= \sum + \varepsilon\overline{\theta}\sum{}^{2} - 2\varepsilon^{2}\tau\overline{\tau}\overline{\theta} + \varepsilon\overline{\theta} \\ &= \sum + \varepsilon\overline{\theta}\sum{}^{2} + \varepsilon\overline{\theta} \end{aligned}$$

$$\sum{}^{*} = \sum + \varepsilon\left(\left(\sum{}^{2} + 1\right)\overline{\theta}\right) \tag{3.38}$$

elde edilir. (3.31) denklemi Taylor formüllerine göre açılır ve $\theta = 0$ seçilirse ,

$$\sum{}^{*} = \frac{\sum\left(\cos\theta - \varepsilon\overline{\theta}\sin\theta\right) + \sin\theta + \varepsilon\overline{\theta}\cos\theta}{\left(\cos\theta - \varepsilon\overline{\theta}\sin\theta\right) - \sum\left(\sin\theta + \varepsilon\overline{\theta}\cos\theta\right)}$$

elde edilir. Son eşitlikte $\overline{\theta} = 0$ seçilirse ,

$$\sum^{*} = \frac{\sum \cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sum \sin\theta} \tag{3.39}$$

bulunur. (3.34) da $\overline{\theta} = 0$ seçilirse,

$$\tau^{*} = \frac{\tau \cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \tau \sin\theta} \tag{3.40}$$

ve

$$\overline{\tau}^{*} = \frac{\overline{\tau}}{(\cos\theta - \tau \sin\theta)^{2}} \tag{3.41}$$

olur.

$$\cot\phi^{*} = \frac{1}{\tan\phi^{*}} = \sum^{*}$$

veya

$$\begin{aligned} \tan\phi^{*} &= \frac{1}{\sum^{*}} \\ &= \frac{P^{\star}}{Q^{\star}} \\ &= \frac{\cos\Theta - \sum \sin\Theta}{\sum \cos\Theta + \sin\Theta} \end{aligned} \tag{3.42}$$

yazabiliriz. Yukarıda $\sum = \dfrac{Q}{P}$ ifadesi yerine yazılırsa

$$\tan\phi^{*} = \frac{\cos\Theta - \dfrac{Q}{P}\sin\Theta}{\dfrac{Q}{P}\cos\Theta + \sin\Theta}$$

olur. Son eşitliğin pay ve paydası P ile çarpılırsa

$$\tan\phi^{*} = \frac{P\cos\Theta - Q\sin\Theta}{Q\cos\Theta + P\sin\Theta} \tag{3.43}$$

formülünü elde ederiz. Eğer (3.10), (3.12) ve (3.13) deki formülleri dikkate alırsak, son bağıntıdan reel ve dual kısımları buluruz. Buna göre (3.42) den

$$\tan\phi^* = \frac{\sin\phi^*}{\cos\phi^*} = \frac{P^*}{Q^*}$$

dır. Taylor açılımı kullanılarak,

$$\tan\phi^* = \frac{\sin\phi^*}{\cos\phi^*} = \frac{\sin\varphi^* + \varepsilon\overline{\varphi}^*\cos\varphi^*}{\cos\varphi^* - \varepsilon\overline{\varphi}\sin\varphi^*} = \frac{p^* + \varepsilon\overline{p}^*}{q^* + \varepsilon\overline{q}^*}$$

yazılabilir. Paydaların eşleniği ile çarpma işlemi yaparsak,

$$\begin{aligned}
\tan\phi^* &= \frac{\sin\varphi^*\cos\varphi^* + \varepsilon\left(\sin^2\varphi^*\overline{\varphi}^* + \overline{\varphi}^*\cos^2\varphi^*\right)}{\cos^2\varphi^*} = \frac{p^*q^* + \varepsilon\left(q^*\overline{p}^* - p^*\overline{q}^*\right)}{q^{*2}} \\
&= \frac{\sin\varphi^*}{\cos\varphi^*} + \frac{\varepsilon\left(\overline{\varphi}^*\left(\sin^2\varphi^* + \cos^2\varphi^*\right)\right)}{\cos^2\varphi^*} = \frac{p^*}{q^*} + \frac{\varepsilon\left(q^*\overline{p}^* - p^*\overline{q}^*\right)}{q^{*2}} \\
&= \frac{\sin\varphi^*}{\cos\varphi^*} + \frac{\varepsilon\overline{\varphi}^*}{\cos^2\varphi^*} = \frac{p^*}{q^*} + \frac{\varepsilon\left(q^*\overline{p}^* - p^*\overline{q}^*\right)}{q^{*2}}
\end{aligned}$$

bulunur. Dual sayılarda reel kısımların eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\frac{\sin\varphi^*}{\cos\varphi^*} &= \frac{p^*}{q^*} \\
\tan\varphi^* &= \frac{p^*}{q^*}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

dır. Benzer olarak, dual kısımların eşitliğinden

$$\frac{\overline{\varphi}^*}{\cos^2\varphi^*} = \frac{q^*\overline{p}^* - p^*\overline{q}^*}{q^{*2}}$$

olur.

$$\tan\varphi^* = \frac{p^*}{q^*}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$\cos\varphi^* = \frac{q^*}{\sqrt{p^{*2} + q^{*2}}}$$

elde edilir. Buna göre

$$\frac{\overline{\varphi}^*}{\left(\dfrac{q^*}{\sqrt{p^{*2}+q^{*2}}}\right)^2} = \frac{q^*\overline{p}^* - p^*\overline{q}^*}{q^{*2}}$$

$$\frac{\overline{\varphi}^*}{\dfrac{q^{*2}}{p^{*2}+q^{*2}}} = \frac{q^*\overline{p}^* - p^*\overline{q}^*}{q^{*2}}$$

veya

$$\overline{\varphi}^* = \frac{q^*\overline{p}^* - p^*\overline{q}^*}{p^{*2}+q^{*2}} \tag{3.45}$$

bulunur. $\sum = \dfrac{Q}{P}$ ve $\sum = \tau + \varepsilon\overline{\tau}$ olduğunu biliyoruz. O halde

$$\sum = \frac{Q}{P} = \frac{q+\varepsilon\overline{q}}{p+\varepsilon\overline{p}} = \tau + \varepsilon\overline{\tau}$$

yazılabilir. Burada paydanın eşleniği ile çarpma yapılırsa,

$$\begin{aligned}\sum &= \frac{q+\varepsilon\overline{q}}{p+\varepsilon\overline{p}} = \tau + \varepsilon\overline{\tau} \\ &\quad (p-\varepsilon\overline{p}) \\ &= \frac{pq+\varepsilon\left(p\overline{q}-q\overline{p}\right)}{p^2} = \tau + \varepsilon\overline{\tau} \\ \sum &= \frac{pq}{p^2} + \frac{\varepsilon\left(p\overline{q}-q\overline{p}\right)}{p^2} = \tau + \varepsilon\overline{\tau}\end{aligned}$$

dır. Reel ve dual kısımların eşitliğinden

$$\tau = \frac{q}{p} \Rightarrow p = \frac{q}{\tau} \text{ ve } \overline{\tau} = \frac{\overline{q}}{p} + \frac{q\overline{p}}{p^2} \tag{3.46}$$

olur.

$$\tan\varphi^* = \frac{p^*}{q^*}$$

olduğunu biliyoruz. Bu bağıntıda (3.12) ve (3.13) den p^* ve q^* ın değerleri yerine yazılırsa,

$$\tan\varphi^* = \frac{p^*}{q^*} = \frac{p\cos\theta - q\sin\theta}{p\sin\theta + q\cos\theta} \tag{3.47}$$

olur.

$$p = \frac{q}{\tau}$$

ifadesi (3.47) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \tan\varphi^* &= \frac{\frac{q}{\tau}\cos\theta - q\sin\theta}{\frac{q}{\tau}\sin\theta + q\cos\theta} \\ &= \frac{q\left(\frac{\cos\theta}{\tau} - \sin\theta\right)}{q\left(\frac{\sin\theta}{\tau} + \cos\theta\right)} \end{aligned}$$

gerekli sadeleşmeler yapılırsa

$$\tan\varphi^* = \frac{(\cos\theta - \tau\sin\theta)}{(\sin\theta + \tau\cos\theta)} \tag{3.48}$$

bulunur. (3.47) ve (3.48) deki bağıntılar birleştirilirse,

$$\tan\varphi^* = \frac{p^*}{q^*} = \frac{p\cos\theta - q\sin\theta}{p\sin\theta + q\cos\theta} = \frac{(\cos\theta - \tau\sin\theta)}{(\sin\theta + \tau\cos\theta)} \tag{3.49}$$

elde edilir.

$$\overline{\varphi}^* = \frac{\overline{p}^* q^* - p^*\overline{q}^*}{p^{*2} + q^{*2}}$$

ifadesinde (3.12) ve (3.13) deki bağıntıları kullanarak $p^*, q^*, \overline{p}^*$ ve $\overline{q}^*$ ın eşitleri yerlerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\overline{\varphi}^* &= \frac{\left[\overline{p}\cos\theta - \overline{q}\sin\theta - \overline{\theta}\left(p\sin\theta + q\cos\theta\right)\right]\left[p\sin\theta + q\cos\theta\right]}{\left(p\cos\theta - q\sin\theta\right)^2 + \left(p\sin\theta + q\cos\theta\right)^2} \\
&\quad - \frac{\left[p\cos\theta - q\sin\theta\right]\left[\overline{p}\sin\theta + \overline{q}\cos\theta + \overline{\theta}\left(p\cos\theta - q\sin\theta\right)\right]}{\left(p\cos\theta - q\sin\theta\right)^2 + \left(p\sin\theta + q\cos\theta\right)^2} \\
&= \frac{p\overline{p}\sin\theta\cos\theta - p\overline{q}\sin^2\theta - \overline{\theta}p^2\sin^2\theta - \overline{\theta}qp\sin\theta\cos\theta}{p^2\cos^2\theta - 2pq\sin\theta + q^2\sin^2\theta + p^2\sin^2\theta + 2pq\sin\theta\cos\theta + q^2\cos^2\theta} \\
&\quad + \frac{q\overline{p}\cos^2\theta - q\overline{q}\sin\theta\cos\theta - \overline{\theta}q^2\cos^2\theta - \overline{\theta}qp\sin\theta\cos\theta}{p^2\cos^2\theta - 2pq\sin\theta + q^2\sin^2\theta + p^2\sin^2\theta + 2pq\sin\theta\cos\theta + q^2\cos^2\theta} \\
&\quad + \frac{-p\overline{p}\sin\theta\cos\theta - p\overline{q}\cos^2\theta - \overline{\theta}p^2\cos^2\theta + \overline{\theta}qp\sin\theta\cos\theta}{p^2\cos^2\theta - 2pq\sin\theta + q^2\sin^2\theta + p^2\sin^2\theta + 2pq\sin\theta\cos\theta + q^2\cos^2\theta} \\
&\quad + \frac{q\overline{p}\sin^2\theta + q\overline{q}\sin\theta\cos\theta + \overline{\theta}qp\sin\theta\cos\theta - \overline{\theta}q^2\sin^2\theta}{p^2\cos^2\theta - 2pq\sin\theta + q^2\sin^2\theta + p^2\sin^2\theta + 2pq\sin\theta\cos\theta + q^2\cos^2\theta}
\end{aligned}
$$

veya

$$
\begin{aligned}
\overline{\varphi}^* &= \frac{\sin^2\theta\left(q\overline{p} - \overline{\theta}q^2 - p\overline{q} - \overline{\theta}p^2\right) + \cos^2\theta\left(q\overline{p} - \overline{\theta}q^2 - p\overline{q} - \overline{\theta}p^2\right)}{p^2 + q^2} \\
&= \frac{\left(q\overline{p} - \overline{\theta}q^2 - p\overline{q} - \overline{\theta}p^2\right)}{p^2 + q^2} \\
&= \frac{\left(q\overline{p} - p\overline{q} - \overline{\theta}\left(q^2 - p^2\right)\right)}{p^2 + q^2}
\end{aligned}
$$

olur. Gerekli sadeleşmeler yapılırsa,

$$
\overline{\varphi}^* = \frac{q\overline{p} - p\overline{q}}{p^2 + q^2} - \overline{\theta} \tag{3.50}
$$

bulunur.

