T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

FUZZY GRAFLARDA GRUPLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Habib AKYOL
DANIŞMAN:Yrd.Doç. Dr. M. Şerif ALDEMİR

VAN - 2005

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

FUZZY GRAFLARDA GRUPLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Habib AKYOL

VAN - 2005

KABUL ve ONAY SAYFASI

Yrd. Doç. Dr. M. Şerif ALDEMİR danışmanlığında, Habib AKYOL tarafından hazırlanan *"Fuzzy Graflarda Gruplar"* isimli bu çalışma …./…./2005 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda *Yüksek Lisans Tezi* olarak kabul edilmiştir.

Başkan :………………………………......… İmza:

Üye :………………………………......… İmza:

Üye :………………………………......… İmza:

Üye :………………………………......… İmza:

Üye :………………………………......… İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu' nun …../…../….…. gün ve…………. ………………sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

1. GİRİŞ ve KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Bu çalışmada graflardan fuzzy graflara olan bir genelleme süreci boyunca fuzzy graflardaki grupların çeşitleri, özellikleri ve yapıları incelenecektir. Kesin olarak açıklanamayan fiziksel durumlara karşılık gelen fuzzy kavramı etrafında istatistik, bilgi işlem ve dil bilimi gibi bazı alanların toplandığı düşünüldüğünde konunun ehemmiyeti daha iyi anlaşılabilir. Bu doğrultuda; fuzzy graflarda verilen herhangi bir üye ile ilişkiye sahip olan grup üyelerinin bir sınıfının tam olarak sınırının tanımlanmadığı böyle bir grup içinde herhangi bir bireysel üye tarafından oynanan rolü karakterize etmek amaçlanmaktadır. Ross ve Harary (1959) tarafından gösterilen alışılmış bir grafın zayıf ve kuvvetli noktalarının kavramları, bir fuzzy grafın bu verilenlere genelleştirilmesi olarak ifade edilebilir.

Graflar teorisi, grup ve grup yapısı alanındaki en önemli araçlardan birisidir. Mesela; varlığı bir zayıf bağlantılılık kategorisine ait olmak için grafa yol açan birey zayıf bir üye iken o var olmadığı zaman mevcudiyeti elde edildiğinden çok daha fazla bağlantılandırılabileceği olası olan bir grafa yol açan bireyin kuvvetli bir üye olması bakımından karşılaştırıldığında Ross ve Harary'nin (1959) böyle bir grup içinde bir bireysel üyenin bu tip bir rolünü karakterize etmek için grafı kullanması oldukça çok önemlidir. Bununla birlikte; pek çok durumda bir ilişkinin sade varlığı yada yokluğu, verilen bir grup yapısını ortaya koymak için yeterli değildir. Harary'ye (1959) göre, bireyler arasında ilişkilerin farklı mukavemetleri(güçleri) olabilir. Verilen bir üyeyle keyfi bir bireyin bağlantıya sahip olup olmadığının iyi tanımlı oluşu haricinde onun fuzzy olduğu durumlar dahi olabilir, yani herhangi verilen bir üyeyle bağlantıda olan grup üyelerinin bir sınıfı tam belirli bir sınıra sahip değildir. Böyle durumlarda; alışılmış graf, grup yapısını tam olarak gösteremez. Bunu yerine; fuzzy graf, daha uygun bir matematiksel model olarak gözükür. Yine Harary (1959) graf teorisi ile ilgili yapılmış tüm çalışmaları da bir araya toplamış ve fuzzy graflarının daha detaylı bir çalışmasını Kaufmann (1975) yapmıştır.

