

FUZZY METRİK UZAYLAR VE SABİT NOKTALAR

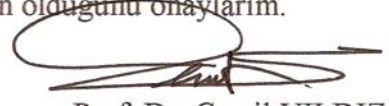
Servet KÜTÜKCÜ

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MART 2006
ANKARA**

Servet KÜTÜKCÜ tarafından hazırlanan FUZZY METRİK UZAYLAR VE SABİT NOKTALAR adlı bu tezin Doktora Tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.



Prof. Dr. Cemil YILDIZ

Tez Yöneticisi

Bu çalışma jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Ziya ARGÜN



Üye : Prof. Dr. Cemil YILDIZ

Üye : Prof. Dr. Haydar EŞ




Üye : Prof. Dr. Ahmet Ali ÖÇAL



Üye : Doç. Dr. Duran TÜRKOĞLU



Bu tez Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.



FUZZY METRİK UZAYLAR VE SABİT NOKTALAR**(Doktora Tezi)****Servet KÜTÜKCÜ****GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ****Mart 2006****ÖZET**

Bu tezde, fuzzy Menger uzayda yeni tanımlar verilmiş ve bunlar arasındaki ilişkiler çeşitli teoremlerle incelenmiştir. Ayrıca, yörüngesel tam fuzzy Menger, tam fuzzy Menger ve tam Menger uzaylarda tek ve çoğul değerli dönüşümler için sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır. Yine, fuzzy metrik uzayda (α) ve (β)-tipi bağdaşabilir dönüşümler için sabit nokta teoremleri ifade ve ispat edilmiş ve örnekler verilmiştir.

Bilim Kodu : 204.1.132
Anahtar Kelimeler : Üçgen norm, probabilistik metrik uzay, Menger uzay, fuzzy Menger uzay, fuzzy metrik uzay, sabit nokta.
Sayfa Adedi : 68
Tezin Yöneticisi : Prof. Dr. Cemil YILDIZ

FUZZY METRIC SPACES AND FIXED POINTS**(Ph.D. Thesis)****Servet KÜTÜKCÜ****GAZI UNIVERSITY****INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY****March 2006****ABSTRACT**

In this thesis, we give some definitions related with fuzzy Menger distance between two sets, fuzzy set convergence, continuity and fuzzy orbitally completeness in fuzzy Menger spaces first time in literature. Secondly, we find some results related with fixed point theorems for single-valued and multi-valued mappings. Finally, we state and prove two fixed point theorems for which the (α) and (β) types of compatible mappings in fuzzy metric spaces. We also give examples to illustrate our results.

Science Code : 204.1.132**Key Words : Triangular norm, probabilistic metric space, Menger space, fuzzy Menger space, fuzzy metric space, fixed point.****Page Number : 68****Adviser : Prof. Dr. Cemil YILDIZ**

TEŞEKKÜR

Tez konumu verip beni probabilistik ve fuzzy metrik uzaylarına yönlendiren, çalışmalarım boyunca yardımlarını ve desteğini esirgemeyen sayın danışman hocam Prof. Dr. Cemil YILDIZ'A, çalışmalarım boyunca yardımlarını ve desteğini esirgemeyen, fikirleriyle yol gösteren sayın hocalarım Prof. Dr. Ziya ARGÜN ve Doç. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU'NA ve anlayışlarını, maddi manevi desteklerini esirgemeyen annem Gülay, babam Şerafettin, kardeşim Şermin'e ve mesai arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR	vii
1. GİRİŞ	1
2. METRİK YAPILAR	3
2.1. Metrik Uzay	3
2.2. Probabilistik Metrik Uzay, Menger Uzay ve Fuzzy Menger Uzay.....	5
2.3. Fuzzy Metrik Uzay.....	12
3. MENDER VE FUZZY MENDER UZAYLARDA SABİT NOKTA.....	22
3.1. Menger Uzayda Sabit Nokta Teoremleri	22
3.2. Fuzzy Menger Uzayda Sabit Nokta Teoremleri.....	41
4. FUZZY METRİK UZAYDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ.....	50
4.1. (β) -Tipi Bağdaşabilir Dönüşümler İçin Sabit Nokta Teoremleri.....	50
4.2. (α) -Tipi Bağdaşabilir Dönüşümler İçin Sabit Nokta Teoremleri.....	57
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.	65
KAYNAKLAR.....	66
ÖZGEÇMİŞ.....	68

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$*_M$	Minimum t-norm
$*_L$	Lukasiewicz t-norm
$*_P$	Çarpım t-norm
Δ_+	Dağılım fonksiyonlarının kümesi
D_+	Δ_+ nın alt kümesi
Kısaltmalar	Açıklama
t-norm	Üçgen norm
PSM-uzay	Probabilistik yarı-metrik uzay
PM-uzay	Probabilistik metrik uzay
F-Menger	Fuzzy Menger
$F_{xy}(t)$	x ve y arasında t ye bağlı uzaklık
$FB(X)$	X in fuzzy sınırlı alt kümeleri ailesi
$D_A(t)$	A nın probabilistik çapı
$F_{xA}(t)$	x in A ya probabilistik uzaklığı
$\tilde{F}_{AB}(t)$	A nın B ye fuzzy Menger uzaklığı
$O(N,x)$	x noktasında N nin yörüngesi

1. GİRİŞ

Boştan farklı bir küme üzerinde metrik veya boştan farklı bir kümenin iki noktası arasındaki uzaklık kavramının nasıl tanımlanacağı matematiğin temel problemlerinden biri olmuştur. 1906 yılında Frechet (1), boştan farklı bir küme üzerindeki metrik yapısı üzerinde çalışmış, kümenin farklı iki elemanı arasındaki uzaklığın pozitif bir reel sayı olması gerektiğini göstermiş, nokta çiftleri alarak dağılım fonksiyonu kavramını vermiş ve böylece ortaya probabilistik metrik uzay çıkmıştır. Probabilistik metrik uzaylarda üçgen eşitsizliğinin olmaması ancak bunun yerine zayıf üçgen eşitsizliğinin kullanılması, bu uzaylarda alınan diziler için limit tanımının yapılamamasına neden olmuştur. 1942 yılında Menger (2), üçgen norm kavramından yararlanarak probabilistik metrik uzaylar için üçgen eşitsizliği vermiş ve böylece Menger uzaylar ortaya çıkmıştır. Probabilistik metrik uzay kavramının ayrıntılı incelemesini 1974 yılında Istratescu (3) yapmış ancak en önemli gelişimi 1983 yılında Schweizer ve Sklar (4) tarafından yapılmıştır. Probabilistik metrik uzay kavramından, 1943 yılında Wald (5) tarafından Wald uzayı, 1984 yılında Hicks ve Sharma (6) tarafından Hicks uzayı, 1994 yılında Radu (7) tarafından probabilistik f-metrik uzayı gibi birçok uzaylar türetilmiş ancak probabilistik metrik uzaylar içinde daha çok Menger uzaylar için sabit nokta çalışmaları yapılmış ve halen de yapılmaktadır. Metrik uzaylarda büzülme dönüşümleri için ilk sabit (Banach sabit) nokta teoremi 1932 yılında Banach (8) tarafından verilmiş, bu teorem 1972 yılında Sehgal ve Bharucha-Reid (9) tarafından probabilistik metrik uzaylara aktarılmış ve bu çalışma, probabilistik metrik uzaylarda sabit nokta kavramı için önemli bir dönüm noktası olmuştur.

Tüm bu süreç içerisinde küme tanımı yetersiz kalmıştır. Örneğin küme tanımına göre mavi rengindeki cisimlerin kümesini oluşturabiliriz ancak renk anlayışı kişiden kişiye değiştiğinden bu kümenin elemanları tek türlü tanımlanamamaktadır. Eğer mavi rengin tonlarına $[0,1]$ aralığındaki sayıları karşılık getirirsek bu kümeyi herkesin kabul edeceği ve daha kullanışlı halde tanımlayabiliriz. Bu sayede bilgisayar monitörlerinin renk çözünürlüğünün devamlı gelişmesi, artması ve doğadaki renk çeşitliliğinin ekranlara yansıtma çabası yani gerçek renkleri

yakalayabilme çabaları buna en güzel örnektir. Bu yetersizliği gören Zadeh (10), 1965 yılında fuzzy küme tanımını yapmış ve böylece fuzzy küme üzerinde de metrik yapısını oluşturmak, fuzzy matematiğin temel problemlerinden biri olmuş ve halen günümüzde de olmaktadır. Birçok bilim adamı fuzzy metriği, fuzzy kümeler üzerinde farklı tanımlamışlardır ancak her tanımın ortak çıkış noktası boştan farklı bir küme üzerindeki metrik yapı olmuştur. Bu alandaki ilk çalışmayı 1975 yılında Kramosil ve Michalek (11) ve daha sonra 1979 yılında Erceg (12), 1982 yılında Deng (13), 1984 yılında Kaleva ve Seikkala (14), 1994 yılında George ve Veeramani (15) yapmıştır. Fuzzy metrikle ilgili birden çok tanımın olmasının temel sebepleri arasında fuzzy metriğin sürekli üçgen normlarla veya düzey kümeleri ile tanımlanmasının yanı sıra fuzzy metriktan yararlanarak Hausdorff topolojisini elde etmek yer almaktadır. Fuzzy metrik uzaylarda sabit nokta kavramı ilk kez 1988 yılında Grabiec (16) tarafından verilmiş ve bu çalışma, günümüze kadar gelen fuzzy metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri için temel olmuştur.

Fuzzy sabit nokta, analizde önemli sonuçlar verdiği gibi özellikle quantum fiziğinde de önemli sonuçlar vermektedir. Ayrıca, günümüz teknolojisi içinde; ilaç sanayisinde yan etkiyi azaltmak ve ilacın etkisini arttırmak için moleküler ilişkinin kuvvetliliği, cep telefonları kullanım özellikleri, silah sanayisinde hedefi kendi kendine arayabilen, hedefin dost veya düşman olup olmadığına karar verebilen, buna göre imha eden aksi halde üsse geri dönen yapay zeka ile donatılmış füze sistemlerinin gelişimi gibi bir çok alanda daha verimli sonuçlar elde etmek için temel alt yapıyı oluşturmaktadır.

Tezin ilk bölümünde metrik, probabilistik metrik, Menger, fuzzy (genelleştirilmiş) Menger ve fuzzy metrik uzaylar için temel alt yapılar verilmiş, aralarındaki ilişkiler incelenmiş ve yeni tanımlar yapılmıştır. Tezin diğer bölümlerinde bu alt yapılar kullanılarak Menger, fuzzy Menger ve fuzzy metrik uzaylar için yeni sabit ve ortak sabit nokta teoremleri verilmiş, yeni sonuçlar ortaya çıkarılmış ve bunlar örneklendirilmiştir.

2. METRİK YAPILAR

Bu bölümde, Yıldız'ın (17), Özer ve Turkoğlu (18), Istratescu'nun (3,19), Hadzic ve Pap'ın (20), Radu'nun (7,21), Sherwood'un (22), Menger'in (2), Schweizer ve Sklar'ın (4), Hicks ve Sharma'nın (6), Kramosil ve Michalek'in (11), George ve Veeramani'nin (15), Grabiec'in (16) ve Cho'nun (23,24) çalışmalarından faydalanarak metrik, probabilistik metrik, Menger, fuzzy Menger ve fuzzy metrik uzaylarda bazı kavramlar verilmiştir, bunlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir ve örneklerle somutlaştırılmıştır.

2.1. Metrik Uzay

2.1.1. Tanım

$X \neq \emptyset$ ve $d: X \times X \rightarrow X$ bir fonksiyon olsun. $\forall x, y, z \in X$ için

- (i) $d(x, y) \geq 0$,
- (ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- (iii) $d(x, y) = d(y, x)$,
- (iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

şartları sağlanır ise, d ye X üzerinde bir metrik, (X, d) ikilisine de metrik uzay denir. Eğer (i), (iii) ve (iv) şartları ile birlikte $x = y \Rightarrow d(x, y) = 0$ şartı sağlanır ise, d ye X üzerinde bir metrikimsi, (X, d) ikilisine de metrikimsi uzay denir.

2.1.2. Örnek

\mathbb{R} reel sayılar kümesi olsun. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = |x - y|$ şeklinde tanımlanan d fonksiyonu \mathbb{R} üzerinde bir metriktir. Bu metriğe alışılmış (veya mutlak değer) metrik, (\mathbb{R}, d) ikilisine de alışılmış metrik uzay denir.

2.1.3. Tanım

(X,d) metrik uzay, A ve B kümeleri X 'in boştan farklı iki alt kümesi olsun. A ile B kümeleri arasındaki uzaklık,

$$d(A,B) = \inf\{d(x,y): x \in A, y \in B\}.$$

Eğer $A = \{x\}$ ise x ile B kümesi arasındaki uzaklık,

$$d(x,B) = \inf\{d(x,y): y \in B\}.$$

A kümesini çapı,

$$d(A) = \sup\{d(x,y): x,y \in A\}.$$

Çapı sonlu olan kümelere sınırlı kümeler denir. Yani, A sınırlı ise, $\forall a \in A$ için $d(a,x) \leq r$ olacak şekilde $\exists x \in X$ ve $\exists r > 0$ vardır.

2.1.4. Tanım

(X,d) metrik uzay, (x_n) bu uzayda bir dizi ve $x \in X$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ $\ni \forall n \geq n_0$ iken $d(x_n, x) < \varepsilon$ oluyorsa, (x_n) dizisine x noktasına yakınsaktır denir ve $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow x$ veya $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ile gösterilir.

2.1.5. Tanım

(X,d) metrik uzay, (x_n) bu uzayda bir dizi ve $x \in X$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ $\ni \forall n, m \geq n_0$ iken $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ oluyorsa, (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir. Eğer (X,d) metrik uzayında alınan her Cauchy dizisi yine bu uzayda bir noktaya yakınsar ise, (X,d) metrik uzayına tamdır denir.

2.2. Probabilistik Metrik Uzay, Menger Uzay ve Fuzzy Menger Uzay

Probabilistik metrik, Menger ve fuzzy Menger uzay kavramlarının temelini teşkil edecek üçgen norm ve dağılım fonksiyonlarını verelim:

2.2.1. Tanım

$I=[0,1]$ olmak üzere $*$: $I \times I \rightarrow I$ fonksiyonu

- (i) $\forall a \in I$ için $a*1 = a$,
- (ii) $\forall a \in I$ için $a*b = b*a$,
- (iii) $(a \leq c, b \leq d) \Rightarrow a*b \leq c*d$,
- (iv) $\forall a, b, c \in I$ için $a*(b*c) = (a*b)*c$.

şartlarını sağlıyor ise, $*$ fonksiyonuna üçgen norm veya kısaca t-norm denir (2).

2.2.2. Örnek

$I = [0,1]$ ve $\forall a, b \in I$ için $a*b = \min\{a, b\}$, $a*b = a.b$, $a*b = \max\{a+b-1, 0\}$ şeklinde tanımlanan $*$ fonksiyonlarının herbiri t-normdur. Bu t-normları sırasıyla $*_M$, $*_P$ ve $*_L$ ile göstereceğiz.

2.2.3. Tanım

Δ_+ ile aşağıdaki şartları sağlayan $F : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonlarının kümesini gösterelim:

- (i) $F(0) = 0$,
- (ii) F azalmayandır,
- (iii) F , $(0, \infty)$ üzerinde sol süreklidir.

Bu durumda Δ_+ ya dağılım fonksiyonlarının kümesi, Δ_+ nın her bir elemanına da dağılım fonksiyonu denir (1).

D_+ ile Δ_+ nın aşağıdaki özelliği de sağlayan bir alt kümesini gösterelim:

$$(iv) \quad F(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$$

2.2.4. Örnek

$\forall x \in \mathbb{R}$ ve $a \geq 0$ için,

$$\mathcal{E}_a(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq a \\ 1 & , \quad x > a \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon D_+ 'nin elemanıdır. $a=0$ için \mathcal{E}_0 , D_+ nın özel bir elemanıdır.

$X \neq \emptyset$ olmak üzere;

$$F : X \times X \rightarrow \Delta_+$$

$$(x,y) \rightarrow F(x,y) = F_{xy} : [0, \infty) \rightarrow [0,1]$$

$$t \longrightarrow F_{xy}(t)$$

fonksiyonunu göz önüne alalım.

Şimdi metrik uzayların bir genelleştirmesi olan probabilistik metrik uzay ve Menger uzay kavramını verelim.

2.2.5. Tanım

$X \neq \emptyset$ bir küme ve $F : X \times X \rightarrow D_+$ olsun. $\forall x,y,z \in X$ ve $\forall t,s \geq 0$ için

- (i) $F_{xy}(0) = 0$,
- (ii) $F_{xy}(t) = 1 \Leftrightarrow x = y$,
- (iii) $F_{xy}(t) = F_{yx}(t)$,
- (iv) $F_{xy}(t) = 1$ ve $F_{yz}(s) = 1$ iken $F_{xz}(t+s) = 1$,
- (v) $F_{xz}(t+s) \geq F_{xy}(t) \cdot F_{yz}(s)$ olacak şekilde * üçgen normu vardır.

- (i) ve (ii) şartları sağlanır ise, (X,F) ikilisine probabilistik yarı-metrik uzay (PSM-uzay) denir.
- (i), (ii) ve (iii) şartları sağlanır ise, (X,F) ikilisine simetrik probabilistik yarı-metrik uzay (simetrik PSM-uzay) denir.
- (i), (ii), (iii) ve (iv) şartları sağlanır ise, (X,F) ikilisine probabilistik metrik uzay (PM-uzay) denir.
- (i), (ii), (iii), (iv) ve (v) şartları sağlanır ise, $(X,F,*)$ üçlüsüne Menger uzay denir.

Burada $F_{xy}(t)$, t ye bağlı olacak şekilde x ile y arasındaki uzaklığın derecesidir (2).

2.2.6. Örnek

(X,d) metrik uzay olsun. $\forall x,y \in X$ ve $\forall t \geq 0$ için $F_{xy}(t) = H(t-d(x,y))$ şeklinde tanımlanan F fonksiyonu X üzerinde probabilistik metriktir. Bu şekilde tanımlanan F probabilistik metriğe, d metriğinin ürettiği probabilistik metrik denir. Bu durumda her metrik uzay probabilistik metrik uzaydır. Ayrıca $\forall a,b \in I$ için $a * b = \min\{a,b\}$ şeklinde tanımlanırsa, $(X,F,*)$ Menger uzay olup eğer (X,d) metrik uzay tam ise, $(X,F,*)$ Menger uzayı da tamdır.