$\dfrac{1}{d_1} = \dfrac{\overline{p}}{p}$ ve $\dfrac{1}{d_3} = \dfrac{\overline{q}}{q}$ olduğundan

$$
\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_3} = \frac{\overline{p}}{p} - \frac{\overline{q}}{q} = \frac{q\overline{p} - p\overline{q}}{pq}
$$

veya

$$\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_3}\right) pq = q\overline{p} - p\overline{q}$$

olur. (3.50) de bu son eşitlik yerine yazılırsa

$$\overline{\varphi}^* = \frac{\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_3}\right) pq}{p^2 + q^2} - \overline{\theta}$$

bulunur. Pay ve payda $\dfrac{1}{p^2}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}^* &= \frac{\frac{1}{p^2} pq \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_3}\right)}{\frac{1}{p^2}\left(p^2 + q^2\right)} - \overline{\theta} \\ &= \frac{\frac{q}{p}}{\left(1 + \frac{q^2}{p^2}\right)} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_3}\right) - \overline{\theta} \end{aligned}$$

dır.

$$\tau = \frac{q}{p}$$

ifadesi yukarıda yerine yazılırsa

$$\overline{\varphi}^* = \frac{\tau}{(1 + \tau^2)} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_3}\right) - \overline{\theta} \tag{3.51}$$

olur. Sonuç olarak (3.45), (3.50), (3.51) bağıntıları birleştirilirse

$$\overline{\varphi}^* = \frac{\overline{p}^* q^* - p^* \overline{q}^*}{p^{*2} + q^{*2}} = \frac{\overline{p} q - p \overline{q}}{p^2 + q^2} - \overline{\theta} = \frac{\tau}{(1 + \tau^2)} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_3}\right) - \overline{\theta} \tag{3.52}$$

elde edilir. (2.35) dan $\tan\varphi = \dfrac{p}{q}$ olduğundan $p = q\tan\varphi$ dır. (3.49) da p yerine $q\tan\varphi$ yazılırsa

$$\tan\varphi^* = \frac{q\tan\varphi\cos\theta - q\sin\theta}{q\tan\varphi\sin\theta + q\cos\theta}$$

bulunur. Pay ve payda q ile sadeleştirilirse

$$\begin{aligned}
\tan\varphi^* &= \frac{\tan\varphi\cos\theta-\sin\theta}{\tan\varphi\sin\theta+\cos\theta}\\
&= \frac{\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos\theta-\sin\theta}{\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\sin\theta+\cos\theta}\\
&= \frac{\sin\varphi\cos\theta-\sin\theta\cos\varphi}{\sin\varphi\sin\theta+\cos\theta\cos\varphi}\\
&= \frac{\sin(\varphi-\theta)}{\cos(\varphi-\theta)}
\end{aligned}$$

veya

$$\tan\varphi^* = \tan(\varphi-\theta) \tag{3.53}$$

elde edilir. (3.52) te $\overline{p}q - p\overline{q} = -\rho_n$ ve $p^2+q^2=\rho_n^2+\tau_g^2$ bağıntıları yerine yazılırsa

$$\overline{\varphi}^* = \frac{-\rho_n}{\rho_n^2+\tau_g^2} - \overline{\theta} = -\frac{\rho_n + \overline{\theta}\left(\rho_n^2+\tau_g^2\right)}{\rho_n^2+\tau_g^2}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
\tan\varphi^* &= \tan(\varphi-\theta) && (3.54)\\
\varphi^* &= \varphi-\theta\\
\overline{\varphi}^* &= \overline{\varphi}-\overline{\theta}
\end{aligned}$$

olduğunu görürüz. (3.5) ve (3.26) daki hesaplamalardan $\langle \overrightarrow{R_1}^*, \overrightarrow{E_1}^* \rangle = \cos\phi^*$ ve $\phi = \phi^* + \Theta$ ilişkisine sahip oluruz. Buna göre,

$$\begin{aligned}
\varphi^* &= \varphi-\theta \Longrightarrow \varphi = \phi^*+\theta\\
\overline{\varphi}^* &= \overline{\varphi}-\overline{\theta} \Longrightarrow \overline{\varphi} = \overline{\varphi}^*+\overline{\theta}
\end{aligned}$$

olacaktır. $\overrightarrow{R_1}$ ile $[R_1]$ regle yüzeyinin E_1 ani dönme ekseni tarafından meydana gelen dual açısı, $\overrightarrow{R_1}^*$ ile $\overrightarrow{R_1}$ arasındaki sabit dual açısı ile $\overrightarrow{R_1}$ ve paralel regle yüzeylerinin $\overrightarrow{E_1}^*$ ani rotasyon ekseni arasındaki dual açıların toplamına eşittir.

(3.4) deki bağıntıları, Taylor formüllerini de kullanarak reel ve dual kısımlarına ayırırsak

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{R_1}^* &= \overrightarrow{R_1}\cos\Theta + \overrightarrow{R_3}\sin\Theta \\
\overrightarrow{r_1}^* + \varepsilon\overrightarrow{r_1}^* &= \left(\cos\theta - \varepsilon\overline{\theta}\sin\theta\right)\left(\overrightarrow{r_1} + \varepsilon\overrightarrow{r_1}\right) + \left(\sin\theta + \varepsilon\overline{\theta}\cos\theta\right)\left(\overrightarrow{r_3} + \varepsilon\overrightarrow{r_3}\right)
\end{aligned}$$

burada reel kısımların eşitliğinden

$$\overrightarrow{r_1}^* = \cos\theta\overrightarrow{r_1} + \sin\theta\overrightarrow{r_3}$$

dir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{R_2}^* &= \overrightarrow{R_2} \\
\overrightarrow{r_2}^* + \varepsilon\overrightarrow{r_2}^* &= \left(\overrightarrow{r_2} + \varepsilon\overrightarrow{r_2}\right) \\
\overrightarrow{r_2}^* &= \overrightarrow{r_2}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{R_3}^* &= \overrightarrow{R_3}\cos\Theta - \overrightarrow{R_1}\sin\Theta \\
\overrightarrow{r_3}^* + \varepsilon\overrightarrow{r_3}^* &= \left(\overrightarrow{r_3} + \varepsilon\overrightarrow{r_3}\right)\left(\cos\theta - \varepsilon\overline{\theta}\sin\theta\right) - \left(\overrightarrow{r_1} + \varepsilon\overrightarrow{r_1}\right)\left(\sin\theta + \varepsilon\overline{\theta}\cos\theta\right) \\
\overrightarrow{r_3}^* &= \overrightarrow{r_3}\cos\theta - \overrightarrow{r_1}\sin\theta
\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak $\overrightarrow{r_1}^*, \overrightarrow{r_2}^*, \overrightarrow{r_3}^*$ vektörleri

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{r_1}^* &= \cos\theta\overrightarrow{r_1} + \sin\theta\overrightarrow{r_3} \\
\overrightarrow{r_2}^* &= \overrightarrow{r_2} \\
\overrightarrow{r_3}^* &= \cos\theta\overrightarrow{r_3} - \sin\theta\overrightarrow{r_1}
\end{aligned} \tag{3.55}$$

şeklindedir.

$[R_1^*]$ regle yüzeyinin $\overrightarrow{x}^* = \overrightarrow{x}^*(s)$ boğaz çizgisi $\lambda = \lambda(s)$ olmak üzere,

$$\overrightarrow{x}^* = \overrightarrow{x} + \lambda(s)\overrightarrow{r_2} \tag{3.56}$$

bağıntısına sahiptir. $\overrightarrow{x}^*$ ın s yay uzunluğuna göre türevini alırsak,

$$\frac{d\overrightarrow{x}^*}{ds} = \frac{d\overrightarrow{x}}{ds} + \frac{d\overrightarrow{\lambda}}{ds}.\overrightarrow{r_2} + \lambda\frac{d\overrightarrow{r_2}}{ds} \tag{3.57}$$

bulunur. (3.57) de (2.9) ve (2.17) den faydalanarak $\overrightarrow{x}^{'}$ ile $\overrightarrow{r_2}^{'}$ nin eşiti yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{d\overrightarrow{x}^*}{ds} &= \overrightarrow{x}^{*'} = \overrightarrow{x}^{'} + \lambda^{'}\overrightarrow{r_2} + \lambda\overrightarrow{r_2}^{'} \\
&= \overline{q}\overrightarrow{r_1} + \overline{p}\overrightarrow{r_3} + \lambda^{'}\overrightarrow{r_2} - \lambda p\overrightarrow{r_1} + \lambda q\overrightarrow{r_3} \\
&= (\overline{q} - \lambda p)\,\overrightarrow{r_1} + (\overline{p} + \lambda q)\,\overrightarrow{r_3} + \lambda^{'}\overrightarrow{r_2}
\end{aligned}$$

veya

$$\frac{d\overrightarrow{x}^*}{ds} = \overrightarrow{x}^{*'} = (\overline{q} - \lambda p)\,\overrightarrow{r_1} + (\overline{p} + \lambda q)\,\overrightarrow{r_3} + \lambda^{'}\overrightarrow{r_2} \tag{3.58}$$

elde edilir. (3.55) den faydalanarak $\overrightarrow{r_1}^*$ ve $\overrightarrow{r_3}^*$ eşitliğinin her iki tarafını sırasıyla $\cos\theta$ ve $(-\sin\theta)$ ile çarpalım.

$$\begin{aligned}
\cos\theta\overrightarrow{r_1}^* &= \cos^2\theta\overrightarrow{r_1} + \cos\theta\sin\theta\overrightarrow{r_3} \\
-\sin\theta\overrightarrow{r_3}^* &= \sin^2\theta\overrightarrow{r_1} - \sin\theta\cos\theta\overrightarrow{r_3}
\end{aligned}$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$\cos\theta\overrightarrow{r_1}^* - \sin\theta\overrightarrow{r_3}^* = \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\overrightarrow{r_1}$$

$$\overrightarrow{r_1} = \cos\theta\overrightarrow{r_1}^* - \sin\theta\overrightarrow{r_3}^* \tag{3.59}$$

bulunur. $\overrightarrow{r_1}^*$ ve $\overrightarrow{r_3}^*$ eşitliğinin her iki tarafını sırasıyla $\sin\theta$ ve $\cos\theta$ ile çarpalım.

$$\begin{aligned}
\sin\theta\overrightarrow{r_1}^* &= \cos\theta\sin\theta\overrightarrow{r_1} + \sin^2\theta\overrightarrow{r_3} \\
\cos\theta\overrightarrow{r_3}^* &= -\cos\theta\sin\theta\overrightarrow{r_1} + \cos^2\theta\overrightarrow{r_3}
\end{aligned}$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$\sin\theta\overrightarrow{r_1}^* + \cos\theta\overrightarrow{r_3}^* = \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\overrightarrow{r_3}$$

$$\overrightarrow{r_3} = \sin\theta\overrightarrow{r_1}^* + \cos\theta\overrightarrow{r_3}^* \tag{3.60}$$

dir. (3.18) den faydalanarak $\overline{p}^*$ ve $\overline{q}^*$ eşitliklerinin her iki tarafını sırasıyla $\cos\theta$ ve $\sin\theta$ ile çarpalım.

$$\begin{aligned}\cos\theta\overline{p}^* &= \overline{p}\cos^2\theta - \overline{q}\sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\overline{q}^* &= \overline{p}\sin^2\theta + \overline{q}\cos\theta\sin\theta\end{aligned}$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$\overline{p} = \cos\theta\overline{p}^* + \sin\theta\overline{q}^*$$

olur. Benzer şekilde $\overline{p}^*$ ve $\overline{q}^*$ eşitliğinin her iki tarafını sırasıyla $(-\sin\theta)$ ve $\cos\theta$ ile çarpalım.

$$\begin{aligned}-\sin\theta\overline{p}^* &= -\overline{p}\sin\theta\cos\theta + \overline{q}\sin^2\theta \\ \cos\theta\overline{q}^* &= \overline{p}\sin\theta\cos\theta + \overline{q}\cos^2\theta\end{aligned}$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$\overline{q} = \overline{q}^*\cos\theta - \overline{p}^*\sin\theta$$

bulunur. Buna göre

$$\begin{aligned}\overline{p} &= \overline{p}^*\cos\theta + \overline{q}^*\sin\theta \\ \overline{q} &= \overline{q}^*\cos\theta - \overline{p}^*\sin\theta\end{aligned} \tag{3.61}$$

eşitlikleri elde edilir.

$$\overrightarrow{x}' = \overline{q}\overrightarrow{r_1} + \overline{p}\overrightarrow{r_3}$$

denkleminde $\overrightarrow{r_1}$, $\overrightarrow{r_3}$, $\overline{p}$, $\overline{q}$ ifadelerinin yerine (3.59), (3.60) ve (3.61) deki eşitleri yazılırsa

