T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MUTLAK TOPLANABİLME METOTLARI

Tezi Hazırlayan
Tunçay BULUT

Tezi Yöneten
Yrd. Doç. Dr. A. Nihal TUNCER

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Haziran 2005
KAYSERİ

Bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

27/06/2005

JÜRİ:

Üye : Prof. Dr. Mehmet Özdemir

Üye : Doç. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

Üye : Yrd. Doç. Dr. A. Nihal TUNCER

ONAY :

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun 05-07-2005 tarih ve 12 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

07/07/2005

Prof. Dr. Nusret AYYILDIZ
Müdür
Enstitü Müdürü
Mühür ve İmza

N. Ayyıldız

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın planlanması, yürütülmesi ve yazılmasında değerli katkıları ile en büyük desteği gördüğüm saygıdeğer hocam Sayın Prof. Dr. Hüseyin Bor'a, Sayın Doç. Dr. Hikmet ÖZARSLAN'a ve Yrd. Doç. Dr. A. Nihal TUNCER hocama ve manevi desteğinden dolayı eşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım

Tunçay BULUT

MUTLAK TOPLANABİLME METOTLARI

Ö Z E T

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölümde, tezin içeriği ile ilgili bir giriş yapıldı.
İkinci bölümde, bazı temel tanımlar ve teoremler verildi.
Üçüncü bölümde, $\varphi-\left|\overline{N},p_n;\delta\right|_k$ toplanabilme tanımı kullanılarak, bir teorem ifade ve ispat edildi. Yine aynı tanım kullanılarak, $\psi-\left|\overline{N},q_n;\delta\right|_k$ ve $\varphi-\left|\overline{N},p_n;\delta\right|_k$ metotları arasındaki ilişkiyi veren bir teorem ifade ve ispat edildi.
Dördüncü bölümde, $\left|\overline{N},p_n;\delta\right|_k$ ve $\varphi-\left|\overline{N},p_n;\delta\right|_k$ toplanabilme tanımları kullanılarak, dört teorem ifade ve ispat edildi.

Anahtar Kelimeler:

Sonsuz Seriler
Mutlak Toplanabilme Metotları
Toplanabilme Çarpanları
Fourier Serileri
Local Property

ABSOLUTE SUMMABILITY METHODS

ABSTRACT

This thesis consists of four chapters:
In the first chapter, the introduction is given dealing with thesis.
İn the second chapter, some basic definitions and theorems are given.
In the third chapter, a theorem is stated and proved by using $\varphi-\left|\bar{N},p_n;\delta\right|_k$ summability definition. Also, by using this definitions a theorem, which deal with relationships among the $\psi-\left|\bar{N},q_n;\delta\right|_k$ and $\varphi-\left|\bar{N},p_n;\delta\right|_k$ summability methods, is stated and proved.
In the fourth chapters, four theorems are stated and proved by using $\left|\bar{N},p_n;\delta\right|_k$ and $\varphi-\left|\bar{N},p_n;\delta\right|_k$ summability definitions.

Keywords:

Infinite Series
Absolute Summability Methods
Summability Factors
Fourier Series
Local Property

SEMBOLLER

N	**:** Doğal sayılar kümesi
$\sum a_n$	**:** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi
(s_n)	**:** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi
$s_n = O(1)$	**:** (s_n) dizisi sınırlı

İÇİNDEKİLER

1.BÖLÜM

GİRİŞ

Son zamanlarda bazı şartlar altında çeşitli toplanabilme metotları arasındaki ilişkiler, farklı matematikçiler tarafından incelenmiş ve bunlardan bir takım sonuçlar elde edilmiştir.

Biz bu çalışmamızda, $\left|\overline{N}, p_n ; \delta\right|_k$ ve $\varphi-\left|\overline{N}, p_n ; \delta\right|_k$ tanımlarını kullanarak, bir sonsuz serinin (λ_n) toplanabilme çarpanı kullanılarak, bu metotlardan birisi ile toplanabilirliğini inceledik. Ayrıca, $\psi-\left|\overline{N}, q_n ; \delta\right|_k$ ve $\varphi-\left|\overline{N}, p_n ; \delta\right|_k$ metotları için, hangi şartlar altında birinin diğerini gerektirdiğini inceledik.

2.BÖLÜM

TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde, ilk olarak konumuzla ilgili olan bazı tanım ve teoremleri vermekle başlayacağız.

Aksi bir şey söylenmedikçe, bu çalışmamızda baştan sona kadar (s_n) , $\sum a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisini ve (p_n),

$$P_n = \sum_{v=0}^{n} p_v \to \infty \ , \quad (n \to \infty), \ (P_{-i} = p_{-i} = 0 \, , \ i \geq 1)$$

olacak şekilde pozitif sayıların bir dizisini gösterecektir.

TANIM 2.1. (s_n), $\sum a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisini ve (u_n) de 1-inci mertebeden Cesàro ortalamasını göstersin.Yani

$$u_n = \frac{1}{n+1} \sum_{v=0}^{n} s_v \tag{2.1}$$

olsun. Eğer

$$\lim_{n \to \infty} u_n = s$$

ise, $\sum a_n$ serisi (C,1) toplanabilirdir denir.

TANIM 2.2. (u_n), (2.1) deki gibi tanımlanmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| u_n - u_{n-1} \right| < \infty \tag{2.2}$$

ise $\sum a_n$ serisi $\left| C, 1 \right|$ toplanabilirdir denir [1].

Eğer $k \geq 1$ olmak üzere,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \left| u_n - u_{n-1} \right|^k < \infty \tag{2.3}$$

ise $\sum a_n$ serisi $\left| C, 1 \right|_k$ toplanabilirdir denir [2].

Özel olarak, (2.3) de k=1 alırsak, $\left| C, 1 \right|$ toplanabilmeyi elde ederiz.

(p_n), başta ifade ettiğimiz gibi pozitif sayıların bir dizisi olsun ve

$$t_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^{n} p_v s_v \tag{2.4}$$

şeklinde alalım. Bununla ilgili olarak da şu tanımları verelim.

TANIM 2.3. Eğer $n \to \infty$ için (t_n) nin bir limiti var ise, $\sum a_n$ serisi bu limit değerine $\left(\overline{N}, p_n \right)$ toplanabilirdir denir [3].

$\left(\overline{N}, p_n \right)$ metodu regüler bir metotdur. Bu metodun regüler olması için gerek ve yeter şart, $n \to \infty$ için $P_n \to \infty$ olmasıdır [4].

TANIM 2.4. (t_n), (2.4) deki gibi tanımlanmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| t_n - t_{n-1} \right| < \infty \tag{2.5}$$

ise, $\sum a_n$ serisi $\left|\bar{N}, p_n\right|$ toplanabilirdir denir [5].

TANIM 2.5. $k \geq 1$ olmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|t_n - t_{n-1}\right|^k < \infty \tag{2.6}$$

ise, $\sum a_n$ serisi $\left|\bar{N}, p_n\right|_k$ toplanabilirdir denir [6].

Özel olarak (2.6) de $\forall n \in N$ için $p_n = 1$ alırsak, $\left|C,1\right|_k$ toplanabilmeyi elde ederiz.

TANIM 2.6. $k \geq 1$ ve $\delta \geq 0$ olmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|t_n - t_{n-1}\right|^k < \infty \tag{2.7}$$

ise, $\sum a_n$ serisi $\left|\bar{N}, p_n ; \delta\right|_k$ toplanabilirdir denir [7].

TANIM 2.7. (φ_n), pozitif reel sayıların bir dizisi olsun. $k \geq 1$ ve $\delta \geq 0$ olmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n^{\delta k+k-1}\left|t_n - t_{n-1}\right|^k < \infty \tag{2.8}$$

ise, $\sum a_n$ serisi $\varphi - \left|\bar{N}, p_n ; \delta\right|_k$ toplanabilirdir denir [8].

Özel olarak (2.7) de $\varphi_n = \dfrac{P_n}{p_n}$ ve $\delta = 0$ alırsak, $\left|\bar{N}, p_n\right|_k$ toplanabilmeyi elde ederiz.

