T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YAKIN-HALKALARDA ÖZEL ASAL İDEALLERİN KARAKTERİZASYONU VE İNŞASI ÜZERİNE

Tezi Hazırlayan
Akın Osman ATAGÜN

Tezi Yöneten
Prof. Dr. Hüseyin ALTINDİŞ

Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi

Kasım 2006
KAYSERİ

T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YAKIN-HALKALARDA ÖZEL ASAL İDEALLERİN KARAKTERİZASYONU VE İNŞASI ÜZERİNE

Tezi Hazırlayan
Akın Osman ATAGÜN

Tezi Yöneten
Prof. Dr. Hüseyin ALTINDİŞ

Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi

Kasım 2006
KAYSERİ

Prof. Dr. Hüseyin ALTINDİŞ danışmanlığında Akın Osman ATAGÜN tarafından hazırlanan **"Yakın-halkalarda Özel Asal İdeallerin Karakterizasyonu ve İnşası Üzerine"** adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Doktora** tezi olarak kabul edilmiştir.

01 / 11 /2006

JÜRİ:

Başkan: Prof. Dr. Dursun TAŞÇI

Üye : Prof. Dr. Hüseyin ALTINDİŞ

Üye : Prof. Dr. İlhan ÖZTÜRK

Üye : Prof. Dr. Mehmet ÖZDEMİR

Üye : Prof. Dr. Osman MUCUK

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 14.11.2006 tarih ve 2006/32-03 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

14./..11../.2006

N. Ayyıldız

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Nusret AYYILDIZ

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın başlangıcından sonuna kadar bilgisini ve desteğini esirgemeyen hocam Prof. Dr. Hüseyin ALTINDİŞ'e saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Değerli zamanlarını ayırarak tezin oluşmasına katkıda bulunan Prof. Dr. Mehmet ÖZDEMİR ve Prof. Dr. İlhan ÖZTÜRK'e teşekkür ederim.

Sevgili dostum Emin AYGÜN'e beraber geçen tüm keyifli çalışma saatlerinden dolayı, büyük moral ve motivasyon desteğinden dolayı teşekkür ederim.

Yaşamımın her anında özveriyle beni destekleyen ebeveynime, tüm bu çalışmalar esnasında çekilen maddi manevi sıkıntılarımı paylaşan, her durumda desteğini ve fedakarlığını esirgemeyen eşim Ebru TURAN ATAGÜN'e teşekkür ederim.

YAKIN-HALKALARDA ÖZEL ASAL İDEALLERİN KARAKTERİZASYONU VE İNŞASI ÜZERİNE

Akın Osman ATAGÜN

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Doktora Tezi, Kasım 2006
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hüseyin ALTINDİŞ

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci ve ikinci bölümlerde çalışmayla ilgili literatür ve temel bilgiler verildi. Üçüncü bölümde yakın-halkaların asal ve primitif idealleri detaylı olarak incelendi. Bu bölümde orijinal olarak, yakın-halkalarda 0-asallık, yarı-asallık ve 1-asallık için bazı karakterizasyonlar verildi ve yakın-halkaların direkt toplanan idealleri üzerinde 1-asallık ve 2-asallık kavramları için yeni sonuçlar elde edildi.

Halkalardaki asallığın farklı bir genelleştirmesi olan e-asallık kavramı 1990 yılında tanımlanmış olmasına rağmen 3-asallık ve e-asallık kavramları arasındaki ilişkiler hakkında yeterli çalışma bulunmamaktadır. Orijinal bir çalışmadan oluşan dördüncü bölümde, 3-asallık kavramının hangi şartlar altında e-asallığı gerektirdiği problemine çeşitli çözümler verildi. Ayrıca yine bu bölümde bir N yakın-halkası için, 0-tipinde ve 1-tipinde IFP N-gruplar adıyla, iki yeni N-grup tipi tanımlandı. Bu iki yapının halkalarda denk, ancak yakın-halkalarda farklı yapılar olduğu gösterildi ve örneklendirildi. 1-tipinde IFP N-gruplar, minimal N-altgruplar ve yakın-halkalarda sağ değişme özelliği kullanılarak yukarıdaki problem için bazı kullanışlı sonuçlar elde edildi ve örneklerle desteklendi. Bu sonuçlardan bazıları, sol w-weakly regüler yakın-halkalar üzerinde çalışıldı.

Anahtar Kelimeler: Yakın-halka, 3-asal, tam asal, e-asal, N-grup.

ON THE CHARACTERIZATIONS AND CONSTRUCTIONS OF PRIME IDEALS IN NEAR-RINGS

Akın Osman ATAGÜN

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

Ph. D. Thesis, November 2006

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Hüseyin ALTINDİŞ

ABSTRACT

This thesis consists of four chapters. The literature and basic informations about the study have been given in the first and second chapters. In the third chapter, prime and primitive ideals of near-rings have been investigated in details. In this chapter, as original, some characterizations of 0-primeness, semi-primeness and 1-primeness in near-rings have been given and some new results have been obtained for 1-primeness and 2-primeness on the direct summand ideals of near-rings.

Although, equiprime near-rings, which are another generalizations of primeness in rings, were defined in 1990, there are not enough studies on relations between the concepts 3-primeness and equiprimeness. In the fourth chapter, which consists of an original study, some answers to the question of when a 3-prime near-ring is equiprime have been given. Furthermore in this section, for a near-ring N two new N-group types have been defined and called IFP N-groups of type 0 and type 1. It has been showed that these two notions coincide in the case of rings, but these are different structures in near-rings and given some examples. Using the IFP N-groups of type 1, minimal N-subgroups and the right permutability property of near-rings, some useful results have been obtained to the question mentioned above and illustrated by several examples. Some of these results have been studied on the left w-weakly regular near-rings.

Key Words: Near-ring, 3-prime, completely prime, equiprime, N-group.

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR VE SEMBOLLER

N	Yakın-halka
N_o	N yakın-halkasının 0-simetrik kısmı
N_c	N yakın-halkasının sabit kısmı
Γ	N-grup
$M(\Gamma)$	Γ'dan Γ'ya tüm fonksiyonların yakın-halkası
$M_o(\Gamma)$	Γ'da sıfırı koruyan tüm fonksiyonların yakın-halkası
$M_c(\Gamma)$	Γ'da tüm sabit fonksiyonların yakın-halkası
N_d	N yakın-halkasının dağılmalı kısmı
R	Halka
$Hom(N,M)$	N'den M'ye tüm yakın-halka homomorfizmlerinin cümlesi
0_Γ	Γ'nın sıfır elemanı
π	Kanonik epimorfizm
$(0:\Gamma)$	Γ'nın sıfırlayanı
$\dot{\sum\limits_{k\in K}} I_k$	I_k ideallerinin direkt toplamı
$I \dot{+} J$	I ve J ideallerinin direkt toplamı
(X)	X cümlesi tarafından üretilen ideal
$(X)_l$	X cümlesi tarafından üretilen sol ideal
$(X)_N$	X cümlesi tarafından üretilen N-altgrup
N/I	Bölüm yakın-halkası
$D(N)$	Dağıtıcı cümle

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Halkaların bir genellemesi olan yakın-halkalara ilk adım, 1905 yılında Dickson [1] tarafından atılmıştır. O, tek yönlü dağılma özelliğine sahip cisimlerin varlığını ispatlamıştır, bugün bu cisimler yakın-cisim olarak isimlendirilmektedir.

Yakın-halkaların asal idealleri üzerine ilk çalışmalar, Van der Walt [2], Laxton [3], Ramakotaiah [4], Beidleman [5] ve Ramakotaiah ve Rao [6] tarafından yapılmıştır.

N bir yakın-halka ve I, N'nin bir ideali olsun.

(a) Eğer A ve B N'nin $AB \subseteq I$ olacak şekildeki idealleri ise, $A \subseteq I$ veya $B \subseteq I$ dır.

(b) Eğer $x, y \in N$ için $xNy \subseteq I$ ise, $x \in I$ veya $y \in I$ olur.

Halkalar veya yarı-grupların asal idealleri üzerine yapılan çalışmalarda, (a) ve (b) koşullarının denk olması, kolaylaştırıcı bir rol oynamaktadır. Ancak bu koşullar, yakın-halkalar üzerinde denk değillerdir. Ramakotaiah ve Rao [6], (a) koşulunu sağlayan I idealine N yakın-halkasının 0-tipinde asal ideali, (b) koşulunu sağlayan ideale ise 1-tipinde asal ideal adını vermişlerdir. Günümüzde bunlar, sırasıyla 0-asal ve 3-asal ideal olarak literatürde geçmektedir. Holcombe [7], 1-asal ve 2-asal ideal tanımlarını vermiştir. Booth, Groenewald ve Veldsman [8], halkalardaki asallığın yeni bir genelleştirmesi olan e-asal (equiprime) ideal kavramını tanımlamıştır. Reddy ve Murty [9], yakın-halkaların tam asal ideallerini çalışmışlardır.

Bu çeşitli asal ideal tanımları arasındaki ilişkiler, birçok matematikçi tarafından çalışılmış ve halen bu araştırmalar süregelmektedir. N bir yakın-halka ve I, N'nin bir ideali olsun. Bu durumda I, e-asal ise 3-asal, 3-asal ise 2-asal ve 1-asal ise 0-asaldır. N sıfır-simetrik iken, 2-asal ise 1-asaldır. Ayrıca I tam asal ise 3-asaldır. Bunların tersleri, N yakın-halkasının sıfır-simetrik olması durumunda dahi doğru değildir [10].

Bu doktora tezinde, ilk olarak 0-asal, yarı-asal ve 1-asallık için karakterizasyonlar verilmiştir. *N* yakın-halkasının bir direkt toplanan ideali üzerinde, 1-asallık ve 2-asallık çalışılmıştır.

1990 yılında e-asallık kavramı tanımlandığından bu yana, 3-asallığın ve tam-asallığın, hangi durumlarda e-asallığı gerektirdiği, açık bir problemdir. Son bölümde, bu problem için çözüm aranmıştır. Bunun için, ilk olarak, iki yeni *N*-grup tipi tanımlanmış, bunların halkalarda denk, ancak yakın-halkalarda farklı kavramlar olduğu ispatlanmıştır. Bu yeni *N*-grup tiplerinden ve *N* yakın-halkasının minimal *N*-altgruplarından faydalanılarak adı geçen problem için çözümler üretilmiştir. Daha sonra, sağ değişmeli yakın-halkalarda bu problemin bir çözümü verilmiş ve örneklerle desteklenmiştir. Son olarak, elde edilen sonuçlar, sol w-weakly regüler yakın-halkalar üzerinde çalışılmıştır.

2. BÖLÜM

TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde, temel bilgi niteliğinde olan ve diğer bölümlerde ortak olarak kullanılan yapılar verilecektir. Yakın-halka teorisi üzerine çalışan hemen hemen tüm matematikçiler için temel kaynak kabul edilen, ilk baskısı 1977 ve yenilenmiş baskısı 1983 yıllarında yapılan Günter Pilz'e ait "Near-rings" [11] kitabı, bu bölüm için temel kaynak olarak alınmıştır.

2.1. Temel Tanım ve Özellikler

Yakın-halkalar, genelleştirilmiş halkalardır. Halkalardan farklı olarak, bir yakın-halkada ilk işlem değişmeli olmak zorunda değildir ve ikinci işlemin birinci işlem üzerine tek yönlü dağılma özelliği olması yeterlidir. Bu tanım açık olarak aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 2.1.1.([11]) Bir N cümlesi, "+" ve "." şeklinde gösterilen iki ikili işlem ile aşağıdaki şartları sağlıyorsa, $(N,+,.)$ üçlüsüne bir yakın-halka denir.

a) $(N,+)$ değişmeli olması gerekmeyen bir grup,

b) $(N,.)$ bir yarı grup,

c) $\forall x,y,z \in N$ için $(x+y).z = x.z + y.z$

Burada c) şıkkında sağdan dağılma özelliği verildiğinden, bu şartları sağlayan $(N,+,.)$ üçlüsüne bir sağ yakın-halka denir. Eğer c) şıkkı yerine,

$$\forall x,y,z \in N \text{ için } x.(y+z) = x.y + x.z$$

alınırsa, bu şartları sağlayan $(N,+,.)$ üçlüsüne bir sol yakın-halka denir.

Yani, dağılma özelliğinin yönü, yakın-halkanın sağ veya sol olmasını belirler.

Bu çalışmada, kullanılan her yakın-halka terimi bir sağ yakın-halkayı ifade edecektir. Bazı yakın-halka örnekleri aşağıdadır.

Örnek 2.1.2. $(\Gamma,+)$ herhangi bir grup olsun.

$$M(\Gamma)=\{f:\Gamma\to\Gamma \mid f \text{ bir fonksiyon}\}$$

ile tanımlanan bu cümle, fonksiyonlarda toplama ve bileşke işlemleri altında bir yakın-halkadır.

Örnek 2.1.3. $(N,+)$ bir grup ve $\forall x,y\in N$ için çarpma işlemi;

$$xy=\begin{cases} x & ,y\neq 0 \\ 0 & ,y=0 \end{cases}$$

ile tanımlanırsa, bu işlemler altında N bir yakın-halkadır. Bu yakın-halka literatürde, bazen, aşikar yakın-halka adıyla karşımıza çıkmaktadır.

Örnek 2.1.4. Her grup için bir yakın-halka elde edilebilir. Gerçekten, eğer $(N,+)$ grubu üzerinde ikinci işlem, $\forall x,y\in N$ için,

$$xy=0$$

ile tanımlanırsa, $(N,+,\cdot)$ bir yakın-halkadır.

Örnekler 2.1.5. $(\Gamma,+)$ herhangi bir grup ve "0_Γ" ile bu grubun etkisiz elemanı gösterilsin. Bu durumda, fonksiyonlarda toplama ve bileşke işlemleri altında aşağıdakiler birer yakın-halkadır.

a) $M_0(\Gamma)=\{f:\Gamma\to\Gamma \mid f(0_\Gamma)=0_\Gamma\}$

b) $M_c(\Gamma)=\{f:\Gamma\to\Gamma \mid f \text{ sabit}\}$

c) $M_c^0(\Gamma)=\{f_\gamma:\Gamma\to\Gamma \mid \gamma\in\Gamma \text{ ve } f_\gamma(\delta)=\begin{cases} 0_\Gamma & ,\delta=0 \\ \gamma & ,\delta\neq 0 \end{cases}\}$

Özellikler 2.1.6. ([11]) N bir yakın-halka ise aşağıdaki özellikler vardır.

a) $\forall x\in N$ için, $0x=0$ dır.

b) $\forall x,y\in N$ için, $(-x)y=-xy$ dir.

İspat : a) $\forall x\in N$ için, sağdan dağılma özelliğinden,

$$0x=(0+0)x=0x+0x$$

ve dolayısıyla $0x = 0$ bulunur.

b) $\forall x, y \in N$ için, yine sağdan dağılma özelliği kullanılarak,

$$(-x)y = (0-x)y = 0y - xy = 0 - xy = -xy$$

elde edilir.

Not : Bir N yakın-halkasında, her zaman, $\forall x, y \in N$ için $x0 = 0$ ve $x(-y) = -xy$ sağlanmayabilir. Mesela, Örnek 2.1.2'de tanımlanan $M(\Gamma)$ yakın-halkasında, $f, g \in M(\Gamma)$ için,

$$f \circ 0 = 0$$

olması f 'nin orjinden geçmesiyle ve

$$f \circ (-g) = -(f \circ g)$$

olması ise f 'nin bir tek fonksiyon olması ile mümkündür.

Tanım 2.1.7. ([11]) N bir yakın-halka olsun.

a) $N_0 = \{n \in N \mid n0 = 0\}$ cümlesine N yakın-halkasının 0-simetrik kısmı,

b) $N_c = \{n \in N \mid n0 = n\} = \{n \in N \mid \forall n' \in N \text{ için } nn' = n\}$ cümlesine N yakın-halkasının sabit kısmı denir.

N_0 ve N_c 'de birer yakın-halkadır.

Örnek 2.1.8. ([11]) $(M(\Gamma))_0 = M_0(\Gamma)$ ve $(M(\Gamma))_c = M_c(\Gamma)$ dır. Gerçekten,

$$\begin{aligned}(M(\Gamma))_0 &= \{f \in M(\Gamma) \mid f \circ 0 = 0\} \\ &= \{f \in M(\Gamma) \mid f(0) = 0\} \\ &= M_0(\Gamma)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(M(\Gamma))_c &= \{f \in M(\Gamma) \mid f \circ 0 = f\} \\ &= \{f \in M(\Gamma) \mid f \text{ sabit}\} \\ &= M_c(\Gamma)\end{aligned}$$

dır.

$N = N_0$ ise N yakın-halkasına 0-simetrik ve $N = N_c$ ise N yakın-halkasına sabit yakın-halka denir. Örnek 2.1.8'den görüleceği gibi, $M_0(\Gamma)$ bir 0-simetrik ve $M_c(\Gamma)$ bir sabit yakın-halkadır.

Teorem 2.1.9. ([12]) Bir N yakın-halkası için $N = N_0 + N_c$ dir.

İspat: $n \in N$ için,

$$[n - (n0)]0 = [n + ((-n)0)]0 = n0 + ((-n)0)0 = n0 + (-n)0 = 0$$

Dolayısıyla,

$$n - (n0) \in N_0$$

dır. Aynı zamanda,

$$n0 \in N_c$$

olduğu görülebilir. O halde,

$$n = [n - (n0)] + (n0)$$

olduğundan ispat tamamdır.

$(G,+)$ bir grup, $(N,+)$ ve $(K,+)$'da iki alt grubu olsun. Eğer, $N \cap K = \{0\}$, $N + K = G$ ve $(N,+)$ alt grubu $(G,+)$'da normal ise, $(G,+)$ grubuna $(N,+)$ alt grubunun $(K,+)$ alt grubuyla bir yarı-direkt çarpımı adı verilir.

Sonuç 2.1.10. ([12]) Bir $(N,+,.)$ yakın-halkası için, $(N,+)$ grubu, $(N_0,+)$'nın $(N_c,+)$ ile bir yarı-direkt çarpımıdır.

İspat: $x \in N_0 \cap N_c$ olsun. Bu durumda,

$$x = n0$$

olacak şekilde $n \in N$ vardır ve

$$x0 = 0$$

dır. O halde,

$$0 = x0 = (n0)0 = n(00) = n0 = x$$

yani, $N_0 \cap N_c = \{0\}$ dır. Teorem 2.1.9'dan $N = N_0 + N_c$ dir. Son olarak, $(N_0,+)$'nın $(N,+)$'da normal olduğunu gösterelim. Eğer $m \in N_0$ ve $y \in N$ ise, bu durumda,

$$(y + m - y)0 = (y0) + (m0) + (-y)0 \qquad (1)$$

burada,

$$m0 = 0$$

olduğundan, (1) ifadesi,

$$= (y0) + (-y)0 = 0$$

halini alır. Bu ise, $(N_0,+)$ 'nın $(N,+)$ 'da normal olduğunu gösterir.

Tanım 2.1.11 ([11]) $(N,+,.)$ bir yakın-halka olsun.

a) Eğer $d \in N$ ve $\forall x, y \in N$ için,

$$d(x + y) = dx + dy$$

oluyorsa, $d \in N$ 'ye bir dağılmalı eleman denir. N yakın-halkasının tüm dağılmalı elemanlarının cümlesi N_d ile gösterilir.

b) Eğer $(N,+)$ değişmeli ise N 'ye bir abelyen yakın-halka, $(N,.)$ değişmeli ise, N 'ye bir komutatif yakın-halka, $(N,.)$ birimli ise N 'ye birimli bir yakın-halka denir. Eğer $N = N_d$ ise, N 'ye bir dağılmalı yakın-halka adı verilir.

c) Eğer $(N - \{0\},.)$ bir grup ise, N 'ye bir yakın-cisim denir.