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{x}^{'} &= \overline{q}\overrightarrow{r_1} + \overline{p}\overrightarrow{r_3} \\
&= \left(\overline{q}^* \cos\theta - \overline{p}^* \sin\theta\right)\left(\cos\theta \overrightarrow{r_1}^* - \sin\theta \overrightarrow{r_3}^*\right) \\
&\quad + \left(\overline{p}^* \cos\theta + \overline{q}^* \sin\theta\right)\left(\sin\theta \overrightarrow{r_1}^* + \cos\theta \overrightarrow{r_3}^*\right) \\
&= \cos^2\theta \overline{q}^* \overrightarrow{r_1}^* - \sin\theta\cos\theta \overline{q}^* \overrightarrow{r_3}^* - \sin\theta\cos\theta \overline{p}^* \overrightarrow{r_1}^* \\
&\quad + \sin^2\theta \overline{p}^* \overrightarrow{r_3}^* + \sin^2\theta \overline{q}^* \overrightarrow{r_1}^* + \sin\theta\cos\theta \overline{q}^* \overrightarrow{r_3}^* \\
&\quad + \sin\theta\cos\theta \overline{p}^* \overrightarrow{r_1}^* + \cos^2\theta \overline{p}^* \overrightarrow{r_3}^*
\end{aligned}$$

veya gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\overrightarrow{x}^{'} = \overline{q}^* \overrightarrow{r_1}^* + \overline{p}^* \overrightarrow{r_3}^* = \overrightarrow{x}^{'*} \tag{3.62}$$

bulunur. (3.62) de (3.4) ün reel kısımları dikkate alınarak yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{d\overrightarrow{x}^*}{ds} = \overrightarrow{x}^{'*} = \overrightarrow{x}_1^* &= \overline{q}^* \left(\cos\theta \overrightarrow{r_1}^* + \sin\theta \overrightarrow{r_3}^*\right) + \overline{p}^* \left(\cos\theta \overrightarrow{r_3} - \sin\theta \overrightarrow{r_1}\right) \\
&= \overline{q}^* \cos\theta \overrightarrow{r_1} + \overline{q}^* \sin\theta \overrightarrow{r_3} + \overline{p}^* \cos\theta \overrightarrow{r_3} - \overline{p}^* \sin\theta \overrightarrow{r_1}
\end{aligned}$$

veya

$$\frac{d\overrightarrow{x}^*}{ds} = \left(\overline{q}^* \cos\theta - \overline{p}^* \sin\theta\right)\overrightarrow{r_1} + \left(\overline{q}^* \sin\theta + \overline{p}^* \cos\theta\right)\overrightarrow{r_3} \tag{3.63}$$

olur. (3.58) ve (3.63) bağıntıları birbirine eşitlenirse

$$\left(\overline{q}^* \cos\theta + \overline{p}^* \sin\theta\right)\overrightarrow{r_1} + \left(\overline{q}^* \sin\theta + \overline{p}^* \cos\theta\right)\overrightarrow{r_3} = \left(\overline{q}\text{-}\lambda p\right)\overrightarrow{r_1} + \left(\overline{p} + \lambda q\right)\overrightarrow{r_3} + \lambda^{'}\overrightarrow{r_2} \tag{3.64}$$

dir. Eşitliğin her iki tarafı $\overrightarrow{r_2}$ ile iç çarpılırsa,

$\langle(\overline{q}^{*}\cos\theta-\overline{p}^{*}\sin\theta)\overrightarrow{r_1},\overrightarrow{r_2}\rangle+\langle(\overline{q}^{*}\sin\theta+\overline{p}^{*}\cos\theta)\overrightarrow{r_3},\overrightarrow{r_2}\rangle=\langle(\overline{q}-\lambda p)\overrightarrow{r_1},\overrightarrow{r_2}\rangle+$
$\langle(\overline{p}+\lambda q)\overrightarrow{r_3},\overrightarrow{r_2}\rangle+\left\langle\lambda^{'}\overrightarrow{r_2},\overrightarrow{r_2}\right\rangle$

bulunur. Gerekli iç çarpımlar yapılırsa

$$
\begin{aligned}
0 &= \left\langle\lambda^{'}\overrightarrow{r_2},\overrightarrow{r_2}\right\rangle \\
0 &= \lambda^{'}\langle\overrightarrow{r_2},\overrightarrow{r_2}\rangle \\
0 &= \lambda^{'}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan $\lambda^{'}=0$ ve $\lambda=sbt.$ dir. (3.64) de (3.12) ve (3.13) den faydalanarak $\overline{p}^{*}$ ve $\overline{q}^{*}$ ın eşitlerini yerine yazıp $\overrightarrow{r_1}$ ile iç çarparak $\lambda=sbt$ değerini hesaplayalım.

$$
\begin{aligned}
&\left\langle(\overline{p}\sin\theta+\overline{q}\cos\theta+\overline{\theta}(p\cos\theta-q\sin\theta))\cos\theta,\overrightarrow{r_1}\right\rangle \\
&-\left\langle(\overline{p}\cos\theta-\overline{q}\sin\theta-\overline{\theta}(p\sin\theta+q\cos\theta))\sin\theta\overrightarrow{r_1},\overrightarrow{r_1}\right\rangle \\
&+\langle(\overline{q}^{*}\sin\theta+\overline{p}^{*}\cos\theta)\overrightarrow{r_3},\overrightarrow{r_1}\rangle \\
&=\langle(\overline{q}-\lambda p)\overrightarrow{r_1},\overrightarrow{r_1}\rangle+\langle(\overline{p}+\lambda q)\overrightarrow{r_3},\overrightarrow{r_1}\rangle+\left\langle\lambda^{'}\overrightarrow{r_2},\overrightarrow{r_1}\right\rangle
\end{aligned}
$$

gerekli iç çarpımlar yapıldığında

$$
\begin{aligned}
&(\overline{p}\sin\theta+\overline{q}\cos\theta+\overline{\theta}(p\cos\theta-q\sin\theta))\cos\theta \\
&-(\overline{p}\cos\theta-\overline{q}\sin\theta-\overline{\theta}(p\sin\theta-q\cos\theta))\sin\theta \quad =\overline{q}-\lambda p
\end{aligned}
$$

dır. Ortak çarpan parantezine alırsak

$$
\begin{aligned}
\overline{q}\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)+\overline{\theta}p\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right) &= \overline{q}-\lambda p \\
\overline{q}.1+\overline{\theta}p.1 &= \overline{q}-\lambda p \\
\lambda &= -\overline{\theta}
\end{aligned}
$$

bulunur. $\lambda(s)$ parametresi sabit ise $\overline{\theta}$ sabit olur, karşıtı da doğrudur. O zaman θ açısının tanjantının tersini kotanjantına eşit olarak buluruz. (3.56) da $\lambda=-\overline{\theta}$ değeri yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{x}^{*}=\overrightarrow{x}-\overline{\theta}\overrightarrow{r_2} \tag{3.65}$$

elde edilir. $\overrightarrow{x}^*$ tarafından belirtilen geometrik yer, $\left[\overrightarrow{R_1}^*\right]$ regle yüzeyinin $\overrightarrow{x}^*$ boğaz çizgisini ifade eder. Taylor formüllerine göre (3.4) ü açarsak

$$\overrightarrow{R_1}^* = \overrightarrow{R_1}\left(\cos\theta - \varepsilon\overline{\theta}\sin\theta\right) + \overrightarrow{R_3}\left(\sin\theta + \varepsilon\overline{\theta}\cos\theta\right)$$

dır. Eğer $\overline{\theta}$ sabit değerini 0 seçersek, regle yüzeyin boğaz çizgisi aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{R_1}^* &= \overrightarrow{R_1}(\cos\theta - \varepsilon 0\sin\theta) + \overrightarrow{R_3}(\sin\theta + \varepsilon 0\cos\theta)\\ &= \overrightarrow{R_1}\cos\theta + \overrightarrow{R_3}\sin\theta\end{aligned}$$

veya

$$\overrightarrow{R_1}^* = \overrightarrow{R_1}\cos\theta + \overrightarrow{R_3}\sin\theta$$

bulunur.

3.2 Paralel Regle Yüzeyin s^* Yay Uzunluğunun Diferensiyeli

Tanjant vektörünü (3.62) deki gibi ifade ederek, $\left[\overrightarrow{R_1}^*\right]$ regle yüzeyinin $(\overrightarrow{x}^*)$ boğaz çizgisini s^* yay uzunluğunun terimlerine göre belirttiğimizde

$$\overrightarrow{x}^{*'} = \frac{d\overrightarrow{x}^*}{d\overrightarrow{s}^*}.\frac{d\overrightarrow{s}^*}{d\overrightarrow{s}} = \overline{q}^*\overrightarrow{r_1}^* + \overline{p}^*\overrightarrow{r_3}^* \tag{3.66}$$

olur. Buna göre

$$\begin{aligned}
\frac{d\overrightarrow{s}^*}{d\overrightarrow{s}} &= \left[\left\langle \frac{d\overrightarrow{s}^*}{d\overrightarrow{s}}, \frac{d\overrightarrow{s}^*}{d\overrightarrow{s}} \right\rangle\right]^{1/2} \\
&= \left[\left\langle \overline{q}^*\overrightarrow{r_1}^* + \overline{p}^*\overrightarrow{r_3}^*, \overline{q}^*\overrightarrow{r_1}^* + \overline{p}^*\overrightarrow{r_3^*} \right\rangle\right]^{1/2} \\
&= \left[\langle \overline{q}^*\overrightarrow{r_1}^*, \overline{q}^*\overrightarrow{r_1}^* \rangle + \langle \overline{q}^*\overrightarrow{r_1}^*, \overline{p}^*\overrightarrow{r_3}^* \rangle + \langle \overline{p}^*\overrightarrow{r_3}^*, \overline{q}^*\overrightarrow{r_1}^* \rangle + \langle \overline{p}^*\overrightarrow{r_3}^*, \overline{p}^*\overrightarrow{r_3}^* \rangle\right]^{1/2} \\
&= \left[\overline{q}^{*2}\langle \overrightarrow{r_1}^*, \overrightarrow{r_1}^* \rangle + \overline{p}^{*2}\langle \overrightarrow{r_3}^*, \overrightarrow{r_3}^* \rangle\right]^{1/2} \\
&= \sqrt{\overline{q}^{*2} + \overline{p}^{*2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{\overline{q}^{*2} + \overline{p}^{*2}} = \sqrt{A} \tag{3.67}$$

denklemi oluşur. (3.67) deki koşulu $\overline{q}^2 + \overline{p}^2 = 1$ ile (3.12) ve 3.13) deki formülleri dikkate alarak düzenlersek,

$$\begin{aligned}
\overline{q}^{*2} &= \overline{p}^2\sin^2\theta + \overline{pq}\sin\theta\cos\theta + \overline{p}\sin\theta\overline{\theta}\left(p\cos\theta - q\sin\theta\right) \\
&\quad + \overline{pq}\sin\theta\cos\theta + \overline{q}^2\cos^2\theta + \overline{q}\cos\theta\overline{\theta}\left(p\cos\theta - q\sin\theta\right) \\
&\quad + \overline{\theta}\overline{p}\sin\theta\left(p\cos\theta + q\sin\theta\right) + \overline{\theta}\overline{q}\cos\theta\left(p\cos\theta - q\sin\theta\right) \\
&\quad + \overline{\theta}^2\left(p\cos\theta - q\sin\theta\right)^2
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\overline{p}^{*2} &= \overline{p}^2\cos^2\theta - \overline{pq}\sin\theta\cos\theta + \overline{p}\sin\theta\overline{\theta}\left(p\sin\theta + q\cos\theta\right) \\
&\quad - \overline{pq}\sin\theta\cos\theta + \overline{q}^2\sin^2\theta + \overline{q}\sin\theta\overline{\theta}\left(p\sin\theta - q\cos\theta\right) \\
&\quad - \overline{\theta}\overline{p}\cos\theta\left(p\sin\theta + q\cos\theta\right) + \overline{\theta}\overline{q}\sin\theta\left(p\sin\theta - q\cos\theta\right) \\
&\quad + \overline{\theta}^2\left(p\sin\theta - q\cos\theta\right)
\end{aligned}$$

bulunur. $\overline{q}^{*2}$ ve $\overline{p}^{*2}$ lerini (2.26) ve (2.37) bağıntılarını dikkate alarak taraf tarafa toplayalım. O zaman

$$\begin{aligned}
\overline{q}^{*2}+\overline{p}^{*2} &= \overline{p}^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)+\overline{q}^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)\\
&+\overline{\theta}^2\left(p^2\cos^2\theta-2pq\sin\theta\cos\theta+q^2\sin^2\theta\right.\\
&\left.+p^2\sin^2\theta+2pq\sin\theta\cos\theta+q^2\cos^2\theta\right.\\
&+\overline{\theta}\left(p\cos\theta-q\sin\theta\right)\left[\overline{p}\sin\theta+\overline{q}\cos\theta+\overline{p}\sin\theta+\overline{q}\cos\theta\right]\\
&-\overline{\theta}\left(p\sin\theta+q\cos\theta\right)\left[\overline{p}\cos\theta-\overline{q}\sin\theta+\overline{p}\cos\theta-\overline{q}\sin\theta\right]\\
&= \overline{p}^2+\overline{q}^2+\overline{\theta}^2\left(p^2+q^2\right)+2\overline{\theta}\left(p\cos\theta-q\sin\theta\right)\left(\overline{p}\sin\theta+\overline{q}\cos\theta\right)\\
&-2\overline{\theta}\left(p\sin\theta+q\cos\theta\right)\left(\overline{p}\cos\theta-\overline{q}\sin\theta\right)\\
&= \overline{p}^2+\overline{q}^2+\overline{\theta}^2\left(\rho_n^2+\tau_g^2\right)+2\overline{\theta}\left(p\overline{p}\sin\theta\cos\theta+p\overline{q}\cos^2\theta-q\overline{p}\sin^2\theta\right.\\
&\left.-q\overline{q}\sin\theta\cos\theta-p\overline{p}\sin\theta\cos\theta+p\overline{q}\sin^2\theta-q\overline{p}\cos^2\theta+q\overline{q}\sin\theta\cos\theta\right.\\
&= 1+\overline{\theta}^2\left(\rho_n^2+\tau_g^2\right)+2\overline{\theta}\left(p\overline{q}-q\overline{p}\right)\\
&= 1+\overline{\theta}^2\left(\rho_n^2+\tau_g^2\right)+2\overline{\theta}\rho_n
\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak

$$\frac{d\overrightarrow{s}^*}{d\overrightarrow{s}}=\sqrt{\overline{q}^{*2}+\overline{p}^{*2}}=\sqrt{A}=\sqrt{1+2\overline{\theta}g_n+\overline{\theta}^2\left(\rho_n^2+\tau_g^2\right)} \tag{3.68}$$

bağıntısı elde edilir. (2.38) den faydalanarak $\overline{\theta}=2\overline{\varphi}$ ile ilişkilendirilirse

$$2\left(-\frac{\rho_n}{\rho_n^2+\tau_g^2}\right)=2\overline{\varphi}$$

$$\frac{-2\rho_n}{\rho_n^2+\tau_g^2}=2\overline{\varphi} \tag{3.69}$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\frac{d\overrightarrow{s}^*}{d\overrightarrow{s}} &= \sqrt{1+4\overline{\varphi}\rho_n+\left(2\overline{\varphi}\right)^2\left(\rho_n^2+\tau_g^2\right)}\\
&= \sqrt{1+4\overline{\varphi}\rho_n+4\overline{\varphi}^2\left(\frac{-\rho_n}{\overline{\varphi}}\right)}\\
&= 1
\end{aligned}$$

dir. Buradan

$$ds^* = ds \tag{3.70}$$

elde edilir. Öyleyse (3.69) daki

$$\frac{-2\rho_n}{\rho_n^2 + \tau_g^2} = 2\overline{\varphi} = sbt$$

ilişkisini doğrulayan regle yüzeylere bağlı paralel regle yüzeylerinin boğaz çizgilerinin ρ_n, τ_g büyüklükleri arasındaki ilişki,

$$ds^* = ds$$

den doğmaktadır. (3.69) daki koşulda geçerli olan, paralel regle yüzeylerinin s^* yay uzunluğunu seçersek, regle yüzeylerinin$s$ yay uzunluklarının diferensiyeli çıkar.

