

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**BAZI DİZİ UZAYLARI ARASINDA LİNEER OPERATÖRLERİN
KOMPAKT OLMAMA DERECEİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Bilal BAŞTOSUN
DANIŞMAN: Yrd. Doç. Dr. Hasan KARA

VAN - 2005

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**BAZI DİZİ UZAYLARI ARASINDA LİNEER OPERATÖRLERİN
KOMPAKT OLMAMA DERECEŚİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Bilal BAŞTOSUN

VAN - 2005

KABUL ve ONAY SAYFASI

Yrd.Doç. Dr. Hasan KARA danışmanlığında, Bilal BAŞTOSUN tarafından hazırlanan “*Bazı Dizi Uzayları Arasında Lineer Operatörlerin Kompakt Olmama Derecesi*” isimli bu çalışma/....../2005 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı’nda *Yüksek Lisans Tezi* olarak kabul edilmiştir.

Başkan :..... İmza:

Üye :..... İmza:

Üye :..... İmza:

Üye :..... İmza:

Üye :..... İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’ nun/....../..... gün
ve.....sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

1. GİRİŞ ve KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Bu çalışmada bazı dizi uzayları arasında var olan lineer operatörlerin kompakt olmaması derecelendirilecektir.

$1 \leq p < \infty$ olmak üzere kuvvetli C_1 toplanabilir ve sınırlı dizilerin kümeleri ω_0^p, ω_p olup ω_∞^p , Maddox (1968) tarafından tanımlanmıştır ve bu kümelerin her biri

$$\|x\|_{\omega_\infty^p} = \sup_{v \geq 0} \left(\frac{1}{2^v} \sum_{k=2^v}^{2^{v+1}-1} |x_k|^p \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty) \quad (4.1)$$

ile ilgili bir BK uzayıdır ve ω_0^p , AK 'ya sahiptir (Wilansky, 1964).

Malkowsky ve ark. (2000)'da " $X = \ell_1$ ve $Y = \omega_\infty^p, \omega^p, \omega_0^p$ ($1 \leq p < \infty$)" yada " $X = \omega_0, \omega, \omega_\infty$ ve $Y = \ell_p$ ($1 \leq p \leq \infty$)" veya " $X = \omega_0, \omega, \omega_\infty$ ve $Y = \omega_0^p, \omega^p, \omega_\infty^p$ ($1 \leq p < \infty$)" iken bir X dizi uzayını bir Y dizi uzayı içine dönüştürmede sonsuz matrisler için gerekli ve yeterli şartlar verilmiştir. Ayrıca; kompakt olmak üzere bu uzaylar arasında bir lineer operatör altında kompakt olmama Hausdorff derecesine ilişkin gerekli ve yeterli şartlarda verilmiştir.

Malkowsky ve ark.'da (2001) ise, $(\bar{N}, q)$ toplanabilir veya sınırlı olan dizilerin keyfi BK , X uzayları ve Y uzayları arasındaki lineer operatörleri incelenerek, X 'i Y 'ye dönüştüren A sonsuz matrisleri için gerekli ve yeterli koşulları verilmiştir. Ayrıca, bir kompakt operatör olan A için gerekli ve yeterli koşulları vermek suretiyle kompakt olmama derecesine ilişkin uygulama yapılmıştır.

Önerme 5.1.1.

$$(\bar{N}, q)_0, (\bar{N}, q), (\bar{N}, q)_\infty \text{ kümelerinin her biri, } \|x\|_{\bar{N}_q} = \sup_n \left| \frac{1}{Q_n} \sum_{k=0}^n q_k x_k \right|$$

ile tanımlı $\|\cdot\|_{\bar{N}_q}$ normuna bağlı bir BK uzayıdır (Aljarrah ve ark., 1998).

Önerme 5.2.2.

X ve Y , BK uzayları olsun. O zaman, $(X, Y) \subset B(X, Y)$ yani her $A \in (X, Y)$ ve $L_A(x) = A(x)$ ($x \in X$) iken bir $L_A \in B(X, Y)$ elemanı tanımlayabilir. Ayrıca; $A \in (X, \ell_\infty) \Leftrightarrow \|A\|^* = \sup_n \|A_n\|^* = \|L_A\| < \infty$ olur. Nihayetinde; eğer

$(b^{(k)})_{k=0}^\infty$, X 'in bir tabanı ve Y_1 , Y 'nin kapalı bir alt uzayı iken Y ile Y_1 , FK uzayları ise, o zaman

$$A \in (X, Y_1) \Leftrightarrow \forall k = 0, 1, \dots \text{ için } A \in (X, Y) \text{ ve } A(b^{(k)}) \in Y_1$$

olur (Malkowsky ve ark., 1998).

X ve Y iki Banach uzayı olsun. $B(X, Y)$ uzayı ile N 'nin operatör normu için $\|L\| = \sup\{\|L(x)\| : \|x\| = 1\}$ yazılabilir. Eğer X bir BK uzayı ve $a \in \omega$ ise, o

$$\text{zaman } \|a\|^* = \left\{ \left\| \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k \right\| : \|x\| = 1 \right\} \text{ 'nin sağ tarafı var ve sonlu olacak şekilde}$$

sağlatılır. $a \in X^\beta$ olduğunda da bu geçerlidir (Wilansky, 1984).

Bilindiği üzere; Tanım 2.17.'deki verilenlerle birlikte, eğer $\mathbb{Q}$ bir X metrik uzayının sınırlı bir altkümesi, o zaman $\mathbb{Q}$ 'nun kompakt olmama Hausdorff derecesi, $\chi(\mathbb{Q})$ ile gösterilir ve

$$\chi(\mathbb{Q}) = \inf\{\varepsilon > 0 : \mathbb{Q}, X' \text{ de sonlu bir } \varepsilon - \text{ağa sahip}\}$$

yazılıp χ fonksiyonu, kompakt olmama Hausdorff derecesi diye adlandırılır (Banas ve Goebel, 1980; Akhmerov ve ark., 1992; Rakocevic, 1994).

Şimdi de Banas ve Goebel (1980) ile Akhmerov ve ark.'de (1992) bahsi geçen bir sonuca bakalım:

Önerme 5.3.1.

X , bir $\{e_1, e_2, \dots\}$ Schauder tabanlı bir Banach uzayı; $\mathbb{Q}$, X 'in sınırlı bir alt kümesi ve $P_n : X \rightarrow X$, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 'nin lineer gerini üzerine bir projektör olsun. O zaman; $a = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|I - P_n\|$ iken,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in \mathbb{Q}} \|(I - P_n)x\| \right) &\leq \chi(\mathbb{Q}) \leq \inf_n \sup_{x \in \mathbb{Q}} \|(I - P_n)x\| \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in \mathbb{Q}} \|(I - P_n)x\| \right) \end{aligned} \quad (5.21)$$

olur.

Önerme 5.3.1.'deki a sayısı ile ilgili bilindiği üzere; $X = c_0$ ise, o zaman $a = 1$ ve fakat, eğer $X = c$ ise, o zaman $a = 2$ 'dir (Banas ve Goebel, 1980).

Sonuç 5.2.1.'e bağlı olarak kompakt olmama derecelerine göre, şunu elde ederiz:

Teorem 5.3.1.

A , Sonuç 5.2.1.'deki gibi olsun ve herhangi n, r ($n > r$) tamsayısı için,

$$\|A\|^{(r)} = \sup_{n > r} \sup_m \left(\sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{Q} \left| \frac{a_{nk}}{q_k} - \frac{a_{n,k+1}}{q_{k+1}} \right| + |\mathbb{Q}_m a_{nm} / q_m| \right) \quad (5.22)$$

oluşturalım.

X 'ya $(\overline{N}, q)_0$ yada $(\overline{N}, q)$ ile $A \in (X, c_0)$ olsun. O zaman,

$$\|L_A\|_{\chi} = \lim_{r \rightarrow \infty} \|A\|^{(r)} \quad (5.23)$$

yazılabilir.

X 'ya $(\overline{N}, q)_0$ yada $(\overline{N}, q)$ ile $A \in (X, c)$ olsun. O zaman,

$$\frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow \infty} \|A\|^{(r)} \leq \|L_A\|_{\chi} \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \|A\|^{(r)} \quad (5.24)$$

X 'ya $(\overline{N}, q)_0$, $(\overline{N}, q)$ yada $(\overline{N}, q)_{\infty}$ ile $A \in (X, \ell_{\infty})$ olsun. O zaman,

$$0 \leq \|L_A\|_{\chi} \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \|A\|^{(r)} \quad (5.25)$$

olur.

Bu çalışmanın son aşamasında bu teorem kullanılarak ortaya koyduğumuz problemle ilgili olarak daha genel teoremler ispatlandı ve sonuçlar elde edildi.

2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1. (Lineer Uzay)

X boş olmayan bir küme ve $\mathbb{K}$ reel veya kompleks sayıların bir cismi olsun.

$$+ : X \times X \rightarrow X$$

$$\bullet : \mathbb{K} \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X kümesine $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay denir. Her $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ve $x, y, z \in X$ için,

$$(L1) \quad x + y = y + x$$

$$(L2) \quad (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$(L4) \quad x + \theta = x \text{ olacak şekilde bir } \theta \in X \text{ vardır.}$$

$$(L3) \quad \text{Her } x \in X \text{ için } x + (-x) = \theta \text{ olacak şekilde bir } (-x) \in X \text{ vardır.}$$

$$(L5) \quad 1 \cdot x = x$$

$$(L6) \quad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$$

$$(L7) \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$$

$$(L8) \quad \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$$

Tanım 2.2. (Lineer Alt Uzay)

X , $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay ve M , X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer her $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ve $x, y \in M$ için $\lambda x + \mu y \in M$ oluyorsa M 'ye X 'in bir lineer alt uzayı denir.

Tanım 2.3. (Normlu Lineer Uzay)

X , $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ için

$$(N1) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$(N2) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

$$(N3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{üçgen eşitsizliği})$$

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde norm adını alır ve bu durumda $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine normlu lineer uzay veya kısaca normlu uzay denir.

Tanım 2.4. (Dizi Uzayları)

$$\omega := \{x = (x_k) \mid x : \mathbb{N}^0 \rightarrow \mathbb{K}, k \rightarrow x_k := x(k)\}$$

kümesi

$$((x_k), (y_k)) \rightarrow (x_k + y_k) \quad \text{ve} \quad (\lambda, (x_k)) \rightarrow (\lambda x_k)$$

ile tanımlı toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile birlikte $\mathbb{K}$ üzerinde bir lineer uzaydır. ω lineer uzayı ve ω 'nin her bir lineer alt uzayı dizi uzayı olarak adlandırılır. c_0 , c ve ℓ_∞ , sırasıyla, sıfır dizileri dizi uzayı, yakınsak dizilerin dizi uzayı ve sınırlı dizilerin dizi uzayı olarak adlandırılırlar. c_0 , c ve ℓ_∞ dizi uzayları $\|x\| = \sup_k |x_k|$ normu ile birlikte birer normlu uzay oluştururlar.

Çalışmamızda kullanacağımız diğer bazı dizi uzayları ve normları aşağıda verilmiştir:

$$\gamma := \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sum_{k=0}^{\infty} x_k < \infty \right\},$$

yakınsak seri teşkil eden bütün dizilerin dizi uzayıdır ve $\|x\|_\gamma := \sup_n \left| \sum_{k=0}^n x_k \right|$ normu ile birlikte bir normlu uzaydır.

$$\ell := \ell_1 := \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sum_{k=0}^{\infty} |x_k| < \infty \right\},$$

mutlak yakınsak seri teşkil eden bütün dizilerin dizi uzayıdır ve $\|x\|_1 := \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|$ normu ile birlikte bir normlu uzaydır.

$$\ell_2 := \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sum |x_k|^2 < \infty \right\},$$

dizi uzayı $\|x\|_2 := \left(\sum |x_k|^2 \right)^{1/2}$ normu ile birlikte bir normlu uzaydır.

$$\ell_p := \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\},$$

dizi uzayı $1 \leq p < \infty$ için $\|x\|_p := \left(\sum |x_k|^p \right)^{1/p}$ normu ile birlikte bir normlu uzay,

$0 < p < 1$ için $\|x\| := \sum |x_k|^p$ normu ile birlikte bir p -normlu uzaydır.

Bu dizi uzayları arasında,

$$\ell_1 \subset \gamma \subset c_0 \subset c \subset \ell_\infty \subset \omega$$

kapsam bağıntıları vardır. Ayrıca, sınırlı kısmi toplamlara sahip bütün dizilerin kümesini bs , bütün toplanabilir dizilerin kümesini de cs , bütün sonlu sıfırdan farklı

dizilerin kümesini φ ile göstereceğiz.

e ve $e^{(n)}$ ($n=0,1,\dots$) ile ; $k=0,1,\dots$ için $e_k=1$ ve $k \neq n$ için $e^{(n)}_k=1$ ve $e^{(n)}_k=0$ olacak şekildeki dizileri göstereceğiz.

Örnek 2.1.

Eğer her $n=0,1,\dots$ için E , $e_{nk}=1$ ($0 \leq k \leq n$) ve $e_{nk}=0$ ($k > n$) biçiminde tanımlı bir matris ise, bu durumda $cs=c_E$ ve $bs=(\ell_\infty)$ yakınsak ve sınırlı serilerinin kümeleridir.

Tanım 2.5. (Lineer Operatör)

X ve Y lineer uzaylar ve $T: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olmak üzere her $x_1, x_2 \in X$ ve her $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ için

$$T(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda T(x_1) + \mu T(x_2)$$

şartı sağlanırsa T 'ye bir lineer operatör veya lineer dönüşüm denir. $Y = \mathbb{R}$ veya $Y = \mathbb{C}$ olması durumunda ise T 'ye bir lineer fonksiyonel denir.

Tanım 2.6.

X , $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Eğer $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa g reel fonksiyonuna bir paranorm ve (X, g) ikilisine de bir paranormlu uzay denir. Her $\sigma \in \mathbb{K}$ ve $x, y \in X$ için,

(i) $g(\theta) = 0$

(ii) $g(x) = g(-x)$

(iii) $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$

(iv) Eğer (σ_n) , $\sigma_n \rightarrow \sigma$ olacak şekilde skalerlerin bir dizisi ve (x_n) de $g(x_n - x) \rightarrow 0$ olacak biçimde vektörlerin bir dizisi ise, o zaman çarpımın sürekliliği gereğince $g(\sigma_n x_n - \sigma x) \rightarrow 0$ 'dır.

Eğer Wilansky (1964) gereğince $g(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ oluyorsa bir g paranormuna tamdır denir. Yani, aşağıdaki tanımın özelliklerini sağlayan bir tam paranorm ve onun uzayı söz konusudur.

Tanım 2.7. (Banach uzayı)

Bir Banach uzayı tam normlu bir lineer uzaydır. Buradaki tamlık $x_n \in X$ için $\|x_m - x_n\| \rightarrow 0$ ($m, n \rightarrow \infty$) olduğunda bir $x \in X$ mevcuttur öyle ki,

$$\|x_m - x_n\| \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty)$$

olur.

Tanım 2.8. (Banach Limiti)

ℓ_∞ üzerinde tanımlı bir $L : \ell_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ lineer fonksiyoneli aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa L 'ye bir Banach limiti denir. α , bütün Banach limitlerinin kümesini gösterebilir. Bu durumda;

B.1 Her $n = 0, 1, \dots$ için $x_n \geq 0$ olmak üzere $L(x) \geq 0$

B.2 $L(x) = LD(x)$, burada $Dx = D(\{x_n\}) = \{x_{n+1}\}$

B.3 $L(e) = 1$, $e = (1, 1, \dots)$

olur.

Tanım 2.9. (Hemen Hemen Yakınsak Dizi)

Bir $x \in \ell_\infty$ dizisinin bütün Banach limitleri çakışiyorsa, x 'e hemen hemen yakınsak dizi denir. f , hemen hemen yakınsak dizilerin kümesini gösterebilir. Bu durumda, $f = \{x \in \ell_\infty : p(x) = -p(-x)\}$ olur. Hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı f ile, sıfıra yakınsayan hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı f_0 ile gösterilecektir.

Tanım 2.10. (Sınırlı Lineer Operatör)

$T : X \rightarrow Y$ bir lineer operatör olmak üzere $\forall x \in X$ için

$$\|T(x)\|_Y \leq M \|x\|_X$$

olacak şekilde bir M sabiti varsa T 'ye sınırlı lineer operatör denir. Bir sınırlı lineer operatörün normu

$$\|T\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} < \infty$$

olarak tanımlanır.

$f : X \rightarrow \mathbb{C}$ sınırlı lineer fonksiyonelinin normu

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|/\|x\| \mid x \neq \theta\}$$

olarak verilir.

ℓ_p 'den ℓ_q 'ya bir $A = (a_{nk})$ ($n, k = 0, 1, 2, \dots$) matris dönüşümünün normu

ise

$$\|Ax\|_q = \left(\sum_n \left| \sum_k a_{nk} x_k \right|^q \right)^{1/q}$$

olmak üzere

$$\|A\|_{p,q} = \sup \{ \|Ax\|_q : \|x\|_p \leq 1 \}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.11.

X normlu uzayını Y normlu uzayına dönüştüren tüm sınırlı lineer operatörlerin kümesi $B(X,Y)$ ile gösterilir. $B(X,Y)$ bir normlu lineer uzaydır. $X=Y$ olması durumunda sadece $B(X)$ notasyonu kullanılır. Yani $B(X)$, X bir normlu uzay olmak üzere X 'den X 'e tanımlı tüm sınırlı lineer operatörlerin normlu lineer uzayıdır. Özel olarak; $Y = \mathbb{C}$ kompleks sayılar olduğunda X üzerindeki bütün lineer sürekli fonksiyonların kümesi için $X^* = B(X, \mathbb{C})$ ve f sürekli lineer fonksiyonunun normu için $\|f\| = \sup \{ |f(x)| : \|x\| = 1 \}$ ($f \in X^*$) yazılabilir.

Tanım 2.12.

X, Y metrik uzayları ile bir $f : X \rightarrow Y$ dönüşümü verilsin.

(i) $Q \subset X$ olmak üzere, eğer $f(Q)$ 'nin kapanışı Y 'nin bir kompakt alt kümesi ise, $f(Q)$ 'ya Y 'nin bağlı kompakt alt kümesi denir.

(ii) Şayet $f(Q)$, X 'in her sınırlı Q altkümesi için Y 'nin bir kompakt alt kümesi olursa, f bir kompakt dönüşüm veya kompakt operatördür diye ifade edilir.

Tanım 2.13. (Matris Dönüşümü)

$X \neq \emptyset, Y \neq \emptyset, \omega$ uzayının herhangi iki alt kümesi ve $A = (a_{nk})$; $(n, k = 0, 1, 2, \dots)$ kompleks sayılardan oluşan bir sonsuz matris olsun. Bir $x = (x_k) \in X$ dizisinin Ax dönüşüm dizisi her $n \in \mathbb{N}^0$ için

$$A_n(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$$

yakınsak serisi ile verilen $(A_n(x)) \in Y$ dizisidir. A 'ya X 'den Y içine bir matris dönüşümü ve Ax 'e de x 'in A -dönüşüm dizisi denir. (X,Y) ile X 'den Y içine olan bütün matrislerin sınıfı, (X,Y,P) ile de X 'den Y içine limiti koruyan, yani

$\lim A_n(x) = \lim x_n$, olan bütün A matrislerinin sınıfı gösterilir. Burada $(X, Y.P) \subset (X, Y)$ 'dir.

Tanım 2.14.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, sonsuz bir seri ve bu serinin kısmi toplamlar dizisi (s_n) olsun.

Ayrıca $A = (a_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ sonsuz matrisi verilsin. (s_n) dizisinin A -dönüşüm dizisini

(t_n) ile gösterelim. Yani, $t_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} s_k$ olsun. Bu durumda A , diziden-diziye bir

dönüşüm tanımlar. Eğer (t_n) , bir s limitine yaklaşıyorsa o zaman (s_n) dizisi veya

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi s 'ye A toplanabilirdir denir. Bu çalışma boyunca aksi belirtilmedikçe

$\sum a_n$ ile $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sonsuz serisi ve (s_n) ile de bu serinin kısmi toplamlar dizisi gösterilecektir.

Tanım 2.15. (Cesaro Toplanabilme Metodu)

$$c_{nk} := \begin{cases} \frac{1}{n+1} & , k \leq n \\ 0 & , k > n \end{cases}$$

elemanları ile tanımlı alt üçgensel sonsuz matrise Cesaro matrisi denir ve $(C,1)$ yada C_1 ile gösterilir. $\sum a_n$, (s_n) kısmi toplamlar dizisi ile verilen sonsuz bir seri olsun.

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{v=0}^n s_v$$

ile tanımlanan diziden diziye dönüşümüne, (s_n) dizisinin Cesaro ortalaması denir.

Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = s$ ise, $\sum a_n$ serisi s değerine $(C,1)$ yada C_1 toplanabilirdir denir.

C_1 , bir basamaklı bir Cesaro matrisi olup;

$$(C_1)_{nk} = \begin{cases} 1/n & , 1 \leq k \leq n \\ 0 & , k > n \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

biçiminde de ifade edilebilir.

Teorem 2.1. (Hölder Eşitsizliği)

$p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ ve $b_1, b_2, \dots, b_n \geq 0$ olsun. Bu takdirde,

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{1/q}$$

olur.