Ancak her probabilistik metrik uzayın veya Menger uzayın metrik uzay olamayacağına dair bir örnek verelim.

2.2.7. Örnek

$X = \mathbb{N}$ olmak üzere $\forall a,b \in I$ için $a * b = ab$, $\forall x,y \in \mathbb{N}$ ve $\forall t > 0$ için

$$F_{xy}(t) = \begin{cases} x/y, & x \leq y \\ y/x & y \leq x \end{cases}$$

olsun. Bu takdirde $(\mathbb{N}, F, *)$ Menger uzaydır ancak \mathbb{N} üzerinde $F_{xy}(t) = H(t-d(x,y))$ eşitliğini sağlayacak şekilde d metriği yoktur.

2.2.8. Tanım

$X \neq \emptyset$ bir küme ve $F : X \times X \rightarrow \Delta_+$ olsun. $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall t, s \geq 0$ için

- (i) $F_{xy}(0) = 0$,
- (ii) $F_{xy}(t) = 1 \Leftrightarrow x = y$,
- (iii) $F_{xy}(t) = F_{yx}(t)$,
- (iv) $F_{xy}(t) = 1$ ve $F_{yz}(s) = 1$ iken $F_{xz}(t+s) = 1$,
- (v) $F_{xz}(t+s) \geq F_{xy}(t) * F_{yz}(s)$ olacak şekilde $*$ üçgen normu vardır.

- (i), (ii) ve (iii) şartları sağlanır ise, (X, F) ikilisine fuzzy yarı-metrik uzay (FSM-uzay) denir.
- (i), (ii), (iii) şartları ile birlikte (iv) de verilen zayıf üçgen eşitsizliği de sağlanır ise, (X, F) ikilisine fuzzy metrik uzay (FM-uzay) denir (7).
- (i), (ii), (iii), (iv) ve (v) şartları sağlanır ise, $(X, F, *)$ üçlüsüne genelleştirilmiş Menger uzay veya fuzzy Menger uzay (f-Menger uzay) denir.

2.2.9. Tanım

$(X, F, *)$ f-Menger uzay, (x_n) bu uzayda bir dizi ve $x \in X$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ ve $\lambda \in (0, 1)$ için $\exists n_0(\varepsilon, \lambda) \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_0$ iken $F_{xx_n}(\varepsilon) > 1 - \lambda$ oluyorsa, (x_n) dizisine f-Menger uzayında x noktasına f-yakınsak denir ve $n \rightarrow \infty$ iken $F_{xx_n}(t) \rightarrow 1$ veya $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{xx_n}(t) = 1$ ile gösterilir (7).

2.2.10. Tanım

$(X, F, *)$ f-Menger uzay, (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ ve $\lambda \in (0, 1)$ için $\exists n_0(\varepsilon, \lambda) \in \mathbb{N} \ni \forall n, m \geq n_0$ iken $F_{x_n, x_m}(\varepsilon) > 1 - \lambda$ oluyorsa, (x_n) dizisine f-Menger uzayında f-Cauchy dizisi denir (7).

2.2.11. Lemma

$(X, F, *)$ Menger uzay, $*$ sürekli t-norm öyle ki $\forall a \in [0, 1]$ için $a * a \geq a$ ve (x_n) , X de bir dizi olsun. Eğer $\forall t > 0$ için

$$F_{x_n, x_{n+1}}(\alpha t) \geq F_{x_{n-1}, x_n}(t)$$

olacak şekilde $0 < \alpha < 1$ varsa (x_n) dizisi X de Cauchy dizisidir (21).

2. 2. 12. Tanım

(X, F) PM-uzay ve A , X in boştan farklı bir alt kümesi olsun. A kümesinin probabilistik çapı,

$$D_A(t) = \sup_{s < t} \left(\inf_{x, y \in A} F_{xy}(s) \right)$$

şeklinde tanımlanır. Eğer,

$$\sup_{t \in [0, \infty)} D_A(t) = 1$$

ise, A 'ya probabilistik sınırlıdır denir (20). A 'nın bütün probabilistik sınırlı alt kümelerinin ailesini $B(X)$ ile göstereceğiz.

2.2.13. Tanım

(X, F) PM-uzay, $A \in B(X)$ ve $x \in X$ olsun. x noktasının A kümesine t -ye göre probabilistik uzaklığı,

$$F_{xA}(t) = \sup_{s < t} \left(\sup_{y \in A} F_{xy}(s) \right)$$

şeklinde tanımlanır (20).

2.2.14. Tanım

$(X, F, *)$ f-Menger uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $\forall x, y \in A$ ve $\forall t > 0$ için $F_{xy}(t) > 1 - \lambda$ olacak şekilde $0 < \lambda < 1$ var ise, A 'ya fuzzy sınırlıdır denir. X in bütün fuzzy sınırlı (f-sınırlı) alt kümelerinin ailesini $FB(X)$ ile göstereceğiz (7).

2.2.15. Tanım

$X \neq \emptyset$ ve $P(X)$, X 'in bütün alt kümelerinin ailesi olsun. Bu takdirde $f : X \rightarrow P(X) \setminus \emptyset$ dönüşümüne çoğul değerli dönüşüm denir.

Fuzzy Menger uzaylarda tanımladığımız ve 3. bölümde kullanacağımız iki küme arasındaki uzaklık, küme yakınsaklığı, dizisel süreklilik ve yörüngesel tamlık kavramlarını verelim.

2.2.16. Tanım

$(X, F, *)$ f-Menger uzay ve $A, B \in FB(X)$ olsun. A kümesinin B kümesine t -ye göre f-Menger uzaklığı,

$$\tilde{F}_{AB}(t) = \sup_{s < t} \left(\inf_{x \in A} \left(\sup_{y \in B} F_{xy}(s) \right) * \inf_{y \in B} \left(\sup_{x \in A} F_{xy}(s) \right) \right)$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca \tilde{F} fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar;

(i) $\forall A, B \in \text{FB}(X)$ için $\tilde{F}_{AB}(t) = \tilde{F}_{BA}(t) \geq 0$. Ayrıca,

$\tilde{F}_{AB}(t) = 1$ ise $A=B$ ve tek nokta kümeleridir.

(ii) $\forall A, B, C \in \text{FB}(X)$ için $\tilde{F}_{AC}(t+s) \geq \tilde{F}_{AB}(t) * \tilde{F}_{BC}(s)$. Ayrıca,

$A=\{a\}$ ise, $\tilde{F}_{AB}(t) = \tilde{F}_{ab}(t)$ ve

$B=\{b\}$ ise, $\tilde{F}_{AB}(t) = \tilde{F}_{ab}(t) = F_{ab}(t)$ dir.

2.2.17. Tanım

$(X, F, *)$ f-Menger uzay, $\{A_n\} \subseteq \text{FB}(X)$ ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer $\forall t \geq 0$ olmak üzere

(i) $\forall a \in A$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{a_n a}(t) = 1$ olacak şekilde $a_n \in A$ vardır,

(ii) $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_0$ iken $A_n \subseteq B_\varepsilon = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon, t)$

şartları sağlanıyor ise, $\{A_n\}$ dizisine A kümesine f-yakınsıyor denir ve $n \rightarrow \infty$ iken

$\tilde{F}_{A_n A}(t) \rightarrow 1$ veya $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{F}_{A_n A}(t) = 1$ şeklinde gösterilir.

2.2.18. Tanım

$(X, F, *)$ f-Menger uzay, $N: X \rightarrow \text{FB}(X)$ dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. $F_{xx_n}(t) \rightarrow 1$ iken

$\tilde{F}_{N_x N_{x_n}}(t) \rightarrow 1$ olacak şekilde $(x_n) \subset X$ var ise, N dönüşümüne $x_0 \in X$ de süreklidir

denir. Eğer N, X in her noktasında sürekli ise, N ye X üzerinde süreklidir denir.

2.2.19. Tanım

$(X, F, *)$ f-Menger uzay, $N: X \rightarrow FB(X)$ dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun.

(i) x_0 noktasında N dönüşümünün f-yörüngesi;

$$O(N, x_0) = \{x_n : x_n \in N_{x_{n-1}}, n = 1, 2, \dots\}$$

şeklinde verilen (x_n) dizisidir.

(ii) $\forall x \in X$ için N nin f-yörüngesinin alt dizisi olan her f-Cauchy dizisi X de bir noktaya f-yakınsak ise, X f-Menger uzayına N -fuzzy yörüngesel tam denir.

1975 yılında Kramosil ve Michalek (11), t-normdan yararlanarak aşağıdaki fuzzy metrik uzay tanımını vermiştir.

2.3. Fuzzy Metrik Uzay

2.3.1. Tanım

$X \neq \emptyset$, $*$ sürekli t-norm ve M 'de $X^2 \times [0, \infty)$ üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan bir fuzzy küme olsun: $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall t, s > 0$ için

- (i) $M(x, y, 0) = 0$,
- (ii) $M(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow x = y$,
- (iii) $M(x, y, t) = M(y, x, t)$,
- (iv) $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t+s)$,
- (v) $M(x, y, \cdot) : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ sol sürekli.

Bu takdirde $(X, M, *)$ üçlüsüne fuzzy metrik uzay denir. Burada $M(x, y, t)$, t ye bağlı olacak şekilde x ile y arasındaki uzaklığın derecesidir (11).

1994 yılında George ve Veeramani (15), 2.3.1. Tanım'ı fuzzy metrik uzaylarda Hausdorff topolojisini elde etmek için aşağıdaki şekilde geliştirdi.

2.3.2. Tanım

$X \neq \emptyset$, $*$ sürekli t-norm ve M 'de $X^2 \times (0, \infty)$ üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan bir fuzzy küme olsun: $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall t, s > 0$ için

- (i) $M(x, y, t) > 0$,
- (ii) $M(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow x = y$,
- (iii) $M(x, y, t) = M(y, x, t)$,
- (iv) $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t+s)$,
- (v) $M(x, y, \cdot) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ sürekli.

Bu takdirde $(X, M, *)$ üçlüsüne fuzzy metrik uzay denir (15).

2.3.3. Örnek

\mathbb{R} alışılmış metrik uzay olmak üzere $\forall a, b \in I$ için $a * b = ab$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ve $\forall t > 0$ için

$$M(x, y, t) = \left[\exp\left(\frac{|x - y|}{t}\right) \right]^{-1}$$

olsun. Bu takdirde $(\mathbb{R}, M, *)$ bir fuzzy metrik uzaydır.

2.3.4. Uyarı

Yukarıdaki örnek, üçgen normun $\forall a, b \in I$ için $a * b = \min\{a, b\}$ olması durumunda da sağlanmaktadır. Ayrıca \mathbb{R} alışılmış metrik uzay yerine herhangi bir metrik uzay alındığında yine fuzzy metrik uzay elde edilmektedir. Bu durumda her metrik uzay, fuzzy metrik uzaydır. Gerçekten, (X, d) herhangi bir metrik uzay olmak üzere $\forall a, b \in I$

için $a*b=ab$ (veya $a*b=\min\{a,b\}$), $\forall x,y \in X$ ve $\forall t>0$ için $M(x,y,t)=\frac{t}{t+d(x,y)}$ şeklinde tanımlarsak $(X,M,*)$ fuzzy metrik uzaydır. Bu şekilde tanımlanan M fuzzy metriğine d metriğinin ürettiği standart fuzzy metriği denir (15). Ancak her fuzzy metrik uzay, metrik uzay değildir. Şimdi buna bir örnek verelim.

2.3.5. Örnek

$X=\mathbb{N}$ olmak üzere $\forall a,b \in \mathbb{N}$ için $a*b=ab$, $\forall x,y \in \mathbb{N}$ ve $\forall t>0$ için

$$M(x,y,t) = \begin{cases} x/y, & x \leq y \\ y/x, & y \leq x \end{cases}$$

olsun. Bu takdirde $(\mathbb{N},M,*)$ fuzzy metrik uzaydır ancak \mathbb{N} üzerinde $M(x,y,t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$ eşitliğini sağlayacak şekilde d metriği yoktur.

2.3.6. Lemma

$\forall x,y \in X$ için $M(x,y,.)$ azalmayandır (16).

İspat

Kabul edelimki $t < s$ olacak şekilde $\forall t,s > 0$ için $M(x,y,t) > M(x,y,s)$ olsun. Bu durumda

$$M(x,y,t) * M(y,y,s-t) \leq M(x,y,s) < M(x,y,t)$$

olur. $M(y,y,s-t) = 1$ olduğundan $M(x,y,t) < M(x,y,t)$ olup bu ise çelişkidir. O halde $M(x,y,.)$ azalmayandır.

2.3.7. Tanım

$(X, M, *)$ fuzzy metrik uzay, (x_n) bu uzayda bir dizi ve $x \in X$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ ve $\lambda \in (0, 1)$ için $\exists n_0(\varepsilon, \lambda) \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_0$ iken $M(x_n, x, \varepsilon) > 1 - \lambda$ oluyorsa, (x_n) dizisine fuzzy metrik uzayında x noktasına yakınsaktır denir ve $n \rightarrow \infty$ iken $M(x_n, x, t) \rightarrow 1$ veya $\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, x, t) = 1$ ile gösterilir (15).

2.3.8. Tanım

$(X, M, *)$ fuzzy metrik uzay, (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ ve $\lambda \in (0, 1)$ için $\exists n_0(\varepsilon, \lambda) \in \mathbb{N} \ni \forall n, m \geq n_0$ iken $M(x_n, x_m, \varepsilon) > 1 - \lambda$ oluyorsa, (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir (15).

Fuzzy metrik uzayında alınan her Cauchy dizisi bu uzayda bir noktaya yakınsar ise, uzaya tam fuzzy metrik uzay denir (15).

2.3.9. Uyarı

Fuzzy metrik uzaylarda $*$ t-normu sürekli olduğundan 2.3.2.(iv) Tanım'dan bu uzayda bir dizinin limiti tek türlü tanımlıdır.

2.3.10. Lemma

$(X, M, *)$ fuzzy metrik uzay öyle ki $\forall a \in [0, 1]$ için $a * a \geq a$, $\{y_n\}$ bu uzayda bir dizi ve $\forall x, y \in X$ ve $\forall t > 0$ için $\lim_{t \rightarrow \infty} M(x, y, t) = 1$ olsun. Eğer $\forall t > 0$ ve $n = 1, 2, 3, \dots$ için

$$M(y_{n+2}, y_{n+1}, kt) \geq M(y_{n+1}, y_n, t)$$

olacak şekilde $k \in (0, 1)$ var ise, $\{y_n\}$ dizisi X 'de bir Cauchy dizisidir (23).

2.3.11. Lemma

$(X, M, *)$ fuzzy metrik uzay ve $\forall x, y \in X$ ve $\forall t > 0$ için

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M(x, y, t) = 1$$

olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ ve $\forall t > 0$ için

$$M(x, y, kt) \geq M(x, y, t)$$

olacak şekilde $k \in (0, 1)$ var ise, $x=y$ (23).

İspat

$\forall x, y \in X$ ve $\forall t > 0$ için $M(x, y, kt) \geq M(x, y, t)$ olduğundan $M(x, y, t) \geq M(x, y, k^{-1}t)$. O halde $m \in \mathbb{N}$ için

$$M(x, y, t) \geq M(x, y, k^{-1}t) \geq M(x, y, k^{-2}t) \geq \dots \geq M(x, y, k^{-m}t) \geq \dots$$

elde edilir. Bu durumda $m \rightarrow \infty$ için $M(x, y, t) = 1$, yani $x=y$ elde edilir.

2.3.12. Sonuç

$(X, F, *)$ f-Menger uzay olsun.

(i) $\forall x, y \in X$ için $\lim_{t \rightarrow \infty} F_{xy}(t) = 1$, yani $F(X \times X) \subseteq D_+$ ise, $(X, F, *)$ Menger uzaydır.

(ii) • * süreklili,

• $\forall x, y \in X$ ve $\forall t > 0$ için $F_{xy}(t) > 0$,

• F_{xy} , $(0, \infty)$ üzerinde süreklili,

ise, $(X, F, *)$ ye kuvvetli (strict) fuzzy metrik uzay denir.

2.3.13. Tanım

$(X, M, *)$ fuzzy metrik uzay ve $A, B: X \rightarrow X$ dönüşümler olsun. Bazı $z \in X$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Bx_n = z$ olacak şekilde X de bir $\{x_n\}$ dizisi verildiğinde, her $t > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} M(ABx_n, BAx_n, t) = 1$ oluyorsa, A ve B dönüşümlerine bağdaşabilirdir (compatible) denir (23).

2.3.14. Tanım

$(X, M, *)$ fuzzy metrik uzay ve $A, B: X \rightarrow X$ dönüşümler olsun. Bazı $z \in X$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Bx_n = z$ olacak şekilde X de bir $\{x_n\}$ dizisi verildiğinde, her $t > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} M(AAx_n, BBx_n, t) = 1$ oluyorsa, A ve B dönüşümlerine (β) -tipi bağdaşabilirdir (compatible of type (β)) denir (24).

2.3.15. Önerme

$(X, M, *)$ fuzzy metrik uzay öyle ki $t * t \geq t \forall t \in [0, 1]$ ve $A, B: X \rightarrow X$ sürekli dönüşümler olsun. A ve B dönüşümleri bağdaşabilirdir gerek ve yeter şart (β) -tipi bağdaşabilirdir (24).

2.3.16. Önerme

$(X, M, *)$ fuzzy metrik uzay öyle ki $t * t \geq t \forall t \in [0, 1]$ ve $A, B: X \rightarrow X$ dönüşümler olsun. Eğer A ve B dönüşümleri (β) -tipi bağdaşabilir ve bazı $z \in X$ için $Az = Bz$ ise, $ABz = BBz = BAz = AAz$ (24).

2.3.17. Önerme

$(X, M, *)$ fuzzy metrik uzay öyle ki $t * t \geq t \forall t \in [0, 1]$ ve $A, B: X \rightarrow X$ (β)-tipi bağdaşabilir dönüşümler olsun. $\{x_n\}$, bazı $z \in X$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Bx_n = z$ olacak şekilde X 'de bir dizi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler vardır:

- (i) A, z de sürekli ise $\lim_{n \rightarrow \infty} BBx_n = Az$,
- (ii) B, z de sürekli ise $\lim_{n \rightarrow \infty} AAx_n = Bz$,
- (iii) A ve B, z de sürekli ise $ABz = BAz$ ve $Az = Bz$ (24).