3.3 Paralel Regle Yüzeyin Blaschke ve Darboux Üçyüzlüleri

$[R_1^*]$ regle yüzeylerinin $(\overrightarrow{x}^*)$ boğaz çizgisinin x^* boğaz noktası, yüzeyin normalidir. Buna göre,

$$\overrightarrow{n}^* = \overrightarrow{r_2}^* = \overrightarrow{n}$$

olur. (3.62) den faydalanırsak,

$$\overrightarrow{x_1^*} = \frac{d\overrightarrow{x}^*}{ds^*} = (\overline{q}^*\overrightarrow{r_1}^* + \overline{p}^*\overrightarrow{r_3}^*)\,\frac{1}{\dfrac{ds^*}{ds}}$$

yazılabilir. $\dfrac{ds^*}{ds} = \sqrt{A}$ olduğunu biliyoruz. Öyleyse

$$\overrightarrow{x_1^*} = (\overline{q}^*\overrightarrow{r_1}^* + \overline{p}^*\overrightarrow{r_3}^*)\,\frac{1}{\sqrt{A}}$$

dır. Buradan

$$\overrightarrow{x_1^*} = \frac{d\overrightarrow{x}^*}{ds^*} = \frac{d\overrightarrow{x}^*}{ds}.\frac{ds}{ds^*} = \frac{d\overrightarrow{x}^*}{ds}\frac{1}{\sqrt{A}} = \frac{\overrightarrow{x^{*'}}}{\sqrt{A}} \tag{3.71}$$

olmak üzere, Blaschke ve Darboux üçyüzlülerini (x^*) boğaz çizgisinin her x^* noktasına bağlamak mümkündür. $(\overrightarrow{r_1}^*, \overrightarrow{r_2}^*, \overrightarrow{r_3}^*)$ ve $(\overrightarrow{x_1}^*, \overrightarrow{n}^* \wedge \overrightarrow{x_1}^* = \overrightarrow{g}^*, \overrightarrow{n}^*)$ herbiri tarafından belirtilmiş olan üçyüzlülerin bazlarını aşağıdaki gibi ifade edebiliriz. (3.71) den

$$\overrightarrow{x_1^*} = \frac{\overrightarrow{x^{*'}}}{\sqrt{A}} = \left(\frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r_1}^* + \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r_3}^*\right)$$

olacaktır.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{g}^* &= \overrightarrow{n}^* \wedge \overrightarrow{x_1}^* = \overrightarrow{n}^* \wedge \left(\frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r_1}^* + \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r_3}^*\right)\\ &= \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}}(\overrightarrow{n}^* \wedge \overrightarrow{r_1}^*) + \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}}(\overrightarrow{n}^* \wedge \overrightarrow{r_3}^*)\end{aligned}$$

dır. Burada $\overrightarrow{n}^* = \overrightarrow{r_2}^*$ yazılırsa

$$\begin{aligned}\overrightarrow{g}^* &= \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}}(\overrightarrow{r_2}^* \wedge \overrightarrow{r_1}^*) + \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}}(\overrightarrow{r_2}^* \wedge \overrightarrow{r_3}^*)\\ &= \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}}(-\overrightarrow{r_3}^*) + \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}}(\overrightarrow{r_1}^*)\\ &= \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}}(\overrightarrow{r_1}^*) - \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}}(\overrightarrow{r_3}^*)\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x_1}^* &= \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r_1}^* + \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r_3}^*\\ \overrightarrow{g}^* &= \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r_1}^* - \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r_3}^*\\ \overrightarrow{n}^* &= \overrightarrow{r_2}^*\end{aligned} \tag{3.72}$$

bağıntıları elde edilir. Şimdi de $\overrightarrow{x_1}^*, \overrightarrow{g}^*$ ve $\overrightarrow{n}^*$ üçyüzlülerini $\overrightarrow{r_1}^*, \overrightarrow{r_2}^*, \overrightarrow{r_3}^*$ üçyüzlülericinsinden elde edelim.

(3.72) deki $\overrightarrow{x_1}^*$ ve $\overrightarrow{g}^*$ eşitliklerini sırasıyla $\overline{q}^*$ ve $\overline{p}^*$ ile çarpalım.

$$\begin{aligned}
\overline{q}^*\overrightarrow{x_1}^* &= \frac{\overline{q}^{*2}}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r_1}^* + \frac{\overline{p}^*\overline{q}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r_3}^* \\
\overline{p}^*\overrightarrow{g}^* &= \frac{\overline{p}^{*2}}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r_1}^* - \frac{\overline{q}^*\overline{p}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r_3}^*
\end{aligned}$$

olur. Eşitlikleri taraf tarafa toplarsak

$$\overline{q}^*\overrightarrow{x_1}^* + \overline{p}^*\overrightarrow{g}^* = \left(\frac{\overline{q}^{*2} + \overline{p}^{*2}}{\sqrt{A}}\right)\overrightarrow{r_1}^*$$

dır. $\overline{q}^{*2} + \overline{p}^{*2} = A$ eşitliği kullanılır

$$\overline{q}^*\overrightarrow{x_1}^* + \overline{p}^*\overrightarrow{g}^* = \frac{A}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r_1}^*$$

veya

$$\overrightarrow{r_1}^* = \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x_1}^* + \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g}^*$$

elde edilir. (3.72) $\overrightarrow{x_1}^*$deki ve $\overrightarrow{g}^*$ eşitliklerini sırasıyla $\overline{p}^*$ ve $(-\overline{q}^*)$ ile çarpalım.

$$\begin{aligned}
\overline{p}^*\overrightarrow{x_1}^* &= \frac{\overline{q}^*\overline{p}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r_1}^* + \frac{\overline{p}^{*2}}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r_3}^* \\
-\overline{q}^*\overrightarrow{g}^* &= \frac{-\overline{q}^*\overline{p}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r_1}^* + \frac{\overline{q}^{*2}}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r_3}^*
\end{aligned}$$

veya eşitlikleri taraf tarafa toplarsak

$$\begin{aligned}
\overline{p}^*\overrightarrow{x_1}^* - \overline{q}^*\overrightarrow{g}^* &= \left(\frac{\overline{q}^{*2} + \overline{p}^{*2}}{\sqrt{A}}\right)\overrightarrow{r_3}^* \\
\overline{p}^*\overrightarrow{x_1}^* - \overline{q}^*\overrightarrow{g}^* &= \frac{A}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r_3}^*
\end{aligned}$$

olur. Düzenlersek,

$$\overrightarrow{r_3}^* = \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}}x_1^* - \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g}^*$$

bulunur. Ayrıca

$$\overrightarrow{n}^* = \overrightarrow{r_2}^*$$

dir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r_1}^* &= \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x_1}^* + \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g}^* \\ \overrightarrow{r_2}^* &= \overrightarrow{n}^* \\ \overrightarrow{r_3}^* &= \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x_1}^* - \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g}^* \end{aligned} \tag{3.73}$$

bağıntıları elde edilir.

(3.72) deki birim vektörlerinin türev formüllerini inceleyelim. Bu formüllerde kullanacağımız ρ_g^*, τ_g^* ve ρ_n^* sırasıyla paralel regle yüzeyin jeodezik eğriliği, jeodezik torsiyonu ve normal eğriliğidir. ρ_g^*, τ_g^* ve ρ_n^* eğriliklerin tanımlarından dolayı aşağıdaki ilişkileri yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{x}_1^{*'}, \overrightarrow{g}^* \right\rangle &= \rho_g^* \\ \left\langle \overrightarrow{x}_1^{*'}, \overrightarrow{n}^* \right\rangle &= \rho_n^* \\ \left\langle \overrightarrow{g}^{*'}, \overrightarrow{n}^* \right\rangle &= \tau_g^* \end{aligned} \tag{3.74}$$

Ayrıca,

$$\frac{d\overrightarrow{x}^*}{ds^*} = \frac{d\overrightarrow{x}^*}{ds}.\frac{ds}{ds^*} = \frac{d\overrightarrow{x}^*}{ds}\frac{1}{\sqrt{A}}$$

olduğunu biliyoruz. $\overrightarrow{x}_1^{*'}$, $\overrightarrow{g}^{*'}$ ve $\overrightarrow{n}^{*'}$ türevlerini $\overrightarrow{x_1}^*$, $\overrightarrow{g}^*$ ve $\overrightarrow{n}^*$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazalım. Buna göre

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x}_1^{*'} &= a_1\overrightarrow{x_1}^* + a_2\overrightarrow{g}^* + a_3\overrightarrow{n}^* \\ \overrightarrow{g}^{*'} &= b_1\overrightarrow{x_1}^* + b_2\overrightarrow{g}^* + b_3\overrightarrow{n}^* \\ \overrightarrow{n}^{*'} &= c_1\overrightarrow{x_1}^* + c_2\overrightarrow{g}^* + c_3\overrightarrow{n}^* \end{aligned}$$

dır.

$$\overrightarrow{x}_1^{*'} = a_1\overrightarrow{x_1}^* + a_2\overrightarrow{g}^* + a_3\overrightarrow{n}^*$$

eşitliğinin her iki tarafını $\overrightarrow{x_1}^*$ ile iç çarpalım,

$$\begin{aligned}\left\langle \overrightarrow{x}^{*'}_1, \overrightarrow{x_1}^* \right\rangle &= a_1 \left\langle \overrightarrow{x_1}^*, \overrightarrow{x_1}^* \right\rangle + a_2 \left\langle \overrightarrow{g}^*, \overrightarrow{x_1}^* \right\rangle + a_3 \left\langle \overrightarrow{n}^*, \overrightarrow{x_1}^* \right\rangle \\ &= a_1 1 + a_2.0 + a_3.0 \\ &= a_1\end{aligned}$$

olur. $\left\langle \overrightarrow{x_1}^*, \overrightarrow{x_1}^* \right\rangle = 1$ olduğunu biliyoruz. Her iki tarafın türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\left\langle x_1^*, x_1^* \right\rangle^{'} &= \left\langle \overrightarrow{x}^{*'}_1, \overrightarrow{x_1}^* \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{x_1}^*, \overrightarrow{x}^{*'}_1 \right\rangle \\ &= 2\left\langle \overrightarrow{x}^{*'}_1, \overrightarrow{x_1}^* \right\rangle\end{aligned}$$

veya

$$\left\langle \overrightarrow{x}^{*'}_1, \overrightarrow{x_1}^* \right\rangle = 0$$

bulunur. O halde $\left\langle \overrightarrow{x}^{*'}_1, \overrightarrow{x_1}^* \right\rangle = 0$ olduğundan $a_1 = 0$ dır. Ayrıca

$$\overrightarrow{x}^{*'}_1 = a_1 \overrightarrow{x_1}^* + a_2 \overrightarrow{g}^* + a_3 \overrightarrow{n}^*$$

eşitliğinin her iki tarafını $\overrightarrow{g}^*$ ile iç çarparsak.

$$\left\langle \overrightarrow{x}^{*'}_1, \overrightarrow{g}^* \right\rangle = a_1 \left\langle \overrightarrow{x_1}^*, \overrightarrow{g}^* \right\rangle + a_2 \left\langle \overrightarrow{g}^*, \overrightarrow{g}^* \right\rangle + a_3 \left\langle \overrightarrow{n}^*, \overrightarrow{g}^* \right\rangle$$

$\left\langle \overrightarrow{x}^{*'}_1, \overrightarrow{g}^* \right\rangle = \rho_g^*$ dır. Öyleyse

$$\begin{aligned}\rho_g^* &= a_1 0 + a_2 1 + a_3 0 \\ \rho_g^* &= a_2\end{aligned}$$

bulunur.

$$\overrightarrow{x}^{*'}_1 = a_1 \overrightarrow{x_1}^* + a_2 \overrightarrow{g}^* + a_3 \overrightarrow{n}^*$$

eşitliğinin her iki tarafını $\overrightarrow{n}^*$ ile iç çarparsak,

$$\left\langle \overrightarrow{x}^{*'}_1, \overrightarrow{n}^* \right\rangle = a_1 \left\langle \overrightarrow{x_1}^*, \overrightarrow{n}^* \right\rangle + a_2 \left\langle \overrightarrow{g}^*, \overrightarrow{n}^* \right\rangle + a_3 \left\langle \overrightarrow{n}^*, \overrightarrow{n}^* \right\rangle$$

$\left\langle \overrightarrow{x}_1^{*'}, \overrightarrow{n}^* \right\rangle = \rho_n^*$ dır. Öyleyse

$$\begin{aligned} \rho_n^* &= a_1 0 + a_2 0 + a_3 1 \\ \rho_g^* &= a_3 \end{aligned}$$

olur. Benzer işlemlerle $\overrightarrow{g}^{*'}$ türevini sırasıyla $\overrightarrow{x_1}^*$, $\overrightarrow{g}^*$ ve $\overrightarrow{n}^*$ ile iç çarparsak.