2.2. N-Gruplar

Halkalarda modül kavramının, yakın-halkalara taşınmasıyla elde edilmiş olan N -grup, yani N üzerinde yakın-modül kavramı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Tanım 2.2.1. ([11]) $(\Gamma,+)$ bir grup ve N bir yakın-halka olsun.

$$\begin{aligned} \mu : N \times \Gamma &\to \Gamma \\ (n,\gamma) &\to n\gamma \end{aligned}$$

alalım. Eğer $\forall x, y \in N$ ve $\forall \gamma \in \Gamma$ için,

$$(x + y)\gamma = x\gamma + y\gamma$$

ve

$$(xy)\gamma = x(y\gamma)$$

şartları sağlanıyorsa, (Γ, μ) ikilisine bir N-grup, yani N üzerinde yakın-modül denir. Kısaca, N^{Γ} ile gösterilir. Eğer N, birimi 1 olan birimli bir yakın-halka ise, $\forall \gamma \in \Gamma$ için,

$$1\gamma = \gamma$$

şartını sağlayan Γ N-grubuna, bir üniter N-grup denir.

Örnekler 2.2.2. a) N bir yakın-halka olsun.

$$\begin{array}{rcl} \mu : N \times N & \to & N \\ (x, y) & \to & xy \end{array}$$

altında $(N, +)$ bir N-gruptur. Bu N-grup, kısaca N^{N} ile gösterilir.

b) Γ bir grup olsun. Bu durumda,

$$\begin{array}{rcl} \mu : M(\Gamma) \times \Gamma & \to & \Gamma \\ (f, \gamma) & \to & f(\gamma) \end{array}$$

altında, Γ bir $M(\Gamma)$-gruptur. Gerçekten, $\forall f, g \in M(\Gamma)$ ve $\forall \gamma \in \Gamma$ için,

$$(f+g)\gamma = (f+g)(\gamma) = f(\gamma) + g(\gamma) = f\gamma + g\gamma$$

ve

$$(fg)\gamma = (fg)(\gamma) = f(g(\gamma)) = f(g\gamma)$$

sağlanır.

N-grup kavramıyla ilgili bazı temel özellikler aşağıdadır.

Özellikler 2.2.3. N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olsun. Bu durumda,

a) $\forall \gamma \in \Gamma$ için, $0\gamma = 0_{\Gamma}$,

b) $\forall \gamma \in \Gamma$ ve $\forall x \in N$ için, $(-x)\gamma = -x\gamma$,

c) $\forall x \in N_0$ için, $x0_{\Gamma} = 0_{\Gamma}$,

d) $\forall \gamma \in \Gamma$ ve $\forall n \in N_c$ için, $n\gamma = n0_{\Gamma}$ dır.

İspat a) $\forall \gamma \in \Gamma$ için,

$$0\gamma = (0+0)\gamma = 0\gamma + 0\gamma$$

ve dolayısıyla $0\gamma = 0_{\Gamma}$ dır.

b) $\forall \gamma \in \Gamma$ ve $\forall x \in N$ için,

$$(-x)\gamma = (0-x)\gamma = 0\gamma - x\gamma = 0_\Gamma - x\gamma = -x\gamma$$

dır.

c) $\forall x \in N_0$ için,

$$x0_\Gamma = x(00_\Gamma) = (x0)0_\Gamma = 00_\Gamma = 0_\Gamma$$

dır.

d) $\forall \gamma \in \Gamma$ ve $\forall n \in N_c$ için,

$$n\gamma = (n0)\gamma = n(00_\Gamma) = n0_\Gamma$$

elde edilir.

2.3. Alt Yapılar

Tanım 2.3.1. N bir yakın-halka ve $(M,+)$ $(N,+)$'nın bir alt grubu olsun. Eğer, $\forall m_1, m_2 \in M$ için $m_1 m_2 \in M$ sağlanıyorsa, M'ye N'nin bir alt yakın-halkası denir.

Örnek 2.3.2. N_0 ve N_c, N yakın-halkasının alt yakın-halkalarıdır. Gerçekten, $\forall x, y \in N_0$ için,

$$(x-y)0 = x0 - y0 = 0 - 0 = 0$$

yani, $(N_0,+)$ $(N,+)$'nın bir alt grubudur. $\forall x, y \in N_0$ için,

$$(xy)0 = x(y0) = x0 = 0$$

dır. O halde $N_0 N_0 \subseteq N_0$ olur. Şimdi, $\forall x, y \in N_c$ için,

$$(x-y)0 = x0 - y0 = x - y$$

yani, $x - y \in N_c$ olur. Bu ise, $(N_c,+)$ grubunun $(N,+)$'nın bir alt grubu olduğunu gösterir. $\forall x, y \in N_c$ için,

$$(xy)0 = x(y0) = xy$$

dır. O halde $N_c N_c \subseteq N_c$ elde edilir.

Tanım 2.3.3. N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olsun. Γ'nın

$$N\Delta \subseteq \Delta$$

şartını sağlayan, bir Δ alt grubuna, Γ'nın bir N-altgrubu denir ve $\Delta \le_N \Gamma$ ile gösterilir.

2.4. Homomorfizm ve İdealler

Tanım 2.4.1. N ve M iki yakın-halka ve $h: N \to M$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in N$ için,

$$h(x + y) = h(x) + h(y)$$

ve

$$h(xy) = h(x)h(y)$$

şartları sağlanıyorsa, h dönüşümüne bir yakın-halka homomorfizmi denir.

Tanım 2.4.2. N bir yakın-halka, Γ ve Ψ iki N-grup olsun. Bu durumda, eğer $h: \Gamma \to \Psi$ dönüşümü, $\forall \gamma, \delta \in \Gamma$ için,

$$h(\gamma + \delta) = h(\gamma) + h(\delta)$$

ve

$$h(n\gamma) = nh(\gamma)$$

şartlarını sağlıyorsa, h dönüşümüne bir N-homomorfizm denir.

Bu tanımlarla beraber, monomorfizm, epimorfizm, izomorfizm ve otomorfizm kavramları için, yakın-halka teorisinde farklı bir tanım yoktur. Eğer N yakın-halkasından M yakın-halkasına bir monomorfizm, yani birebir homomorfizm, varsa N yakın-halkası M'ye gömülebilirdir denir. Aynı tanımlar, N-gruplar için de geçerlidir.

Önerme 2.4.3.([12]) N ve M iki yakın-halka ve $h: N \to M$ yakın-halka homomorfizmi olsun. Bu durumda,

a) $h(N)$ görüntüsü, M'nin bir alt yakın-halkasıdır.

b) Eğer T, M'nin bir alt yakın-halkası ise, bu taktirde $h^{-1}(T)$'de N'nin bir alt yakın-halkasıdır.

c) $h(N_0) \subseteq M_0$ dır.

d) $h(N_c) \subseteq M_c$ dir.

e) Eğer h bir izomorfizm ise, h^{-1}'de bir izomorfizmdir.

İspat **a)** $h(N)$'nin M'nin bir alt grubu olduğu açıktır. Şimdi, $a = h(x), b = h(y) \in h(N)$ alalım. O halde,

$$ab = h(x)h(y) = h(xy) \in h(N)$$

olur. Bu ise, $h(N)$'nin, M'nin bir alt yakın-halkası olduğunu gösterir.

b) T M'nin bir alt yakın-halkası olsun. $h^{-1}(T)$'nin N'nin bir alt grubu olduğu açıktır. Eğer, $h(x), h(y) \in T$ ise,

$$h(xy) = h(x)h(y) \in T$$

yani,

$$xy \in h^{-1}(T)$$

olur. Dolayısıyla $h^{-1}(T)$ N'nin bir alt yakın-halkasıdır.

c) $\forall n_0 \in N_0$ için,

$$h(n_0)0_M = h(n_0)h(0_N) = h(n_0 0_N) = h(0_N) = 0_M$$

olur. Bu ise, $h(N_0) \subseteq M_0$ olduğu anlamına gelir.

d) $\forall n_c \in N_c$ için,

$$h(n_c)0_M = h(n_c)h(0_N) = h(n_c 0_N) = h(n_c)$$

elde edilir. Buradan, $\forall n_c \in N_c$ için, $h(n_c) \in M_c$, yani $h(N_c) \subseteq M_c$ sonucuna ulaşılır.

e) $h : N - M$ bir izomorfizm olsun. Bu durumda, $h^{-1} : M - N$ bir grup izomorfizmidir. Şimdi, $u, v \in M$ alalım. Bu durumda, $h(x) = u$ ve $h(y) = v$ olacak şekilde tek $x, y \in N$ elemanları vardır. O halde,

$$\begin{aligned} h^{-1}(uv) &= h^{-1}(h(x)h(y)) \\ &= h^{-1}(h(xy)) \\ &= xy \\ &= h^{-1}(h(x))h^{-1}(h(y)) \\ &= h^{-1}(u)h^{-1}(v) \end{aligned}$$

olur. Bu ise, ispatı tamamlar.

Örnek 2.4.4. N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olsun. Bu durumda, $\forall \gamma \in \Gamma$ için,

$$\begin{aligned} h_\gamma : N &\to \Gamma \\ n &\to n\gamma \end{aligned}$$

dönüşümü, bir N-homomorfizmdir.

Tanım 2.4.5.([11]) N bir yakın-halka ve I N'nin bir normal alt grubu olsun. Bu durumda, eğer,

a) $IN \subseteq I$

b) $\forall x, y \in N$ ve $\forall i \in I$ için, $x(y+i) - xy \in I$

şartları sağlanıyorsa, I'ya N yakın-halkasının bir ideali denir ve $I \lhd N$ ile gösterilir. Eğer, sadece a) şartı sağlanıyorsa I N'nin bir sağ ideali, sadece b) şartı sağlanıyorsa I N'nin bir sol ideali adını alır ve sırasıyla $I \lhd_r N$ ve $I \lhd_l N$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.6. ([11]) N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olsun. Eğer Γ'nın bir Δ normal alt grubu, $\forall \gamma \in \Gamma$, $\forall \delta \in \Delta$ ve $\forall n \in N$ için,

$$n(\gamma + \delta) - n\gamma \in \Delta$$

şartını sağlıyorsa, Δ'ya Γ'nın bir ideali denir ve $\Delta \lhd_N \Gamma$ ile gösterilir.

Not: a) Bir N yakın-halkasının sol idealleri ile N^N'nin idealleri çakışıktır.

b) N bir yakın-halka ve $I \lhd N$ ise, N/I bölüm yakın-halkası, bölüm halkasında olduğu gibi,

$$N/I = \{n + I \mid n \in N\}$$

şeklinde tanımlanır. Benzer olarak, Γ bir N-grup ve $\Delta \lhd_N \Gamma$ için, Γ/Δ bölüm N-grubu tanımı verilebilir.

c) $\{0\}$ ve N, N yakın-halkasının idealleridir. Bunlara N'nin aşikar idealleri denir. Benzer şekilde, $\{0_\Gamma\}$ ve Γ, N yakın-halkasının Γ N-grubunun aşikar idealleridir.

d) N ve M iki yakın-halka ve $h \in Hom(N, M)$ ise,

$$çekh = \{n \in N \mid h(n) = 0_M\}$$

cümlesine h homomorfizminin çekirdeği denir.

Tanım 2.4.7.([11]) Eğer N yakın-halkasının, bir M alt yakın-halkası için, $MN \subseteq M$ ve $NM \subseteq M$ şartları sağlanıyorsa, M N yakın-halkasının bir invaryant alt yakın-halkasıdır denir. Burada N ’nin yönüne göre M sağ ya da sol invaryant alt yakın-halka adını alır.

Örnek 2.4.8.([11]) N bir yakın-halka olsun. Bu durumda,

a) $N_0 \lhd_l N$ dir, fakat $N_0 \lhd N$ olmak zorunda değildir.

b) N_c N ’nin bir invaryant alt yakın-halkasıdır, fakat ne sağ ne de sol ideali olmak zorunda değildir.

Bunların doğruluğu aşağıdaki gibi gösterilebilir:

a) $\forall x, y \in N$ ve $n \in N_0$ için,

$$(x + n - x)0 = x0 + n0 - x0 = x0 - x0 = 0$$

yani, N_0 N ’nin bir normal alt grubudur. Şimdi, $\forall x, y \in N$ ve $n \in N_0$ için,

$$[x(y + n) - xy]0 = x(y0 + n0) - xy0 = xy0 - xy0 = 0$$

olur. Bunun anlamı $\forall x, y \in N$ ve $n \in N_0$ için,

$$x(y + n) - xy \in N_0$$

olmasıdır. Bu ise $N_0 \lhd_l N$ olduğunu gösterir. Şimdi, $N_0 \lhd N$ olmak zorunda olmadığını göstermek için, bir örnek yeterlidir. R reel sayılar cümlesi ve $N = M(R)$ olsun. $1 \in M(R)$ ile birim dönüşüm gösterilirse, $1 \in N_0 = M_0(R)$ dir. $\phi \in M(R)$ dönüşümü,

$$\begin{aligned} \phi : R &\to R \\ x &\to 1_R \end{aligned}$$

ile tanımlansın. Bu durumda,

$$(1 \circ \phi)(0) = 1(1_R) = 1_R$$

yani,

$$1 \circ \phi \notin M_0(R) = N_0$$

olur. Bu ise, $M_0(R)$ ’nin $M(R)$ ’nin bir ideali olmadığını gösterir.

b) $\forall x \in N$ ve $\forall n \in N_c$ için,

$$(xn)0 = x(n0) = xn$$

yani, $NN_c \subseteq N_c$ dir. Yine, $\forall x \in N$ ve $\forall n \in N_c$ için,

$$(nx)0 = n0 = n = nx$$

olduğundan, $N_c N \subseteq N_c$ olur. O halde N_c N 'nin bir invaryant alt yakın-halkasıdır. N_c N 'nin genelde ne sağ ne de sol idealidir, çünkü $(N_c,+)$ $(N,+)$ 'nın genelde bir normal alt grubu değildir. Örneğin, $(\Gamma,+)$ abelyen olmayan bir grup ve $\gamma, \delta \in \Gamma$ elemanları $\gamma + \delta \neq \delta + \gamma$ olacak şekilde seçilsin. Şimdi, bir f_γ dönüşümü

$$\begin{aligned} f_\gamma : \Gamma &\to \Gamma \\ x &\to \gamma \end{aligned}$$

ile tanımlansın. Bu durumda, $f_\gamma \in M_c(\Gamma)$ 'dır. $1 \in M(\Gamma)$ birim dönüşüm ise, bu durumda,

$$(1 + f_\gamma - 1)(0_\Gamma) = 0_\Gamma + \gamma - 0_\Gamma = \gamma$$

olur, fakat

$$(1 + f_\gamma - 1)(\delta) = \delta + \gamma - \delta \neq \gamma$$

dır. Bu ise,

$$1 + f_\gamma - 1 \notin M_c(\Gamma)$$

olduğunu gösterir. Buradan, $M_c(\Gamma)$, $M(\Gamma)$ 'nın bir normal alt grubu değildir. O halde, $M_c(\Gamma)$ 'nın $M(\Gamma)$ 'da normal olması için gerek ve yeter şart Γ 'nın bir abel grubu olmasıdır.

Özellikler 2.4.9. ([11]) N bir yakın-halka ve Γ bir N -grup olsun. Bu durumda;

a) $L \triangleleft_l N$ ise $N_0 L \subseteq L$ dir.

b) $N = N_0$ olması için gerek ve yeter şart N yakın-halkasının her bir sol idealinin N^N 'nin bir N -alt grubu olmasıdır.

c) $N = N_0$ ise, Γ N -grubunun her Δ ideali, Γ 'nın bir N -alt grubudur.

d) $\forall \gamma \in \Gamma$ için, $N\gamma \leq_N \Gamma$ dır. Yani, $\forall \gamma \in \Gamma$ için, $N\gamma$ Γ N -grubunun bir N -alt grubudur.

e) $\forall \Delta \leq_N \Gamma$ için, $N0_\Gamma = N_c 0_\Gamma \subseteq \Delta$ dır. Dolayısıyla, $N0_\Gamma = N_c 0_\Gamma$ Γ N-grubunun tüm N-alt grupları içerisinde en küçük olanıdır.

Tanım 2.4.10. ([11]) N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olsun. N'nin (Γ'nın) aşikar olmayan ideali yoksa, N'ye (Γ'ya) basittir denir. Eğer Γ'nın $N0_\Gamma$ ve Γ dışında N-alt grubu yoksa, Γ'ya N-basittir denir.

$\{0\}$ ideali, bir N yakın-halkasının tüm ideallerinin cümlesinde daima minimal olduğundan, aşağıdaki tanımlar halka teorisinde olduğu gibidir.

Tanım 2.4.11. ([11]) N bir yakın-halka olsun. N'nin tüm sıfırdan farklı ideallerinin cümlesinde minimal olan ideale N'nin minimal ideali denir.

Benzer olarak, minimal sağ ve sol ideal tanımları verilebilir. Bu tanımların dualleri maksimal ideal tanımlarıdır.

Tanım 2.4.12. ([11]) N bir yakın-halka, Γ bir N-grup, Δ_1 ve Δ_2 Γ'nın herhangi iki alt cümlesi olsun. Bu durumda,

$$(\Delta_1 : \Delta_2)_N = \{n \in N \mid n\Delta_2 \subseteq \Delta_1\}$$

ile verilir. $\gamma \in \Gamma$ için, kısalık açısından, $(\{\gamma\} : \Delta) = (\gamma : \Delta)$ alınacaktır.

$$(0_\Gamma : \Delta)_N = \{n \in N \mid n\Delta \subseteq \{0_\Gamma\}\}$$

cümlesine $\Delta \subseteq \Gamma$'nın sıfırlayanı denir. Herhangi bir karışıklık içermeyen durumlarda, bu cümle $(0 : \Delta)$ ile gösterilecektir.

Özellikler 2.4.13. ([11]) N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olsun. Bu durumda;

a) Eğer Δ_1 Γ'nın herhangi bir alt grubu (normal alt grubu, N-altgrubu, ideali) ise, $(\Delta_1 : \Delta_2)$ cümlesi de, N^N'nin bir alt grubu (normal alt grubu, N-altgrubu, ideali) olur. Burada Δ_2 Γ'nın herhangi bir alt cümlesidir.

b) $\forall \gamma \in \Gamma$ için,

$$(0 : \gamma) \triangleleft_l N$$

dir.

c) $\forall \Delta \leq_N \Gamma$ için,

$$(0:\Delta) \triangleleft N$$

dir.

d) Δ, Δ_i $(i \in I)$ Γ'nın alt cümleleri olsunlar. Bu durumda,

$$\bigcap_{i \in I}(\Delta_i : \Delta) = (\bigcap_{i \in I}\Delta_i : \Delta)$$

ve

$$\bigcup_{i \in I}(\Delta_i : \Delta) \subseteq (\bigcup_{i \in I}\Delta_i : \Delta)$$

dır.

e) $\Delta \subseteq \Gamma$ ise,

$$(0:\Delta) = \bigcap_{\delta \in \Delta}(0:\delta)$$

dır.

f) N yakın-halkasının, herhangi iki Γ ve Γ' N-grupları N-izomorfik ise, bu durumda,

$$(0_{\Gamma} : \Gamma) = (0_{\Gamma'} : \Gamma')$$

dır.

Tanım 2.4.14. ([11]) N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olsun. Bu durumda, eğer $(0_{\Gamma} : \Gamma) = 0$ ise, Γ'ya bir faithful N-grup denir.

Özellikler 2.4.15. ([11]) N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olsun. Eğer, Γ N'nin bir faithful N-grubu ise, bu durumda;

a) Eğer Γ abelyen bir grup ise, N yakın-halkası da abelyendir.

b) Eğer $\forall n \in N$ ve $\forall \gamma, \delta \in \Gamma$ için,

$$n(\gamma + \delta) = n\gamma + n\delta$$

oluyorsa, bu taktirde $N = N_d$ dir.

Teorem 2.4.16. ([13]) Her N yakın-halkası için, N yakın-halkası $M(\Gamma)$ yakın-halkasına gömülebilir olacak şekilde en az bir Γ grubu vardır.