2.3.18. Örnek

$X = [0, \infty)$ olmak üzere (X, d) alışılmış metrik uzay olsun. $M : X^2 \times [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonunu $\forall x, y \in X, t > 0$ için $M(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$ ve $*$: $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonunu $\forall a, b \in [0, 1]$ için $a * b = ab$ olacak şekilde tanımlarsak $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzaydır. $A, B : X \rightarrow X$ fonksiyonlarını

$$Ax = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \\ 1 + x, & x \in (1, \infty) \end{cases} \text{ ve } Bx = \begin{cases} 1 + x, & x \in [0, 1] \\ 1, & x \in [1, \infty) \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda hem A hem de B fonksiyonu $x = 1$ de sürekli değildir. X 'de $x_n = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots$ şeklinde tanımlanan $\{x_n\}$ dizisini göz önüne alırsak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Bx_n = 1 \text{ olur. Bu durumda } \lim_{n \rightarrow \infty} M(ABx_n, BAx_n, t) \neq 1 \text{ ve}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(AAx_n, BBx_n, t) = 1 \text{ olduğundan } A \text{ ve } B \text{ dönüşümleri } (\beta)\text{-tipi bağdaşabilirdir}$$

ancak bağdaşabilir değildir.

2.3.19. Örnek

$X = \mathbb{R}$ olmak üzere (X, d) alışılmış metrik uzay olsun. $M : X^2 \times [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonunu $\forall x, y \in X, t > 0$ için $M(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$ ve $*$: $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$

fonksiyonunu $\forall a, b \in [0, 1]$ için $a * b = ab$ olacak şekilde tanımlarsak $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzaydır. $A, B : X \rightarrow X$ fonksiyonlarını

$$Ax = \begin{cases} 1/x^3, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \text{ ve } Bx = \begin{cases} 1/x^2, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda hem A hem de B fonksiyonu $x = 0$ da sürekli değildir. X 'de, $x_n = n, n = 1, 2, \dots$ şeklinde tanımlanan $\{x_n\}$ dizisini göz önüne alırsak $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Bx_n = 0$ olup $\lim_{n \rightarrow \infty} M(ABx_n, BAx_n, t) = 1$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} M(AAx_n, BBx_n, t) = 0$ olduğundan A ve B dönüşümleri bağdaşabilir ancak (β) -tipi bağdaşabilir değildir.

2.3.20. Tanım

$(X, M, *)$ fuzzy metrik uzay ve $A, B : X \rightarrow X$ iki dönüşüm olsun. Bazı $z \in X$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Bx_n = z$ olacak şekilde X de $\{x_n\}$ dizisi verildiğinde, her $t > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} M(ABx_n, BBx_n, t) = 1$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} M(BAx_n, AAx_n, t) = 1$ oluyorsa, A ve B dönüşümlerine (α) -tipi bağdaşabilir (compatible of type (α)) denir (23).

2.3.21. Önerme

$(X, M, *)$ tam fuzzy metrik uzay öyle ki $t * t \geq t \forall t \in [0, 1]$ ve $A, B : X \rightarrow X$ sürekli iki dönüşüm olsun. Bu takdirde A ve B bağdaşabilir gerek ve yeter şart A ve B (α) -tipi bağdaşabilir (23).

2.3.22. Önerme

$(X, M, *)$ fuzzy metrik uzay öyle ki $t * t \geq t \quad \forall t \in [0, 1]$ ve $A, B: X \rightarrow X$ iki dönüşüm olsun. Eğer A ve B (α) -tipi bağdaşabilir ve bazı $z \in X$ için $Az = Bz$ ise, $ABz = BBz = BAz = AAz$ (23).

2.3.23. Önerme

$(X, M, *)$ fuzzy metrik uzay öyle ki $t * t \geq t \quad \forall t \in [0, 1]$ ve $A, B: X \rightarrow X$ (α) -tipi bağdaşabilir iki dönüşüm olsun. Bazı $z \in X$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Bx_n = z$ olacak şekilde X de $\{x_n\}$ dizisi verilsin. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler sağlanır:

- (i) A, z de sürekli ise $\lim_{n \rightarrow \infty} BAx_n = Az$,
- (ii) A ve B, z de sürekli ise $ABz = BAz$ ve $Az = Bz$ (23).

2.3.24. Örnek

$X = [0, \infty)$ olmak üzere (X, d) alışılmış metrik uzay olsun. $M: X^2 \times (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonunu $\forall x, y \in X$ ve $t > 0$ için $M(x, y, t) = \frac{t}{t + |x - y|}$, $*: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonunu $\forall a, b \in [0, 1]$ için $a * b = ab$ olacak şekilde tanımlarsak $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzaydır. $A, B: X \rightarrow X$ fonksiyonlarını

$$Ax = \begin{cases} x, & x \in [0, 2) \\ 4, & x \in [2, \infty) \end{cases} \quad \text{ve} \quad Bx = \begin{cases} 4 - x, & x \in [0, 2) \\ 4, & x \in [2, \infty) \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu takdirde $x=2$ noktasında A ve B fonksiyonları sürekli değildir. X de $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Bx_n = z \in X$ olacak şekilde $\{x_n\}$ dizisini göz önüne alalım. Bu durumda A ve B nin tanımından $z \in [2, \infty)$ olmalıdır. A ve B fonksiyonları $[2, \infty)$ üzerinde sabit olduğundan $z=2$ noktasını incelemek yeterlidir. Kabul edelim ki

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \rightarrow 2$ ve $x_n < 2$ olsun. O halde $Ax_n = x_n \rightarrow 2$ (soldan) ve $Bx_n = 4 - x_n \rightarrow 2$ (sağdan) olup $\forall n \in \mathbb{N}$ için $4 - x_n > 2$ olduğundan $ABx_n = 4$ ve $x_n < 2$ olduğundan $BAx_n = 4 - x_n \rightarrow 2$ olur. Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} M(ABx_n, BAx_n, t) \neq 1$ ancak $\lim_{n \rightarrow \infty} M(ABx_n, BBx_n, t) = 1$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} M(BAx_n, AAx_n, t) = 1$ olur. Böylece A ve B bağdaşabilir değildir ancak (α)-tipi bağdaşabilirdir.

2.3.25. Örnek

$X = \mathbb{R}$ olmak üzere (X, d) alışılmış metrik uzay olsun. $M : X^2 \times (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonunu $\forall x, y \in X$ ve $t > 0$ için $M(x, y, t) = \frac{t}{t + |x - y|}$, $*$: $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonunu $\forall a, b \in [0, 1]$ için $a * b = ab$ olacak şekilde tanımlarsak $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzaydır. $A, B : X \rightarrow X$ fonksiyonlarını

$$Ax = \begin{cases} 1/x^3, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \text{ ve } Bx = \begin{cases} 1/x^2, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu takdirde $x=0$ noktasında A ve B fonksiyonları sürekli değildir. X de $\{x_n\}$ dizisini $x_n = n$, $n=1, 2, \dots$ şeklinde seçelim. O halde $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Bx_n = 0$ olur. Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} M(ABx_n, BAx_n, t) = 1$ ancak $\lim_{n \rightarrow \infty} M(ABx_n, BBx_n, t) = 0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} M(BAx_n, AAx_n, t) = 0$ olur. Böylece A ve B bağdaşabilirdir ancak (α)-tipi bağdaşabilir değildir.

3. MENGER VE FUZZY MENGER UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

3.1. Menger Uzayda Sabit Nokta Teoremleri

Bu bölümde, Menger uzayda iki dönüşüm ve dönüşüm dizileri için komutatif olma özelliğinden yararlanarak tek değerli dönüşümler için hazırlanan ortak sabit nokta teoremleri ispat edilmiştir.

3.1.1. Tanım

$X \neq \emptyset$ ve $S, T: X \rightarrow X$ dönüşümler olmak üzere, eğer $\forall x \in X$ için $ST(x) = TS(x)$ ise, S ve T ye komutatiftir (commuting) denir.

3.1.2. Teorem

$(X, F, *)$ tam Menger uzay öyle ki $* = *_M$, $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm, T ile komutatif olan ve $T(X) \subseteq S(X)$ şartını sağlayan $S: X \rightarrow X$ dönüşümü sürekli olsun. T dönüşümü aşağıdaki şartı $\forall x, y \in X, \forall t > 0, r \geq 2, 0 < p, q < 1, 0 \leq a < 1$ öyle ki $p + q - a = 1$ için sağlasın;

$$\min \left\{ F_{TxTy}^r(t), F_{SxTx}(t) F_{SyTy}^{r-1}(t), F_{SyTy}^r(t) \right\} + a F_{SyTy}^{r-1}(t) F_{SxTy}(2t) \geq \left[p F_{SxTx}(t) + q F_{SxSy}(t) \right] F_{SxTy}(2t) F_{SyTy}^{r-2}(t). \quad [3.1]$$

Eğer $r=2$ ise, T ve S için ortak sabit nokta vardır ve tektir.

İspat

$x_0 \in X$ herhangi bir nokta olsun. (x_n) dizisini $Sx_n = Tx_{n-1}$ ($n=1, 2, \dots$) şeklinde tanımlayalım. O halde $x = x_0$ ve $y = x_1$ için Eş. 3. 1 den,

$$\min \left\{ F_{Tx_0Tx_1}^r(t), F_{Sx_0Tx_0}(t)F_{Sx_1Tx_1}^{r-1}(t), F_{Sx_1Tx_1}^r(t) \right\} + aF_{Sx_1Tx_1}^{r-1}(t)F_{Sx_0Tx_1}(2t) \geq$$

$$[pF_{Sx_0Tx_0}(t) + qF_{Sx_0Sx_1}(t)]F_{Sx_0Tx_1}(2t)F_{Sx_1Tx_1}^{r-2}(t)$$

elde edilir. O halde $\forall t > 0$ için

$$\min \left\{ F_{Sx_1Sx_2}^r(t), F_{Sx_0Sx_1}(t)F_{Sx_1Sx_2}^{r-1}(t), F_{Sx_1Sx_2}^r(t) \right\} + aF_{Sx_1Sx_2}^{r-1}(t)F_{Sx_0Sx_2}(2t) \geq$$

$$[pF_{Sx_0Sx_1}(t) + qF_{Sx_0Sx_1}(t)]F_{Sx_0Sx_2}(2t)F_{Sx_1Sx_2}^{r-2}(t)$$

ve buradan

$$\min \left\{ F_{Sx_1Sx_2}^r(t), F_{Sx_0Sx_1}(t)F_{Sx_1Sx_2}^{r-1}(t) \right\} + aF_{Sx_1Sx_2}^{r-1}(t)F_{Sx_0Sx_2}(2t) \geq$$

$$[p + q]F_{Sx_0Sx_1}(t)F_{Sx_0Sx_2}(2t)F_{Sx_1Sx_2}^{r-2}(t)$$

olur. Bu durumda $\forall t > 0$ için

$$F_{Sx_1Sx_2}^{r-1}(t) \min \left\{ F_{Sx_1Sx_2}^r(t), F_{Sx_0Sx_1}(t) \right\} + aF_{Sx_1Sx_2}^{r-1}(t)F_{Sx_0Sx_2}(2t) \geq$$

$$[p + q]F_{Sx_0Sx_1}(t)F_{Sx_0Sx_2}(2t)F_{Sx_1Sx_2}^{r-2}(t)$$

ve buradan

$$F_{Sx_1Sx_2}^{r-1}(t)F_{Sx_0Sx_2}(2t) + aF_{Sx_1Sx_2}^{r-1}(t)F_{Sx_0Sx_2}(2t) \geq$$

$$[p + q]F_{Sx_0Sx_1}(t)F_{Sx_0Sx_2}(2t)F_{Sx_1Sx_2}^{r-2}(t)$$

olup

$$(1 + a)F_{Sx_1Sx_2}^{r-1}(t)F_{Sx_0Sx_2}(2t) \geq [p + q]F_{Sx_0Sx_1}(t)F_{Sx_0Sx_2}(2t)F_{Sx_1Sx_2}^{r-2}(t)$$

$\forall t > 0$ için

$$F_{S_{X_1}S_{X_2}}(t) \geq F_{S_{X_0}S_{X_1}}(t)$$

elde edilir. Tümevarımla $\forall t > 0$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$F_{S_{X_n}S_{X_{n+1}}}(t) \geq F_{S_{X_{n-1}}S_{X_n}}(t)$$

bulunur. O halde $\forall m, n \in \mathbb{N}$ ($m > n$) ve $\forall t > 0$ için

$$\begin{aligned} F_{S_{X_n}S_{X_m}}(t) &\geq \min \left\{ F_{S_{X_n}S_{X_{n+1}}}\left(\frac{t}{m-n}\right), F_{S_{X_{n+1}}S_{X_{n+2}}}\left(\frac{t}{m-n}\right), \dots, F_{S_{X_{m-1}}S_{X_m}}\left(\frac{t}{m-n}\right) \right\} \\ &\geq \min \left\{ F_{S_{X_0}S_{X_1}}\left(\frac{t}{m-n}\right), F_{S_{X_0}S_{X_1}}\left(\frac{t}{m-n}\right), \dots, F_{S_{X_0}S_{X_1}}\left(\frac{t}{m-n}\right) \right\} \\ &= F_{S_{X_0}S_{X_1}}\left(\frac{t}{m-n}\right) > 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$ vardır. Bu durumda (S_{X_n}) bir Cauchy dizisidir. Uzay tam olduğundan $S_{X_n} \rightarrow u$ olacak şekilde $u \in X$ vardır. S sürekli olduğundan $SS_{X_n} \rightarrow Su$ olur. Ayrıca $\forall n \in \mathbb{N}$ için $S_{X_n} = T_{X_{n-1}}$ olduğundan $(T_{X_{n-1}})$ dizisi de u ya yakınsar. S ve T komutatif olduğundan $\forall t > 0$ için Eş. 3. 1 den

$$\begin{aligned} &\min \left\{ F_{SS_{X_n}T_u}^r(t), F_{SS_{X_{n-1}}SS_{X_n}}(t)F_{SuTu}^{r-1}(t), F_{SuTu}^r(t) \right\} + aF_{SuTu}^{r-1}(t)F_{SS_{X_{n-1}}T_u}(2t) \geq \\ &[pF_{SS_{X_{n-1}}SS_{X_n}}(t) + qF_{SS_{X_{n-1}}Su}(t)]F_{SS_{X_{n-1}}T_u}(2t)F_{SuTu}^{r-2}(t) \end{aligned}$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\begin{aligned} &\min \left\{ F_{SuTu}^r(t), F_{SuSu}(t)F_{SuTu}^{r-1}(t), F_{SuTu}^r(t) \right\} + aF_{SuTu}^{r-1}(t)F_{SuTu}(2t) \geq \\ &[pF_{SuSu}(t) + qF_{SuSu}(t)]F_{SuTu}(2t)F_{SuTu}^{r-2}(t) \end{aligned}$$

ve buradan $\forall t > 0$ için

$$\min\{F_{SuTu}^r(t), F_{SuTu}^{r-1}(t), F_{SuTu}^r(t)\} + aF_{SuTu}^{r-1}(t)F_{SuTu}(2t) \geq [p+q]F_{SuTu}(2t)F_{SuTu}^{r-2}(t)$$

olup ayrıca $\forall t > 0$ için

$$F_{SuTu}(2t) \geq \min\{F_{SuSu}(t), F_{SuTu}(t)\} \\ = F_{SuTu}(t)$$

olduğundan yukarıdaki eşitsizlik

$$F_{SuTu}^r(t) + aF_{SuTu}^{r-1}(t)F_{SuTu}(t) \geq [p+q]F_{SuTu}(t)F_{SuTu}^{r-2}(t) \\ (1+a)F_{SuTu}^r(t) \geq [p+q]F_{SuTu}^{r-1}(t)$$

ve buradan $\forall t > 0$ için

$$F_{SuTu}(t) \geq 1$$

olur. O halde $Su=Tu$ olmalıdır. Hatta $\forall t > 0$ için Eş. 3. 1 den

$$\min\{F_{Sx_nTu}^r(t), F_{Sx_{n-1}Sx_n}(t)F_{SuTu}^{r-1}(t), F_{SuTu}^r(t)\} + aF_{SuTu}^{r-1}(t)F_{Sx_{n-1}Tu}(2t) \geq [pF_{Sx_{n-1}Sx_n}(t) + qF_{Sx_{n-1}Su}(t)]F_{Sx_{n-1}Tu}(2t)F_{SuTu}^{r-2}(t)$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\min\{F_{uTu}^r(t), F_{uu}(t)F_{SuSu}^{r-1}(t), F_{SuSu}^r(t)\} + aF_{SuSu}^{r-1}(t)F_{uTu}(2t) \geq [pF_{uu}(t) + qF_{uSu}(t)]F_{uTu}(2t)F_{SuSu}^{r-2}(t)$$

ve buradan $\forall t > 0$ için

$$F_{uSu}^r(t) + aF_{uSu}(t) \geq [p + qF_{uSu}(t)]F_{uSu}(t)$$

$$F_{uSu}^{r-1}(t) - qF_{uSu}(t) \geq p - a$$

elde edilir. Eğer $r=2$ ise bu durumda $\forall t > 0$ için bu eşitsizlik

$$F_{uSu}(t) - qF_{uSu}(t) \geq p - a$$

$$F_{uSu}(t) \geq 1$$

olur. Bu ise $u=Su=Tu$ olmasıdır. O halde u , T ve S için ortak sabit noktadır. Şimdi u nun tekliğini gösterelim: Kabul edelim ki v , S ve T nin başka bir ortak sabit noktası olsun. O halde $v=Sv=Tv$ ve $u=Su=Tu$ olur. Bu durumda $\forall t > 0$ için Eş. 3. 1 den

$$\min\{F_{uv}^2(t), F_{Suu}(t)F_{Svv}(t), F_{Svv}^2(t)\} + aF_{Svv}(t)F_{Suv}(2t) \geq$$

$$[pF_{Suu}(t) + qF_{SuSv}(t)]F_{Suv}(2t)F_{Svv}^0(t)$$

olup buradan

$$F_{uv}^2(t) + aF_{uv}(t) \geq [p + qF_{uv}(t)]F_{uv}(t)$$

$$F_{uv}(t) - qF_{uv}(t) \geq p - a$$

$$F_{uv}(t) \geq 1$$

elde edilir. Böylece $u=v$ olup ortak sabit nokta tektir.

3.1.3. Teorem

$(X, F, *)$ tam Menger uzay öyle ki $* = *_{\mathcal{M}}$, $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm, T ile komutatif olan ve $T(X) \subseteq S(X)$ şartını sağlayan $S: X \rightarrow X$ dönüşümü sürekli olsun. T dönüşümü aşağıdaki şartı $\forall x, y \in X, \forall t > 0, r \geq 2, 0 < \alpha < 1, 0 < p, q < 1, 0 \leq a < 1$ öyleki $p+q-a=1$ için sağlasın;

$$\min \left\{ F_{TxTy}^r(\alpha), F_{SxTx}(\alpha) F_{SyTy}^{r-1}(\alpha), F_{SyTy}^r(\alpha) \right\} + a F_{SyTy}^{r-1}(\alpha) F_{SxTy}(2\alpha) \geq [p F_{SxTx}(t) + q F_{SxSy}(t)] F_{SxTy}(2\alpha) F_{SyTy}^{r-2}(\alpha) \quad [3.2]$$

Eğer $r=2$ ise, T ve S için ortak sabit nokta vardır ve tektir.