Teorem 2.2. (Minkowski Eşitsizliği)

$p \geq 1$, $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ ve $b_1, b_2, \dots, b_n \geq 0$ olsun. Bu takdirde,

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{1/p}$$

olur.

Tanım 2.16.

(i) $0 < p < \infty$ olmak üzere kuvvetli C_1 toplanabilir ve sınırlı dizilerin kümeleri

$$\omega_0^p = (c_0)_{[C_1]^p} = \left\{ x \in \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right) = 0 \right\},$$

$$\omega^p = \left\{ x \in \omega : \text{bazı kompleks } \ell \text{ sayısı için } x - \ell e \in \omega_0^p \right\}$$

olup

$$\omega_\infty^p = (\ell_\infty)_{[C_1]^p} = \left\{ x \in \omega : \sup_n \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right) < \infty \right\}$$

Maddox (1968) tarafından tanımlanmıştır ve ispatlanabilir ki; bu kümelerin her biri p -normlu ($0 < p < 1$) bir FK -uzayıdır ve

$$\|x\| = \begin{cases} \sup_{v \geq 0} \left(\frac{1}{2^v} \sum_{k=2^v}^{2^{v+1}-1} |x_k|^p \right) & , \quad 0 < p < 1 \\ \sup_{v \geq 0} \left(\frac{1}{2^v} \sum_{k=2^v}^{2^{v+1}-1} |x_k|^p \right)^{1/p} & , \quad 1 \leq p < \infty \end{cases} \quad (2.1)$$

normu ile ilgili bir BK uzayıdır ve ω_0^p , AK 'ya sahiptir.

(ii) $\forall x = (x_k)_{k=1}^\infty \in \omega^p$ dizisi; $\ell \in \mathbb{C}$, $x - \ell e \in \omega_0^p$ olacak şekilde

$$x = \ell e + \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - \ell) e^{(k)} \quad (2.2)$$

biçiminde bir tek temsile sahiptir. $p = 1$ için $\omega_0 = \omega_0^1 \dots$ yazılır (Wilansky, 1964).

Aslında; ω_0^p , ω^p ve ω_{∞}^p kümelerinin tanımlamasına denk bir yol, (2.1)'deki blokların orijinal tanımındaki kısımlara yer vermekten geçer. (2.1)'deki norm ile

$$\|x\|_{\omega_{\infty}^p} = \sup_n \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \quad (2.3)$$

ile tanımlı $\|\cdot\|_{\omega_{\infty}^p}$ doğal normu denktirler (Malkowsky ve Rakocevic, 2000).

Tanım 2.17. (Schauder Tabanı)

Eğer her $x \in X$ için $x = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n b_n$ olacak şekilde skalerlerin bir tek

$(\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$ dizisi varsa, lineer bir X metrik uzayında herhangi bir $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ dizisine bir Schauder tabanı denir.

Tanım 2.18.

$A = (a_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ kompleks sayıların sonsuz bir matrisi ve $x \in \omega$ ve $0 < p < \infty$ olsun. O zaman

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k \quad (n = 0, 1, \dots),$$

$$A(x) = (A_n(x))_{n=0}^{\infty}, \quad A_n(|x|^p) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} |x_k|^p \quad (n = 0, 1, \dots)$$

ve

$$A(|x|^p) = (A_n(|x|^p))_{n=0}^{\infty}$$

yazabiliriz.

ω 'nın herhangi X alt kümesi için; $X_A = \{x \in \omega : A(x) \in X\}$, X 'deki A 'nın matris bölgesi olarak adlandırılır. Ayrıca; $X_{[A]^p} = \{x \in \omega : A(|x|^p) \in X\}$ kümesini de tanımlayabiliriz.

$p = 1$ için, p indislisini benzer yollarla tarif edebilir ve kısaca, $X_{[B]} = X_{[B]^1}$ ile yazabiliriz.

Tanım 2.19.

(i) Sonsuza giden pozitif reel sayılarının azalmayan bir $\mu = (\mu_n)_{n=0}^{\infty}$ dizisi olsun. Ayrıca; $0 = n(0) < n(1) < n(2) < \dots$ olacak şekilde verilen bir $(n(v))_{v=0}^{\infty}$ dizisi için, $n(v) \leq k \leq n(v+1) - 1$ koşulunu sağlayan bütün k tamsayılarının kümesini $K^{(v)}$ ile göstereceğiz. Sırasıyla, $K^{(v)}$ 'deki bütün k 'ları üzerine alan toplam ve maksimum sembolü için de $\sum_v$ ile $\max_v$ kullanacağız.

$$(ii) \quad b_{nk} = \begin{cases} 1/\lambda_n & , \quad 0 \leq k \leq n \\ 0 & , \quad k < n \end{cases}$$

ve

$$\tilde{b}_{vk} = \begin{cases} 1/\lambda_{n(v+1)} & , \quad k \in K^{(v)} \\ 0 & , \quad k \notin K^{(v)} \end{cases}$$

ile $B = (b_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ ve $\tilde{B} = (\tilde{b}_{vk})_{v,k=0}^{\infty}$ matrislerini tanımlayacağız. Ayrıca; $\mu_{-1} = 0$ olmak üzere

$$\Delta_{nk}(\mu) = \begin{cases} -\mu_{n-1} & , \quad k = n-1 \\ \mu_n & , \quad k = n \quad (n = 0, 1, \dots) \\ 0 & , \quad \text{aksi halde} \end{cases}$$

ile bir $\Delta(\mu)$ matrisini tanımlayalım. Yine;

$$c_0(\mu) = ((c_0)_{[B]})_{\Delta(\mu)}, \quad \tilde{c}_0(\mu) = ((c_0)_{[\tilde{B}]})_{\Delta(\mu)},$$

$$c(\mu) = \{x \in \omega : x - \ell e \in c_0(\mu)\}, \quad \tilde{c}(\mu) = \{x \in \omega : x - \ell e \in \tilde{c}_0(\mu)\},$$

$$c_{\infty}(\mu) = ((\ell_{\infty})_{[B]})_{\Delta(\mu)}, \quad \tilde{c}_{\infty}(\mu) = ((\ell_{\infty})_{[\tilde{B}]})_{\Delta(\mu)}$$

kümelerini tarif edelim.

Malkowsky'e (1995) göre; $c_0(\mu)$, $c(\mu)$ ve $c_{\infty}(\mu)$ uzaylarının her biri,

$$\|x\|' = \|\Delta(\mu)(B(|x|))\|_{\infty} = \sup_{n \geq 0} \left(\frac{1}{\mu_n} \sum_{k=0}^n |\mu_k x_k - \mu_{k-1} x_{k-1}| \right)$$

ile birlikte bir BK uzayıdır, $c_0(\mu)$ AK özelliğine sahiptir ve her $x = (x_k)_{k=0}^{\infty} \in c_{\mu}$

dizisi $x - \ell e \in c_0(\mu)$ olacak biçimde $\ell \in \mathbb{C}$ elemanı için $x = \ell e + \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - \ell) e^{(k)}$ ile

bir tek gösterime haiz bir değer vardır.

Tanım 2.20.

Pozitif reel sayıların bir $\Lambda = (\lambda_n)_{n=0}^\infty$ dizisi; eğer herhangi v tamsayısı için $[m^v, m^{v+1})$ aralığında en az bir λ_n var olacak biçimde bir $m \geq 2$ tamsayısı varsa, üssel sınırlıdır diye tarif edilir. Malkowsky'den (1995) bilinmektedir ki; pozitif reellerin azalmayan bir $\Lambda = (\lambda_n)_{n=0}^\infty$ dizisi üssel sınırlıdır $\Leftrightarrow$ Aşağıdaki koşul sağlanır: " bazı $(\lambda_{n(v+1)})_{v=0}^\infty$ dizisi için,

$$s \leq \frac{\lambda_{n(v)}}{\lambda_{n(v+1)}} \leq t \quad (\forall v = 0, 1, \dots)$$

olacak şekilde açık birim aralıkta

$$s \leq t$$

reelleri vardır "

(2.4)

Burada (2.4) şartını sağlayan üssel sınırlı bir $\Lambda = (\lambda_n)_{n=0}^\infty$ dizisinin bir $(\lambda_{n(v+1)})_{v=0}^\infty$ alt dizisi, ortak (birleşik) alt dizi diye adlandırılır.

O zaman, $c_0(\Lambda) = \tilde{c}_0(\Lambda)$, $c(\Lambda) = \tilde{c}(\Lambda)$ ve $c_\infty(\Lambda) = \tilde{c}_\infty(\Lambda)$ 'dir. Ayrıca;

$$\|x\|' \text{ ile } \|x\| = \|\Delta(\Lambda)(\tilde{B}(|x|))\|_\infty = \sup_{v \geq 0} \left(\frac{1}{\lambda_{n(v+1)}} \sum_v |\lambda_k x_k - \lambda_{k-1} x_{k-1}| \right)$$

normları, $c_0(\Lambda)$, $c(\Lambda)$ ve $c_\infty(\Lambda)$ uzayları üzerinde denktirler. Böylece; $c_0(\Lambda)$, $c(\Lambda)$ ve $c_\infty(\Lambda)$ uzaylarının her biri, Malkowsky (1995) ve Wilansky (1984) gereğince $\|\cdot\|$ ile birlikte bir BK uzayıdır.

Tanım 2.21.

(i) $X \subset \omega$ ve $\tau_\omega \subset \tau$ olacak şekilde yerel bir (X, τ) konveks uzayına bir K – uzayı denir ve burada τ , X üzerinde bir K – topolojisidir.

(ii) Bir tam metriklenebilir yerel konveks uzaya F (Frechet) uzayı denir. Ayrıca; bir F (Frechet) uzayı bir tam lineer metrik uzayıdır.

(iii) Hem bir K – uzayı hem de bir F (Frechet) uzayı olan yerel konveks bir (X, τ) uzayına bir FK – uzayı denir ve burada τ , X üzerinde bir FK – topolojisidir. Yani, eğer bir $X \subset \omega$ F (Frechet) uzayında yakınsaklık koordinatsal yakınsaklığı gerekli kılıyorsa bir FK – uzayı adını alır.

(iv) Normlu bir FK – uzayına bir BK – uzayı denir ve burada onun topolojisi de aynı zamanda bir BK – topolojisidir. BK – uzayı, sürekli koordinatlara sahip bir Banach dizi uzayıdır. Yani, bir BK – uzayı Banach uzayı özelliklerini taşıyan bir FK – uzayıdır.

(v) Bir (X, τ) K – uzayı, $\varphi \subset X$, keyfi bir $x = (x_k) \in X$ verilsin. Bu durumda, $x^{[n]} = \sum_{k=0}^n x_k e^k = (x_0, \dots, x_n, 0, \dots)$ ’e x ’in n . bölgesi denir. Eğer $x^{[n]} \rightarrow x$ ise, x AK (bölgesel yakınsak)’ya sahiptir denir. $S_X = \{x \in X : x \text{ } AK\text{'ya sahip}\}$ olmak üzere, eğer $S_X = X$ olursa, (X, τ) ’ya bir AK – uzayı denir.

Bir $X \supset \varphi$ BK uzayı, eğer her $x = (x_k)_{k=0}^{\infty} \in X$ dizisi bir tek $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n e^{(n)}$ gösterimine sahipse, AK ’ya da sahiptir diye ifade edilir.

Bir $X \supset \varphi$ FK – uzayı; eğer her $x = (x_k)_{k=0}^{\infty} \in X$, bir tek $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e^{(n)}$ gösterimine sahip ise, AK özelliğine sahiptir diye adlandırılır.

3. BELİRLENMİŞ BAZI DİZİ UZAYLARI ARASINDA LİNEER OPERATÖRLERİN KOMPAKT OLMAMA DERECESESİ

Bu bölümde; belirlenmiş bazı X ve Y dizi uzayları arasında lineer operatörleri inceleyeceğiz. Diğer durumların yanı sıra, eğer X herhangi bir p – normlu uzayı ve $Y = \omega_0^1, \omega^1, c_0(\mu), c(\mu)$, yada $c_\infty(\mu)$ ise, A için X 'i Y 'ye dönüştürecek biçimde gerekli ve yeterli koşullar bulunabilir. O zaman; kompakt olmama Hausdorff derecesi, bir kompakt operatör olacak biçimde A için gerekli ve yeterli koşulların verilmesi suretiyle tatbik edilebilir.

3.1. Dual Uzaylar ve Matris Dönüşümleri

X ve Y , iki Frechet uzayı olsun. Daha önceden verilen tanımları ile birlikte $B(X, Y)$ ve $X^* = B(X, \mathbb{C})$ uzayları var olsun. Eğer X , p – normlu ve Y , p^* – normlu, $L \in B(X, Y)$ ise; o zaman L 'nin norm operatörü için,

$$\|L\| = \sup\{\|f(x)\| : \|x\| = 1\}$$

(3.1)

yazılır. Ayrıca; (3.1)'deki norm ile $\|f\| = \sup\{\|f(x)\| : \|x\| = 1\}$ ($f \in X^*$) normu X^* uzayı içindir.

$$X^\beta = \left\{ a \in \omega : \forall x \in X \text{ için } \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k \text{ yakınsar} \right\} ; \omega \text{ 'nın herhangi } X \text{ alt}$$

kümesi için, X 'in β – duali diye adlandırılır.

Eğer X bir lineer metrik uzay ise, o zaman onun metriği bir tam g paranormu ile verilir ve $S_\delta[x_0] = \{x \in X : g(x - x_0) \leq \delta\}$ ($\delta > 0$; $x_0 \in X$) ile ifade edilir.

(X, g) bir FK uzayı ve $a \in \omega$ olsun. Bu durumda; sağındaki terimi var ve sonlu olarak sağlanan

$$\|a\|_D^* = \sup \left\{ \left\| \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k \right\| : x \in S_{1/D}[0] \right\} \quad (D > 0)$$

değeri elde edilir. Öyle ki; Wilansky (1984) gereğince $a \in X^\beta$ olduğu her durumda bu söz konusudur. Eğer X bir p – normlu FK uzayı ise, o zaman

$$\|a\|^* = \sup \left\{ \left\| \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k \right\| : \|x\| = 1 \right\}$$

olur.

Şimdi ise Maddox (1968) gereğince daha sonra kullanılacak olan aşağıdaki bazı sonuçları yazabiliriz:

$0 < p < \infty$ ve $K^{\langle v \rangle} = [2^v, 2^{v+1} - 1]$ ($v = 0, 1, \dots$) verilsin. Bu durumda;

$$M^p = \begin{cases} \left\{ a \in \omega : \sum_{v=0}^{\infty} 2^{v/p} \max_v |a_k| < \infty \right\} & , \quad 0 < p \leq 1 \\ \left\{ a \in \omega : \sum_{v=0}^{\infty} 2^{v/p} \left(\sum_v |a_k|^q \right)^{1/q} < \infty \right\} & , \quad 1 < p < \infty ; q = p/(p-1) \end{cases}$$

ve her $a \in M^p$ için,

$$\|a\|_{M^p} = \begin{cases} \sum_{v=0}^{\infty} 2^{v/p} \max_v |a_k| & , \quad 0 < p \leq 1 \\ \sum_{v=0}^{\infty} 2^{v/p} \left(\sum_v |a_k|^q \right)^{1/q} & , \quad 1 < p < \infty \end{cases}$$

elde edilir.

O zaman, $(\omega_0^p)^\beta = (\omega^p)^\beta = (\omega_\infty^p)^\beta = M^p$ ve M^p de $\|a\|^* = \|a\|_{M^p}$ şeklinde yazabiliriz.

Pozitif reel sayıların azalmayan üssel sınırlı bir $\Lambda = (\lambda_n)_{n=0}^\infty$ dizisi ve $(\lambda_{n(v+1)})_{v=0}^\infty$ birleşik bir alt dizisi olsun. Bu durumda;

$$C(\Lambda) = \left\{ a \in \omega : \sum_{v=0}^{\infty} \lambda_{n(v+1)} \max_v \left| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k} \right| < \infty \right\}$$

ve her $a \in C(\Lambda)$ için,

$$\|a\|_{C(\Lambda)} = \sum_{v=0}^{\infty} \lambda_{n(v+1)} \max_v \left| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k} \right|$$

yazılır. O halde;

$$(c_0(\Lambda))^\beta = (c(\Lambda))^\beta = (c_\infty(\Lambda))^\beta = C(\Lambda)$$

ve $C(\Lambda)$ 'da

$$\|a\|^* = \|a\|_{C(\Lambda)}$$

olur.

Eğer A sonsuz bir matris ise, o zaman A 'nın n . satırındaki diziler için A_n yazılır. ω 'nın herhangi iki X ve Y alt kümeleri için; (X, Y) , X 'i Y 'ye dönüştüren tüm sonsuz matrislerin sınıfını göstermek üzere,

$$A \in (X, Y) \text{ olur} \Leftrightarrow A_n \in X^\beta ,$$

her n için var ve $\forall x \in X$ için $A(x) \in Y$ 'dir.

Şimdi aşağıdaki iki sonuca ihtiyacımız vardır:

Teorem 3.1.1. X ve Y birer FK uzayı olsun. O zaman;

(i) $(X, Y) \subset B(X, Y)$ 'dir yani; her $A \in (X, Y)$ için $L_A(x) = A(x)$ ($x \in X$) olacak biçimde bir $L_A \in B(X, Y)$ elemanı tanımlanabilir.

(ii) $A \in (X, \ell_\infty) \Leftrightarrow$ bazı $D > 0$ için

$$\|A\|_D^* = \sup_n \|A_n\|_D^* < \infty$$

(3.2)

olur. Ayrıca; eğer X p -normlu uzay ve $A \in (X, \ell_\infty)$ ise, o zaman

$$\|A\|^* = \sup_n \|A_n\|^* = \|L_A\| < \infty$$

(3.3)

olur.

(iii) Eğer $(b^{(k)})_{k=0}^\infty$, X 'in bir bazı ve Y_1 , Y 'nin bir kapalı alt uzayı olacak şekilde Y ile Y_1 birer FK uzayı ise, o zaman $A \in (X, Y_1)$ 'dir $\Leftrightarrow A \in (X, Y)$ ve $\forall k = 0, 1, \dots$ için $A(b^{(k)}) \in Y_1$ 'dir.

İspat : (i) Bu, Wilansky (1984) gereğince görülebilir.

(ii) İlk olarak; varsayalım ki, (3.2) sağlanır. Bu durumda, $A_n(x)$ serisi her n ve her $x \in S_{1/D}[0]$ için yakınsar ve $A(x) \in \ell_\infty$ 'dur. $S_{1/D}[0]$ kümesi Wilansky (1964) gereğince emiliyor olduğundan, her n için $A_n \in X^\beta$ ve $\forall x \in X$ için $A(x) \in \ell_\infty$ sonucuna ulaşılır. Buradan; $A \in (X, \ell_\infty)$ elde edilir.

Tersine; $A \in (X, \ell_\infty)$ verilsin. O zaman; (i) kısmı ile $L_A \in B(X, Y)$ bulunur. Böylece; $S_{1/D}[0] \subset N$ ve $\forall x \in N$ için $\|L_A(x)\| \leq 1$ olacak biçimde X üzerinde 0 'ın bir N komşuluğu ile reel bir $D > 0$ vardır. Buda (3.2) koşulunu ifade eder.

Eğer X p -normlu bir uzay ise, o zaman $L_A \in B(X, Y)$ gerektirir ki; her $\|x\| = 1$ için, $\|A(x)\|_\infty = \sup_n |A_n(x)| = \|L_A(x)\|_\infty \leq \|L_A\|$ olur. Böylece; her n ve her $\|x\| = 1$ için $|A_n(x)| \leq \|L_A\|$ 'dır ve $\|\cdot\|^*$ normunun tanımı gereğince,

$$\sup_n \|A_n\|^* \leq \|L_A\| \quad (3.4)$$

elde edilir. Dahası; verilen $\varepsilon > 0$ için $\|A(x)\|_\infty \geq \|L_A\| - \varepsilon/2$ olacak biçimde $\|x\| = 1$ ile $x \in X$ vardır ve

$$|A_{n(x)}(x)| \geq \|A(x)\|_\infty - \varepsilon/2$$

olacak şekilde bir $n(x)$ tamsayısı vardır. Sonuç olarak, $\|A_{n(x)}(x)\| \geq \|L_A\| - \varepsilon$ olur.

Bu sebeple,

$$\|A\|^* = \sup_n \|A_n\|^* \geq \|L_A\| - \varepsilon$$

olur. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan, $\|A\|^* \geq \|L_A\|$ ve (3.4) ile de $\|A\|^* = \|L_A\|$ elde edilir.

(iii) $A \in (X, Y_1)$ için koşulların gerekliliği açık olarak görülebilir. Tersine; eğer $A \in (X, Y)$ ise, o zaman (i) kısmı ile $L_A \in B(X, Y)$ olur. Y_1 , Y 'nin bir kapalı alt uzayı olduğundan, Y_1 ve Y 'nin FK topolojileri Wilansky (1984) gereğince aynıdır. Sonuç olarak; $L_A \in B(X, Y_1)$ 'dir. Neticede; $(b^{(k)})_{k=0}^\infty$, X 'in bir bazı ile

$$X = \overline{\text{span}\{b^{(k)}\}}$$

ve

$$f(b^{(k)}) \in Y_1 \quad (k = 0, 1, \dots)$$

ile L_A 'nın sürekliliği gerektirir ki;

$$L_A(x) \in L_A\left(\overline{\text{span}\{b^{(k)}\}}\right) \subset \overline{L_A\left(\text{span}\{b^{(k)}\}\right)} \subset \overline{Y_1} = Y_1$$

olur.