TANIM 2.8. A ve B verilen iki toplanabilme metodu olsun. A-toplanabilen bir dizi, aynı değere B-toplanabiliyorsa, A ya B yi gerektiriyor denir ve $A \subseteq B$ ile gösterilir.
Eğer $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ ise, A-metodu B-metoduna denktir denir [4].

TANIM 2.9. Bir $\sum a_n \lambda_n$ serisi bir B metodu ile toplanabildiği halde, $\sum a_n$ serisi de bir A metodu ile toplanabiliyorsa o zaman λ_n çarpanı (A,B) sınıfındadır ve $\lambda_n \in (A,B)$ yazılır [9].

TANIM 2.10. Bir $\sum a_n$ serisi verilmiş olsun. Eğer $\sum a_n \lambda_n$ serisi bir B toplanabilme metodu yardımıyla toplanabiliyorsa, (λ_n) dizisine $\sum a_n$ serisinin B metodu için bir toplanabilme çarpanı denir [10].

TANIM 2.11. (Hölder Eşitsizliği)

$p>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0,\quad b_1, b_2, \ldots, b_n \geq 0$ olsun..
Bu taktirde

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{1/q} \tag{2.9}$$

dır [11].

TANIM 2.12. (Minkowski Eşitsizliği)

$p \geq 1,\quad a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0,\quad b_1, b_2, \ldots, b_n \geq 0$ olsun . Bu taktirde

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{1/p} \tag{2.10}$$

dır [11].

TANIM 2.13. (Abel Kısmi Toplama Formülü)

$a_1,\ a_2,\ \ldots$ ve $b_1, b_2,\ \ldots$ gibi herhangi iki sayı dizisi alalım ve $n \geq 0$ için

$$\sum_{v=0}^{n} a_v = s_n$$

koyalım. Bu taktirde her $n \geq 0$ ve her $k \geq 0$ için

$$\sum_{v=n+1}^{n+k} a_v b_v = \sum_{v=n+1}^{n+k} s_v \left(b_v - b_{v+1}\right) - s_n b_{n+1} + s_{n+k} b_{n+k+1} \tag{2.11}$$

bulunur [12].

TANIM 2.14. Her x için $f(x+\lambda)=f(x)$ olacak şekilde bir $\lambda > 0$ sayısı mevcut ise f fonksiyonuna periyodik bir fonksiyon ve λ sayısına da f nin periyodu denir.

Bilindiği gibi, sinx ve cosx trigonometrik fonksiyonları 2π periyotlu, periyodik fonksiyonlrdır. Öyleyse her $v \in N$ için, a_v ve b_v ler keyfi sabitler olmak üzere,

$$a_v \sin vx + b_v \cos vx \tag{2.12}$$

fonksiyonu 2π periyotlu, periyodik bir fonksiyondur [13].

TANIM 2.15. x bir reel değişken ve a_0, a_1, $b_1, \ldots$ ler de x den bağımsız katsayılar olmak üzere

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{v=1}^{\infty}\left(a_v \cos vx + b_v \sin vx\right) \tag{2.13}$$

şeklindeki seriye bir trigonometrik seri denir [14]. Ayrıca,

$$T(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{v=1}^{n}\left(a_v \cos vx + b_v \sin vx\right) \tag{2.14}$$

sonlu trigonometrik toplamına n inci mertebeden bir trigonometrik polinom denir [14].

TANIM 2.16. f, $[-\pi, \pi]$ aralığında integrallenebilen bir fonksiyon ve a_v, b_v de f den elde edilen Fourier katsayıları olmak üzere

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{v=1}^{\infty}\left(a_v \cos vx + b_v \sin vx\right), \quad (-\pi \le x \le \pi) \tag{2.15}$$

trigonometrik serisine f tarafından meydana getirilen veya f fonksiyonuna ait Fourier serisi denir ve sembolik olarak

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{v=1}^{\infty}\left(a_v \cos vx + b_v \sin vx\right) \qquad (2.16)$$

şeklinde gösterilir [15].

Genellemede bir kısıtlama yapmadan f(x) in Fourier serisinin sabit teriminin sıfır olduğunu farzedebiliriz. Bu taktirde

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0 \qquad (2.17)$$

ve

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x) \qquad (2.18)$$

olur.

Şimdi birinci bölümün son kısmında konumuzla ilgili teoremlerin sadece ifadelerini vermekle yetineceğiz.

TEOREM 2.17. (p_n),

$$P_n = O(np_n), \quad n \to \infty \qquad (2.19)$$

olacak şekilde pozitif sayıların bir dizisi olsun. (X_n), pozitif azalmayan bir dizi olmak üzere, (β_n) ve (λ_n) dizileri de

$$|\Delta\lambda_n| \le \beta_n, \qquad (2.20)$$

$$\beta_n \to 0, \quad n \to \infty, \qquad (2.21)$$

$$\lambda_m X_m = O(1), \quad m \to \infty, \tag{2.22}$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} nX_n |\Delta\beta_n| < \infty \tag{2.23}$$

şartlarını sağlasın.

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{p_n}{P_n} |t_n|^k = O(X_m), \quad m \to \infty \tag{2.24}$$

ise, $\sum a_n \lambda_n$ serisi $\left|\overline{N}, p_n\right|_k$, $k \geq 1$ toplanabilirdir [16].

TEOREM 2.18. (p_n) ve (q_n), $p_n > 0$, $q_n > 0$ olacak şekilde iki dizi ve $P_n \to \infty$, $Q_n \to \infty$ olmak üzere

$$P_n / p_n = O(Q_n / q_n) \tag{2.25}$$

olsun.

$$\lambda_n \in \left(\left|\overline{N}, q_n\right|_k, \left|\overline{N}, p_n\right|_k \right), \quad k \geq 1 \tag{2.26}$$

olması için $\Delta\lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n+1}$ olmak üzere

$$\lambda_n = O(q_n P_n / p_n Q_n) \tag{2.27}$$

ve

$$P_n Q_{n-1} \Delta\lambda_n + (q_n P_n - p_n Q_n)\lambda_n = O(q_n P_n) \tag{2.28}$$

olması yeterlidir [17].

TEOREM 2.19. $k \geq 1$ olsun. (p_n) ve (λ_n) dizileri, $X_n = P_n / np_n$ olmak üzere

$$\Delta X_n = O(1/n), \tag{2.29}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n^{k-1} \frac{|\lambda_n|^k + |\lambda_{n+1}|^k}{n} < \infty, \tag{2.30}$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(X_n^k + 1\right)|\Delta\lambda_n| < \infty \tag{2.31}$$

şartlarını sağlasınlar. Bu taktirde

$$\sum A_n(t)\lambda_n X_n \tag{2.32}$$

serisinin $\left|\overline{N}, p_n\right|_k$ toplanabilirliği, bir noktada kendi özelliği tarafından sağlanır [18].

TEOREM 2.20. Eğer (s_n) sınırlı bir dizi ve (λ_n) dizisi, $\Delta\lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n+1}$ olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n}{p_n}|\lambda_n| < \infty \tag{2.33}$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta\lambda_n| < \infty \tag{2.34}$$

şartlarını sağlıyor ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n$ serisi $\left|\bar{N}, p_n\right|$ toplanabilirdir [19].

TEOREM 2.21. Eğer (2.33) ve (2.34) şartları sağlanıyorsa, (2.32) serisinin bir noktadaki $\left|\bar{N}, p_n\right|$ toplanabilirliği bir lokal özelliktir [19].

LEMMA 2.22. (X_n), pozitif azalmayan bir dizi ve (β_n), (2.14) ve (2.16) şartlarını sağlayacak şekilde pozitif azalmayan bir dizi ise, bu taktirde

$$nX_n\beta_n = o(1), \quad n \to \infty \tag{2.35}$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n\beta_n < \infty \tag{2.36}$$

olur [20].