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{g}^{*'}, \overrightarrow{x_1}^* \right\rangle &= b_1 \langle \overrightarrow{x_1}^*, \overrightarrow{x_1}^* \rangle + b_2 \langle \overrightarrow{g}^*, \overrightarrow{x_1}^* \rangle + b_3 \langle \overrightarrow{n}^*, \overrightarrow{x_1}^* \rangle \\ &= b_1 1 + b_2 0 + b_3 0 \end{aligned}$$

veya

$$\left\langle \overrightarrow{g}^{*'}, \overrightarrow{x_1}^* \right\rangle = b_1$$

olur.

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{x}_1^{*'}, \overrightarrow{g}^* \right\rangle &= \rho_g^* \Longrightarrow \left\langle \overrightarrow{g}^{*'}, \overrightarrow{x_1}^* \right\rangle = -\rho_g^* \\ \left\langle \overrightarrow{g}^{*'}, \overrightarrow{x_1}^* \right\rangle &= b_1 = -\rho_g^* \end{aligned}$$

yazılır. Ayrıca

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{g}^{*'}, \overrightarrow{g}^* \right\rangle &= b_1 \langle \overrightarrow{x_1}^*, \overrightarrow{g}^* \rangle + b_2 \langle \overrightarrow{g}^*, \overrightarrow{g}^* \rangle + b_3 \langle \overrightarrow{n}^*, \overrightarrow{g}^* \rangle \\ &= b_1 0 + b_2 1 + b_3 0 \\ \left\langle \overrightarrow{g}^{*'}, \overrightarrow{g}^* \right\rangle &= b_2 \end{aligned}$$

dir.

$$\langle \overrightarrow{g}^*, \overrightarrow{g}^* \rangle = 1$$

olduğunu biliyoruz. İki tarafın türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{g}^*, \overrightarrow{g}^* \rangle' &= \left\langle \overrightarrow{g}^{*'}, \overrightarrow{g}^* \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{g}^*, \overrightarrow{g}^{*'} \right\rangle \\ &= 2 \left\langle \overrightarrow{g}^{*'}, \overrightarrow{g}^* \right\rangle = 0 \\ \left\langle \overrightarrow{g}^{*'}, \overrightarrow{g}^* \right\rangle &= b_2 = 0 \end{aligned}$$

olur. Devam edilirse

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{g}^{*'}, \overrightarrow{n}^{*} \right\rangle &= b_1 \langle \overrightarrow{x_1}^{*}, \overrightarrow{n}^{*} \rangle + b_2 \langle \overrightarrow{g}^{*}, \overrightarrow{n}^{*} \rangle + b_3 \langle \overrightarrow{n}^{*}, \overrightarrow{n}^{*} \rangle \\
\tau_g^* &= b_1 0 + b_2 0 + b_3 1 \\
\tau_g^* &= b_3
\end{aligned}$$

dır. Benzer şekilde $\overrightarrow{n}^{*'}$ sırasıyla $\overrightarrow{x_1}^{*}$, $\overrightarrow{g}^{*}$, $\overrightarrow{n}^{*}$ ile iç çarpılırsa.

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{n}^{*'}, \overrightarrow{x_1}^{*} \right\rangle &= c_1 \langle \overrightarrow{x_1}^{*}, \overrightarrow{x_1}^{*} \rangle + c_2 \langle \overrightarrow{g}^{*}, \overrightarrow{x_1}^{*} \rangle + c_3 \langle \overrightarrow{n}^{*}, \overrightarrow{x_1}^{*} \rangle \\
&= c_1 1 + c_2 0 + c_3 0 \\
&= c_1
\end{aligned}$$

$\left\langle \overrightarrow{x}^{*'}_{1}, \overrightarrow{n}^{*} \right\rangle = \rho_n^*$ dır. O halde $\left\langle \overrightarrow{n}^{*'}, x_1^* \right\rangle = -\rho_n^*$ olur. Buna göre

$$\left\langle \overrightarrow{n}^{*'}, \overrightarrow{x_1}^{*} \right\rangle = c_1 = -\rho_n^*$$

dır. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{n}^{*'}, \overrightarrow{g}^{*} \right\rangle &= c_1 \langle \overrightarrow{x_1}^{*}, \overrightarrow{g}^{*} \rangle + c_2 \langle \overrightarrow{g}^{*}, \overrightarrow{g}^{*} \rangle + c_3 \langle \overrightarrow{n}^{*}, \overrightarrow{g}^{*} \rangle \\
\left\langle \overrightarrow{n}^{*'}, \overrightarrow{g}^{*} \right\rangle &= c_1 0 + c_2 1 + c_3 0 \\
\left\langle \overrightarrow{n}^{*'}, \overrightarrow{g}^{*} \right\rangle &= c_2
\end{aligned}$$

$\left\langle \overrightarrow{g}^{*'}, \overrightarrow{n}^{*} \right\rangle = \tau_g^*$ dır. O halde $\left\langle \overrightarrow{n}^{*'}, \overrightarrow{g}^{*} \right\rangle = -\tau_g^*$ olur. Buna göre

$$\left\langle \overrightarrow{n}^{*'}, \overrightarrow{g}^{*} \right\rangle = c_2 = -\tau_g^*$$

dır.

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{n}^{*'}, \overrightarrow{n}^{*} \right\rangle &= c_1 \langle \overrightarrow{x_1}^{*}, \overrightarrow{n}^{*} \rangle + c_2 \langle \overrightarrow{g}^{*}, \overrightarrow{n}^{*} \rangle + c_3 \langle \overrightarrow{n}^{*}, \overrightarrow{n}^{*} \rangle \\
\left\langle \overrightarrow{n}^{*'}, \overrightarrow{n}^{*} \right\rangle &= c_1 0 + c_2 0 + c_3 1 \\
\left\langle \overrightarrow{n}^{*'}, \overrightarrow{n}^{*} \right\rangle &= c_3
\end{aligned}$$

$\langle \overrightarrow{n}^*, \overrightarrow{n}^* \rangle = 1$ olduğunu biliyoruz. Her iki tarafın türevini alırsak

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{n}^*, n^* \rangle^{'} &= \left\langle n^{*'}, \overrightarrow{n}^* \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{n}^*, \overrightarrow{n}^{*'} \right\rangle \\ &= 2\left\langle \overrightarrow{n}^{*'}, \overrightarrow{n}^* \right\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

olacağından $\left\langle \overrightarrow{n}^{*'}, \overrightarrow{n}^* \right\rangle = 0$ olur. Böylece $\left\langle \overrightarrow{n}^{*'}, \overrightarrow{n}^* \right\rangle = c_3 = 0$ bulunur. $\left(x_1^{*'}, \overrightarrow{g}^{*'}, \overrightarrow{n}^{*'} \right)$ birim vektörlerinin s parametresiyle ilişkisini kuralım.

$$\overrightarrow{x}_1^{*'} = \frac{\overrightarrow{x}_1^{*'}}{\sqrt{A}}$$

olduğunu biliyoruz. O halde

$$\begin{aligned} \frac{\overrightarrow{x}_1^{*'}}{\sqrt{A}} &= \rho_g^* \overrightarrow{g}^* + \rho_n^* \overrightarrow{n}^* \\ \overrightarrow{x}_1^{*'} &= \sqrt{A}\left(\rho_g^* \overrightarrow{g}^* + \rho_n^* \overrightarrow{n}^*\right) \end{aligned}$$

bulunur. (3.71) den faydalanarak

$$\overrightarrow{g}^{*'} = \frac{\overrightarrow{g}^{*'}}{\sqrt{A}}$$

yazabiliriz. Buna göre

$$\begin{aligned} \frac{\overrightarrow{g}^{*'}}{\sqrt{A}} &= -\rho_g^* \overrightarrow{x_1}^* + \tau_g^* \overrightarrow{n}^* \\ \overrightarrow{g}^{*'} &= \sqrt{A}\left(-\rho_g^* \overrightarrow{x_1}^* + \tau_g^* \overrightarrow{n}^*\right) \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde (3.71) kullanılarak

$$\overrightarrow{n}^{*'} = \frac{\overrightarrow{n}^{*'}}{\sqrt{A}}$$

dır. O halde

$$\begin{aligned} \frac{\overrightarrow{n}^{*'}}{\sqrt{A}} &= -\rho_n^* \overrightarrow{x_1}^* - \tau_g^* \overrightarrow{g}^* \\ \overrightarrow{n}^{*'} &= \sqrt{A}\left(-\rho_n^* \overrightarrow{x_1}^* - \tau_g^* \overrightarrow{g}^*\right) \end{aligned}$$

olur. (3.72) deki birim vektörlerinin s parametresine göre türev formülleri

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x}_1^{*'} &= \sqrt{A}\left(\rho_g^* \overrightarrow{g}^* + \rho_n^* \overrightarrow{n}^*\right) \\ \overrightarrow{g}^{*'} &= \sqrt{A}\left(-\rho_g^* \overrightarrow{x_1}^* + \tau_g^* \overrightarrow{n}^*\right) \\ \overrightarrow{n}^{*'} &= \sqrt{A}\left(-\rho_n^* \overrightarrow{x_1}^* - \tau_g^* \overrightarrow{g}^*\right) \end{aligned} \tag{3.75}$$

şeklindedir.

Şimdi $\overrightarrow{r}_1^{*'}, \overrightarrow{r}_2^{*'}, \overrightarrow{r}_3^{*'}$ nin elde edilişini inceleyelim.

$\overrightarrow{R}_1^{*'}, \overrightarrow{R}_2^{*'}, \overrightarrow{R}_3^{*'}$ vektörlerini $\overrightarrow{R}_1^*, \overrightarrow{R}_2^*, \overrightarrow{R}_3^*$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazarsak.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R}_1^{*'} &= a_{11}\overrightarrow{R}_1^* + a_{12}\overrightarrow{R}_2^* + a_{13}\overrightarrow{R}_3^* \\ \overrightarrow{R}_2^{*'} &= a_{21}\overrightarrow{R}_1^* + a_{22}\overrightarrow{R}_2^* + a_{23}\overrightarrow{R}_3^* \\ \overrightarrow{R}_3^{*'} &= a_{31}\overrightarrow{R}_1^* + a_{32}\overrightarrow{R}_2^* + a_{33}\overrightarrow{R}_3^* \end{aligned}$$

olur. Bu denklem sistemindeki a_{kl} katsayıları (2.12), (2.13) ve (2.14) deki özelliklerden dolayı,

$$\begin{array}{ccc} a_{11} = 0 & a_{22} = 0 & a_{33} = 0 \\[2ex] a_{12} = P^* & a_{21} = -P^* & a_{13} = 0 \\[2ex] a_{31} = 0 & a_{23} = Q^* & a_{32} = -Q^* \end{array}$$

dır. O halde $\overrightarrow{R}_1^{*'}, \overrightarrow{R}_2^{*'}, \overrightarrow{R}_3^{*'}$ türevlerini $\overrightarrow{R_1}^*, \overrightarrow{R_2}^*, \overrightarrow{R_3}^*$ cinsinden lineer olarak yazarsak,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R}_1^{*'} &= P^* \overrightarrow{R_2}^* \\ \overrightarrow{R}_2^{*'} &= -P^* \overrightarrow{R_1}^* + Q^* \overrightarrow{R_3}^* \\ \overrightarrow{R}_3^{*'} &= Q^* \overrightarrow{R_2}^* \end{aligned} \tag{3.76}$$

şeklinde elde ederiz. Şimdi de (3.76) daki ifadeleri reel ve dual kısımlarına ayırarak $r_1^{*'}, r_2^{*'}$ ve $r_3^{*'}$ türevlerini bulalım. Buna göre

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{R_1^{*'}} &= P^* R_2^* \\
\overrightarrow{r}_1^{*'} + \varepsilon \overrightarrow{\overline{r}_1}^{*'} &= (p^* + \varepsilon \overline{p}^*)\left(\overrightarrow{r}_2^* + \varepsilon \overrightarrow{\overline{r}_2}^*\right) \\
&= p^* \overrightarrow{r}_2^* + \varepsilon \left(p^* \; \overrightarrow{\overline{r}_2}^* + \overline{p}^* \overrightarrow{\overline{r}_2}^*\right)
\end{aligned}$$

dual sayıların eşitliğinden

$$\overrightarrow{r}_1^{*'} = p^* \overrightarrow{r}_2^*$$

dır. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{R}_2^{*'} &= -P^* \overrightarrow{R_1^*} + Q^* \overrightarrow{R_3^*} \\
\overrightarrow{r}_2^{*'} + \varepsilon \overrightarrow{\overline{r}}_2^{*'} &= -(p^* + \varepsilon \overline{p}^*)\left(\overrightarrow{r}_1^* + \varepsilon \overrightarrow{\overline{r}}_1^*\right) + (q^* + \varepsilon \overline{q}^*)\left(\overrightarrow{r}_3^* + \varepsilon \overrightarrow{\overline{r}}_3^*\right) \\
&= -p^* \overrightarrow{r}_1^* + q^* \overrightarrow{r}_3^* + \varepsilon \left(-\overline{p}\, \overrightarrow{r}_1^* - p^* \overrightarrow{r}_1^* + q^* \overrightarrow{\overline{r}}_3^* + \overline{q}^* \overrightarrow{r}_3^*\right)
\end{aligned}$$

olup, dual sayıların eşitliğinden

$$\overrightarrow{r}_2^{*'} = -p^* \overrightarrow{r}_1^* + q^* \overrightarrow{r}_3^*$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{R}_3^{*'} &= -Q^* \overrightarrow{R}_2^* \\
\overrightarrow{r}_3^{*'} + \varepsilon \overrightarrow{\overline{r}}_3^{*'} &= -(q^* + \varepsilon \overline{q}^*)\left(\overrightarrow{r}_2^* + \varepsilon \overrightarrow{\overline{r}}_2^*\right) \\
&= -q^* \overrightarrow{r}_2^* + \varepsilon \left(-q^* \overrightarrow{\overline{r}}_2^* - \overline{q}^* \overrightarrow{r}_2^*\right)
\end{aligned}$$

olduğundan, dual sayıların eşitliği tekrar kullanılırsa

$$\overrightarrow{r}_3^{*'} = -q^* \overrightarrow{r}_2^*$$

bulunur. Sonuç olarak (3.73) deki birim vektörlerin türev formüllerini,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r}_1^{*'} &= p^* \overrightarrow{r}_2^* \\ \overrightarrow{r}_2^{*'} &= -p^* \overrightarrow{r}_1^* + q^* \overrightarrow{r}_3^* \\ \overrightarrow{r}_3^{*'} &= -q^* \overrightarrow{r}_2^* \end{aligned} \tag{3.77}$$

şeklinde elde ederiz.