İspat: Γ, $(N,+)$ grubunu ihtiva eden bir grup olsun. $x \in N$ için,

$$\begin{array}{rcl} f_x : \Gamma & \longrightarrow & \Gamma \\ \gamma & \rightarrow & \begin{cases} x\gamma & ,\gamma \in N \\ x & ,\gamma \notin N \end{cases} \end{array}$$

ile tanımlayalım. Bu durumda, $\forall x, y \in N$ için,

$$f_x + f_y = f_{x+y}$$

ve

$$f_x \circ f_y = f_{xy}$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. O halde,

$$\begin{array}{rcl} h : N & \longrightarrow & M(\Gamma) \\ x & \rightarrow & f_x \end{array}$$

dönüşümü bir yakın-halka homomorfizmidir. Eğer

$$h(x) = h(y)$$

ise,

$$f_x = f_y$$

dir. Özel olarak, $\forall \gamma \in \Gamma - N$ için,

$$x = f_x(\gamma) = f_y(\gamma) = y$$

elde edilir. Buradan, h dönüşümü bir yakın-halka monomorfizmi, yani N yakın-halkası $M(\Gamma)$ yakın-halkasına gömülebilirdir.

Bu teoremin bir çok kullanışlı sonucu vardır. Bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir.

Sonuç 2.4.17. ([11]) N bir yakın-halka olsun.

a) Eğer N abelyen ise, N yakın-halkası $M(\Gamma)$ yakın-halkasına gömülebilir olacak şekilde bir Γ abel grubu vardır.

b) Eğer N sonlu ise, N yakın-halkası $M(\Gamma)$ yakın-halkasına gömülebilir olacak şekilde bir Γ sonlu grubu vardır.

c) Eğer N sıfır-simetrik ise, N yakın-halkası $M_0(\Gamma)$ yakın-halkasına gömülebilir olacak şekilde bir Γ grubu vardır.

d) Eğer N sabit bir yakın-halka ise, N yakın-halkası $M_c(\Gamma)$ yakın-halkasına gömülebilir olacak şekilde bir Γ grubu vardır.

Yakın-halkaların idealleri, ideallerin toplamları ve direkt toplamları ile ilgili bazı özellikler aşağıdadır.

Teorem 2.4.18. ([11]) N bir yakın-halka ve $(I_k)_{k\in K}$ N'nin ideallerinin bir ailesi olsun. Bu durumda, aşağıdaki cümleler denktir.

a) I_k'lerin elemanlarının tüm sonlu toplamlarının cümlesi,

b) Farklı I_k'lerin elemanlarının tüm sonlu toplamlarının cümlesi,

c) $(I_k,+)$ normal alt gruplarının toplamı,

d) $(N,+)$ grubunun, $\bigcup_{k\in K} I_k$ tarafından üretilen alt grubu,

e) $(N,+)$ grubunun, $\bigcup_{k\in K} I_k$ tarafından üretilen normal alt grubu,

f) N'nin $\bigcup_{k\in K} I_k$ tarafından üretilen ideali.

Tanım 2.4.19. ([11]) Teorem 2.4.18'de a)-f) cümlesine I_k $(k\in K)$ ideallerinin toplamı denir ve $\sum_{k\in K} I_k$ ile gösterilir.

Teorem 2.4.18'in d)-f) şartlarından aşağıdaki sonuç görülebilir.

Sonuç 2.4.20. ([11]) N bir yakın-halka olsun. Bu durumda;

a) N yakın-halkasının ideallerinin toplamı, yine N'nin bir idealidir.

b) İdeallerin toplama işlemi, birleşimli ve komutatif bir operasyondur.

Tanım 2.4.21. ([11]) N bir yakın-halka ve I_k $(k\in K)$ N'nin idealleri olsun. Eğer, $\sum_{k\in K} I_k$'nin herbir elemanı, farklı I_k'lerin elemanlarının bir sonlu toplamı olarak tek türlü yazılabiliyorsa, $\sum_{k\in K} I_k$ toplamına bir (iç) direkt toplam denir. Belirli olması açısından, bu toplam $\dot{\sum}_{k\in K} I_k$ ile gösterilecektir.

Özellik 2.4.22. ([11]) N bir yakın-halka olsun. Bu durumda, N'nin ideallerinin her bir $(I_k)_{k\in K}$ ailesi için aşağıdakiler denktir:

a) I_k 'lerin toplamı direkttir.

b) $(I_k,+)$ normal alt gruplarının toplamı direkttir.

c) $\forall k \in K$ için,

$$I_k \cap (\sum_{\substack{l \in K \\ l \neq k}} I_l) = \{0\}$$

dır.

Özellikler 2.4.23. ([11]) N bir yakın-halka, I_k $(k \in K)$ N 'nin ideallerinin, $\sum_{k \in K} I_k$ toplamı direkt olacak şekilde, bir ailesi olsun. Bu durumda, eğer $a, a' \in I_i$, $b, b' \in I_j$ ve $i \neq j$ ise,

a) $a + b = b + a$

b) $a'(a + b) = a'a$

c) $ab = a0$

d) Eğer N 0-simetrik ise, $ab = 0$ dır.

İspat a) $I_i \lhd N$ ve $I_j \lhd N$ olduğundan bunlar aynı zamanda N'nin birer normal alt grubudur. Dolayısıyla $a \in I_i$ ve $b \in I_j$ için,

$$a + b - a \in I_j$$

ve $b \in I_j$ olduğundan,

$$a + b - a - b \in I_j$$

dir. Benzer şekilde,

$$b - a - b \in I_i$$

ve $a \in I_i$ olduğundan,

$$a + b - a - b \in I_i$$

dir. $I_i \cap I_j = \{0\}$ olduğundan,

$$a + b - a - b = 0$$

ve buradan,

$$a + b = b + a$$

elde edilir.

b) $I_j \lhd N$ olduğundan, $a, a' \in I_i \subseteq N$ ve $b \in I_j$ için,

$$a'(a+b) - a'a \in I_j$$

dir. $I_i \lhd N$ olduğundan, burada

$$a'(a+b) \in I_i$$

ve

$$a'a \in I_i$$

dir. Dolayısıyla,

$$a'(a+b) - a'a \in I_i$$

dir. $i \neq j$ için $I_i \cap I_j = \{0\}$ olduğundan,

$$a'(a+b) - a'a = 0$$

ve buradan,

$$a'(a+b) = a'a$$

elde edilir.

c) $a \in I_i$ ve $b \in I_j$ için, $I_i \lhd N$ olduğundan,

$$ab \in I_i$$

ve

$$a0 \in I_i$$

dolayısıyla,

$$ab - a0 \in I_i$$

dir. $I_j \lhd N$ olduğundan, $a \in I_i \subseteq N$, $0 \in N$ ve $b \in I_j$ için,

$$a(0+b) - a0 \in I_j$$

yani,

$$ab - a0 \in I_j$$

dir. Yine, $i \neq j$ için $I_i \cap I_j = \{0\}$ olduğundan,

$$ab = a0$$

elde edilir.

Bu son ispattan, d) şıkkının ispatı hemen görülebilir. Çünkü, eğer N 0-simetrik ise, $a0 = 0$ dır.

Tanım 2.4.24. ([11]) N bir yakın-halka ve $I \triangleleft N$ olsun. Eğer $\exists J \triangleleft N$ için,

$$N = I \dot{+} J$$

oluyorsa, I idealine N yakın-halkasının bir direkt toplananı denir. Buradaki J idealine ise, I 'nın N 'deki direkt bileşeni adı verilir.

Teorem 2.4.25. ([11]) N bir yakın-halka ve $I \triangleleft N$ olsun. Eğer I bir direkt toplanan ise, I 'nın her bir ideali aynı zamanda N yakın-halkasının da bir idealidir.

Not: Genelde, bir N yakın-halkasında iki N-alt grubun toplamı, yine bir N-alt grup değildir. Fakat, Fain [14] aşağıdaki sonucu vermiştir:

Önerme 2.4.26. ([14]) N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olsun. Eğer, $\Delta \leq_N \Gamma$ ve $E \triangleleft_N \Gamma$ ise, bu durumda $\Delta + E \leq_N \Gamma$ dır. Yani, Γ N-grubunun bir N-alt grubu ve bir idealinin toplamı, Γ 'nın bir N-alt grubudur.

Bir N yakın-halkasında, her zaman $N = N_0 + N_c$ olduğu Teorem 2.1.9 ile verilmişti. Aşağıdaki önerme aynı durumun yakın-halkaların sağ idealleri için de geçerli olduğunu göstermektedir.

Önerme 2.4.27. ([11]) N bir yakın-halka ve $A \triangleleft_r N$ olsun. Bu durumda,

$$A = A \cap (N_0 + N_c) = A \cap N_0 + A \cap N_c = A_0 + A_c$$

dir.

İspat: Teorem 2.1.9'dan $\forall a \in A$ için,

$$a = n_0 + n_c$$

olacak şekilde, $\exists n_0 \in N_0$ ve $\exists n_c \in N_c$ vardır. $A \triangleleft_r N$ olduğundan,

$$n_c = n_c 0 = (n_0 + n_c)0 = a0 \in A$$

dolayısıyla, n_0 ve n_c A idealinin elemanlarıdır. Bu ise $A = A_0 + A_c$ olduğunu ispatlar.

Tanım 2.4.28. ([11]) $(A,\leq)$ kısmi sıralı bir cümle olsun. Eğer A cümlesinin boştan farklı her alt cümlesi en az bir minimal elemana sahip ise, A cümlesi minimum şartını sağlar denir. Eğer A cümlesinin elemanlarının her $a_1 \geq a_2 \geq ...$ zinciri sonlu adımdan sonra sonlanıyorsa, yani her bir $a_1 \geq a_2 \geq ...$ zinciri için, $a_n = a_{n+1} = ...$ olacak şekilde en az bir n doğal sayısı varsa, A cümlesine azalan zincir şartını (D.C.C) sağlar denir. Bu tanımda "$\leq$" yerine "$\geq$" alınırsa, minimum şartı yerine maksimum şartı ve azalan zincir şartı yerine artan zincir şartı (A.C.C) tanımı verilmiş olur.

3. BÖLÜM

YAKIN-HALKALARIN ASAL VE PRİMİTİF İDEALLERİ

Yakın-halkalar için asal ideal kavramı, birbirlerinden bağımsız olarak, Van der Walt [2] ve Ramakotaiah [4] tarafından ilk olarak ortaya atılmış ve üzerinde çeşitli çalışmalar yapılmaya başlanmıştır.

Bir çok matematikçi, asal ve primitif yakın-halkaların birbirlerine denk olmayan tanımlarını yapmıştır. Bu tanımlar arasındaki ilişkiler incelenmiş, hangi durumlarda bunların denk oldukları araştırılmış ve halen bu araştırmalar süregelmektedir. Tezin bu bölümünde, bu kavramlar, temel özellikleri ile verilmiştir.

N bir yakın-halka ve $A, B \subseteq N$ olsun. Bu durumda,

$$AB = \{ ab \mid a \in A, b \in B \}$$

ile tanımlanmıştır. Buradan bir n doğal sayısı için, A^n tanımı açıktır. N bir yakın-halka ve $A, B \lhd N$ olsun. Bu taktirde, AB çarpımı bir ideal olmayabilir. Hatta bu çarpım, $(N,+)$ grubunun bir alt yarı grubu dahi olmak zorunda değildir.

3.1. 0-Asal İdealler

Tanım 3.1.1. ([2]) N bir yakın-halka ve $P \lhd N$ olsun. Eğer $\forall I, J \lhd N$ için, $IJ \subseteq P$ olması, $I \subseteq P$ veya $J \subseteq P$ olmasını gerektiriyorsa, bu durumda P’ye N yakın-halkasının bir 0-asal ideali denir.

N bir yakın-halka ve $A \subseteq N$ olsun. (A) ile N’nin A cümlesi tarafından üretilen ideali gösterilmiştir. Kısalık açısından, bir $n \in N$ için, $(\{n\})$ yerine (n) gösterimi kullanılmıştır.

Aşağıdaki önerme 0-asal ideal kavramının bazı denkliklerini vermektedir.

Önerme 3.1.2. ([2]) N bir yakın-halka ve $P \lhd N$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

a) P bir asal idealdir.

b) $\forall I, J \lhd N$ için, $(IJ) \subseteq P$ olması, $I \subseteq P$ veya $J \subseteq P$ olmasını gerektirir.

c) $\forall i, j \in N$ için, $i \notin P$ ve $j \notin P$ ise, $(i)(j) \not\subset P$ dir.

d) $\forall I, J \lhd N$ için, $I \supset P$ ve $J \supset P$ ise, $IJ \not\subset P$ dir.

e) $\forall I, J \lhd N$ için, $I \not\subset P$ ve $J \not\subset P$ ise, $IJ \not\subset P$ dir.

İspat a) = b) : $P \lhd N$ asal ve $\forall I, J \lhd N$ için, $(IJ) \subseteq P$ olsun.

$$IJ \subseteq (IJ) \subseteq P$$

ve P asal olduğundan, Tanım 3.1.1'den $I \subseteq P$ veya $J \subseteq P$ dir. Dolayısıyla b) = a) durumu da elde edilmiş olur. a) $\Leftrightarrow$ e)'nin ispatı da yine Tanım 3.1.1'den açıktır.

a) = c) : $P \lhd N$ asal ve $(i)(j) \subseteq P$ olsun. Bu durumda, P asal olduğundan $(i) \subseteq P$ veya $(j) \subseteq P$ dir. Dolayısıyla $i \in P$ veya $j \in P$ elde edilir.

c) = d) : Kabul edelim ki c) sağlansın ve $I \supset P$ ve $J \supset P$ olacak şekilde $I, J \lhd N$ bulunsun. $i \in I - P$ ve $j \in J - P$ alalım. Bu durumda,

$$(i)(j) \not\subset P$$

ve dolayısıyla

$$IJ \not\subset P$$

elde edilir.

d) = e) : Kabul edelim ki (d) sağlansın ve $\forall I, J \lhd N$ için, $I \not\subset P$ ve $J \not\subset P$ olsun. $i \in I - P$ ve $j \in J - P$ alalım. Bu durumda,

$$(i) + P \supset P$$

ve

$$(j) + P \supset P$$

dir. O halde (d)'den,

$$((i) + P)((j) + P) \not\subset P$$

dir. Dolayısıyla,

$$(i'+p)(j'+p') \notin P$$

olacak şekilde $\exists i' \in (i), \exists j' \in (j)$ ve $\exists p, p' \in P$ vardır. Buradan,

$$i'(j'+p') - i'j' + i'j' + p(j'+p') \notin P$$

olur. Fakat $P \lhd N$ olduğundan,

$$i'(j'+p') - i'j' \in P$$

ve

$$p(j'+p') \in P$$

dir. Bu durumda,

$$i'j' \notin P$$

olmalıdır. Bu ise,

$$IJ \not\subset P$$

olduğunu gösterir.

Önerme 3.1.3. ([11]) N bir yakın-halka ve $\{P_\alpha\}_{\alpha \in A}$ kapsama altında tam sıralı olan, N 'nin asal ideallerinin bir ailesi olsun. Bu durumda,

$$\bigcap_{\alpha \in A} P_\alpha$$

ideali de N 'nin bir asal idealidir. Burada A bir indis cümlesidir.

Önerme 3.1.4. ([15]) N tüm idealleri kapsama altında tam sıralı olan bir yakın-halka olsun. Bu durumda $P \lhd N$ 'nin asal olması için gerek ve yeter şart $I \lhd N$ P 'yi içeren minimal ideal ve $\forall P \subset J \lhd N$ için, $IJ \not\subset P$ olmasıdır.

İspat : $P \lhd N$ asal olsun. Önerme 3.1.2'den $I \supset P$ ve $J \supset P$ olacak şekilde $\forall I, J \lhd N$ için $IJ \not\subset P$ dir. O halde ispatın bu yönü açıktır. Şimdi kabul edelim ki, $I \lhd N$ P 'yi içeren minimal ideal ve $\forall P \subset J \lhd N$ için, $IJ \not\subset P$ olsun. $\{P_\alpha\}_{\alpha \in A}$ N yakın-halkasının P 'yi içeren ideallerinin ailesini göstersin. I P 'yi içeren minimal ideal olduğundan,

$$I = \bigcap_{\alpha \in A} P_\alpha$$

dır. $J \supset P$ olduğundan, $\exists k \in A$ için $J = P_k$ dır. Kabulden,

$$IJ = \Big(\bigcap_{\alpha \in A} P_\alpha\Big) P_k \not\subset P$$

dir. O halde $\forall \alpha \in A$ için,

$$IJ = (\bigcap_{\alpha \in A} P_\alpha)P_k \subset P_\alpha P_k \not\subset P$$

dır. Burada $\forall \alpha \in A$ için P_α idealleri, N yakın-halkasının P 'yi içeren tüm ideallerini taradığından Önerme 3.1.2 (d)'den ispat tamamdır.

Önerme 3.1.5. ([16]) N bir yakın-halka olsun. Eğer $I \triangleleft N$ bir direkt toplanan ve $P \triangleleft N$ asal ise, bu durumda $P \bigcap I$ I 'da bir asal idealdir.

İspat: $J_1, J_2 \triangleleft I$ için, $J_1 J_2 \subseteq P \bigcap I$ olsun. Bu durumda, $J_1 J_2 \subseteq P$ ve $J_1, J_2 \triangleleft N$ dir. Çünkü $I \triangleleft N$ bir direkt toplanan ise Teorem 2.4.25'den I 'nın her bir ideali, aynı zamanda N yakın-halkasının da bir idealidir. O halde $P \triangleleft N$ asal olduğundan, $J_1 \subseteq P$ veya $J_2 \subseteq P$ dir. Dolayısıyla, $J_1 \subseteq P \bigcap I$ veya $J_2 \subseteq P \bigcap I$ dır.

Önerme 3.1.6. ([16]) N ve N' iki yakın-halka, $A, B \subseteq N$ ve $C, D \subseteq N'$ olsun. Eğer, $h : N - N'$ bir homomorfizm ise, bu durumda,

$$h(AB) = h(A)h(B)$$

ve

$$h^{-1}(CD) \supseteq h^{-1}(C)h^{-1}(D)$$

dir.

Bu önermenin ispatı halka teorisinde ki ile aynı olduğundan, ihmal edilmiştir.

Önerme 3.1.7. ([11]) N ve M iki yakın-halka ve $h : N - M$ bir yakın-halka epimorfizmi olsun. $A \triangleleft N$ ve $B \triangleleft M$ (sol ideal, N-alt grup) alalım. Bu durumda;

a) $h(h^{-1}(B)) = B$

b) $h^{-1}(h(A)) = A + çekh$

İspat a) $n \in N$ ve $m \in M$ alalım.

$$m \in h(h^{-1}(B)) \Leftrightarrow \exists n \in h^{-1}(B) : m = h(n)$$
$$\Leftrightarrow m \in B$$

b) $n \in N$ ve $m \in M$ alalım.

$$n \in h^{-1}(h(A)) \Leftrightarrow h(n) \in h(A)$$
$$\Leftrightarrow \exists a \in A : h(n - a) = h(n) - h(a) = 0$$
$$\Leftrightarrow \exists a \in A : n - a \in çekh$$
$$\Leftrightarrow n \in A + çekh$$

elde edilir.

Önerme 3.1.8. ([11]) N bir yakın-halka, $I \lhd N$, $I \subseteq P \lhd N$ ve $\pi : N \to N/I$ bilinen kanonik epimorfizm olsun. Bu durumda, P 'nin asal ideal olması için gerek ve yeter şart $\pi(P)$ 'nin asal ideal olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki, P asal ve $\overline{J_1}, \overline{J_2} \lhd N/I$ için, $\overline{J_1}\,\overline{J_2} \subseteq \pi(P)$ olsun. $J_i = \pi^{-1}(\overline{J_i}), i \in \{1,2\}$ alalım. Önerme 3.1.6 ve Önerme 3.1.7'den,

$$J_1 J_2 = \pi^{-1}(\overline{J_1})\pi^{-1}(\overline{J_2}) \subseteq \pi^{-1}(\overline{J_1}\,\overline{J_2}) \subseteq \pi^{-1}(\pi(P)) = P + I = P$$

dir. Buradan, P bir asal ideal olduğundan,

$$J_1 \subseteq P$$

veya

$$J_2 \subseteq P$$

ve dolayısıyla,

$$\overline{J_1} \subseteq \pi(\pi^{-1}(\overline{J_1})) = \pi(J_1) \subseteq \pi(P)$$

veya

$$\overline{J_2} \subseteq \pi(P)$$

elde edilir. Bu ise, $\pi(P)$ 'nin asal ideal olduğunu ispatlar.