ω 'nın bir X alt kümesi; eğer $y \in X$, bazı $x \in X$ için her ne zaman $|y_k| \leq |x_k|$ şartını sağlıyorsa, normal diye adlandırılır.

Teorem 3.1.2.

(i) T bir üçgen matris olsun. Bu durumda ; ω 'nın keyfi X ve Y alt kümeleri için,

$$A \in (X, Y_T) \Leftrightarrow TA \in (X, Y)$$

yazılır.

(ii) B bir pozitif üçgen matris ve Y dizilerin bir normal kümesi olsun. Her $m = 0, 1, \dots$ için $N_m \subset \{0, 1, \dots, m\}$, $N = (N_m)_{m=0}^\infty$ ve bütün N dizilerinin kümesi N olsun. Her $N \in N$ için,

$$S_m^N = \sum_{n \in N_m} t_{mn} A_n$$

yani

$$s_{mk}^N = \sum_{n \in N_m} t_{mn} a_{nk} \quad (m, k = 0, 1, \dots)$$

olacak biçimde S^N matrisini tanımlayabiliriz. O zaman; ω 'nın keyfi X alt kümeleri ve dizilerin herhangi Y normal kümesi için,

$$A \in (X, Y_{[B]}) \Leftrightarrow N \text{ üzerindeki bütün } N \text{ dizileri için } S^N \in (X, Y) \text{ yazılır.}$$

İspat. (i) Bu, Malkowsky (1996) gereğince görülebilir.

(ii) İlk önce, $A \in (X, Y_{[B]})$ alalım. O zaman; $A_n \in X^\beta$ ($n = 0, 1, \dots$) gerektirir ki, her $m = 0, 1, \dots$ ve her $N \in N$ için $S_m^N \in X^\beta$ olur. $y = B([A(x)])$ alalım. Bu durumda, $A(x) \in Y_{[B]}$ yani $y \in Y$ ve Y 'nin normallliği ile her $N \in N$ için $S^N(x) \in Y$ gerektirmesi ile birlikte yine her $N \in N$ için,

$$\left| S_m^N(x) \right| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} s_{mk}^N x_k \right| = \left| \sum_{n \in N_m} b_{mn} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k \right| \leq |y_m| \quad (m = 0, 1, \dots)$$

yazılabilir. Böylece, her $N \in N$ için, $S^N \in (X, Y)$ olur.

Tersine; her $N \in N$ için $S^N \in (X, Y)$ olsun. O zaman, her m ve her $N \in N$ için $S_m^N \in X^\beta$ olur. Aslında; $N = (\{m\})_{m=0}^{\infty}$ için

$$S_m^N = b_{mm} A_m \in X^\beta$$

vardır. Böylece; $b_{mm} \neq 0$ olduğu için $A_m \in X^\beta$ elde edilir. Yine, $x \in X$ alalım. Her $m = 0, 1, \dots$ değerleri için,

$$\left| \sum_{n \in N_m^{(0)}} b_{mn} A_n(x) \right| = \max_{N_m \subset \{0, \dots, m\}} \left| \sum_{n \in N_m} b_{mn} A_n(x) \right|$$

olacak biçimde bir $N_m^{(0)}$ kümesi seçebiliriz. O zaman, Peyerimoff (1957) tarafından verilen ve iyi bilinen bir eşitsizlik gereğince

$$y_m \leq 4 \left| \sum_{n \in N_m^{(0)}} b_{mn} A_n(x) \right| = 4 \left| S^{N^{(0)}}(x) \right|$$

olur. Hipoteze göre $S^{N^{(0)}}(x) \in Y$ 'dir. Bu durumda ise, Y 'nin normallliği $y = B([A(x)]) \in Y$ 'yi gerektirir yani $A(x) \in Y_{[B]}$ yazılır. Buradan

$$A \in (X, Y_{[B]})$$

görülebilir.

Teorem 3.1.1 ve 3.1.2'nin bir üst sonucu olarak şunu elde ederiz:

Sonuç 3.1.1.

X bir keyfi FK uzayı olsun. Ayrıca, $\mu = (\mu_n)_{n=0}^{\infty}$ sonsuza giden pozitif reellerin azalmayan bir dizisi olsun. Kısaca; $\omega_0 = \omega_0^1$ gibi yazacağız ve buna göre

$$M(X, \omega_{\infty}) = \sup_{m \geq 1} \left(\max_{N_m \subset \{1, \dots, m\}} \left\| \frac{1}{m} \sum_{n \in N_m} A_n \right\|_D^* \right)$$

ve

$$M(X, c_{\infty}(\mu)) = \sup_{m \geq 0} \left(\max_{N_m \subset \{0, \dots, m\}} \left\| \frac{1}{\mu_m} \sum_{n \in N_m} (\mu_n A_n - \mu_{n-1} A_{n-1}) \right\|_D^* \right)$$

yazılabilir.

(i) O zaman, $A \in (X, \omega_{\infty}) \Leftrightarrow$ bazı $D > 0$ için

$$M(X, \omega_{\infty}) < \infty$$

(3.5)

olur. Eğer $(b^{(k)})_{k=0}^{\infty}$, X 'in bir bazı ise, o zaman $A \in (X, \omega_0) \Leftrightarrow$ (3.5) koşulu sağlanır ve her $k = 0, 1, \dots$ için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{m} \sum_{n=1}^m |A_n(b^{(k)})| \right) = 0$$

(3.6)

olur. Ayrıca da; $A \in (X, \omega) \Leftrightarrow$ (3.5) koşulu sağlanır ve her $k = 0, 1, \dots$ değeri için yine

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{m} \sum_{n=1}^m |A_n(b^{(k)} - \ell_k e)| \right) = 0$$

(3.7)

olacak biçimde kompleks ℓ_k ($k = 0, 1, \dots$) sayıları vardır.

Eğer X bir p -normlu uzayı ve $Y = \omega_0$, ω yada ω_{∞} için $A \in (X, Y)$ ise, o zaman

$$\|A\|_{\omega_\infty}^* = \sup_{m \geq 1} \left(\max_{N_m \subset \{1, \dots, m\}} \left\| \frac{1}{m} \sum_{n \in N_m} A_n \right\|^* \right)$$

için

$$\|A\|_{\omega_\infty}^* \leq \|L_A\| \leq 4\|A\|_{\omega_\infty}^*$$

(3.8)

olur.

(ii) $A \in (X, c_\infty(\mu)) < \infty \Leftrightarrow$ bazı $D > 0$ için

$$M(X, c_\infty(\mu)) < \infty$$

(3.9)

biçiminde bir son durum da elde edilir. Eğer $(b^{(k)})_{k=0}^\infty$, X 'in bir bazı ise, o zaman $A \in (X, c_0(\mu)) \Leftrightarrow$ (3.9) koşulu sağlanır ve bu durumda da her $k = 0, 1, \dots$ değeri için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\mu_m} \sum_{n=0}^m \left| \mu_n A_n(b^{(k)}) - \mu_{n-1} A_{n-1}(b^{(k)}) \right| \right) = 0$$

(3.10)

olur. Diğer taraftan; $A \in (X, c(\mu)) \Leftrightarrow$ (3.10) koşulu sağlanır ve her $k = 0, 1, \dots$ değeri için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\mu_m} \sum_{n=0}^m \left| \mu_n (A_n(b^{(k)}) - \ell_k) - \mu_{n-1} A_{n-1}(b^{(k)} - \ell_k) \right| \right) = 0 \quad (3.11)$$

olur. Neticede; eğer X bir p -normlu uzayı ve $Y = c_0(\mu)$, $c(\mu)$ yada $c_\infty(\mu)$ için $A \in (X, Y)$ ise, o zaman

$$\|A\|_{c_\infty}^* = \sup_{m \geq 0} \left(\max_{N_m \subset \{1, \dots, m\}} \left\| \frac{1}{\mu_m} \sum_{n \in N_m} (\mu_n A_n - \mu_{n-1} A_{n-1}) \right\|^* \right)$$

için

$$\|A\|_{c_\infty(\mu)}^* \leq \|L_A\| \leq 4\|A\|_{c_\infty(\mu)}^* \quad (3.12)$$

elde edilir.

İspat : Bütün göstermemiz gereken (3.8)-(3.12) eşitsizlikleridir. Bu doğrultuda; $Y = \omega_0$, ω , ω_∞ iken $A \in (X, Y)$ olsun. O zaman her $m = 1, 2, \dots$ için $N \subset N_m$ ve $\|x\| = 1$ olduğu her durumda

$$\left| \frac{1}{m} \sum_{n \in N_m} A_n(x) \right| \leq \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m |A_n(x)| \leq \|L_A\|$$

yazılır. Bu durum ise gerektirir ki,

$$\|A\|_{\omega_\infty}^* \leq \|L_A\|$$

(3.13)

olur. Verilen $\varepsilon > 0$ için

$$\|A(x)\| = \sup_{m \geq 1} \left(\frac{1}{m} \sum_{n=1}^m |A_n(x)| \right) \geq \|L_A\| - \varepsilon/2$$

olacak şekilde $\|x\| = 1$ şartlı $x \in X$ vardır ve

$$\frac{1}{m(x)} \sum_{n=1}^{m(x)} |A_n(x)| \geq \|A(x)\| - \varepsilon/2$$

olacak biçimde bir $m(x)$ tamsayısı da mevcuttur.

Sonuç olarak,

$$\frac{1}{m(x)} \sum_{n=1}^{m(x)} |A_n(x)| \geq \|A(x)\| - \varepsilon$$

yazılabilir. Buna ilave olarak, Peyerimoff (1957) tarafından verilen ve iyi bilinen bir eşitsizlik gereğince

$$4 \max_{N_{m(x)} \subset \{1, \dots, m(x)\}} \left(\frac{1}{m(x)} \left| \sum_{n \in N_{m(x)}} A_n(x) \right| \right) \geq \frac{1}{m(x)} \sum_{n=1}^{m(x)} |A_n(x)| \geq \|L_A\| - \varepsilon$$

olur ve böylece buradan $4\|A\|_{\omega_\infty}^* \geq \|L_A\| - \varepsilon$ elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan

$4\|A\|_{\omega_\infty}^* \geq \|L_A\|$ yazılır. (3.13) ile verilen eşitsizlik dikkate alınarak, (3.8) sağlanır. (3.12)'deki eşitsizlikler benzer yollarla ispatlanır.

Uyarı 3.1.1.

Eğer X bir p -normlu FK uzayı ve Y 'de $\omega_0, \omega, \omega_\infty, c_0(\mu), c(\mu)$ yada $c_\infty(\mu)$ uzaylarından herhangi biri ise; o zaman $A \in (X, Y)$ için koşullar, X 'in β -dualleri üzerindeki doğal normlar tarafından (3.5) ve (3.9) koşullarında $\|\cdot\|_D^*$ normları yer değiştirilerek Sonuç 3.1.1.'deki uygun durumlarındaki gibi istenen görülebilir. Ayrıca burada bazı yerlerde,

$$\begin{cases} \max_{N_m \subset \{0, \dots, m\}} & , & Y = \omega_0, \omega, \omega_\infty \text{ ise} \\ \max_{N_m \subset \{1, \dots, m\}} & , & Y = c_0(\mu), c(\mu), c_\infty(\mu) \text{ ise} \end{cases}$$

için $\max_{N_m}$, $1 < p < \infty$ için $q = p/(p-1)$ ve $\Delta_n(\mu_n a_{nk}) = \mu_n a_{nk} - \mu_{n-1} a_{n-1,k}$ eşitliği ile $\max_{2^v \leq k \leq 2^{v+1}-1}$ için $\max_v$ ve $\sum_{2^v \leq k \leq 2^{v+1}-1}$ için $\sum_v$ kullanacağız. Buna göre;

(i) $X = \ell_p$ ($0 < p < \infty$) için,

$$M(\ell_p, \omega_\infty) = \begin{cases} \sup_m \left(\max_{N_m} \left(\sup_k \left| \frac{1}{m} \sum_{n \in N_m} a_{nk} \right| \right) \right) & , \quad 0 < p \leq 1 \\ \sup_m \left(\max_{N_m} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{m} \sum_{n \in N_m} a_{nk} \right|^q \right) \right) & , \quad 0 < p \leq \infty \end{cases}$$

ve

$$M(\ell_p, c_\infty(\mu)) = \begin{cases} \sup_m \left(\max_{N_m} \left(\sup_k \left| \frac{1}{\mu_m} \sum_{n \in N_m} \Delta_n(\mu_n a_{nk}) \right| \right) \right) & , \quad 0 < p \leq 1 \\ \sup_m \left(\max_{N_m} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\mu_m} \sum_{n \in N_m} \Delta_n(\mu_n a_{nk}) \right|^q \right) \right) & , \quad 0 < p < \infty \end{cases}$$

yazılır.

(ii) $X = \omega_\infty$ ($0 < p < 1$) için,

$$M(\omega_\infty^p, \omega_\infty) = \begin{cases} \sup_m \left(\max_{N_m} \left(\sum_{v=0}^{\infty} 2^{v/p} \max_v \left| \frac{1}{m} \sum_{n \in N_m} a_{nk} \right| \right) \right) & , \quad 0 < p \leq 1 \\ \sup_m \left(\max_{N_m} \left(\sum_{v=0}^{\infty} 2^{v/p} \left(\sum_v \left| \frac{1}{m} \sum_{n \in N_m} a_{nk} \right|^q \right)^{1/q} \right) \right) & , \quad 1 < p \leq \infty \end{cases}$$

ve

$$M(\omega_\infty^p, c_\infty(\mu)) = \begin{cases} \sup_m \left(\max_{N_m} \left(\sum_{v=0}^{\infty} 2^{v/p} \max_v \left| \frac{1}{\mu_m} \sum_{n \in N_m} \Delta_n(\mu_n a_{nk}) \right| \right) \right) & , \quad 0 < p \leq 1 \\ \sup_m \left(\max_{N_m} \left(\sum_{v=0}^{\infty} 2^{v/p} \left(\sum_v \left| \frac{1}{\mu_m} \sum_{n \in N_m} \Delta_n(\mu_n a_{nk}) \right|^q \right)^{1/q} \right) \right) & , \quad 1 < p < \infty \end{cases}$$

olur.

(iii) $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$, pozitif reellerin üssel sınırlı bir dizisi ve $(\lambda_{k(v)})_{v=0}^{\infty}$, birleşik bir alt dizi olsun. Burada, $k(v) \leq k \leq k(v+1)-1$ olacak biçimde bütün k tamsayıları üzerine alan maksimum ve toplam sembolü için $\max_v$ ile $\sum_v$ kullanacağız. Bu durumda; $X = c_{\infty}(\Lambda)$ için,

$$M(c_{\infty}(\Lambda), \omega_{\infty}) = \sup_m \left(\max_{N_m} \left(\sum_{v=0}^{\infty} \lambda_{k(v+1)} \max_v \left| \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} \left(\frac{1}{m} \sum_{n \in N_m} a_{nj} \right) \right| \right) \right)$$

ve

$$M(c_{\infty}(\Lambda), c_{\infty}(\mu)) = \sup_m \left(\max_{N_m} \left(\sum_{v=0}^{\infty} \lambda_{k(v+1)} \max_v \left| \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} \left(\frac{1}{\mu_m} \sum_{n \in N_m} \Delta_n(\mu_n a_{nk}) \right) \right| \right) \right)$$

yazılır.

3.2. Kompakt Olmama Derecesi ve Dönüşümler

Bu bölümde, bir L_A operatörünün kompakt oluşunu inceleyeceğiz. Çalışmamız daha çok kompakt olmama derecesi kullanma üzerine olacaktır.

Bilindiği üzere; Tanım 2.12'deki verilenlerle birlikte, eğer $\mathbb{Q}$ bir X metrik uzayının sınırlı bir altkümesi, o zaman $\mathbb{Q}$ 'nun kompakt olmama Hausdorff derecesi, $\chi(\mathbb{Q})$ ile gösterilir ve

$$\chi(\mathbb{Q}) = \inf \{ \varepsilon > 0 : \mathbb{Q} , X' \text{de sonlu bir } \varepsilon - \text{ağa sahip} \}$$

yazılır.

χ fonksiyonu, kompakt olmama Hausdorff derecesi diye adlandırılır (Banas ve Goebel, 1980; Akhmerov ve ark., 1992; Rakocevic, 1994).

Şimdi bazı tanımları burada ifade edelim: Öncelikle, $\mathbb{Q}$ 'nun kapanışı $\overline{\mathbb{Q}}$ ile gösterilsin. Eğer $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_1$, ve $\mathbb{Q}_2$ bir (X, d) metrik uzayının sınırlı alt kümeleri ise, o zaman,

$$\chi(\mathbb{Q}) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{Q} \text{ bir tam sınırlı küme,}$$

$$\chi(\mathbb{Q}) = \chi(\overline{\mathbb{Q}}) ,$$

$$\mathbb{Q}_1 \subset \mathbb{Q}_2 \Rightarrow \chi(\mathbb{Q}_1) \leq \chi(\mathbb{Q}_2) ,$$

$$\chi(\mathbb{Q}_1 \cup \mathbb{Q}_2) = \max \{ \chi(\mathbb{Q}_1), \chi(\mathbb{Q}_2) \} ,$$

$$\chi(\mathbb{Q}_1 \cap \mathbb{Q}_2) \leq \min \{ \chi(\mathbb{Q}_1), \chi(\mathbb{Q}_2) \}$$

olur.

Eğer X uzayı bir p - normlu uzay ise; o zaman burada $\chi(\mathbb{Q})$ fonksiyonu lineer yapıyla bağlantılı olan bazı ilave özelliklere sahiptir. Mesela; $\chi(\mathbb{Q}_1 + \mathbb{Q}_2) \leq \chi(\mathbb{Q}_1) + \chi(\mathbb{Q}_2)$, her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\chi(\lambda \mathbb{Q}) = |\lambda| \chi(\mathbb{Q})$ vardır.

Eğer X (sırasıyla, Y) bir p -normlu (sırasıyla, q -normlu) uzay ve $A \in (X, Y)$ ise; o zaman $\|A\|_\chi$ ile gösterilen A 'nın kompakt olmama Hausdorff derecesi; $K = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$, X 'de bir birim küre olmak üzere $\|A\|_\chi = \chi(AK)$ ile tanımlanmaktadır. Ayrıca; A kompakttır $\Leftrightarrow \|A\|_\chi = 0$ ve $\|A\|_\chi \leq \|A\|$ 'dir.

Banas ve Goebl (1980) yada Akhmerov ve ark.'da (1992) görülebileceği üzere aşağıdaki iyi bilinen sonucu hatırlayalım:

X , bir $\{e_1, e_2, \dots\}$ Schauder tabanlı bir Banach uzayı; $\mathbb{Q}$, X 'in sınırlı bir alt kümesi ve $P_n : X \rightarrow X$, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 'nin lineer gereni üzerine bir projektör olsun. O zaman; $a = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|I - P_n\|$ iken,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in \mathbb{Q}} \|(I - P_n)x\| \right) &\leq \chi(\mathbb{Q}) \leq \inf_n \sup_{x \in \mathbb{Q}} \|(I - P_n)x\| \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in \mathbb{Q}} \|(I - P_n)x\| \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

elde edilir.

Bu bölümün esas sonucu aşağıdaki teoremdir:

Teorem 3.2.1.

A , X ve Y ; Sonuç 3.1.1'deki gibi tanımlı olsun.

(i) Eğer X bir p -normlu uzay yada $Y = \omega_0$, ω , ω_∞ için $A \in (X, Y)$ ise, bu taktirde;

$$\|A\|_{\omega_\infty}^{(m)} = \sup_{k > m} \left(\max_{N_{m,k} \subset \{m+1, \dots, k\}} \left\| \frac{1}{k} \sum_{i \in N_{m,k}} A_i \right\| \right)^* \quad (3.15)$$

için eğer $Y = \omega_0$ ise,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|A\|_{\omega_\infty}^{(m)} \leq \|L_A\|_\chi \leq 4 \lim_{m \rightarrow \infty} \|A\|_{\omega_\infty}^{(m)} \quad (3.16)$$

ve eğer $Y = \omega$ ise,

$$\frac{1}{2} \lim_{m \rightarrow \infty} \|A\|_{\omega_\infty}^{(m)} \leq \|L_A\|_\chi \leq 4 \lim_{m \rightarrow \infty} \|A\|_{\omega_\infty}^{(m)} \quad (3.17)$$

ile $Y = \omega_\infty$ ise,

$$0 \leq \|L_A\|_\chi \leq 4 \lim_{m \rightarrow \infty} \|A\|_{\omega_\infty}^{(m)} \quad (3.18)$$

elde edilir.

