

**T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**AFİN GEOMETRİ VE
AFİN KONNEKSİYONLAR ÜZERİNE**

**Tezi Hazırlayan
Tülay ERDOĞAN KÖSE**

**Tezi Yöneten
Yrd. Doç. Dr. Nural YÜKSEL**

**Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi**

**Temmuz 2006
KAYSERİ**

Yrd. Doç. Dr. Nural YÜKSEL danışmanlığında Tülay ERDOĞAN KÖSE tarafından hazırlanan “ Afın Geometri ve Afın Konneksiyonlar Üzerine ” adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

07 / 07 / 2006

JÜRİ:

Başkan : Prof. Dr. Mehmet ÖZDEMİR

Üye : Yrd. Doç. Dr. Nural YÜKSEL

Üye : Yrd. Doç. Dr. A. Nihal TUNCER

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 18/07/2006 tarih ve 2006/18-09 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

19/07/2006
Prof. Dr. Nusret AYYILDIZ
Enstitü Müdürü Y.

TEŞEKKÜR

Tez çalıőmamın her aőamasında; çok değerli bilgi ve deneyimleri ile bana yol gösteren, her zaman ve her konuda en büyük desteği grdğim, saygıdeğer hocalarım Sayın Prof.Dr. Mehmet ÖZDEMİR'e ve Sayın Yrd.Doç.Dr. Nural YÜKSEL'e teőekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, bugünlere gelmemde, maddi ve manevi hiçbir fedakarlıktan çekinmeyen aileme ve tez yazımında yardımlarını esirgemeyen eőim Oktay KÖSE'ye teőekkürü bir borç bilirim.

AFİN GEOMETRİ VE AFİN KONNEKSİYONLAR ÜZERİNE

Tülay ERDOĞAN KÖSE

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Temmuz 2006
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Nural YÜKSEL

ÖZET

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, tezin içeriği ile ilgili giriş yapıldı.

İkinci bölümde, afın uzaylar hakkında temel tanımlar ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde, Riemann manifoldu ve Riemann konneksiyonu hakkında tanımlar ve teoremler ifade ve ispat edildi.

Dördüncü bölümde ise, genel olarak manifoldlar üzerindeki eğrilikler, Riemann eğrilik tensörü, Ricci eğrilik tensörü ve Gauss denklemi ifade edildi. Ayrıca, genelleştirilmeler yapıldı ve gerekli teoremler ispatlandı.

Anahtar Kelimeler : Afın uzay, Riemann manifoldu, Riemann konneksiyonu, eğrilik tensörü, torsiyon tensörü.

ON AFFINE GEOMETRY AND AFFINE CONNECTIONS

Tülay ERDOĞAN KÖSE

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

M. Sc. Thesis, July 2006

Thesis Supervisor : Assist. Prof. Nural YÜKSEL

ABSTRACT

This study has four chapters.

In the first chapter, the introduction about content of the thesis is made.

In the second chapter, it is given the basic definitions and theorems about affine spaces.

In the third chapter, it is expressed and proved about the definitions and theorems of Riemannian manifold and Riemannian connection.

In the fourth chapter, it is generally expressed the curvatures on the manifolds, Riemannian curvature tensor, Ricci curvature tensor and Gauss equation. Also, it is made generalizations and the required theorems are proved.

Keywords : Affine space, Riemannian manifold, Riemannian connection, curvature tensor, torsion tensor.

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	i
TEŞEKKÜR	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
SEMBOLLER	vi
1. BÖLÜM	
GİRİŞ	1
2. BÖLÜM	
TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER	2
3. BÖLÜM	
RİEMANN MANİFOLDU VE KONNEKSİYONLAR	12
4. BÖLÜM	
EĞRİLİKLER VE GAUSS DENKLEMİ	22
KAYNAKLAR	39
ÖZGEÇMİŞ	40

SEMBOLLER

- $\chi(M)$: M üzerindeki vektör alanlarının cümlesi
 E^n : Öklid uzayı
 D : Kovaryant türev operatörü
 φ_* : φ dönüşümünün Jakobianı
 Γ_{jk}^i : Christoffel sembolleri
 $R(X, Y, Z)$: Riemann eğrilik tensörü
 $K(X, Y, Z, W)$: Riemann – Christoffel eğrilik tensörü

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Bu çalışmada, afin ve Öklid geometrisi hakkında temel kavramlar ve teoremler verildi.

Diferensiyel geometride önemli bir yeri olan afin uzaylar, geniş bir şekilde incelenerek, burada verilen tanımlar Riemann manifoldları üzerinde ifade edildi.

Ayrıca, diferensiyel geometrinin birçok konularında temel teşkil eden eğrilikler, iki ve n -boyutlu uzayda ifade ve ispat edilerek, Riemann manifoldları ve alt manifoldlar üzerinde Gauss denklemi tanımlanarak genelleştirildi.

2. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1 (Afın uzay). $A \neq \emptyset$ bir cümle, V herhangi bir F cismi üzerinde vektör uzayı olsun.

$$\begin{aligned} f : A \times A &\longrightarrow V \\ (P, Q) &\longrightarrow f(P, Q) = \overrightarrow{PQ} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı fonksiyon için aşağıdaki iki aksiyom sağlanıyor ise, A cümlesine V vektör uzayı ile birleştirilmiş bir afın uzay denir.

$$(i) \quad \forall P, Q, R \in A \quad \text{için} \quad \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$$

$$(ii) \quad \forall P \in A \quad \text{ve} \quad \alpha \in V \quad \text{olmak üzere} \quad \overrightarrow{PQ} = \alpha \quad \text{olacak biçimde bir tek } Q \in A$$

vardır [1].

Teorem 2.1. Bir V vektör uzayı ile birleştirilmiş afın uzay A olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler doğrudur.

$$(i) \quad \forall P \in A \quad \text{için} \quad \overrightarrow{PP} = \vec{0} \in V$$

$$(ii) \quad \forall P, Q \in A \quad \text{için} \quad \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$$

$$(iii) \quad \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'} \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}$$

İspat: (i) Birinci afın aksiyomda $R = Q = P$ alınırsa,

$$\overrightarrow{PP} = \vec{0}$$

elde edilir .

(ii) Birinci afin aksiyomda $R = P$ alınırsa,

$$\overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP}$$

$$\vec{0} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP}$$

$$\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$$

bulunur.

(iii) Birinci afin aksiyoma göre,

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ'} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QQ'} \\ \overrightarrow{PQ'} = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q'} \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q'}$$

olur. Burada kabul kullanılırsa, $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}$ bulunur.

Tanım 2.2 (Afin çatı). Bir V vektör uzayı ile birleşen afin uzay A olsun.

$P_0, P_1, \dots, P_n \in A$ noktaları için $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n} \in V$ vektörleri V nin bir bazı ise, $\{ P_0, P_1, \dots, P_n \}$ nokta $(n+1)$ -lisine A afin uzayının bir afin çatısı denir.

Tanım 2.3 (Afin koordinat sistemi). n -boyutlu bir V vektör uzayı ile birleşen afin uzay A olsun. A afin uzayının afin çatılarından biri $\{ P_0, P_1, \dots, P_n \}$ olsun.

$\{ \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n} \}$ sistemi V nin bir bazı olduğundan, bu uzaydaki her vektör bu baz vektörleri cinsinden tek türlü ifade edilir. $\forall P \in A$ için $\overrightarrow{P_0P} \in V$ vektörü bu baza göre tek türlü olarak,

$$\overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{P_0P_i}$$

şeklinde gösterilir. (a_1, a_2, \dots, a_n) e P noktasının afin koordinatları denir.

$$x_i : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$P \longrightarrow x_i(P) = a_i \quad , \quad 1 \leq i \leq n$$

şeklinde tanımlı fonksiyonların oluşturduğu $\{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$ sistemine de afin koordinat sistemi denir.

Tanım 2.4 (Öklid uzayı). n-boyutlu bir reel iç çarpım uzayı V olsun. V ile birleşen bir A afin uzayına n-boyutlu Öklid uzayı denir ve E^n ile gösterilir [2].