Şimdi, kabul edelim ki $\pi(P)$ asal ve $J_1 J_2 \subseteq P$ olsun. Bu durumda, Önerme 3.1.6'dan

$$\pi(J_1)\pi(J_2) = \pi(J_1 J_2) \subseteq \pi(P)$$

dır. Buradan, $\pi(P)$ bir asal ideal olduğundan,

$$\pi(J_1) \subseteq \pi(P)$$

veya

$$\pi(J_2) \subseteq \pi(P)$$

olur. Bu durumda, ya

$$J_1 \subseteq J_1 + I = \pi^{-1}(\pi(J_1)) \subseteq \pi^{-1}(\pi(P)) = P + I = P$$

ya da benzer olarak

$$J_2 \subseteq P$$

elde edilir. Bu ise, P 'nin bir asal ideal olduğunu kanıtlar.

Tanım 3.1.9. ([17]) N bir yakın-halka olsun. Eğer N 'nin sıfır ideali asal ise N 'ye bir asal yakın-halka denir.

Örnek 3.1.10. ([11]) Eğer N bir sabit yakın-halka ($N = N_c$) ise, bu taktirde $(N,+)$ 'nın her normal alt grubu bir asal idealdir. O halde her bir sabit yakın-halka, bir asal yakın-halkadır.

Önerme 3.1.11. ([11]) N bir yakın-halka olsun. Eğer N bir basit yakın-halka ise, bu durumda N ya bir asal yakın-halka ya da bir sıfır-yakın-halkadır.

İspat: Eğer N bir basit yakın-halka ise, sıfır ve kendisinden başka ideali yoktur. O halde, asal ideallik tanımından,

$$\{0\}N = \{0\},\ \{0\}\{0\} = \{0\},\ N\{0\} = \{0\}$$

veya

$$NN = \{0\}$$

durumları olabilir. Buradan ya $\{0\}$ bir asal ideal ya da $N = \{0\}$ olduğu görülür.

Önerme 3.1.12. ([11]) N bir yakın-halka olsun. Eğer $I \lhd N$ bir maksimal ideal ise, bu durumda ya I asaldır ya da $N^2 \subseteq I$ dır.

İspat: Eğer $I \lhd N$ bir maksimal ideal ise, N/I bir basit yakın-halkadır. O halde Önerme 3.1.11'den ya I asaldır ya da N/I bir sıfır-yakın-halkadır ki bu, $N^2 \subseteq I$ olmasını gerektirir.

Sonuç 3.1.13. ([11]) N birimli bir yakın-halka olsun. Eğer $I \lhd N$ bir maksimal ideal ise I asaldır.

Burada belirtelim ki, bir N yakın-halkasının bir idealinin asal olması, maksimal olmasını gerektirmez. Bununla ilgili Beidleman [18], Laxton [3] ve Laxton ve Machin [19] makalelerinde bir çok örnek vardır.

3.1.1. Yarı-asal İdealler

Tanım 3.1.1.1. ([11]) N bir yakın-halka ve $I \lhd N$ olsun. Eğer $\forall J \lhd N$ için, $J^2 \subseteq I$ olması $J \subseteq I$ olmasını gerektiriyorsa, I'ya N yakın-halkasının bir yarı-asal ideali denir.

Asal ideal ve yarı-asal ideal tanımlarından da görüleceği gibi, her asal ideal aynı zamanda yarı-asaldır. Aşağıdaki önerme ile yarı-asal tanımına denk kavramlar Önerme 3.1.2'ye benzer şekilde verilmiştir.

Önerme 3.1.1.2. ([11]) N bir yakın-halka ve $I \lhd N$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

- **a)** I bir yarı-asal idealdir.
- **b)** $\forall J \lhd N$ için, $(J^2) \subseteq I$ ise $J \subseteq I$ dır.
- **c)** $\forall n \in N$ için, $(n)^2 \subseteq I$ ise $n \in I$ dır.
- **d)** $\forall J \lhd N$ için, $J \supset I$ ise $J^2 \not\subset I$ dır.
- **e)** $\forall J \lhd N$ için, $J \not\subset I$ ise $J^2 \not\subset I$ dır.

Bu önermenin ispatı, Önerme 3.1.2'nin ispatıyla benzer olduğundan ihmal edilmiştir.

Önerme 3.1.1.3. ([11]) N bir yakın-halka ve $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$ N'nin yarı-asal ideallerinin bir ailesi olsun. Bu durumda,

$$\bigcap_{\alpha \in A} I_\alpha$$

ideali de N'nin bir yarı-asal idealidir. Burada A bir indis cümlesidir.

İspat: Eğer $J \lhd N$ için, $J^2 \subseteq \bigcap_{\alpha \in A} I_\alpha$ ise, bu durumda $\forall \alpha \in A$ için, $J^2 \subseteq I_\alpha$ dır. $\forall \alpha \in A$ için, I_α idealleri yarı-asal olduğundan, $\forall \alpha \in A$ için $J \subseteq I_\alpha$ dır. Dolayısıyla, $J \subseteq \bigcap_{\alpha \in A} I_\alpha$ elde edilir.

Önerme 3.1.1.4.([15]) N tüm idealleri kapsama altında tam sıralı olan bir yakın-halka olsun. Bu durumda $I \lhd N$'nin yarı-asal olması için gerek ve yeter şart $J \lhd N$ I'yı içeren minimal ideal ise $J^2 \not\subset I$ dır.

İspat: Kabul edelim ki, $I \lhd N$ yarı-asal ve $J \lhd N$ I'yı içeren minimal ideal olsun. $J \supset I$ olduğundan, Önerme 3.1.1.2 d)'den $J^2 \not\subset I$ dır. Şimdi, $J \lhd N$ I'yı içeren minimal ideal iken $J^2 \not\subset I$ olsun. $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ N'nin I'yı içeren tüm ideallerinin sınıfı olsun. J'nin minimalliğinden,

$$J = \bigcap_{\alpha \in A} S_\alpha$$

dır. Buradan, $\forall \alpha \in A$ için,

$$J^2 \subset (S_\alpha)^2$$

dır. $J^2 \not\subset I$ kabulünden, $\forall \alpha \in A$ için,

$$(S_\alpha)^2 \not\subset I$$

elde edilir. Burada $\forall \alpha \in A$ için S_α idealleri, N'nin I'yı içeren tüm ideallerini taradığından Önerme 3.1.1.2 d)'den I bir yarı-asal idealdir.

Önerme 3.1.1.5. ([11]) N bir yakın-halka, $J \lhd N$ bir direkt toplanan ve $I \lhd N$ bir yarı-asal ideal ise, bu durumda $I \cap J$ J'de bir yarı-asal idealdir.

İspat: $S \lhd J$ için, $S^2 \subseteq I \cap J$ olsun. Bu durumda, $S^2 \subseteq I$ ve $S \lhd N$ dir. Çünkü Teorem 2.4.25'den direkt toplananın ideali, aynı zamanda yakın-halkanın da idealidir. Buradan, $I \lhd N$ bir yarı-asal ideal olduğundan, $S \subseteq I$ dır. Dolayısıyla $S \subseteq I \cap J$, yani $I \cap J$ J'de bir yarı-asal idealdir.

Tanım 3.1.1.6. ([11]) N bir yakın-halka olsun. Eğer N ’nin sıfır ideali yarı-asal ise N ’ye bir yarı-asal yakın-halka denir.

Yakın-halkaların her asal ideali aynı zamanda yarı-asal olduğundan aşağıdaki önerme açıktır.

Önerme 3.1.1.7. ([11]) Bir N yakın-halkasının asal ideallerinin herhangi kesişimleri birer yarı-asal idealdir.

Lemma 3.1.1.8. ([17]) N bir yakın-halka ve $X \subseteq N$ olsun. Eğer N 0-simetrik, I ve P, N ’nin $XI \subseteq P$ olan idealleri ise, bu durumda $(X)I \subseteq P$ dir.

İspat: $XI \subseteq P$ ise, $X \subseteq (P:I) = \{n \in N \mid nI \subseteq P\} \lhd N$ dir. Gerçekten, $(P:I)$ ’nın N'nin bir normal alt grubu olduğu kolaylıkla görülebilir. Şimdi ideallik şartlarının sağlandığını gösterelim. $\forall n, n' \in N$, $\forall a \in (P:I)$ ve $\forall i \in I$ için,

$$[n(n'+a) - nn']i = n(n'i + ai) - n(n'i)$$

burada $ai \in P$ ve P, N ’nin ideali olduğundan,

$$[n(n'+a) - nn']i \in P$$

yani,

$$n(n'+a) - nn' \in (P:I)$$

dır. Bu $(P:I)$ ’nın bir sol ideal olduğunu gösterir. Şimdi, $\forall n \in N$, $\forall a \in (P:I)$ ve $\forall i \in I$ için,

$$(an)i = a(ni)$$

burada, $I \lhd N$ ve N 0-simetrik olduğundan,

$$ni = n(i+0) - n0 \in I$$

o halde,

$$(an)i = a(ni) \in P$$

yani,

$$an \in (P:I)$$

dır. O halde $(P:I)$ N yakın-halkasının bir idealidir. Dolayısıyla,

$$(X) \subseteq (P:I)$$

yani,

$$(X)I \subseteq P$$

dir.

Aşağıdaki teoremle yakın-halkaların asal idealleri için bir karakterizasyon verilmiştir.

Teorem 3.1.1.9. ([17]) N 0-simetrik bir yakın-halka ve $P \lhd N$ olsun. Bu durumda P'nin asal ideal olması için gerek ve yeter şart $a(b) \subseteq P$ olacak şekilde ki $\forall a,b \in N$ için $a \in P$ veya $b \in P$ olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki, P asal ve $a,b \in N$ için $a(b) \subseteq P$ olsun. Bu durumda Lemma 3.1.1.8'den,

$$(a)(b) \subseteq P$$

dir. Bu durumda, P asal olduğundan $(a) \subseteq P$ veya $(b) \subseteq P$ olur. O halde buradan, $a \in P$ veya $b \in P$ elde edilir.

Kabul edelim ki $a(b) \subseteq P$ olacak şekilde ki $\forall a,b \in N$ için $a \in P$ veya $b \in P$ olsun. $a(b) \subseteq P$ ise yine Lemma 3.1.1.8'den

$$(a)(b) \subseteq P$$

dir. Burada kabul ile birlikte $(a)(b) \subseteq P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ olma durumu karşımıza çıkar. O halde Önerme 3.1.2'den P asaldır.

3.2. 1-Asal İdealler

Tanım 3.2.1. ([7]) N bir yakın-halka ve $P \lhd N$ olsun. Eğer N yakın-halkasının A ve B sol idealleri için, $AB \subseteq P$ olması $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ olmasını gerektiriyorsa, P'ye N'nin bir 1-asal ideali denir.

Lemma 3.2.2. N bir yakın-halka ve $P \lhd N$ olsun. Bu durumda P 1-asal ise, 0-asaldır.

İspat: $P \lhd N$ 1-asal ve $A,B \lhd N$ için, $AB \subseteq P$ olsun. A ve B aynı zamanda N yakın-halkasının sol idealleri ve P 1-asal olduğundan, Tanım 2.2.1'den $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$, yani P 0-asaldır.

Lemma 3.2.3. ([17]) N bir yakın-halka, $X \subseteq N$, $I \triangleleft_l N$ ve $P \triangleleft N$ olsun. Eğer $XI \subseteq P$ ise $(X)_l I \subseteq P$ dir. Burada $(X)_l$, N yakın-halkasının $X \subseteq N$ tarafından üretilen sol idealini göstermektedir.

İspat: $XI \subseteq P$ ise, $X \subseteq (P:I) = \{n \in N \mid nI \subseteq P\} \triangleleft_l N$ dir. Gerçekten, $(P:I)$ 'nın N'nin bir normal alt grubu olduğu kolaylıkla görülebilir. Şimdi sol ideallik şartının sağlandığını gösterelim. $\forall n, n' \in N$, $\forall a \in (P:I)$ ve $\forall i \in I$ için,

$$[n(n'+a) - nn']i = n(n'i + ai) - n(n'i)$$

burada $ai \in P$ ve $P \triangleleft N$ olduğundan,

$$n(n'+a) - nn' \in (P:I)$$

elde edilir. Bu ise, $(P:I) \triangleleft_l N$ olduğu anlamına gelir. O halde

$$(X)_l \subseteq (P:I)$$

yani,

$$(X)_l I \subseteq P$$

elde edilir.

Teorem 3.2.4. ([17]) N bir yakın-halka ve $P \triangleleft N$ olsun. Bu durumda, P 'nin 1-asal olması için gerek ve yeter şart $a(b)_l \subseteq P$ olacak şekilde ki $\forall a, b \in N$ için, $a \in P$ veya $b \in P$ olmasıdır.

İspat: P 1-asal ve $a, b \in N$ için $a(b)_l \subseteq P$ olsun. Lemma 3.2.3'den,

$$(a)_l (b)_l \subseteq P$$

dir. P 1-asal olduğundan, $(a)_l \subseteq P$ veya $(b)_l \subseteq P$ dır. Dolayısıyla $a \in P$ veya $b \in P$ elde edilir. Şimdi kabul edelim ki, $a(b)_l \subseteq P$ olacak şekilde ki $\forall a, b \in N$ için, $a \in P$ veya $b \in P$ olsun. Yine Lemma 3.2.3'den,

$$(a)_l (b)_l \subseteq P$$

dir. O halde $(a)_l (b)_l \subseteq P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ elde edilmiş olur. Kabul edelim ki, A ve B N yakın-halkasının $A \supset P$ ve $B \supset P$ olacak şekilde iki sol ideali olsun. $a' \in A - P$ ve $b' \in B - P$ alalım. Bu durumda,

$$(a')_l (b')_l \not\subseteq P$$

ve dolayısıyla

$$AB \not\subseteq P$$

elde edilir. O halde P 1-asaldır.

Önerme 3.2.5.([15]) N bir yakın-halka ve $\{P_\alpha\}_{\alpha \in A}$ kapsama altında tam sıralı olan, N 'nin 1-asal ideallerinin bir ailesi olsun. Bu durumda,

$$\bigcap_{\alpha \in A} P_\alpha$$

ideali de N 'nin bir 1-asal idealidir. Burada A bir indis cümlesidir.

İspat: Bir N yakın-halkasının her 1-asal ideali aynı zamanda asal olduğundan, Önerme 3.1.3'den

$$\bigcap_{\alpha \in A} P_\alpha$$

N nin bir asal idealidir. Kabul edelim ki, $I, J \lhd_l N$ için,

$$IJ \subseteq \bigcap_{\alpha \in A} P_\alpha$$

olsun. Bu durumda, $\forall \alpha \in A$ için $IJ \subseteq P_\alpha$ olur. $\forall \alpha \in A$ için P_α N nin bir 1-asal ideali olduğundan, $\forall \alpha \in A$ için $I \subseteq P_\alpha$ veya $J \subseteq P_\alpha$ dır. O halde

$$I \subseteq \bigcap_{\alpha \in A} P_\alpha$$

veya

$$J \subseteq \bigcap_{\alpha \in A} P_\alpha$$

olur. Dolayısıyla

$$\bigcap_{\alpha \in A} P_\alpha$$

N nin bir 1-asal idealidir.

Önerme 3.2.6.([15]) N tüm idealleri kapsama altında tam sıralı olan bir yakın-halka olsun. Bu durumda $P \lhd N$ 'nin 1-asal olması için gerek ve yeter şart $I \lhd_l N$ P 'yi içeren minimal sol ideal ve $\forall P \subset J \lhd_l N$ için, $IJ \not\subset P$ olmasıdır.

İspat: $P \lhd N$ 1-asal olsun. Bu durumda $I \supset P$ ve $J \supset P$ olacak şekilde $\forall I, J \lhd_l N$ için $IJ \not\subset P$ dir. Dolayısıyla $I \lhd_l N$ P yi içeren minimal sol ideal ve $J \supset P$ olacak şekilde $\forall J \lhd_l N$ için $IJ \not\subset P$ dir. Şimdi, kabul edelim ki $I \lhd_l N$ P yi içeren minimal sol ideal ve $\forall P \subset J \lhd_l N$ için, $IJ \not\subset P$ olsun. $\{P_\alpha\}_{\alpha \in A}$ N yakın-halkasının P yi içeren tüm sol ideallerinin ailesini göstersin. I P yi içeren minimal sol ideal olduğundan,

$$I = \bigcap_{\alpha \in A} P_\alpha$$

dır. $J \supset P$ olduğundan, $\exists k \in A$ için $J = P_k$ ve kabulden,

$$IJ = (\bigcap_{\alpha \in A} P_\alpha) P_k \not\subset P$$

dir. O halde $\forall \alpha \in A$ için,

$$IJ = (\bigcap_{\alpha \in A} P_\alpha) P_k \subset P_\alpha P_k \not\subset P$$

elde edilir. Burada $\forall \alpha \in A$ için P_α sol idealleri, N yakın-halkasının P yi içeren tüm sol ideallerini taradığından ispat tamamdır.

Lemma 3.2.7.([15]) N bir yakın-halka ve $I \lhd N$ bir direkt toplanan olsun. Bu durumda I 'nın her sol ideali, aynı zamanda N 'nin de sol idealidir.

İspat: $I \lhd N$ bir direkt toplanan olduğundan,

$$N = I \dot{+} J$$

olacak şekilde bir $J \lhd N$ vardır. $L \lhd_l I$ olsun. $\forall n, n' \in N$ ve $\forall l \in L$ için,

$$n(n' + l) - nn'$$

elemanını düşünelim. $N = I \dot{+} J$ olduğundan,

$$n = i + j$$

ve

$$n' = i' + j'$$

olacak şekilde $i, i' \in I$ ve $j, j' \in J$ vardır ve bunlar üzerinde Özellikler 2.4.23 sağlanır. Buna göre, $L \lhd_l I$ olduğundan,

$$\begin{aligned} n(n' + l) - nn' &= (i + j)(i' + j' + l) - (i + j)(i' + j') \\ &= i(i' + j' + l) + j(i' + j' + l) - i(i' + j') - j(i' + j') \\ &= i(i' + l) + jj' - ii' - jj' \\ &= i(i' + l) - ii' \in L \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $L \lhd_l N$ dir.

Aşağıdaki önerme, Önerme 3.1.5’de 0-asallık için belirtilen durumun, 1-asallık için de geçerli olduğunu göstermektedir.

Önerme 3.2.8.([15]) N bir yakın-halka olsun. Eğer $I \lhd N$ bir direkt toplanan ve $P \lhd N$ 1-asal ise, bu durumda $P \cap I$ I ’da 1-asal idealdir.

İspat: $J_1, J_2 \lhd_l I$ için $J_1 J_2 \subseteq P \cap I$ olsun. Bu durumda, $J_1 J_2 \subseteq P$ ve Lemma 3.2.7’den, $J_1, J_2 \lhd_l N$ dir. P 1-asal olduğundan, $J_1 \subseteq P$ veya $J_2 \subseteq P$ ve dolayısıyla, $J_1 \subseteq P \cap I$ veya $J_2 \subseteq P \cap I$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Tanım 3.2.9. ([17]) N bir yakın-halka olsun. Eğer N ’nin sıfır-ideali 1-asal ise N ’ye 1-asal yakın-halka denir.

Lemma 3.2.2 ile 1-asallığın 0-asallığı gerektirdiği verilmişti. Şimdi, bunun tersinin doğru olmadığı, yani 0-asallığın 1-asallığı gerektirmediği aşağıdaki örnekle gösterilebilir.