3. BÖLÜM

$\varphi-\left|\overline{N},p_n;\delta\right|_k$ TOPLANABİLME METODU İLE İLGİLİ TEOREMLER

Bu bölümde $\sum a_n\lambda_n$ serisinin hangi şartlar altında $\varphi-\left|\overline{N},p_n;\delta\right|_k$ toplanabilmesi ile ilgili bir teorem, ayrıca, iki toplama metodunun hangi şartlar altında birinin diğerini gerektirmesini veren bir teoremi ifade ve ispat edeceğiz.

TEOREM 3.1. (p_n), (2.19) şartını sağlayan pozitif sayıların bir dizisi ve (φ_n) de

$$\varphi_n p_n = O(P_n) \tag{3.1}$$

ve

$$\sum_{n=v+1}^{\infty} \varphi_n^{\delta k-1}\frac{1}{P_{n-1}} = O\left(\varphi_v^{\delta k}\frac{1}{P_v}\right) \tag{3.2}$$

olacak şekilde pozitif reel sayıların bir dizisi olsun. (X_n) pozitif azalmayan bir dizi, (β_n) ve (λ_n), (2.20)-(2.23) şartlarını sağlayan diziler olsun. Eğer t_n, (na_n) dizisinin $(C,1)$ ortalaması olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{m}\varphi_n^{\delta k-1}\left|t_n\right|^k = O(X_m), \quad m\to\infty \tag{3.3}$$

ise bu taktirde $\sum a_n\lambda_n$ serisi $k\geq 1$ ve $0\leq\delta k\leq 1$ olmak üzere $\varphi-\left|\overline{N},p_n;\delta\right|_k$ toplanabilirdir [21].

İSPAT : $\sum a_n\lambda_n$ serisinin $\left(\overline{N},p_n\right)$ ortalaması (T_n) olsun. Tanımdan

$$T_n = \frac{1}{P_n}\sum_{v=0}^{n} p_v \sum_{i=0}^{v} a_i \lambda_i = \frac{1}{P_n}\sum_{v=0}^{n}(P_n - P_{v-1}) a_v \lambda_v \tag{3.4}$$

elde ederiz.

$\sum a_n$ serisinin $\varphi - \left|\overline{N}, p_n ; \delta\right|_k$ toplanabilir olması demek,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{\delta k+k-1} \left|T_n - T_{n-1}\right|^k < \infty \tag{3.5}$$

olmasıdır.Diğer taraftan, $n \geq 1$ için

$$T_n - T_{n-1} = \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n} P_{v-1} a_v \lambda_v \tag{3.6}$$

$$= \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n} \frac{P_{v-1}\lambda_v}{v} v a_v$$

olacak şekilde bir düzenleme yapalım. t_n, (na_n) dizisinin $(C,1)$ ortalaması olmak üzere bu eşitliğe Abel Kısmi Toplama Formülünü uygularsak

$$T_n - T_{n-1} = \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_{v-1}\lambda_v}{v} - \frac{P_v \lambda_{v+1}}{v+1} \right)(v+1) t_v + \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} (n+1) t_n \frac{P_{n-1}\lambda_n}{n}$$

$$= \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{v P_{v-1} \lambda_v t_v}{v} + \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{P_{v-1}\lambda_v t_v}{v} - \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} P_v \lambda_{v+1} t_v$$

$$+ \frac{(n+1)}{nP_n} p_n t_n \lambda_n$$

$$=\frac{p_n}{P_nP_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}P_v\lambda_v t_v\,\frac{v+1}{v}-\frac{p_n}{P_nP_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}p_v\lambda_v t_v\,\frac{v+1}{v}$$

$$-\frac{p_n}{P_nP_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}P_v\lambda_{v+1}t_v\,\frac{v+1}{v}+\frac{p_n}{P_nP_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}P_v\lambda_{v+1}t_v\,\frac{1}{v}+\frac{(n+1)}{nP_n}p_nt_n\lambda_n$$

$$=\frac{(n+1)}{nP_n}p_nt_n\lambda_n-\frac{p_n}{P_nP_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}p_v\lambda_v t_v\,\frac{v+1}{v}+\frac{p_n}{P_nP_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}P_v\Delta\lambda_v t_v\,\frac{v+1}{v}$$

$$+\frac{p_n}{P_nP_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}P_v\lambda_{v+1}t_v\,\frac{1}{v}$$

$$=T_{n,1}+T_{n,2}+T_{n,3}+T_{n,4}$$

elde ederiz. Teoremi ispat etmek için Minkowski eşitsizliğinden yaralanarak, $r=1,2,3,4$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n^{\delta k+k-1}\left|T_{n,r}\right|^k<\infty \tag{3,7}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. İlk olarak

$$\sum_{n=1}^{m}\varphi_n^{\delta k+k-1}\left|T_{n,1}\right|^k=\sum_{n=1}^{m}\varphi_n^{\delta k+k-1}\left|\frac{(n+1)}{nP_n}p_nt_n\lambda_n\right|^k$$

$$=\sum_{n=1}^{m}\varphi_n^{\delta k+k-1}\left(\frac{p_n}{P_n}\right)^k\left(\frac{n+1}{n}\right)^k|t_n|^k|\lambda_n|^k$$

$$=\sum_{n=1}^{m}|\lambda_n|^{k-1}|\lambda_n||t_n|^k\left|\frac{n+1}{n}\right|^k\varphi_n^{\delta k-1}$$

(2.22) şartından dolayı $\lambda_n X_n = O(1), \quad n \to \infty$ olduğundan

$$\sum_{n=1}^{m} \varphi_n^{\delta k+k-1} |T_{n,1}|^k = O(1) \sum_{n=1}^{m} |\lambda_n| \varphi_n^{\delta k-1} |t_n|^k$$

elde edilir. Bu ifadeye Abel Kısmi Toplama Formülünü uygularsak

$$\sum_{n=1}^{m} \varphi_n^{\delta k+k-1} |T_{n,1}|^k = O(1) \sum_{n=1}^{m-1} \Delta|\lambda_n| \sum_{v=1}^{n} \varphi_v^{\delta k-1} |t_v|^k + |\lambda_m| \sum_{n=1}^{m} \varphi_n^{\delta k-1} |t_n|^k$$

sonucu bulunur. (2.20), (2.22), (2.36) şartları ve teoremin hipotezinden dolayı

$$\sum_{n=1}^{m} \varphi_n^{\delta k+k-1} |T_{n,1}|^k = O(1) \sum_{n=1}^{m-1} \beta_n X_n + O(1) |\lambda_m| X_m$$

$$= O(1) \quad (m \to \infty)$$

elde ederiz. Şimdi $k > 1$ için $\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$ 0lmak üzere Hölder Eşitsizliğini uygulayarak,

$$\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\delta k+k-1} |T_{n,2}|^k = \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\delta k+k-1} \left| \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} p_v t_v \lambda_v \frac{v+1}{v} \right|^k$$

$$= \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\delta k+k-1} \left(\frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \right)^k \left| \sum_{v=1}^{n-1} p_v t_v \lambda_v \frac{v+1}{v} \right|^k$$

$$\leq \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\delta k-1} \left(\frac{1}{P_{n-1}} \right)^k \sum_{v=1}^{n-1} p_v^k |t_v|^k |\lambda_v|^k$$

$$\leq \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\delta k-1} \left(\frac{1}{P_{n-1}} \right)^k \left\{ \left[\sum_{v=1}^{n-1} \left(p_v^{1/k} |t_v| |\lambda_v| \right)^k \right]^{1/k} \left[\sum_{v=1}^{n-1} \left(p_v^{1/k'} \right)^{k'} \right]^{1/k'} \right\}^k$$

$$= \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\delta k-1} \left(\frac{1}{P_{n-1}} \right)^k \left[\sum_{v=1}^{n-1} p_v |t_v|^k |\lambda_v|^k \right] \cdot \left[\sum_{v=1}^{n-1} p_v \right]^{k/k'}$$

$$= \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\delta k-1} \frac{1}{P_{n-1}} \left[\sum_{v=1}^{n-1} p_v |t_v|^k |\lambda_v|^k \right] \cdot \left[\frac{1}{P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} p_v \right]^{k-1}$$

$$= O(1) \sum_{v=1}^{m} |\lambda_v|^{k-1} |\lambda_v| p_v |t_v|^k \sum_{n=v+1}^{m+1} \varphi_n^{\delta k-1} \frac{1}{P_{n-1}}$$