Tanım 2.5 (Öklid çatısı). n-boyutlu bir reel iç çarpım uzayı V olsun. V ile birleşen E^n Öklid uzayında sıralı bir $\{ P_0, P_1, \dots, P_n \}$ nokta $(n + 1)$ -lisi için eğer $\{ \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n} \}$ vektör sistemi V nin bir ortonormal bazı ise, $\{ P_0, P_1, \dots, P_n \}$ çatısına Öklid çatısı denir. Böyle bir çatıda tanımlanan $\{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$ afin koordinat sistemine Öklid koordinat sistemi ve bu sistemdeki

$$x_i : E^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad 1 \leq i \leq n$$

koordinat fonksiyonlarına da Öklid koordinat fonksiyonları adı verilir.

Tanım 2.6 (Tanjant vektörü). V vektör uzayı ile birleşen bir afin uzay A olsun. $P \in A$ ve $\vec{v} \in V$ için (P, \vec{v}) sıralı ikilisine A afin uzayının P noktasındaki bir tanjant vektörü denir.

A afin uzayının $P \in A$ noktasındaki tanjant vektörlerin cümlesi

$$T_A(P) = \{ (P, \vec{v}) = \vec{v}_P \quad , \quad \vec{v} \in V \}$$

ile gösterilir [3].

Tanım 2.7 (Vektör alanı). M bir manifold ve M üzerindeki bir komşuluk V olsun.

$$X : V \longrightarrow \bigcup_{P \in V} T_V(P)$$

şeklinde tanımlı fonksiyonu için

$$\Pi \circ X = I : V \longrightarrow V$$

olacak biçimde bir

$$\Pi : \bigcup_{P \in V} T_V(P) \longrightarrow V$$

dönüşümü bulunabiliyorsa, X e V üzerinde bir vektör alanı denir. M üzerinde vektör alanlarının cümlesi

$$\chi(M) = \left\{ X, X : M \longrightarrow \bigcup_{P \in M} T_M(P) \right\}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.8 (Yöne göre türev). $f : E^n \longrightarrow IR$ diferensiyellenebilir ve $\vec{v}_P \in T_{E^n}(P)$

olsun . Bu durumda $\vec{v}_P = \overrightarrow{PQ}$ olmak üzere;

$$\vec{v}_P(f) = \frac{d}{dt} \left(f(P_1 + t(Q_1 - P_1), \dots, P_n + t(Q_n - P_n)) \right) \Big|_{t=0}$$

reel sayısına f nin \vec{v}_P ye göre türevi denir [4].

Teorem 2.2. $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in IR^n$, $P \in E^n$ ve $f : E^n \longrightarrow IR$ diferensiyellenebilir fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$\vec{v}_P(f) = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_P$$

dir [5].

Teorem 2.3. $\forall f, g \in C(E^n, IR)$, $\forall \vec{v}_P, \vec{u}_P \in T_{E^n}(P)$ ve $\forall a, b \in IR$ için

$$(i) \quad (a \vec{v}_P + b \vec{u}_P)(f) = a \vec{v}_P(f) + b \vec{u}_P(f)$$

$$(ii) \quad \vec{v}_P(af + bg) = a \vec{v}_P(f) + b \vec{v}_P(g)$$

$$(iii) \quad \vec{v}_p (f \cdot g) = \vec{v}_p (f) \cdot g (P) + f (P) \cdot \vec{v}_p (g)$$

dir [2].

Tanım 2.9 (Bir vektör alanı yönünde türev). $X \in \chi(E^n)$ ve $f \in C(E^n, IR)$ olsun.

$\forall P \in E^n$ için

$$(X(f))(P) = X_p(f)$$

olmak üzere; $X(f) \in C(E^n, IR)$ fonksiyonuna, f nin X yönündeki türevi denir.

Teorem 2.4. $\forall X, Y \in \chi(E^n), \forall f, g, h \in C(E^n, IR), \forall a, b \in IR$ için

$(fX)(P) = f(P)X_p, P \in E^n$ olmak üzere;

$$(i) \quad (fX + gY)(h) = fX(h) + gY(h)$$

$$(ii) \quad X(af + bg) = aX(f) + bX(g)$$

$$(iii) \quad X(fg) = X(f)g + fX(g)$$

dir [6].

İspat : (i) $\forall P \in E^n$ için

$$\begin{aligned} ((fX + gY)(h))(P) &= ((fX + gY)(P))(h) \\ &= (f(P)X_p + g(P)Y_p)(h) \\ &= f(P)X_p(h) + g(P)Y_p(h) \\ &= ((fX)(h) + (gY)(h))(P) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (fX + gY)(h) = (fX)(h) + (gY)(h)$$

dir.

(ii) $\forall P \in E^n$ için

$$\begin{aligned}(X(af + bg))(P) &= X_p(af + bg) \\ &= aX_p(f) + bX_p(g) \\ &= (aX(f) + bX(g))(P) \\ \Rightarrow X(af + bg) &= aX(f) + bX(g)\end{aligned}$$

dir.

(iii) $\forall P \in E^n$ için

$$\begin{aligned}(X(fg))(P) &= X_p(fg) \\ &= X_p(f)g(P) + f(P)X_p(g) \\ &= (X(f).g + f.X(g))(P) \\ \Rightarrow X(fg) &= X(f)g + fX(g)\end{aligned}$$

dir.

Tanım 2.10 (Kovaryant türev). $X, Y \in \chi(E^n)$, $y_i : E^n \xrightarrow{C^\infty} IR$ olmak üzere; Y nin X vektör alanı yönündeki kovaryant türevi,

$$\begin{aligned}D_X Y &= \left(X(y_1), X(y_2), \dots, X(y_n) \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial y_1}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial y_2}{\partial x_i}, \dots, \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial y_n}{\partial x_i} \right) \\ &= \left(\left\langle X, \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \right) \right\rangle, \left\langle X, \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \right) \right\rangle, \dots, \left\langle X, \left(\frac{\partial y_n}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \right) \right\rangle \right) \\ &= \left(\langle X, \nabla y_1 \rangle, \langle X, \nabla y_2 \rangle, \dots, \langle X, \nabla y_n \rangle \right)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı vektör alanıdır.

Teorem 2.5. E^n üzerinde iki vektör alanı X ve W , E^n üzerinde C^∞ sınıftan iki vektör alanı daha Y ve Z olmak üzere aşağıdaki eşitlikler doğrudur.

$$(i) \quad D_X(Y + Z) = D_X Y + D_X Z$$

$$(ii) \quad D_{X+W}(Y) = D_X Y + D_W Y$$

$$(iii) \quad D_{f(P)X} Y = f(P)D_X Y, \quad f: E^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad P \in E^n$$

$$(iv) \quad D_X(fY) = X(f)Y + fD_X Y, \quad f \in C(E^n, \mathbb{R})$$

İspat : (i) $Y = (y_1, \dots, y_n)$ ve $Z = (z_1, \dots, z_n)$ olsun.

$$\begin{aligned} D_X(Y + Z) &= (X(y_1 + z_1), \dots, X(y_n + z_n)) \\ &= (X(y_1), \dots, X(y_n)) + (X(z_1), \dots, X(z_n)) \\ &= D_X Y + D_X Z \end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned} (ii) \quad D_{X+W} Y &= ((X + W)(y_1), \dots, (X + W)(y_n)) \\ &= (X(y_1), \dots, X(y_n)) + (W(y_1), \dots, W(y_n)) \\ &= D_X Y + D_W Y \end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} (iii) \quad D_{f(P)X} Y &= (f(P)X(y_1), \dots, f(P)X(y_n)) \\ &= f(P)(X(y_1), \dots, X(y_n)) \\ &= f(P)D_X Y \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
\text{(iv)} \quad D_X fY &= (X(fy_1), \dots, X(fy_n)) \\
&= (X(f)y_1 + fX(y_1), \dots, X(f)y_n + fX(y_n)) \\
&= X(f)Y + fD_X Y
\end{aligned}$$

dir.

Tanım 2.11 (Lie operatörü). V bir F cismi üzerinde vektör uzayı olsun.

$$[\ , \]: V \times V \longrightarrow V$$

dönüşümü

(i) 2-lineer

(ii) Alterne ($\forall X, Y \in V$ için $[X, Y] = -[Y, X]$)

(iii) $\forall X, Y, Z \in V$ için $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

şartlarını sağlıyor ise, $[\ , \]$ dönüşümüne, V üzerinde bir Lie operatörü denir [7].