Örnek 3.2.10. ([10]) $(\Gamma, +)$ bir sonlu grup ve $\emptyset \neq \Delta$ Γ ’nın aşikar olmayan bir alt grubu olsun.

$$M_0(\Gamma) = \{f : \Gamma \to \Gamma \mid f(0) = 0\}$$

yakın-halkasını düşünelim.

$$K = \{f \in M_0(\Gamma) \mid f(\Delta) \subseteq \Delta\}$$

alınırsa, K $M_0(\Gamma)$ ’nın bir alt yakın-halkasıdır. K ’nın kendisinden ve sıfırdan farklı tek ideali,

$$A = (0 : \Delta)_K = \{k \in K \mid k\Delta = 0\}$$

dır. $A^2 \neq 0$ olduğundan, K 0-asal yakın-halkadır. K ’nın kendisinden farklı tek 1-asal ideali A ’dır. Dolayısıyla, K ’nın sıfır-ideali 1-asal değil, yani K 1-asal bir yakın-halka değildir.

Aşağıda, 1-asal yakın-halkalar için bir örnek verilmiştir.

Örnek 3.2.11. ([10]) N, Klein-4-grup $\{0,1,2,3\}$ üzerinde, $\forall x, y \in N$ için, ikinci işlemi

$$xy = \begin{cases} x & , y = 3 \\ 0 & , y \neq 3 \end{cases}$$

ile tanımlanan bir yakın-halka olsun. N 'nin tüm sol idealleri, $\{0\}$ ve N 'dir. $N^2 \neq 0$ olduğundan, $\{0\}$ N 'nin 1-asal ideali, yani N 1-asal bir yakın-halkadır.

3.3. 2-Asal İdealler

Tanım 3.3.1. ([20]) N bir yakın-halka ve $P \lhd N$ olsun. Eğer N 'nin $AB \subseteq P$ olacak şekilde ki her A ve B N-alt grupları için, $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ oluyorsa, P 'ye N 'nin bir 2-asal ideali denir. Eğer N 'nin sıfır-ideali 2-asal ise, N 'ye bir 2-asal yakın-halka adı verilir.

Aşağıdaki lemma, 0-simetrik bir yakın-halkanın 2-asal ideallerinin aynı zamanda 1-asal olduğunu verir.

Lemma 3.3.2. ([10]) N 0-simetrik bir yakın-halka ve $P \lhd N$ olsun. Eğer P 2-asal bir ideal ise, bu durumda P 1-asaldır.

İspat: N 0-simetrik, $P \lhd N$ 2-asal ve $A, B \lhd_l N$ için $AB \subseteq P$ olsun. N yakın-halkası 0-simetrik olduğunda, N 'nin her sol idealinin, aynı zamanda N 'nin bir N-alt grubu olduğunu gösterelim. $A \lhd_l N$ için, sol ideallik tanımından, $(A,+)$ $(N,+)$ 'nın bir alt grubudur. Şimdi, $NA \subseteq A$ olduğunu göstermeliyiz. $A \lhd_l N$ olduğundan, $\forall n \in N$ ve $\forall a \in A$ için,

$$na = n(a + 0) - n0 \in A$$

dır. Dolayısıyla $A \leq_N N$ dir. O halde, $AB \subseteq P$ ve $A, B \leq_N N$ dir. P 2-asal olduğundan, $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ elde edilir. O halde, P 1-asaldır.

Lemma 3.3.2'de N yakın-halkasının 0-simetrik olma şartı kaldırılamaz. Yani, $P \lhd N$ 0-simetrik olmayan bir N yakın-halkasının, 2-asal bir ideali ise, P 1-asal olmak zorunda değildir. Aşağıdaki örnek bu durumu kanıtlar.

Örnek 3.3.3. ([10]) N Klein-4-grup üzerinde, çarpma işlemi Tablo 1 ile verilen bir yakın-halka olsun.

.	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	0	0	0	2
3	1	1	1	3

Tablo 1

Bu durumda N 'nin tüm N-alt grupları N ve $I = \{0,1\}$ dir. $I^2 \neq \{0\}$ olduğundan, N 2-asal bir yakın-halkadır. Fakat, $J = \{0,2\} \triangleleft_l N$ ve $J^2 = \{0\}$, dolayısıyla N 1-asal bir yakın-halka değildir.

Bu durumun tersi genelde doğru değildir. Yani, 0-simetriklik durumu olsa dahi, bir yakın-halkada 1-asallık 2-asallığı gerektirmez.

Örnek 3.3.4. ([10]) N, Klein-4-grup $\{0,1,2,3\}$ üzerinde, $\forall x, y \in N$ için, ikinci işlemi

$$xy = \begin{cases} x & , y = 3 \\ 0 & , y \neq 3 \end{cases}$$

ile tanımlanan bir yakın-halka olsun. Örnek 3.2.11'den N yakın-halkası 1-asaldır. $I = \{0,1\}$ N 'nin $I^2 = \{0\}$ olan bir N-alt grubudur. Dolayısıyla, N 2-asal bir yakın-halka değildir.

Lemma 3.3.5. ([10]) N bir yakın-halka, $X \subseteq N$ sol invaryant ($NX \subseteq X$), $A \subseteq N$ ve $P \triangleleft N$ olsun. Eğer, $AX \subseteq P$ ise $(A)X \subseteq P$ dir.

İspat: $AX \subseteq P$ ise, $A \subseteq (P : X)_N$ dir. $(P : X)_N \triangleleft N$ olduğunu gösterelim. $\forall n, n' \in N$, $\forall a \in (P : X)_N$ ve $\forall x \in X$ için,

$$[n(n' + a) - nn']x = n(n'x + ax) - n(n'x) \in P$$

dir, çünkü $ax \in P$ ve $P \triangleleft N$ dir. O halde,

$$n(n' + a) - nn' \in (P : X)_N$$

dir. Şimdi, $\forall n \in N$, $\forall a \in (P:X)_N$ ve $\forall x \in X$ için, $NX \subseteq X$ ve $P \lhd N$ olduğundan,

$$anx = a(nx) \in P$$

olur. Yani, $(P:X)_N N \subseteq (P:X)_N$ elde edilir. Dolayısıyla, $(P:X)_N \lhd N$ dir. O halde, $(A) \subseteq (P:X)_N$ ve buradan $(A)X \subseteq P$ elde edilir.

N bir yakın-halka ve $X \subseteq N$ olsun. N yakın-halkasının X tarafından üretilen N-alt grubu $(X)_N$ ile gösterilecektir.

Lemma 3.3.6. ([17]) N 0-simetrik bir yakın-halka, $X \subseteq N$, $A \le_N N$ ve $P \lhd N$ olsun. Eğer, $XA \subseteq P$ ise, $(X)_N A \subseteq P$ dir.

İspat: $XA \subseteq P$ olduğundan, $X \subseteq (P:A)_N$ dir. $(P:A)_N \le_N N$ olduğunu gösterelim. $\forall u, v \in (P:A)_N$ ve $\forall a \in A$ için,

$$(u-v)a = ua - va \in P$$

olduğundan,

$$u - v \in (P:A)_N$$

yani, $(P:A)_N$ N nin bir alt grubudur. Şimdi, $\forall u \in (P:A)_N$, $\forall n \in N$ ve $\forall a \in A$ için,

$$(nu)a = n(ua) = np$$

olacak şekilde en az bir $p \in P$ vardır. Burada $P \lhd N$ ve N 0-simetrik olduğundan,

$$np = n(p+0) - n0 \in P$$

yani,

$$(nu)a \in P$$

olur. O halde,

$$N(P:A)_N \subseteq (P:A)_N$$

dir. Dolayısıyla, $(P:A)_N \le_N N$ elde edilir. Buradan $(X)_N \subseteq (P:A)_N$, yani $(X)_N A \subseteq P$ sonucuna ulaşılır.

Artık 2-asal ideal kavramını karakterize eden, aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.3.7. ([17]) N 0-simetrik bir yakın-halka ve $P \lhd N$ olsun. Bu durumda, P nin 2-asal olması için gerek ve yeter şart $a(b)_N \subseteq P$ olacak şekilde $a,b \in N$ için, $a \in P$ veya $b \in P$ olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki, P 2-asal ve $a,b \in N$ için, $a(b)_N \subseteq P$ olsun. Lemma 3.3.6 dan,

$$(a)_N (b)_N \subseteq P$$

dir. Burada P 2-asal olduğundan, $(a)_N \subseteq P$ veya $(b)_N \subseteq P$, yani $a \in P$ veya $b \in P$ elde edilir. Şimdi, $a(b)_N \subseteq P$ olacak şekilde $a,b \in N$ için, $a \in P$ veya $b \in P$ olsun. Kabul altında, Lemma 3.3.6'dan $(a)_N (b)_N \subseteq P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ olur. N yakın-halkasının $A \supset P$ ve $B \supset P$ olan iki N-alt grubunu alalım. $a' \in A - P$ ve $b' \in B - P$ olacak şekilde, a' ve b' elemanları vardır. Bu durumda, $(a')_N (b')_N \not\subseteq P$ ve dolayısıyla, $AB \not\subseteq P$ elde edilir. O halde P 2-asaldır.

Lemma 3.3.8.([15]) N 0-simetrik bir yakın-halka ve $I \lhd N$ bir direkt toplanan olsun. Bu durumda, I nın her bir I-alt grubu, aynı zamanda N nin bir N-alt grubudur.

İspat: $I \lhd N$ bir direkt toplanan olduğundan, $N = I \dot{+} J$ olacak şekilde bir $J \lhd N$ vardır. $A \le_I I$ olsun. A I nın bir alt grubu olduğundan, N nin de bir alt grubudur. $NA \subseteq A$ olduğunu göstermeliyiz. $\forall n \in N$ ve $\forall a \in A$ için,

$$na = (i + j)a = ia + ja$$

olacak şekilde $i \in I$ ve $j \in J$ vardır. N 0-simetrik ve $\forall a \in A$ için, $a \in I$ olduğundan, Özellikler 2.4.23 kullanılırsa, yukarıdaki eşitlikte $ja = 0$ olduğu görülür. O halde, $A \le_I I$ olduğundan,

$$na = ia \in A$$

yani $A \le_N N$ elde edilir.

Önerme 3.3.9.([15]) N 0-simetrik bir yakın-halka ve $P \lhd N$ 2-asal olsun. Eğer $I \lhd N$ bir direkt toplanan ise, bu taktirde $P \cap I$, I da 2-asal idealdir.

İspat: $A, B \leq_I I$ için $AB \subseteq P \cap I$ olsun. Bu durumda, $AB \subseteq P$ ve Lemma 3.3.8'den $A, B \leq_N N$ dir. P 2-asal olduğundan, $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$, dolayısıyla $A \subseteq P \cap I$ veya $B \subseteq P \cap I$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

3.4. 3-Asal İdealler

Tanım 3.4.1. ([17]) N bir yakın-halka ve $P \lhd N$ olsun. Eğer, $aNb \subseteq P$ olacak şekilde ki $\forall a, b \in N$ için, $a \in P$ veya $b \in P$ oluyorsa, P ye N nin bir 3-asal ideali denir. Eğer N nin sıfır-ideali 3-asal ise, N ye bir 3-asal yakın-halka denir.

Önerme 3.4.2. ([10]) N bir yakın-halka ve $P \lhd N$ 3-asal olsun. Bu durumda P 2-asaldır.

İspat: $P \lhd N$ 3-asal ve $a, b \in N$ için $aNb \subseteq P$ olsun. $\forall b \in N$ için $Nb \leq_N N$ dir. O halde,

$$(b)_N \subseteq Nb$$

dir. Buradan,

$$a(b)_N \subseteq aNb \subseteq P$$

olur. P 3-asal olduğundan,

$$a \in P \text{ veya } b \in P$$

elde edilir. Bu durumda Teorem 3.3.7 gereğince P 2-asaldır.

Sonuç 3.4.3. N 0-simetrik bir yakın-halka ve $P \lhd N$ 3-asal olsun. Bu durumda P 1-asal ve dolayısıyla 0-asaldır.

İspat: Sırasıyla Önerme 3.4.2, Lemma 3.3.2 ve Lemma 3.2.2 kullanılarak ispat görülür.

Bir N yakın-halkasının bir 2-asal ideali, aynı zamanda 3-asal olmak zorunda değildir. Aşağıdaki örnek bunu kanıtlar.

Örnek 3.4.4. ([10]) N $Z_3 = \{0,1,2\}$ grubu üzerinde çarpma işlemi $\forall x, y \in Z_3$ için,

$$xy = \begin{cases} x & , y = 2 \\ 0 & , y \neq 2 \end{cases}$$

ile tanımlanan bir yakın-halka olsun. Bu durumda N nin tüm N-alt grupları sadece $\{0\}$ ve N dir. $N^2 \neq \{0\}$ olduğundan, N 2-asal bir yakın-halkadır. Fakat,

$$1N1 = \{0\}$$

dolayısıyla N bir 3-asal yakın-halka değildir.

Önerme 3.4.5. ([17]) N bir yakın-halka ve $P \lhd N$ 3-asal olsun. Bu durumda, $\forall I \lhd N$ için $P \cap I$, I da 3-asaldır.

İspat: $P \cap I$ nın I da bir ideal olduğu açıktır. Kabul edelim ki, $a, b \in I$ için $aIb \subseteq P \cap I$ olsun. $aIb \subseteq P$ ve P 3-asal olduğundan, $a \in P$ veya $b \in P$ dir. $a, b \in I$ olduğundan, $a \in P \cap I$ veya $b \in P \cap I$ elde edilir. Bu ise, ispatı tamamlar.

Bir N yakın-halkası için,

$$D(N) = \{n(x+y) - ny - nx \mid x, y, n \in N\}$$

cümlesine dağıtıcı cümle adı verilir. Aşağıdaki önerme 0-asallığın 3-asallığı gerektirdiği bir durumu verir.

Önerme 3.4.6 ([21]) N bir yakın-halka olsun. Eğer $I \lhd N$ 0-asal ve $D(N) \subseteq I$ ise, bu durumda I N nin bir 3-asal idealidir.

İspat: $I \lhd N$ 0-asal ve $D(N) \subseteq I$ olsun. Kabul edelim ki, $a, b \in N$ için $aNb \subseteq I$ iken, $a \notin I$ ve $b \notin I$ olsun. $a + b \notin I$ dır. O halde,

$$n(a + b + n') - nn' - n(a + b) \notin I$$

olacak şekilde en az bir $n, n' \in N$ vardır. Fakat burada,

$$n(a + b + n') - nn' - n(a + b) \in D(N)$$

olduğundan bu $D(N) \subseteq I$ olması ile çelişir. Dolayısıyla, $aNb \subseteq I$ iken, $a \in I$ veya $b \in I$, yani I N nin bir 3-asal idealidir.

Not: N sıfırlayanında sıfırdan farklı bir eleman ihtiva eden 0-simetrik bir yakın-halka ise, bu durumda N nin sıfır-ideali 3-asal olamaz [21]. O halde bu koşullar altında ki bir N yakın-halkasında sıfır-ideali 0-asal ise 3-asal olamaz.

3.5. Tam Asal İdealler

Tanım 3.5.1. ([22]) N bir yakın-halka ve $P \lhd N$ olsun. Eğer $ab \in P$ olacak şekildeki $\forall a,b \in N$ için, $a \in P$ veya $b \in P$ oluyorsa, P ye N nin bir tam asal ideali denir. Eğer N yakın-halkasının sıfır-ideali tam asal ise, N ye bir tam asal yakın-halka denir.

Yakın-halkaların tam asal idealleri üzerine yapılan çalışmalar, 1979 yılına kadar uzanır. İlk olarak bu kavram "2-tipinde asal ideal" adıyla tanımlanmıştır [6].

Tanım 3.5.2. ([22]) N bir yakın-halka ve $P \lhd N$ olsun. Eğer $a^2 \in P$ olacak şekilde $\forall a \in N$ için, $a \in P$ oluyorsa, P ye N nin bir yarı tam asal ideali denir.

Teorem 3.5.3. ([22]) N bir yakın-halka ve P N nin $NP \subseteq P$ olan bir ideali olsun. Bu durumda P nin tam asal ideal olması için gerek ve yeter şart P nin 0-asal ve yarı tam asal ideal olmasıdır.

Sonuç 3.5.4. N 0-simetrik bir yakın-halka ve $P \lhd N$ olsun. Bu durumda P nin tam asal ideal olması için gerek ve yeter şart P nin 0-asal ve yarı tam asal ideal olmasıdır.

İspat: N 0-simetrik ve $P \lhd N$ ise $NP \subseteq P$ dir. Gerçekten, $\forall n \in N$ ve $\forall p \in P$ için $P \lhd N$ olduğundan,

$$np = n(p+0) - n0 \in P$$

dir. O halde Teorem 3.5.3'den ispat görülür.

Örnek 3.5.5. ([10]) $(N,+)$ mertebesi ≥ 3 olan bir grup olsun ve N üzerinde çarpma işlemi, $\forall x,y \in N$ için,

$$xy = \begin{cases} x & , y \neq 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases}$$

ile tanımlansın. Bu durumda, N yakın-halkasının sıfır-ideali düşünülür ve çarpma işleminin tanımı göz önüne alınırsa, $xy = 0$ olacak şekilde $\forall x,y \in N$ için, $x = 0$ veya $y = 0$ olduğu görülür. O halde N bir tam asal yakın-halkadır.

Önerme 3.5.6. N bir yakın-halka ve $P \lhd N$ olsun. Eğer P tam asal ise 3-asaldır.

İspat: $a,b \in N$ için $aNb \subseteq P$ olsun. O halde

$$aab \in P$$

dir. Burada P tam asal olduğundan $a \in P$ veya $b \in P$ elde edilir. Dolayısıyla P 3-asaldır.

3.6. e-Asal İdealler

e-asal idealler ilk olarak 1990 yılında tanımlanmış olup bir halka üzerinde e-asallık ile asallık kavramı birbirine denktir [8].

Tanım 3.6.1. ([8]) N bir yakın-halka olsun. Aşağıdaki koşullar altında N ye bir e-asal yakın-halka adı verilir.

a) Sıfırdan farklı $\forall x, y \in N$ için, $xNy \neq 0$ ve

b) Eğer $x, y \in N$ ve $0 \neq A$ N nin bir invaryant alt grubu ise, $\forall a \in A$ için $ax = ay$ iken $x = y$.

Eğer $P \lhd N$ ve N/P bir e-asal yakın-halka ise, P ye N nin bir e-asal ideali denir.

Aşağıdaki lemma ile, e-asallık için alternatif bir tanım verilmiştir.

Lemma 3.6.2. ([8]) N bir yakın-halka olsun. Bu durumda, aşağıdakiler denktir:

a) N bir e-asal yakın-halkadır.

b) (i) Sıfırdan farklı $\forall x, y \in N$ için, $xNy \neq 0$

(ii) Eğer $x, y \in N$, $0 \neq a \in N$ ve $\forall n \in N$ için, $anx = any$ ise $x = y$ dir.

c) Eğer $x, y \in N$, $0 \neq a \in N$ ve $\forall n \in N$ için, $anx = any$ ise $x = y$ dir.

İspat a) ⇒ b): N bir e-asal yakın-halka ise, Tanım 3.6.1'den, $x, y \in N$, $0 \neq a \in N$ ve $\forall n \in N$ için, $anx = any$ ise $x = y$ olduğunu göstermek yeterlidir. $a \neq 0$ ve N e-asal olduğundan $aNa \neq 0$, dolayısıyla $aN \neq 0$ dır. Şimdi, tümevarım yöntemi kullanılarak, A_k şu şekilde tanımlansın: $A_0 = aN$ ve eğer A_{k-1} tanımlıysa,

$$A_k = \left\{ \sum_i \delta_i u_i \;\middle|\; \delta_i = \pm 1, u_i \in A_{k-1} \right\} \cup \left\{ nu \;\middle|\; n \in N, u \in A_{k-1} \right\}$$

olsun. $A=\bigcup A_k$, N nin bir invaryant alt grubudur ve $0\neq aN\subseteq A$ dır. $\forall u\in A$ için, $ux=uy$ dir. N bir e-asal yakın-halka olduğundan Tanım 3.6.1'den $x=y$ dir.

b) = a): $0\neq A$ N yakın-halkasının bir invaryant alt grubu ve kabul edelim ki $x,y\in N$ ve $\forall a\in A$ için $ax=ay$ olsun. $a\neq 0$ seçelim. A invaryant olduğundan, $\forall n\in N$ için $an\in A$ ve dolayısıyla $anx=any$ dir. O halde $x=y$ elde edilir.

c) = b): Öncelikle belirtelim ki c) şartı 0-simetrikliği gerektirir. Gerçekten, eğer $a\in N$ ve $a0\neq 0$ ise, bu durumda,

$$(a0)n(a0)=(a0)n0$$

olması c) den $a0=0$ çelişkisini getirir. O halde N 0-simetriktir. Şimdi kabul edelim ki $x\neq 0$ için $xNy=0$ olsun. Bu durumda $\forall n\in N$ için,

$$xny=0=xn0$$

ve buradan $y=0$ elde edilir.