Mühendislik, sosyal bilimler gibi bir çok alanda kullanılan fuzzy teorisinin kökeninin başlangıcı Zadeh (1965) tarafından atıldığı pek çok atıftan açık olarak görülmektedir. Fuzzy alt gruplar üzerine Das (1981), Bhattacharya ve Mukherjee (1987), Bhattacharya (1986a; 1986b; 1987) gibi araştırmacılar tarafından bir çok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalarda Bhattacharya (1987) fuzzy normal alt gruplar ve fuzzy kosetler kavramlarını içeren fuzzy gruplar hakkında çeşitli sonuçlar vermiştir. Daha sonra yine Bhattacharya ve Mukherjee (1987) tarafından sonlu bir grubun fuzzy alt grubunun mertebesi, fuzzy abelyan grup, fuzzy çözülebilir grup kavramlarını tanımladılar. Mukherjee ve Bhattacharya'da (1984; 1986) bir fuzzy alt grubun fuzzy normal alt grup olması için gerek ve yeter koşul verilmiştir ve ayrıca bir fuzzy normal alt grubunun seviye alt gruplarının da normal olduğu gösterilmiştir. Ajmal ve Prajapati'de (1992) bir fuzzy normal alt grubun homomorf görüntüsünün de fuzzy normal olduğunu ve p asal bir sayı olmak üzere p^n mertebeli bir grubun p^{n-1} mertebeli fuzzy alt grubunun bir fuzzy normal alt grup olduğunu göstermiştir. Aktaş'ta (2005) fuzzy normal alt gruplar ile fuzzy kosetlerin temel tanım ve özellikleri bir arada verilmiştir. Diğer yandan Harary (1972), Harary ve ark. (1965), Lederman (1996), Takeda ve Nishida (1976) çalışmalarında da fuzzy tabanlı grupsal tanımlama ve sonuçlar elde edilmiştir.

Diğer taraftan Euler (1736) çalışmasında Königsberg'in köprü problemi üzerine bir başlangıç araştırması da ortaya koymuştur. Graf teorisinde Krichhoff (1847) çalışmasında elektrik devreleri ile akımları üzerine başka bir yaklaşım geliştirmiştir. Nitekim bu araştırmanın sonucu Cayley (1895) grafları organik ve inorganik kimya bağlantılarının gösteriminde kullanmıştır. Ayrıca; fuzzy alt grup tanımını Rosenfeld (1971) vermiş ve fuzzy kümeler üzerinde tanımlanması bu sayede elde edilmiştir. Yine Harary (1972) çalışmasında graf teorisi ile ilgili yapılan esas bilgileri ortaya koymuştur. Wilson (1972), Christofides (1975) ve Ceyhun (1976) çalışmalarında graf teorisi için gerekli alt yapı oluşturulmuştur. Kelarev ve Praeger (2003) çalışmasında ise grupoidler ile grupların Cayley graflarını inceleyerek benzer sonuçlar elde etmiştir.

2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Bu bölümde Zadeh (1965),Kaufmann (1975), Harary (1972), Wilson (1972), Christofides (1975) ve Ceyhun (1976) çalışmaları gereğince çeşitli şekillerin simetrik çalışmasında ilginç ve güçlü bir soyut yaklaşım sağlayan grup teorisi ile ilgili daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1.

V ve E ayrık iki küme, g 'de E 'nin her elemanını V 'nin kesinlikle farklı veya aynı iki elemanına eşleyen bir bağıntı ise (V , E , g) üçlüsüne bir graf denir ve bu $G=(V,E,g)$ biçiminde gösterilir. Yani; herhangi $e_k \in E$, eğer $v_i, v_j \in V$ ile eşleşirse bu $E \xrightarrow{g} V$ veya

$$g: E \rightarrow V\ ,\ e_k \rightarrow g(e_k)=(v_i, v_j)$$

şeklindeki bağıntı ile ifade edilir.

Tanım 2.2.

(i) Bir (V,E,g) grafında; E 'nin her bir elemanı bir ayrıt ve V 'nin her bir elemanı bir tepedir.

(ii) Bir tepe, bir ayrıtın son noktası ise; bu tepe ile bu ayrıt birbirleriyle bağlantılıdır denir.

(iii) Bir grafın veya alt grafın ayrıtları sıralanabiliyorsa öyle ki; bu dizide her ayrıt tepelerinden birini kendisinden önceki ayrıtla diğerini de kendisinden sonra gelen ayrıtla birleştirebiliyorsa, bu grafa bir sıralı ayrıt denir.

(iv) Bir sıralı ayrıtta her ayrıtın tekrarı bir ise bu sıralı ayrıt, bir ayrıt katarıdır denir.

(v) Bir ayrıt katarının her bir iç tepesinin derecesi iki ve her bir uç tepesinin derecesi bir ise bu ayrıt katarına yol denir.

(vi) Bir grafta; eğer her bir tepesi ya (v_{i-1}, v_i) yada (v_i, v_{i-1}) olacak bir biçimde bir yol ise buna yarı yol denir.