Teorem 2.6. E^n üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(E^n)$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}
[\ , \]: \chi(E^n) \times \chi(E^n) &\longrightarrow \chi(E^n) \\
(X, Y) &\longrightarrow [X, Y]
\end{aligned}$$

dönüşümü, $\forall f \in C^\infty(E^n, IR)$ için,

$$[X, Y](f) = X(Yf) - Y(Xf)$$

şeklinde tanımlanır, $[\ , \]$ bir Lie operatörüdür.

İspat : (i) $\forall a, b \in IR$, $\forall X, Y, Z \in \chi(E^n)$ için $\forall f \in C^\infty(E^n, IR)$ olmak üzere;

$$[aX + bY, Z](f) = (aX + bY)(Zf) - Z((aX + bY)f)$$

$$\begin{aligned}
&= aX(Zf) + b(Y(Zf)) - a(Z(Xf)) - b(Z(Yf)) \\
&= (a[X, Z] + b[Y, Z]) (f) \\
\Rightarrow [aX + bY, Z] &= a[X, Z] + b[Y, Z]
\end{aligned}$$

dir.

Benzer şekilde, $[,]$ dönüşümünün ikinci yere göre de lineer olduğu gösterilir.

(ii) $\forall X, Y \in \chi(E^n), \forall f \in C^\infty(E^n, IR)$ için

$$\begin{aligned}
[X, Y](f) &= X(Yf) - Y(Xf) \\
&= -(Y(Xf) - X(Yf)) \\
&= -[Y, X](f)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow [X, Y] = -[Y, X]$$

dir.

(iii) $\forall X, Y, Z \in \chi(E^n)$ ve $\forall f \in C^\infty(E^n, IR)$ için

$$\begin{aligned}
[X, [Y, Z]](f) &= X(Y(Zf)) - X(Z(Yf)) - Y(Z(Xf)) + Z(Y(Xf)) \\
[Y, [Z, X]](f) &= Y(Z(Xf)) - Y(X(Zf)) - Z(X(Yf)) + X(Z(Yf)) \\
[Z, [X, Y]](f) &= Z(X(Yf)) - Z(Y(Xf)) - X(Y(Zf)) + Y(X(Zf))
\end{aligned}$$

yazılır. Böylece,

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

elde edilir.

Teorem 2.7. C^∞ sınıfından $\forall X, Y, Z \in \chi(E^n)$ vektör alanları için aşağıdaki eşitlikler doğrudur [2].

$$(i) D_X Y - D_Y X = [X, Y]$$

$$(ii) X(\langle Y, Z \rangle) = \langle D_X Y, Z \rangle + \langle Y, D_X Z \rangle, \text{ burada } \langle Y, Z \rangle = \sum_{i=1}^n y_i z_i \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned} \text{İspat : (i) } D_X Y - D_Y X &= (X(y_1), \dots, X(y_n)) - (Y(x_1), \dots, Y(x_n)) \\ &= (X(y_1) - Y(x_1), \dots, X(y_n) - Y(x_n)) \end{aligned}$$

dir. Diğer taraftan, E^n de $\{u_1, \dots, u_n\}$ koordinat sistemi için

$$\begin{aligned} [X, Y] &= X(Y) - Y(X) \\ &= \sum_{j,k=1}^n \left(x_k \frac{\partial y_j}{\partial u_k} - y_k \frac{\partial x_j}{\partial u_k} \right) \frac{\partial}{\partial u_j} \\ &= \left(\sum_{k=1}^n (x_k \frac{\partial y_1}{\partial u_k} - y_k \frac{\partial x_1}{\partial u_k}), \dots, \sum_{k=1}^n (x_k \frac{\partial y_n}{\partial u_k} - y_k \frac{\partial x_n}{\partial u_k}) \right) \\ &= (X(y_1) - Y(x_1), \dots, X(y_n) - Y(x_n)) \\ &= D_X Y - D_Y X \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [X, Y] = D_X Y - D_Y X$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} (ii) D_X(\langle Y, Z \rangle) &= D_X \left(\sum_{i=1}^n y_i z_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n X(y_i z_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i X(z_i) + X(y_i) z_i) \\ &= \langle Y, D_X Z \rangle + \langle D_X Y, Z \rangle \end{aligned}$$

dir.

3. BÖLÜM

RIEMANN MANİFOLDU VE KONNEKSİYONLAR

Tanım 3.1 (Riemann manifoldu). M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonların halkası $C^\infty(M, IR)$ olmak üzere;

$$\langle , \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow C^\infty(M, IR)$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlı ise, M ye bir Riemann manifoldu denir.

Tanım 3.2 (Yarı - Riemann manifoldu). M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonların halkası $C^\infty(M, IR)$ olmak üzere;

$$\langle , \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow C^\infty(M, IR)$$

fonksiyonu,

(i) 2-lineer

(ii) Simetrik

(iii) $\forall X \in \chi(M)$ için $\langle X, Y \rangle = 0 \Rightarrow Y = 0 \in \chi(M)$

özelliklerini sağlıyor ise, M ye yarı-Riemann manifoldu denir.

Tanım 3.3 (Afin konneksiyon ve Riemann konneksiyonu). M bir C^∞ manifold olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$, $\forall f \in C^\infty(M, IR)$ olmak üzere D kovaryant türev operatörü

$$(i) D_X(Y + Z) = D_X Y + D_X Z$$

$$(ii) D_{X+Y} Z = D_X Z + D_Y Z$$

$$(iii) D_{fX} Y = f D_X Y$$

$$(iv) D_X(fY) = X(f)Y + f D_X Y$$

şartlarını sağlıyor ise, D ye M üzerinde afin, D_X e de X e göre afin konneksiyon denir. Buna ilaveten,

$$(v) D_X Y - D_Y X = [X, Y] \quad (3.1)$$

$$(vi) X[\langle Y, Z \rangle] = \langle D_X Y, Z \rangle + \langle Y, D_X Z \rangle \quad (3.2)$$

şartları sağlanıyor ise, D ye M üzerinde bir Riemann konneksiyonu denir [8].

Tanım 3.4 (Torsiyon tensörü). M bir C^∞ n - manifold ve M üzerinde bir afin konneksiyon D olsun.

$$\begin{aligned} Tor : \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\longrightarrow Tor(X, Y) \end{aligned}$$

$$Tor(X, Y) = D_X Y - D_Y X - [X, Y]$$

şeklinde tanımlanan vektör değerli tensöre, M üzerinde tanımlı D konneksiyonunun torsiyon tensörü denir [9].

Teorem 3.1. M bir C^∞ n - manifold ve M üzerinde bir afin konneksiyon D olsun.

D nin torsiyon tensörü için aşağıdaki özellikler vardır.

$\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$(i) Tor(X, Y) = -Tor(Y, X)$$

$$(ii) Tor(X + Y, Z) = Tor(X, Z) + Tor(Y, Z)$$

$$(iii) Tor(fX, Z) = f Tor(X, Z) \quad f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

dir.

$$\begin{aligned}
\text{İspat : (i) } Tor(X, Y) &= D_X Y - D_Y X - [X, Y] \\
&= -(D_Y X - D_X Y + [X, Y]) \\
&= -(D_Y X - D_X Y - [Y, X]) \\
&= -Tor(Y, X)
\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
\text{(ii) } Tor(X + Y, Z) &= D_{X+Y} Z - D_Z X + Y - [X + Y, Z] \\
&= (D_X Z - D_Z X - [X, Z]) + (D_Y Z - D_Z Y - [Y, Z]) \\
&= Tor(X, Z) + Tor(Y, Z)
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
\text{(iii) } Tor(fX, Z) &= D_{fX} Z - D_Z fX - [fX, Z] \\
&= f D_X Z - Z(f)X - f D_Z X - (fXZ - Z(fX)) \\
&= f D_X Z - Z(f)X - f D_Z X - fXZ + Z(f)X + fZX \\
&= f (D_X Z - D_Z X - [X, Z]) \\
&= f Tor(X, Z)
\end{aligned}$$

dir.

Bu teorem gereğince, $Tor(X, Y)$ nin bir $P \in M$ noktasındaki değerinin sadece X_p ve Y_p ye bağlı olduğu, X ve Y vektör alanlarına bağlı olmadığı anlaşılmaktadır.