(2.22) şartı ve teoremin hipotezinde bulunan (3.2) şartından dolayı

$$\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\delta k+k-1} |T_{n,2}|^k = O(1) \sum_{v=1}^{m} |\lambda_v| |t_v|^k \varphi_v^{\delta k-1}$$

elde ederiz. Bu ifadeye Abel Kısmi Toplama Formülünü uygularsak, $T_{n,1}$ deki gibi

$$\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\delta k+k-1} |T_{n,2}|^k = O(1) \sum_{v=1}^{m-1} \Delta |\lambda_v| \sum_{n=1}^{v} \varphi_n^{\delta k-1} |t_n|^k + |\lambda_m| \sum_{v=1}^{m} \varphi_v^{\delta k-1} |t_v|^k$$

sonucu bulunur. (2.20), (2.22), (2.36) şartları ve teoremin hipotezinden dolayı

$$\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\delta k+k-1} |T_{n,2}|^k = O(1) \sum_{v=1}^{m-1} \beta_v X_v + O(1) |\lambda_m| X_m$$

$$= O(1) \quad (m \to \infty)$$

Şimdi (2.19) ve (2.35) şartlarından dolayı $v\beta_v = o(1/X_v) = O(1)$ olmasını ve Hölder Eşitsizliğini kullanarak,

$$\sum_{n=2}^{m+1}\varphi_n^{\delta k+k-1}\left|T_{n,3}\right|^k = \sum_{n=2}^{m+1}\varphi_n^{\delta k+k-1}\left|\frac{p_n}{P_nP_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}P_v t_v \Delta\lambda_v \frac{v+1}{v}\right|^k$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\varphi_n^{\delta k-1}\left(\frac{1}{P_{n-1}}\right)^k\left|\sum_{v=1}^{n-1} vp_v\Delta\lambda_v t_v\right|^k$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\varphi_n^{\delta k-1}\left(\frac{1}{P_{n-1}}\right)^k\left\{\left[\sum_{v=1}^{n-1}\left(vp_v^{1/k}\left|\Delta\lambda_v\right|\left|t_v\right|\right)^k\right]^{1/k}\left[\sum_{v=1}^{n-1}\left(p_v^{1/k'}\right)^{k'}\right]^{1/k'}\right\}^k$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\varphi_n^{\delta k-1}\left(\frac{1}{P_{n-1}}\right)^k\left[\sum_{v=1}^{n-1}v^k p_v\beta_v^k\left|t_v\right|^k\right]\cdot\left[\sum_{v=1}^{n-1}p_v\right]^{k/k'}$$

$$= \sum_{n=2}^{m+1}\varphi_n^{\delta k-1}\frac{1}{P_{n-1}}\left[\sum_{v=1}^{n-1}(v\beta_v)^k p_v\left|t_v\right|^k\right]\cdot\left[\frac{1}{P_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}p_v\right]^{k-1}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m}(v\beta_v)^{k-1}(v\beta_v)p_v\left|t_v\right|^k\sum_{n=v+1}^{m+1}\varphi_n^{\delta k-1}\frac{1}{P_{n-1}}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m}(v\beta_v)\varphi_v^{\delta k-1}\left|t_v\right|^k$$

elde ederiz. Bu ifadeye Abel Kısmi Toplama Formülünü uygularsak,

$$\sum_{n=2}^{m+1}\varphi_n^{\delta k+k-1}\left|T_{n,3}\right|^k = O(1)\sum_{v=1}^{m-1}\Delta(v\beta_v)\sum_{r=1}^{v}\varphi_r^{\delta k-1}\left|t_r\right|^k + O(1)m\beta_m\sum_{v=1}^{m}\varphi_v^{\delta k-1}\left|t_v\right|^k$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m-1}\left|\Delta(v\beta_v)\right|X_v + O(1)m\beta_m X_m$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m-1} \left| v\beta_v - (v+1)\beta_{v+1} \right| X_v + O(1) m\beta_m X_m$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m-1} \left| v\Delta\beta_v - \beta_{v+1} \right| X_v + O(1) m\beta_m X_m$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m-1} v\left|\Delta\beta_v\right| X_v + O(1)\sum_{v=1}^{m-1} \beta_{v+1} X_v + O(1) m\beta_m X_m$$

(2.23), (2.35) ve (2.36) şartlarından dolayı

$$\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\delta k+k-1} \left| T_{n,3} \right|^k = O(1) \qquad (m \to \infty)$$

Son olarak (2.19), (3.1) şartlarını ve Hölder Eşitsizliğini kullanarak

$$\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\delta k+k-1} \left| T_{n,4} \right|^k = \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\delta k+k-1} \left| \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} P_v t_v \lambda_{v+1} \frac{1}{v} \right|^k$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\delta k-1} \left(\frac{1}{P_{n-1}} \right)^k \left| \sum_{v=1}^{n-1} p_v \lambda_{v+1} t_v \right|^k$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\delta k-1} \left(\frac{1}{P_{n-1}} \right)^k \left\{ \left[\sum_{v=1}^{n-1} \left(p_v^{1/k} |\lambda_{v+1}| |t_v| \right)^k \right]^{1/k} \left[\sum_{v=1}^{n-1} \left(p_v^{1/k'} \right)^{k'} \right]^{1/k'} \right\}^k$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\delta k-1} \left(\frac{1}{P_{n-1}} \right)^k \left[\sum_{v=1}^{n-1} p_v |t_v|^k |\lambda_{v+1}|^k \right] \cdot \left[\sum_{v=1}^{n-1} p_v \right]^{k/k'}$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\delta k-1} \frac{1}{P_{n-1}} \left[\sum_{v=1}^{n-1} p_v |t_v|^k |\lambda_{v+1}|^k \right] \cdot \left[\frac{1}{P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} p_v \right]^{k-1}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m} p_v |t_v|^k |\lambda_{v+1}|^{k-1} |\lambda_{v+1}| \sum_{n=v+1}^{m+1} \varphi_n^{\delta k-1} \frac{1}{P_{n-1}}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m} \varphi_v^{\delta k-1} |t_v|^k |\lambda_{v+1}|$$

elde ederiz. Bu ifadeye Abel Kısmi Toplama Formülünü uygularsak,

$$\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\delta k+k-1} |T_{n,4}|^k = O(1)\sum_{v=1}^{m-1} \Delta|\lambda_{v+1}| \sum_{r=1}^{v} \varphi_r^{\delta k-1} |t_r|^k + O(1)|\lambda_{m+1}| \sum_{v=1}^{m} \varphi_v^{\delta k-1} |t_v|^k$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m-1} \beta_{v+1} X_v + O(1)|\lambda_{m+1}| X_m$$

$$= O(1) \quad (m \to \infty)$$

elde edilir. O halde $r = 1,2,3,4$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{\delta k+k-1} |T_{n,r}|^k = O(1) \qquad (m \to \infty)$$

bulunur.

TEOREM 3.2. $k \geq 1$ ve $0 \leq \delta \leq 1/k$ olsun. (φ_n) ve (ψ_n),

$$\varphi_n = O(\psi_n) \tag{3.8}$$

olacak şekilde pozitif sayıların birer dizisi olsunlar. (p_n) ve (q_n), $p_n > 0$, $q_n > 0$, $P_n \to \infty$, $Q_n \to \infty$ olacak şekilde diziler olsun ve (2.25) şartı sağlansın. Eğer

$$\sum_{n=v+1}^{\infty} \frac{\varphi_n^{\delta k+k-1} p_n^k}{P_n^k P_{n-1}} = O\left(\frac{\varphi_v^{\delta k+k-1} p_v^{k-1}}{P_v^k}\right) \tag{3.9}$$

ise bu taktirde

$$\lambda_n \in \left(\psi - \left|\overline{N}, q_n ; \delta\right|_k, \varphi - \left|\overline{N}, p_n ; \delta\right|_k\right) \tag{3.10}$$

olması için (2.27) ve (2.28) şartları yeterlidir [22].