İspat

$x_0 \in X$ herhangi bir nokta olsun. (x_n) dizisini $Sx_n = Tx_{n-1}$ ($n=1, 2, \dots$) şeklinde tanımlayalım. O halde $x = x_0$ ve $y = x_1$ için Eş. 3. 2 den,

$$\min \left\{ F_{Tx_0Tx_1}^r(\alpha), F_{Sx_0Tx_0}(\alpha) F_{Sx_1Tx_1}^{r-1}(\alpha), F_{Sx_1Tx_1}^r(\alpha) \right\} + a F_{Sx_1Tx_1}^{r-1}(\alpha) F_{Sx_0Tx_1}(2\alpha) \geq [p F_{Sx_0Tx_0}(t) + q F_{Sx_0Sx_1}(t)] F_{Sx_0Tx_1}(2t) F_{Sx_1Tx_1}^{r-2}(t)$$

elde edilir. O halde $\forall t > 0$ ve $0 < \alpha < 1$ için

$$\min \left\{ F_{Sx_1Sx_2}^r(\alpha), F_{Sx_0Sx_1}(\alpha) F_{Sx_1Sx_2}^{r-1}(\alpha), F_{Sx_1Sx_2}^r(\alpha) \right\} + a F_{Sx_1Sx_2}^{r-1}(\alpha) F_{Sx_0Sx_2}(2\alpha) \geq [p F_{Sx_0Sx_1}(t) + q F_{Sx_0Sx_1}(t)] F_{Sx_0Sx_2}(2\alpha) F_{Sx_1Sx_2}^{r-2}(\alpha)$$

ve buradan

$$\min \left\{ F_{Sx_1Sx_2}^r(\alpha), F_{Sx_0Sx_1}(\alpha) F_{Sx_1Sx_2}^{r-1}(\alpha) \right\} + a F_{Sx_1Sx_2}^{r-1}(\alpha) F_{Sx_0Sx_2}(2\alpha) \geq$$

$$[p + q] F_{S_{x_0}S_{x_1}}(t) F_{S_{x_0}S_{x_2}}(2\alpha t) F_{S_{x_1}S_{x_2}}^{r-2}(\alpha t)$$

olur. Bu durumda $\forall t > 0$ ve $0 < \alpha < 1$ için

$$F_{S_{x_1}S_{x_2}}^{r-1}(\alpha t) \min\{F_{S_{x_1}S_{x_2}}(\alpha t), F_{S_{x_0}S_{x_1}}(\alpha t)\} + a F_{S_{x_1}S_{x_2}}^{r-1}(\alpha t) F_{S_{x_0}S_{x_2}}(2\alpha t) \geq$$

$$[p + q] F_{S_{x_0}S_{x_1}}(t) F_{S_{x_0}S_{x_2}}(2\alpha t) F_{S_{x_1}S_{x_2}}^{r-2}(\alpha t)$$

ve buradan

$$F_{S_{x_1}S_{x_2}}^{r-1}(\alpha t) F_{S_{x_0}S_{x_2}}(2\alpha t) + a F_{S_{x_1}S_{x_2}}^{r-1}(\alpha t) F_{S_{x_0}S_{x_2}}(2\alpha t) \geq$$

$$[p + q] F_{S_{x_0}S_{x_1}}(t) F_{S_{x_0}S_{x_2}}(2\alpha t) F_{S_{x_1}S_{x_2}}^{r-2}(\alpha t)$$

olup

$$(1 + a) F_{S_{x_1}S_{x_2}}^{r-1}(\alpha t) F_{S_{x_0}S_{x_2}}(2\alpha t) \geq$$

$$[p + q] F_{S_{x_0}S_{x_1}}(t) F_{S_{x_0}S_{x_2}}(2\alpha t) F_{S_{x_1}S_{x_2}}^{r-2}(\alpha t)$$

$\forall t > 0$ ve $0 < \alpha < 1$ için

$$F_{S_{x_1}S_{x_2}}(\alpha t) \geq F_{S_{x_0}S_{x_1}}(t)$$

elde edilir. Tümevarımdan, $\forall t > 0$, $0 < \alpha < 1$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$F_{S_{x_n}S_{x_{n+1}}}(\alpha t) \geq F_{S_{x_{n-1}}S_{x_n}}(t)$$

elde edilir. Bu durumda 2.2.12. Lemma'dan (S_{x_n}) bir Cauchy dizisidir. Uzay tam olduğundan $S_{x_n} \rightarrow u$ olacak şekilde $u \in X$ vardır. S sürekli olduğundan $SS_{x_n} \rightarrow Su$ olur.

Ayrıca $\forall n \in \mathbb{N}$ için $Sx_n = Tx_{n-1}$ olduğundan (Tx_{n-1}) dizisi de u ya yakınsar. S ve T komutatif olduğundan $\forall t > 0$ ve $0 < \alpha < 1$ için Eş. 3. 2 den

$$\min \left\{ F_{SSx_n Tu}^r(\alpha t), F_{SSx_{n-1} SSx_n}(\alpha t) F_{SuTu}^{r-1}(\alpha t), F_{SuTu}^r(\alpha t) \right\} + a F_{SuTu}^{r-1}(\alpha t) F_{SSx_{n-1} Tu}(2\alpha t) \geq [p F_{SSx_{n-1} SSx_n}(t) + q F_{SSx_{n-1} Su}(t)] F_{SSx_{n-1} Tu}(2\alpha t) F_{SuTu}^{r-2}(\alpha t)$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\min \left\{ F_{SuTu}^r(\alpha t), F_{SuSu}(\alpha t) F_{SuTu}^{r-1}(\alpha t), F_{SuTu}^r(\alpha t) \right\} + a F_{SuTu}^{r-1}(\alpha t) F_{SuTu}(2\alpha t) \geq [p F_{SuSu}(t) + q F_{SuSu}(t)] F_{SuTu}(2\alpha t) F_{SuTu}^{r-2}(\alpha t)$$

ve buradan $\forall t > 0$ ve $0 < \alpha < 1$ için

$$\min \left\{ F_{SuTu}^r(\alpha t), F_{SuTu}^{r-1}(\alpha t) \right\} + a F_{SuTu}^{r-1}(\alpha t) F_{SuTu}(2\alpha t) \geq [p + q] F_{SuTu}(2\alpha t) F_{SuTu}^{r-2}(\alpha t)$$

olup ayrıca $\forall t > 0$ ve $0 < \alpha < 1$ için

$$F_{SuTu}(2\alpha t) \geq \min \{ F_{SuSu}(\alpha t), F_{SuTu}(\alpha t) \} \\ = F_{SuTu}(\alpha t)$$

olduğundan yukarıdaki eşitsizlik

$$F_{SuTu}^r(\alpha t) + a F_{SuTu}^{r-1}(\alpha t) F_{SuTu}(\alpha t) \geq [p + q] F_{SuTu}(\alpha t) F_{SuTu}^{r-2}(\alpha t) \\ (1 + a) F_{SuTu}^r(\alpha t) \geq [p + q] F_{SuTu}^{r-1}(\alpha t)$$

ve buradan $\forall t > 0$ ve $0 < \alpha < 1$ için

$$F_{SuTu}(\alpha) \geq 1$$

olur. O halde $S_u = T_u$ olmalıdır. Hatta $\forall t > 0$ ve $0 < \alpha < 1$ için Eş. 3. 2 den

$$\min \left\{ F_{S_{X_n} T_u}^r(\alpha t), F_{S_{X_{n-1}} S_{X_n}}(\alpha t) F_{S_u T_u}^{r-1}(\alpha t), F_{S_u T_u}^r(\alpha t) \right\} + a F_{S_u T_u}^{r-1}(\alpha t) F_{S_{X_{n-1}} T_u}(2\alpha t) \geq$$

$$[p F_{S_{X_{n-1}} S_{X_n}}(t) + q F_{S_{X_{n-1}} S_u}(t)] F_{S_{X_{n-1}} T_u}(2\alpha t) F_{S_u T_u}^{r-2}(\alpha t)$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\min \left\{ F_{u T_u}^r(\alpha t), F_{u u}(\alpha t) F_{S_u S_u}^{r-1}(\alpha t), F_{S_u S_u}^r(\alpha t) \right\} + a F_{S_u S_u}^{r-1}(\alpha t) F_{u T_u}(2\alpha t) \geq$$

$$[p F_{u u}(t) + q F_{u S_u}(t)] F_{u T_u}(2\alpha t) F_{S_u S_u}^{r-2}(\alpha t)$$

ve buradan $\forall t > 0$ ve $0 < \alpha < 1$ için

$$F_{u S_u}^r(\alpha t) + a F_{u S_u}(\alpha t) \geq [p + q F_{u S_u}(t)] F_{u S_u}(\alpha t)$$

$$F_{u S_u}^{r-1}(\alpha t) - q F_{u S_u}(t) \geq p - a$$

elde edilir. Ayrıca $\forall t > 0$ ve $0 < \alpha < 1$ için $t > \alpha t$ olduğundan $F_{u S_u}(t) \geq F_{u S_u}(\alpha t)$ olup buradan $\forall t > 0$ için

$$F_{u S_u}^{r-1}(t) - q F_{u S_u}(t) \geq p - a$$

olur. Eğer $r=2$ ise bu durumda $\forall t > 0$ için bu eşitsizlik

$$F_{u S_u}(t) - q F_{u S_u}(t) \geq p - a$$

$$F_{u S_u}(t) \geq 1$$

olur. Bu ise $u=Su=Tu$ olmasıdır. O halde u , T ve S için ortak sabit noktadır. Şimdi u nun tekliğini gösterelim: Kabul edelim ki v , S ve T nin başka bir ortak sabit noktası olsun. O halde $v=sv=tv$ ve $u=Su=Tu$ olur. Bu durumda $\forall t>0$ ve $0<\alpha<1$ için Eş. 3. 2 den

$$\min\{F_{uv}^2(\alpha t), F_{Suu}(\alpha t)F_{Svv}(\alpha t), F_{Svv}^2(\alpha t)\} + aF_{Svv}(\alpha t)F_{Suv}(2\alpha t) \geq [pF_{Suu}(t) + qF_{Suv}(t)]F_{Suv}(2\alpha t)F_{Svv}^0(\alpha t)$$

olup buradan

$$F_{uv}^2(\alpha t) + aF_{uv}(\alpha t) \geq [p + qF_{uv}(t)]F_{uv}(\alpha t)$$

$$F_{uv}(\alpha t) - qF_{uv}(t) \geq p - a$$

elde edilir. Ayrıca $\forall t>0$ ve $0<\alpha<1$ için $t>\alpha t$ olduğundan $F_{uv}(t) \geq F_{uv}(\alpha t)$ olup buradan $\forall t>0$ için

$$F_{uv}(t) - qF_{uv}(t) \geq p - a$$

$$F_{uv}(t) \geq 1$$

elde edilir. Böylece $u=v$ olup ortak sabit nokta tektir.

3.1.4. Teorem

$(X, F, *)$ tam Menger uzay öyle ki $* = *_M$, $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ X in kendi üzerindeki dönüşümlerin bir dizisi, $\forall n \in \mathbb{N}$ için T_n ile komutatatif olan ve $T_n(X) \subseteq S(X)$ şartını sağlayan $S: X \rightarrow X$ dönüşümü sürekli olsun. Herhangi i ve j doğal sayıları için T_i ve T_j dönüşümleri aşağıdaki şartı $\forall x, y \in X, \forall t > 0, r \geq 2, 0 < p, q < 1, 0 \leq a < 1$ öyleki $p+q-a=1$ için sağlasın;

$$\min\{F_{T_i x T_j y}^r(t), F_{Sx T_i x}(t)F_{S y T_j y}^{r-1}(t), F_{S y T_j y}^r(t)\} + aF_{S y T_j y}^{r-1}(t)F_{Sx T_j y}(2t) \geq$$

$$\left[pF_{S_x T_x}^r(t) + qF_{S_x S_y}(t) \right] F_{S_x T_y}(2t) F_{S_y T_y}^{r-2}(t). \quad [3.3]$$

Eğer $r=2$ ise, her bir T_n ve S için ortak sabit nokta vardır ve tektir.

İspat

$x_0 \in X$ herhangi bir nokta olsun. (x_n) dizisini $Sx_n = T_n x_{n-1}$ ($n=1,2,\dots$) şeklinde tanımlayalım. $i=1$ ve $j=2$ için T_1 ve T_2 yi göz önüne alalım. Bu takdirde $Sx_1 = T_1 x_0$ ve $Sx_2 = T_2 x_1$ olur. O halde $x=x_0$ ve $y=x_1$ için Eş. 3. 3 den,

$$\min \left\{ F_{T_1 x_0 T_2 x_1}^r(t), F_{Sx_0 T_1 x_0}(t) F_{Sx_1 T_2 x_1}^{r-1}(t), F_{Sx_1 T_2 x_1}^r(t) \right\} + a F_{Sx_1 T_2 x_1}^{r-1}(t) F_{Sx_0 T_2 x_1}(2t) \geq$$

$$\left[pF_{Sx_0 T_1 x_0}(t) + qF_{Sx_0 Sx_1}(t) \right] F_{Sx_0 T_2 x_1}(2t) F_{Sx_1 T_2 x_1}^{r-2}(t)$$

elde edilir. O halde $\forall t > 0$ için

$$\min \left\{ F_{Sx_1 Sx_2}^r(t), F_{Sx_0 Sx_1}(t) F_{Sx_1 Sx_2}^{r-1}(t), F_{Sx_1 Sx_2}^r(t) \right\} + a F_{Sx_1 Sx_2}^{r-1}(t) F_{Sx_0 Sx_2}(2t) \geq$$

$$\left[pF_{Sx_0 Sx_1}(t) + qF_{Sx_0 Sx_1}(t) \right] F_{Sx_0 Sx_2}(2t) F_{Sx_1 Sx_2}^{r-2}(t)$$

ve buradan

$$\min \left\{ F_{Sx_1 Sx_2}^r(t), F_{Sx_0 Sx_1}(t) F_{Sx_1 Sx_2}^{r-1}(t) \right\} + a F_{Sx_1 Sx_2}^{r-1}(t) F_{Sx_0 Sx_2}(2t) \geq$$

$$\left[p + q \right] F_{Sx_0 Sx_1}(t) F_{Sx_0 Sx_2}(2t) F_{Sx_1 Sx_2}^{r-2}(t)$$

olur. Bu durumda $\forall t > 0$ için

$$F_{Sx_1 Sx_2}^{r-1}(t) \min \left\{ F_{Sx_1 Sx_2}^r(t), F_{Sx_0 Sx_1}(t) \right\} + a F_{Sx_1 Sx_2}^{r-1}(t) F_{Sx_0 Sx_2}(2t) \geq$$

$$\left[p + q \right] F_{Sx_0 Sx_1}(t) F_{Sx_0 Sx_2}(2t) F_{Sx_1 Sx_2}^{r-2}(t)$$

ve buradan

$$F_{Sx_1Sx_2}^{r-1}(t)F_{Sx_0Sx_2}(2t) + aF_{Sx_1Sx_2}^{r-1}(t)F_{Sx_0Sx_2}(2t) \geq [p+q]F_{Sx_0Sx_1}(t)F_{Sx_0Sx_2}(2t)F_{Sx_1Sx_2}^{r-2}(t)$$

olup

$$(1+a)F_{Sx_1Sx_2}^{r-1}(t)F_{Sx_0Sx_2}(2t) \geq [p+q]F_{Sx_0Sx_1}(t)F_{Sx_0Sx_2}(2t)F_{Sx_1Sx_2}^{r-2}(t)$$

$\forall t > 0$ için

$$F_{Sx_1Sx_2}(t) \geq F_{Sx_0Sx_1}(t)$$

elde edilir. Tümevarımla $\forall t > 0$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$F_{Sx_nSx_{n+1}}(t) \geq F_{Sx_{n-1}Sx_n}(t)$$

bulunur. O halde $\forall m, n \in \mathbb{N}$ ($m > n$) ve $\forall t > 0$ için

$$\begin{aligned} F_{Sx_nSx_m}(t) &\geq \min \left\{ F_{Sx_nSx_{n+1}} \left(\frac{t}{m-n} \right), F_{Sx_{n+1}Sx_{n+2}} \left(\frac{t}{m-n} \right), \dots, F_{Sx_{m-1}Sx_m} \left(\frac{t}{m-n} \right) \right\} \\ &\geq \min \left\{ F_{Sx_0Sx_1} \left(\frac{t}{m-n} \right), F_{Sx_0Sx_1} \left(\frac{t}{m-n} \right), \dots, F_{Sx_0Sx_1} \left(\frac{t}{m-n} \right) \right\} \\ &= F_{Sx_0Sx_1} \left(\frac{t}{m-n} \right) > 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$ vardır. Bu durumda (Sx_n) bir Cauchy dizisidir. Uzay tam olduğundan $Sx_n \rightarrow u$ olacak şekilde $u \in X$ vardır. S sürekli olduğundan $SSx_n \rightarrow Su$ olur.