Gerçekten $W, Z \in \chi(M)$ ve

$$W(P) = X_p, \quad Z(P) = Y_p$$

ise,

$$Tor(X, Y)|_P = Tor(W, Z)|_P$$

olacaktır. $\chi(M)$ nin bir bazı $\{ W, W_1, \dots, W_{n-1} \}$ olsun. Bu takdirde

$$X = f W + \sum_{i=1}^{n-1} a_i W_i \quad , \quad f, a_i \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

yazılır. $X_p = W_p$ olduğundan,

$$f(P) = 1 \quad , \quad a_i(P) = 0 \quad , \quad 1 \leq i \leq n-1$$

dir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} Tor(X, Y) &= Tor\left(f W + \sum_{i=1}^{n-1} a_i W_i, Y \right) \\ &= f Tor(W, Y) + \sum_{i=1}^{n-1} a_i Tor(W_i, Y) \end{aligned}$$

olur. Benzer düşünceyle, $\chi(M)$ nin $\{ Z, Z_1, \dots, Z_{n-1} \}$ bazı için

$$Y = g Z + \sum_{i=1}^{n-1} b_i Z_i \quad , \quad g, b_i \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

ve

$$g(P) = 1 \quad , \quad b_i(P) = 0$$

olup

$$Tor(W, Y) = g Tor(W, Z) + \sum_{i=1}^{n-1} b_i Tor(W, Z_i)$$

ve

$$Tor(W_i, Y) = g Tor(W_i, Z) + \sum_{j=1}^{n-1} b_j Tor(W_i, Z_j)$$

dir. Bu değerler yardımıyla,

$$\begin{aligned}
Tor(X, Y) &= fg Tor(W, Z) + \sum_{i=1}^{n-1} b_i f Tor(W, Z_i) + \sum_{i=1}^{n-1} a_i g Tor(W_i, Z) \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} a_i b_j Tor(W_i, Z_j)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$Tor(X, Y)|_p = Tor(W, Z)|_p$$

bulunur.

Tanım 3.5 (Simetrik konneksiyon). n - boyutlu bir manifold M ve M üzerindeki bir D konneksiyonunun torsiyonu Tor_D olsun. Eğer $Tor_D \equiv 0$ ise, D konneksiyonuna simetrik (sıfır torsiyonludur) denir [9].

Örnek 3.1. M bir manifold olsun. M üzerindeki her bir Riemann konneksiyonu sıfır torsiyonludur. Çünkü D bir Riemann konneksiyonu ise,
 $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$D_X Y - D_Y X = [X, Y]$$

dir , bu da $Tor_D \equiv 0$ demektir.

Tanım 3.6 (Konneksiyon koruyan dönüşüm). M ve M' iki C^∞ manifold olsun. M ve M' nün afin konneksiyonları sırasıyla D ve D' olsun. $\varphi : M \longrightarrow M'$ dönüşümünün Jakobianı,

$$\varphi_* : \chi(M) \longrightarrow \chi(M')$$

için

$$\varphi_*(D_X Y) = D'_{\varphi_*(X)} \varphi_*(Y)$$

ise, φ ye konneksiyon koruyan dönüşüm denir [10].

Teorem 3.2. $\varphi : M \longrightarrow M'$ bir konneksiyon koruyan dönüşüm ise, φ jeodezikleri de korur.

İspat : $\alpha : I \longrightarrow M$, $I \subset \mathbb{R}$

eğrisi bir $\varphi : M \longrightarrow M'$ dönüşümü altında, M' de bir

$$\beta : I \longrightarrow M', I \subset \mathbb{R}$$

eğrisine resmedilirse, $\beta = \varphi \circ \alpha$ olduğu açıktır. α nın birim teğet vektör alanı T olduğuna göre, β nın teğet vektör alanı da $\varphi_*(T)$ dir.

α , M de bir jeodezik olsun. M deki konneksiyon D olmak üzere $D_T T = 0$ dir.

φ konneksiyon koruyan dönüşüm olduğundan,

$$\varphi_*(D_T T) = D'_{\varphi_*(T)} \varphi_*(T)$$

D' , M' deki konneksiyondur. Ayrıca,

$$\varphi_*(0) = 0$$

$$D'_{\varphi_*(T)} \varphi_*(T) = 0$$

yani,

$$\beta = \varphi \circ \alpha : I \longrightarrow M'$$

eğrisi de M' de bir jeodeziktir.

Teorem 3.3. $\varphi : M \longrightarrow M'$ bir diffeomorfizm ve M' de bir D' konneksiyonu verilsin. Bu durumda M üzerinde φ nin koruduğu bir tek afin konneksiyon vardır.

Yani,

$$\varphi_*(D_X Y) = D'_{\varphi_*(X)} \varphi_*(Y)$$

olacak şekilde bir

$$D : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

afin konneksiyonu vardır ve tektir [11].

İspat : φ dönüşümü diffeomorfizm olduğundan,

$$\varphi_* : \chi(M) \longrightarrow \chi(M')$$

dönüşümü birebir ve örtendir. Bu taktirde φ_*^{-1} dönüşümü mevcuttur. Diğer taraftan $\chi(M)$ ve $\chi(M')$, sırasıyla, $C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve $C^\infty(M', \mathbb{R})$ -modül olduklarından, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\varphi_*(X + Y) = \varphi_*(X) + \varphi_*(Y)$$

ve $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$\varphi_*(fX) = (f \circ \varphi^{-1}) \varphi_*(X)$$

dir. Buna göre,

$$D_X Y = \varphi_*^{-1} \left(D'_{\varphi_*(X)} \varphi_*(Y) \right)$$

şeklinde tanımlı D operatörünün M için bir konneksiyon olduğu gösterilir.

(i) $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$D_X (Y + Z) = \varphi_*^{-1} \left(D'_{\varphi_*(X)} \varphi_*(Y + Z) \right)$$

$$= \varphi_*^{-1} \left(D'_{\varphi_*(X)} \varphi_*(Y) + D'_{\varphi_*(X)} \varphi_*(Z) \right)$$

$$= D_X Y + D_X Z$$

olur.

(ii) $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$D_{X+Y} Z = \varphi_*^{-1} \left(D'_{\varphi_*(X+Y)} \varphi_*(Z) \right)$$

$$= \varphi_*^{-1} \left(D'_{\varphi_*(X) + \varphi_*(Y)} \varphi_*(Z) \right)$$

$$= \varphi_*^{-1} \left(D'_{\varphi_*(X)} \varphi_*(Z) + D'_{\varphi_*(Y)} \varphi_*(Z) \right)$$

$$= \varphi_*^{-1} \left(D'_{\varphi_*(X)} \varphi_*(Z) \right) + \varphi_*^{-1} \left(D'_{\varphi_*(Y)} \varphi_*(Z) \right)$$

$$= D_X Z + D_Y Z$$

bulunur.

(iii) $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$D_{fX} Y = \varphi_*^{-1} \left(D'_{\varphi_*(fX)} \varphi_*(Y) \right)$$

$$= \varphi_*^{-1} \left(D'_{(f \circ \varphi^{-1}) \varphi_*(X)} \varphi_*(Y) \right)$$

$$= \varphi_*^{-1} (f \circ \varphi^{-1}) \left(D'_{\varphi_*(X)} \varphi_*(Y) \right)$$

elde edilir. Diğer taraftan φ_* için bilinen özellikler

$$\varphi_*^{-1} : \chi(M') \longrightarrow \chi(M)$$

için de sağlanacağından,

$$\begin{aligned}
\varphi_*^{-1} (f \circ \varphi^{-1}) \left(D'_{\varphi_*(X)} \varphi_*(Y) \right) &= ((f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi) \varphi_*^{-1} \left(D'_{\varphi_*(X)} \varphi_*(Y) \right) \\
&= f \varphi_*^{-1} \left(D'_{\varphi_*(X)} \varphi_*(Y) \right) \\
&= f D_X Y
\end{aligned}$$

bulunur.