İSPAT :

$$T_n = \frac{1}{Q_n} \sum_{v=1}^{n} q_v s_v$$

$$= \frac{1}{Q_n} \sum_{v=1}^{n} (Q_n - Q_{v-1}) a_v \tag{3.11}$$

elde edilir. $T_n - T_{n-1} = b_n \quad (T_{-1} = 0)$ yazarsak buradan

$$T_n = b_0 + b_1 + \ldots + b_n$$

bulunur. Şu halde kabul edelim ki $\sum a_v$ serisinin $\left(\overline{N}, q_n\right)$ dönüşümü $\sum b_n$ olsun. Benzer şekilde kabul edelim ki $\sum a_v \lambda_v$ serisinin $\left(\overline{N}, p_n\right)$ dönüşümü de $\sum c_n$ olsun. Şimdi $n \geq 1$ için $T_n - T_{n-1}$ farkını kısa bir işlem ile

$$b_n = \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n} Q_{v-1} a_v \tag{3.12}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu eşitlikten

$$b_n = \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \left[Q_{n-1} a_n + \sum_{v=1}^{n-1} Q_{v-1} a_v \right]$$

$$b_n = \frac{q_n}{Q_n} a_n + \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} Q_{v-1} a_v$$

$$a_n = \frac{Q_n}{q_n} b_n - \frac{1}{Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} Q_{v-1} a_v$$

$$a_n = \frac{Q_n}{q_n} b_n - \frac{1}{Q_{n-1}} \left[b_{n-1} \Big/ \frac{q_{n-1}}{Q_{n-1} Q_{n-2}} \right]$$

$$a_n = \left(\frac{Q_n}{q_n} \right) b_n - \left(\frac{Q_{n-2}}{q_{n-1}} \right) b_{n-1} \tag{3.13}$$

elde edilir. Şimdi de a_v yerine $a_v \lambda_v$ alarak, p, P ile q, Q dizilerini yer değiştirirsek $n \geq 1$ için

$$c_n = \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n} P_{v-1} a_v \lambda_v \tag{3.14}$$

elde edilir. Şimdi (3.13) eşitliğini (3.14) eşitliğinde yerine koyarsak,

$$c_n = \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n} P_{v-1} \lambda_v \left((Q_v / q_v) b_v - (Q_{v-2} / q_{v-1}) b_{v-1} \right)$$

$$= \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \left[\sum_{v=1}^{n} P_{v-1} \lambda_v \frac{Q_v}{q_v} b_v - \sum_{v=1}^{n} P_{v-1} \lambda_v \frac{Q_{v-2}}{q_{v-1}} b_{v-1} \right]$$

$$= \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \left[\sum_{v=1}^{n-1} \frac{b_v}{q_v} P_{v-1} Q_v \lambda_v - \sum_{v=1}^{n-1} P_v \lambda_{v+1} \frac{Q_{v-1}}{q_v} b_v + P_{n-1} \lambda_n \frac{Q_n}{q_n} b_n \right]$$

$$= \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \left[\sum_{v=1}^{n-1} \frac{b_v}{q_v} P_{v-1} Q_v \lambda_v - \sum_{v=1}^{n-1} \frac{b_v}{q_v} P_v Q_{v-1} \lambda_{v+1} \right] + \frac{p_n Q_n}{P_n q_n} \lambda_n b_n$$

$$=\frac{p_n}{P_nP_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}\frac{b_v}{q_v}\left[P_vQ_{v-1}\Delta\lambda_v+\lambda_v\left(P_{v-1}Q_v-P_vQ_{v-1}\right)\right]+\frac{p_nQ_n}{P_nq_n}\lambda_nb_n$$

$$c_n=\frac{p_n}{P_nP_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}\frac{b_v}{q_v}\left[P_vQ_{v-1}\Delta\lambda_v+\left(q_vP_v-p_vQ_v\right)\lambda_v\right]+\frac{p_nQ_n}{P_nq_n}\lambda_nb_n \qquad (3.15)$$

elde ederiz. Şimdi (2.27) ve (2.28) şartlarını (3.15) eşitliğinde kullanırsak,

$$c_n=O\left(\frac{p_n}{P_nP_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}\frac{b_v}{q_v}\left(q_vP_v\right)\right)+O\left(\frac{p_nQ_n}{P_nq_n}\cdot\frac{q_nP_n}{p_nQ_n}\cdot b_n\right)$$

$$c_n=O\left(\frac{p_n}{P_nP_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}b_vP_v\right)+O\left(b_n\right)$$

$$=O\left(C_{n,1}\right)+O\left(C_{n,2}\right)$$

elde ederiz. Şimdi Hölder Eşitsizliğini kullanarak

$$\left\{\sum_{v=1}^{n-1}|b_v|P_v\right\}^k=\left\{\sum_{v=1}^{n-1}|b_v|\frac{P_v}{p_v}p_v\right\}^k$$

$$\leq\left\{\left[\sum_{v=1}^{n-1}\left(|b_v|\frac{P_v}{p_v}p_v^{1/k}\right)^k\right]^{1/k}\cdot\left[\sum_{v=1}^{n-1}\left(p_v^{1/k'}\right)^{k'}\right]^{1/k'}\right\}^k$$

$$\leq\left[\sum_{v=1}^{n-1}|b_v|^k\frac{P_v}{p_v^{k-1}}\right]\cdot\left[\sum_{v=1}^{n-1}p_v\right]^{k-1}$$

$$\leq P_{n-1}^{k-1}\sum_{v=1}^{n-1}|b_v|^k\frac{P_v^k}{p_v^{k-1}}$$

elde ederiz. Böylece

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{\delta k+k-1} \left| C_{n,1} \right|^k = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{\delta k+k-1} \left| \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \left| b_v \right| P_v \right|^k$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{\delta k+k-1} \frac{p_n^k}{P_n^k P_{n-1}^k} P_{n-1}^{k-1} \sum_{v=1}^{n-1} \left| b_v \right|^k \frac{P_v^k}{p_v^{k-1}}$$

$$= \sum_{v=1}^{\infty} \left| b_v \right|^k \frac{P_v^k}{p_v^{k-1}} \sum_{n=v+1}^{\infty} \frac{\varphi_n^{\delta k+k-1} p_n^k}{P_n^k P_{n-1}}$$

elde ederiz. Şimdi de (3.8) ve (3.9) şartlarını kullanarak,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{\delta k+k-1} \left| C_{n,1} \right|^k = O\left\{ \sum_{v=1}^{\infty} \left| b_v \right|^k \frac{P_v^k}{p_v^{k-1}} \frac{\varphi_v^{\delta k+k-1} p_v^{k-1}}{P_v^k} \right\}$$

$$= O\left\{ \sum_{v=1}^{\infty} \varphi_v^{\delta k+k-1} \left| b_v \right|^k \right\}$$

$$= O\left\{ \sum_{v=1}^{\infty} \psi_v^{\delta k+k-1} \left| b_v \right|^k \right\} < \infty$$

elde ederiz. Benzer şekilde

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{\delta k+k-1} \left| C_{n,2} \right|^k = O\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{\delta k+k-1} \left| b_n \right|^k \right\}$$

$$= O\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^{\delta k+k-1} \left| b_n \right|^k \right\} < \infty$$

elde ederiz ki buda ispatı tamamlar.

4. BÖLÜM

$\left|\overline{N}, p_n; \delta\right|_k$ VE $\varphi - \left|\overline{N}, p_n; \delta\right|_k$ TOPLANABİLME METOTLARI İLE İLGİLİ TEOREMLER

Bu bölümde (s_n) sınırlı bir dizi olduğunda Fourier Serileri nin lokal özelliği kullanılarak, $\left|\overline{N}, p_n; \delta\right|_k$ ve $\varphi - \left|\overline{N}, p_n; \delta\right|_k$ toplanabilme metotları ile ilgili dört teoremi ifade ve ispat edeceğiz.