(ii) Eğer X bir p -normlu uzay yada $Y = c_0(\mu)$, $c(\mu)$ yada $c_\infty(\mu)$ için $A \in (X, Y)$ ise, o zaman

$$\|A\|_{c_\infty}^{(m)} = \sup_{k > m} \left(\max_{N_{m,k} \subset \{m+1, \dots, k\}} \left\| \frac{1}{\mu_k} \sum_{i \in N_{m,k}} \mu_i A_i - \mu_{i-1} A_{i_1} \right\| \right)^* \quad (3.19)$$

için eğer $Y = c_0(\mu)$ ise,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|A\|_{c_\infty}^{(m)} \leq \|L_A\|_\chi \leq 4 \lim_{m \rightarrow \infty} \|A\|_{c_\infty}^{(m)} \quad (3.20)$$

ve $Y = c(\mu)$ ise,

$$\frac{1}{2} \lim_{m \rightarrow \infty} \|A\|_{c_\infty}^{(m)} \leq \|L_A\|_\chi \leq 4 \lim_{m \rightarrow \infty} \|A\|_{c_\infty}^{(m)} \quad (3.21)$$

ile $Y = c_\infty(\mu)$ ise,

$$0 \leq \|L_A\|_\chi \leq 4 \lim_{m \rightarrow \infty} \|A\|_{c_\infty}^{(m)} \quad (3.22)$$

olur.

İspat : (3.16) ve (3.20)'deki limitler var olsun. Ayrıca da; $K = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ alalım. (3.14) eşitsizliği ile $Y = \omega_0$ durumunda; $P_m : \omega_0 \rightarrow \omega_0$, $m = 1, 2, \dots$ biçiminde ilk m koordinatlı bir projektör yani $P_m(x) = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, 0, \dots)$, $x = (x_i) \in \omega_0$ biçiminde

$$\|L_A\|_\chi = \chi(AK) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\sup_{x \in K} \|(I - P_m)Ax\| \right]$$

(3.23)

yazabiliriz. Verilen $\varepsilon > 0$ için;

$$\|(I - P_m)Ax\| > \|(I - P_m)A\| - \varepsilon/2 \quad (3.24)$$

olacak şekilde $x \in K$ vardır. Ayrıca;

$$\frac{1}{k(x)} \sum_{i=m+1}^{k(x)} |A_i(x)| > \|(I - P_m)Ax\| - \varepsilon/2 \quad (3.25)$$

olacak biçimde ($k(x) > m$) ile belirli bir $k(x)$ tamsayısı mevcuttur. Peyerimoff (1957) tarafından verilen ve iyi bilinen bir eşitsizlik gereğince,

$$4 \left(\max_{N_{m,k(x)} \subset \{m+1, \dots, k(x)\}} \left| \frac{1}{k(x)} \sum_{i \in N_{m,k(x)}} A_i(x) \right| \right) \geq \frac{1}{k(x)} \sum_{i=m+1}^{k(x)} |A_i(x)| \quad (3.26)$$

olur. Yine (3.24) ve (3.25) gereğince,

$$4 \left(\max_{N_{m,k}(x) \subset \{m+1, \dots, k(x)\}} \frac{1}{k(x)} \left| \sum_{i \in N_{m,k}(x)} A_i(x) \right| \right) \geq \|(I - P_m)A\| - \varepsilon \quad (3.27)$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi ve $x \in K$ olduğundan her m için (3.27)'den dolayı,

$$\|(I - P_m)A\| \leq 4 \left[\sup_{k > m} \left(\max_{N_{m,k} \subset \{m+1, \dots, k\}} \left\| \frac{1}{k} \sum_{i \in N_{m,k}} A_i \right\| \right) \right] \quad (3.28)$$

yazılır. Böylece (3.23) ve (3.28) gereğince (3.16)'da ki ikinci eşitsizliği buluruz. (3.16)'da ki birinci eşitsizliği ispatlamak için, varsayalım ki; m bir tamsayı, $k > m$, $N_{m,k} \subset \{m+1, \dots, k\}$ ve $x \in K$ 'dır. O zaman,

$$\left| \frac{1}{k} \sum_{i \in N_{m,k}} A_i x \right| \leq \frac{1}{k} \sum_{i \in N_{m,k}} |A_i x| \leq \frac{1}{k} \sum_{i=m+1}^k |A_i x| \leq \|(I - P_m)Ax\|$$

olur. Buradan; her m ve $k > m$ için, $\left\| \frac{1}{k} \sum_{i \in N_{m,k}} A_i \right\| \leq \|(I - P_m)L_A\|$ değerine sahip

oluruz ve (3.23) yada (3.14) gereğince; (3.16)'da ki ilk eşitsizliği elde ederiz. (3.17)'yi ispatlamak için; dikkat çekildiği üzere, her $x = (x_k)_{k=0}^{\infty} \in \omega$ dizisi $x - \ell e \in \omega$ olacak biçimde $\ell \in \mathbb{C}$ elemanı için

$$x = \ell e + \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - \ell) e^{(k)}$$

ile bir tek gösterime haiz bir değer vardır. Öte yandan; $P_m : \omega \rightarrow \omega$,

$$P_m(x) = \ell e + \sum_{k=1}^m (x_k - \ell) e^{(k)}, \quad m = 1, 2, \dots \text{ biçiminde bir tanım yapalım.}$$

$\|I - P_m\| = 2$, $m = 1, 2, \dots$ olduğu kolayca ispatlanabilir. Ayrıca; (3.17)'nin ispatı (3.16)'nın ispatına benzer olduğundan istenen kolayca elde edilebilir.

(3.18)'yi ispatlayalım. Buna göre;

$$P_m : \omega_{\infty} \rightarrow \omega_{\infty}, \quad P_m(x) = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, \dots), \quad x = (x_i) \in \omega_{\infty}, \quad m = 1, 2, \dots$$

biçiminde tanımlama yapalım. Açıktır ki;

$$AK \subset P_m(AK) + (I - P_m)(AK)$$

olur. Ayrıca, χ fonksiyonunun elementer özellikleri ile,

$$\chi(AK) \leq \chi(P_m(AK)) + \chi((I - P_m)(AK))$$

$$\begin{aligned}
&= \chi((I - P_m)(AK)) \\
&\leq \sup_{x \in K} \|(I - P_m)Ax\| \quad (3.29)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.18)'deki limit açıkça var olduğundan, (3.29) ile (3.16)'da ki ikinci eşitsizliğin ispatından dolayı (3.18) bulunur. Dikkat edileceği üzere; (3.20), (3.21) ve (3.22) eşitsizlikleri (3.16), (3.17) ve (3.18) eşitsizlikleri ile benzer bir biçimde ispatlanabilir.

Sonuç 3.2.1.

A , X ve Y ; Teorem 3.2.1'deki gibi tanımlı olsun. O zaman; $A \in (X, Y)$ için, A kompakttır $\Leftrightarrow \|A\|_{\omega_\infty} < \infty$ ve eğer $Y = \omega_0$ ve ω ise

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|A\|_{\omega_\infty}^{(m)} = 0 \quad (3.30)$$

olur. A kompakt $\Rightarrow \|A\|_{\omega_\infty} < \infty$ ve eğer $Y = \omega_\infty$ ise

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|A\|_{\omega_\infty}^{(m)} = 0 \quad (3.31)$$

olur. Ayrıca; A kompakttır $\Leftrightarrow \|A\|_{c_\infty(\mu)} < \infty$ ve eğer $Y = c_0(\mu)$ ile $c(\mu)$ olursa

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|A\|_{c_\infty(\mu)}^{(m)} = 0 \quad (3.32)$$

ve A kompakt $\Rightarrow \|A\|_{c_\infty(\mu)} < \infty$ ve eğer $Y = c_\infty(\mu)$ ise

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|A\|_{c_\infty(\mu)}^{(m)} = 0 \quad (3.33)$$

elde edilir.

Şimdi Uyarı 3.1.1 ile bağlantılı olarak birkaç sonuç verelim:

Sonuç 3.2.2.

A , X ve Y ; Teorem 3.2.1 ve Uyarı 3.1.1(i)'deki gibi tanımlı olsun. Bu durumda; $\max_{N_{m,k} \subset \{m+1, \dots, k\}}$ için $\max_{N_{m,k}}$ ve $A \in (X, Y)$ ile $X = \ell_p$ ($0 < p < \infty$) ve her m için,

$$M(\ell_p, \omega_\infty)^{(m)} = \begin{cases} \sup_{k>m} \left(\max_{N_{m,k}} \left(\sup_j \left| \frac{1}{k} \sum_{i \in N_{m,k}} a_{ij} \right| \right) \right) & , \quad 0 < p \leq 1 \\ \sup_{k>m} \left(\max_{N_{m,k}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{1}{k} \sum_{i \in N_{m,k}} a_{ij} \right|^q \right)^{1/q} \right) & , \quad 0 < p < \infty \end{cases}$$

ve

$$M(\ell_p, c_\infty(\mu))^{(m)} = \begin{cases} \sup_{k>m} \left(\max_{N_{m,k}} \left(\sup_j \left| \frac{1}{\mu_k} \sum_{i \in N_{m,k}} \Delta_i(\mu_i a_{ij}) \right| \right) \right) & , \quad 0 < p \leq 1 \\ \sup_{k>m} \left(\max_{N_{m,k}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\mu_k} \sum_{i \in N_{m,k}} \Delta_i(\mu_i a_{ij}) \right|^q \right)^{1/q} \right) & , \quad 0 < p < \infty \end{cases}$$

olur. O zaman; A kompakttır $\Leftrightarrow M(\ell_p, \omega_\infty) < \infty$ ve eğer $Y = \omega_0$ ve ω ise bu durumda

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M(\ell_p, \omega_\infty)^{(m)} = 0 \quad (3.34)$$

olur. A kompakt $\Rightarrow M(\ell_p, \omega_\infty) < \infty$ ve $Y = \omega_\infty$ ise

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M(\ell_p, \omega_\infty)^{(m)} = 0 \quad (3.35)$$

olur. A kompakttır $\Leftrightarrow M(\ell_p, c_\infty(\mu)) < \infty$ ve eğer $Y = c_0(\mu)$ ile $c(\mu)$ olursa bu halde

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M(\ell_p, c_\infty(\mu))^{(m)} = 0 \quad (3.36)$$

olur ve A kompakt $\Rightarrow M(\ell_p, c_\infty(\mu)) < \infty$ ve eğer $Y = c_\infty(\mu)$ olacak şekilde verilmiş ise

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M(\ell_p, c_\infty(\mu))^{(m)} = 0 \quad (3.37)$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.3.

A , X ve Y ; Teorem 3.2.1 ve Uyarı 3.1.1(ii)'deki gibi tanımlı olsun. Bu durumda; $\max_{N_{m,k} \subset \{m+1, \dots, k\}}$ için $\max_{N_{m,k}}$ ve $A \in (X, Y)$ ile $X = \omega_\infty^p$ ($0 < p < \infty$) ve her m için,

$$M(\omega_\infty^p, \omega_\infty)^{(m)} = \begin{cases} \sup_{k>m} \left(\max_{N_{m,k}} \left(\sum_{v=0}^{\infty} 2^{v/p} \max_{2^v \leq j \leq 2^{v+1}-1} \left| \frac{1}{k} \sum_{i \in N_{m,k}} a_{ij} \right| \right) \right) & , \quad 0 < p \leq 1 \\ \sup_{k>m} \left(\max_{N_{m,k}} \left(\sum_{v=0}^{\infty} 2^{v/p} \left(\sum_{2^v \leq j \leq 2^{v+1}-1} \left| \frac{1}{k} \sum_{i \in N_{m,k}} a_{ij} \right|^q \right)^{1/q} \right) \right) & , \quad 1 < p < \infty \end{cases}$$

ve

$$M(\omega_\infty^p, c_\infty(\mu))^{(m)} = \begin{cases} \sup_{k>m} \left(\max_{N_{m,k}} \left(\sum_{v=1}^{\infty} 2^{v/p} \max_{2^v \leq j \leq 2^{v+1}-1} \left| \frac{1}{\mu_k} \sum_{i \in N_{m,k}} \Delta_i(\mu_i a_{ij}) \right| \right) \right) & , \quad 0 < p \leq 1 \\ \sup_{k>m} \left(\max_{N_{m,k}} \left(\sum_{v=1}^{\infty} 2^{v/p} \left(\sum_{2^v \leq j \leq 2^{v+1}-1} \left| \frac{1}{\mu_k} \sum_{i \in N_{m,k}} \Delta_i(\mu_i a_{ij}) \right|^q \right)^{1/q} \right) \right) & , \quad 1 < p < \infty \end{cases}$$

olur. O zaman; A kompakttır $\Leftrightarrow M(\omega_\infty^p, \omega_\infty) < \infty$ ve eğer $Y = \omega_0$ ve ω ise bu durumda

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M(\omega_\infty^p, \omega_\infty)^{(m)} = 0 \quad (3.38)$$

olur. A kompakt $\Rightarrow M(\omega_\infty^p, \omega_\infty) < \infty$ ve $Y = \omega_\infty$ ise

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M(\omega_\infty^p, \omega_\infty)^{(m)} = 0 \quad (3.39)$$

olur. A kompakttır $\Leftrightarrow M(\omega_\infty^p, c_\infty(\mu)) < \infty$ ve eğer $Y = c_0(\mu)$ ile $c(\mu)$ olursa bu halde

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M(\omega_\infty^p, c_\infty(\mu))^{(m)} = 0 \quad (3.40)$$

olur ve A kompakt $\Rightarrow M(\omega_\infty^p, c_\infty(\mu)) < \infty$ ve eğer $Y = c_\infty(\mu)$ olacak biçimde verilmiş ise

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M(\omega_\infty^p, c_\infty(\mu))^{(m)} = 0 \quad (3.41)$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.4.

A , X ve Y ; Teorem 3.2.1 ve Uyarı 3.1.1(iii)'deki gibi tanımlı olsun. Bu durumda; $\max_{N_{m,k} \subset \{m+1, \dots, k\}}$ için $\max_{N_{m,k}}$ ve $A \in (X, Y)$ ile $X = c_0(\Lambda)$, $c(\Lambda)$ ve $c_\infty(\Lambda)$ biçimi ile her m için,

$$M(c_\infty(\Lambda), \omega_\infty)^{(m)} = \sup_{k > m} \left(\max_{N_{m,k}} \left(\sum_{v=0}^{\infty} \lambda_{r(v+1)} \max_{r(v) \leq r \leq r(v+1)-1} \left| \sum_{j=r}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} \left(\frac{1}{k} \sum_{i \in N_{m,k}} a_{ij} \right) \right| \right) \right)$$

ve

$$M(c_\infty(\Lambda), c_\infty(\mu))^{(m)} = \sup_{k > m} \left(\max_{N_{m,k}} \left(\sum_{v=0}^{\infty} \lambda_{r(v+1)} \max_{r(v) \leq r \leq r(v+1)-1} \left| \sum_{j=r}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} \left(\frac{1}{\mu_k} \sum_{i \in N_{m,k}} \Delta_i(\mu_i a_{ij}) \right) \right| \right) \right)$$

yazılır. O zaman; A kompakttır $\Leftrightarrow M(c_\infty(\Lambda), \omega_\infty) < \infty$ ve eğer $Y = \omega_0$ ve ω ise bu durumda

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M(c_\infty(\Lambda), \omega_\infty)^{(m)} = 0 \quad (3.42)$$

olur. A kompakt $\Rightarrow M(c_\infty(\Lambda), \omega_\infty) < \infty$ ve eğer $Y = \omega_\infty$ olacak şekilde verilmiş ise

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M(c_\infty(\Lambda), \omega_\infty)^{(m)} = 0 \quad (3.43)$$

olur. A kompakttır $\Leftrightarrow M(c_\infty(\Lambda), c_\infty(\mu)) < \infty$ ve eğer $Y = c_0(\mu)$ ile $c(\mu)$ olacak biçimde ise

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M(c_\infty(\Lambda), c_\infty(\mu))^{(m)} = 0 \quad (3.44)$$

olur ve A kompakt $\Rightarrow M(c_\infty(\Lambda), c_\infty(\mu)) < \infty$ ve eğer $Y = c_\infty(\mu)$ olacak biçimde verilmiş ise

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M(c_\infty(\Lambda), c_\infty(\mu))^{(m)} = 0 \quad (3.45)$$

elde edilir.

4. KUVVETLİ C_1 TOPLANABİLİR ve SINIRLI DİZİLERİN UZAYLARI ARASINDA LİNEER OPERATÖRLERİN KOMPAKT OLMAMA DERECESİ

Bu bölümde bazı X ve Y dizi uzayları arasında bir X dizi uzayını bir Y dizi uzayı içine dönüştürmede sonsuz matrisler için gerekli ve yeterli şartlar verilecektir. Ayrıca; kompakt olmak üzere bu uzaylar arasında bir lineer operatör altında kompakt olmama Hausdorff derecesine ilişkin gerekli ve yeterli şartlar da verilecektir.

4.1. Matris Dönüşümleri

ω_0^p , ω^p ve ω_∞^p kümelerinin β -duallerini yazmak için $2^v \leq k \leq 2^{v+1} - 1$ ile tümü k indisli alınmak suretiyle toplam ve maksimum için de $\sum_v$ ile $\max_v$ yazılarak aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz:

$$M^p = \begin{cases} \left\{ a \in \omega : \sum_{v=0}^{\infty} 2^v \max_v |a_k| < \infty \right\} & , \quad p = 1 \\ \left\{ a \in \omega : \sum_{v=0}^{\infty} 2^{v/p} \left(\sum_v |a_k|^q \right)^{1/q} < \infty \right\} & , \quad 1 < p < \infty; q = \frac{p}{p-1} \end{cases}$$

$$\|a\|_{M^p} = \begin{cases} \sum_{v=0}^{\infty} 2^v \max_v & , \quad p = 1 \\ \sum_{v=0}^{\infty} 2^{v/p} \left(\sum_v |a_k|^q \right)^{1/q} & , \quad 1 < p < \infty \end{cases} \quad (\forall a \in M^p \text{ için})$$

$$\|a\|^* = \sup \left\{ \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \right\| : \|x\|_{\omega_\infty^p} = 1 \right\}$$

$$\|a\|^{**} = \sup \left\{ \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \right\| : \|x\|_{M^p} = 1 \right\}$$

Şimdi bu doğrultuda bir yardımcı teoremi verelim:

Lemma 4.1.1.

$1 \leq p < \infty$ olmak üzere;

(i) $(\omega_0^p)^\beta = (\omega^p)^\beta = (\omega_\infty^p)^\beta = M^p$ ve M^p üzerinde $\|a\|^* = \|a\|_{M^p}$ olur (Maddox, 1968; Malkowsky, 1996).

Ayrıca; M^p kümeleri $\|\cdot\|_{M^p}$ normları ile BK uzaylarıdır (Malkowsky, 1988) ve M^p uzaylarının AK 'ya sahip olduğunu görmek kolaydır.

(ii) O zaman; ω_∞^p , β -tamdır yani $(\omega_\infty^p)^{\beta\beta} = \omega_\infty^p$, $(\omega_0^p)^{\beta\beta} = (\omega^p)^{\beta\beta} = \omega_\infty^p$ 'dur (Malkowsky, 1988) ve $(M^p)^\beta = \omega_\infty^p$ üzerinde $\|a\|^{**} = \|a\|_{\omega_\infty^p}$ 'dur (Malkowsky, 1987). A sonsuz bir matris ise, A 'nın n . satırındaki dizi için A_n ve onun transpozu için A^T yazılır. ω 'nın herhangi iki X ve Y alt kümesi için; (X, Y) , X 'den Y 'ye dönüşen tüm sonsuz matrislerin sınıfı olarak gösterilir. Böylece, $A \in (X, Y)$ 'dir $\Leftrightarrow \forall n$ için $A_n \in X^\beta$ ve $\forall x \in X$ için

$$A(x) = (A_n(x))_{n=1}^\infty = \left(\sum_{k=1}^\infty a_{nk} x_k \right)_{n=1}^\infty \in Y$$

yazılır. $A \in (X, Y)$ ise, $L_A(x) = A(x)$ ($x \in X$) bir $L_A \in B(X, Y)$ elemanını tanımlar (Malkowsky ve Rakocovic, 1998).

Teorem 4.1.1.

$1 \leq p < \infty$ olsun. O zaman;

$$(i) A \in (\ell_1, \omega_\infty^p) \Leftrightarrow M(\ell_1, \omega_\infty^p) = \sup_{m,k} \left(\frac{1}{m} \sum_{n=1}^m |a_{nk}|^p \right) < \infty \quad (4.1)$$

olur.

$$(ii) A \in (\ell_1, \omega_0^p) \Leftrightarrow (4.1) \text{ sağlanır ve } \forall k \text{ için}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{m} \sum_{n=1}^m |a_{nk}|^p \right) = 0 \quad (4.2)$$

olur.

$$(iii) A \in (\ell_1, \omega^p) \Leftrightarrow (4.1) \text{ olur ve } \forall k \text{ için}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{m} \sum_{n=1}^m |a_{nk} - \lambda_k|^p \right) = 0 \quad (4.3)$$

olacak şekilde bir $(\lambda_k)_{k=1}^\infty$ dizisi mevcuttur.

İspat : (i)'deki (4.1) koşulu, $Y = \omega_\infty^p$ ile Wilansky'den (1964) görülebilir. (ii) ve (iii) kısımları ise, (i) kısmı ile Malkowsky ve Rakocevic'den (1998) görülebilir.