(iv) $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned}
D_X fY &= \varphi_*^{-1} \left(D'_{\varphi_*(X)} \varphi_*(fY) \right) \\
&= \varphi_*^{-1} \left(D'_{\varphi_*(X)} (f \circ \varphi^{-1}) \varphi_*(Y) \right) \\
&= \varphi_*^{-1} \left\{ \varphi_*(X) (f \circ \varphi^{-1}) \varphi_*(Y) + (f \circ \varphi^{-1}) \left(D'_{\varphi_*(X)} \varphi_*(Y) \right) \right\} \\
&= \varphi_*^{-1} \left\{ \varphi_*(X) (f \circ \varphi^{-1}) \varphi_*(Y) \right\} + \varphi_*^{-1} \left\{ (f \circ \varphi^{-1}) \left(D'_{\varphi_*(X)} \varphi_*(Y) \right) \right\} \\
&= \left\{ \varphi_*(X) (f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi \right\} Y + \left\{ (f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi \right\} \varphi_*^{-1} \left(D'_{\varphi_*(X)} \varphi_*(Y) \right) \\
&= (\varphi_*(X) (f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi) Y + f D_X Y
\end{aligned}$$

$\forall P \in M$ için

$$\begin{aligned}
\left\{ (\varphi_*(X)) (f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi \right\} (P) &= (\varphi_*(X) (f \circ \varphi^{-1})) (\varphi(P)) \\
&= \varphi_*(X) \Big|_{\varphi(P)} (f \circ \varphi^{-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varphi_*|_P(X_P)(f \circ \varphi^{-1}) \\
&= X_P(f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi) \\
&= X_P(f)
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$(\varphi_*(X))(f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi = X(f)$$

dir. O halde,

$$D_X fY = X(f)Y + fD_X Y$$

olur. Böylece D operatörü M üzerinde bir afin konneksiyondur. D nin tanımı gereğince,

$$\varphi_*(D_X Y) = \left(D'_{\varphi_*(X)} \varphi_*(Y) \right)$$

dir. Yani φ konneksiyon koruyan dönüşümdür. D nin tek olduğunu göstermek için de tersi kabul edilir. φ , konneksiyonu koruyacak şekilde, bir diğer \bar{D} konneksiyonu kullanılır. Bu taktirde $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\varphi_*(D_X Y) = D'_{\varphi_*(X)} \varphi_*(Y) \quad \text{ve} \quad \varphi_*(\bar{D}_X Y) = D'_{\varphi_*(X)} \varphi_*(Y)$$

olur. Böylece $\varphi_*(D_X Y) = \varphi_*(\bar{D}_X Y)$ ve φ_* dönüşümü birebir olduğundan,

$$D_X Y = \bar{D}_X Y$$

$$D = \bar{D}$$

olup, D tektir.

4. BÖLÜM

EĞRİLİKLER VE GAUSS DENKLEMİ

Tanım 4.1 (Riemann eğrilik tensörü). M n- boyutlu bir Riemann manifoldu olsun.

$$R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$
$$(X, Y, Z) \longrightarrow R(X, Y)Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X, Y]} Z$$

olarak tanımlanan $R(X, Y)Z$ ye Riemann eğrilik tensörü denir ve $R(X, Y, Z)$ ile de gösterilir.

Tanım 4.2 (Riemann – Christoffel eğrilik tensörü). M bir (yarı) Riemann manifoldu olsun.

$$K : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow C^\infty(M, R)$$
$$(X, Y, Z, W) \longrightarrow K(X, Y, Z, W) = \langle X, R(Z, W)Y \rangle$$

olarak tanımlanan 4.mertebeden kovaryant tensöre, M üzerinde Riemann-Christoffel eğrilik tensörü denir.

Tanım 4.3 (Ricci eğrilik tensörü). (M, g) bir n- boyutlu Riemann manifoldu ve $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, $\chi(M)$ nin bir bazı olsun.

$$\tilde{S} : \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$
$$X \longrightarrow \tilde{S}(X) = -\sum_{i=1}^n R(X_i, X)X_i$$

şeklinde tanımlanan \tilde{S} operatörüne, M nin Ricci operatörü denir. \tilde{S} yardımı ile tanımlanan M nin Ricci eğrilik tensörü

$$\begin{aligned}
Ric : \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow C^\infty(M, IR) \\
(X, Y) &\longrightarrow S(X, Y) = Ric(X, Y) = g(\tilde{S}(X), Y) \\
&= -g\left(\sum_{i=1}^n R(X_i, X)X_i, Y\right)
\end{aligned}$$

şeklinde bir $(0, 2)$ tensördür [12].

Teorem 4.1. Bir (yarı) Riemann manifoldu üzerinde bir tek Riemann konneksiyonu vardır.

İspat: Teoremin ispatı için M nin her bir U koordinat komşuluğunda bir D Riemann konneksiyonu ve bunun tek olduğunun gösterilmesi yeterlidir. U üzerinde lokal koordinat fonksiyonları yardımıyla tanımlanan vektör alanlarının cümlesi $\psi = \{ X_1, X_2, \dots, X_n \}$ ve $\langle X_i, X_j \rangle = g_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$ olsun. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ metrik tensörünün ψ bazına göre matrisi $g = [g_{ij}]$ olup, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bir iç çarpım fonksiyonu olduğundan, g regülerdir ve g^{-1} vardır. g^{-1} in bileşenleri $(g^{-1})_{ij}$ ve M üzerinde bir afin konneksiyon D olsun. D nin bir Riemann konneksiyonu ve tek olduğu gösterilmelidir.

$$D_{X_k} X_j = \sum_{i=1}^n \Gamma_{jk}^i X_i$$

olmak üzere;

$$\Gamma_{jk}^i : U \xrightarrow{C^\infty} IR$$

fonksiyonları tanımlansın. Bu fonksiyonlara Christoffel sembolleri denir. U üzerinde D yi vermek demek

$$D_{X_k} X_j = \sum_{i=1}^n \Gamma_{jk}^i X_i$$

eşitliğindeki Γ_{jk}^i fonksiyonlarının Riemann konneksiyonu şartlarını sağlayacak şekilde vermesidir. (3.1) ve (3.2) den,

$$\begin{aligned}
X_i[\langle X_r, X_j \rangle] + X_j[\langle X_r, X_i \rangle] - X_r[\langle X_i, X_j \rangle] &= \langle D_{X_i} X_r, X_j \rangle + \langle X_r, D_{X_j} X_i \rangle \\
&+ \langle D_{X_j} X_r, X_i \rangle + \langle X_r, D_{X_i} X_j \rangle \\
&- \langle D_{X_r} X_i, X_j \rangle - \langle X_i, D_{X_r} X_j \rangle \\
= \sum_{k=1}^n \{ &(\Gamma_{ri}^k - \Gamma_{ir}^k) \langle X_k, X_j \rangle + (\Gamma_{rj}^k - \Gamma_{jr}^k) \langle X_i, X_k \rangle + (\Gamma_{ji}^k + \Gamma_{ij}^k) \langle X_r, X_k \rangle \}
\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan $\forall f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned}
[X_k, X_s](f) &= X_k(X_s(f)) - X_s(X_k(f)) \\
&= X_k\left(\frac{\partial f}{\partial x_s}\right) - X_s\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_s} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial x_k} \\
&= 0
\end{aligned}$$

buradan da,

$$[X_k, X_s] = 0$$

bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned}
0 &= [X_k, X_s] \\
&= D_{X_k} X_s - D_{X_s} X_k \\
&= \sum_{t=1}^n \Gamma_{sk}^t X_t - \sum_{t=1}^n \Gamma_{ks}^t X_t \\
&= \sum_{t=1}^n (\Gamma_{sk}^t - \Gamma_{ks}^t) X_t
\end{aligned}$$

dir. $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ lineer bağımsız olduğundan,

$$\Gamma_{sk}^t - \Gamma_{ks}^t = 0$$

veya

$$\Gamma_{sk}^t = \Gamma_{ks}^t$$

bulunur. Buna göre,

$$X_i [g_{rj}] + X_j [g_{ri}] - X_r [g_{ij}] = 2 \cdot \sum_{k=1}^n \Gamma_{ji}^k g_{kr} \quad , \quad 1 \leq i, j, k, r \leq n$$

olur. Bu eşitlik matris formunda yazılır ve matris eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} [r_{ji}^k] &= \frac{1}{2} g^{-1} \left[X_i [g_{rj}] + X_j [g_{ri}] - X_r [g_{ij}] \right] \\ &= \frac{1}{2} g^{-1} \left(\frac{\partial g_{rj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ri}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_r} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{r=1}^n (g^{-1})_{kr} \left(\frac{\partial g_{rj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ri}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_r} \right) \right] \\ \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n (g^{-1})_{kr} \left(\frac{\partial g_{rj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ri}}{\partial x_j} \right) - \sum_{i=1}^n (g^{-1})_{ki} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_r} \end{aligned} \quad (4.1)$$

elde edilir. Böylece tanımlanan D nin (3.1) ve (3.2) şartlarını sağladığı görülür. O halde (4.1) ile tanımlanan D bir Riemann konneksiyonudur ve g metriği sayesinde tek türlü belirlenmiş olur.