3.4 Paralel Regle Yüzeyin (x^*) Boğaz Çizgisinin Normal Eğriliği, Geodezik Torsionu ve Geodezik Eğriliği

(3.75) deki formüllerde ρ_n^*, τ_g^*, ρ_g^* lar birbirini izleyen sırayla (x^*) boğaz çizgisinin normal eğriliği, geodezik torsionu, geodezik eğrilikleridir.

$$\overrightarrow{x}_1^* = \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{r}_1^* + \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{r}_3^*$$

denklemi (3.12), (3.13) ve (3.55) bağıntıları kullanılarak düzenlenirse

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x_1}^* &= \frac{\left(\overline{p}\sin\theta - \overline{q}\cos\theta + \overline{\theta}\left(p\cos\theta - q\sin\theta\right)\right)}{\sqrt{A}} \left(\cos\theta \overrightarrow{r_1} + \sin\theta \overrightarrow{r_3}\right) \\ &\quad + \frac{\left(\overline{p}\cos\theta - \overline{q}\sin\theta - \overline{\theta}\left(p\sin\theta + q\cos\theta\right)\right)}{\sqrt{A}} \left(-\sin\theta r_1 + \cos\theta r_3\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{A}} [\overline{p}\sin\theta\cos\theta \overrightarrow{r}_1 + \overline{q}\cos^2\theta \overrightarrow{r}_1 + \overline{\theta} p\cos^2\theta \overrightarrow{r}_1 - \overline{\theta} q\sin\theta\cos\theta \overrightarrow{r}_1 \\ &\quad + \overline{p}\sin^2\theta \overrightarrow{r}_3 - \overline{q}\sin\theta\cos\theta \overrightarrow{r}_3 + p\overline{\theta}\sin\theta\cos\theta \overrightarrow{r}_3 - \overline{\theta} q\sin^2\theta \overrightarrow{r}_3 \\ &\quad - \overline{p}\sin\theta\cos\theta \overrightarrow{r}_1 + \overline{q}\sin^2\theta \overrightarrow{r}_1 + p\overline{\theta}\sin^2\theta \overrightarrow{r}_1 + q\overline{\theta}\sin\theta\cos\theta \overrightarrow{r}_1 \\ &\quad - \overline{\theta} p\sin\theta\cos\theta \overrightarrow{r}_3 - q\overline{\theta}\cos^2\theta \overrightarrow{r}_3 + \overline{p}\cos^2\theta \overrightarrow{r}_3 - \overline{q}\sin\theta\cos\theta \overrightarrow{r}_3] \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{x_1}^{*} &= \frac{1}{\sqrt{A}}\left(\overline{p}\overrightarrow{r_3}+\overline{\theta}p\overrightarrow{r_1}-q\overline{\theta}r_3+\overline{q}\overrightarrow{r_1}\right) \\
&\frac{1}{\sqrt{A}}\left(\overline{q}\overrightarrow{r_1}+\overline{\theta}p\overrightarrow{r_1}+\overline{p}\overrightarrow{r_3}-q\overline{\theta}r_3\right) \\
&\frac{1}{\sqrt{A}}\left(\left(\overline{q}+\overline{\theta}p\right)\overrightarrow{r_1}+\left(\overline{p}-q\overline{\theta}\right)\overrightarrow{r_3}\right)
\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{x_1}^{*}=\frac{\left(\overline{q}+\overline{\theta}p\right)}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r_1}+\frac{\overline{p}-q\overline{\theta}}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r_3}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\overrightarrow{g}^{*}=\frac{\overline{p}}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r}_1^{*}-\frac{\overline{q}^{*}}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r}_3^{*}$$

denklemi (3.12), (3.13) ve (3.55) bağıntıları kullanılarak düzenlenirse gerekli eşitlikler kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{g}^{*} &= \frac{\left(\overline{p}\cos\theta-\overline{q}\sin\theta-\overline{\theta}\left(p\sin\theta+q\cos\theta\right)\right)}{\sqrt{A}}\left(\cos\theta\overrightarrow{r}_1+\sin\theta\overrightarrow{r}_3\right) \\
&\frac{-\left(\overline{p}\sin\theta+\overline{q}\cos\theta+\overline{\theta}\left(p\sin\theta-q\cos\theta\right)\right)}{\sqrt{A}}\left(-\sin\theta\overrightarrow{r}_1+\cos\theta\overrightarrow{r}_3\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{A}}[\overline{p}\cos^2\theta\overrightarrow{r_1}-\overline{q}\sin\theta\cos\theta\overrightarrow{r}_1-\overline{\theta}p\sin\theta\cos\theta\overrightarrow{r}_1-\overline{\theta}q\cos^2\theta\overrightarrow{r}_1 \\
&+\overline{p}\sin\theta\cos\theta\overrightarrow{r}_3-\overline{q}\sin^2\theta\overrightarrow{r}_3-\overline{\theta}p\sin^2\theta\overrightarrow{r}_3-\overline{\theta}q\sin\theta\cos\theta\overrightarrow{r}_3 \\
&+\overline{p}\sin^2\theta\overrightarrow{r}_1+\overline{q}\sin\theta\cos\theta\overrightarrow{r}_1+\overline{\theta}p\sin\theta\cos\theta\overrightarrow{r}_1-\overline{\theta}q\sin^2\theta\overrightarrow{r}_1 \\
&-\overline{p}\sin\theta\cos\theta\overrightarrow{r}_3-\overline{q}\cos^2\theta\overrightarrow{r}_3-\overline{\theta}p\cos^2\theta\overrightarrow{r}_3+\overline{\theta}q\sin\theta\cos\theta\overrightarrow{r}_3]
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{g}^{*} &= \frac{1}{\sqrt{A}}[\overline{p}\cos^2\theta\overrightarrow{r_1}+\overline{p}\sin^2\theta\overrightarrow{r_1}-\overline{\theta}q\cos^2\theta\overrightarrow{r_1}-\overline{\theta}q\sin^2\theta\overrightarrow{r}_1 \\
&-\overline{q}\sin^2\theta\overrightarrow{r_3}-\overline{q}os^2\theta\overrightarrow{r_3}-\overline{\theta}p\sin^2\theta\overrightarrow{r_3}-\overline{\theta}p\cos^2\theta\overrightarrow{r}_3]
\end{aligned}$$

ya da

$$\overrightarrow{g}^{*}=\frac{1}{\sqrt{A}}\left(\overline{p}\overrightarrow{r_1}-\overline{\theta}q\overrightarrow{r_1}-p\overline{\theta}r_3-\overline{q}\overrightarrow{r_3}\right)$$

olur. Ortak paranteze alınırsa

$$\overrightarrow{g}^* = \frac{\left(\overline{p} - \overline{\theta} q\right)}{\sqrt{A}} \overrightarrow{r_1} - \frac{\left(\overline{q} + p\overline{\theta}\right)}{\sqrt{A}} \overrightarrow{r_3}$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \overrightarrow{n}^* &= \overrightarrow{r_2}^* = \overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{n} \\ \overrightarrow{n}^* &= n \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x_1}^* &= \frac{\left(\overline{q} + \overline{\theta} p\right)}{\sqrt{A}} \overrightarrow{r_1} + \frac{\left(\overline{p} - q\overline{\theta}\right)}{\sqrt{A}} \overrightarrow{r_3} \\ \overrightarrow{g}^* &= \frac{\left(\overline{p} - \overline{\theta} q\right)}{\sqrt{A}} \overrightarrow{r_1} - \frac{\left(\overline{q} + p\overline{\theta}\right)}{\sqrt{A}} \overrightarrow{r_3} \\ \overrightarrow{n}^* &= \overrightarrow{n} \end{aligned} \tag{3.78}$$

dir. (3.78) deki ifadelerde (3.10) dan faydalanarak $\overrightarrow{r_1}$ ve $\overrightarrow{r_3}$ vektörlerinin eşitleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x_1}^* &= \frac{1}{\sqrt{A}} \left[\left(\overline{q} + p\overline{\theta}\right) \left(\overline{q}\overrightarrow{x_1} + \overline{p}\,\overrightarrow{g}\right) + \left(\overline{p} - q\overline{\theta}\right) \left(\overline{p}\overrightarrow{x_1} - \overline{q}\,\overrightarrow{g}\right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{A}} \left[\overline{q}^2 \overrightarrow{x_1} + p\overline{\theta}\overline{q}\overrightarrow{x_1} + \overline{p}^2 \overrightarrow{x_1} - q\overline{p}\overline{\theta}\overrightarrow{x_1} + \overline{qp}\,\overrightarrow{g} + \overline{\theta} p\overline{p}\,\overrightarrow{g} \right. \\ &\quad \left. -\overline{pq}\,\overrightarrow{g} + q\overline{q}\overline{\theta}\,\overrightarrow{g} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{A}} \left[\overline{p}^2 + \overline{q}^2 + \left((p\overline{q} - q\overline{p})\,\overline{\theta} \right) \overrightarrow{x_1} + \left((p\overline{p} + q\overline{q})\,\overline{\theta} \right) \overrightarrow{g} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{A}} \left[\overline{p}^2 + \overline{q}^2 + \left((p\overline{q} - q\overline{p})\,\overline{\theta} \right) \overrightarrow{x_1} + \frac{1}{\sqrt{A}} \left((p\overline{p} + q\overline{q})\,\overline{\theta} \right) \overrightarrow{g} \right] \end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlik $\overline{p}^2 + \overline{q}^2 = 1$ ve (2.26) ile (2.27) den dolayı

$$x_1^* = \frac{1 + \overline{\theta}\rho_n}{\sqrt{A}} \overrightarrow{x_1} + \frac{\overline{\theta}\tau_g}{\sqrt{A}} \overrightarrow{g}$$

elde edilir. Benzer işlemlerle

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{g}^{*} &= \frac{\left(\overline{p}-q\overline{\theta}\right)}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r_1}-\frac{\left(\overline{q}+p\overline{\theta}\right)}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r_3} \\
&= \frac{\left(\overline{p}-q\overline{\theta}\right)\left(\overline{q}\overrightarrow{x_1}+\overline{p}\,\overrightarrow{g}\right)}{\sqrt{A}}-\frac{\left(\overline{q}-p\overline{\theta}\right)\left(\overline{p}\overrightarrow{x_1}-\overline{q}\,\overrightarrow{g}\right)}{\sqrt{A}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{A}}\left[\overline{pq}\overrightarrow{x_1}-q\overline{q}\overline{\theta}\overrightarrow{x_1}+\overline{p}^2\overrightarrow{g}-q\overline{p}\overline{\theta}\,\overrightarrow{g}-\overline{qp}\overrightarrow{x_1}-p\overline{p}\overline{\theta}\overrightarrow{x_1}\right. \\
&\quad \left.+\overline{q}^2\overrightarrow{g}+p\overline{q}\overline{\theta}\,\overrightarrow{g}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{A}}\left[\left(p\overline{p}\overline{\theta}-q\overline{q}\overline{\theta}\right)\overrightarrow{x_1}+\left(\overline{p}^2+\overline{q}^2+p\overline{q}\overline{\theta}-q\overline{p}\overline{\theta}\right)\overrightarrow{g}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{A}}\left(p\overline{p}-q\overline{q}\right)\overline{\theta}\overrightarrow{x_1}+\frac{1}{\sqrt{A}}\left(\overline{p}^2+\overline{q}^2+\left(\left(p\overline{q}-q\overline{p}\right)\overline{\theta}\right)\overrightarrow{g}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\overrightarrow{g}^{*}=-\frac{\overline{\theta}\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x_1}+\frac{\overline{\theta}\rho_n+1}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g}
$$

olur. Ayrıca

$$
\overrightarrow{n}^{*}=\overrightarrow{n}
$$

dir. Buna göre

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{x_1}^{*} &= \frac{1+\overline{\theta}\rho_n}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x_1}+\frac{\overline{\theta}\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g} \\
\overrightarrow{g}^{*} &= -\frac{\overline{\theta}\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x_1}+\frac{\overline{\theta}\rho_n+1}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g} \\
\overrightarrow{n}^{*} &= \overrightarrow{n}
\end{aligned} \tag{3.79}
$$

eşitliği yazılır.