T ile; her v için $2^v \leq t_v \leq 2^{v+1} - 1$ 'den bir ve yalnız bir t_v var olacak biçimdeki tamsayıların tamamı artan bütün $(t_v)_{v=0}^\infty$ dizilerinin kümesini gösterelim. Bu durumda aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$M(\omega_0, \ell_p) = \begin{cases} \sup_{N \subset \mathbb{N}} \left(\sum_{v=0}^\infty 2^v \max_v \left| \sum_{n \in N} a_{nk} \right| \right) & , \quad p = 1 \\ \sup_{N \subset \mathbb{N}_0} \left(\sup_{t \in T} \left| \sum_{n=1}^\infty \sum_{v \in N} 2^v a_{n,t_v} \right|^p \right) & , \quad 1 < p < \infty \\ \sup_{N \subset \mathbb{N}_0} \left(\sup_{t \in T} \sum_{v \in N} 2^v a_{n,t_v} \right) & , \quad p = \infty \end{cases}$$

Teorem 4.1.2.

$1 \leq p \leq \infty$ olsun. O zaman;

$$(\omega_0, \ell_p) = (\omega, \ell_p) = (\omega_\infty, \ell_p) \quad (4.4)$$

ve

$$A \in (\omega_0, \ell_p) \Leftrightarrow M(\omega_0, \ell_p) < \infty \quad (4.5)$$

olur.

İspat : $p = 1$ durumu, $X = \omega_0, \omega, \omega_\infty$ ile Malkowsky (1987) ve Lemma 4.1.1(i)'den görülebilir. $1 < p \leq \infty$ haline; $1 < p < \infty$ için $q = p/(p-1)$ ve $p = \infty$ için $q = 1$ iken $Z = \ell_p$ ile $X = \omega_0$ ifadelerini Wilansky'deki (1964) şekilde uygulayalım. X ve Z , AK 'lı BK uzaylarıdır. Buradan

$$(\omega_0, \ell_p) = (\omega_0^{\beta\beta}, \ell_p) = (\omega_\infty, \ell_p)$$

elde edilir. İkinci denklik Lemma 4.1.1(ii)'den dolayı sağlanır. $\omega_0 \subset \omega \subset \omega_\infty$ olduğundan (4.4)'deki özdeşlikleri oluşturabiliriz. Dahası, Wilansky'den (1964) $A \in (\omega_0, \ell_p)$ 'dir $\Leftrightarrow$ Lemma 4.1.1(i)'den $A^T \in (\ell_p, \omega_0^\beta) = (\ell_q, M^1)$ 'dir.

Sonuç olarak; Malkowsky'den (1988)

$$A^T \in (\ell_q, M^1) \Leftrightarrow M(\omega_0, \ell_p) < \infty$$

yazılır.

Uyarı 4.1.1.

Malkowsky ve Rakocovic (1998) ve Lemma 4.1.1(i)'nin bir uygulaması $A \in (\omega_0, \ell_\infty)$ 'yı verir $\Leftrightarrow p = \infty$ için Teorem 4.1.2'deki (4.5) koşuluna denk bir koşul olarak

$$\sup_n \sum_{v=0}^{\infty} 2^v \max_v |a_{nk}| < \infty \quad (4.6)$$

olur. $2^\mu \leq n \leq 2^{\mu+1}$ biçimindeki tüm tamsayılar kümesini $N^{(\mu)}$ ile gösterip şunu yazabiliriz:

$$M(\omega_0, \omega_\infty^p) = \begin{cases} \sup_{\mu \in \mathbb{N}_0} \left(\max_{N_\mu \subset N^{(\mu)}} \left(\sum_{v=0}^{\infty} 2^v \max_v \left| \frac{1}{2^\mu} \sum_{n \in N_\mu} a_{nk} \right| \right) \right) & , \quad p = 1 \\ \sup_{N \subset \mathbb{N}_0} \left(\sup_{t \in T} \left(\frac{1}{m} \sum_{n=1}^m \left| \sum_{v \in N} \frac{1}{2^\mu} a_{n,t_v} \right|^p \right) \right) & , \quad 1 < p < \infty \end{cases}$$

Teorem 4.1.3.

$1 \leq p \leq \infty$ olsun.

(i) O zaman,

$$(\omega_0, \omega_\infty^p) = (\omega, \omega_\infty^p) = (\omega_\infty, \omega_\infty^p) \quad (4.7)$$

elde edilir;

$$A \in (\omega_0, \omega_\infty^p) \Leftrightarrow M(\omega_0, \omega_\infty^p) < \infty \quad (4.8)$$

olur.

(ii) $A \in (\omega_0, \omega_0^p) \Leftrightarrow$ (4.8) ve (4.2) koşulları sağlanır; $A \in (\omega_0, \omega^p) \Leftrightarrow$ (4.8) ve (4.3) koşulları sağlanır; $A \in (\omega_0, \omega_0^p) \Leftrightarrow$ (4.8) ve (4.2) koşulları sağlanır ve

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{m} \sum_{n=1}^m \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \right|^p \right) = 0 \quad (4.9)$$

olur; $A \in (\omega, \omega^p) \Leftrightarrow$ (4.8) ve (4.3) koşulları sağlanır ve bazı kompleks λ sayısı için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{m} \sum_{n=1}^m \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} - \lambda \right|^p \right) = 0 \quad (4.10)$$

olur.

İspat : (i) $p = 1$ için, (i) kısmı Malkowsky (1987) ve Lemma 4.1.1(i)'nin direkt bir sonucudur. $1 < p < \infty$ halinde; (4.7)'deki özdeşlikler, Teorem 4.1.2'nin ispatındaki benzer bir yöntemle görülebilir.

Burada " $A \in (\omega_0, \omega_\infty^p) \Leftrightarrow A^T \in (M^p, \omega_0^p) = (M^p, M^1)$ " sonucunu elde etmek için $X = \omega_0$ ve $Z = M^p$ ile Wilansky'yi (1964) uygulayabiliriz. Sonuç olarak; Malkowsky'den (1988) $A^T \in (M^p, M^1) \Leftrightarrow M(\omega_0, \omega_\infty^p) < 0$ olur.

(ii) Bu, Malkowsky ve Rakocevic'den (1998) görülebilir ve gerçek olan şu ki; ω_0 , AK 'ya ve (2.1)'de verilen ω 'daki diziler üzerine gösterime de sahiptir. Şimdi, $\|L_A\|$ operatör normu için hesaplamalar bazı verelim. Dahası burada,

$$M_A^*(\ell_1, \tilde{\omega}_\infty^p) = \sup_{m,k} \left(\frac{1}{m} \sum_{n=1}^m |a_{nk}|^p \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty)$$

ve X herhangi BK uzayı olmak üzere;

$$M_A^*(X, \ell_1) = \sup_{N \text{ sonlu}} \left\| \sum_{n \in N} A_n \right\|^*, \quad M_A^*(X, \ell_\infty) = \sup_n \|A_n\|^*,$$

$$M_A^*(X, \omega_\infty) = \sup_\mu \left(\max_{N_\mu \subset N^{(\mu)}} \left\| \frac{1}{2^\mu} \sum_{n \in N_\mu} A_n \right\|^* \right)$$

ve

$$M_A^*(X, M^1) = \sup_{N \subset N_0} \left(\left\| \sum_{\mu \in N} 2^\mu A_{t_\mu} \right\|^* \right)$$

yazılabilir.

Teorem 4.1.4.

(i) $1 \leq p < \infty$, (2.3) üzerinde tanımlı ω_∞^p 'nin $\|\cdot\|_{\tilde{\omega}_\infty^p}$ ve $A \in (\ell_1, \omega_\infty^p)$ verilsin. Bu durumda;

$$\|L_A\| = M_A^*(\ell_1, \tilde{\omega}_\infty^p) \quad (4.11)$$

yazılır.

(ii) X keyfi bir BK uzayı olsun. $A \in (X, \ell_1)$ ise,

$$M_A^*(X, \ell_1) \leq \|L(A)\| \leq 4M_A^*(X, \ell_1) \quad (4.12)$$

olur. $A \in (X, \ell_\infty)$ ise,

$$\|L_A\| = M_A^*(X, \ell_\infty) \quad (4.13)$$

yazılır. (2.1)'de tanımlı ω_∞ 'daki norm $\|\cdot\|_{\omega_\infty}$ ve $A \in (X, \omega_\infty)$ ise,

$$M_A^*(X, \omega_\infty) \leq \|L(A)\| \leq 4M_A^*(X, \omega_\infty) \quad (4.14)$$

olur.

(iii) X keyfi bir BK uzayı ve $A \in (X, M^1)$ olsun. Bu durumda,

$$M_A^*(X, M^1) \leq \|L_A\| \leq 4M_A^*(X, M^1) \quad (4.15)$$

olur.

İspat :

(i) $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = 1$ ile $A \in (\ell_1, \omega_\infty^p)$, $x \in \ell_1$ ve $m \in \mathbb{N}$ verilsin. Bu

durumda, Minkowski eşitsizliğini kullanarak,

$$\left(\frac{1}{m} \sum_{n=1}^m |A_n(x)|^p \right)^{1/p} = \left(\frac{1}{m} \sum_{n=1}^m \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \right|^p \right)^{1/p} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \left(\frac{1}{m} \sum_{n=1}^m |a_{nk}|^p \right)^{1/p} \leq M_A^*(\ell_1, \tilde{\omega}_\infty^p)$$

elde edilir.

Böylece, m keyfi seçilmek üzere $\|A(x)\|_{\tilde{\omega}_\infty^p} \leq M_A^*(\ell_1, \tilde{\omega}_\infty^p)$ ve dolayısıyla,

$$\|L_A\| = \sup \left\{ \|A(x)\|_{\tilde{\omega}_\infty^p} : \|x\|_1 = 1 \right\} \leq M_A^*(\ell_1, \tilde{\omega}_\infty^p) \quad (4.16)$$

olur.

Şimdi, $x = e^{(k)}$ ($k=1,2,\dots$) verilsin. Bu durumda; $x \in \ell_1$, $\|x\|_1 = 1$ ve

$$\|A(x)\|_{\omega_\infty^p} = \sup \left(\frac{1}{m} \sum_{n=1}^m |a_{nk}|^p \right)^{1/p} \leq \|L_A\|$$

ile birlikte

$$M_A^*(\ell_1, \tilde{\omega}_\infty^p) \leq \|L_A\| \quad (4.17)$$

olmayı gerektirir. Buradan; (4.16) ve (4.17)'den, (4.11) sonucuna ulaşılır.

(ii) İlk önce, (4.12)'yi görürüz. $\|x\|_1 = 1$ ile $A \in (X, \ell_1)$, $x \in X$ ve $m \in \mathbb{N}$ verilsin. Bu durumda, Peyerimoff'daki (1957) iyi bilinen bir eşitsizlik altında,

$$\sum_{n=1}^m |A_n(x)| \leq 4 \max_{N \subset \{1, \dots, m\}} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n \in N} a_{nk} \right) x_k \right| \leq 4M_A^*(X, \ell_1)$$

yazılabilir. m keyfi olduğundan, $\|A(x)\|_1 \leq 4M_A^*(X, \ell_1)$ sonucunu çıkarırız ve

$$\|L_A\| \leq 4M_A^*(X, \ell_1) \quad (4.18)$$

elde edilir.

Aksine, $N \subset \mathbb{N}$ keyfi sonlu bir küme olsun. Bu durumda verilen $\varepsilon > 0$ için

$$\|x\| = 1 \text{ ve } \left\| \sum_{n \in N} A_n \right\|^* \leq \left| \sum_{n \in N} A_n(x) \right| + \varepsilon \text{ olacak şekilde bir } x = x(N, \varepsilon) \in X \text{ dizisi}$$

$$\text{vardır. Bu sebeple, } \left\| \sum_{n \in N} A_n \right\|^* \leq \sum_{n \in N} |A_n(x)| + \varepsilon \leq \|A(x)\|_1 + \varepsilon \leq \|L_A\| + \varepsilon \text{ yazılır.}$$

$N \subset \mathbb{N}$ ve $\varepsilon > 0$ keyfi olduğu için,

$$M_A^*(X, \ell_1) \leq \|L_A\| \quad (4.19)$$

yazılır.

(4.18) ve (4.19)'dan, (4.12) sonucuna ulaşılır. (4.13) eşitsizliği, Malkowsky ve Rakocevic'den (1998) görülebilir. (4.14)'teki eşitsizlikler; $N_\mu \subset N^{(\mu)}$ ve $\frac{1}{2^\mu}$,

μ ile yer değiştiren $\frac{1}{m}$ ve $N_m \subset \{1, \dots, m\}$, m 'li Malkowsky ve Rakocevic'de (1998) olduğu gibi benzer bir yolla tam olarak görülebilir.

(iii) $\|x\| = 1$ ile $A \in (X, M^1)$, $x \in X$ ve $\mu_0 \in \mathbb{N}_0$ verilsin. $\|A_{n_\mu}\| = \max_{n \in N^{(\mu)}} |A_n(x)|$ olacak şekilde $n_\mu \in N^{(\mu)}$ ($\mu = 1, 2, \dots$) seçebiliriz. Bu durumda; Peyerimoff'daki (1957) iyi bilinen eşitsizlik ile,

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=0}^{\mu_0} 2^\mu |A_{n_\mu}| &\leq 4 \max_{N \subset \{0, \dots, \mu_0\}} \left| \sum_{\mu \in N} 2^\mu A_{n_\mu} \right| \\ &= 4 \max_{N \subset \{0, \dots, \mu_0\}} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{\mu \in N} 2^\mu a_{n_\mu, k} \right) x_k \right| \\ &\leq 4 \sup_{N \in \mathbb{N}_0} \left(\sup_{t \in T} \left\| \sum_{\mu \in N} 2^\mu A_{t_\mu} \right\|^* \right) = 4M_A^*(X, M^1) \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu her $\mu_0 \in \mathbb{N}_0$ için sağlandığından $\|A(x)\|_{M^1} \leq 4M_A^*(X, M^1)$ sonucu bulunur ve

$$\|L_A\| \leq 4M_A^*(X, M^1) \quad (4.20)$$

elde edilir.

Aksine; $N \in \mathbb{N}_0$, $t \in T$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu durumda; $\|x\| = 1$ ve

$$\left\| \sum_{\mu \in N} 2^\mu A_{t_\mu} \right\|^* \leq \left| \sum_{\mu \in N} 2^\mu A_{t_\mu}(x) \right| + \varepsilon$$

olacak şekilde bir $x = x(N, t, \varepsilon) \in X$ dizisi vardır. Bu sebeple,

$$\left\| \sum_{\mu \in N} 2^\mu A_{t_\mu} \right\|^* \leq \sum_{\mu=0}^{\infty} 2^\mu \max_{n \in N^{(\mu)}} |A_n(x)| + \varepsilon = \|A(x)\|_{\mathbf{M}^1} + \varepsilon \leq \|L_A\| + \varepsilon$$

elde edilir.

$N \in \mathbb{N}_0$, $t \in T$ ve $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan

$$M_A^*(X, \mathbf{M}^1) \leq \|L_A\| \quad (4.21)$$

yazabiliriz. Sonuç olarak, (4.20) ve (4.21)'den (4.15) sonucu elde edilir. Şimdi de Teorem 4.1.1, 4.1.2 ve 4.1.3'deki karakterize edilmiş olan matris dönüşümlerinin operatör normlarını hesaplamak için önceki sonuçlara başvurabiliriz. X ; ω_0 , ω , ω_∞ uzaylarının herhangi biri olsun. Bu durumda;

$$M_A^*(X, \ell_1) = \sup_{N \subset \mathbb{N}_0} \left(\sum_{v=0}^{\infty} 2^v \max_v \left| \sum_{n \in N} a_{nk} \right| \right),$$

$$M_A^*(X, \ell_\infty) = \sup_n \left(\sum_{v=0}^{\infty} 2^v \max_v |a_{nk}| \right),$$

$$M_A^*(X, \omega_\infty) = \sup_{\mu} \left(\max_{N_\mu \subset N^{(\mu)}} \left(\sum_{v=0}^{\infty} 2^v \max_v \left| \frac{1}{2^\mu} \sum_{n \in N_\mu} a_{nk} \right| \right) \right)$$

ve $1 < p < \infty$ ile $q = \frac{p}{p-1}$ için,

$$M_{A^T}^*(\ell_q, \mathbf{M}^1) = \sup_{N \subset \mathbb{N}_0} \left(\sup_{t \in T} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{v \in N} 2^v a_{n,t_v} \right|^p \right)^{1/p} \right),$$

$$M_{A^t}^*(\mathbf{M}^p, \mathbf{M}^1) = \sup_{N \subset \mathbb{N}_0} \left(\sup_{t \in T} \left(\sup_{\mu} \left(\frac{1}{2^\mu} \sum_{n \in N^{(\mu)}} \left| \sum_{v \in N} 2^v a_{n,t_v} \right|^p \right)^{1/p} \right) \right)$$

olur.

Sonuç 4.1.1.

X ; ω_0 , ω , ω_∞ uzaylarının herhangi biri ve (2.1)'de tanımlı $\|\cdot\|_{\omega_\infty^p}$ normu verilsin. Bu durumda; $A \in (X, \ell_1)$ ise,

$$M_A^*(X, \ell_1) \leq \|L_A\| \leq 4M_A^*(X, \ell_1)$$

olur. $A \in (X, \ell_\infty)$ ise,

$$\|L_A\| = M_A^*(X, \ell_\infty)$$

olur.

$A \in (X, \ell_p)$ ($1 < p < \infty, q = p/(p-1)$) ise,

$$M_{A^T}^*(\ell_q, M^1) \leq \|L_A\| \leq 4M_{A^T}^*(\ell_q, M^1)$$

olur. $A \in (X, \omega_\infty)$ ise,

$$M_A^*(X, \omega_\infty) \leq \|L_A\| \leq 4M_A^*(X, \omega_\infty)$$

olur.

$A \in (X, \omega_\infty^p)$ ($1 < p < \infty$) ise,

$$M_{A^T}^*(M^p, M^1) \leq \|L_A\| \leq 4M_{A^T}^*(M^p, M^1)$$

yazılır.

4.2. Kompakt olmama Derecesi ve Dönüşümler

Bu bölümde diğer durumların yanı sıra aynı zamanda bazı özel durumlar içinde gerekli olan L_A operatörünün kompaktlığını inceleyeceğiz ve çalışmalarımızda kompakt olmama derecesinden yararlanacağız.

Bilindiği üzere; Tanım 2.12'deki verilenlerle birlikte, eğer $\mathbb{Q}$ bir X metrik uzayının sınırlı bir altkümesi, o zaman $\mathbb{Q}$ 'nun kompakt olmama Hausdorff derecesi, $\chi(\mathbb{Q})$ ile gösterilir ve

$$\chi(\mathbb{Q}) = \inf\{\varepsilon > 0 : \mathbb{Q}, X\text{'de sonlu bir } \varepsilon\text{-ağa sahip}\}$$

yazılır.

χ fonksiyonu, kompakt olmama Hausdorff derecesi diye adlandırılır (Banas ve Goebel, 1980; Akhmerov ve ark., 1992; Rakocevic, 1994).

Şimdi bazı tanımları burada ifade edelim: Öncelikle, $\mathbb{Q}$ 'nun kapanışı $\overline{\mathbb{Q}}$ ile gösterilsin. Eğer $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_1$, ve $\mathbb{Q}_2$ bir (X, d) metrik uzayının sınırlı alt kümeleri ise, o zaman,

$$\chi(\mathbb{Q}) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{Q} \text{ bir tam sınırlı küme,}$$

$$\chi(\mathbb{Q}) = \chi(\overline{\mathbb{Q}}),$$

$$\mathbb{Q}_1 \subset \mathbb{Q}_2 \Rightarrow \chi(\mathbb{Q}_1) \leq \chi(\mathbb{Q}_2),$$

$$\chi(\mathbb{Q}_1 \cup \mathbb{Q}_2) = \max\{\chi(\mathbb{Q}_1), \chi(\mathbb{Q}_2)\},$$

$$\chi(\mathbb{Q}_1 \cap \mathbb{Q}_2) \leq \min\{\chi(\mathbb{Q}_1), \chi(\mathbb{Q}_2)\}$$

olur.

Eğer X uzayı bir normlu uzay ise, o zaman $\chi(\mathbb{Q})$ fonksiyonu lineer yapıyla bağlantılı bazı ilave özelliklere sahiptir. Mesela; $\chi(\mathbb{Q}_1 + \mathbb{Q}_2) \leq \chi(\mathbb{Q}_1) + \chi(\mathbb{Q}_2)$, her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\chi(\lambda\mathbb{Q}) = |\lambda|\chi(\mathbb{Q})$ vardır.

Eğer X ve Y normlu uzaylar ise, o zaman $A \in B(X, Y)$ için $\|A\|_\chi$ ile gösterilen A 'nın kompakt olmama Hausdorff derecesi; $K = \{x \in X : \|x\| = 1\}$, X 'de birim küre olmak üzere $\|A\|_\chi = \chi(AK)$ ile tanımlanmaktadır. Ayrıca; A kompakttır $\Leftrightarrow \|A\|_\chi = 0$ ve $\|A\|_\chi \leq \|A\|$ 'dir. Mesela, Banas ve Goebel (1980) veya Akhmerov ve ark.'da (1992) iyi bilinen sonuçlar ile diğer bazı ifadeleri hatırlarsak şunlar yazılır:

X , bir $\{e_1, e_2, \dots\}$ Schauder tabanlı bir Banach uzayı; $\mathbb{Q}$, X 'in sınırlı bir alt kümesi ve $P_n : X \rightarrow X$, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 'nin lineer gereni üzerine bir projektör olsun. Bu taktirde; $a = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|I - P_n\|$ iken,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in \mathbb{Q}} \|(I - P_n)x\| \right) &\leq \chi(\mathbb{Q}) \leq \inf_n \sup_{x \in \mathbb{Q}} \|(I - P_n)x\| \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in \mathbb{Q}} \|(I - P_n)x\| \right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

yazılır.