Örnek 4.1. E^n de Riemann konneksiyonu D ve Öklid koordinat sistemi $\{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$ verilsin. Bu taktirde, $\chi(E^n)$ in bir bazı,

$$\{ X_1, X_2, \dots, X_n \}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} = X_i \quad , \quad 1 \leq i \leq n$$

olur . Buna göre,

$$[X_i, X_j] = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

ve

$$D_{X_i} X_k = 0 \quad 1 \leq i, k \leq n$$

$$D_{X_j} X_k = 0 \quad 1 \leq j, k \leq n$$

dir. O halde,

$$\begin{aligned} R(X_i, X_j)X_k &= D_{X_i} D_{X_j} X_k - D_{X_j} D_{X_i} X_k - D_{[X_i, X_j]} X_k \\ &= D_{X_i} 0 - D_{X_j} 0 - D_0 X_k \end{aligned}$$

olup

$$R(X_i, X_j)X_k = 0$$

ve buradan da,

$$\begin{aligned} K(X_s, X_k, X_i, X_j) &= \langle X_s, R(X_i, X_j)X_k \rangle \\ &= \langle X_s, 0 \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece E^n n- boyutlu Öklid uzayının eğriliği sıfırdır.

Teorem 4.2. Bir (yarı) Riemann manifoldu M ve M üzerindeki Riemann konneksiyonu D olsun. Aşağıdaki bağıntılar M üzerinde geçerlidir.

$$(i) R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0 \quad (\text{Birinci Bianchi özdeşliği})$$

$$(ii) K(X, Y, Z, W) = -K(Y, X, Z, W)$$

$$(iii) K(X, Y, Z, W) = -K(X, Y, W, Z)$$

$$(iv) K(X, Y, Z, W) = K(Z, W, X, Y)$$

İspat : (i) İspat için Jacobi özdeşliği ve $D_X Y - D_Y X = [X, Y]$ özelliği kullanılır.

$$R(X, Y)Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X, Y]} Z$$

$$R(Z, X)Y = D_Z D_X Y - D_X D_Z Y - D_{[Z, X]} Y$$

$$R(Y, Z)X = D_Y D_Z X - D_Z D_Y X - D_{[Y, Z]} X$$

olduğundan,

$$R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X$$

$$= D_X (D_Y Z - D_Z Y) - D_{[Y, Z]} X + D_Y (D_Z X - D_X Z) - D_{[Z, X]} Y + D_Z (D_X Y - D_Y X) - D_{[X, Y]} Z$$

$$= D_X [Y, Z] - D_{[Y, Z]} X + D_Y [Z, X] - D_{[Z, X]} Y + D_Z [X, Y] - D_{[X, Y]} Z$$

$$= [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]]$$

elde edilir ki sağ taraf Jacobi özdeşliğinden sıfırdır.

$$(ii) K(X, Y, Z, W) = \langle X, R(Z, W)Y \rangle$$

$$= \langle X, D_Z D_W Y - D_W D_Z Y - D_{[Z, W]} Y \rangle \quad (4.2)$$

burada $Z[\langle X, D_W Y \rangle] = \langle D_Z X, D_W Y \rangle + \langle X, D_Z D_W Y \rangle$ den,

$$\langle X, D_Z D_W Y \rangle = Z(\langle X, D_W Y \rangle) - \langle D_Z X, D_W Y \rangle$$

$$= Z[W[\langle X, Y \rangle] - \langle D_W X, Y \rangle] - \langle D_Z X, D_W Y \rangle$$

$$= Z[W[\langle X, Y \rangle]] - \langle D_Z D_W X, Y \rangle - \langle D_W X, D_Z Y \rangle - \langle D_Z X, D_W Y \rangle$$

$$\langle X, D_W D_Z Y \rangle = W[Z[\langle X, Y \rangle]] - \langle D_W D_Z X, Y \rangle - \langle D_Z X, D_W Y \rangle - \langle D_W X, D_Z Y \rangle$$

ve

$$\langle X, D_{[Z, W]} Y \rangle = [Z, W][\langle X, Y \rangle] - \langle D_{[Z, W]} X, Y \rangle$$

$$= Z[W[\langle X, Y \rangle]] - W[Z[\langle X, Y \rangle]] - \langle D_{[Z, W]} X, Y \rangle$$

değerleri (4.2) de yerlerine yazılıp uygun sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} K(X, Y, Z, W) &= - \langle D_Z D_W X - D_W D_Z X - D_{[Z, W]} X, Y \rangle \\ &= -K(Y, X, Z, W) \end{aligned}$$

bulunur.

$$(iii) R(Z, W)Y = D_Z D_W Y - D_W D_Z Y - D_{[Z, W]} Y$$

$$R(W, Z)Y = D_W D_Z Y - D_Z D_W Y - D_{[W, Z]} Y$$

dir. Diğer taraftan

$$[Z, W] = -[W, Z]$$

olduğundan,

$$D_{[Z, W]} Y = D_{-[W, Z]} Y = -D_{[W, Z]} Y$$

yazılır. O halde,

$$R(Z, W)Y = -R(W, Z)Y$$

dir. Buna göre,

$$\begin{aligned} K(X, Y, Z, W) &= \langle X, R(Z, W)Y \rangle \\ &= \langle X, -R(W, Z)Y \rangle \\ &= -K(X, Y, W, Z) \end{aligned}$$

elde edilir.

(iv) (i) den,

$$R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0$$

dır. Bu eşitliğin her iki yanını W ile skalar çarpılırsa,

$$\langle W, R(X, Y)Z \rangle + \langle W, R(Z, X)Y \rangle + \langle W, R(Y, Z)X \rangle = 0$$

veya

$$K(W, Z, X, Y) + K(W, Y, Z, X) + K(W, X, Y, Z) = 0$$

bulunur. Buradan birinci terimin dairesel permütasyonlarıyla,

$$K(Z, X, Y, W) + K(Z, W, X, Y) + K(Z, Y, W, X) = 0$$

$$K(X, Y, W, Z) + K(X, Z, Y, W) + K(X, W, Z, Y) = 0$$

$$K(Y, W, Z, X) + K(Y, X, W, Z) + K(Y, Z, X, W) = 0$$

yazılır. Bu son dört eşitliğin taraf tarafa toplanması ve (ii) ve (iii) şartlarının da kullanılması ile,

$$2K(W, X, Y, Z) + 2K(Z, Y, W, X) = 0$$

veya

$$K(W, X, Y, Z) = K(Y, Z, W, X)$$

bulunur. Buradan,

$$K(X, Y, Z, W) = K(Z, W, X, Y)$$

dir.

Tanım 4.4 (2–boyutlu uzayın Riemann anlamında eğriliği). Riemann anlamındaki bir manifold M ve bir $P \in M$ noktasındaki $T_M(P)$ tanjant uzayının iki boyutlu bir alt uzayı F olsun. F nin bir bazı $\{X, Y\}$ olmak üzere;

$$K(F) = \bar{K}(X, Y) = \frac{\langle X, R(X, Y)Y \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2} = \frac{K(X, Y, X, Y)}{\|X\|^2 \|Y\|^2 - (\langle X, Y \rangle)^2}$$

olarak tanımlanan $K(F)$ reel sayısına F nin Riemann anlamındaki eğriliği denir.

Teorem 4.3. Bir M Riemann manifoldunun $T_M(P)$ tanjant uzayının 2- boyutlu bir alt uzayı F olsun. $F = S_p\{X, Y\}$ ise

$$\bar{K}(X, Y) = \frac{K(X, Y, X, Y)}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2}$$

için

$$(i) \bar{K}(X, Y) = \bar{K}(Y, X)$$

$$(ii) \bar{K}(X, Y) = \bar{K}(rX, sY) \quad , \quad r \neq 0 \quad , \quad s \neq 0 \quad , \quad r, s \in \mathbb{R}$$

dir.