Ayrıca $\forall n \in \mathbb{N}$ için $Sx_n = T_n x_{n-1}$ olduğundan $(T_n x_{n-1})$ dizisi de u ya yakınsar. Her bir T_n ile S komutatif olduğundan $\forall t > 0$ ve herhangi $k \in \mathbb{N}$ için Eş. 3. 3 den

$$\min \left\{ F_{SSx_n T_k u}^r(t), F_{SSx_{n-1} SSx_n}(t) F_{Su T_k u}^{r-1}(t), F_{Su T_k u}^r(t) \right\} + a F_{Su T_k u}^{r-1}(t) F_{SSx_{n-1} T_k u}(2t) \geq$$

$$[p F_{SSx_{n-1} SSx_n}(t) + q F_{SSx_{n-1} Su}(t)] F_{SSx_{n-1} T_k u}(2t) F_{Su T_k u}^{r-2}(t)$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\min \left\{ F_{Su T_k u}^r(t), F_{Su Su}(t) F_{Su T_k u}^{r-1}(t), F_{Su T_k u}^r(t) \right\} + a F_{Su T_k u}^{r-1}(t) F_{Su T_k u}(2t) \geq$$

$$[p F_{Su Su}(t) + q F_{Su Su}(t)] F_{Su T_k u}(2t) F_{Su T_k u}^{r-2}(t)$$

ve buradan $\forall t > 0$ için

$$\min \left\{ F_{Su T_k u}^r(t), F_{Su T_k u}^{r-1}(t) \right\} + a F_{Su T_k u}^{r-1}(t) F_{Su T_k u}(2t) \geq$$

$$[p + q] F_{Su T_k u}(2t) F_{Su T_k u}^{r-2}(t)$$

olup ayrıca $\forall t > 0$ için

$$F_{Su T_k u}(2t) \geq \min \left\{ F_{Su Su}(t), F_{Su T_k u}(t) \right\}$$

$$= F_{Su T_k u}(t)$$

olduğundan yukarıdaki eşitsizlik

$$F_{Su T_k u}^r(t) + a F_{Su T_k u}^{r-1}(t) F_{Su T_k u}(t) \geq [p + q] F_{Su T_k u}(t) F_{Su T_k u}^{r-2}(t)$$

$$(1 + a) F_{Su T_k u}^r(t) \geq [p + q] F_{Su T_k u}^{r-1}(t)$$

ve buradan $\forall t > 0$ için

$$F_{SuT_k u}(t) \geq 1$$

olur. O halde $Su=T_k u$ olmalıdır. Bu ifade $\forall k \in \mathbb{N}$ için geçerli olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $Su=T_n u$ olur. Hatta $\forall t > 0$ ve herhangi $k \in \mathbb{N}$ için Eş. 3. 3 den

$$\min \left\{ F_{S_{X_n} T_k u}^r(t), F_{S_{X_{n-1}} S_{X_n}}(t) F_{SuT_k u}^{r-1}(t), F_{SuT_k u}^r(t) \right\} + a F_{SuT_k u}^{r-1}(t) F_{S_{X_{n-1}} T_k u}(2t) \geq$$

$$[p F_{S_{X_{n-1}} S_{X_n}}(t) + q F_{S_{X_{n-1}} Su}(t)] F_{S_{X_{n-1}} T_k u}(2t) F_{SuT_k u}^{r-2}(t)$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\min \left\{ F_{uT_k u}^r(t), F_{uu}(t) F_{SuSu}^{r-1}(t), F_{SuSu}^r(t) \right\} + a F_{SuSu}^{r-1}(t) F_{uT_k u}(2t) \geq$$

$$[p F_{uu}(t) + q F_{uSu}(t)] F_{uT_k u}(2t) F_{SuSu}^{r-2}(t)$$

ve buradan $\forall t > 0$ için

$$F_{uSu}^r(t) + a F_{uSu}(t) \geq [p + q F_{uSu}(t)] F_{uSu}(t)$$

$$F_{uSu}^{r-1}(t) - q F_{uSu}(t) \geq p - a$$

elde edilir. Eğer $r=2$ ise bu durumda $\forall t > 0$ için bu eşitsizlik

$$F_{uSu}(t) - q F_{uSu}(t) \geq p - a$$

$$F_{uSu}(t) \geq 1$$

olur. Bu ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için $u=Su=T_n u$ olmasıdır. O halde u , $\forall n \in \mathbb{N}$ için T_n ve S nin ortak sabit noktadır. Şimdi u nun tekliğini gösterelim: Kabul edelim ki v , $\forall n \in \mathbb{N}$ için T_n ve S nin başka bir ortak sabit noktası olsun. O halde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $v=Sv=T_n v$ ve $u=Su=T_n u$ olur. Bu durumda $\forall t > 0$ için Eş. 3. 3 den

$$\min \{F_{uv}^2(t), F_{Suu}(t)F_{Svv}(t), F_{Svv}^2(t)\} + aF_{Svv}(t)F_{Suv}(2t) \geq$$

$$[pF_{Suu}(t) + qF_{SuSv}(t)]F_{Suv}(2t)F_{Svv}^0(t)$$

olup

$$F_{uv}^2(t) + aF_{uv}(t) \geq [p + qF_{uv}(t)]F_{uv}(t)$$

$$F_{uv}(t) - qF_{uv}(t) \geq p - a$$

$$F_{uv}(t) \geq 1$$

elde edilir. Böylece $u=v$ olup ortak sabit nokta tektir.

3.1.5. Teorem

$(X, F, *)$ tam Menger uzay öyle ki $* = *_M$, $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ X in kendi üzerindeki dönüşümlerin bir dizisi ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için T_n ile komutatif olan, $T_n(X) \subseteq S(X)$ şartını sağlayan $S: X \rightarrow X$ dönüşümü sürekli olsun. Herhangi i ve j doğal sayıları için T_i ve T_j dönüşümleri aşağıdaki şartı $\forall x, y \in X, \forall t > 0, r \geq 2, 0 < p, q < 1, 0 < \alpha < 1, 0 \leq a < 1$ öyle ki $p+q-a=1$ için sağlasın;

$$\min \{F_{T_i x T_j y}^r(\alpha t), F_{S_x T_i x}(\alpha t)F_{S_y T_j y}^{r-1}(\alpha t), F_{S_y T_j y}^r(\alpha t)\} + aF_{S_y T_j y}^{r-1}(\alpha t)F_{S_x T_j y}(2\alpha t) \geq$$

$$[pF_{S_x T_i x}(t) + qF_{S_x S_y}(t)]F_{S_x T_j y}(2\alpha t)F_{S_y T_j y}^{r-2}(\alpha t). \quad [3.4]$$

Eğer $r=2$, ise her bir T_n ile S için ortak sabit nokta vardır ve tektir.

İspat

$x_0 \in X$ herhangi bir nokta olsun. (x_n) dizisini $Sx_n = T_n x_{n-1}$ ($n=1, 2, \dots$) şeklinde tanımlayalım. $i=1$ ve $j=2$ için T_1 ve T_2 yi göz önüne alalım. Bu takdirde $Sx_1 = T_1 x_0$ ve $Sx_2 = T_2 x_1$ olur. O halde $x = x_0$ ve $y = x_1$ için Eş. 3. 4 den

$$\min \left\{ F_{T_1 x_0 T_2 x_1}^r(\alpha), F_{S_{x_0} T_1 x_0}(\alpha) F_{S_{x_1} T_2 x_1}^{r-1}(\alpha), F_{S_{x_1} T_2 x_1}^r(\alpha) \right\} + a F_{S_{x_1} T_2 x_1}^{r-1}(\alpha) F_{S_{x_0} T_2 x_1}(2\alpha) \geq$$

$$[p F_{S_{x_0} T_1 x_0}(t) + q F_{S_{x_0} S_{x_1}}(t)] F_{S_{x_0} T_2 x_1}(2\alpha) F_{S_{x_1} T_2 x_1}^{r-2}(\alpha)$$

elde edilir. O halde $\forall t > 0$ ve $0 < \alpha < 1$ için

$$\min \left\{ F_{S_{x_1} S_{x_2}}^r(\alpha), F_{S_{x_0} S_{x_1}}(\alpha) F_{S_{x_1} S_{x_2}}^{r-1}(\alpha), F_{S_{x_1} S_{x_2}}^r(\alpha) \right\} + a F_{S_{x_1} S_{x_2}}^{r-1}(\alpha) F_{S_{x_0} S_{x_2}}(2\alpha) \geq$$

$$[p F_{S_{x_0} S_{x_1}}(t) + q F_{S_{x_0} S_{x_1}}(t)] F_{S_{x_0} S_{x_2}}(2\alpha) F_{S_{x_1} S_{x_2}}^{r-2}(\alpha)$$

ve buradan

$$\min \left\{ F_{S_{x_1} S_{x_2}}^r(\alpha), F_{S_{x_0} S_{x_1}}(\alpha) F_{S_{x_1} S_{x_2}}^{r-1}(\alpha) \right\} + a F_{S_{x_1} S_{x_2}}^{r-1}(\alpha) F_{S_{x_0} S_{x_2}}(2\alpha) \geq$$

$$[p + q] F_{S_{x_0} S_{x_1}}(t) F_{S_{x_0} S_{x_2}}(2\alpha) F_{S_{x_1} S_{x_2}}^{r-2}(\alpha)$$

olur. Bu durumda $\forall t > 0$ ve $0 < \alpha < 1$ için

$$F_{S_{x_1} S_{x_2}}^{r-1}(\alpha) \min \left\{ F_{S_{x_1} S_{x_2}}(\alpha), F_{S_{x_0} S_{x_1}}(\alpha) \right\} + a F_{S_{x_1} S_{x_2}}^{r-1}(\alpha) F_{S_{x_0} S_{x_2}}(2\alpha) \geq$$

$$[p F_{uu}(t) + q F_{uSu}(t)] F_{uT_k u}(2\alpha) F_{SuSu}^{r-2}(\alpha)$$

ve buradan

$$F_{S_{x_1} S_{x_2}}^{r-1}(\alpha) F_{S_{x_0} S_{x_2}}(2\alpha) + a F_{S_{x_1} S_{x_2}}^{r-1}(\alpha) F_{S_{x_0} S_{x_2}}(2\alpha) \geq$$

$$[p + q] F_{S_{x_0} S_{x_1}}(t) F_{S_{x_0} S_{x_2}}(2\alpha) F_{S_{x_1} S_{x_2}}^{r-2}(\alpha)$$

olup

$$(1 + a) F_{S_{x_1} S_{x_2}}^{r-1}(\alpha) F_{S_{x_0} S_{x_2}}(2\alpha) \geq$$

$$[p + q] F_{Sx_0Sx_1}(t) F_{Sx_0Sx_2}(2\alpha t) F_{Sx_1Sx_2}^{r-2}(\alpha t)$$

$\forall t > 0$ ve $0 < \alpha < 1$ için

$$F_{Sx_1Sx_2}(\alpha t) \geq F_{Sx_0Sx_1}(t)$$

elde edilir. Tümevarımdan, $\forall t > 0$, $0 < \alpha < 1$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$F_{Sx_nSx_{n+1}}(\alpha t) \geq F_{Sx_{n-1}Sx_n}(t)$$

elde edilir. Bu durumda 2.2.12. Lemma'den (Sx_n) bir Cauchy dizisidir. Uzay tam olduğundan $Sx_n \rightarrow u$ olacak şekilde $u \in X$ vardır. S sürekli olduğundan $SSx_n \rightarrow Su$ olur. Ayrıca $\forall n \in \mathbb{N}$ için $Sx_n = T_n x_{n-1}$ olduğundan $(T_n x_{n-1})$ dizisi de u ya yakınsar. Her bir T_n ile S komutatif olduğundan $\forall t > 0$, $0 < \alpha < 1$ ve herhangi $k \in \mathbb{N}$ için Eş. 3. 4 den

$$\min \left\{ F_{SSx_nT_k u}^r(\alpha t), F_{SSx_{n-1}SSx_n}(\alpha t) F_{SuT_k u}^{r-1}(\alpha t), F_{SuT_k u}^r(\alpha t) \right\} + a F_{SuT_k u}^{r-1}(\alpha t) F_{SSx_{n-1}T_k u}(2\alpha t) \geq$$

$$[p F_{SSx_{n-1}SSx_n}(t) + q F_{SSx_{n-1}Su}(t)] F_{SSx_{n-1}T_k u}(2\alpha t) F_{SuT_k u}^{r-2}(\alpha t)$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\min \left\{ F_{SuT_k u}^r(\alpha t), F_{SuSu}(\alpha t) F_{SuT_k u}^{r-1}(\alpha t), F_{SuT_k u}^r(\alpha t) \right\} + a F_{SuT_k u}^{r-1}(\alpha t) F_{SuT_k u}(2\alpha t) \geq$$

$$[p F_{SuSu}(t) + q F_{SuSu}(t)] F_{SuT_k u}(2\alpha t) F_{SuT_k u}^{r-2}(\alpha t)$$

ve buradan $\forall t > 0$ ve $0 < \alpha < 1$ için

$$\min \left\{ F_{SuT_k u}^r(\alpha t), F_{SuT_k u}^{r-1}(\alpha t) \right\} + a F_{SuT_k u}^{r-1}(\alpha t) F_{SuT_k u}(2\alpha t) \geq$$

$$[p + q] F_{SuT_k u}(2\alpha t) F_{SuT_k u}^{r-2}(\alpha t)$$

olup ayrıca $\forall t > 0$ ve $0 < \alpha < 1$ için

$$\begin{aligned} F_{SuT_ku}(2\alpha t) &\geq \min\{F_{SuSu}(\alpha t), F_{SuT_ku}(\alpha t)\} \\ &= F_{SuT_ku}(\alpha t) \end{aligned}$$

olduğundan yukarıdaki eşitsizlik

$$\begin{aligned} F_{SuT_ku}^r(\alpha t) + aF_{SuT_ku}^{r-1}(\alpha t)F_{SuT_ku}(\alpha t) &\geq [p + q]F_{SuT_ku}(\alpha t)F_{SuT_ku}^{r-2}(\alpha t) \\ (1 + a)F_{SuT_ku}^r(\alpha t) &\geq [p + q]F_{SuT_ku}^{r-1}(\alpha t) \end{aligned}$$

ve buradan $\forall t > 0$ ve $0 < \alpha < 1$ için

$$F_{SuT_ku}(\alpha t) \geq 1$$

olur. O halde $Su = T_ku$ olmalıdır. Bu ifade $\forall k \in \mathbb{N}$ için geçerli olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $Su = T_nu$ olur. Hatta $\forall t > 0$, $0 < \alpha < 1$ ve herhangi $k \in \mathbb{N}$ için Eş. 3. 4 den

$$\begin{aligned} \min\{F_{S_{X_n}T_ku}^r(\alpha t), F_{S_{X_{n-1}}S_{X_n}}(\alpha t)F_{SuT_ku}^{r-1}(\alpha t), F_{SuT_ku}^r(\alpha t)\} + aF_{SuT_ku}^{r-1}(\alpha t)F_{S_{X_{n-1}}T_ku}(2\alpha t) &\geq \\ [pF_{S_{X_{n-1}}S_{X_n}}(t) + qF_{S_{X_{n-1}}Su}(t)]F_{S_{X_{n-1}}T_ku}(2\alpha t)F_{SuT_ku}^{r-2}(\alpha t) & \end{aligned}$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\begin{aligned} \min\{F_{uT_ku}^r(\alpha t), F_{uu}(\alpha t)F_{SuSu}^{r-1}(\alpha t), F_{SuSu}^r(\alpha t)\} + aF_{SuSu}^{r-1}(\alpha t)F_{uT_ku}(2\alpha t) &\geq \\ [pF_{uu}(t) + qF_{uSu}(t)]F_{uT_ku}(2\alpha t)F_{SuSu}^{r-2}(\alpha t) & \end{aligned}$$

ve buradan $\forall t > 0$ ve $0 < \alpha < 1$ için

$$F_{uSu}^r(\alpha t) + aF_{uSu}(\alpha t) \geq [p + qF_{uSu}(t)]F_{uSu}(\alpha t)$$

$$F_{uSu}^{r-1}(\alpha t) + a \geq p + qF_{uSu}(t)$$

$$F_{uSu}^{r-1}(\alpha t) - qF_{uSu}(t) \geq p - a$$

elde edilir. Ayrıca $\forall t > 0$ ve $0 < \alpha < 1$ için $t > \alpha t$ olduğundan $F_{uSu}(t) \geq F_{uSu}(\alpha t)$ olup buradan $\forall t > 0$ için

$$F_{uSu}^{r-1}(t) - qF_{uSu}(t) \geq p - a$$

bulunur. Eğer $r=2$ ise, bu durumda $\forall t > 0$ için bu eşitsizlik

$$F_{uSu}(t) - qF_{uSu}(t) \geq p - a$$

$$F_{uSu}(t) \geq 1$$

olur. Bu ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için $u = Su = T_n u$ olmasıdır. O halde u , $\forall n \in \mathbb{N}$ için T_n ve S nin ortak sabit noktasıdır. Şimdi u nun tekliğini gösterelim:

Kabul edelim ki v , $\forall n \in \mathbb{N}$ için T_n ve S nin başka bir ortak sabit noktası olsun. O halde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $v = Sv = T_n v$ ve $u = Su = T_n u$ olur. Bu durumda $\forall t > 0$ ve $0 < \alpha < 1$ için Eş. 3. 4 den

$$\min \left\{ F_{uv}^2(\alpha t), F_{Suu}(\alpha t)F_{Svv}(\alpha t), F_{Svv}^2(\alpha t) \right\} + aF_{Svv}(\alpha t)F_{Suv}(2\alpha t) \geq [pF_{Suu}(t) + qF_{SuSv}(t)]F_{Suv}(2\alpha t)F_{Svv}^0(\alpha t)$$

olup

$$F_{uv}^2(\alpha t) + aF_{uv}(\alpha t) \geq [p + qF_{uv}(t)]F_{uv}(\alpha t)$$

$$F_{uv}(\alpha t) - qF_{uv}(t) \geq p - a$$

$$F_{uv}(t) \geq 1$$

elde edilir. Böylece $u=v$ olup ortak sabit nokta tektir.

3.2. Fuzzy Menger Uzayda Sabit Nokta Teoremleri

Bu kesimde, fuzzy Menger uzayda tanımladığımız metrikimsi fonksiyondan yararlanarak çoğul değerli dönüşümler için sabit noktanın varlığı ve tekliğini inceleyeceğiz. Fuzzy Menger uzay üzerinde, $*$ t-normunu sürekli ve $\forall x,y \in X, t > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{xy}(t) = 1$ şartlarının var olduğunu kabul edeceğiz.