Tanım 3.6.1 ve Lemma 3.6.2'den N yakın-halkasının e-asal idealleri için aşağıdaki karakterizasyon elde edilir.

Sonuç 3.6.3. ([8]) N bir yakın-halka ve $P\lhd N$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

a) P N nin bir e-asal idealidir.

b) Eğer $a\in N-P$, $x,y\in N$ ve $\forall n\in N$ için $anx-any\in P$ ise $x-y\in P$ dir.

Lemma 3.6.4. ([8]) N bir e-asal yakın-halka ise, 0-asaldır.

İspat: N bir e-asal yakın-halka ve $0\neq A,B\lhd N$ olsun. Bu durumda, $0\neq a\in A$ ve $0\neq b\in B$ için $anb\neq 0$ olacak şekilde en az bir $n\in N$ vardır. $anb\in AB$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $AB\neq 0$ dır. O halde Önerme 3.1.2 d) den N bir 0-asal yakın-halkadır.

Lemma 3.6.2 c) = b) ispatından, herhangi bir e-asal yakın-halkanın aynı zamanda 0-simetrik olduğu görüldü. Aşağıdaki teorem e-asal yakın-halkaların diğer bir karakterizasyonunu vermektedir.

Teorem 3.6.5. ([20]) N bir yakın-halka olsun. Bu durumda, aşağıdakiler denktir:

a) N bir e-asal yakın-halkadır.

b) N nin her $0 \neq A$ sağ invaryant $(AN \subseteq A)$ alt grubu için, eğer $x, y \in N$ ve $\forall a \in A$ için, $ax = ay$ oluyorsa, $x = y$ dir.

c) N nin her A invaryant alt grubu için, eğer $x, y \in N$ ve $\forall a \in A$ için, $ax = ay$ oluyorsa, $x = y$ dir.

İspat a) $\Rightarrow$ **b):** N bir e-asal yakın-halka ve $0 \neq A$ N nin bir sağ invaryant alt grubu olsun. Kabul edelim ki, $x, y \in N$ ve $\forall a \in A$ için $ax = ay$ olsun. $0 \neq b \in A$ alalım. $bN \subseteq A$ olduğundan $\forall n \in N$ için $bnx = bny$ dir. O halde N e-asal olduğundan $x = y$ elde edilir.

b) $\Rightarrow$ **c):** İnvaryantlık, sağ invaryantlığı gerektirdiğinden ispatın bu yönü açıktır.

c) $\Rightarrow$ **a):** $0 \neq a \in N$, $x, y \in N$ ve $\forall n \in N$ için $anx = any$ olsun. Öncelikle $N_c = 0$ yani N nin 0-simetrik olduğunu gösterelim. Eğer $N_c \neq 0$ ise, N_c N nin bir invaryant alt grubudur ve $\forall r, s \in N$, $\forall c \in N_c$ için,

$$cr = c = cs$$

dir. Fakat c) den, bu durum $r = s$ olmasını gerektirir ki, bu elbette bir çelişkidir. Dolayısıyla $N_c = 0$ yani N 0-simetriktir. Şimdi $aN \neq 0$ olduğunu gösterelim. Eğer $aN = 0$ ise, $(a)N = 0$ dır. N 0-simetrik olduğundan, (a) N nin bir invaryant alt grubudur. Üstelik $\forall b \in (a)$ ve $\forall k, l \in N$ için,

$$bk = 0 = bl$$

dır. O halde c) den $k = l$ olmalıdır ki, bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $aN \neq 0$ dır. Şimdi Lemma 3.6.2 a) $\Rightarrow$ b) nin ispatındaki gibi, $A_0 = aN$ ve eğer A_{k-1} tanımlıysa,

$$A_k = \left\{ \sum_i \delta_i u_i \;\middle|\; \delta_i = \pm 1, u_i \in A_{k-1} \right\} \cup \left\{ nu \;\middle|\; n \in N, u \in A_{k-1} \right\}$$

olsun. $A = \bigcup A_k$ N nin bir invaryant alt grubudur ve $0 \neq aN \subseteq A$ dır. $\forall u \in A$ için, $ux = uy$ dir. O halde c) den $x = y$ elde edilir.

Lemma 3.6.2'den biliyoruz ki, eğer N bir e-asal yakın-halka ise, $0 \neq x, y \in N$ için $xNy \neq 0$, dolayısıyla N 3-asaldır.

Bir e-asal yakın-halkanın aynı zamanda 0-simetrik ve 3-asal olduğu belirtilmişti. Şimdi bunun aksinin doğru olmadığı aşağıdaki örnekle verilebilir.

Örnek 3.6.6. ([10]) $(N,+)$ mertebesi ≥ 3 olan bir grup olsun ve N üzerinde çarpma işlemi, $\forall x, y \in N$ için,

$$xy = \begin{cases} x & , y \neq 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases}$$

ile tanımlansın. $\forall x \in N$ için $x0 = 0$ olduğundan, N 0-simetrik bir yakın-halkadır. Eğer $x, y \neq 0$ ise,

$$xNy = \{0, x\}$$

olur. Buradan $xNy = 0$ iken $x = 0$ veya $y = 0$ elde edilir. O halde N bir 3-asal yakın-halkadır. Şimdi $0 \neq x, y \in N$ ve $x \neq y$ alalım. Bu durumda eğer $n \neq 0$ ise,

$$xnx = xny = x$$

ve eğer $n = 0$ ise,

$$xnx = xny = 0$$

o halde $\forall n \in N$ için,

$$xnx = xny$$

dir. Fakat $x \neq y$ olduğundan, N bir e-asal yakın-halka değildir.

Özetle, yakın-halkalar üzerinde e-asallık 3-asallığı, 3-asallık 2-asallığı, 1-asallık 0-asallığı ve yakın-halka 0-simetrik ise 2-asallık 1-asallığı gerektirir. Bunların tersleri, yakın-halka 0-simetrik olsa dahi genelde doğru değildir.

3.7. N-grup Tipleri

2. Bölüm'de bir N yakın-halkası için N-grup kavramı tanımlanmıştı. Bu kesimde, 0-, 1-, 2-, 3- ve e-tipinde N-gruplar tanımlanacak, temel özellikleri ve birbirleriyle ilişkileri verilecektir. Bunlar tarafından belirlenen primitif idealler, bazı sık kullanılan özellikleri, kendileri ve asal idealler ile ilişkileri sunulacaktır.

Tanım 3.7.1. ([11]) N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olsun.

a) Eğer $\exists\gamma \in \Gamma$ için $N\gamma = \Gamma$ ise, Γ ya γ tarafından monojeniktir denir.

b) Eğer Γ monojenik ve $\forall\gamma \in \Gamma$ için $N\gamma = \Gamma$ veya $N\gamma = 0_\Gamma$ ise, Γ ya strongly monojenik N-grup denir.

Özellikler 2.4.9 e) ile, bir N yakın-halkasının bir Γ N-grubu için, $N0_\Gamma$ nın Γ nın tüm N-alt grupları içerisinde en küçük olanı olduğu verilmişti. Özellikler 2.4.9 d) den $\forall\gamma \in \Gamma$ için $N\gamma \leq_N \Gamma$ dır. O halde, eğer Γ bir strongly monojenik N-grup ise, $N0_\Gamma = \{0_\Gamma\}$ veya $N0_\Gamma = \Gamma$ olduğu görülebilir [11].

Önerme 3.7.2. ([11]) N bir yakın-halka ve Γ γ_o tarafından monojenik bir N-grup olsun. Bu durumda,

a) Eğer $L \lhd_l N$ ise, $L\gamma_o \lhd_N \Gamma$ dır.

b) Eğer e, N nin bir sol birimi $(\forall n \in N$ için $en = n)$ ise, $\forall\gamma \in \Gamma$ için $e\gamma = \gamma$ dır.

c) Eğer e, N nin bir sol birimi ve Γ faithful ise, e (çift yanlı) birimdir.

d) Eğer Γ bir N_0-grup ve N_0-basit ise, bu durumda ya $N\Gamma = \{0_\Gamma\}$ ya da Γ strongly monojeniktir.

e) $N^\Gamma \cong_N N/(0:\gamma_o)$ dır.

İspat a) Γ γ_o tarafından monojenik bir N-grup olduğundan, $N\gamma_o = \Gamma$ dır. O halde $\forall\gamma \in \Gamma$ için,

$$\gamma = n_\gamma \gamma_o$$

olacak şekilde $\exists n_\gamma \in N$ vardır. Dolayısıyla, $\forall l\gamma_o \in L\gamma_o$, $\forall n \in N$ ve $\forall\gamma \in \Gamma$ için,

$$\begin{aligned} n(\gamma + l\gamma_o) - n\gamma &= n(n_\gamma\gamma_o + l\gamma_o) - nn_\gamma\gamma_o \\ &= [n(n_\gamma + l) - nn_\gamma]\gamma_o \in L\gamma_o \end{aligned}$$

dır. O halde $L\gamma_o \lhd_N \Gamma$ elde edilir.

b) Γ γ_o tarafından monojenik bir N-grup olduğundan, $\forall\gamma \in \Gamma$ için,

$$\gamma = n_\gamma \gamma_o$$

olacak şekilde $\exists n_\gamma \in N$ vardır. O halde $\forall\gamma \in \Gamma$ için,

$$e\gamma = en_\gamma \gamma_o = n_\gamma \gamma_o = \gamma$$

elde edilir.

c) $e \in N$ sol birim olsun. $\forall \gamma \in \Gamma$ ve $\forall n \in N$ için,

$$0_\Gamma = n\gamma - ne\gamma = (n - ne)\gamma$$

dır. Buradan Γ faithful olduğundan,

$$n - ne \in (0_\Gamma : \Gamma)_N = \{0\}$$

yani,

$$n = ne$$

elde edilir. O halde e (çift yanlı) birimdir.

d) Γ bir N_0-grup ve N_0-basit olsun. Yani Γ nın $\Omega = N_0 0_\Gamma$ ve kendisinden başka N_0-alt grubu bulunmasın. $\forall \gamma \in \Gamma$ için, $N\gamma$ Γ nın N_0-alt grubu olduğundan,

$$N\gamma = \Omega = N_0 0_\Gamma = \{0_\Gamma\}$$

veya

$$N\gamma = \Gamma$$

yani, Γ strongly monojeniktir.

e)

$$\begin{aligned} h : N &\;-\; \Gamma \\ n &\;\rightarrow\; n\gamma_o \end{aligned}$$

N-epimorfizmi alınsın. Bu durumda,

$$\begin{aligned} çekh &= \{n \in N \mid h(n) = 0_\Gamma\} \\ &= \{n \in N \mid n\gamma_o = 0_\Gamma\} \\ &= (0_\Gamma : \gamma_o) \end{aligned}$$

dır. O halde izomorfizm teoremlerinden, $N^\Gamma \cong_N N/(0 : \gamma_o)$ elde edilir.

Tanım 3.7.3. ([17]) N bir yakın-halka ve Γ bir monojenik N-grup olsun. Bu durumda,

a) Eğer Γ nın $\{0_\Gamma\}$ ve kendisinden başka ideali yoksa, Γ ya 0-tipinde bir N-grup denir.

b) Eğer Γ strongly monojenik ve $\{0_\Gamma\}$ ve kendisinden başka ideali yoksa, Γ ya 1-tipinde bir N-grup denir.

c) Eğer Γ nın $\{0_\Gamma\}$ ve kendisinden başka N-alt grubu yoksa, Γ ya 2-tipinde bir N-grup denir.

d) Eğer Γ 2-tipinde ve $\forall\gamma_1,\gamma_2 \in \Gamma$, $\forall n \in N$ için $n\gamma_1 = n\gamma_2$, olması $\gamma_1 = \gamma_2$ olmasını gerektiriyorsa, Γ ya 3-tipinde bir N-grup denir.

Önerme 3.7.4. ([11]) N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olsun. Bu durumda, Γ 2-tipinde $\Rightarrow$ 1-tipinde $\Rightarrow$ 0-tipindedir.

İspat: Γ 2-tipinde ise, $\{0_\Gamma\}$ ve kendisinden başka N-alt grubu yoktur. $\forall\gamma \in \Gamma$ için, $N\gamma$ Γ nın bir N-alt grubu olduğundan, $N\gamma = \{0_\Gamma\}$ veya $N\gamma = \Gamma$ yani, Γ strongly monojeniktir. Eğer $\Delta \triangleleft_N \Gamma$ ise, Γ aynı zamanda bir N_0-grup olduğundan, Özellikler 2.4.9 c) den Δ aynı zamanda Γ nın bir N-alt grubudur. O halde Γ nın $\{0_\Gamma\}$ ve kendisinden başka ideali yoktur. Dolayısıyla Γ 1-tipindedir. Aşikar olarak, Tanım 3.7.3 den Γ 0-tipindedir.

Önerme 3.7.4'de verilen ifadelerin terslerinin genelde doğru olmadığı, aşağıdaki örnekle ispatlanabilir.

Örnek 3.7.5. ([23]) $\Gamma = Z_4 = \{0,1,2,3\}$ grubunu alalım.

$$T_0 = \left\{ f \in M_0(\Gamma) \,\middle|\, f(2) \in \{0,2\} \right\},$$

$$T_1 = \left\{ f \in M_0(\Gamma) \,\middle|\, f(2) = 0 \right\}$$

ve

$$T_2 = \left\{ f \in M_0(\Gamma) \,\middle|\, f(3) = 0 \right\}$$

yakın-halkalarını düşünelim. Bu durumda Γ 0-tipinde bir T_0-gruptur ancak 1-tipinde bir T_0-grup değildir. Γ 1-tipinde bir T_1-gruptur ancak 2-tipinde bir T_1-grup değildir. Γ 2-tipinde bir T_2-gruptur fakat 3-tipinde bir T_2-grup değildir. Bu son durum şu şekilde gösterilebilir: $0,3 \in \Gamma$ ve $0 \neq 3$ dür. Fakat $\forall f \in T_2$ için $f(0) = f(3) = 0$ olduğundan, Γ 3-tipinde bir T_2-grup değildir.

Tanım 3.7.6. ([17]) N bir yakın-halka ve $I \lhd N$ olsun. v=0,1,2,3 için eğer $I = (0_\Gamma : \Gamma)_N$ olacak şekilde v-tipinde bir Γ N-grubu varsa, I ya N nin bir v-primitif ideali denir. Eğer bu Γ N-grubu faithful ise, N ye bir v-primitif yakın-halka adı verilir.

[7]'de v=0,1,2 için bir N yakın-halkasının her v-primitif idealinin aynı zamanda v-asal olduğu ispatlanmıştır. Aşağıdaki önerme ile, 0-simetrik bir N yakın-halkasında her 3-primitif idealin aynı zamanda 3-asal olduğu verilmiştir.

Önerme 3.7.7. ([17]) N 0-simetrik bir yakın-halka ve $I \lhd N$ olsun. Eğer I 3-primitif ideal ise, 3-asaldır.

İspat: Farz edelim ki $I \lhd N$ 3-primitif ve $a, b \in N$ için $aNb \subseteq I$ olsun. I 3-primitif olduğundan, $I = (0_\Gamma : \Gamma)_N$ olacak şekilde 3-tipinde bir Γ N-grubu vardır. $aNb \subseteq I$ olduğundan,

$$NaNb \subseteq NI \subseteq I$$

dır. 3-tipinde her N-grup, Tanım 3.7.3 d) den aynı zamanda 2-tipindedir. O halde her 3-primitif ideal aynı zamanda 2-primitif ve dolayısıyla 2-asaldır. $\forall a \in N$ için $Na \leq_N N$ ve I 2-asal olduğundan, $NaNb \subseteq I$ iken ya $Na \subseteq I$ ya da $Nb \subseteq I$ dır. Buradan $Na\Gamma = 0_\Gamma$ ya da $Nb\Gamma = 0_\Gamma$ olur. $Na\Gamma = 0_\Gamma$ olsun. Bu durumda $\forall n \in N$ için $na\Gamma = n0_\Gamma$ ve Γ 3-tipinde bir N-grup olduğundan $a\Gamma = 0_\Gamma$ yani, $a \in I$ elde edilir. O halde I bir 3-asal idealdir.

1992 yılında literatüre kazandırılan e-asal N-grup kavramı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Tanım 3.7.8. ([24]) N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olsun. Bu durumda, eğer

- **a)** $N\Gamma \neq 0_\Gamma$,
- **b)** $a \in N$ - $(0_\Gamma : \Gamma)_N$, $\forall n \in N$ ve $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ için $an\gamma_1 = an\gamma_2$ olması, $\gamma_1 = \gamma_2$ olmasını gerektirir,
- **c)** $N0_\Gamma = 0_\Gamma$

şartları sağlanıyorsa, Γ ya bir e-asal N-grup adı verilir. Eğer N 0-simetrik bir yakın-halka ise c) şartı gereksizdir.

Aşağıdaki önerme bir N yakın-halkasının, e-asal N-grupları ve e-asal idealleri arasındaki ilişkiyi vermektedir.

Önerme 3.7.9. ([24]) N bir yakın-halka ve $N \neq P \lhd N$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

a) P N nin bir e-asal idealidir.

b) $P = (0_\Gamma : \Gamma)_N$ olacak şekilde bir e-asal Γ N-grubu vardır.

İspat a)$\Rightarrow$ b): P N nin bir e-asal ideali ve $\Gamma = {}^{N}\!/_{P}$ alalım. Bu durumda Γ bir N-gruptur. $p \in P$, $x \in N$ olsun. $px \in P$ olduğundan,

$$p(x + P) = px + P = P$$

dir. O halde $P \subseteq (0_\Gamma : \Gamma)_N$ dir. Şimdi, kabul edelim ki $a \in (0_\Gamma : \Gamma)_N$ olsun. Bu durumda, $\forall n \in N$ için,

$$a(n + P) = P$$

ve dolayısıyla $aN \subseteq P$ dir. Burada $P \lhd N$ olduğundan $aNa \subseteq P$ elde edilir. P bir e-asal ideal olduğundan, 3-asaldır dolayısıyla $a \in P$ dir. O halde $P = (0_\Gamma : \Gamma)_N$ elde edilir. Şimdi Γ nın bir e-asal N-grup olduğunu gösterelim. Eğer $N\Gamma = 0_\Gamma$ ise, bu taktirde $\forall x \in N$ için $Nx \subseteq P$ ve dolayısıyla $N^2 \subseteq P$ dir. P bir e-asal ideal olduğundan, 0-asal ve buradan $N \subseteq P$ olmalıdır ki bu bir çelişkidir. O halde $N\Gamma \neq 0_\Gamma$ dir. Kabul edelim ki $a \in N - (0_\Gamma : \Gamma)_N = N - P$ ve $x, y \in N$ için $x + P \neq y + P$ olsun. Bu durumda, $x - y \notin P$ dir. P bir e-asal ideal olduğundan,

$$anx - any \notin P$$

olacak şekilde en az bir $n \in N$ vardır. Buradan, $\exists n \in N$ için,

$$an(x + P) \neq an(y + P)$$

elde edilir. Yani, Tanım 3.7.8 b) sağlanır. Son olarak $N0_\Gamma = 0_\Gamma$ olduğunu gösterelim. P bir e-asal ideal olduğundan sol invaryant, yani $NP \subseteq P$ dir. Gerçekten, eğer $NP \not\subseteq P$ ise, $np \notin P$ olacak şekilde $\exists n \in N$ ve $\exists p \in P$ vardır. P bir e-asal ideal olduğundan,

$$(np)0(np) = np0p$$

iken,

$$np = p$$

olur, bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $NP \subseteq P$ dir. Buradan,

$$NP = N0_{\Gamma} \subseteq 0_{\Gamma}$$

yani, $N0_{\Gamma} = 0_{\Gamma}$ elde edilir. Bu ise, Γ nın bir e-asal N –grup olduğunu ispatlar.

b) = a): Farz edelim ki, Γ bir e-asal N –grup ve $P = (0_{\Gamma} : \Gamma)_N$ olsun. $a, x - y \notin P$ olacak şekilde $a, x, y \in N$ alalım. Bu durumda,

$$(x - y)\gamma \neq 0_{\Gamma}$$

yani,

$$x\gamma \neq y\gamma$$

olacak şekilde $\exists \gamma \in \Gamma$ vardır. Γ bir e-asal N –grup olduğundan,

$$an(x\gamma) \neq an(y\gamma)$$

yani,

$$(anx - any)\gamma \neq 0_{\Gamma}$$

olacak şekilde $\exists n \in N$ vardır. Buradan,

$$anx - any \notin (0_{\Gamma} : \Gamma)_N = P$$

yani, P N nin bir e-asal idealidir.