İspat : (i) $\bar{K}(X, Y) = \frac{K(X, Y, X, Y)}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2}$

ifadesinde

$$\bar{K}(X, Y) = \frac{-K(Y, X, X, Y)}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2} = \frac{K(Y, X, Y, X)}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2}$$

yazılır ve iç çarpımın simetri özelliğinden,

$$\bar{K}(X, Y) = \frac{K(Y, X, Y, X)}{\langle Y, Y \rangle \langle X, X \rangle - \langle Y, X \rangle^2}$$

veya

$$\bar{K}(X, Y) = \bar{K}(Y, X)$$

bulunur.

$$(ii) \bar{K}(rX, sY) = \frac{\langle K(rX, sY, rX, sY) \rangle}{\langle rX, rX \rangle \langle sY, sY \rangle - \langle rX, sY \rangle^2}$$

$$= \frac{\langle rX, R(rX, sY)sY \rangle}{r^2 s^2 (\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2)}$$

$$= \frac{r\langle X, D_{rX}D_{sY}sY - D_{sY}D_{rX}sY - D_{[rX,sY]}sY \rangle}{r^2s^2(\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2)}$$

eşitliğinde

$$\begin{aligned} D_{rX}(D_{sY}sY) &= D_{rX}s(D_YsY) \\ &= D_{rX}s^2D_Y Y \\ &= rs^2D_XD_Y Y \end{aligned}$$

yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \bar{K}(rX, sY) &= \frac{r\langle X, rs^2(D_XD_Y Y - D_YD_X Y - D_{[X,Y]}Y) \rangle}{r^2s^2(\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2)} \\ &= \frac{r^2s^2\langle X, R(X, Y)Y \rangle}{r^2s^2(\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2)} \\ &= \frac{K(X, Y, X, Y)}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece,

$$\bar{K}(rX, sY) = \bar{K}(X, Y)$$

dir.

Tanım 4.5(İndirgenmiş metrik tensör). M bir yarı-Riemann manifoldu ve M nin k - boyutlu bir alt manifoldu \bar{M} olsun. M nin \langle , \rangle metrik tensörünün $\chi(\bar{M})$ ye kısıtlanmasıyla elde edilen metrik tensöre, indirgenmiş metrik tensör ve \bar{M} ye de indirgenmiş metrik tensör altında yarı- Riemann manifoldu denir.

Tanım 4.6(Genelleştirilmiş Gauss denklemi). n - boyutlu bir Riemann manifoldu M ve M nin k - boyutlu ($k \leq n$) bir alt manifoldu \bar{M} olsun. $\chi(\bar{M})$ nin $\chi(M)$ deki

ortogonal komplemanı $\chi(\overline{M})^\perp$ ve M nin Riemann konneksiyonu D olsun.

$\chi(M) = \chi(\overline{M}) \oplus \chi(\overline{M})^\perp$ eşitliği gereğince, C^∞ olan $\forall X, Y \in \chi(\overline{M})$ için yazılan

$$D_{\overline{X}}\overline{Y} = \overline{D}(X, Y) + V(X, Y) \quad , \quad \overline{D}(X, Y) \in \chi(\overline{M}) \quad , \quad V(X, Y) \in \chi(\overline{M})^\perp$$

eşitliğine genelleştirilmiş Gauss denklemi denir. Buradaki $\overline{D}(X, Y)$ ve $V(X, Y)$ bileşenlerine $D_{\overline{X}}\overline{Y}$ nin, sırası ile teğetsel ve normal bileşenleri denir.

Teorem 4.4. M bir Riemann manifoldu ve $\overline{M} \subset M$ k - boyutlu alt manifold olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} \overline{D}: \chi(\overline{M}) \times \chi(\overline{M}) &\longrightarrow \chi(\overline{M}) \\ (X, Y) &\longrightarrow \overline{D}_X Y = \text{teg}(D_X Y) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı \overline{D} fonksiyonu \overline{M} nin Riemann konneksiyonudur [8].

İspat : 1) \overline{D} bir afin konneksiyondur.

(i) $\forall X, Y, Z \in \chi(\overline{M})$ için $\overline{D}_X(Y + Z) = \overline{D}_X Y + \overline{D}_X Z$

olduğu gösterilir. \overline{D} tanımından,

$$\begin{aligned} \overline{D}_X(Y + Z) &= \text{teg}(D_X(Y + Z)) \\ &= \text{teg}(D_X Y + D_X Z) \end{aligned}$$

dir. Diğer taraftan,

$$\text{teg}(D_X Y + D_X Z) = \text{teg}(D_X Y) + \text{teg}(D_X Z)$$

yazılır. O halde,

$$\begin{aligned} \overline{D}_X(Y + Z) &= \text{teg}(D_X Y) + \text{teg}(D_X Z) \\ &= \overline{D}_X Y + \overline{D}_X Z \end{aligned}$$

bulunur.

(ii) (i) ye benzer düşünceyle $\forall X, Y, Z \in \chi(\overline{M})$ için

$$\overline{D}_{X+Y}Z = \overline{D}_XZ + \overline{D}_YZ$$

olduğu görülür.

(iii) $\forall X, Y \in \chi(\overline{M})$ için $\forall f \in C^\infty(\overline{M}, \mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned}\overline{D}_{fX}Y &= \text{teg}(D_{fX}Y) \\ &= \text{teg}(fD_XY) \\ &= f \text{teg}(D_XY) \\ &= f \overline{D}_XY\end{aligned}$$

olur.

(iv) $\forall X, Y \in \chi(\overline{M})$ ve $\forall f \in C^\infty(\overline{M}, \mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned}\overline{D}_XfY &= \text{teg}(D_XfY) \\ &= \text{teg}(X(f)Y + fD_XY) \\ &= X(f)\text{teg}(Y) + f \text{teg}D_XY \\ &= X(f)Y + f\overline{D}_XY\end{aligned}$$

dir.

Böylece, \overline{D} fonksiyonu \overline{M} üzerinde bir afin konneksiyon olur.

2) \overline{D} , \overline{M} üzerinde Riemann konneksiyonudur. Bunun için aşağıdaki (v) ve (vi) şartlarının sağlandığı gösterilir.

(v) $\forall X, Y, Z \in \chi(\overline{M})$ için

$$X[\langle Y, Z \rangle] = \langle D_X Y, Z \rangle + \langle Y, D_X Z \rangle$$

dir.

Burada genelleştirilmiş Gauss denklemi uygulanırsa,

$$\begin{aligned} X[\langle Y, Z \rangle] &= \langle \overline{D}_X Y + V(X, Y), Z \rangle + \langle Y, \overline{D}_X Z + V(X, Z) \rangle \\ &= \langle \overline{D}_X Y, Z \rangle + \langle V(X, Y), Z \rangle + \langle Y, \overline{D}_X Z \rangle + \langle Y, V(X, Z) \rangle \end{aligned}$$

bulunur. $Z, Y \in \chi(\overline{M})$ ve $V(X, Y), V(X, Z) \in \chi(\overline{M})^\perp$ olduğundan,

$$\langle V(X, Y), Z \rangle = \langle Y, V(X, Z) \rangle = 0$$

dır. O halde,

$$X[\langle Y, Z \rangle] = \langle \overline{D}_X Y, Z \rangle + \langle Y, \overline{D}_X Z \rangle$$

dir.

(vi) $\forall X, Y \in \chi(\overline{M})$ için $[X, Y] \in \chi(\overline{M})$ olacaktır. X ve Y nin birer C^∞ genişletilmişleri X, Y ile gösterilir ve D nin M de Riemann metriği olduğu kullanılırsa,

$$[X, Y] = D_X Y - D_Y X$$

ve buradan da,

$$\text{teg}([X, Y]) = \text{teg}(D_X Y) - \text{teg}(D_Y X)$$

veya

$$\text{teg}[X, Y] = \overline{D}_X Y - \overline{D}_Y X$$

bulunur. $[X, Y] \in \chi(\overline{M})$ olduğundan,

$$\text{teg}([X, Y]) = [X, Y]$$

dir. Böylece,

$$[X, Y] = \bar{D}_X Y - \bar{D}_Y X$$

elde edilir.

Buradan \bar{D} , \bar{M} üzerinde Riemann konneksiyonudur.