3.2.1. Teorem

$(X, F, *)$ N-yörüngesel fuzzy Menger uzay öyle ki $\forall a \in [0,1]$ için $a * a \geq a$ ve $N: X \rightarrow FB(X)$ sürekli bir dönüşüm olsun. N dönüşümü aşağıdaki şartı sağlasın: $\forall x,y \in X, t > 0$ ve $p+q=1$ olacak şekilde $0 < p, q < 1$ için,

$$\tilde{F}_{\bar{N}x\bar{N}y}^2(kt) * [\tilde{F}_{x\bar{N}x}(kt) \tilde{F}_{y\bar{N}y}(kt)] * \tilde{F}_{y\bar{N}y}^2(kt) \geq [pF_{x\bar{N}x}(t) + qF_{xy}(t)] F_{x\bar{N}y}(2kt)$$

olacak şekilde $k \in (0,1)$ var ise $x \in \bar{N}x$ olacak şekilde $x \in X$ vardır. Eğer N, nokta kapalı bir dönüşüm ise, bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat

$x_0 \in X$ herhangi bir nokta olsun. X de $\{x_n\}$ dizisini

$$x_1 \in \bar{N}x_0, x_2 \in \bar{N}x_1, \dots, x_n \in \bar{N}x_{n-1}, n = 0, 1, 2, \dots$$

tanımlayalım. Kabul edelim ki $\forall t > 0$ ve her bir n için $F_{x_n \bar{N}x_n}(t) < 1$ olsun (aksi halde bazı n doğal sayıları için $x_n \in \bar{N}x_n$ olur). Eğer $x = x_{n-1}, y = x_n$ alırsak hipotezden,

$$\begin{aligned} & \tilde{F}_{\bar{N}_{x_{n-1}}\bar{N}_{x_n}}^2(kt) * [\tilde{F}_{x_{n-1}\bar{N}_{x_{n-1}}}(kt)\tilde{F}_{x_n\bar{N}_{x_n}}(kt)] * \tilde{F}_{x_n\bar{N}_{x_n}}^2(kt) \\ & \geq [pF_{x_{n-1}\bar{N}_{x_{n-1}}}(t) + qF_{x_{n-1}x_n}(t)]F_{x_{n-1}\bar{N}_{x_n}}(2kt) \end{aligned}$$

buradan

$$\begin{aligned} & F_{x_n x_{n+1}}^2(kt) * [F_{x_{n-1}x_n}(kt)F_{x_n x_{n+1}}(kt)] * F_{x_n x_{n+1}}^2(kt) \\ & \geq [pF_{x_{n-1}x_n}(t) + qF_{x_{n-1}x_n}(t)]F_{x_{n-1}x_{n+1}}(2kt) \end{aligned}$$

olup

$$F_{x_n x_{n+1}}^2(kt) * [F_{x_{n-1}x_n}(kt)F_{x_n x_{n+1}}(kt)] \geq (p + q)F_{x_{n-1}x_n}(t)F_{x_{n-1}x_{n+1}}(2kt)$$

ve

$$F_{x_n x_{n+1}}(kt)[F_{x_n x_{n+1}}(kt) * F_{x_{n-1}x_n}(kt)] \geq F_{x_{n-1}x_n}(t)F_{x_{n-1}x_{n+1}}(2kt)$$

buradan

$$F_{x_n x_{n+1}}(kt)F_{x_{n-1}x_{n+1}}(2kt) \geq F_{x_{n-1}x_n}(t)F_{x_{n-1}x_{n+1}}(2kt)$$

böylece

$$F_{x_n x_{n+1}}(kt) \geq F_{x_{n-1}x_n}(t)$$

elde edilir. O halde, 2.2.12. Lemma'dan, $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. Uzay tam olduğundan $F_{x_n x}(t) \rightarrow 1$ olacak şekilde $x \in X$ vardır. N sürekli olduğundan,

$$\tilde{F}_{N_{x_n}N_x}(t) \rightarrow 1.$$

Şimdi, $\forall t > 0$ için $F_{xN_x}(t) = 1$ yani $x \in \bar{N}_x$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $y \in N_x$ olsun. $\forall t > 0$ ve n için

$$F_{xy}(t) \geq F_{xx_n}\left(\frac{t}{2}\right) * F_{x_ny}\left(\frac{t}{2}\right)$$

buradan

$$F_{xN_x}(t) \geq F_{xx_n}\left(\frac{t}{2}\right) * F_{x_nN_x}\left(\frac{t}{2}\right).$$

$F_{x_nx}(t) \rightarrow 1$ olduğundan $t > 0$ ve $\lambda \in (0,1)$ için $n_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki $n \geq n_0$ iken

$F_{x_nx}\left(\frac{t}{4}\right) > 1 - \lambda$. Diğer taraftan $\tilde{F}_{N_{x_n}N_x}(t) \rightarrow 1$ olduğundan aynı t ve λ için $n'_0 \in \mathbb{N}$

var öyle ki $(n-1) \geq n'_0$ için $N_{x_{n-1}} \subseteq \bigcup_{a \in N_x} U(a, \frac{t}{4}, \lambda)$ olur. Ayrıca $x_n \in \bar{N}_{x_{n-1}}$

olduğundan $\forall t > 0$ için $F_{y_{x_n}}\left(\frac{t}{4}\right) > 1 - \lambda$ olacak şekilde $y \in N_{x_{n-1}}$ vardır ve

$y \in N_{x_{n-1}} \subseteq \bigcup_{a \in N_x} U(a, \frac{t}{4}, \lambda)$ olduğundan $\forall t > 0$ için $F_{ay}\left(\frac{t}{4}\right) > 1 - \lambda$ olacak şekilde

$a \in N_x$ vardır. Bu durumda, $\forall t > 0$ için

$$F_{x_nN_x}\left(\frac{t}{2}\right) \geq F_{x_n a}\left(\frac{t}{2}\right) \geq F_{x_n y}\left(\frac{t}{4}\right) * F_{ay}\left(\frac{t}{4}\right)$$

olup buradan

$$F_{xN_x}(t) \geq F_{xx_n}\left(\frac{t}{2}\right) * F_{x_n y}\left(\frac{t}{4}\right) * F_{ay}\left(\frac{t}{4}\right)$$

ve n üzerinden limit alınırsa

$$F_{xN_x}(t) \geq 1 * (1 - \lambda) * (1 - \lambda)$$

λ keyfi olduğundan

$$F_{xN_x}(t) \geq 1$$

yani, $x \in \bar{N}_x$. Eğer N_x , her bir x için nokta kapalı dönüşüm ise bu durumda $x \in N_x$ olur. Böylece N dönüşümünün sabit noktası vardır.

Kabul edelim ki z , N nin x den farklı başka bir sabit noktası olsun. Bu durumda hipotezden

$$F_{xz}^2(kt) * [F_{xx}(kt)F_{zz}(kt)] * F_{zz}^2(kt) \geq [pF_{xx}(t) + qF_{xz}(t)]F_{xz}(2kt)$$

olup buradan $\forall t > 0$ için $F_{xz}(t) = 1$ bulunur. Böylece $z = x$ olup sabit nokta tekdir.

3.2.2. Sonuç

$(X, F, *)$ L -yörüngesel fuzzy Menger uzay öyle ki $\forall a \in [0, 1]$ için $a * a \geq a$ ve $N: X \rightarrow FB(X)$ sürekli bir dönüşüm olsun. L dönüşümü aşağıdaki şartı sağlasın: $\forall x, y \in X, t > 0, p + q = 1$ olacak şekilde $0 < p, q < 1$ ve $k \in (0, 1)$ için,

$$F_{LxLy}^2(kt) * [F_{xLx}(kt)F_{yLy}(kt)] * F_{yLy}^2(kt) \geq [pF_{xLx}(t) + qF_{xy}(t)]F_{xLy}(2kt)$$

Bu taktirde L dönüşümünün sabit noktası vardır ve tekdir.

İspat

Eğer $N: X \rightarrow FB(X)$ dönüşümünü $\forall x \in X$ için $Nx = \{Lx\}$ olarak seçersek N dönüşümü

3.2.1. Teorem'in şartlarını sağlar. O halde L nin bir tek sabit noktası vardır.

3.2.3. Teorem

$(X, F, *)$ tam fuzzy Menger uzay öyle ki $\forall a \in [0, 1]$ için $a * a \geq a$ ve $N: X \rightarrow FB(X)$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın: $\forall x, y \in X, t > 0$ ve $a_1 + a_3 + a_5 = 1$ ve $a_2 + a_4 = 0$ olacak şekilde $0 < a_1, a_3, a_5 < 1, |a_2| < 1$ ve $|a_4| < 1$ için,

$$\tilde{F}_{N_x N_y}(kt) \geq a_1 F_{x N_x}(t) + |a_2| F_{y N_y}(kt) + a_3 F_{y N_x}(2t) + |a_4| F_{x N_y}[(1+k)t] + a_5 F_{xy}(t)$$

olacak şekilde $k \in (0, 1)$ vardır. Bu durumda N dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

İspat

$x_0 \in X$ herhangi bir nokta olsun. X de $\{x_n\}$ dizisini

$$x_1 \in N x_0, x_2 \in N x_1, \dots, x_n \in N x_{n-1}, n = 0, 1, 2, \dots$$

şeklinde tanımlayalım. Genel olarak x_n noktasını $N x_{n-1}$ de ve x_{n+1} noktasını $N x_n$ de seçelim. Kabul edelim ki $x = x_n$ ve $y = x_{n+1}$ olsun. Bu takdirde hipotezden

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{N x_n N x_{n+1}}(kt) &\geq a_1 F_{x_n N x_n}(t) + |a_2| F_{x_{n+1} N x_{n+1}}(kt) + a_3 F_{x_{n+1} N x_n}(2t) \\ &\quad + |a_4| F_{x_n N x_{n+1}}[(1+k)t] + a_5 F_{x_n x_{n+1}}(t) \\ &\geq a_1 F_{x_n x_{n+1}}(t) + |a_2| F_{x_{n+1} x_{n+2}}(kt) + a_3 F_{x_{n+1} x_{n+1}}(2t) \\ &\quad + |a_4| F_{x_n x_{n+2}}[(1+k)t] + a_5 F_{x_n x_{n+1}}(t) \\ &\geq (a_1 + a_5) F_{x_n x_{n+1}}(t) + |a_2| [F_{x_{n+1} x_{n+2}}(kt) * 1] \\ &\quad + a_3 [F_{x_{n+1} x_n}(t) * F_{x_n x_{n+1}}(t)] + |a_4| [F_{x_n x_{n+1}}(t) * F_{x_{n+1} x_{n+2}}(kt)] \\ &\geq (a_1 + a_3 + a_5) F_{x_n x_{n+1}}(t) + |a_2| [F_{x_{n+1} x_{n+2}}(kt) * F_{x_n x_{n+1}}(t)] \\ &\quad + |a_4| [F_{x_n x_{n+1}}(t) * F_{x_{n+1} x_{n+2}}(kt)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= F_{x_n x_{n+1}}(t) + (|a_2| + |a_4|)[F_{x_n x_{n+1}}(t) * F_{x_{n+1} x_{n+2}}(kt)] \\
&\geq F_{x_n x_{n+1}}(t) + |a_2 + a_4|[F_{x_n x_{n+1}}(t) * F_{x_{n+1} x_{n+2}}(kt)]
\end{aligned}$$

olup buradan

$$\tilde{F}_{N_{x_n} N_{x_{n+1}}}(kt) \geq F_{x_n N_{x_n}}(t)$$

elde edilir. Basit bir iterasyonla

$$F_{x_n x_{n+1}}(t) \geq F_{x_0 x_1}\left(\frac{t}{k^{n+1}}\right)$$

olur. Böylece p pozitif tamsayısı için

$$\begin{aligned}
F_{x_n x_{n+p}}(t) &\geq F_{x_n x_{n+1}}\left(\frac{t}{p}\right) * \dots * F_{x_{n+p-1} x_{n+p}}\left(\frac{t}{p}\right) \\
&\geq F_{x_0 x_1}\left(\frac{t}{pk^{n+1}}\right) * \dots * F_{x_0 x_1}\left(\frac{t}{pk^{n+1}}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\forall x, y \in X, t > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{xy}(t) = 1$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{x_n x_{n+p}}(t) \geq 1 * \dots * 1 = 1$$

yani, $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. Uzay tam olduğundan $F_{x_n x}(t) \rightarrow 1$ olacak şekilde $x \in X$ vardır. Diğer taraftan $\forall t > 0$ ve $\lambda \in (0, 1)$ için $n_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki $n, m \geq n_0$ iken

$$F_{N_{x_{n-1}} x_m}(t) \geq F_{x_n x_m}(t) \geq 1 - \lambda$$

olup

$$\begin{aligned} F_{xN_{x_{n-1}}}(t) &\geq F_{xx_m}\left(\frac{t}{2}\right) * F_{x_m N_{x_{n-1}}}\left(\frac{t}{2}\right) \\ &\geq F_{xx_m}\left(\frac{t}{2}\right) * F_{x_m x_n}\left(\frac{t}{2}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. m için limit alınırsa $n \geq n_0$ iken

$$F_{xN_{x_{n-1}}}(t) \geq 1 * (1 - \lambda) = 1 - \lambda$$

olup

$$\begin{aligned} F_{xN_x}(t) &\geq F_{xx_n}\left(\frac{t}{2}\right) * F_{x_n N_x}\left(\frac{t}{2}\right) \\ &\geq F_{xx_n}\left(\frac{t}{2}\right) * \tilde{F}_{N_{x_{n-1}} N_x}\left(\frac{t}{2}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda hipotezden

$$\begin{aligned} F_{xN_x}(t) &\geq F_{xx_n}\left(\frac{t}{2}\right) * \left[a_1 F_{xN_x}(t) + |a_2| F_{x_{n-1} N_{x_{n-1}}}\left(\frac{t}{2}\right) + a_3 F_{x_{n-1} N_x}(2t) \right. \\ &\quad \left. + |a_4| F_{xN_{x_{n-1}}}\left(\frac{3t}{2}\right) + a_5 F_{xx_{n-1}}(t) \right] \\ &\geq F_{xx_n}\left(\frac{t}{2}\right) * \left[a_1 F_{xN_x}(t) + |a_2| \left[F_{x_{n-1} x}\left(\frac{t}{4}\right) * F_{xN_{x_{n-1}}}\left(\frac{t}{4}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + a_3 \left[F_{x_{n-1} x}(t) * F_{xN_x}(t) \right] + |a_4| F_{xN_{x_{n-1}}}\left(\frac{3t}{2}\right) + a_5 F_{xx_{n-1}}(t) \right] \end{aligned}$$

olup n için limit alınırsa

$$F_{xN_x}(t) \geq 1 * \left[a_1 F_{xN_x}(t) + |a_2| [1 * (1 - \lambda)] + a_3 [1 * F_{xN_x}(t)] + |a_4| (1 - \lambda) + a_5 \right]$$

$$\geq (a_1 + a_3)F_{xNx}(t) + |a_2 + a_4|(1 - \lambda) + a_5$$

olur. Bu durumda

$$F_{xNx}(t) - (a_1 + a_3)F_{xNx}(t) \geq a_5$$

yani, $F_{xNx}(t)=1$ olur. Böylece $N_x = \{x\}$.

Kabul edelim ki z , N nin x den farklı başka bir sabit noktası olsun. Bu durumda hipotezden $0 < k < 1$ ve $\forall t > 0$ için

$$\tilde{F}_{NzNz}(kt) \geq a_1 F_{zNz}(t) + |a_2| F_{zNz}(kt) + a_3 F_{zNz}(2t) + |a_4| F_{zNz}[(1+k)t] + a_5 F_{zz}(t) \geq 1$$

yani, N_z , z noktasından oluşan tek nokta kümesidir. Bu durumda

$$\begin{aligned} F_{xz}(t) \geq F_{xz}(kt) &= \tilde{F}_{N_x N_z}(kt) \geq a_1 F_{xNx}(t) + |a_2| F_{zNz}(kt) + a_3 F_{zNz}(2t) \\ &\quad + |a_4| F_{xNz}[(1+k)t] + a_5 F_{xz}(t) \\ &= a_1 + |a_2| + a_3 F_{xz}(2t) + |a_4| F_{xz}[(1+k)t] + a_5 F_{xz}(t) \\ &\geq a_1 + |a_2| + a_3 F_{xz}(t) + |a_4| F_{xz}(t) + a_5 F_{xz}(t) \end{aligned}$$

yani $\forall t > 0$ için $F_{xz}(t)=1$. Böylece $x=z$ olup sabit nokta tekdir.

3.2.4. Sonuç

$(X, F, *)$ tam fuzzy Menger uzay öyle ki $\forall a \in [0, 1]$ için $a * a \geq a$ ve $L: X \rightarrow X$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın: $\forall x, y \in X$, $t > 0$ ve $a_1 + a_3 + a_5 = 1$ ve $a_2 + a_4 = 0$ olacak şekilde $0 < a_1, a_3, a_5 < 1$, $|a_2| < 1$ ve $|a_4| < 1$ için

$$F_{LxLy}(kt) \geq a_1 F_{xLx}(t) + |a_2| F_{yLy}(kt) + a_3 F_{yLx}(2t) + |a_4| F_{xLy}[(1+k)t] + a_5 F_{xy}(t)$$

olacak şekilde $k \in (0,1)$ vardır. Bu durumda L dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

İspat

3.2.3. Teorem’de N dönüşümü yerine özel olarak L tek değerli dönüşümünü alırsak ispat benzer şekilde yapılır.

4. FUZZY METRİK UZAYDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

4.1. (β)-Tipi Bağdaşabilir Dönüşümler İçin Sabit Nokta Teoremleri

Bu bölümde, fuzzy metrik uzayda dört adet dönüşüm için bağdaşabilir dönüşümlerin bir alt sınıfı olan (β)-tipi bağdaşabilir olma özelliğinden yararlanarak tek değerli dönüşümler için hazırlanan ortak sabit nokta teoremleri ispat edilmiştir ve sonuçlar incelenmiştir (25).

4.1.1. Teorem

$(X, M, *)$ tam fuzzy metrik uzay öyle ki $\forall t \in [0, 1]$ için $t * t \geq t$ ve $P, S, T, Q: X \rightarrow X$ dönüşümleri aşağıdaki şartları sağlasın:

- (i) $PT(X) \cup QS(X) \subset ST(X)$,
- (ii) $\forall x, y \in X, t > 0$ ve $p+q-a=1$ olacak şekilde $0 < p, q < 1, 0 \leq a < 1$ için

$$M^2(Px, Qy, kt) * [M(Sx, Px, kt)M(Ty, Qy, kt)] * M^2(Ty, Qy, kt) + aM(Ty, Qy, kt) \\ M(Sx, Qy, 2kt) \geq [pM(Sx, Px, t) + qM(Sx, Ty, t)]M(Sx, Qy, 2kt)$$

olacak şekilde bir $k \in (0, 1)$ vardır,

- (iii) S, T sürekli dönüşümler ve $ST=TS$,
- (iv) (P, S) ve (Q, T) dönüşümleri (β)-tipi bağdaşabilirdir.

Bu takdirde P, S, T ve Q dönüşümlerinin bir tek ortak sabit noktası vardır.