Sonuç 3.7.10. ([24]) $0 \neq N$ bir yakın-halka olsun. Bu taktirde, N nin bir e-asal yakın-halka olması için gerek ve yeter şart N nin bir faithful e-asal N -grubu olmasıdır.

Bu sonucun ispatı Önerme 3.7.9'da $P = \{0\}$ alınarak yapılabilir.

4. BÖLÜM

3-ASAL VE e-ASAL YAKIN-HALKALAR

3. Bölüm'de, eğer bir N yakın-halkası e-asal ise 3-asal, 3-asal ise 2-asal, 1-asal ise 0-asal ve N 0-simetrik iken, N 2-asal ise 1-asal olduğu ve bunların terslerinin N'nin 0-simetrik olması durumunda dahi geçerli olmadığı verildi. Örnek 3.6.6 ile 0-simetrik ve 3-asal bir N yakın-halkasının e-asal olmayabileceği gösterildi. e-asal yakın-halka kavramı, 1990 yılında Booth, Groenewald ve Veldsman [8] tarafından tanıtıldığından bu yana, bir 3-asal yakın-halkanın hangi şartlar altında e-asal olduğu açık bir problemdir. Bu bölümde, ilk olarak, N-grup yapısı yardımıyla, hangi şartlar altında 3-asallığın e-asallığı gerektirdiği araştırılmıştır. Sonraki kesimlerde, 3. Bölüm'de verilen sonuçlar kullanılarak, 3-asallığın ve tam asallığın e-asallığı gerektirdiği durumlar verilmiştir. Bunun için öncelikle yeni bir kavram olan, bir N yakın-halkasının IFP N-grubu yapısı verilmiş ve örneklerle desteklenmiştir. İlk kesimde, 0-tipinde ve 1-tipinde IFP *N*-gruplar adıyla iki *N*-grup tipi tanımlanmış, bunların halkalarda denk, ancak yakın-halkalarda farklı yapılar olduğu gösterilmiştir. Ayrıca 1-tipinde IFP *N*-grup yapısından faydalanılarak, 3-asallığın e-asallığı gerektirmesi probleminin çözümüne ilişkin bir sonuç elde edilmiştir.

4.1. IFP *N*-Gruplar

Tanım 4.1.1.([6]) N bir yakın-halka olsun. Eğer $\forall a,b,n \in N$ için $ab=0$ iken $anb=0$ oluyorsa, N'ye bir IFP yakın-halka denir.

Aşağıda, bir N yakın-halkası için iki IFP N-grup tipi tanıtılmıştır. Bu iki tanımla, hem IFP yakın-halka tanımına benzer olarak IFP N-grup yapısı inşa edilmiş ve hem de 1-tipinde IFP N-grup kavramı yardımıyla 3-asallığın e-asallığı gerektirdiği bir sonuç ortaya konmuştur.

Tanım 4.1.2.([25]) N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olsun. Bu durumda,

a) Eğer $\forall a,b \in N$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $ab\gamma = 0_\Gamma$ iken $\forall n \in N$ için $anb\gamma = 0_\Gamma$ oluyorsa, Γ'ya 0-tipinde bir IFP N-grup denir.

b) Eğer $\forall a,b \in N$ ve $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ için $ab\gamma_1 = ab\gamma_2$ iken $\forall n \in N$ için $anb\gamma_1 = anb\gamma_2$ oluyorsa, Γ'ya 1-tipinde bir IFP N-grup denir.

Not : Halkalarda bu tanımlar birbirine denktir. Yani, eğer bir R halkası üzerinde Γ bir sol R-modül ise, bu durumda Γ'nın 0-tipinde bir IFP R-grup olması için gerek ve yeter şart Γ'nın 1-tipinde bir IFP R-grup olmasıdır. Gerçekten, kabul edelim ki Γ 0-tipinde bir IFP R-grup ve $\forall a,b \in R$ ve $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ için $ab\gamma_1 = ab\gamma_2$ olsun. Bu durumda,

$$ab\gamma_1 - ab\gamma_2 = ab(\gamma_1 - \gamma_2) = 0_\Gamma$$

dır. Γ 0-tipinde bir IFP R-grup olduğundan $\forall r \in R$ için

$$arb(\gamma_1 - \gamma_2) = arb\gamma_1 - arb\gamma_2 = 0_\Gamma$$

ve buradan, $\forall r \in R$ için $arb\gamma_1 = arb\gamma_2$ elde edilir, bu ise Γ'nın 1-tipinde bir IFP R-grup olduğunu gösterir.

Kabul edelim ki Γ 1-tipinde bir IFP R-grup ve $\forall a,b \in R$, $\gamma \in \Gamma$ için $ab\gamma = 0_\Gamma$ olsun. Bu durumda,

$$ab\gamma = ab0_\Gamma = 0_\Gamma$$

dır. Γ 1-tipinde bir IFP R-grup olduğundan, $\forall r \in R$ için,

$$arb\gamma = arb0_\Gamma = 0_\Gamma$$

elde edilir, bu ise Γ'nın 0-tipinde bir IFP R-grup olduğunu gösterir.

Örnek 4.1.3. ([25]) $(N,+)$ bir grup ve N üzerinde çarpma işlemi; $\forall x, y \in N$ için

$$xy = \begin{cases} x & , y \neq 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases}$$

ile tanımlansın. Bu durumda N bir sağ yakın-halkadır. Bir N-grup olarak N'nin kendisini, yani $\Gamma = N$ alalım. Farz edelim ki, $\forall a,b \in N$ ve $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ için $ab\gamma_1 = ab\gamma_2$ olsun. $n \in N$ alalım. Eğer $n = 0$ ise,

$$a0b\gamma_1 = (a0)b\gamma_1 = 0_\Gamma = (a0)b\gamma_2 = a0b\gamma_2$$

ve eğer $n \neq 0$ ise,

$$anb\gamma_1 = ab\gamma_1 = ab\gamma_2 = anb\gamma_2$$

dir. Bu ise $\Gamma = N$ N-grubunun 1-tipinde bir IFP N-grup olduğunu gösterir. Eğer $\forall a, b \in N$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $ab\gamma = 0_\Gamma = 0$ ise, tanımdan a, b veya $\gamma = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla $\forall n \in N$ için,

$$anb\gamma = 0_\Gamma = 0$$

elde edilir ki, bu $\Gamma = N$ N-grubunun 0-tipinde bir IFP N-grup olduğunu gösterir.

Aşağıdaki lemma, komutatif bir *N* yakın-halkasının her *N*-grubunun hem 0-tipinde ve hem de 1-tipinde bir IFP N-grup olduğunu gösterir.

Lemma 4.1.4. ([25]) N komutatif bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olsun. Bu durumda, Γ hem 0-tipinde ve hem de 1-tipinde bir IFP N-gruptur.

İspat: Kabul edelim ki, $\forall a, b \in N$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $ab\gamma = 0_\Gamma$ olsun. N komutatif bir yakın-halka olduğundan $\forall n \in N$ için,

$$anb\gamma = nab\gamma = n0_\Gamma = n00_\Gamma = 0n0_\Gamma = 00_\Gamma = 0_\Gamma$$

elde edilir. Bu ise Γ'nın 0-tipinde bir IFP N-grup olduğunu gösterir. Şimdi, kabul edelim ki, $\forall a, b \in N$ ve $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ için $ab\gamma_1 = ab\gamma_2$ olsun. Yine N komutatif bir yakın-halka olduğundan $\forall n \in N$ için,

$$anb\gamma_1 = nab\gamma_1 = nab\gamma_2 = anb\gamma_2$$

olur. O halde Γ 1-tipinde bir IFP N-gruptur.

IFP yakın-halkalar, 0-tipinde IFP *N*-gruplar yardımıyla karakterize edilebilir. Aşağıdaki önerme, bir N IFP yakın-halkası ile 0-tipinde bir IFP N-grup arasındaki ilişkiyi vermektedir.

Önerme 4.1.5. ([25]) N bir yakın-halka olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

a) N bir IFP yakın-halkadır.

b) Bir faithful 0-tipinde Γ IFP N-grubu vardır.

İspat a)$=$ b) : N bir IFP yakın-halka ve bir N-grup olarak $\Gamma = N$ alalım. Farz edelim ki, $a, b, c \in N$ için $abc = 0$ olsun. N bir IFP yakın-halka olduğundan $\forall n \in N$ için,

$$an(bc) = anbc = 0$$

dır. Dolayısıyla N 'nin kendisi bir 0-tipinde IFP N -gruptur.

b) $\Rightarrow$ a) : Kabul edelim ki, Γ bir faithful 0-tipinde IFP N -grup ve $a,b \in N$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda $\forall \gamma \in \Gamma$ için,

$$ab\gamma = 0\gamma = 0_\Gamma$$

dır. Γ 0-tipinde bir IFP N -grup olduğundan, $\forall n \in N$ için,

$$anb\gamma = 0_\Gamma$$

dır. Burada Γ bir faithful N -grup olduğundan $\forall n \in N$ için,

$$anb = 0$$

yani N bir IFP yakın-halkadır.

Aşağıdaki önerme, sıfırdan farklı bir e-asal N yakın-halkası için daima 1-tipinde bir IFP N -grup bulunduğunu kanıtlar.

Önerme 4.1.6. ([25]) $0 \neq N$ bir e-asal yakın-halka olsun. Bu durumda daima 1-tipinde bir IFP N -grup Γ vardır.

İspat: $0 \neq N$ bir e-asal yakın-halka ise Sonuç 3.7.10'dan bir faithful e-asal N -grup Γ vardır. Kabul edelim ki, $0 \neq a \in N$, $\forall b \in N$ ve $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ için $ab\gamma_1 = ab\gamma_2$ olsun. Burada, Γ bir e-asal N -grup olduğundan, Tanım 3.7.8'den $\gamma_1 = \gamma_2$ dir. O halde $\forall n \in N$ için, $anb\gamma_1 = anb\gamma_2$ elde edilir. Eğer $a = 0$ ise,

$$0b\gamma_1 = 0b\gamma_2 = 0_\Gamma$$

iken, $\forall n \in N$ için,

$$0nb\gamma_1 = 0nb\gamma_2 = 0_\Gamma$$

dır. Dolayısıyla $\forall a,b \in N$ ve $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ için $ab\gamma_1 = ab\gamma_2$ iken $\forall n \in N$ için $anb\gamma_1 = anb\gamma_2$, yani Γ 1-tipinde bir IFP N -gruptur.

Not: N bir yakın-halka ve Γ 1-tipinde bir IFP N -grup ise, Tanım 4.1.2'den, eğer $\forall a,b \in N$ ve $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ için $ab\gamma_1 = ab\gamma_2$ ise $\forall n \in N$ için $anb\gamma_1 = anb\gamma_2$ dir. Γ bir N -grup olduğundan $N\Gamma \subseteq \Gamma$ dır, buradan $\forall b \in N$ için $b\gamma_1 = \gamma_1' \in \Gamma$ ve

$b\gamma_2 = \gamma_2' \in \Gamma$ dır. O halde, eğer Γ 1-tipinde bir IFP N-grup ise, $\forall a \in N$ ve $\gamma_1', \gamma_2' \in \Gamma$ için $a\gamma_1' = a\gamma_2'$ olması, $\forall n \in N$ için, $an\gamma_1' = an\gamma_2'$ olmasını gerektirir.

Aşağıdaki lemma, bir Γ N-grubunu 1-tipinde IFP N-grup yapmayan bir yakın-halka türü vermektedir.

Lemma 4.1.7. ([25]) $N \neq N_c$ bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olsun. Eğer $n\gamma = 0_\Gamma$ olacak şekilde bir $0 \neq n \in N_0$ ve bir $0_\Gamma \neq \gamma \in \Gamma$ varsa, Γ 1-tipinde bir IFP N-grup değildir.

İspat: $N \neq N_c$ olduğundan $N_0 \neq \{0\}$ dır. $n\gamma = 0_\Gamma$ olacak şekilde bir $0 \neq n \in N_0$ ve bir $0_\Gamma \neq \gamma \in \Gamma$ bulunsun. $b \in N_0$ ve $\gamma' \in \Gamma$ elemanlarını $b\gamma = \gamma'$ ve $n\gamma' \neq 0_\Gamma$ olacak şekilde seçelim. Bu durumda,

$$n\gamma = 0_\Gamma = n0_\Gamma$$

dır. Fakat,

$$nb\gamma = n\gamma' \neq 0_\Gamma = nb0_\Gamma$$

dır. O halde, yukarıdaki nottan Γ 1-tipinde bir IFP N-grup değildir.

Bir halka üzerinde bu iki IFP N-grup tipinin çakışık olduğu verilmişti. Aşağıdaki örnek bunların bir yakın-halka üzerinde çakışık olmadığını kanıtlamak için yeterlidir.

Örnek 4.1.8. ([25]) $0 \neq N$, $N - \{0\}$ için komutatiflik sağlanan bir yakın-halka olsun. Yani, sıfırdan farklı $\forall a, b \in N$ için $ab = ba$, fakat $\exists n \in N - \{0\}$ için $n0 \neq 0$ olsun. Bir N-grup olarak N'nin kendisini, yani $\Gamma = N$ alalım. Bu durumda $\Gamma = N$ 1-tipinde bir IFP N-gruptur fakat 0-tipinde bir IFP N-grup değildir. Gerçekten, $a, b, c, d \in N$ için $abc = abd$ olsun. Eğer $0 \neq n \in N$ ise,

$$anbc = nabc = nabd = anbd$$

ve $n = 0$ ise,

$$a0bc = a0 = a0bd$$

elde edilir. Bu $\Gamma = N$'nin 1-tipinde bir IFP N-grup olduğunu gösterir. Şimdi, $a, b, c \in N$ için $abc = 0$, fakat $a0 \neq 0$ olsun. Bu durumda,

$$aabc = a0 \neq 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $\Gamma = N$ 0-tipinde bir IFP N-grup değildir.

Eğer N bir 0-simetrik IFP yakın-halka ve N'nin kendisi (bir N-grup olarak) 1-tipinde IFP N-grup ise, bu durumda N'nin kendisi 0-tipinde bir IFP N-gruptur. Gerçekten, $abc = 0$ olacak şekilde $a,b,c \in N$ alalım. N 0-simetrik bir yakın-halka olduğundan,

$$abc = ab0 = 0$$

dır. N'nin kendisi 1-tipinde IFP N-grup olduğundan, $\forall n \in N$ için

$$anbc = anb0 = 0$$

ve buradan N 0-tipinde bir IFP N-gruptur. Bu ifadelerden aşağıdaki açık problem elde edilmiştir:

Açık Problem: Bir N IFP yakın-halkasında, 0-tipinde IFP N-gruplar ve 1-tipinde IFP N-gruplar çakışık mıdır?

Aşağıdaki teorem, yakın-halkalarda 3-asallığın hangi şartlar altında e-asallığı gerektirdiği problemine 1-tipinde IFP N-gruplar yardımıyla kısmi bir çözüm getirmektedir.

Teorem 4.1.9. ([25]) $0 \neq N$ bir 0-simetrik 3-asal yakın-halka ve $0_\Gamma \neq \Gamma$ 1-tipinde bir IFP N-altgrup olsun. Eğer A, N yakın-halkasının her $0 \neq a \in A$ ve $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ için $a\gamma_1 = a\gamma_2$ iken $\gamma_1 = \gamma_2$ durumunu sağlayan bir invaryant altgrubu ise, bu taktirde N bir e-asal yakın-halkadır.

İspat: Sonuç 3.7.10'dan Γ'nın bir faithful e-asal N-grup olduğunu göstermek yeterlidir. Öncelikle Γ'nın bir faithful N-grup, yani $(0:\Gamma)_N = 0$ olduğunu gösterelim. $(0:\Gamma)_N = \{n \in N : \forall \gamma \in \Gamma \text{ için } n\gamma = 0_\Gamma\}$ tanımından,

$$(0:\Gamma)_N \Gamma = 0_\Gamma$$

dır. Γ bir N-grup olduğundan, $N\Gamma \subseteq \Gamma$ ve dolayısıyla

$$(0:\Gamma)_N N\Gamma \subseteq (0:\Gamma)_N \Gamma = 0_\Gamma$$

dır. Burada $0_\Gamma \neq \Gamma$ bir N-altgrup ve $0 \neq N$ bir 3-asal yakın-halka olduğundan $(0:\Gamma)_N = 0$ elde edilir. Şimdi $N\Gamma \neq 0_\Gamma$ olduğunu gösterelim. $0_\Gamma \neq \Gamma$, $0 \neq N$ ve $(0:\Gamma)_N = 0$ olduğundan, $n\gamma \neq 0_\Gamma$ olacak şekilde bir $0 \neq n \in N$ ve bir $0 \neq \gamma \in \Gamma$

vardır. O halde $N\Gamma \neq 0_\Gamma$ dır. Şimdi kabul edelim ki her $0 \neq x \in N$, $\forall n \in N$ ve $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ için $xn\gamma_1 = xn\gamma_2$ olsun. Eğer $x \in A$ ise, A invaryant olduğundan $\forall n \in N$ için $xn \in A$ dır. Bu durumda $(xn)\gamma_1 = (xn)\gamma_2$ iken, kabulden $\gamma_1 = \gamma_2$ dir. Eğer $x \in N$ - A ise, $xn\gamma_1 = xn\gamma_2$ ve Γ 1-tipinde bir IFP N-grup olduğundan, bir $a \in A$ için,

$$xan\gamma_1 = xan\gamma_2$$

dir. A invaryant olduğundan, $an = a' \in A$ ve $xa' = a'' \in A$ için son eşitlik

$$a''\gamma_1 = a''\gamma_2$$

halini alır, o halde kabulden $\gamma_1 = \gamma_2$ olur. Son olarak, N yakın-halkası 0-simetrik olduğundan $N0_\Gamma = 0_\Gamma$ dır. O halde Γ bir faithful e-asal N-grup, yani Sonuç 3.7.10'dan N bir e-asal yakın-halkadır.

Not: $0 \neq N$ bir yakın-halka ve Γ bir faithful *N*-grup olsun.

a) Eğer Γ 1-tipinde bir IFP *N*-grup değilse, Önerme 4.1.6 ve Sonuç 3.7.10'dan Γ bir e-asal *N*-grup değildir.

b) Eğer $N \neq N_c$ ve $n\gamma = 0_\Gamma$ olacak şekilde bir $0 \neq n \in N_0$ ve bir $0_\Gamma \neq \gamma \in \Gamma$ varsa, Γ bir e-asal *N*-grup değildir. Çünkü, bu şartlar altında verilen Γ, Lemma 4.1.7'den 1-tipinde bir IFP *N*-grup değildir. Dolayısıyla Önerme 4.1.6 ve Sonuç 3.7.10'dan Γ bir e-asal *N*-grup olamaz.

4.2. N Yakın-halkasının minimal N-altgrupları, 3-asallık ve e-asallık

N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olsun. Γ'nın $N\Delta \subseteq \Delta$ şartını sağlayan bir Δ alt grubuna Γ'nın bir N-altgrubu adı verildiği 2. Bölüm' de verilmişti. Γ'nın $N0_\Gamma$'dan farklı olan tüm N-altgruplarının cümlesinde minimal olan N-altgruba, Γ'nın bir minimal N-altgrubu adı verilir. N yakın-halkasının kendisi de bir N-grup olduğundan N yakın-halkasının N-altgruplarından da söz edilebilir.