Tanım 2.3.

(i) Bir graftaki her bir ayrıta yön vererek elde edilen grafa, yönlü graf denir.

(ii) Bir grafın içindeki tepe ve ayrıtların bir kısmına sahip olan başka bir grafa, alt graf denir.

Önerme 2.1.

$0 < \alpha_i \leq 1 \quad (i = 1,2)$ olmak üzere G_{α_i} grafı ile R_{α_i} fuzzy bağıntısı verilsin. Buna göre

(i) $\alpha_1 \geq \alpha_2 \Rightarrow G_{\alpha_1} \subset G_{\alpha_2}$

(ii) $\mathsf{R}_{\alpha_1} \subset \mathsf{R}_{\alpha_2}$

yazılır.

Teorem 2.1. (Ayrışım Teoremi)

Herhangi bir fuzzy $\underset{\sim}{\mathsf{R}}$ bağıntısı, $\vee$ =Max sembolü yardımıyla

$$\underset{\sim}{\mathsf{R}} = \underset{\alpha}{\vee} \alpha\, \mathsf{R}_\alpha \quad 0 < \alpha \leq 1 \tag{2.1}$$

biçiminde ayrışabilir. Burada

$$\mu_{\mathsf{R}_\alpha}(x,y) = \begin{cases} 1 & , \quad \mu_{\underset{\sim}{\mathsf{R}}}(x,y) \geq \alpha \\ 0 & , \quad \mu_{\underset{\sim}{\mathsf{R}}}(x,y) < \alpha \end{cases} \tag{2.2}$$

olup $\alpha\, \mathsf{R}_\alpha$ ile R_α bağıntısının tüm elemanlarının α ile çarpılmış hali gösterilir.

İspat : (2.1) ifadesinin üyelik fonksiyonları

$$\mu_{\underset{\alpha}{\vee}\alpha \mathsf{R}_\alpha}(x,y) = \underset{\alpha}{\vee} \alpha \mu_{\mathsf{R}_\alpha}(x,y) = \underset{\alpha \leq \mu_{\underset{\sim}{\mathsf{R}}}(x,y)}{\vee} \alpha = \mu_{\underset{\sim}{\mathsf{R}}}(x,y)$$

olarak yazılır.

Tanım 2.4 (Fuzzy Küme)

(i) $X = \{x\}$ boş olmayan noktaların kümesi olmak üzere A, X'in bir alt kümesi olsun. X'den $I = [0,1]$ kapalı aralığına tanımlı olan μ_A fonksiyonu ile belirtilen bir A kümesine X içinde tanımlı fuzzy kümesi denir.

(ii) Ayrıca; (i)'de tanımlanan μ_A'ya A fuzzy kümesinin Üyelik fonksiyonu ve herhangi $x \in X$ için $\mu_A(x)$ değerine de x noktasının A fuzzy kümesine üyelik derecesi yada değeri denir.

(iii) $\psi_A : X \to [0,1]$ fonksiyonu; A, X'in herhangi bir alt kümesi iken A'nın

$$\psi_A(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in A \\ 0 & , \quad x \notin A \end{cases}$$

şeklinde tanımlı Karakteristik fonksiyonu olarak tarif edilir. Yani, karakteristik fonksiyonu A 'nın üyelik fonksiyonunun özel bir halidir.

(iv) Burada $I^X = \mathbf{F}(X) = \mathbf{F}$ 'ye fuzzy sınıfı denir. X 'in üyelik fonksiyonu μ_X ise her $x \in X$ için $\mu_X(x) = 1$ olur. 1 'de en büyük fuzzy kümesi olur.

Tanım 2.5 (Fuzzy Alt Küme)

Sayılabilir yada sayılabilir olmayan bir E kümesi ile onun bir x elemanı verilsin. Bu durumda; $\mu_A(x)$, A 'daki x 'in üyelik derecesi yada değeri iken her $x \in E$ için $\{(x|\mu_A(x))\}$ sıralı çiftlerinin kümesine E 'nin bir fuzzy $\acute{A}$ alt kümesi denir.