TEOREM 4.1. $k \geq 1$ ve $0 \leq \delta k < 1$ olsun.Eğer (s_n) sınırlı bir dizi ve (λ_n) dizisi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k - 1} |\lambda_n|^k < \infty, \tag{4.1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k} |\Delta\lambda_n| < \infty, \tag{4.2}$$

$$\sum_{n=v+1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k - 1} \frac{1}{P_{n-1}} = O\left(\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\delta k} \frac{1}{P_v}\right) \tag{4.3}$$

şartlarını sağlıyor ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n$ serisi $\left|\overline{N}, p_n; \delta\right|_k$ toplanabilirdir [23].

İspat: (T_n), $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n$ dizisinin $(\overline{N}, p_n)$ ortalaması olsun.O halde kısa bir hesaplama neticesinde

$$T_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^{n} p_v \sum_{r=0}^{v} a_r \lambda_r = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^{n} (P_n - P_{v-1}) a_v \lambda_v, \quad (\lambda_0 = 0)$$

elde ederiz. Diğer taraftan

$$T_n - T_{n-1} = \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n} P_{v-1} a_v \lambda_v , \qquad (P_{-1} = 0)$$

elde edilir. Bu farka Abel Kısmi Toplama Formülünü uygulanırsa

$$T_n - T_{n-1} = \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n} P_{v-1} a_v \lambda_v$$

$$= \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \left[\sum_{v=1}^{n-1} s_v \left(P_{v-1}\lambda_v - P_v \lambda_{v+1} \right) + s_n P_{n-1} \lambda_n \right]$$

$$= \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \left[\sum_{v=1}^{n-1} s_v \left(P_v \lambda_v - p_v \lambda_v - P_v \lambda_{v+1} \right) + s_n P_{n-1} \lambda_n \right]$$

$$= \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \left[\sum_{v=1}^{n-1} s_v \left(P_v \Delta\lambda_v - p_v \lambda_v \right) + s_n P_{n-1} \lambda_n \right]$$

$$= -\frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} p_v s_v \lambda_v + \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} s_v P_v \Delta\lambda_v + \frac{s_n \lambda_n p_n}{P_n}$$

$$= T_{n,1} + T_{n,2} + T_{n,3}$$

elde ederiz.Teoremi ispat etmek için Minkowski eşitsizliğinden yaralanarak, $r = 1, 2, 3$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\delta k + k - 1} \left| T_{n,r} \right|^k < \infty$$

olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. İlk olarak,

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|T_{n,1}\right|^k=\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|\frac{p_n}{P_nP_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}p_vs_v\lambda_v\right|^k$$

elde ederiz. Şimdi $(s_n)=O(1)$ olmasını, (4.1) ve (4.3) şartlarını ve Hölder Eşitsizliğini kullanarak

$$\leq\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\frac{p_n^k}{P_n^kP_{n-1}^k}\left\{\left[\sum_{v=1}^{n-1}\left(|s_v||\lambda_v|p_v^{1/k}\right)^k\right]^{1/k}\cdot\left[\sum_{v=1}^{n-1}\left(p_v^{1/k'}\right)^{k'}\right]^{1/k'}\right\}^k$$

$$=O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\frac{p_n^k}{P_n^kP_{n-1}}\left[\sum_{v=1}^{n-1}|s_v|^k|\lambda_v|^kp_v\right]\cdot\left[\frac{1}{P_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}p_v\right]^{k-1}$$

$$=O(1)\sum_{v=1}^{m}|\lambda_v|^kp_v\sum_{n=v+1}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}\frac{1}{P_{n-1}}$$

$$=O(1)\sum_{v=1}^{m}|\lambda_v|^kp_v\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\delta k}\frac{1}{P_v}$$

$$=O(1)\sum_{v=1}^{m}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\delta k-1}|\lambda_v|^k$$

$$=O(1),\qquad m\to\infty$$

elde ederiz. Şimdi $(s_n)=O(1)$ olmasını, (4.2), (4.3) şartlarını ve Hölder Eşitsizliğini kullanarak

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|T_{n,2}\right|^k=\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|\frac{p_n}{P_nP_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}s_vP_v\Delta\lambda_v\right|^k$$

$$\leq \sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\frac{p_n^k}{P_n^k P_{n-1}^k}\left\{\left[\sum_{v=1}^{n-1}\left(|s_v||\Delta\lambda_v|^{1/k}P_v^{1/k}\right)^k\right]^{1/k}\cdot\left[\sum_{v=1}^{n-1}\left(P_v^{1/k'}|\Delta\lambda_v|^{1/k'}\right)^{k'}\right]^{1/k'}\right\}^k$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\frac{p_n^k}{P_n^k P_{n-1}}\left[\sum_{v=1}^{n-1}|s_v|^k P_v|\Delta\lambda_v|\right]\cdot\left[\frac{1}{P_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}P_v|\Delta\lambda_v|\right]^{k-1}$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\frac{p_n^k}{P_n^k P_{n-1}}\left[\sum_{v=1}^{n-1}|s_v|^k P_v|\Delta\lambda_v|\right]\cdot\left[\sum_{v=1}^{n-1}|\Delta\lambda_v|\right]^{k-1}$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}\frac{1}{P_{n-1}}\left[\sum_{v=1}^{n-1}P_v|\Delta\lambda_v|\right]$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m}P_v|\Delta\lambda_v|\sum_{n=v+1}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}\frac{1}{P_{n-1}}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m}P_v|\Delta\lambda_v|\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\delta k}\frac{1}{P_v}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\delta k}|\Delta\lambda_v|$$

$$= O(1), \qquad m\to\infty$$

elde ederiz. Şimdi $(s_n) = O(1)$ olmasını ve (4.1) şartını kullanarak

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}|T_{n,3}|^k = \sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|\frac{p_n\lambda_n s_n}{P_n}\right|^k$$

$$=\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left(\frac{p_n}{P_n}\right)^{k}|\lambda_n|^k|s_n|^k$$

$$=O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}|\lambda_n|^k$$

$$=O(1),\qquad m\to\infty$$

elde ederiz. Böylece r =1,2,3 ve $m\to\infty$ için

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}|T_{n,r}|^k=O(1)$$

olduğunu gösterdik. Bu da ispatı tamamlar.

TEOREM 4.2. $k\geq 1$ ve $0\leq \delta k<1$ olsun. $\sum A_n(t)\lambda_n$ serisinin bir noktada $\left|\overline{N},p_n;\delta\right|_k$ toplanabilirliği (4.1)-(4.3) şartlarının sağlanması durumunda oluşan fonksiyonun bir lokal özelliğidir [23].

İSPAT: Bir noktadaki Fourier Serilerinin yakınsaklığı, onun meydana getirdiği fonksiyonların bir lokal özelliği olduğundan Teorem 4.2. nin ispatı Teorem 4.1. den elde edilir.

TEOREM 4.3. $k\geq 1$ ve $0\leq \delta k<1$ olsun. $X_n=P_n/np_n$ olmak üzere (p_n) ve (λ_n) dizileri, Teorem 2.21 deki şartlarla birlikte

$$s_n\varphi_n p_n=O(P_n)\ ,\tag{4.4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n^{\delta k-k}X_n^{k-1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^k\left(\frac{|\lambda_n|^k+|\lambda_{n+1}|^k}{n}\right)<\infty\ ,\tag{4.5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n^{\delta k-k}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^k\left(X_n^k+1\right)\left|\Delta\lambda_n\right|<\infty\ , \tag{4.6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n^{\delta k-1}X_n^k\left|\lambda_n\right|^k<\infty\ , \tag{4.7}$$

ve

$$\sum_{n=v+1}^{\infty}\varphi_n^{\delta k+k-1}\frac{p_n^k}{P_n^kP_{n-1}}=O\left\{\varphi_v^{\delta k}\frac{1}{P_v}\right\} \tag{4.8}$$

şartlarını da sağlasın. Bu taktirde bir noktada $\sum A_n(t)\lambda_nX_n$ serisinin $\varphi-\left|\bar{N},p_n;\delta\right|_k$ toplanabilirliği, bir lokal özellik olarak sağlanabilir [24].

Bu teoremin ispatı için aşağıdaki lemmanın ispatına ihtiyacımız olduğu için öncelikle bu lemmayı ifade ve ispat edelim.