Teorem 4.5. M bir Riemann manifoldu ve $\bar{M} \subset M$ alt manifoldu verilsin. M ve \bar{M} nin Riemann konneksiyonları sırasıyla, D ve \bar{D} olmak üzere;

$$\begin{aligned} V : \chi(\bar{M}) \times \chi(\bar{M}) &\longrightarrow \chi(\bar{M})^\perp \\ (X, Y) &\longrightarrow V(X, Y) = D_X Y - \bar{D}_X Y \end{aligned}$$

fonksiyonu $\chi(\bar{M})^\perp$ değerli, simetrik, 2- kovaryant tensördür.

İspat: V nin tanım cümlesinin $\chi(\bar{M}) \times \chi(\bar{M})$ ve değer cümlesinin de $\chi(\bar{M})^\perp$ olduğu genelleştirilmiş Gauss denkleminden açıktır. V nin $C^\infty(M, \mathbb{R})$ 2- lineer olduğu gösterilir. Bunun için, $\forall X, Y, Z \in \chi(\bar{M})$ ve $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$V(fX + gY, Z) = f V(X, Z) + g V(Y, Z)$$

ve

$$V(X, fY + gZ) = f V(X, Y) + g V(X, Z)$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned} V(fX + gY, Z) &= D_{fX+gY} Z - \bar{D}_{fX+gY} Z \\ &= f D_X Z + g D_Y Z - f \bar{D}_X Z - g \bar{D}_Y Z \\ &= f (D_X Z - \bar{D}_X Z) + g (D_Y Z - \bar{D}_Y Z) \\ &= f V(X, Z) + g V(Y, Z) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} V(X, fY + gZ) &= D_X(fY + gZ) - \bar{D}_X(fY + gZ) \\ &= X(f)Y + f D_X Y + X(g)Z + g D_X Z - X(f)Y - f \bar{D}_X Y - X(g)Z \\ &\quad - g \bar{D}_X Z \\ &= f (D_X Y - \bar{D}_X Y) + g (D_X Z - \bar{D}_X Z) \\ &= f V(X, Y) + g V(X, Z) \end{aligned}$$

dir. O halde V fonksiyonu $\chi(\bar{M})^\perp$ değerli 2- kovaryant tensördür.

Şimdi de V nin simetrik olduğu gösterilir.

$\forall X, Y \in \chi(\bar{M})$ için

$$\begin{aligned} V(X, Y) - V(Y, X) &= (D_X Y - \bar{D}_X Y) - (D_Y X - \bar{D}_Y X) \\ &= (D_X Y - D_Y X) - (\bar{D}_X Y - \bar{D}_Y X) \\ &= [X, Y] - [X, Y] \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$V(X, Y) = V(Y, X)$$

bulunur.

Tanım 4.7(Genelleştirilmiş Weingarten dönüşümü). M bir n - Riemann manifoldu ve \bar{M} de M nin bir k - boyutlu alt manifoldu olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} V : \chi(\bar{M}) \times \chi(\bar{M}) &\longrightarrow \chi(\bar{M})^\perp \\ (X, Y) &\longrightarrow V(X, Y) = D_X Y - \bar{D}_X Y \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı, $\chi(\bar{M})^\perp$ değerli, simetrik, 2- kovaryant tensöre \bar{M} nin ikinci temel tensörü veya genelleştirilmiş Weingarten dönüşümü denir [13].

Teorem 4.6. M bir n - Riemann manifoldu ve M nin k - boyutlu alt manifoldu \overline{M} olsun. M nin Riemann konneksiyonu D , eğrilik tensörü R ; \overline{M} nin Riemann konneksiyonu \overline{D} , eğrilik tensörü \overline{R} ve ikinci temel tensörü de V ise,
 $\forall X, Y, Z \in \chi(\overline{M})$ için

$$teg(R(X, Y)Z) = \overline{R}(X, Y)Z + teg\{ D_X V(Y, Z) - D_Y V(X, Z) \}$$

ve

$$\begin{aligned} nor(R(X, Y)Z) = & V(X, \overline{D}_Y Z) - V(Y, \overline{D}_X Z) - V([X, Y], Z) \\ & + nor\{ D_X V(Y, Z) - D_Y V(X, Z) \} \end{aligned}$$

dir.

İspat : $\forall X, Y, Z \in \chi(\overline{M})$ için

$$R(X, Y)Z = D_X(D_Y Z) - D_Y(D_X Z) - D_{[X, Y]}Z$$

eşitliğinde genelleştirilmiş Gauss denkleminde,

$$D_Y Z = \overline{D}_Y Z + V(Y, Z)$$

$$D_X Z = \overline{D}_X Z + V(X, Z)$$

$$D_{[X, Y]}Z = \overline{D}_{[X, Y]}Z + V([X, Y], Z)$$

değerleri yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z = & D_X(\overline{D}_Y Z + V(Y, Z)) - D_Y(\overline{D}_X Z + V(X, Z)) - \overline{D}_{[X, Y]}Z \\ & - V([X, Y], Z) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada tekrar genelleştirilmiş Gauss denklemi uygulanırsa,

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z = & \overline{D}_X \overline{D}_Y Z + V(X, \overline{D}_Y Z) + D_X V(Y, Z) - \overline{D}_Y \overline{D}_X Z - V(Y, \overline{D}_X Z) \\ & - D_Y V(X, Z) - \overline{D}_{[X, Y]}Z - V([X, Y], Z) \end{aligned}$$

$$= \bar{R}(X, Y)Z + D_x V(Y, Z) - D_y V(X, Z) + V(X, \bar{D}_y Z) - V(Y, \bar{D}_x Z) - V([X, Y], Z)$$

bulunur .Buradan,

$$teg\{R(X, Y)Z\} = \bar{R}(X, Y)Z + teg\{D_x V(Y, Z) - D_y V(X, Z)\}$$

ve

$$nor\{R(X, Y)Z\} = V(X, \bar{D}_y Z) - V(Y, \bar{D}_x Z) - V([X, Y], Z) + nor\{D_x V(Y, Z) - D_y V(X, Z)\}$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

1. Hacısalihoğlu, H. H. , Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometriler, Ankara, 1976.
2. Hacısalihoğlu, H. H. , Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, mat No:2, 1982.
3. Dubrovin, B. , Fomenko, A. , Novikov, S. , Modern Differential Geometry, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
4. Vanhecke, L. , Tricerri, F. , Geometry and Symmetry Advances in Differential Geometry, World Scientific, Singapore, 115-129, 1990.
5. O'Neill, B. , Semi Riemannian Geometry-With Applications to Relativity, New York Academic Pres Inc. 1983.
6. Sinha, B. B. , An Introduction to Modern Differential Geometry, Kalyani Publishers, New Delhi, 1982.
7. Schoen, R. , Yau, S. T. , Lectures on Differential Geometry, International pres, 1994.
8. Otsuki, T. , On General Connections, 1.Math. J. Okayama Univ.(9), 99-161, 1960.
9. Nomizu, K. , Sasaki, T. , Affine Differential Geometry, Cambridge University pres, Cambridge, 1994.
10. Otsuki, T. , On General Connections, 1.Math. J. Okayama Univ.(10), 113-121, 1961.
11. Hacısalihođlu, H. H. , Ekmekçi, N. , Tensör Geometri, Ankara, 2003.
12. Schouten, J. A. , Ricci-Calculus, Springer-Verlag, Berlin, 1954.
13. Lee, J. , Riemannian Manifolds, Springer, 1997.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Tülay ERDOĞAN KÖSE
Baba Adı : Cemal
Ana Adı : Münevver
Doğum Yeri : İstanbul
Doğum Tarihi : 18.01.1979

İlk ve orta öğrenimini Kayseri’de tamamladı. Erciyes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nden lisans diploması alarak 2001 yılında mezun oldu. Aynı yıl Sarız Yeşilkent Dadaloğlu Lisesi’nde Matematik Öğretmeni olarak göreve başladı. 2003 yılında Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans eğitimine başladı. Halen Aydınlikevler Burhan Dinçbal İlköğretim Okulu’nda Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır.

İletişim Bilgileri :

Adres : Esentepe Mah. Güneysu Sok. Saray Apt. No : 6 / 6
Melikgazi / KAYSERİ

e – posta : 4010730203@erciyes.edu.tr

GSM : 0 535 589 44 02