Tanım 2.6 (Fuzzy Graf)

E_1 ve E_2 gibi iki küme ele alalım. x, E_1 'de ve y, E_2 'de tasarlanmış noktalar olsun. $E_1 \times E_2$ çarpım kümesi (x, y) ile tanımlı sıralı çiftlerinin kümesi ve M, $E_1 \times E_2$ 'nin herhangi bir üyelik kümesi olmak üzere her $(x, y) \in E_1 \times E_2$ için $\mu_G(x, y) \in M$ olacak şekilde bir G fuzzy alt kümesine bir fuzzy Graf denir.

Tanım 2.7 (Fuzzy Group)

(i) X bir group ve A ile B, X 'in fuzzy alt kümeleri olsunlar. Bir fuzzy A kümesi; eğer her $x, y \in X$ için,

$$A(xy) \geq \min(A(x), A(y)) \text{ ve } A\left(x^{-1}\right) \geq A(x)$$

oluyorsa X üzerinde bir fuzzy grup olarak adlandırılır.

(ii) Bir fuzzy B alt kümesi; eğer her $x, y \in X$ için,

$$B(xy) \geq \min(B(x), B(y))$$

oluyorsa bir fuzzy yarı grup diye adlandırılır.

Uyarı 2.1.

Kolayca görülebilir ki; eğer A bir X grubunda bir fuzzy grup ve e, X 'in birimi ise, o zaman $\forall x \in X$ için $A(e) \geq A(x)$ olur (Aktaş, 2005).

Önerme 2.2.

Eğer A bir G grubu üzerinde bir fuzzy grup ise, o zaman; $xA = A \Rightarrow Ax = 1$ 'dir. Eğer S bir G grubunda bir fuzzy alt küme ise, o zaman her $x, y, g \in G$ için,

(i) $(xS)(g) = S\left(x^{-1}g\right)$
(ii) $(Sx)(g) = S\left(gx^{-1}\right)$
(iii) $(xyS) = x(yS)$
(iv) $S(xy) = (Sx)(y)$ elde edilir (Aktaş, 2005).

İspat : $xA(z) = \sup\limits_{z=w_1w_2} \min(x(w_1), x(w_2)) = \min\left(x(x), A\left(x^{-1}z\right)\right) = A\left(x^{-1}z\right)$

$$\geq \min\left(A\left(x^{-1}\right), A(z)\right) = A(z)$$

ifadesi her $z \in G$ için sağlanır. Yine her $z \in G$ değeri için şu ifadeyi yazabiliriz:

$$A(z) = A\left(xx^{-1}z\right) \geq \min\left(A(x), A\left(x^{-1}z\right)\right) = A\left(x^{-1}z\right) = xA(z)$$

Buradan hareketle ispatın geriye kalanı kolayca ortaya çıkarılabilir.

3.FUZZY ALT ve NORMAL ALT GRUPLAR İLE FUZZY KOSETLER

Bu bölümde; cebirsel kavramlardan fuzzy alt ve normal alt gruplar ile fuzzy kosetler üzerinde durulacaktır. Ayrıca; grup teorisinin bazı temel tanım ve teoremlerine benzer olan çeşitli sonuçlar fuzzy alt gruplar için ifade edilecektir.

3.1. Fuzzy Alt ve Normal Alt Gruplar

Burada fuzzy alt gruplar ile normal alt gruplarla ilgili Zadeh (1965), Bhattacharya (1984; 1987), Bhattacharya ve Mukherjee (1987), Rosenfeld (1971), Lederman (1996), Das (1981), Ajmal ve Prajapati (1992), Aktaş'da (2005) verilen bazı temel tanım ve sonuçlar gösterilecektir.

Tanım 3.1.1.

S herhangi bir küme olsun.

$$\mu : S \to [0,1]$$

şeklindeki dönüşüm fuzzy alt kümesi olarak tanımlanır.

Tanım 3.1.2.

S bir grupoid olsun. Eğer her $x, y \in S$ için

$$\mu(xy) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$$

ise $\mu : S \to [0,1]$ dönüşümüne bir fuzzy grupoid denir.

Önerme 3.1.1.

Buna göre;

$$\mu(x_1 x_2 ... x_n) \geq \min\{\mu(x_i) : 1 \leq i \leq n\}$$

eşitsizliği $x_1, x_2, ..., x_n \in S$ ve her bir μ fuzzy alt grupoid için sağlanır.

Tanım 3.1.3.