Şimdi de aşağıdaki yardımcı lemmayı ifade edelim:

Lemma 4.2.1.

(i) $P_m : \omega_0^p \rightarrow \omega_0^p$, $1 \leq p < \infty$, $m = 1, 2, \dots$ biçiminde ilk m koordinatlı bir projektör verilsin, yani $P_m(x) = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, 0, \dots)$, $x = (x_i) \in \omega_0^p$ olsun. Bu durumda, $\|I - P_m\| = 1$, $m = 1, 2, \dots$ 'dir.

(ii) $x \in \omega_\infty^p$ için $P_m(x) = \ell e + \sum_{k=1}^m (x_k - \ell) e^{(k)}$, $m = 1, 2, \dots$ tarafından

$P_m : \omega^p \rightarrow \omega^p$ 'yi tanımlayıp (2.2)'deki gösterimle birlikte ele alalım. Bu durumda ise,

$$\|I - P_m\| = 2, m = 1, 2, \dots$$

yazılır.

İspat :

(i) $\|I - P_m\| \leq 1$ olduğu açıktır. $I - P_m \neq O$, sınırlı lineer bir operatör ve projektör olduğundan $\|I - P_m\| \geq 1$ yazılır ve böylece (i) ispatlanır.

(ii) $x = (x_k)_{k=1}^\infty \in \omega^p$ verilsin. Bu durumda, x (2.2)'deki gösterime sahiptir ve

$$\|(I - P_m)(x)\| = \|(0, \dots, 0, x_{m+1} - \ell, x_{m+2} - \ell, \dots)\| \leq \|x\| + |\ell| \leq 2\|x\|$$

elde edilir. Buradan $\|I - P_m\| \leq 2$, $m = 1, 2, \dots$ bulunur.

$\|I - P_m\| \geq 2$ oluşu ispatlamak için $\varepsilon > 0$ alalım. Bu halde,

$$2\left(\frac{k}{m+k}\right)^{1/p} \rightarrow 2, \quad k \rightarrow \infty$$

olduğu için

$$2\left(\frac{k_0}{m+k_0}\right)^{1/p} > 2 - \varepsilon$$

olacak şekilde $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Şimdi de $u_0 \in \omega^p$ 'yi, $u_0 = (1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 1, 1, \dots)$ olarak tanımlayalım. Burada $\|u_0\| = 1$ ve $\ell = 1$ 'dir. Dahası,

$$\|(I - P_m)(u_0)\| \geq \left(\frac{1}{m+k_0} 2^p k_0\right)^{1/p} = 2\left(\frac{k_0}{m+k_0}\right)^{1/p} > 2 - \varepsilon$$

olur. Böylece, $\|I - P_m\| > 2 - \varepsilon$ yani $\|I - P_m\| \geq 2$ bulunur.

Teorem 4.2.1.

$1 \leq p < \infty$ verilsin. Ayrıca, (2.3)'de tanımlı olan ve ω_0^p , ω ve ω_∞^p üzerindeki norm $\|\cdot\|_{\omega_\infty^p}$ olsun. Bu durumda,

$$M_A^*(\ell_1, \tilde{\omega}_\infty^p)_{(m)} = \sup_{u > m} \left(\frac{1}{u} \sum_{n=m+1}^u |a_{nk}|^p \right)^{1/p} \quad (4.23)$$

yazılabilir.

(i) $A \in (\ell_1, \omega_0^p)$ ise,

$$\|L_A\|_\chi = \lim_{m \rightarrow \infty} M_A^*(\ell_1, \tilde{\omega}_\infty^p)_{(m)} \quad (4.24)$$

olur.

(ii) $A \in (\ell_1, \omega^p)$ ise,

$$\frac{1}{2} \lim_{m \rightarrow \infty} M_A^*(\ell_1, \tilde{\omega}_\infty^p)_{(m)} \leq \|L_A\|_\chi \leq \lim_{m \rightarrow \infty} M_A^*(\ell_1, \tilde{\omega}_\infty^p)_{(m)} \quad (4.25)$$

yazılır.

(iii) $A \in (\ell_1, \omega_\infty^p)$ ise,

$$0 \leq \|L_A\| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} M_A^*(\ell_1, \tilde{\omega}_\infty^p)_{(m)} \quad (4.26)$$

elde edilir.

İspat : Dikkat edilirse; (4.24), (4.25) ve (4.26)'daki limitler mevcuttur. Ayrıca,

$K = \{x \in \ell_1 : \|x\| \leq 1\}$ yazılabilir. (i) durumunda, (4.22) eşitsizliği ile $P_m : \omega_0^p \rightarrow \omega_0^p$ $m = 1, 2, \dots$ biçiminde ilk m koordinatlı bir projektör yani

$$P_m(x) = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, 0, \dots), \quad x = (x_i) \in \omega_0^p$$

olmak üzere, (4.26)'yı

$$\|L_A\|_\chi = \chi(AK) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\sup_{x \in K} \|(I - P_m)Ax\| \right] \quad (4.26)$$

biçiminde de ifade edebiliriz. Lemma 4.2.1(i)'den $\|I - P_m\| = 1$, $m = 1, 2, \dots$ olduğunu hatırlayalım. Ayrıca, $A_{(m)} = (\tilde{a}_{nk})$, " $\tilde{a}_{nk} = 0$ ise $1 \leq n \leq m$ ve $\tilde{a}_{nk} = a_{nk}$ ise $m < n$ " biçiminde tanımlı sonsuz bir matris olsun. Yine (4.12)'den

$$\sup_{x \in K} \|(I - P_m)Ax\| = \|L_{A_{(m)}}\| = M_{A_{(m)}}^*(\ell_1, \tilde{\omega}_\infty^p)_{(m)} = M_A^*(\ell_1, \tilde{\omega}_\infty^p)_{(m)} \quad (4.27)$$

yazılabilir. Açıkçası, (4.26) ve (4.27) ile (i) elde edilebilir.

(ii) $x = (x_k)_{k=1}^\infty \in \omega_0^p$ verilsin. Bu durumda; x , (2.2) gösterimine sahiptir ve

$$P_m : \omega^p \rightarrow \omega^p, \quad P_m(x) = \ell e + \sum_{k=1}^m (x_k - \ell) e^{(k)}, \quad m = 1, 2, \dots$$

olarak tanımlayabiliriz. Lemma 4.2.1(ii)'den bilinmektedir ki, $\|I - P_m\| = 2$, $m = 1, 2, \dots$ 'dir. Ayrıca, (ii)'nin ispatı (i)'deki durumla benzer olduğundan denk yollar izlenerek bulunabilir. Şimdi de (4.25)'i ispatlayalım. Yine $P_m : \omega_\infty^p \rightarrow \omega_\infty^p$, $P_m(x) = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, \dots)$ $x = (x_i) \in \omega_\infty^p$, $m = 1, 2, \dots$ 'yi tanımlayalım. Açık ki, $AK \subset P_m(AK) + (I - P_m)(AK)$ 'dir. Ayrıca, χ fonksiyonunun elementer özellikleri ile,

$$\begin{aligned} \chi(AK) &\leq \chi(P_m(AK)) + \chi((I - P_m)(AK)) \\ &= \chi((I - P_m)(AK)) \leq \sup_{x \in K} \|(I - P_m)Ax\| = \|L_{A_{(m)}}\| \end{aligned} \quad (4.28)$$

yazılabilir. (4.25)'deki limit açık bir biçimde var olduğundan (4.28) ve (4.12) ile (4.25) elde edilebilir.

Şimdi ise, yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak şunu verelim:

Sonuç 4.2.1.

$A \in (\ell_1, \omega_0^p)$ yada $A \in (\ell_1, \omega_0^p)$ ise,

$$L_A \text{ kompakttır} \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} M_A^*(\ell_1, \tilde{\omega}_\infty^p)_{(m)} = 0 \quad (4.29)$$

olur. $A \in (\ell_1, \omega_\infty^p)$ ise,

$$L_A \text{ kompakt ise } \lim_{m \rightarrow \infty} M_A^*(\ell_1, \tilde{\omega}_\infty^p)_{(m)} = 0 \quad (4.30)$$

elde edilir.

Aşağıdaki örnek göstermektedir ki,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M_A^*(\ell_1, \tilde{\omega}_\infty^p)_{(m)} > 0$$

halinde kompakt olma durumu (4.30)'daki L_A için mümkündür ve böylece genel olarak (4.20)'daki durum tam olarak " $\Rightarrow$ (ise) " haline sahiptir.

Örnek 4.2.1.

$A = [a_{nk}]$ matrisi, " $a_{nk} = 1$ iken $n = 1$ ve $a_{nk} = 0$ iken $n \neq 1$ " biçiminde tanımlı olsun. Bu durumda,

$$M_A^*(\ell_1, \tilde{\omega}_\infty^p) = 1$$

ve

$$A \in (\ell_1, \tilde{\omega}_\infty^p)$$

olur.

$$M_A^*(\ell_1, \tilde{\omega}_\infty^p)_{(m)} = \sup_{k > m} \left(\frac{1}{u} \sum_{n=m+1}^u |a_{nk}|^p \right)^{1/p} = \sup_{k > m} \left(\frac{u-m}{u} \right)^{1/p} = 1$$

elde edilir. Öyle ki,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M_A^*(\ell_1, \tilde{\omega}_\infty^p)_{(m)} = 1 > 0$$

yazılır. Her $x \in \ell_1$ için $A(x) = x_1$ olduğu için, L_A kompakt bir operatördür.

Şimdi de Sonuç 4.1.1'e bağlı olarak; final uzayları, ℓ_p ve ω_∞^p olduğu zaman operatörlerin kompakt olmama derecelerini çalışmayı sürdürebiliriz. X ; ω_0 , ω ve ω_∞ uzaylarından herhangi biri olsun. $m \in \mathbb{N}$ için,

$$M_A^*(X, \ell_1)_{(m)} = \sup_{N \subset \mathbb{N} \setminus \{1, 2, \dots, m\} \text{ sonlu}} \left(\sum_{v=0}^{\infty} 2^v \max_v \left| \sum_{n \in N} a_{nk} \right| \right),$$

$$M_A^*(X, \ell_\infty)_{(m)} = \sup_{n > m} \left(\sum_{v=0}^{\infty} 2^v \max_v |a_{nk}| \right),$$

$$M_A^*(X, \omega_\infty)_{(m)} = \sup_{\mu > m} \left(\max_{N_\mu \subset N^{(\mu)}} \left(\sum_{v=0}^{\infty} 2^v \max_v \left| \frac{1}{2^\mu} \sum_{n \in N_\mu} a_{nk} \right| \right) \right),$$

ve $1 < p < \infty$ ile $q = \frac{p}{p-1}$ için,

$$M_{A^T}^*(\ell_q, \mathbf{M}^1)_{(m)} = \sup_{N \subset \mathbb{N}_0} \left(\sup_{t \in T} \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} \left| \sum_{v \in N} 2^v a_{n,t_v} \right|^p \right)^{1/p} \right),$$

$$M_{A^T}^*(\mathbf{M}^p, \mathbf{M}^1)_{(m)} = \sup_{N \subset \mathbb{N}_0 \setminus \{1,2,\dots,m\}} \left(\sup_{t \in T} \left(\sup_{\mu} \left(\frac{1}{2^\mu} \sum_{n \in N^{(\mu)}} \left| \sum_{v \in N} 2^v a_{n,t_v} \right|^p \right)^{1/p} \right) \right)$$

yazılabilir.

Theorem 4.2.2.

X ; ω_0 , ω ve ω_∞ uzaylarından herhangi biri ve (2.1)'de tanımlı olan $\|\cdot\|_{\omega_\infty^p}$ normu verilsin. $A \in (X, \ell_1)$ ise,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M_A^*(X, \ell_1)_{(m)} \leq \|L_A\|_\chi \leq 4 \lim_{m \rightarrow \infty} M_A^*(X, \ell_1)_{(m)} \quad (4.31)$$

yazılır. $A \in (X, \ell_\infty)$ ise,

$$\|L_A\|_\chi \leq \lim_{m \rightarrow \infty} M_A^*(X, \ell_\infty)_{(m)} \quad (4.32)$$

$A \in (X, \ell_p)$ ($1 < p < \infty$, $q = p/(p-1)$) ise,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M_{A^T}^*(\ell_q, \mathbf{M}^1)_{(m)} \leq \|L_A\|_\chi \leq 4 \lim_{m \rightarrow \infty} M_{A^T}^*(\ell_q, \mathbf{M}^1)_{(m)} \quad (4.33)$$

$A \in (X, \omega_\infty)$ ise,

$$\|L_A\|_\chi \leq 4 \lim_{m \rightarrow \infty} M_A^*(X, \omega_\infty)_{(m)} \quad (4.34)$$

$A \in (X, \omega_\infty^p)$ ($1 < p < \infty$) ise,

$$\|L_A\|_\chi \leq 4 \lim_{m \rightarrow \infty} M_{A^T}^*(\mathbf{M}^p, \mathbf{M}^1)_{(m)} \quad (4.35)$$

olur.

İspat : (4.31)-(4.35)'teki limitlerin var olduğu bize ifade edilmiş olsun. $P_m : \ell^p \rightarrow \ell^p$, $1 \leq p < \infty$, $m = 1, 2, \dots$ biçiminde ilk m koordinatlı bir projektör verilsin, yani $P_m(x) = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, 0, \dots)$ $x = (x_i) \in \ell^p$ olsun. Kolayca kontrol edilebilir ki, $\|I - P_m\| = 1$, $m = 1, 2, \dots$ 'dir. (4.31) ve (4.33)'nin ispatını (fıdal uzayları bir tabana sahip olduğunda) Teorem 4.2.1(i)'nin ispatındaki metot ile verilebilir. (4.32), (4.34) ve (4.35)'in ispatındaysa (fıdal uzayları bir tabana sahip olmadığında) Teorem 4.2.1(iii)'ün ispatındaki metot kullanılabilir.

Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak şunu yazabiliriz:

Sonuç 4.2.2.

X ; ω_0 , ω ve ω_∞ uzaylarından herhangi biri olsun. (2.1)'de tanımlı norm $\|\cdot\|_{\omega_\infty^p}$ verilsin. $A \in (X, \ell_1)$ ise,

$$L_A \text{ kompakttır} \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} M_A^*(X, \ell_1)_{(m)} = 0 \quad (4.36)$$

olur. $A \in (X, \ell_\infty)$ ise,

$$L_A \text{ kompakt ise } \lim_{m \rightarrow \infty} M_A^*(X, \ell_\infty)_{(m)} = 0 \quad (4.37)$$

$A \in (X, \ell_p)$ ($1 < p < \infty$, $q = p/(p-1)$) ise,

$$L_A \text{ kompakttır} \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} M_{A^T}^*(\ell_q, M^1)_{(m)} = 0 \quad (4.38)$$

$A \in (X, \omega_\infty)$ ise,

$$L_A \text{ kompakt ise } \lim_{m \rightarrow \infty} M_A^*(X, \ell_\infty)_{(m)} = 0 \quad (4.39)$$

$A \in (X, \omega_\infty^p)$ ($1 < p < \infty$) ise,

$$L_A \text{ kompakt ise } \lim_{m \rightarrow \infty} M_{A^T}^*(M^p, M^1)_{(m)} = 0 \quad (4.40)$$

yazılır."

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M_A^*(X, \ell_\infty)_{(m)} > 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} M_A^*(X, \omega_\infty)_{(m)} > 0$$

ve

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M_{A^T}^*(M^p, M^1)_{(m)} > 0$$

hallerinde kompakt olmak (4.37), (4.39 ve (4.40)'da L_A için mümkündür " diye bir ifade bize söylenmiş olsun. Bu durumda; Örnek 4.2.1 ile bunun ispatı yapılabilir.

5. $(\overline{N}, q)$ TOPLANABİLİR veya SINIRLI DİZİLERİN UZAYLARI ARASINDA LİNEER OPERATÖRLERİN KOMPAKT OLMAMA DERECESİ

Bu bölümde $(\overline{N}, q)$ toplanabilir veya sınırlı olan dizilerin keyfi BK , X uzayları ve Y uzayları arasındaki lineer operatörleri inceleyeceğiz. X 'i Y 'ye dönüştüren A sonsuz matrisleri için gerekli ve yeterli koşulları vereceğiz. Ayrıca, bir kompakt operatör olan A için gerekli ve yeterli koşulları vermek suretiyle kompakt olmama derecesi üzerine uygulama yapacağız.

5.1. $(\overline{N}, q)$ Toplanabilir veya Sınırlı Dizilerin Kümeleri ile Onların β – Dualleri

$(q_k)_{k=0}^{\infty}$ pozitif bir dizi ve $Q_n = \sum_{k=0}^n q_k$ ($n = 0, 1, \dots$)'li Q dizisi verilsin.

Ayrıca,

$$(\overline{N}, q)_{nk} = \begin{cases} q_k / Q_n & , \quad 0 \leq k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

ile tanımlı $\overline{N}_q$ matrisi olsun.

O zaman, sırasıyla, sıfıra $(\overline{N}, q)$ –toplanabilir, -toplanabilir ve –sınırlı olan dizilerin $(\overline{N}, q)_0 = (c_0)_{\overline{N}_q}$, $(\overline{N}, q) = (c)_{\overline{N}_q}$, $(\overline{N}, q)_{\infty} = (\ell_{\infty})_{\overline{N}_q}$ kümelerini tanımlayabiliriz.

Önerme 5.1.1.

$$(\overline{N}, q)_0, (\overline{N}, q), (\overline{N}, q)_{\infty} \text{ kümelerinin her biri, } \|x\|_{\overline{N}_q} = \sup_n \left| \frac{1}{Q_n} \sum_{k=0}^n q_k x_k \right|$$

ile tanımlı $\|\cdot\|_{\overline{N}_q}$ normuna bağlı bir BK uzayıdır (Aljarrah ve Malkowsky, 1998).

Ayrıca; eğer $Q_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) ise, $(\overline{N}, q)_0$ AK 'ya sahiptir ve her $x = (x_k)_{k=0}^{\infty} \in (\overline{N}, q)$ dizisi, $\ell \in \mathbb{C}$ iken $x - \ell e \in (\overline{N}, q)_0$ olacak şekilde bir tek $x = \ell e + \sum_{k=0}^{\infty} (x_k - \ell) e^{(k)}$ gösterimine sahiptir.

Herhangi iki x ve y dizisi için, $xy = (x_k y_k)_{k=0}^{\infty}$ verilsin. Eğer X ve Y , ω 'nun keyfi alt kümeleri ise ve z herhangi bir dizi ise, o zaman

$z^{-1} * X = \{x \in \omega : xz \in X\}$ ve $M(X, Y) = \bigcap_{x \in X} x^{-1} * Y$ yazılabilir. Özet olarak;

$Y = cs$ olduğunda, $X^\beta = M(X, cs) = \left\{ a \in \omega : \forall x \in X \text{ için } \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k \text{ yakınsak} \right\}$ kümesi, X 'in β -duali adını alır. $\mathbf{U}$ ile, $u_k \neq 0$ ($k = 0, 1, \dots$) olacak şekilde bütün u dizilerinin kümesini göstereceğiz. $u \in \mathbf{U}$ için, $1/u = \left(1/u_k \right)_{k=0}^{\infty}$ verilsin. Ayrıca; $\Delta^+ : \omega \rightarrow \omega$ operatörü, $\Delta^+ x = \left((\Delta^+ x)_k \right)_{k=0}^{\infty} = (x_k - x_{k+1})_{k=0}^{\infty}$ ile tanımlı olsun.

Önerme 5.1.2.

$$\begin{aligned} N_0 &= \left(1/q \right)^{-1} * \left((Q^{-1} * \ell_1)_{\Delta^+} \cap (Q^{-1} * \ell_\infty) \right) \\ &= \left\{ a \in \omega : \sum_{k=0}^{\infty} Q_k \left| \frac{a_k}{q_k} - \frac{a_{k+1}}{q_{k+1}} \right| < \infty \text{ ve } Qa/q \in \ell_\infty \right\}, \end{aligned}$$

$$N = \left(1/q \right)^{-1} * \left((Q^{-1} * \ell_1)_{\Delta^+} \cap (Q^{-1} * c) \right) \text{ ve}$$

$$N_\infty = \left(1/q \right)^{-1} * \left((Q^{-1} * \ell_1)_{\Delta^+} \cap (Q^{-1} * c_0) \right) \text{ alabiliriz. O zaman,}$$

$(\bar{N}, q)_0^\beta = N_0$, $(\bar{N}, q)^\beta = N$ ve $(\bar{N}, q)_\infty^\beta = N_\infty$ 'dur (Aljarrah ve Malkowsky, 1998).

5.2. Matris Dönüşümleri

X ve Y iki Banach uzayı olsun. $B(X, Y)$ uzayı ile N 'nin operatör normu için

$$\|L\| = \sup \{ \|L(x)\| : \|x\| = 1 \}$$

yazılabilir. Eğer X bir BK uzayı ve $a \in \omega$ ise, o zaman

$$\|a\|^* = \left\{ \left\| \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k \right\| : \|x\| = 1 \right\}$$

eşitliğinin sağ tarafı var ve sonlu olacak şekilde sağlatılır. $a \in X^\beta$ olduğunda da bu geçerlidir (Wilansky, 1984).