(x^{*})boğaz çizgisinin ρ_n^{*}, τ_g^{*}, ρ_g^{*} büyüklüklüklerini hesaplayalım. O zaman

$$
\overrightarrow{n}^{*}=\overrightarrow{r_2}^{*}
$$

olduğunu biliyoruz. Eğer son eşitliğin türevi alınırsa

$$
\overrightarrow{n}^{*'}=\overrightarrow{r_2}^{*'}
$$

dir. (3.75) ve (3.77) den faydalanarak $\overrightarrow{n}^{*'}$ ve $\overrightarrow{r_2}^{*'}$ in eşiti yukarıdaki bağıntıda yerine yazılırsa,

$$-p^*\overrightarrow{r_1}^* + q^*\overrightarrow{r_3}^* = \sqrt{A}\left(-\rho_n^*\overrightarrow{x_1}^* - \tau_g^*\overrightarrow{g}^*\right)$$

bulunur. Son bağıntıda (3.73) den faydalanarak $\overrightarrow{r_1}^*$ ve $\overrightarrow{r_3}^*$ ın eşitleri yazılırsa

$$\begin{aligned}
-p^*\left(\frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x_1}^* + \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g}^*\right) + q^*\left(\frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x_1}^* - \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g}^*\right) &= \sqrt{A}\left(-\rho_n^*\overrightarrow{x_1}^* - \tau_g^*\overrightarrow{g}^*\right) \\
\frac{1}{\sqrt{A}}\left(-p^*\overline{q}^*\overrightarrow{x_1}^* - p^*\overline{p}^*\overrightarrow{g}^* + q^*\overline{p}^*\overrightarrow{x_1}^* - q^*\overline{q}^*g^*\right) &= \sqrt{A}\left(-\overrightarrow{g}_n^*\overrightarrow{x_1}^* - \tau_g^*\overrightarrow{g}^*\right) \\
\frac{1}{\sqrt{A}}\left(\left(q^*\overline{p}^* - p^*\overline{q}^*\right)\overrightarrow{x_1}^* - \left(p^*\overline{p}^* + q^*\overline{q}^*\right)\overrightarrow{g}^*\right) &= \sqrt{A}\left(-\rho_n^*\overrightarrow{x_1}^* - \tau_g^*\overrightarrow{g}^*\right)
\end{aligned}$$

dır. Bu son eşitlikte $\overrightarrow{x_1}^*$ ın katsayıları birbirine eşitlenirse

$$\frac{1}{\sqrt{A}}\left(q^*\overline{p}^* - p^*\overline{q}^*\right) = -\rho_n^*\sqrt{A}$$

veya

$$\rho_n^* = \frac{p^*\overline{q}^* - q^*\overline{p}^*}{A}$$

olur. $\overrightarrow{g}^*$ ın katsayıları birbirine eşitlenirse

$$-\frac{1}{\sqrt{A}}\left(p^*\overline{p}^* + q^*\overline{q}^*\right) = -\tau_g^*\sqrt{A}$$

veya

$$\tau_g^* = \frac{p^*\overline{p}^* + q^*\overline{q}^*}{A}$$

dır. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
\rho_n^* &= \frac{-q^*\overline{p}^* + p^*\overline{q}^*}{A} \\
\tau_g^* &= \frac{p^*\overline{p}^* + q^*\overline{q}^*}{A}
\end{aligned} \tag{3.80}$$

yazılır. Şimdi (3.12) ve (3.13) deki ifadeler (3.80) ile ilişkilendirilirse

$$\begin{aligned}
\rho_n^* &= \frac{p^*\overline{q}^* - q^*\overline{p}^*}{A} \\
&= \frac{\left(p\cos\theta - q\sin\theta\right)\left(\overline{p}\sin\theta + \overline{q}\cos\theta + \overline{\theta}\left(p\cos\theta - q\sin\theta\right)\right.}{A} \\
&\quad -\frac{\left(\overline{p}\cos\theta - \overline{q}\sin\theta - \overline{\theta}\left(p\sin\theta + q\cos\theta\right)\right)\left(p\sin\theta + q\cos\theta\right)}{A}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_n^* &= \frac{1}{A}[\overline{p}p\sin\theta\cos\theta + p\overline{q}\cos^2\theta + \overline{\theta}p^2\cos^2\theta - \overline{\theta}pq\sin\theta\cos\theta \\
&\quad -q\overline{p}\sin^2\theta - q\overline{q}\sin\theta\cos\theta - \overline{\theta}pq\sin\theta\cos\theta + \overline{\theta}q^2\sin^2\theta \\
&\quad -\overline{p}p\sin\theta\cos\theta + p\overline{q}\sin^2\theta + \overline{\theta}p^2\sin^2\theta + \overline{\theta}pq\sin\theta\cos\theta \\
&\quad -q\overline{p}\cos^2\theta + q\overline{q}\sin\theta\cos\theta + \overline{\theta}pq\sin\theta\cos\theta + \overline{\theta}q^2\cos^2\theta]
\end{aligned}$$

gerekli sadeleşmeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\rho_n^* &= \frac{1}{A}[p\overline{q}\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + \overline{\theta}p^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) - q\overline{p}\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) \\
&\quad +\overline{\theta}q^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)] \\
&= \frac{1}{A}\left(p\overline{q} + \overline{\theta}p^2 - q\overline{p} + \overline{\theta}q^2\right) \\
&= \frac{1}{A}\left(p\overline{q} - q\overline{p} + \overline{\theta}\left(p^2 + q^2\right)\right)
\end{aligned}$$

olur. Bu son eşitlik (2.26) ve (2.37) bağıntıları göz önüne alınarak düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\rho_n^* &= \frac{1}{A}\left(\rho_n + \overline{\theta}\left(\rho_n^2 + \tau_g^2\right)\right) \\
&= \frac{\rho_n + \overline{\theta}\left(\rho_n^2 + \tau_g^2\right)}{A}
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca

$$\tau_g^* = \frac{p^*\overline{p}^* + q^*\overline{q}^*}{A}$$

dır. Benzer işlemlerle

$$\begin{aligned}
\tau_g^* &= \frac{[(p\cos\theta - q\sin\theta)\left(\overline{p}\cos\theta - \overline{q}\sin\theta - \overline{\theta}\left(p\sin\theta - q\cos\theta\right)\right)}{A} \\
&\quad +(p\sin\theta + q\cos\theta)\left(\overline{p}\sin\theta + \overline{q}\cos\theta + \overline{\theta}\left(p\cos\theta - q\sin\theta\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_g^* &= \frac{1}{A}[\overline{p}p\cos^2\theta - p\overline{q}\sin\theta\cos\theta - \overline{\theta}p^2\sin\theta\cos\theta - \overline{\theta}pq\cos^2\theta \\
&\quad -q\overline{p}\sin\theta\cos\theta - q\overline{q}\sin^2\theta + \overline{\theta}pq\sin^2\theta + \overline{\theta}q^2\sin\theta\cos\theta \\
&\quad +\overline{p}p\sin^2\theta + p\overline{q}\sin\theta\cos\theta + \overline{\theta}p^2\sin\theta\cos\theta - \overline{\theta}pq\sin^2\theta \\
&\quad +q\overline{p}\sin\theta\cos\theta + q\overline{q}\cos^2\theta + \overline{\theta}pq\cos^2\theta - \overline{\theta}q^2\sin\theta\cos\theta]
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} \tau_g^* &= \frac{1}{A}\left(p\overline{p} - \overline{\theta}pq + q\overline{q} + \overline{\theta}pq\right) \\ &= \frac{1}{A}\left(p\overline{p} + q\overline{q}\right) \end{aligned}$$

olur. Son eşitlik (2.27) den faydalanarak düzenlenirse,

$$\tau_g^* = \frac{\tau_g}{A}$$

bulunur. Buna göre

$$\begin{aligned} \rho_n^* &= \frac{\rho_n + \overline{\theta}\left(\rho_n^2 + \tau_g^2\right)}{A} \\ \tau_g^* &= \frac{\tau_g}{A} \end{aligned} \tag{3.81}$$

bağıntıları meydana gelir. Diğer taraftan

$$\frac{d\overrightarrow{r}_1^*}{ds} = \overrightarrow{r_1^{*}}' = p^*\overrightarrow{r}_2^* = p^*\overrightarrow{n}^*$$

olduğunu biliyoruz. (3.73) den faydalanarak. $\overrightarrow{r_3}^*$ ın türevini alırsak

$$\overrightarrow{r_3}^{*'} = \left(\frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}}\right)' \overrightarrow{x}_1^* + \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x}_1^{*'} - \left(\frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}}\right)' \overrightarrow{g}^* + \overrightarrow{g}^{*'}\frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}}$$

(3.75) den $\overrightarrow{x}_1^{*'}$ ve $\overrightarrow{g}^{*'}$ türevlerini yukarıdaki eşitlikte yerine yazarsak.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r_3}^{*'} &= \frac{\sqrt{A}}{A}\overline{p}^{*'}\overrightarrow{x}_1^* + \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}}\sqrt{A}\left(\rho_g^*\overrightarrow{g}^* + \rho_n^*\overrightarrow{n}^*\right) - \frac{\sqrt{A}}{A}\overrightarrow{g}^*\overline{q}^{*'} \\ &\quad -\frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}}\left(\sqrt{A}\left(-\rho_g^*\overrightarrow{x}_1^* + \tau_g^*\overrightarrow{n}^*\right)\right) \end{aligned}$$

veya gerekli işlemleri yaparsak,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r_3}^{*'} &= \frac{\sqrt{A}}{A}\overline{p}^{*'}\overrightarrow{x}_1^* + \overline{p}^*\rho_g^*\overrightarrow{g}^* + \overline{p}^*\rho_n^*\overrightarrow{n}^* - \frac{\sqrt{A}}{A}\overrightarrow{g}^*\overline{q}^{*'} \\ &\quad +\overline{q}^*\rho_g^*\overrightarrow{x}_1^* - \overline{q}^*\tau_g^*\overrightarrow{n}^* \\ &= \left(\frac{\sqrt{A}}{A}\overline{p}^{*'} + \overline{q}^*\rho_g^*\right)\overrightarrow{x}_1^* + \left(\overline{p}^*\rho_g^* - \frac{\sqrt{A}}{A}\overline{q}^{*'}\right)\overrightarrow{g}^* \\ &\quad + \left(\overline{p}^*\rho_n^* - \overline{q}^*\tau_g^*\right)\overrightarrow{n}^* \end{aligned}$$

dır. (3.77) den $\overrightarrow{r_3}^{*^{'}}$ türevini yukarıdaki son bağıntı ile birlikte kullanırsak

$$-q^*\overrightarrow{n}^* = \left(\frac{\sqrt{A}}{A}\overline{p}^{*^{'}} + \overline{q}^*\rho_g^*\right)\overrightarrow{x}_1^* + \left(\overline{p}^*\rho_g^* - \frac{\sqrt{A}}{A}\overline{q}^{*^{'}}\right)\overrightarrow{g}^* + \left(\overline{p}^*\rho_n^* - \overline{q}^*\tau_g^*\right)\overrightarrow{n}^*$$

olur. Katsayıların eşitliğinden faydalanırsak

$$\frac{\sqrt{A}}{A}\overline{p}^{*^{'}} + \overline{q}^*\rho_g^* = 0 \tag{3.82}$$

olur. Buradan

$$\rho_g^* = -\frac{\overline{p}^{*^{'}}}{\overline{q}^*\sqrt{A}}$$

bulunur. Devam edilirse,

$$\overline{p}^*\rho_g^* - \frac{\sqrt{A}}{A}\overline{q}^{*^{'}} = 0 \tag{3.83}$$

dır. Buradan

$$\rho_g^* = \frac{\overline{q}^{*^{'}}}{\sqrt{A}\overline{p}^*}$$

elde edilir. (3.82) ve (3.83) bağıntıları sırasıyla $\overline{q}^*$ ve $\overline{p}^*$ ile çarpılır ve taraf tarafa toplanırsa,

$$\frac{\sqrt{A}}{A}\left(\overline{p}^{*^{'}}\overline{q}^* - \overline{p}^*\overline{q}^{*^{'}}\right) + \left(\overline{p}^{*2} + \overline{q}^{*2}\right)\rho_g^* = 0$$

olur. $\overline{p}^{*2} + \overline{q}^{*2} = A$ olduğunu kullanılırsa

$$\frac{1}{\sqrt{A}}\left(\overline{p}^{*^{'}}\overline{q}^* - \overline{p}^*\overline{q}^{*^{'}}\right) + A\rho_g^* = 0$$

yazılır. Buna göre

$$A\rho_g^* = -\frac{\overline{p}^{*^{'}}\overline{q}^* - \overline{p}^*\overline{q}^{*^{'}}}{\sqrt{A}}$$

veya

$$\rho_g^* = \frac{\overline{p}^*\overline{q}^{*'} - \overline{p}^{*'}\overline{q}^*}{A\sqrt{A}} \tag{3.84}$$

bulunur. ρ_g^* ı (3.82) ve (3.83) ten faydalanarak

$$\sqrt{A}\rho_g^* = \frac{\overline{q}^{*'}}{\overline{p}^*} = -\frac{\overline{p}^{*'}}{\overline{q}^*} \tag{3.85}$$