İspat

$x_0 \in X$ herhangi bir nokta olsun. (x_n) dizisini $PTx_{2n} = STx_{2n+1}$ ve $QSx_{2n+1} = STx_{2n+2}$, $n=0, 1, 2, \dots$ şeklinde tanımlayalım. Kabul edelim ki, $z_n = STx_n$ olsun. O halde $x = Tx_{2n}$ ve $y = Sx_{2n+1}$ için (ii) den,

$$\begin{aligned}
& M^2(PT_{X_{2n}}, QS_{X_{2n+1}}, kt) * [M(ST_{X_{2n}}, PT_{X_{2n}}, kt) M(TS_{X_{2n+1}}, QS_{X_{2n+1}}, kt)] \\
& * M^2(TS_{X_{2n+1}}, QS_{X_{2n+1}}, kt) + aM(TS_{X_{2n+1}}, QS_{X_{2n+1}}, kt) M(ST_{X_{2n}}, QS_{X_{2n+1}}, 2kt) \\
& \geq [pM(ST_{X_{2n}}, PT_{X_{2n}}, t) + qM(ST_{X_{2n}}, TS_{X_{2n+1}}, t)] M(ST_{X_{2n}}, QS_{X_{2n+1}}, 2kt)
\end{aligned}$$

buradan,

$$\begin{aligned}
& M^2(ST_{X_{2n+1}}, ST_{X_{2n+2}}, kt) * [M(z_{2n}, ST_{X_{2n+1}}, kt) M(z_{2n+1}, ST_{X_{2n+2}}, kt)] \\
& * M^2(z_{2n+1}, ST_{X_{2n+2}}, kt) + aM(z_{2n+1}, ST_{X_{2n+2}}, kt) M(z_{2n}, ST_{X_{2n+2}}, 2kt) \\
& \geq [pM(z_{2n}, ST_{X_{2n+1}}, t) + qM(z_{2n}, z_{2n+1}, t)] M(z_{2n}, ST_{X_{2n+2}}, 2kt)
\end{aligned}$$

ve,

$$\begin{aligned}
& M^2(z_{2n+1}, z_{2n+2}, kt) * [M(z_{2n}, z_{2n+1}, kt) M(z_{2n+1}, z_{2n+2}, kt)] \\
& * M^2(z_{2n+1}, z_{2n+2}, kt) + aM(z_{2n+1}, z_{2n+2}, kt) M(z_{2n}, z_{2n+2}, 2kt) \\
& \geq [pM(z_{2n}, z_{2n+1}, t) + qM(z_{2n}, z_{2n+1}, t)] M(z_{2n}, z_{2n+2}, 2kt)
\end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned}
& M^2(z_{2n+1}, z_{2n+2}, kt) * [M(z_{2n}, z_{2n+1}, kt) M(z_{2n+1}, z_{2n+2}, kt)] + aM(z_{2n+1}, z_{2n+2}, kt) M(z_{2n}, z_{2n+2}, 2kt) \\
& \geq [p+q] M(z_{2n}, z_{2n+1}, t) M(z_{2n}, z_{2n+2}, 2kt)
\end{aligned}$$

buradan,

$$\begin{aligned}
& M(z_{2n+1}, z_{2n+2}, kt) [M(z_{2n}, z_{2n+1}, kt) * M(z_{2n+1}, z_{2n+2}, kt)] + aM(z_{2n+1}, z_{2n+2}, kt) M(z_{2n}, z_{2n+2}, 2kt) \\
& \geq [p+q] M(z_{2n}, z_{2n+1}, t) M(z_{2n}, z_{2n+2}, 2kt)
\end{aligned}$$

ve,

$$\begin{aligned}
& M(z_{2n+1}, z_{2n+2}, kt) M(z_{2n}, z_{2n+2}, 2kt) + aM(z_{2n+1}, z_{2n+2}, kt) M(z_{2n}, z_{2n+2}, 2kt) \\
& \geq [p+q] M(z_{2n}, z_{2n+1}, t) M(z_{2n}, z_{2n+2}, 2kt)
\end{aligned}$$

böylece $0 < k < 1$ ve $\forall t > 0$ için,

$$M(z_{2n+1}, z_{2n+2}, kt) \geq M(z_{2n}, z_{2n+1}, t)$$

elde edilir. Benzer şekilde $x=Tx_{2n+1}$ ve $y=Sx_{2n+2}$ olmak üzere (ii) den, $0 < k < 1$ ve $\forall t > 0$ için,

$$M(z_{2n+2}, z_{2n+3}, kt) \geq M(z_{2n+1}, z_{2n+2}, t)$$

elde edilir. Genel olarak $0 < k < 1$, $\forall t > 0$ ve $m=1, 2, \dots$ için,

$$M(z_{m+1}, z_{m+2}, kt) \geq M(z_m, z_{m+1}, t)$$

elde edilir. Böylece 2.3.10. Lemma'dan $\{z_n\}$, X de bir Cauchy dizisidir. Uzay tam olduğundan bu dizi X de bir z noktasına yakınsar. $\{PTx_{2n}\}$ ve $\{QSx_{2n+1}\}$ dizileri, $\{z_n\}$ nin alt dizileri olduğundan $PTx_{2n} \rightarrow z$ ve $QSx_{2n+1} \rightarrow z$ olur.

Kabul edelim ki, $n=1, 2, \dots$ için, $y_n=Tx_n$ ve $w_n=Sx_n$ olsun. Bu durumda $Py_{2n} \rightarrow z$, $Sy_{2n} \rightarrow z$, $Tw_{2n+1} \rightarrow z$, $Qw_{2n+1} \rightarrow z$ olup, $M(PPy_{2n}, SSy_{2n}, t) \rightarrow 1$ ve $M(QQw_{2n+1}, TTW_{2n+1}, t) \rightarrow 1$. Hatta T sürekli olduğundan ve 2.3.17. Önerme'den $TQw_{2n+1} \rightarrow Tz$ ve $QQw_{2n+1} \rightarrow Tz$ olur. Eğer (ii) de $x=y_{2n}$ ve $y=Qw_{2n+1}$ alırsak,

$$\begin{aligned} & M^2(Py_{2n}, QQw_{2n+1}, kt) * [M(Sy_{2n}, Py_{2n}, kt)M(TQw_{2n+1}, QQw_{2n+1}, kt)] \\ & * M^2(TQw_{2n+1}, QQw_{2n+1}, kt) + aM(TQw_{2n+1}, QQw_{2n+1}, kt)M(Sy_{2n}, QQw_{2n+1}, 2kt) \\ & \geq [pM(Sy_{2n}, Py_{2n}, t) + qM(Sy_{2n}, TQw_{2n+1}, t)]M(Sy_{2n}, QQw_{2n+1}, 2kt) \end{aligned}$$

buradan,

$$\begin{aligned} & M^2(z, Tz, kt) * [M(z, z, kt)M(Tz, Tz, kt)] * M^2(Tz, Tz, kt) + aM(Tz, Tz, kt)M(z, Tz, 2kt) \\ & \geq [pM(z, z, t) + qM(z, Tz, t)]M(z, Tz, 2kt) \end{aligned}$$

ve,

$$M^2(z, Tz, kt) + aM(z, Tz, 2kt) \geq [p + qM(z, Tz, t)]M(z, Tz, 2kt)$$

olup $M(x,y,.)$ azalmayan olduğundan,

$$M(z,Tz,t)M(z,Tz,2kt) + aM(z,Tz,2kt) \geq [p + qM(z,Tz,t)]M(z,Tz,2kt)$$

buradan,

$$M(z,Tz,t) + a \geq p + qM(z,Tz,t)$$

ve,

$$M(z,Tz,t) \geq p - a/1 - q = 1$$

böylece $z=Tz$. Benzer şekilde $z=Sz$ olur. Eğer (ii) de $x= y_{2n}$ ve $y=z$ alırsak,

$$M^2(Py_{2n},Qz,kt) * [M(Sy_{2n},Py_{2n},kt)M(Tz,Qz,kt)] * M^2(Tz,Qz,kt) \\ + aM(Tz,Qz,kt)M(Sy_{2n},Qz,2kt) \geq [pM(Sy_{2n},Py_{2n},t) + qM(Sy_{2n},Tz,t)]M(Sy_{2n},Qz,2kt)$$

buradan,

$$M^2(z,Qz,kt) * [M(z,z,kt)M(z,Qz,kt)] * M^2(z,Qz,kt) + aM(z,Qz,kt)M(z,Qz,2kt) \\ \geq [pM(z,z,t) + qM(z,z,t)]M(z,Qz,2kt)$$

ve,

$$M^2(z,Qz,kt) * M(z,Qz,kt) + aM(z,Qz,kt)M(z,Qz,2kt) \geq [p + q]M(z,Qz,2kt)$$

hatta,

$$M(z,Qz,kt)[M(z,Qz,kt) * 1] + aM(z,Qz,kt)M(z,Qz,2kt) \geq [p + q]M(z,Qz,2kt)$$

olup $M(x,y,.)$ azalmayan olduğundan,

$$M(z, Qz, 2kt)M(z, Qz, kt) + aM(z, Qz, kt)M(z, Qz, 2kt) \geq [p + q]M(z, Qz, 2kt)$$

buradan,

$$M(z, Qz, kt) + aM(z, Qz, kt) \geq p + q$$

ve,

$$M(z, Qz, kt) \geq p + q/1 + a = 1$$

böylece $z=Qz$. Benzer şekilde $z=Pz$. Bu durumda z, P, S, T ve Q dönüşümlerinin ortak sabit noktasıdır.

Kabul edelim ki, $v \in X$ noktası P, S, T ve Q dönüşümlerinin z noktasından farklı olacak şekilde başka bir ortak sabit noktası olsun. Bu durumda (ii) de $x=z$ ve $y=v$ dersek,

$$\begin{aligned} & M^2(Pz, Qv, kt) * [M(Sz, Pz, kt)M(Tv, Qv, kt)] * M^2(Tv, Qv, kt) + aM(Tv, Qv, kt)M(Sz, Qv, 2kt) \\ & \geq [pM(Sz, Pz, t) + qM(Sz, Tv, t)]M(Sz, Qv, 2kt) \end{aligned}$$

buradan,

$$M^2(z, v, kt) + aM(z, v, 2kt) \geq [p + qM(z, v, t)]M(z, v, 2kt)$$

ve,

$$M(z, v, t) M(z, v, 2kt) + aM(z, v, 2kt) \geq [p + qM(z, v, t)]M(z, v, 2kt)$$

olup,

$$M(z, v, t) \geq p - a/1 - q = 1$$

böylece $z=v$. Bu durumda P, S, T ve Q dönüşümlerinin ortak sabit noktası tekdir.

Eğer 4.1.1. Teorem’de, $a=0$ alırsak aşağıdaki sonucu elde ederiz:

4.1.2. Sonuç

$(X, M, *)$ tam fuzzy metrik uzay öyle ki $\forall t \in [0, 1]$ için $t * t \geq t$ ve $P, S, T, Q: X \rightarrow X$ dönüşümleri, 4.1.1. Teorem’in (i), (iii), (iv) şartlarını sağlasın. Eğer $\forall x, y \in X, t > 0$ ve $p+q=1$ olacak şekilde $0 < p, q < 1$ için

$$M^2(Px, Qy, kt) * [M(Sx, Px, kt)M(Ty, Qy, kt)] * M^2(Ty, Qy, kt) \\ \geq [pM(Sx, Px, t) + qM(Sx, Ty, t)]M(Sx, Qy, 2kt)$$

olacak şekilde bir $k \in (0, 1)$ varsa P, S, T ve Q dönüşümlerinin bir tek ortak sabit noktası vardır.

Eğer 4.1.1. Teorem’de, $S=T$ alırsak aşağıdaki sonucu elde ederiz:

4.1.3. Sonuç

$(X, M, *)$ tam fuzzy metrik uzay öyle ki $\forall t \in [0, 1]$ için $t * t \geq t$ ve $P, S, Q: X \rightarrow X$ dönüşümleri aşağıdaki şartları sağlasın:

- (i) $P(X) \cup Q(X) \subset S(X)$,
- (ii) $\forall x, y \in X, t > 0$ ve $p+q-a=1$ olacak şekilde $0 < p, q < 1, 0 \leq a < 1$ için

$$M^2(Px, Qy, kt) * [M(Sx, Px, kt)M(Sy, Qy, kt)] * M^2(Sy, Qy, kt) + aM(Sy, Qy, kt) \\ M(Sx, Qy, 2kt) \geq [pM(Sx, Px, t) + qM(Sx, Sy, t)]M(Sx, Qy, 2kt)$$

olacak şekilde bir $k \in (0, 1)$ vardır,

- (iii) S sürekli bir dönüşüm,
- (iv) P, S ve Q, S dönüşümleri (β) -tipi bağdaşabilirlerdir.

Bu takdirde P, S ve Q dönüşümlerinin bir tek ortak sabit noktası vardır.

Eğer 4.1.1. Teorem’de, $S=T$ ve $P=Q$ alırsak aşağıdaki sonucu elde ederiz:

4.1.4. Sonuç

$(X, M, *)$ tam fuzzy metrik uzay öyle ki $\forall t \in [0, 1]$ için $t * t \geq t$ ve $P, S: X \rightarrow X$ dönüşümleri aşağıdaki şartları sağlasın:

- (i) $P(X) \subset S(X)$,
- (ii) $\forall x, y \in X, t > 0$ ve $p+q-a=1$ olacak şekilde $0 < p, q < 1, 0 \leq a < 1$ için

$$M^2(Px, Py, kt) * [M(Sx, Px, kt)M(Sy, Py, kt)] * M^2(Sy, Py, kt) + aM(Sy, Py, kt) \\ M(Sx, Py, 2kt) \geq [pM(Sx, Px, t) + qM(Sx, Sy, t)]M(Sx, Py, 2kt)$$

olacak şekilde bir $k \in (0, 1)$ vardır,

- (iii) S sürekli bir dönüşüm,
- (iv) P ve S dönüşümleri (β) -tipi bağdaşabilirlerdir.

Bu takdirde P ve S dönüşümlerinin bir tek ortak sabit noktası vardır.

Eğer 4.1.1. Teorem’de, $S=T=I_X$ (I_X , X üzerinde özdeşlik dönüşümü) alırsak aşağıdaki sonucu elde ederiz:

4.1.5. Sonuç

$(X, M, *)$ tam fuzzy metrik uzay öyle ki $\forall t \in [0, 1]$ için $t * t \geq t$ ve $P, Q: X \rightarrow X$ dönüşümler olsun. Eğer $\forall x, y \in X, t > 0$ ve $p+q-a=1$ olacak şekilde $0 < p, q < 1, 0 \leq a < 1$ için

$$M^2(Px, Qy, kt) * [M(x, Px, kt)M(y, Qy, kt)] * M^2(y, Qy, kt) + aM(y, Qy, kt)M(x, Qy, 2kt) \\ \geq [pM(x, Px, t) + qM(x, y, t)]M(x, Qy, 2kt)$$

olacak şekilde bir $k \in (0, 1)$ varsa P ve Q dönüşümlerinin bir tek ortak sabit noktası vardır.

Şimdi 4.1.1. Teoremini sağlayan bir örnek verelim.

4.1.6. Örnek

$X = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$ olmak üzere (X, d) alışılmış metrik uzay olsun.

$M: X^2 \times [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonunu $\forall x, y \in X, t > 0$ için $M(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$ ve

$*: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonunu $\forall a, b \in [0, 1]$ için $a * b = \min\{a, b\}$ olacak şekilde tanımlarsak $(X, M, *)$ tam fuzzy metrik uzaydır. $P, S, T, Q: X \rightarrow X$ fonksiyonlarını $\forall x \in X$ için $Px = x/4, Sx = x/2, Tx = x, Qx = 0$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$$PT(X) \cup QS(X) = \left\{ \frac{1}{4n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\} \subset \left\{ \frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\} = ST(X).$$

Ayrıca $ST = TS$ ve S, T sürekli fonksiyonlardır. Eğer $k=1/2$ ve $t=1$ alırsak 4.1.1. Teorem'in (ii) şıkkı sağlanır. $0 \in X$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} Px_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Sx_n = 0$ olacak şekildeki X deki $\{x_n\}$ dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ olduğundan P ve S fonksiyonları (β) -tipi bağdaşabilirdir. Benzer şekilde Q ve T fonksiyonları da (β) -tipi bağdaşabilirdir. O halde 4.1.1. Teorem'in bütün şartları sağlanmış olur ve $0, P, S, T$ ve Q fonksiyonlarının tek ortak sabit noktasıdır.

4.2. (α) -Tipi Bağdaşabilir Dönüşümler İçin Sabit Nokta

Bu bölümde, fuzzy metrik uzayda dört adet dönüşüm için bağdaşabilir dönüşümlerin bir alt sınıfı olan (α) -tipi bağdaşabilir olma özelliğinden yararlanarak tek değerli dönüşümler için hazırlanan ortak sabit nokta teoremleri ispat edilmiştir ve sonuçlar incelenmiştir (26).

4.2.1. Teorem

$(X, M, *)$ tam fuzzy metrik uzay öyle ki $\forall t \in [0, 1]$ için $t * t \geq t$ ve $P, S, T, Q: X \rightarrow X$ dönüşümleri aşağıdaki şartları sağlasın:

- (i) $PT(X) \cup QS(X) \subset ST(X)$,
- (ii) $\forall x, y \in X, t > 0$ ve $p+q=1$ olacak şekilde $0 < p, q < 1$ için

$$\begin{aligned} & M^2(Px, Qy, kt) * [M(Sx, Px, kt)M(Ty, Qy, kt)] * M^2(Ty, Qy, kt) \\ & \geq [pM(Sx, Px, t) + qM(Sx, Ty, t)]M(Sx, Qy, 2kt) \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $k \in (0, 1)$ vardır,

- (iii) S ve T sürekli dönüşümler ve $ST=TS$,
- (iv) (P, S) ve (Q, T) dönüşümleri (α) -tipi bağdaşabilirlerdir.

Bu takdirde P, S, T ve Q dönüşümlerinin bir tek ortak sabit noktası vardır.