Önerme 5.2.1.

$(\bar{N}, q)_0^\beta$, $(\bar{N}, q)^\beta$ ve $(\bar{N}, q)_\infty^\beta$ uzaylarının herhangi biri üzerinde,

$$\|a\|^* = \sup_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} Q_k \left| \frac{a_k}{q_k} - \frac{a_{k+1}}{q_{k+1}} \right| + \left| \frac{a_n Q_n}{q_n} \right| \right)$$

olur.

İspat : Verilen herhangi x dizisi için,

$$x^{[n]} = \sum_{k=0}^n x_k e^{(k)} \text{ ve } \tau_k^{[n]} = \tau_k(x^{[n]}) = \frac{1}{Q_k} \sum_{j=0}^k q_j x_j^{[n]} \quad (k, n = 0, 1, \dots)$$

yazılabilir. $a \in N_0$ ve n negatif olmayan bir tamsayı olsun.

$$b_k^{[n]} = \begin{cases} Q_k \Delta^+(a/q)_k & , \quad 0 \leq k \leq n \\ a_n Q_n / q_n & , \quad k = n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

ile $b^{[n]}$ dizisini tanımlayabilir ve $\|a\|_N = \sup_n \|b^{[n]}\|_1 = \sup_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k^{[n]}| \right)$ alabiliriz. O

zaman,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k^{[n]} \right| &= \left| \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{q_k} \Delta(Q\tau^{[n]})_k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| Q_k \tau_k^{[n]} \Delta^+(a/q)_k \right| + \left| \frac{a_n Q_n}{q_n} \right| |\tau_n^{[n]}| \\ &\leq \sup_k |\tau_k^{[n]}| \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left| Q_k \Delta^+(a/q)_k \right| + \left| \frac{a_n Q_n}{q_n} \right| \right) \\ &= \|x^{[n]}\|_{\bar{N}_q} \|b^{[n]}\|_1 = \|a\|_N \|x^{[n]}\|_{\bar{N}_q} \end{aligned}$$

olur. Bu durumda,

$$\|a\|^* \leq \|a\|_N \quad (5.1)$$

bulunur.

Eşitsizliğin tersini ispatlamak için, n keyfi bir tamsayı olsun. $\tau_k(x^{(n)}) = \text{sign}(b_k^{[n]})$ ($k = 0, 1, \dots$) ile $x^{(n)}$ dizisini tanımlayalım. O zaman, $k > n$ için $\tau_k(x^{(n)}) = 0$ yani $x^{(n)} \in (\bar{N}, q)_0$, $\|x^{(n)}\|_{\bar{N}_q} = \|\tau(x^{(n)})\|_{\infty} \leq 1$ ve

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k^{(n)} \right| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{[n]} x_k^{(n)} \right| = \sum_{k=0}^n |b_k^{[n]}| \leq \|a\|^*$$

olur. n keyfi olduğu için,

$$\|a\|_N \leq \|a\|^* \quad (5.2)$$

yazılır. Şimdi (5.1) ve (5.2) eşitsizliklerinin sonucunu verebiliriz.

Eğer A kompleks sayıların sonsuz bir matrisi ise, o zaman A 'nın n . satırındaki dizi için A_n yazabiliriz. Ayrıca;

$A \in (X, Y) \Leftrightarrow \forall n$ için $A_n \in X^B$ ve $\forall x \in X$ için $A(x) \in Y$ yazılır.

Önerme 5.2.2.

X ve Y , BK uzayları olsun. O zaman, $(X, Y) \subset B(X, Y)$ yani her $A \in (X, Y)$ ve

$$L_A(x) = A(x) \quad (x \in X)$$

iken bir $L_A \in B(X, Y)$ elemanı tanımlayabilir. Ayrıca;

$$A \in (X, \ell_\infty) \Leftrightarrow \|A\|^* = \sup_n \|A_n\|^* = \|L_A\| < \infty$$

olur. Nihayet; eğer $(b^{(k)})_{k=0}^\infty$, X 'in bir tabanı ve Y_1 , Y 'nin kapalı bir alt uzayı iken Y ile Y_1 , FK uzayları ise, o zaman

$$A \in (X, Y_1) \Leftrightarrow \forall k = 0, 1, \dots \text{ için } A \in (X, Y) \text{ ve } A(b^{(k)}) \in Y_1$$

olur (Malkowsky ve Rakocevic, 1998).

Önerme 5.2.3.

T bir üçgen matris olsun.

(i) Bu durumda, ω 'nın herhangi X ve Y alt kümeleri için,

$$A \in (X, Y_T) \Leftrightarrow B = TA \in (X, Y)$$

olur.

(ii) Ayrıca; X ve Y , BK uzayları ile $A \in (X, Y_T)$ ise, o zaman

$$\|L_A\| = \|L_B\| \quad (5.3)$$

olur (Malkowsky ve Rakocevic, 1999).

Önerme 5.2.1 ve 5.2.2'nin bir sonucu olarak şunu elde ederiz:

Sonuç 5.2.1.

$q = (q_k)_{k=0}^\infty$ pozitif bir dizi ve $Q_n = \sum_{k=0}^n q_k \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) olsun.

(i) $A \in ((\bar{N}, q)_\infty, \ell_\infty) \Leftrightarrow$

$$M((\bar{N}, q)_\infty, \ell_\infty) = \sup_{m, n} \left(\sum_{k=0}^{m-1} Q_k \left| \frac{a_{nk}}{q_k} - \frac{a_{n, k+1}}{q_{k+1}} \right| + |Q_m a_{nm} / q_m| \right) < \infty \quad (5.4)$$

ile her $n = 0, 1, \dots$ için

$$A_n Q / q \in c_0 \quad (5.5)$$

olur.

(ii) $A \in ((\overline{N}, q), \ell_\infty) \Leftrightarrow$ (5.4) koşulu sağlanır ve her $n = 0, 1, \dots$ için,

$$A_n Q / q \in c \quad (5.6)$$

yazılır.

(iii) $A \in ((\overline{N}, q)_0, \ell_\infty) \Leftrightarrow$ (5.4) koşulu sağlanır.

(iv) $A \in ((\overline{N}, q)_0, c_0) \Leftrightarrow$ (5.4) koşulu sağlanır ve $\forall k = 0, 1, \dots$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0 \quad (5.7)$$

bulunur.

(v) $A \in ((\overline{N}, q)_0, c) \Leftrightarrow$ (5.4) koşulu sağlanır ve $\forall k = 0, 1, \dots$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = \ell_k \quad (5.8)$$

elde edilir.

(vi) $A \in ((\overline{N}, q), c_0) \Leftrightarrow$ (5.4), (5.6), (5.7) koşulları sağlanır ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = 0 \quad (5.9)$$

olur.

(vii) $A \in ((\overline{N}, q), c) \Leftrightarrow$ (5.4), (5.5), (5.8) koşulları sağlanır ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = \ell \quad (5.10)$$

elde edilir.

Önerme 5.1.1 ve 5.2.3'ün bir sonucu olarak şunu elde ederiz:

Sonuç 5.2.2.

X bir BK uzayı, $(p_k)_{k=0}^{\infty}$ bir pozitif dizi ve

$$P_n = \sum_{k=0}^n p_k \quad (n = 0, 1, \dots)$$

olur. Bu durumda,

$$A \in (X, (\overline{N}, p)_\infty) \Leftrightarrow M(X, (\overline{N}, p)_\infty) = \sup_m \left\| \frac{1}{P_m} \sum_{n=0}^m p_n A_n \right\|^* < \infty \quad (5.11)$$

olur.

Ayrıca; eğer $(b^{(k)})_{k=0}^{\infty}$, X 'in bir tabanı ise, o zaman $A \in (X, (\overline{N}, p)_0) \Leftrightarrow$ (5.11) koşulu sağlanır ve $\forall k = 0, 1, \dots$ için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{P_m} \sum_{n=0}^m p_n A_n(b^{(k)}) \right) = 0 \quad (5.12)$$

olur ve

$A \in (X, (\bar{N}, p)) \Leftrightarrow (5.12)$ koşulu sağlanır ve $\forall k = 0, 1, \dots$ için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{P_m} \sum_{n=0}^m p_n A_n(b^{(k)}) \right) = \ell_k \quad (5.13)$$

olur.

Uyarı 5.2.1.

(i) Eğer $X = \ell_r$ ($1 \leq r < \infty$) ve $Y; (\bar{N}, p)_\infty, (\bar{N}, p)$ ve $(\bar{N}, p)_0$ biçiminde uzayların herhangi biri ise, o zaman $A \in (X, Y)$ için koşullar; $r=1$ için $s=\infty$ ve $1 < r < \infty$ için

$$s = r/(r-1)$$

yani,

$$M(\ell_r, (\bar{N}, p)_\infty) = \begin{cases} \sup_{m,k} \left| \frac{1}{P_m} \sum_{n=0}^m p_n a_{nk} \right|, & r=1 \\ \sup_m \left(\sum_{k=0}^\infty \left| \frac{1}{P_m} \sum_{n=0}^m p_n a_{nk} \right|^s \right)^{1/s}, & 1 < r < \infty \end{cases}$$

iken ℓ_s 'deki doğal norm ile (5.11) koşulundaki $\| \|^*$ normu yer değiştirerek ve a_{nk} terimleri ile (5.12) ve (5.13) koşullarındaki $A_n(b^{(k)})$ terimleri yer değiştirerek Sonuç 5.2.2'deki kendileri ile ilgili kısımlardan bunlar görülebilir.

(ii) Aşağıdaki koşulları düşünebiliriz:

$$M((\bar{N}, q)_\infty, (\bar{N}, p)_\infty) = \sup_{m,n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} Q_k \left| \frac{1}{P_m} \sum_{\ell=0}^m p_\ell (\Delta^+ A_\ell / q)_k \right| + \left| \frac{Q_n}{q_n P_m} \sum_{\ell=0}^m p_\ell a_{\ell n} \right| \right) < \infty \quad (5.14)$$

$$\left(\frac{a_{nk} Q_k}{q_k} \right)_{k=0}^\infty \in c_0 \quad (n=0, 1, \dots) \quad (5.15)$$

$$\left(\frac{a_{nk} Q_k}{q_k} \right)_{k=0}^\infty \in c \quad (n=0, 1, \dots) \quad (5.16)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{P_m} \sum_{n=0}^m p_n a_{nk} \right) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (5.17)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{P_m} \sum_{n=0}^m p_n a_{nk} \right) = \ell_k \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (5.18)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{P_m} \sum_{n=0}^m p_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \right) \right) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (5.19)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{P_m} \sum_{n=0}^m p_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \right) \right) = \ell_k \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (5.20)$$

O zaman;

$$A \in ((\overline{N}, q)_{\infty}, (\overline{N}, p)_{\infty}) \Leftrightarrow (5.14) \text{ ve } (5.15);$$

$$A \in ((\overline{N}, q), (\overline{N}, p)_{\infty}) \Leftrightarrow (5.14) \text{ ve } (5.16);$$

$$A \in ((\overline{N}, q)_0, (\overline{N}, q)_{\infty}) \Leftrightarrow (5.14);$$

$$A \in ((\overline{N}, q)_0, (\overline{N}, p)_0) \Leftrightarrow (5.14) \text{ ve } (5.17);$$

$$A \in ((\overline{N}, q)_0, (\overline{N}, p)) \Leftrightarrow (5.14) \text{ ve } (5.18);$$

$$A \in ((\overline{N}, q), (\overline{N}, p)_0) \Leftrightarrow (5.14), (5.16), (5.17) \text{ ve } (5.19);$$

$$A \in ((\overline{N}, q), (\overline{N}, p)) \Leftrightarrow (5.14), (5.16), (5.18) \text{ ve } (5.20)$$

olur.

5.3. Kompakt Olmama Derecesi ve Dönüşümler

Bu bölümde, bir L_A operatörünün kompakt oluşunu inceleyeceğiz. Bunu yaparken kompakt olmama derecesini kullanacağız.

Bilindiği üzere; Tanım 2.12'deki verilenlerle birlikte, eğer $\mathbb{Q}$ bir X metrik uzayının sınırlı bir altkümesi, o zaman $\mathbb{Q}$ 'nin kompakt olmama Hausdorff derecesi, $\chi(\mathbb{Q})$ ile gösterilir ve

$$\chi(\mathbb{Q}) = \inf \{ \varepsilon > 0 : \mathbb{Q}, X' \text{ de sonlu bir } \varepsilon - \text{ağa sahip} \}$$
 yazılır.

χ fonksiyonu, kompakt olmama Hausdorff derecesi diye adlandırılır (Banas ve Goebel, 1980; Akhmerov ve ark., 1992; Rakocevic, 1994).

Şimdi bazı tanımları burada ifade edelim: Öncelikle, $\mathbb{Q}$ 'nun kapanışı $\overline{\mathbb{Q}}$ ile gösterilsin. Eğer $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_1$, ve $\mathbb{Q}_2$ bir (X, d) metrik uzayının sınırlı alt kümeleri ise, o zaman,

$$\chi(\mathbb{Q}) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{Q} \text{ bir tam sınırlı küme,}$$

$$\chi(\mathbb{Q}) = \chi(\overline{\mathbb{Q}}),$$

$$\mathbb{Q}_1 \subset \mathbb{Q}_2 \Rightarrow \chi(\mathbb{Q}_1) \leq \chi(\mathbb{Q}_2),$$

$$\chi(\mathbb{Q}_1 \cup \mathbb{Q}_2) = \max\{\chi(\mathbb{Q}_1), \chi(\mathbb{Q}_2)\},$$

$$\chi(\mathbb{Q}_1 \cap \mathbb{Q}_2) \leq \min\{\chi(\mathbb{Q}_1), \chi(\mathbb{Q}_2)\}$$

olur.

Eğer X uzayı bir normlu uzay ise, o zaman $\chi(\mathbb{Q})$ fonksiyonu lineer yapıyla bağlantılı bazı ilave özelliklere sahiptir. Mesela;

$$\chi(\mathbb{Q}_1 + \mathbb{Q}_2) \leq \chi(\mathbb{Q}_1) + \chi(\mathbb{Q}_2),$$

her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\chi(\lambda\mathbb{Q}) = |\lambda|\chi(\mathbb{Q})$ vardır.

Eğer X ve Y normlu uzaylar ise, o zaman $A \in B(X, Y)$ için $\|A\|_\chi$ ile gösterilen A 'nın kompakt olmama Hausdorff derecesi; $K = \{x \in X : \|x\| = 1\}$, X 'de birim küre olmak üzere $\|A\|_\chi = \chi(AK)$ ile tanımlanmaktadır. Ayrıca; A kompakttır $\Leftrightarrow \|A\|_\chi = 0$ 'dır.

Şimdi de mesela Banas ve Goebel (1980) ile Akhmerov ve ark.'da (1992) bahsi geçen bir sonuca bakalım:

Önerme 5.3.1.

X , bir $\{e_1, e_2, \dots\}$ Schauder tabanlı bir Banach uzayı; $\mathbb{Q}$, X 'in sınırlı bir alt kümesi ve $P_n : X \rightarrow X$, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 'nin lineer gereni üzerine bir projektör olsun. O zaman; $a = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|I - P_n\|$ iken,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in \mathbb{Q}} \|(I - P_n)x\| \right) &\leq \chi(\mathbb{Q}) \leq \inf_n \sup_{x \in \mathbb{Q}} \|(I - P_n)x\| \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in \mathbb{Q}} \|(I - P_n)x\| \right) \end{aligned} \quad (5.21)$$

olur.

Önerme 5.3.1'deki a sayısı ile ilgili bilindiği üzere; $X = c_0$ ise, o zaman $a = 1$ ve fakat, eğer $X = c$ ise, o zaman $a = 2$ 'dir (Banas ve ark., 1980).

Sonuç 5.2.1'e bağlı olarak kompakt olmama derecelerine göre, şunu elde ederiz:

Teorem 5.3.1.

A , Sonuç 5.2.1'deki gibi olsun ve herhangi n, r ($n > r$) tamsayısı için,

$$\|A\|^{(r)} = \sup_{n>r} \sup_m \left(\sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{Q} \left| \frac{a_{nk}}{q_k} - \frac{a_{n,k+1}}{q_{k+1}} \right| + |\mathbb{Q}_m a_{nm} / q_m| \right) \quad (5.22)$$

oluşturalım.

X 'ya $(\bar{N}, q)_0$ yada $(\bar{N}, q)$ ile $A \in (X, c_0)$ olsun. O zaman,

$$\|L_A\|_{\chi} = \lim_{r \rightarrow \infty} \|A\|^{(r)} \quad (5.23)$$

yazılabilir.

X 'ya $(\bar{N}, q)_0$ yada $(\bar{N}, q)$ ile $A \in (X, c)$ olsun. O zaman,

$$\frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow \infty} \|A\|^{(r)} \leq \|L_A\|_{\chi} \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \|A\|^{(r)} \quad (5.24)$$

X 'ya $(\bar{N}, q)_0$, $(\bar{N}, q)$ yada $(\bar{N}, q)_{\infty}$ ile $A \in (X, \ell_{\infty})$ olsun. O zaman,

$$0 \leq \|L_A\|_{\chi} \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \|A\|^{(r)} \quad (5.25)$$

olur.

İspat : Dikkat edilirse; (5.23), (5.24), (5.25)'deki limitler mevcuttur. $K = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ alalım. $A \in (X, c_0)$ halinde $X = (\bar{N}, q)_0$ yada $X = (\bar{N}, q)$ için Önerme 5.3.1. ile,

$$\|L_A\|_{\chi} = \chi(AK) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\sup_{x \in K} \|(I - P_r)Ax\| \right] \quad (5.26)$$

ifadesi; $P_r : c_0 \rightarrow c_0$ ($r = 1, 2, \dots$), ilk $r + 1$ koordinatlı yani

$$P_r(x) = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_r, 0, 0, \dots), \quad x = (x_k) \in c_0$$

şeklindeki bir projektör (dikkat edilirse; $\|I - P_r\| = 1$, $r = 0, 1, 2, \dots$) olmak üzere yazılabilir.

Ayrıca; Önerme 5.2.2 ve Sonuç 5.2.1 ile

$$\|A\|^{(r)} = \sup_{x \in K} \|(I - P_r)Ax\| \quad (5.27)$$

elde edilir ve (5.26) ile de (5.23)'de elde edilebilir. (5.24)'ü ispatlamak için, dikkat edilirse; her $x = (x_k)_{k=0}^{\infty}$ dizisi, " $\ell \in \mathbb{C}$, $x - \ell e \in c$ olacak şekilde " ℓ bir tek

$x = \ell e + \sum_{k=0}^{\infty} (x_k - \ell) e^{(k)}$ gösterimine sahiptir.

$$P_r : c \rightarrow c, \quad P_r(x) = \ell e + \sum_{k=0}^r (x_k - \ell) e^{(k)}, \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad \text{tanımlayalım.}$$

Kolayca ispatlanabilir ki; $\|I - P_r\| = 2$, $r = 0, 1, 2, \dots$ 'dir. Ayrıca; (5.24)'ün ispatı, (5.23) haline benzer olduğundan kolayca görülebilir. Şimdi (5.25)'i ispatlayalım. $P_r : \ell_{\infty} \rightarrow \ell_{\infty}$, $P_r(x) = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_r, 0, 0, \dots)$, $x = (x_k) \in \ell_{\infty}$, $r = 0, 1, 2, \dots$ olarak tanımlayalım. Açık ki;

$$AK \subset P_r(AK) + (I - P_r)(AK)$$

yazılır.

Yine χ fonksiyonunun elementer özellikleri ile,

$$\chi(AK) \leq \chi(P_r(AK)) + \chi((I - P_r)(AK)) = \chi(I - P_r)(AK) \leq \sup_{x \in K} \|(I - P_r)Ax\|$$

yazılabilir. Neticeyle; Önerme 5.2.2 ve Sonuç 5.2.1 ile (5.25)'i elde ederiz.

Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak şunu yazabiliriz:

Sonuç 5.3.1.

A , Teorem 5.3.1'deki gibi olsun. O zaman; eğer $X = (\overline{N}, q)_0$ yada $X = (\overline{N}, q)$ için $A \in (X, c_0)$ ise veya eğer $X = (\overline{N}, q)_0$ yada $X = (\overline{N}, q)$ için $A \in (X, c)$ ise, bu durumda bütün bu hallerde

$$L_A \text{ kompakttır} \Leftrightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} \|A\|^{(r)} = 0 \quad (5.28)$$

yazılabilir. Ayrıca; eğer $X = (\overline{N}, q)_0$, $X = (\overline{N}, q)$ veya $X = (\overline{N}, q)_{\infty}$ için $A \in (X, \ell_{\infty})$ ise, o takdirde

$$L_A \text{ kompakttır} \Rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} \|A\|^{(r)} = 0 \quad (5.29)$$

elde edilir.

Aşağıdaki örnek gösterir ki; $\lim_{r \rightarrow \infty} \|A\|^{(r)} > 0$ halinde kompakt olma (5.29)'daki L_A için mümkündür ve burada genel olarak (5.29)'daki durum " $\Rightarrow$ " durumudur.

Örnek 5.3.1.