LEMMA 4.4. $k\geq 1$ ve $\delta\geq 0$ olsun. (p_n) ve (λ_n) dizileri (2.33) ve Teorem 4.3. deki şartları sağlayan diziler olsun.. (s_n) sınırlı ise, bu taktirde $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\lambda_nX_n$ serisi $\varphi-\left|\bar{N},p_n;\delta\right|_k$ toplanabilirdir [24].

İSPAT : (T_n), $\sum_{n=1}^{\infty}a_nP_n\lambda_n$ dizisinin $\left(\bar{N},p_n\right)$ ortalaması olsun. O halde kısa bir hesaplama neticesinde

$$T_n=\frac{1}{P_n}\sum_{v=0}^{n}p_v\sum_{r=0}^{v}a_r\lambda_rX_r=\frac{1}{P_n}\sum_{v=0}^{n}\left(P_n-P_{v-1}\right)a_v\lambda_vX_v\ ,\quad \left(X_0=0\right)$$

elde ederiz. Diğer taraftan $n\geq 1$ için

$$T_n-T_{n-1}=\frac{p_n}{P_nP_{n-1}}\sum_{v=1}^{n}P_{v-1}a_v\lambda_vX_v$$

elde edilir. Bu farka Abel Kısmi Toplama Formülünü uygulanırsa

$$T_n - T_{n-1} = \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n} P_{v-1} a_v \lambda_v X_v$$

$$= \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \left[\sum_{v=1}^{n-1} s_v \left(P_{v-1}\lambda_v X_v - P_v \lambda_{v+1} X_{v+1} \right) + s_n P_{n-1} \lambda_n X_n \right]$$

$$= \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \left[\sum_{v=1}^{n-1} s_v \left(P_v \lambda_v X_v - p_v \lambda_v X_v - P_v \lambda_{v+1} X_{v+1} \right) + s_n P_{n-1} \lambda_n X_n \right]$$

$$= \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \left[\sum_{v=1}^{n-1} s_v \left(P_v X_v \Delta\lambda_v - p_v \lambda_v X_v + P_v \lambda_{v+1} \Delta X_v \right) + s_n P_{n-1} \lambda_n X_n \right]$$

$$= -\frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} p_v s_v \lambda_v X_v + \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} s_v X_v P_v \Delta\lambda_v$$

$$+ \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} P_v s_v \lambda_{v+1} \Delta X_v + \frac{s_n \lambda_n p_n X_n}{P_n}$$

$$= T_{n,1} + T_{n,2} + T_{n,3} + T_{n,4}$$

elde ederiz. Lemmayı ispat etmek için Minkowski eşitsizliğinden yaralanarak, $r = 1, 2, 3, 4$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{\delta k + k - 1} \left| T_{n,r} \right|^k < \infty$$

olduğunu göstermemiz gerekli olacaktır. İlk olarak,

$$\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\delta k + k - 1} \left| T_{n,1} \right|^k = \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\delta k + k - 1} \left| \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} p_v s_v \lambda_v X_v \right|^k$$

$$\leq \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\delta k+k-1} \frac{p_n^k}{P_n^k P_{n-1}^k} \left| \sum_{v=1}^{n-1} p_v s_v \lambda_v X_v \right|^k$$

elde ederiz. Şimdi Hölder Eşitsizliğini kullanarak

$$\leq \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\delta k+k-1} \frac{p_n^k}{P_n^k P_{n-1}^k} \left\{ \left[\sum_{v=1}^{n-1} \left(|s_v| |\lambda_v| p_v^{1/k} X_v \right)^k \right]^{1/k} \cdot \left[\sum_{v=1}^{n-1} \left(p_v^{1/k'} \right)^{k'} \right]^{1/k'} \right\}^k$$

$$= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\delta k+k-1} \frac{p_n^k}{P_n^k P_{n-1}} \left[\sum_{v=1}^{n-1} |s_v|^k |\lambda_v|^k p_v X_v^k \right] \cdot \left[\frac{1}{P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} p_v \right]^{k-1}$$

$$= O(1) \sum_{v=1}^{m} |s_v|^k |\lambda_v|^k p_v X_v^k \sum_{n=v+1}^{m+1} \varphi_n^{\delta k+k-1} \frac{p_n^k}{P_n^k P_{n-1}}$$

elde ederiz. (4.4), (4.5), (4.8) şartlarını ve $X_n = P_n / np_n$ eşitliğinden

$$= O(1) \sum_{v=1}^{m} |\lambda_v|^k \frac{P_v^k}{\varphi_v^k p_v^k} p_v X_v^k \varphi_v^{\delta k} \frac{1}{P_v}$$

$$= O(1) \sum_{v=1}^{m} |\lambda_v|^k \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k \left(\frac{p_v v}{P_v} \right) \varphi_v^{\delta k-k} X_v^k \frac{1}{v}$$

$$= O(1) \sum_{v=1}^{m} |\lambda_v|^k \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k X_v^{-1} \varphi_v^{\delta k-k} X_v^k \frac{1}{v}$$

$$= O(1) \sum_{v=1}^{m} \varphi_v^{\delta k-k} X_v^{k-1} \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k \left(\frac{|\lambda_v|^k + |\lambda_{v+1}|^k}{v} \right)$$

$$= O(1), \qquad m \to \infty$$

elde ederiz. Şimdi (2.31) den dolayı

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(X_n^k+1\right)\left|\Delta\lambda_n\right| < \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}X_n^k\left|\Delta\lambda_n\right| + \sum_{n=1}^{\infty}\left|\Delta\lambda_n\right| < \infty$$

elde edilir. Buradan da

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Delta\lambda_n\right| = O(1)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\sum_{v=1}^{n-1}P_v\left|\Delta\lambda_v\right| \le P_{n-1}\sum_{v=1}^{n-1}\left|\Delta\lambda_v\right|$$

$$\frac{1}{P_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}P_v\left|\Delta\lambda_v\right| \le \sum_{v=1}^{n-1}\left|\Delta\lambda_v\right| = O(1)$$

elde edilir. Buradan (4.6), (4.8) şartlarını ve Hölder Eşitsizliğini kullanarak

$$\sum_{n=2}^{m+1}\varphi_n^{\delta k+k-1}\left|T_{n,2}\right|^k = \sum_{n=2}^{m+1}\varphi_n^{\delta k+k-1}\left|\frac{p_n}{P_nP_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}s_vX_vP_v\Delta\lambda_v\right|^k$$

$$\le \sum_{n=2}^{m+1}\varphi_n^{\delta k+k-1}\frac{p_n^k}{P_n^kP_{n-1}^k}\left\{\sum_{v=1}^{n-1}\left|s_v\right|\left|\Delta\lambda_v\right|P_vX_v\right\}^k$$

$$\le \sum_{n=2}^{m+1}\varphi_n^{\delta k+k-1}\frac{p_n^k}{P_n^kP_{n-1}^k}\left\{\left[\sum_{v=1}^{n-1}\left(\left|s_v\right|\left|\Delta\lambda_v\right|^{1/k}P_v^{1/k}X_v\right)^k\right]^{1/k}\left[\sum_{v=1}^{n-1}\left(P_v^{1/k'}\left|\Delta\lambda_v\right|^{1/k'}\right)^{k'}\right]^{1/k'}\right\}^k$$

$$\le \sum_{n=2}^{m+1}\varphi_n^{\delta k+k-1}\frac{p_n^k}{P_n^kP_{n-1}}\left[\sum_{v=1}^{n-1}\left|s_v\right|^k\left|\Delta\lambda_v\right|P_vX_v^k\right]\cdot\left[\frac{1}{P_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}P_v\left|\Delta\lambda_v\right|\right]^{k-1}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m} P_v |\Delta\lambda_v| X_v^k \left(\frac{P_v}{p_v}\right)^k \frac{1}{\varphi_v^k} \sum_{n=v+1}^{m+1} \varphi_n^{\delta k+k-1} \frac{p_n^k}{P_n^k P_{n-1}}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m} P_v |\Delta\lambda_v| X_v^k \left(\frac{P_v}{p_v}\right)^k \frac{1}{\varphi_v^k} \varphi_v^{\delta k} \frac{1}{P_v}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m} X_v^k |\Delta\lambda_v| \varphi_v^{\delta k-k} \left(\frac{P_v}{p_v}\right)^k = O(1), \quad m \to \infty$$