Booth, Groenewald ve Veldsman [8], bir 0-simetrik 3-primitif yakın-halkanın aynı zamanda e-asal olduğunu ispatlamıştır, bu sonuç Lemma 4.2.1 ile verilmiştir. Dolayısıyla 3-asallığın hangi durumlarda 3-primitifliği gerektirdiği gösterilirse, 3-asallığın e-asallığı gerektirdiği durumlar için de çözüm üretilmiş olur.

Lemma 4.2.1.([8]) N bir 0-simetrik 3-primitif yakın-halka olsun. Bu durumda N e-asaldır.

İspat: N bir 3-primitif yakın-halka olduğundan, bir faithful 3-tipinde Γ N-altgrubu vardır. Kabul edelim ki, $0 \neq x, y \in N$ olsun. Γ faithful olduğundan $y\gamma \neq 0$ olacak şekilde bir $\gamma \in \Gamma$ vardır. Dolayısıyla,

$$Ny\gamma \neq 0_\Gamma$$

dır. Çünkü, Γ 3-tipinde olduğundan 2-tipinde, yani strongly monojenik ve Γ'nın $\{0_\Gamma\}$ ve Γ dışında N-altgrubu yoktur. $Ny\gamma$ Γ'nın bir N-altgrubu olduğundan $Ny\gamma = \Gamma$ dır. Γ faithful olduğundan,

$$xNy\gamma \neq 0_\Gamma$$

ve buradan

$$xNy \neq 0$$

dır. Şimdi $0 \neq A$ N yakın-halkasının herhangi bir invaryant alt grubu olsun. [26, Lemma 3]'den Γ 3-tipinde bir faithful A-gruptur. Şimdi, farz edelim ki $\forall a \in A$ ve $x, y \in N$ için $ax = ay$ olsun. Bu durumda $\forall \gamma \in \Gamma$ için,

$$ax\gamma = ay\gamma$$

dır. Γ 3-tipinde bir A-grup olduğundan,

$$x\gamma = y\gamma$$

dır. Buradan,

$$x\gamma - y\gamma = (x - y)\gamma = 0_\Gamma$$

ve Γ bir faithful N-grup olduğundan,

$$x - y = 0$$

yani $x = y$ dir. O halde Teorem 3.6.5'den N bir e-asal yakın-halkadır.

Buna göre aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

Sonuç 4.2.2. ([25]) $0 \neq N$ bir 3-asal yakın-halka ve Γ N'nin bir minimal N-altgrubu olsun. Eğer A N yakın-halkasının her $0 \neq a \in A$ ve $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ için $a\gamma_1 = a\gamma_2$ iken $\gamma_1 = \gamma_2$ durumunu sağlayan bir sağ invaryant altgrubu ise, bu taktirde

- **a)** N bir 3-primitif yakın-halkadır.
- **b)** Eğer N 0-simetrik ise, N bir e-asal yakın-halkadır.

İspat a) Teorem 4.1.9'un ispatındaki gibi $(0:\Gamma)_N = 0$ ve $N\Gamma \neq 0_\Gamma$ dır. Γ N'nin bir minimal N-altgrubu olduğundan Γ'nın $\{0_\Gamma\}$ ve Γ dışında N-altgrubu yoktur. Şimdi, farz edelim ki $\forall n \in N$ ve $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ için $n\gamma_1 = n\gamma_2$ olsun. Bu durumda, $\forall a \in A$ için $an\gamma_1 = an\gamma_2$ dir. Gerçekten, bunun doğru olmaması $n\gamma_1 = n\gamma_2$ kabulü ile çelişir. Çünkü $an \in N$ dir. A sağ invaryant olduğundan $an = a' \in A$, yani $an\gamma_1 = an\gamma_2$ yerine $a'\gamma_1 = a'\gamma_2$ yazılabilir. O halde, kabulden $\gamma_1 = \gamma_2$ olur. Bu ise Γ'nın 3-tipinde bir N-grup olduğunu gösterir. Γ faithful olduğundan N bir 3-primitif yakın-halkadır.

b) N 0-simetrik ve a) şıkkından 3-primitif bir yakın-halka olduğundan, Lemma 4.2.1'den N bir e-asal yakın-halkadır.

4.3. Sağ Değişmeli Yakın-halkalarda Tam-asallık, 3-asallık ve e-asallık

N bir yakın-halka olsun. Eğer $\forall a,b,c \in N$ için,

$$abc = acb$$

sağlanıyorsa, N'ye bir sağ değişmeli yakın-halka denir. Eğer $d \in N$ ve $\forall x, y \in N$ için,

$$d(x+y) = dx + dy$$

ise $d \in N$'ye N'nin bir dağılmalı elemanı denir. N'nin tüm dağılmalı elemanlarının cümlesi N_d ile gösterilir. Yani $N_d = \{d \in N : d$ dağılmalı$\}$ dır.

Aşağıdaki teorem, sağ değişmeli bir N yakın-halkasının bir tam asal idealinin, hangi şartlar altında N yakın-halkasının bir e-asal ideali olduğunu vermektedir.

Teorem 4.3.1. ([25]) N bir sağ değişmeli yakın-halka ve I N'nin $NI \subseteq I$ ve $N_d - I \neq \emptyset$ olan bir ideali olsun. Eğer I N'nin tam asal bir ideali ise, I e-asaldır.

İspat: $a, x, y \in N$ ve $\forall n \in N$ için,

$$anx - any \in I \qquad (1)$$

olsun. I'nın bir e-asal ideal olduğunu göstermek için $a \in I$ veya $x - y \in I$ olduğunu göstermek yeterlidir. N bir sağ değişmeli yakın-halka olduğundan (1) ifadesinden,

$$anx - any = axn - ayn = (ax - ay)n \in I \qquad (2)$$

dır. I N ’nin bir tam asal ideali olduğundan (2) ifadesinden,

$$ax - ay \in I \qquad (3)$$

elde edilir. Çünkü $n \in I$ olması, $I = N$ olmasını gerektirir, bu ise $N_d \subseteq N$ olduğundan $N_d - I \neq \emptyset$ kabulü ile çelişir. Kabul edelim ki (3) sağlansın. $N_d - I \neq \emptyset$ olduğundan bir $n_d \in N_d - I$ vardır. $NI \subseteq I$ ve N bir sağ değişmeli yakın-halka olduğu göz önüne alınarak, (3) ifadesinden,

$$\begin{aligned} n_d(ax - ay) &= n_d ax - n_d ay \\ &= n_d xa - n_d ya \\ &= (n_d x - n_d y)a \\ &= n_d(x - y)a \in I \end{aligned}$$

elde edilir. I N ’nin bir tam asal ideali ve $n_d \notin I$ olduğundan, burada $(x - y)a \in I$ ve dolayısıyla, yine I ’nın bir tam asal ideal olmasından $x - y \in I$ veya $a \in I$ dır. O halde I N ’nin bir e-asal idealidir.

Teorem 4.3.1 aşağıdaki örnekle desteklenmiştir:

Örnek 4.3.2. ([25]) $(Z_6,+)$ grubu üzerinde aşağıdaki tabloyla verilen çarpma işlemi altında, $N = (Z_6,+,\cdot)$ bir sağ değişmeli yakın-halkadır.

$\cdot$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	3	1	5	3	1	5
2	0	2	4	0	2	4
3	3	3	3	3	3	3
4	0	4	2	0	4	2
5	3	5	1	3	5	1

Tablo 2

$I = \{0,3\}$ N nin $NI \subseteq I$ olan bir tam asal idealidir. Ayrıca $4 \in N_d - I$, yani $N_d - I \neq \emptyset$ tur. O halde I ve N Teorem 4.3.1’in tüm şartlarını sağlar. I’nın N’ de bir e-asal ideal olduğu kolaylıkla görülebilir.

Örnek 4.3.3. ([25]) $(N,+)$ mertebesi ≥ 3 olan bir grup ve N üzerinde çarpma işlemi; $\forall x, y \in N$ için

$$xy = \begin{cases} x & , y \neq 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases}$$

ile tanımlansın. Bu durumda N bir sağ yakın-halkadır. $\forall x, y, z \in N$ için $xyz = xzy$ olduğundan, N sağ değişmeli bir yakın-halkadır. Aynı zamanda N 0-simetrik bir yakın-halkadır, dolayısıyla $N\{0\} \subseteq \{0\}$ dır. $xy = 0$ olacak şekildeki $\forall x, y \in N$ için, tanımdan da kolayca görülebileceği gibi, ya $x = 0$ ya da $y = 0$ dır. Bu ise N yakın-halkasının $\{0\}$ idealinin bir tam asal ideal olduğunu gösterir. O halde N yakın-halkası ve N'nin $\{0\}$ ideali, Teorem 4.3.1'in, $N_d - \{0\} \neq \phi$ haricinde tüm şartlarını sağlamaktadır. Fakat N'nin $\{0\}$ ideali bir e-asal ideal değildir. Gerçekten, $x \neq y$ olmak üzere $0 \neq x, y \in N$ alalım. Bu durumda, eğer $n \neq 0$ ise,

$$xnx = xny = x$$

ve eğer $n = 0$ ise,

$$xnx = xny = 0$$

yani $\forall n \in N$ için $xnx = xny$ dir. Fakat $x \neq y$ olduğundan, N'nin $\{0\}$ ideali bir e-asal ideal değildir.

Önerme 4.3.4. N bir sağ değişmeli yakın-halka ve $P \triangleleft N$ olsun. Bu durumda P'nin 3-asal olması için gerek ve yeter şart tam asal olmasıdır.

İspat: P 3-asal ve $x, y \in N$ için $xy \in P$ olsun. N sağ değişmeli ve $P \triangleleft N$ olduğundan,

$$xyN^2 = xNyN \subseteq P$$

dir. P 3-asal olduğundan, $x \in P$ veya $yN \subseteq P$ dir. $x \in P$ ise ispat tamamdır. $yN \subseteq P$ ise $yNy \subseteq P$ ve P 3-asal olduğundan $y \in P$ elde edilir. O halde P tam asaldır. Tersi Önerme 3.5.6'dan doğrudur.

Sonuç 4.3.5. N bir sağ değişmeli yakın-halka ve I N'nin $NI \subseteq I$ ve $N_d - I \neq \phi$ olan bir ideali olsun. Eğer I N'nin bir 3-asal ideali ise, I e-asaldır.

İspat: Teorem 4.3.1 ve Önerme 4.3.4'den elde edilir.

4.4. W-weakly Regüler Yakın-halkaların Asal İdealleri

Burada, 4.3. kesimde elde edilen sonuçlar, w-weakly regüler yakın-halkalar üzerinde çalışılmıştır. 3-asallık ile e-asallık ve 0-asallık ile e-asallık arasındaki ilişkileri veren sonuçlar elde edilmiştir.

Tanım 4.4.1. ([27]) N bir yakın-halka olsun. Eğer herhangi bir $x \in N$ için, $x = ux$ olacak şekilde $u \in (x)$ varsa, N'ye bir sol w-weakly regüler yakın-halka denir.

Eğer N yakın-halkasının sıfırdan farklı nilpotent elemanı yoksa, N'ye bir indirgenmiş yakın-halka adı verilir [11]. Bu kesimde, aşağıdaki yakın-halka sınıfları kullanılacaktır:

$\mathcal{N}_o$: 0-simetrik yakın-halkaların sınıfı.

$\mathcal{N}_1$: Birimli yakın-halkaların sınıfı.

$\mathcal{N}_s$: $\forall\, 0 \neq A \lhd N$ için $NA \subseteq A$ sağlanan N yakın-halkalarının sınıfı.

Lemma 4.4.2. ([28]) $N \in \mathcal{N}_s$ ve $P \lhd N$ olsun. Bu durumda P'nin tam asal olması için gerek ve yeter şart P'nin yarı tam asal ve 0-asal olmasıdır.

Teorem 4.4.3. ([27]) $N \in \mathcal{N}_o \cap \mathcal{N}_1$ bir indirgenmiş sol w-weakly regüler yakın-halka ve P, N'nin aşikar olmayan bir ideali olsun. Bu durumda P'nin 0-asal olması için gerek ve yeter şart P'nin tam asal olmasıdır.

Buna göre, tam asallığın e-asallığa denk olduğu bir durumu ortaya koyan, aşağıdaki sonuç elde edilmiştir:

Sonuç 4.4.4. $N \in \mathcal{N}_1$ bir sağ değişmeli indirgenmiş sol w-weakly regüler yakın-halka ve I, N'nin aşikar olmayan bir ideali olsun. Bu durumda, I'nın tam asal olması için gerek ve yeter şart I'nın e-asal olmasıdır.

İspat: I, N'nin bir tam asal ideali olsun. $N \in \mathcal{N}_1$ sağ değişmeli olduğundan, $\forall n \in N$ için

$$n0 = 1n0 = 10n = 0n = 0$$

yani $N \in \mathcal{N}_o$ dır. $N \in \mathcal{N}_o$ olduğundan, $NI \subseteq I$ dır. $N \in \mathcal{N}_1$ ve I, N'nin aşikar olmayan bir ideali olduğundan, $1 \in N_d - I$, yani $N_d - I \neq \phi$ dur. O halde O halde I ve N Teorem 4.3.1'in tüm şartlarını sağlar. Dolayısıyla I e-asaldır. Şimdi, kabul edelim ki I e-asal olsun. Lemma 3.6.4'den I 0-asaldır. O halde, Teorem 4.4.3'den I tam asaldır.

Lemma 4.4.5. ([27]) $N \in \mathcal{N}_o \cap \mathcal{N}_1$ bir indirgenmiş sol w-weakly regüler yakın-halka olsun. Bu durumda, N'nin her ideali yarı tam asaldır.

Aşağıdaki sonuç, 0-asallık ile e-asallık ve 3-asallık ile e-asallık arasındaki ilişkiyi vermektedir:

Sonuç 4.4.6. $N \in \mathcal{N}_1$ bir sağ değişmeli indirgenmiş sol w-weakly regüler yakın-halka ve I, N'nin aşikar olmayan bir ideali olsun. Bu durumda,

a) Eğer I 0-asal ise, e-asaldır.

b) Eğer I 3-asal ise, e-asaldır.

İspat: a) I, N'nin bir 0-asal ideali olsun. $N \in \mathcal{N}_1$ bir sağ değişmeli yakın-halka olduğundan, Sonuç 4.4.4'ün ispatından $N \in \mathcal{N}_o$ dır. O halde Lemma 4.4.5'den I yarı tam asaldır. $N \in \mathcal{N}_o$ olduğundan, $\forall A \lhd N$ için $NA \subseteq A$ sağlanır. Dolayısıyla $N \in \mathcal{N}_s$ dir. O halde, I yarı tam asal ve 0-asal olduğundan Lemma 4.4.2'den, I tam asaldır. Sonuç 4.4.4'ün ispatından $N_d - I \neq \phi$ dur. O halde, Teorem 4.3.1'den I e-asaldır.

b) I, N'nin bir 3-asal ideali olsun. a) dan $N \in \mathcal{N}_o$ dır. Dolayısıyla, I 0-asaldır. O halde a) dan I e-asaldır.

KAYNAKLAR

1. Dickson, L. E., Definitions of a Group and a Field by Independent Postulates, Trans. Amer. Math. Soc., 6, 198-204, 1905.
2. Van der Walt, A. P. J., Prime Ideals and Nil Radicals in Near-rings, Arch. Math., 15, 408-414, 1964.
3. Laxton, R. R., Prime Ideals and The Ideal Radical of a Distributively Generated Near-ring, Math. Z., 83, 8-17, 1964.
4. Ramakotaiah, D., Radicals for Near-rings, Math. Z., 97, 45-56, 1967.
5. Beidleman, J., Strictly Prime Distributively Generated Near-rings, Math. Z., 100, 97-105, 1967.
6. Ramakotaiah, D., Rao, G. K., On IFP Near-rings, J. Austral. Math. Soc., 27, 365-370, 1979.
7. Holcombe, W. L. M., Primitive Near-rings, Doctoral Dissertation, University of Leeds, 1970.
8. Booth, G. L., et al., A Kurosh-Amitsur Prime Radical for Near-rings, Comm. Algebra, 18, 3111-3122, 1990.
9. Reddy, Y. V., Murty, C. V. L. N., Semi-symmetric Ideals in Near-rings, Indian J. Pure and Appl. Math., 16, 17-21, 1985.
10. Booth, G. L., Groenewald, N. J., Different Prime Ideals in Near-rings II, Rings and Radicals (B. J. Gardner, Liu Shaoxue, R. Wiegandt (eds.)), Shijiazhaung 1994, Pitman Res. Notes Math., 346, 131-139, 1996.
11. Pilz, G., Near-rings, 2nd ed., Amsterdam, New York, Oxford, North-Holland, 1983.
12. Clay, J. R., Near-rings Geneses and Applications, Oxford, New York, Tokyo, 1992.
13. Heatherly, H. E., Malone, J. J., Some Near-ring Embeddings, Quart. J. Math., Oxford Ser. 20, 81-85, 1969.
14. Fain, C. G., Some Structure Theorems for Near-rings, Doctoral Dissertation, University of Oklohama, 1968.
15. Atagün, A. O., Aygün, E., Yakın-halkaların Farklı Asal İdealleri ve Direkt Toplananlar, E. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 21, 54-61, 2005.

16. Maxson, C. J., On Near-rings and Near-ring Modules, Doctoral Dissertation, Suny at Buffalo, 1967.
17. Groenewald, N. J., Different Prime Ideals in Near-rings, Comm. Algebra, 19(10), 2667-2675, 1991.
18. Beidleman, J. C., On The Theory of Radicals in d.g. Near-rings I The Primitive Radical, Math. Ann., 173, 89-101, 1967.
19. Laxton, R. R., Machin, A. W., On The Decomposition of Near-rings, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 38, 221-230, 1972.
20. Groenewald, N. J., Prime Near-rings and Special Radicals, East-West J. of Math., 3(2), 147-162, 2001.
21. Birkenmeier, G., et al., Prime Ideals in Near-rings, Results Math., 24, 27-48, 1993.
22. Birkenmeier, G., et al., Prime Ideals and Prime Radicals in Near-rings, Mh. Math., 117, 179-197, 1994.
23. Betsch, G., Struktursätze für Fastringe, Diss. Üniv. Tübingen, 1963.
24. Booth, G. L., Groenewald, N. J., Equiprime Left Ideals and Equiprime N-groups of a Near-ring, Contributions to General Algebra, 8, 25-38, 1992.
25. Atagün, A. O., Altındiş, H., Asal Yakın-halkalar, XIX. Ulusal Matematik Sempozyumu, Ağustos 22-25, 2006.
26. Holcombe, W. L. M., A Hereditary Radical For Near-rings, Studia Sci. Hungar., 17, 453-456, 1982.
27. Dheena, P., Rajeswari, C., Weakly Regular Near-rings, Indian J. Pure Appl. Math., 28, 1207-1213, 1997.
28. Groenewald, N. J., Olivier, W. A., On Regularities in Near-rings, Acta Math. Hungar., 74, 177-190, 1997.

ÖZGEÇMİŞ

12.09.1978 tarihinde Kayseri ili Bünyan ilçesinde doğdu. İlköğrenimini Kayseri'de Feridun Cıngıllı İlkokulu'nda, orta öğrenimini Sabahat Hıfzı Gözübüyük Ortaokulu'nda tamamladı. Lise öğrenimini ise Aksaray ili Ortaköy ilçesinde bulunan Ortaköy Lisesi'nde bitirdi. 1995 yılında Erciyes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazandı ve 1999 yılında lisans öğrenimini tamamladı.Aynı yıl Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Cebir ve Sayılar Teorisi Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başladı. 14.01.2000 tarihinde Erciyes Üniversitesi Yozgat Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı. 2001 yılında yüksek lisans öğrenimini tamamladı. Aynı yıl Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Cebir ve Sayılar Teorisi Dalı'nda doktora öğrenimine başladı.

Adres: Bozok Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
66100, Yozgat

Tel: (Cep) 0 505 650 38 79
(İş) 354 242 10 21-144

E-mail: aoatagun@erciyes.edu.tr