A matrisi, $A_n = e^{(0)}$ ($n=0,1,\dots$) ile ve $q_n = 2$, $n=0,1,2,\dots$ ile tanımlansın. Bu durumda, $M((\overline{N}, q)_\infty, \ell_\infty) = \sup_n \left[1 + \left(2 - 2^{-n} \right) \right] < 3$ 'dür ve Sonuç 5.2.1 ile birlikte, bilinmektedir ki $A \in ((\overline{N}, q)_\infty, \ell_\infty)$ 'dur. Ayrıca; $\lim_{r \rightarrow \infty} \|A\|^{(r)} = 3 > 0$ şeklinde olmak üzere iken $\forall r$ için $\|A\|^{(r)} = \sup_{n > r} \left[1 + \left(2 - \frac{1}{2^n} \right) \right] = 3 - \frac{1}{2^{r+1}}$ 'dir. $\forall x \in (\overline{N}, q)_\infty$ için $A(x) = x_0 e_0$ olduğu için L_A bir kompakt operatördür.

Şimdi aşağıdaki yardımcı sonuç ile devam edelim:

Lemma 5.3.1.

$q_k > 0$ ($k=0,1,\dots$) ve $\mathbb{Q} = \sum_{k=0}^n q_k \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) olsun. $\forall x \in \omega$ için

$$\tau_n(x) = \frac{1}{\mathbb{Q}_n} \sum_{k=0}^n q_k x_k$$

alınabilir. $r \geq 0$ olsun ve $B^{(r,0)} : (\overline{N}, q)_0 \rightarrow (\overline{N}, q)_0$ ile $B^{(r)} : (\overline{N}, q) \rightarrow (\overline{N}, q)$ operatörleri;

$$B^{(r,0)}(x) = \sum_{k=r+1}^{\infty} x_k e^{(k)} \quad (x \in (\overline{N}, q)_0) \quad (5.30)$$

ve $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n(x)$ iken

$$B^{(r)}(x) = \sum_{k=r+1}^{\infty} (x_k - \ell) e^{(k)} \quad (x \in (\overline{N}, q)) \quad (5.31)$$

alalım. O takdirde

$$\|B^{(r,0)}\| = 1 + \frac{\mathbb{Q}_r}{\mathbb{Q}_{r+1}} \quad (5.32)$$

ve

$$\|B^{(r)}\| = 2 \quad (5.33)$$

olur.

İspat : İlk önce (5.32) özdeşliğini gösterelim. $x \in (\overline{N}, q)_0$ olsun. $0 \leq n \leq r$ için $\tau_n(B^{(r,0)}(x)) = 0$ ve $n \geq r+1$ için

$$\left| \tau_n(B^{(r,0)}(x)) \right| = \left| \frac{1}{Q_n} \sum_{k=r+1}^n q_k x_k \right| = \left| \tau_n(x) - \frac{Q_r}{Q_n} \tau_r(x) \right| \leq \left(1 + \frac{Q_r}{Q_{r+1}} \right) \|x\|_{(\bar{N}, q)_\infty}$$

olduğu için görülür ki,

$$\|B^{(r,0)}(x)\|_{(\bar{N}, q)_\infty} \leq \left(1 + \frac{Q_r}{Q_{r+1}} \right) \|x\|_{(\bar{N}, q)_\infty}$$

ve neticesinde

$$\|B^{(r,0)}\| \leq 1 + \frac{Q_r}{Q_{r+1}} \quad (5.34)$$

olur.

$$x_k = \begin{cases} -1 & , 0 \leq k \leq r \\ \frac{Q_r + Q_{r+1}}{q_{r+1}} & , k = r+1 \\ -\frac{Q_r + Q_{r+1}}{q_{r+2}} & , k = r+2 \\ 0 & , k \geq r+3 \end{cases}$$

ile x dizisini tanımlayalım.

$$\tau_n(x) = -1 \quad (0 \leq n \leq r) \quad , \quad \tau_{r+1}(x) = -\frac{Q_r}{Q_{r+1}} + \frac{Q_r}{Q_{r+1}} + 1 = 1$$

ve

$$\tau_n(x) = \frac{1}{Q_n} (-Q_r + Q_r + Q_{r+1} - (Q_r + Q_{r+1})) = -\frac{Q_r}{Q_n} \quad (n \geq r+2)$$

sonucuna ulaşılır.

$Q_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) olduğundan $x \in (\bar{N}, q)_0$ ve $\|x\|_{(\bar{N}, q)_\infty} = 1$ 'dir. Ayrıca;

$$\tau_{r+1}(B^{(r,0)}(x)) = \frac{1}{Q_{r+1}} (Q_r + Q_{r+1}) = 1 + \frac{Q_r}{Q_{r+1}}$$

ve $n \neq r+1$ için $\tau_n(B^{(r,0)}(x)) = 0$ 'dır. Bu sebeple,

$$\|B^{(r,0)}(x)\|_{(\bar{N}, q)_\infty} = 1 + \frac{Q_r}{Q_{r+1}} = \left(1 + \frac{Q_r}{Q_{r+1}} \right) \|x\|_{(\bar{N}, q)_\infty}$$

ve

$$\|B^{(r,0)}\| \geq 1 + \frac{Q_r}{Q_{r+1}} \quad (5.35)$$

olur. (5.34) ve (5.35) ile birlikte, şimdi (5.32) özdeşliğini verebiliriz. Yine (5.33) özdeşliğini ispatlarız.

$x \in (\bar{N}, q)$ olsun. $0 \leq n \leq r$ için $\tau_n(B^{(r)}(x)) = 0$ 'dır ve $n \geq r+1$ için

$$\begin{aligned} \left| \tau_n(B^{(r)}(x)) \right| &= \left| \frac{1}{\mathbb{Q}_n} \sum_{k=r+1}^n q_k (x_k - \ell) \right| = \left| \tau_n(x) - \frac{\mathbb{Q}_r}{\mathbb{Q}_n} \tau_r(x) - \ell + \frac{\mathbb{Q}_r}{\mathbb{Q}_n} \ell \right| \\ &\leq \left| 1 + \frac{\mathbb{Q}_r}{\mathbb{Q}_n} \|x\|_{(\bar{N}, q)_\infty} \right| + \left| 1 - \frac{\mathbb{Q}_r}{\mathbb{Q}_n} \right| |\ell| \end{aligned}$$

olur. Burada

$$|\ell| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\tau_n(x)| \leq \|x\|_{(\bar{N}, q)_\infty}$$

olduğundan $n \geq r+1$ için

$$\left| \tau_n(B^{(r)}(x)) \right| \leq 2 \|x\|_{(\bar{N}, q)_\infty}$$

elde edilir ve sonuç olarak,

$$\|B^{(r)}\| \leq 2 \quad (5.36)$$

olur.

$$x_k = \begin{cases} -1 & , 0 \leq k \leq r \\ 2 \frac{\mathbb{Q}_{r+1}}{q_{r+1}} - 1 & , k = r+1 \\ -1 & , k \geq r+2 \end{cases}$$

ile x dizisini tanımlarsak,

$$\tau_n(x) = -1 \quad (0 \leq n \leq r) \quad , \quad \tau_{r+1}(x) = \frac{1}{\mathbb{Q}_{r+1}} (-\mathbb{Q}_r + 2\mathbb{Q}_r - q_{r+1}) = 1$$

ve

$$\tau_n(x) = \frac{1}{\mathbb{Q}_n} \left(-\mathbb{Q}_r + 2\mathbb{Q}_{r+1} - \sum_{k=r+1}^n q_k \right) = \frac{1}{\mathbb{Q}_n} (-\mathbb{Q}_n + 2\mathbb{Q}_{r+1}) = -1 + 2 \frac{\mathbb{Q}_{r+1}}{\mathbb{Q}_n} \leq 1 \quad (n \geq r+2)$$

sonucunu elde ederiz. Burada, $\|x\|_{(\bar{N}, q)_\infty} = 1$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n(x) = -1$ yani $x \in (\bar{N}, q)$ 'dur.

Netice olarak;

$$\tau_n(B^{(r)}(x)) = 0 \quad (0 \leq n \leq r) \quad , \quad \tau_{r+1}(B^{(r)}(x)) = \frac{q_{r+1}}{\mathbb{Q}_{r+1}} (x_{r+1} + 1) = 2$$

ile birlikte $\tau_n(B^{(r)}(x)) = 2 \frac{\mathbb{Q}_{r+1}}{\mathbb{Q}_n} \leq 2 \quad (n \geq r+2)$ 'dir. Bu gerektirir ki,

$$\|B^{(r)}\| \geq 2 \quad (5.37)$$

olur. Yine (5.36) ve (5.37) ile (5.33)'ü verebiliriz.

Sonuç 5.2.2 ve kompakt olmama dereceleri ile bağlantılı olarak şunu elde ederiz:

Teorem 5.3.2.

X bir BK uzayı; A Sonuç 5.2.2'deki gibi ve $P_m \rightarrow \infty$ ($m \rightarrow \infty$) verilsin. O zaman; herhangi m, r ($m > r$) tamsayısı için,

$$\|A\|_{(\bar{N}, p)_\infty}^{(r)} = \sup_{m > r} \left\| \frac{1}{P_m} \sum_{n=0}^m A_n \right\|^* \quad (5.38)$$

alalım. Ayrıca; eğer X bir Schauder tabanına sahip ve $A \in (X, (\bar{N}, p)_0)$ ise, o takdirde

$$b = \limsup_{n \rightarrow \infty} (2 - p_n/P_n)$$

iken

$$\frac{1}{b} \lim_{r \rightarrow \infty} \|A\|_{(\bar{N}, p)_\infty}^{(r)} \leq \|L_A\|_\chi \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \|A\|_{(\bar{N}, p)_\infty}^{(r)} \quad (5.39)$$

yazılabilir. Eğer X bir Schauder tabanına sahip ve $A \in (X, (\bar{N}, p))$ ise, o zaman

$$\frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow \infty} \|A\|_{(\bar{N}, p)_\infty}^{(r)} \leq \|L_A\|_\chi \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \|A\|_{(\bar{N}, p)_\infty}^{(r)} \quad (5.40)$$

olur.

Netice olarak; eğer $A \in (X, (\bar{N}, p))$ ise, o zaman

$$0 \leq \|L_A\|_\chi \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \|A\|_{(\bar{N}, p)_\infty}^{(r)} \quad (5.41)$$

yazılır.

İspat : Dikkat edileceği üzere; (5.39), (5.40), (5.41)'deki limitler mevcuttur. $K = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ alalım. Varsayalım ki; $A \in (X, (\bar{N}, p)_0)$ 'dir.

$B^{(r,0)} : (\bar{N}, p)_0 \rightarrow (\bar{N}, p)_0$, Lemma 5.3.1'deki üzere tanımlı olsun. Bu takdirde (5.32) ile, sahip oluruz ki, $\|B^{(r,0)}\| = 2 - p_r/P_r$ 'dir. Yine (5.39) ispatlanmak üzere Önerme 5.1.1 ve 5.3.1 ile, $b = \lim_{r \rightarrow \infty} \sup \|B^{(r,0)}\|$ olmak üzere

$$\frac{1}{b} \lim_{r \rightarrow \infty} \sup \left(\sup_{x \in K} \|B^{(r,0)} Ax\| \right) \leq \chi(AK) \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \sup \left(\sup_{x \in K} \|B^{(r,0)} Ax\| \right) \quad (5.42)$$

yazılabilir.

Böylece; $\sup_{x \in K} \|B^{(r,0)} Ax\| = \|Ax\|_{(\bar{N}, p)_\infty}^{(r)}$ olduğundan (5.39) ispatlanmış olur.

(5.40)'ı ispatlamak için Önerme 5.1.1'e dikkat edilirse; $(\bar{N}, p)$, Schauder

$e, e^{(k)}, k=0,1,\dots$ tabanına sahip ve her $(x_k)_{k=0}^\infty \in (\overline{N}, q)$, " $\ell \in \mathbb{C}$, $x - \ell e \in (\overline{N}, p)_0$ olmak üzere " ℓ bir tek $x = \ell e + \sum_{k=0}^\infty (x_k - \ell) e^{(k)}$ gösterimine sahiptir.

$$B^{(r)} : (\overline{N}, p)_0 \rightarrow (\overline{N}, p)_0, \quad B^{(r)}(x) = \sum_{k=r+1}^\infty (x_k - \ell) e^{(k)} \quad \text{ile Lemma 5.3.1'e}$$

göre tanımlı bir projektör olsun. O zaman; (5.33) ile, $\|B^{(r)}\| = 2$ olarak elde edilir. Yine (5.40)'ın ispatı (5.39) durumuna benzer olup aynı teknikle sonuca ulaşılabilir. Şimdi (5.41)'i ispatlayalım. Bunun için öncelikli olarak yukarıda ifade edildiği bir biçimde

$$P : (\overline{N}, p)_\infty \rightarrow (\overline{N}, p)_\infty, \quad P_r(x) = (x_0, x_1, \dots, x_r, 0, 0, \dots)$$

ve

$$x = (x_r) \in (\overline{N}, p)_\infty \quad r = 1, 2, \dots$$

ile tanımlayalım. Açık ki; $AK \subset P(AK) + (I - P_r)(AK)$ 'dir. Uyarı 5.2.1(b) ifadesi ile görülür ki; P_r bir sınırlı operatördür ve açık bir biçimde bu sonlu ranka sahip olduğundan kompakt olanıdır. Ayrıca; χ fonksiyonunun elementer özellikleri ile,

$$\begin{aligned} \chi(AK) &\leq \chi(P_r(AK)) + \chi((I - P_r)(AK)) \\ &= \chi((I - P_r)(AK)) \\ &\leq \sup_{x \in K} \|(I - P_r)Ax\| = \|A\|_{(\overline{N}, p)_\infty}^{(r)} \end{aligned} \quad (5.43)$$

elde edilir.

Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak şunu elde ederiz:

Sonuç 5.3.2.

X bir BK uzayı ve A ile $\|A\|_{(\overline{N}, p)}^{(r)}$, Teorem 5.3.2'deki gibi verilsin. Eğer X bir Schauder tabanına sahip iken ya $A \in (X, (\overline{N}, p)_0)$ yada $A \in (X, (\overline{N}, p))$ ise, bu halde,

$$L_A \text{ kompakttır} \Leftrightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} \|A\|_{(\overline{N}, p)}^{(r)} = 0 \quad (5.44)$$

olur. Ayrıca; eğer $A \in (X, (\overline{N}, p)_\infty)$ ise, o zaman

$$L_A \text{ kompakt} \Rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} \|A\|_{(\overline{N}, p)}^{(r)} = 0 \quad (5.45)$$

olur.

Yine, Uyarı 5.2.1'e bağlı olarak, birkaç sonuç elde edebiliriz.

Sonuç 5.3.3.

Eğer ya $A \in (\ell^u, (\overline{N}, p)_0)$ ($1 < u < \infty$) yada $A \in (\ell^u, (\overline{N}, p))$ ($1 < u < \infty$) ise, bu takdirde, $v = \frac{u}{u-1}$ olmak üzere

$$L_A \text{ kompakt} \Leftrightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\sup_{m > r} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1}{P_m} \sum_{n=0}^m p_n a_{nk} \right|^v \right)^{1/v} \right] = 0 \quad (5.46)$$

olur.

Ayrıca; eğer ya $A \in (\ell^1, (\overline{N}, p)_0)$ yada $A \in (\ell^1, (\overline{N}, p))$ ise, o zaman

$$L_A \text{ kompakt} \Leftrightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\sup_{n > r, k} \left| \frac{1}{P_m} \sum_{n=0}^m p_n a_{nk} \right| \right] = 0 \quad (5.47)$$

olur. Eğer $A \in (\ell^u, (\overline{N}, p))$ ($1 < u < \infty$) ise, o zaman $v = \frac{u}{u-1}$ olmak üzere

$$L_A \text{ kompakt} \Rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\sup_{m > r} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1}{P_m} \sum_{n=0}^m p_n a_{nk} \right|^v \right)^{1/v} \right] = 0 \quad (5.48)$$

olur.

Sonuç olarak, eğer $A \in (\ell^1, (\overline{N}, p))$ ise, o takdirde

$$L_A \text{ kompakt} \Rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\sup_{n > r, k} \left| \frac{1}{P_m} \sum_{n=0}^m p_n a_{nk} \right| \right] = 0 \quad (5.49)$$

olur.

Sonuç 5.3.2, Önerme 5.2.3 ve Uyarı 5.1.1(b)'den şu elde edilir:

Sonuç 5.3.4.

Eğer $X = (\overline{N}, q)_0$ yada $X = (\overline{N}, q)$ için $A \in (X, (\overline{N}, p)_0)$ ise veya eğer $X = (\overline{N}, q)_0$ yada $X = (\overline{N}, q)$ için $A \in (X, (\overline{N}, p))$ ise, o zaman bütün bu durumlarda elde ederiz ki, L_A kompakt $\Leftrightarrow$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[\sup_{m > r, n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{Q}_k \left| \frac{1}{P_m} \sum_{\ell=0}^m p_{\ell} (\Delta^+ A_{\ell}/q)_k \right| + \left| \frac{\mathbb{Q}_n}{q_n P_m} \sum_{\ell=0}^m p_{\ell} a_{\ell n} \right| \right) \right] = 0 \quad (5.50)$$

olur.

Ayrıca; eğer $X = (\overline{N}, q)_{\infty}$, $X = (\overline{N}, q)_0$ yada $X = (\overline{N}, q)$ için $A \in (X, (\overline{N}, p)_{\infty})$ ise, o zaman yazabiliriz ki; L_A kompakt $\Rightarrow$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[\sup_{m > r, n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{Q}_k \left| \frac{1}{P_m} \sum_{\ell=0}^m p_\ell \left(\Delta^+ A_\ell / q \right)_k \right| + \left| \frac{\mathbb{Q}_n}{q_n P_m} \sum_{\ell=0}^m p_\ell a_{\ell n} \right| \right) \right] = 0 \quad (5.51)$$

olur.

KAYNAKLAR

- Akhmerov, R. R., Kamenskii, M. I., Potapov, A. S., Rodkina, A. E., Sadovskii, B. N., 1992. Measures of noncompactness and condensing operators. *Oper. Theory Adv. Appl.*, **55**: 1-249.
- Aljarrah, A. M., Malkowsky, E., 1998. BK spaces, bases and linear operators. *Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo*, **52**(2): 177-191.
- Banas, J., Goebel, K., 1980. Measures of noncompactness in Banach spaces. *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, **60**: 1-97.
- Hardy, G. H., 1973. *Divergens Series*. Oxford University Press, London.1.**
- Maddox, I. J., 1968. On Kuttner's theorem. *J. London Math.*, **43**: 285-290.
- Maddox, I. J., 1970. *Elements Of Functional Analysis*. Cambridge University Press. London.1.**
- Malkowsky, E., 1987. Klassen von Matrixabbildungen in paranormierten FK-Räumen. *Analysis*, **7**: 275-292.
- Malkowsky, E., 1988. *Matrix Transformations In A New Class Of Sequence Spaces That Includes Spaces Of Absolutely And Strongly Summable Sequences*. Habilitationsschrift, Giessen.1.
- Malkowsky, E., 1995. The continuous duals of the spaces $c_0(\Lambda)$ and $c_\infty(\Lambda)$ for exponentially bounded sequences Λ . *Acta Sci. Math.*, **61**: 241-250.**
- Malkowsky, E., 1996. Linear operators in BK spaces. *Bolyai Soc. Math. Stud.*, **5**: 259-273.**
- Malkowsky, E., Parashar, S. D., 1997. Matrix transformations in spaces of bounded and convergent difference sequences of order m. *Analysis*, **17**: 87-97.
- Malkowsky, E., Rakocevic, V., 1998. The measure of noncompactness of linear operators between certain sequence spaces. *Acta Sci. Math.*, **64**: 151-170.
- Malkowsky, E., Rakocevic, V., 1999. The measure of noncompactness of linear operators between spaces of m^{th} – order difference sequences. *Studia Sci. Math. Hungar.*, **35**: 381-395.
- Malkowsky, E., Rakocevic, V., 2000. Measure of noncompactness of linear operators between spaces of strongly C_1 summable and bounded sequences. *Acta Math. Hungar.*, **89**(1-2): 29-45.
- Malkowsky, E., Rakocevic, V., 2001. Measure of noncompactness of linear operators between spaces of sequences that are $(\bar{N}, q)$ summable or bounded. *Czech. Math. Journal*, **51**(126): 505-522.
- Peyerimhoff, A., 1957. Über ein Lemma von Herrn Chow. *J. London Math. Soc.*, **32**: 33-36.
- Rakocevic, V., 1994. *Funkcionalna Analiza*, Naučna knjiga, Beograd.1.
- Wilansky, A., 1964. *Functional Analysis*. Blaisdell Publishing Company. Newyork.1.

Wilansky, A., 1984. Summability through functional analysis. *North-Holland Math. Stud.*, **85**: 1-318.

ÖZ GEÇMİŞ

1979 yılında Batı Almanya'nın Rosenheim eyaletinde doğdu. İlk öğrenimini Gaziantep'in Nizip İlçesine bağlı İstiklal İlkokulu'nda, orta ve lise öğrenimini de Nizip Hasan Çapan Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 1998 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı ve 2002 yılında da mezun oldu. Aynı yıl Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Yüksek Lisans eğitimine başladı. Halen Milli Eğitim Bakanlığına bağlı Van Şehit Koray Akoğuz Lisesi'nde matematik öğretmeni olarak çalışmaktadır.