elde ederiz. Şimdi $X_n = P_n / np_n$ eşitliğini, (2.29), (4.4), (4.5) şartlarını ve Hölder Eşitsizliğini kullanarak

$$\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\delta k+k-1} |T_{n,3}|^k = \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\delta k+k-1} \left| \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} P_v s_v \lambda_{v+1} \Delta X_v \right|^k$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\delta k+k-1} \frac{p_n^k}{P_n^k P_{n-1}^k} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} v p_v X_v s_v \lambda_{v+1} \frac{1}{v} \right\}^k$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\delta k+k-1} \frac{p_n^k}{P_n^k P_{n-1}^k} \left\{ \left[\sum_{v=1}^{n-1} \left(p_v^{1/k} X_v |s_v| |\lambda_{v+1}| \right)^k \right]^{1/k} \left[\sum_{v=1}^{n-1} \left(p_v^{1/k'} \right)^{k'} \right]^{1/k'} \right\}^k$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\delta k+k-1} \frac{p_n^k}{P_n^k P_{n-1}} \left[\sum_{v=1}^{n-1} p_v X_v^k |s_v|^k |\lambda_{v+1}|^k \right] \cdot \left[\frac{1}{P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} p_v \right]^{k-1}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m} p_v X_v^k |s_v|^k |\lambda_{v+1}|^k \sum_{n=v+1}^{m+1} \varphi_n^{\delta k+k-1} \frac{p_n^k}{P_n^k P_{n-1}}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m} p_v X_v^k \frac{P_v^k}{\varphi_v^k p_v^k} |\lambda_{v+1}|^k \varphi_v^{\delta k} \frac{1}{P_v}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m} \frac{p_v v}{P_v} \frac{1}{v} X_v^k \frac{P_v^k}{p_v^k} |\lambda_{v+1}|^k \varphi_v^{\delta k-k}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m} X^{-1}\frac{1}{v}X_v^k\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^k|\lambda_{v+1}|^k\varphi_v^{\delta k-k}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m}\varphi_v^{\delta k-k}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^k X_v^{k-1}|\lambda_{v+1}|^k\frac{1}{v}$$

$$= O(1), \qquad m\to\infty$$

elde ederiz. Şimdi (4.4) ve (4.5) şartlarını kullanarak

$$\sum_{n=1}^{m}\varphi_n^{\delta k+k-1}|T_{n,4}|^k = \sum_{n=1}^{m}\varphi_n^{\delta k+k-1}\left|\frac{s_n\lambda_n p_n X_n}{P_n}\right|^k$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{m}\varphi_n^{\delta k+k-1}|s_n|^k|\lambda_n|^k X_n^k\left(\frac{p_n}{P_n}\right)^k$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{m}\varphi_n^{\delta k+k-1}\left(\frac{P_n}{\varphi_n p_n}\right)^k|\lambda_n|^k X_n^k\left(\frac{p_n}{P_n}\right)^k$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{m}\varphi_n^{\delta k-1}|\lambda_n|^k X_n^k$$

$$= O(1), \qquad m\to\infty$$

elde edilir. Böylece biz $r = 1,2,3,4$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n^{\delta k+k-1}|T_{n,r}|^k = O(1), \qquad (m\to\infty)$$

olduğunu göstermiş olduk. Bu da lemmanın ispatını tamamlar.

TEOREM 4.3. ün İSPATI :

x in özel bir değeri için Fourier Serileri sadece bu noktanın yakın komşuluğundaki fonksiyonların durumuna bağlı olduğundan teoremin ispatı Lemma 4.4. ün bir sonucudur.

KAYNAKLAR

1. Fekete, M., Zur Teorie der Divergenten Reihen. Math.ès Termezs Èrtesitö (Budapest) 29, 719-726, 1911.
2. Flett, T. M., On an Extension of Absolute Summability and Some Teorems of Littlewood and Paley, Proc. London Math. Soc., 7, 113-141, 1957.
3. Hardy, G.H., Divergent Series, Oxford, 1973.
4. Petersen, G.M., Regular Matrix Transformations, Mc Graw Hill Pablishing Company Limited, London, 1966.
5. Mazhar, S.M., On the Summability Factors of Infinite Series, Publ. Math. (Debrecen), 13, 229-236, 1966.
6. Bor, H., On Two Summability Methods, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 97, 147-149, 1985.
7. Bor, H., On the Local Property of $\left|\overline{N}, p_n; \delta\right|_k$ Summability of Factored Fourier Series, J. Math. Anal. Appl., 179, 644-649, 1993.
8. Seyhan, H., Ph.D. Thesis, Erciyes University, Kayseri, 1995.
9. L. S. Bosanquet and G. Das, Absolute Summability Factors for Nörlund Means, Proc. London Math. Soc. (3) 38, 1-52, 1979.
10. Kishore, N. and Hotta, G.C., On $\left|\overline{N}, p_n\right|$ Summability Factors, Acta Sci. Math. (Szeged), 31, 9-12, 1970.
11. Maddox, I.J., Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, 1970.
12. Yurtsever, B., Matematik Analiz Dersleri, Ankara, 129, 1981.
13. Mangoldt-Knopp, K., Çev. Yurtsever, B., Yüksek Matematiğe Giriş, Ankara Üniversitesi Fen Fak. Yay., Ankara, 1973.
14. Zygmund, A., Trigonometric Series, Cambridge University Press, Cambridge, 1959.
15. Goldberg, R. R., Methods of Real Analysis, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1976.
16. Bor, H., On $\left|\overline{N}, p_n\right|_k$ Summability Factors, Kuwait Jnl. Sci. Eng., 23, 1-5, 1996.
17. Mishra, K.N., Absolute Summability Factors of Type (X,Y), Proc. Amer. Math. Soc. 122, 531-539, 1994.

18. Bor, H., On the Local Property of $\left|\overline{N}, p_n\right|_k$ Summability of Factored Fourier Series, J. Math. Anal. Appl., 163, 220-226, 1992

19. Borwein, D., The Nonlocal Property of the Summability of Fourier Series by Certain Absolute Riezs Methods. Proc. Amer. Soc. 114, 89-94, 1992.

20. Mishra, K.N., On the Absolute Nörlund Summability Factors of Infinite Series, Indian J. Pure Appl. Math., 40-43, (1983)

21. Seyhan, H. and Sönmez, A., On $\varphi-\left|\overline{N}, p_n;\delta\right|_k$ Summability Factors, Portugaliae Mathematica, Vol. 54, Fasc. 4, 393-398, 1997.

22. Seyhan, H., On the Absolute Summability Factors of Type (A,B), Tamkang Journal of Mathematics, Vol. 30, Number 1, 59-62, 1999.

23. Bor, H., On the Local Property of Factored Fourier Series, Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen Journal for Analysis and its Applications, Vol. 16, No. 3, 769-773, 1997.

24. Seyhan, H., On the Local Property of $\varphi-\left|\overline{N}, p_n;\delta\right|_k$ Summability of Factored Fourier Series, Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica, Vol.25, Number 4, 311-316, 1997.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Tunçay BULUT

Baba Adı : Mahmut

Ana Adı : Meryem

Doğum Yeri : Avanos

Doğum Tarihi : 18. 05. 1977

İlk ve orta öğrenimini Nevşehir'de tamamladı. Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Bölümü'nden 1999 yılında lisans diploması alarak mezun oldu. Aynı yıl Nevşehir'e Matematik Öğretmeni olarak atandı. 2002- 2003 öğretim yılında Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans eğitimine başladı. Şu anda Yüksek Lisans tez çalışmasını sürdürmekte olup aynı zamanda Nevşehir'de Matematik Öğretmeni olarak çalışmaktadır.

Adres : Güzelyurt Mah.. Kocaçay Cad. 16. s. 5/5, NEVŞEHİR