İspat

$x_0 \in X$ herhangi bir nokta olsun. (i) den

$$PTx_{2n} = STx_{2n+1} \text{ ve } QSx_{2n+1} = STx_{2n+2}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

olacak şekilde X de $\{x_n\}$ dizisini tanımlayalım. Kabul edelim ki $\forall n \in \mathbb{N}$ için $z_n = STx_n$ olsun. $x = Tx_{2n}$ ve $y = Sx_{2n+1}$ için (ii) den,

$$\begin{aligned} & M^2(PTx_{2n}, QSx_{2n+1}, kt) * [M(STx_{2n}, PTx_{2n}, kt) \\ & M(TSx_{2n+1}, QSx_{2n+1}, kt)] * M^2(TSx_{2n+1}, QSx_{2n+1}, kt) \\ & \geq [pM(STx_{2n}, PTx_{2n}, t) + qM(STx_{2n}, TSx_{2n+1}, t)]M(STx_{2n}, QSx_{2n+1}, 2kt) \end{aligned}$$

buradan,

$$M^2(STx_{2n+1}, STx_{2n+2}, kt) * [M(z_{2n}, STx_{2n+1}, kt)M(z_{2n+1}, STx_{2n+2}, kt)] * M^2(z_{2n+1}, STx_{2n+2}, kt) \\ \geq [pM(z_{2n}, STx_{2n+1}, t) + qM(z_{2n}, z_{2n+1}, t)]M(z_{2n}, STx_{2n+2}, 2kt)$$

ve,

$$M^2(z_{2n+1}, z_{2n+2}, kt) * [M(z_{2n}, z_{2n+1}, kt) * M(z_{2n+1}, z_{2n+2}, kt)] * M^2(z_{2n+1}, z_{2n+2}, kt) \\ \geq [pM(z_{2n}, z_{2n+1}, t) + qM(z_{2n}, z_{2n+1}, t)]M(z_{2n}, z_{2n+2}, 2kt)$$

olup,

$$M^2(z_{2n+1}, z_{2n+2}, kt) * [M(z_{2n}, z_{2n+1}, kt)M(z_{2n+1}, z_{2n+2}, kt)] \\ \geq (p+q)M(z_{2n}, z_{2n+1}, t)M(z_{2n}, z_{2n+2}, 2kt)$$

ve,

$$M(z_{2n+1}, z_{2n+2}, kt)[M(z_{2n}, z_{2n+1}, kt) * M(z_{2n+1}, z_{2n+2}, kt)] \geq M(z_{2n}, z_{2n+1}, t)M(z_{2n}, z_{2n+2}, 2kt)$$

buradan,

$$M(z_{2n+1}, z_{2n+2}, kt)M(z_{2n}, z_{2n+2}, 2kt) \geq M(z_{2n}, z_{2n+1}, t)M(z_{2n}, z_{2n+2}, 2kt)$$

böylece $0 < k < 1$ ve $\forall t > 0$ için,

$$M(z_{2n+1}, z_{2n+2}, kt) \geq M(z_{2n}, z_{2n+1}, t)$$

elde edilir. Benzer şekilde $x = Tx_{2n+1}$ ve $y = Sx_{2n+2}$ için olmak üzere (ii) den, $0 < k < 1$ ve $\forall t > 0$ için,

$$M(z_{2n+2}, z_{2n+3}, kt) \geq M(z_{2n+1}, z_{2n+2}, t)$$

elde edilir. Genel olarak $0 < k < 1$, $\forall t > 0$ ve $m = 1, 2, \dots$ için,

$$M(z_{m+1}, z_{m+2}, kt) \geq M(z_m, z_{m+1}, t)$$

elde edilir. Böylece 2.3.10. Lemma'dan $\{z_n\}$, X de bir Cauchy dizisidir. Uzay tam olduğundan bu dizi X de bir z noktasına yakınsar. $\{PTx_{2n}\}$ ve $\{QSx_{2n+1}\}$ dizileri, $\{z_n\}$ nin alt dizileri olduğundan bu diziler de z noktasına yakınsar yani, $PTx_{2n} \rightarrow z$ ve $QSx_{2n+1} \rightarrow z$ olur.

Kabul edelim ki, $y_n = Tx_n$ ve $w_n = Sx_n$, $n=1,2,3,\dots$ olsun. Bu durumda $Py_{2n} \rightarrow z$, $Sy_{2n} \rightarrow z$, $Tw_{2n+1} \rightarrow z$ ve $Qw_{2n+1} \rightarrow z$ olup,

$$M(PSy_{2n}, SSy_{2n}, t) \rightarrow 1, M(SPy_{2n}, PPy_{2n}, t) \rightarrow 1$$

ve,

$$M(TQw_{2n+1}, QQw_{2n+1}, t) \rightarrow 1, M(QTw_{2n+1}, TTW_{2n+1}, t) \rightarrow 1.$$

T sürekli olduğundan 2.3.23. Önerme'den $QTw_{2n+1} \rightarrow Tz$ ve $TTW_{2n+1} \rightarrow Tz$ olur. Eğer (ii) de $x=y_{2n}$ ve $y=Tw_{2n+1}$ alırsak,

$$\begin{aligned} & M^2(Py_{2n}, QTw_{2n+1}, kt) * [M(Sy_{2n}, Py_{2n}, kt)M(TTw_{2n+1}, QTw_{2n+1}, kt)] \\ & * M^2(TTw_{2n+1}, QTw_{2n+1}, kt) \\ & \geq [pM(Sy_{2n}, Py_{2n}, t) + qM(Sy_{2n}, TTW_{2n+1}, t)]M(Sy_{2n}, QTw_{2n+1}, 2kt) \end{aligned}$$

buradan,

$$\begin{aligned} & M^2(z, Tz, kt) * [M(z, z, kt)M(Tz, Tz, kt)] * M^2(Tz, Tz, kt) \\ & \geq [pM(z, z, t) + qM(z, Tz, t)]M(z, Tz, 2kt) \end{aligned}$$

ve,

$$M^2(z, Tz, kt) \geq [p + qM(z, Tz, t)]M(z, Tz, 2kt)$$

olup $M(x,y,.)$ azalmayan olduğundan,

$$M(z,Tz,t)M(z,Tz,2kt) \geq [p + qM(z,Tz,t)]M(z,Tz,2kt)$$

buradan,

$$M(z,Tz,t) \geq p/1 - q = 1$$

böylece $z=Tz$. Benzer şekilde, $z=Sz$. Eğer (ii) de $x = y_{2n}$ ve $y = z$ alırsak,

$$\begin{aligned} & M^2(Py_{2n},Qz,kt) * [M(Sy_{2n},Py_{2n},kt)M(Tz,Qz,kt)] * M(Tz,Qz,kt) \\ & \geq [pM(Sy_{2n},Py_{2n},t) + qM(Sy_{2n},Tz,t)]M(Sy_{2n},Qz,2kt) \end{aligned}$$

buradan,

$$\begin{aligned} & M^2(z,Qz,kt) * [M(z,z,kt)M(z,Qz,kt)] * M(z,Qz,kt) \\ & \geq [pM(z,z,t) + qM(z,z,t)]M(z,Qz,2kt) \end{aligned}$$

ve,

$$M^2(z,Qz,kt) * M(z,Qz,kt) \geq (p + q) M(z,Qz,2kt)$$

olup,

$$M(z,Qz,kt)[M(z,Qz,kt) * 1] \geq M(z,Qz,2kt)$$

elde edilir. Ayrıca $M(x,y,.)$ azalmayan olduğundan,

$$M(z,Qz,t) M(z,Qz,2kt) \geq M(z,Qz,2kt)$$

buradan,

$$M(z, Qz, kt) \geq 1$$

böylece $z=Qz$ olur. Benzer şekilde $z=Pz$ dir. Böylece z, P, Q, S ve T dönüşümlerinin ortak sabit noktasıdır.

Kabul edelim ki, $v \in X$ noktası P, Q, S ve T dönüşümlerinin z noktasından farklı olacak şekilde başka bir ortak sabit noktası olsun. Bu durumda (ii) de $x=z$ ve $y=v$ dersek,

$$\begin{aligned} & M^2(Pz, Qv, kt) * [M(Sz, Pz, kt)M(Tv, Qv, kt)] * M(Tv, Qv, kt) \\ & \geq [pM(Sz, Pz, t) + qM(Sz, Tv, t)]M(Sz, Qv, 2kt) \end{aligned}$$

buradan,

$$M^2(z, v, kt) \geq [p + qM(z, v, t)]M(z, v, 2kt)$$

ve,

$$M(z, v, t) M(z, v, 2kt) \geq [p + qM(z, v, t)]M(z, v, 2kt)$$

olup,

$$M(z, v, t) \geq p/1 - q = 1$$

böylece $z=v$. Bu durumda P, Q, S ve T dönüşümlerinin ortak sabit noktası tekdir.

Eğer 4.2.1. Teorem'de, $S=T$ alırsak aşağıdaki sonucu elde ederiz:

4.2.2. Sonuç

$(X, M, *)$ tam fuzzy metrik uzay öyle ki $\forall t \in [0, 1]$ için $t * t \geq t$ ve $P, S, Q: X \rightarrow X$ dönüşümleri aşağıdaki şartları sağlasın:

$$(i) \quad P(X) \cup Q(X) \subset S(X),$$

(ii) $\forall x, y \in X, t > 0$ ve $p+q=1$ olacak şekilde $0 < p, q < 1$ için

$$\begin{aligned} & M^2(Px, Qy, kt) * [M(Sx, Px, kt)M(Sy, Qy, kt)] * M^2(Sy, Qy, kt) \\ & \geq [pM(Sx, Px, t) + qM(Sx, Sy, t)]M(Sx, Qy, 2kt) \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $k \in (0, 1)$ vardır,

(iii) S sürekli dönüşüm,

(iv) (P,S) ve (Q,S) (α)-tipi bağdaşabilirlerdir.

Bu takdirde P,S ve Q dönüşümlerinin bir tek ortak sabit noktası vardır

Eğer 4.2.1. Teorem'de, $S=T$ ve $P=Q$ alırsak aşağıdaki sonucu elde ederiz:

4.2.3. Sonuç

$(X, M, *)$ tam fuzzy metrik uzay öyle ki $\forall t \in [0, 1]$ için $t * t \geq t$ ve $P, S, Q: X \rightarrow X$ dönüşümleri aşağıdaki şartları sağlasın:

(i) $P(X) \subset S(X)$,

(ii) $\forall x, y \in X, t > 0$ ve $p+q=1$ olacak şekilde $0 < p, q < 1$ için

$$\begin{aligned} & M^2(Px, Py, kt) * [M(Sx, Px, kt)M(Sy, Py, kt)] * M^2(Sy, Py, kt) \\ & \geq [pM(Sx, Px, t) + qM(Sx, Sy, t)]M(Sx, Py, 2kt) \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $k \in (0, 1)$ vardır,

(iii) S sürekli dönüşüm,

(iv) P ve S (α)-tipi bağdaşabilirlerdir.

Bu takdirde P ve S dönüşümlerinin bir tek ortak sabit noktası vardır

Eğer 4.2.1. Teorem'de, $S=T=I_X$ alırsak aşağıdaki sonucu elde ederiz:

4.2.4. Sonuç

$(X, M, *)$ tam fuzzy metrik uzay öyle ki $\forall t \in [0, 1]$ için $t * t \geq t$ ve $P, Q: X \rightarrow X$ iki dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in X, t > 0$ ve $p+q=1$ olacak şekilde $0 < p, q < 1$ için

$$M^2(Px, Qy, kt) * [M(x, Px, kt)M(y, Qy, kt)] * M^2(y, Qy, kt) \\ \geq [pM(x, Px, t) + qM(x, y, t)]M(x, Qy, 2kt)$$

olacak şekilde bir $k \in (0, 1)$ var ise P ve Q dönüşümlerinin bir tek ortak sabit noktası vardır.

Şimdi 4.2.1. Teoremini sağlayan bir örnek verelim.

4.2.5. Örnek

$X = [0, 1]$ olmak üzere (X, d) alışılmış metrik uzay olsun. $M: X^2 \times (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonunu $\forall x, y \in X$ ve $t > 0$ için $M(x, y, t) = \frac{t}{t + |x - y|}$ ve $*: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$

fonksiyonunu $\forall a, b \in [0, 1]$ için $a * b = ab$ olacak şekilde tanımlarsak $(X, M, *)$ tam fuzzy metrik uzaydır. $P, S, T, Q: X \rightarrow X$ fonksiyonlarını $\forall x \in X$ için $Px = x/6, Sx = x/2, Tx = x/5, Qx = 0$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda,

$$PT(X) \cup QS(X) = \left[0, \frac{1}{30}\right] \subset \left[0, \frac{1}{10}\right] = ST(X).$$

Ayrıca $ST = TS$ ve S, T sürekli fonksiyonlardır. Eğer $k = 1/2$ ve $t = 1$ alırsak 4.2.1. Teorem'in (ii) şıkkı sağlanır. $0 \in X$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} Px_n = \lim_{n \rightarrow \infty} ABx_n = 0$ olacak şekildeki X deki $\{x_n\}$ dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ olduğundan P ve AB fonksiyonları (α) -tipi bağdaşabilirler. Benzer şekilde Q ve ST fonksiyonları da (α) -tipi bağdaşabilirler. O halde 4.2.1. Teorem'in bütün şartları sağlanmış olur ve $x = 0, P, S, T$ ve Q fonksiyonlarının tek ortak sabit noktasıdır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Sonuç olarak probabilistik metrik uzaylar için yörüngesel tamlık kavramını tanımlayarak geliştirdiğimiz şartlar altında yörüngesel tam ve tam probabilistik metrik uzaylarda sabit noktanın varlığını ve tekliğini göstermiş olduk. Yine geliştirdiğimiz şartlar altında fuzzy metrik uzaylarda (α) ve (β) tipi bağdaşabilir dönüşümler için sabit noktanın varlığını ve tekliğini göstermiş olduk. Buna benzer çalışmalar Mihet (27), Hadzic ve Pap (20), Radu (7,21), Tardiff (28) ve Cho (23,24) tarafından yapılmıştır. Bulduğumuz sonuçlar, değişik tanım ve şartlar altında, probabilistik metrik uzaylarda ve fuzzy metrik uzaylarda sabit nokta kavramına farklı bir yaklaşım getirmiştir. Böylece farklı uzaylarda sabit nokta varlığı ve tekliği için yeni şartlar elde etmiş olduk.

Sabit nokta kavramı farklı uzaylar için her geçen gün farklı kavramlar ve şartlar altında geliştirilmektedir. Bu konuyla ilgilenen okuyucu, özellikle ortak sabit nokta kavramında, dönüşümler arasında verilen ilişkilerden yararlanarak uzay üzerindeki şartları geliştirebilir veya farklı uzaylar arasındaki ilişkilerden yararlanarak yeni tanımlar kurabilir.

KAYNAKLAR

1. Frechet, M., "Sur quelques points du calcul fonctionnel", **Rend. Circ. Mat. Palermo**, 22: 1-74 (1906).
2. Menger, K., "Statistical metrics", **Proc. Nat. Acad. Sci.**, 28: 535-537 (1942).
3. Istratescu, V. M., "Introducere in teoria spatiilor metrice probabiliste cu aplicatii", **Editura Technica**, Bucharest, (1974).
4. Schweizer, B. and Sklar, A., "Probabilistic metric spaces", **North-Holland**, Amsterdam, (1983).
5. Wald, A., "On a statistical generalization of metric spaces", **Proc. Nat. Acad. Sci.**, 29: 196-197 (1943).
6. Hicks, T. L. and Sharma, P.L., "Probabilistic metric structures: Topological classification", **Univ. u Novom Sadu Ser. Mat.**, 14 (1): 43-50 (1984).
7. Radu, V., "Lectures on probabilistic analysis", **Universitatea de Vest din Timișoara**, Timișoara, (1994).
8. Banach, S., "Theorie les operations lineaires", **Manograie Matematyeczne**, Warsaw, (1932).
9. Sehgal, V. M. and Bharucha-Reid, A. T., "Fixed point of contraction mapping on PM spaces", **Math. Systems Theory**, 6: 97-100 (1972).
10. Zadeh, L. A., "Fuzzy sets", **Inform. and Control**, 8: 338-353 (1965).
11. Kramosil, O. and Michalek, J., "Fuzzy metric and statistical metric spaces", **Kybernetika**, 11: 326-334 (1975).
12. Erceg, M. A., "Metric spaces in fuzzy set theory", **J. Math. Anal. Appl.**, 69: 205-230 (1979).
13. Deng, Z. K., "Fuzzy pseduo-metric spaces", **J. Math. Anal. Appl.**, 86: 74-95 (1982).
14. Kaleva, O. and Seikkala, S., "On fuzzy metric spaces", **Fuzzy Sets and Systems**, 12: 215-229 (1984).
15. George, A. and Veeramani, P., "On some results in fuzzy metric spaces", **Fuzzy Sets and Systems**, 64: 395-399 (1994).

16. Grabiec, M., "Fixed points in fuzzy metric spaces", **Fuzzy Sets and Systems**, 27: 385-389 (1988).
17. Yıldız, C., "Genel Topoloji 3. Baskı", **Gazi Üniv. Basımevi**, Ankara, (2005).
18. Özer, O. and Turkoglu, D., "Some fixed point theorem for multivalued mappings", **Anadolu Üniv. Fen Fak. Dergisi**, 4: 83-96 (1998).
19. Constantin, G. and Istratescu, V. I., "Elements of probabilistic analysis", **Kluwer Acad. Publ**, The Netherlands, (1989).
20. Hadzic, O. and Pap, E., "Fixed point theory in probabilistic metric spaces", **Kluwer Acad. Publ**, The Netherlands, (2001).
21. Radu, V., "Probabilistic contractions on fuzzy Menger spaces", **Analele Univ. Bucuresti**, LI: 63-72 (2002).
22. Sherwood, H., "Complete probabilistic metric spaces", **Z. Wahrsch. Verw. Gebiete**, 20: 117-128 (1971).
23. Cho, Y. J., "Fixed points in fuzzy metric spaces", **J. Fuzzy Math.**, 4: 949-962 (1997).
24. Cho, Y. J., Pathak, H. K., Kang, S. M. and Jung, J. S., "Common fixed points of compatible maps of type (β) on fuzzy metric spaces", **Fuzzy Sets and Systems.**, 93: 99-111 (1998).
25. Kutukcu, S., Turkoglu, D. and Yildiz, C., "Common fixed points of compatible maps of type (β) on fuzzy metric spaces", **Commun. Korean Math. Soc.**, baskıda.
26. Turkoglu, D., Kutukcu, S. and Yildiz, C., "Common fixed points of compatible maps of type (α) on fuzzy metric spaces", **Int. J. Appl. Math.**, baskıda.
27. Mihet, D., "A Banach contraction theorem in fuzzy metric spaces", **Fuzzy Sets and Systems.**, 144: 431-439 (2004).
28. Tardif, R. M., "Contraction maps on probabilistic metric spaces", **J. Math. Anal. Appl.**, 165: 517-523 (1992).

ÖZGEÇMİŞ

Servet Kütükcü, 1975 yılı Konya doğumlu. İlk öğrenimini Afyonkarahisar'da, lise öğrenimini Trabzon'da Beşikdüzü Anadolu Öğretmen Lisesinde tamamladı. 1994 yılında kazandığı Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesinden 1998 yılında mezun oldu. Aynı yıl Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesinde yüksek lisans ve araştırma görevliliğini kazandı. 1999 yılında Y.Ö.K. kanununun 35. maddesi gereğince yüksek lisans ve doktora eğitimi için Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesine görevlendirildi. Halen görevine devam etmektedir.