şeklinde düzenleyebiliriz. Ayrıca

$$\sqrt{A}\rho_g^* = \frac{\overline{q}^{*'}}{\overline{p}^*}$$

ve

$$\sqrt{A}\rho_g^* = -\frac{\overline{p}^{*'}}{\overline{q}^*}$$

yazılır. Bu iki eşitliğin her iki tarafını sırasıyla $\overline{p}^*$ ve $\overline{q}^*$ ile çarparsak.

$$\sqrt{A}\rho_g^*\overline{p}^* = \overline{q}^{*'}$$

$$\sqrt{A}\rho_g^*\overline{q}^* = -\overline{p}^{*'}$$

olur. Böylelikle son iki eşitliğin her iki tarafının kareleri alınır ve taraf tarafa toplanırsa

$$A\rho_g^{*2}\left(\overline{p}^{*2} + \overline{q}^{*2}\right) = \overline{q}^{*'2} + \overline{p}^{*'2}$$

bulunur. $\overline{p}^{*2} + \overline{q}^{*2} = A$ eşitliğini kullanırsak

$$A\rho_g^{*2}A = \overline{q}^{*'2} + \overline{p}^{*'2}$$

ya da

$$A^2\rho_g^{*2} = \overline{q}^{*'2} + \overline{p}^{*'2}$$

dır. Her iki tarafın karekökünü alırsak

$$A\rho_g^* = \sqrt{\overline{q}^{*'2} + \overline{p}^{*'2}} \tag{3.86}$$

olur. Eğer (3.84) bağıntısı, (2.26), (2.27) ve (3.12), (3.13) deki ifadeler dikkate alınarak gerekli düzenlemeler gerçekleştirilirse

$$\sqrt{A}\rho_g^* = \rho_g + \frac{\overline{\theta}}{A}\left[\tau_g^{'} + \overline{\theta}\rho_n^2\left(\frac{\tau_g}{\rho_n}\right)^{'}\right] \tag{3.87}$$

bulunur. Paralel regle yüzeyleride (3.69) daki ilişkilere bağlı $\overline{\theta}$ sabitini $\overline{\theta} = 2\varphi$ sabit değeri seçelim. (3.81) den

$$\rho_n^* = \frac{\rho_n + \overline{\theta}\left(\rho_n^2 + \tau_g^2\right)}{A}$$

olduğunu biliyoruz. (3.68) den

$$\sqrt{A} = \sqrt{1 + 2\overline{\theta}\rho_n + \overline{\theta}^2\left(\rho_n^2 + \tau_g^2\right)}$$

yazılır. $\overline{\theta} = 2\varphi$ alınırsa (3.69) dan

$$\overline{\theta} = 2\varphi = \frac{-2\rho_n}{\left(\rho_n^2 + \tau_g^2\right)}$$

olur. Buna göre

$$\begin{aligned}
\sqrt{A} &= \sqrt{1 + 2\left(\frac{-2\rho_n}{\left(\rho_n^2 + \tau_g^2\right)}\right)\rho_n + \left(\frac{-2\rho_n}{\left(\rho_n^2 + \tau_g^2\right)}\right)^2\left(\rho_n^2 + \tau_g^2\right)} \\
&= \sqrt{1 - \frac{4\rho_n^2}{\left(\rho_n^2 + \tau_g^2\right)} + \frac{4\rho_n^2}{\left(\rho_n^2 + \tau_g^2\right)}} \\
&= \sqrt{1}
\end{aligned}$$

veya

$$A = 1 \tag{3.88}$$

bulunur. (3.81) de

$$\overline{\theta} = 2\varphi = \frac{-2\rho_n}{\left(\rho_n^2 + \tau_g^2\right)}$$

ve $A = 1$ değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\rho_n^* &= \frac{\rho_n + \left(\dfrac{-2\rho_n}{\left(\rho_n^2 + \tau_g^2\right)}\right)\left(\rho_n^2 + \tau_g^2\right)}{1} \\
&= \rho_n - 2\rho_n \\
\rho_n^* &= -\rho_n \\
\rho_n^* + \rho_n &= 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\tau_g^* = \frac{\tau_g}{A}$$

olduğunu biliyoruz. Ayrıca den $\overline{\theta} = 2\varphi$ alındığında $A = 1$ dir. O halde

$$\begin{aligned}
\tau_g^* &= \frac{\tau_g}{1} \\
\tau_g^* &= \tau_g \\
\tau_g^* - \tau_g &= 0
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\rho_g^* - \rho_g = \frac{\tau_g^2 - \rho_n^2}{\left(\rho_n^2 + \tau_g^2\right)^2}\left(\tau_g^{'} + \rho_n^{'}\right)$$

eşitliği yazılır.

$[R_1^*]$ regle yüzeyinin (x^*) boğaz eğrilerinin geodezik olduğunu düşünelim.

$$\sqrt{A}\rho_g^* = \frac{\overline{q}^{*'}}{\overline{p}^*} = -\frac{\overline{p}^{*'}}{\overline{q}^*}$$

eşitliğinde $\rho_g^* = 0$ olması için $\overline{q}^{*'} = 0$ ve $\overline{p}^{*'} = 0$ olması gerekir. (3.12) ve (3.13) den faydalanırsak

$$\begin{aligned}
\overline{p}^{*'} &= \overline{p}^{'}\cos\theta - \overline{q}^{'}\sin\theta - \overline{\theta}\left(p^{'}\sin\theta + q^{'}\cos\theta\right) = 0 \qquad (3.89) \\
\overline{q}^{*'} &= \overline{p}^{'}\sin\theta + \overline{q}^{'}\cos\theta + \overline{\theta}\left(p^{'}\cos\theta - q^{'}\sin\theta\right) = 0
\end{aligned}$$

olacaktır. (3.89) bağıntısında $\theta = 0$ alarak, $\overline{p}^{'}$ ve $\overline{q}^{'}$ bilinmeyenlerini hesaplayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} \overline{p}^{'} \cos 0 - \overline{q}^{'} \sin 0 - \overline{\theta}\left(p^{'} \sin 0 + q^{'} \cos 0\right) &= 0 \\ \overline{p}^{'} - \overline{\theta} q^{'} &= 0 \end{aligned}$$

veya

$$\overline{p}^{'} = \overline{\theta} q^{'} \tag{3.90}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \overline{p}^{'} \sin 0 + \overline{q}^{'} \cos 0 + \overline{\theta}\left(p^{'} \cos 0 - q^{'} \sin 0\right) &= 0 \\ \overline{q}^{'} + \overline{\theta} p^{'} &= 0 \end{aligned}$$

veya

$$\overline{q}^{'} = -\overline{\theta} p^{'} \tag{3.91}$$

elde edilir. (3.90) ve (3.91) den yola çıkarak $c_1$ve c_2 integral sabiti olmak üzere

$$\begin{aligned} \int \overline{p}^{'} &= \int \overline{\theta} q^{'} \Longrightarrow \overline{p} = \overline{\theta} q + c_1 \\ \int \overline{q}^{'} &= \int -\overline{\theta} p^{'} \Longrightarrow \overline{q} = -\overline{\theta} p + c_2 \end{aligned} \tag{3.92}$$

buluruz.

Sonuç olarak, $[R_1^*]$ regle yüzeyinin (x^*) boğaz çizgisi gerekli ve yeterli şartlar için jeodezik olmalıdır. (3.92) den bu sonucu görürüz. Aynı zamanda $\overline{\theta} = 0$ için de bu sonuç geçerlidir.

$\overline{\theta} = 0$ durumunda $\overrightarrow{R}_1^*$ ve $\overrightarrow{R}_2^*$ dual birim vektörleri tarafından üretilen regle yüzeyleri, açılabilir regle yüzeylerdir. O zaman $\overline{\theta} = 0$ için (3.12) ve (3.13) deki ifadeler aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \overline{p}^* &= \overline{p} \cos 0 - \overline{q} \sin 0 - \overline{\theta}\,(p \sin 0 + q \cos 0) \\ \overline{p}^* &= \overline{p} - \overline{\theta} q \end{aligned}$$

Ayrıca

$$\overline{p}^{*}=0 \;\; \text{için} \;\; \overline{p}=\overline{\theta}q \tag{3.93}$$

olur. Benzer olarak

$$\begin{aligned}\overline{q}^{*} &= \overline{p}\sin 0+\overline{q}\cos 0+\overline{\theta}\left(p\cos 0-q\sin 0\right)\\ \overline{q}^{*} &= \overline{q}+\overline{\theta}p\end{aligned}$$

veya

$$\overline{q}^{*}=0 \;\; \text{için} \;\; \overline{q}=-\overline{\theta}p \tag{3.94}$$

olur. $\overline{\theta}=\lambda$ seçildiğinde, (3.93) ve (3.94) ten dolayı regle yüzeylerine bağlı paralel regle yüzeyleri

$$\frac{\overline{p}}{q}=-\frac{\overline{q}}{p}=\lambda=sbt$$

ilişkisine sahiptir. Bu durumda paralel regle yüzeyi geodezik olur. $[R_1]$ regle yüzeyinin (x) boğaz çizgisi geodezik olur. Yani (3.89) dan dolayı

$$\overline{p}^{'}\cos\theta-\overline{q}^{'}\sin\theta-\overline{\theta}\left(p^{'}\sin\theta+q^{'}\cos\theta\right)=0$$

dır. Bu eşitlikte $\overline{p}^{'}=0$ ve $\overline{q}^{'}=0$ alındığında,

$$0\cos\theta-0\sin\theta-\overline{\theta}\left(p^{'}\sin\theta+q^{'}\cos\theta\right)=0$$

dır. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$-\overline{\theta}\left(p^{'}\sin\theta+q^{'}\cos\theta\right)=0$$

olur. Bu eşitlikte $\overline{\theta}=\lambda$ seçildiği için

$$\left(p^{'}\sin\theta+q^{'}\cos\theta\right)=0$$

olmalıdır. O halde $p^{'}=0$ ve $q^{'}=0$ bulunur. Yani $p=sbt$ ve $q=sbt$ dir.

Sonuç olarak, $[R_1^*]$ regle yüzeyinin (x^*) boğaz çizgisi gerekli ve yeterli şartlar için jeodezik olması için $[R_1]$ regle yüzeyinin(x) boğaz çizgisinin küresel helis olması gerekir.

Şimdi $[R_1^*]$ regle yüzeyinin (x^*) boğaz çizgisinin aynı koşulları sağlayıp sağlamadığına bakalım. $\rho_n^*=0$ olduğu için oskülatör şerit oluşur. Buna göre

$$\overline{\varphi}=\frac{\overline{p}q-p\overline{q}}{p^2+q^2}=-\frac{\rho_n}{\rho_n^2+\tau_g^2}$$

veya

$$\overline{\varphi}=-\frac{\rho_n}{\rho_n^2+\tau_g^2}$$

olduğunu biliyoruz. Bu eşitlikten

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}\left(\rho_n^2+\tau_g^2\right) &= -\rho_n\\ \overline{\varphi}\left(\rho_n^2+\tau_g^2\right)+\rho_n &= 0\end{aligned}$$

dır. $\overline{\varphi}=\overline{\theta}$ alınırsa

$$\overline{\theta}\left(\rho_n^2+\tau_g^2\right)+\rho_n=0$$

oluşur. Aşağıdaki

$$\overline{\varphi}=-\frac{\rho_n}{\rho_n^2+\tau_g^2}=sbt$$

ilişkisini doğrulayan paralel regle yüzeylerinin özel regle yüzeylerine bağlanması durumunda (x) boğaz çizgisinin ρ_n,τ_g büyüklükleri arasında $\overline{\varphi}=\overline{\theta}$ gibi sabit değeri seçeriz. Özel regle yüzeylerinin (x) boğaz çizgisi bu durumda oskülatör şerit oluşur. $\overline{\varphi}=\overline{\theta}$ olması durumunda (3.54) den $\overline{\varphi}^*=0$ olduğunu ifade eder.

Bu durumda özel regle yüzeylerinin ani dönme eksenleri bu ilişkiler doğrultsunda $\left(\overrightarrow{R_1^*},\overrightarrow{R_2^*}\right)$ düzlemi içinde bulunur.

$[R_1]$ regle yüzeyinin (x) boğaz çizgisinin şerit olması için gerek ve yeter koşul $[R_1^*]$ paralel regle yüzeylerinin (x^*) boğaz çizgisi şerit olmasıdır.

KAYNAKLAR

1. NİZAMİOĞLU Ş., Surface reglees parallel E.Ü. Fen Fakültesi Dergisi Cilt 9 Sayı 1 İZMİR, 1986

2. BLASCHKE W., Diferensiyel Geometri Dersleri, İstanbul Üniversitesi Yay. No. 433, 1949

3. UĞURLU H. H., Relations among the Instantaneous Velocities of Trihedrons Depending on a Space-like Ruled Surfaces, Celal Bayar Üni. MANİSA, 1997

4. BİRAN L., Mouvement a parametre. RFSUİ Serie A, Tome 12 Facs 3 İSTANBUL

5. KAYA R., Analitik Geometri, Bilim Teknik Yayınevi, 1996.

6. HACISALİHOĞLU H. H., Diferensiyel Geometri, Cilt I, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları, 1993.

7. HACISALİHOĞLU H. H., Diferensiyel Geometri, Cilt II, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları, 2000.

8. HACISALİHOĞLU H. H., Diferensiyel Geometri, Cilt III, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları, 2004.

9. HACISALİHOĞLU H. H., Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi, Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, 1983.

10. HACISALİHOĞLU H. H., İki ve Üç Bouyutlu Uzaylarda Analitik Geometri, Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, 1982.

11. AKBULUT F., Vektörel Analiz, Ege Üniv. Fen Fak. Kitap Serisi, 1970.