G bir grup olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $\mu : G \to [0,1]$ dönüşümüne bir fuzzy alt grup denir:

(i) $\forall x, y \in G$ için $\mu(xy) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$

(ii) $\forall x \in G$ için $\mu(x) = \mu(x^{-1})$

Tanım 3.1.4.

μ , S 'nin bir fuzzy alt kümesi ise herhangi bir $t \in [0,1]$ için

$$A_t = \{x \in S : \mu(x) \geq t\}$$

kümesi μ 'nün seviye alt kümesi olarak adlandırılır.

Önerme 3.1.2.

G birimi e olan bir grup olsun. Eğer μ , G 'nin fuzzy alt grubu ise $\forall x \in G$ için $\mu(x) \leq \mu(e)$

olur.

İspat : $\forall x \in G$ için

$$\mu(e) = \mu\left(xx^{-1}\right) \geq \min\left\{\mu(x), \mu\left(x^{-1}\right)\right\} = \mu(x)$$

ve Tanım 3.1.1 ve 3.1.4'den bulunabilir. Buradan da istenen elde edilir.

Eğer μ , G 'nin bir fuzzy alt grubu ise $\mu(e) \geq t$ olan herhangi bir $t \in [0,1]$ için A_t seviye alt kümesi G 'nin bir alt grubudur. Bu durumda A_t seviye alt kümesi μ 'nün seviye alt grubu olarak adlandırılır.

Eğer μ 'nün görüntü kümesi $\{t_0, t_1, ..., t_n\}$ 'den ibaret ise seviye alt grupların ailesi

$$\left\{A_{t_i} : 0 \leq i \leq n\right\} ,$$

μ 'nün seviye alt gruplarının tamamını oluşturur.

Eğer sonlu bir G grubu üzerinde fuzzy alt grubunun görüntüsü

$$\{t_0, t_1, ..., t_n\}$$

ise μ 'nün seviye alt grupları

$$A_{t_0} < A_{t_1} < ... < A_{t_n} = G$$

şeklinde bir zincir oluşturur. Burada

$$t_0 > t_1 > ... > t_n \text{ ve } \mu(e) = t_0$$

yazılır (Das, 1981).

Uyarı 3.1.1.

Fuzzy gruplarının seviye alt grupları ile ilgili detaylı bilgiler Bhattacharya'nın (1987) çalışmasında ele alınmıştır. Orada aynı seviye alt gruplarına sahip olan iki fuzzy alt grubunun eşit olması için gerek ve yeter koşulun görüntü kümelerinin aynı olması olduğu ispatlanmıştır (Bhattacharya, 1987).

Tanım 3.1.5.

X boştan farklı bir küme olsun. X kümesinin bir μ fuzzy (alt) kümesi

$$\mu : X \to [0,1]$$

fonksiyonudur.

Tanım 3.1.6.

Bir X kümesinin bir μ fuzzy (alt) kümesi verilsin. $t \in [0,1]$ için

$$X_\mu^t = \{x \in X : \mu(x) \geq t\} \ ,$$

μ fuzzy (alt) kümesinin $t -$ seviye alt kümesi olarak adlandırılır.

Teorem 3.1.1.

Bir X kümesinin bir fuzzy kümesi bir fuzzy noktasıdır $\Leftrightarrow$ Onun bir hariç bütün $y \in X$ için sıfır değerini $x \in X$ değerleri alır. Eğer onun x 'deki değeri t ise $0 < t \leq 1$ olduğu zaman fuzzy noktasını x_t ile göstereceğiz (Aktaş, 2005).

Tanım 3.1.7.

Bir X kümesinin bir μ fuzzy (alt) kümesinin tümleyeni μ^c ile gösterilir ve her $x \in X$ için $\mu^c(x) = 1 - \mu(x)$ olarak tanımlanır.

Tanım 3.1.8.

Bir X kümesinin iki fuzzy alt kümesi μ ve λ olsun. Eğer $\mu(x) = \lambda(x)$ olacak şekilde hiçbir $x \in X$ noktası yoksa bu iki küme ayrık olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.9.

Bir X kümesinin iki μ ve λ fuzzy alt kümesinin birleşimi her $x \in X$ için

$$(\lambda \cup \mu)(x) = \max\{\lambda(x), \mu(x)\}$$

olarak tanımlanan X kümesinin bir fuzzy alt kümesidir ve $\lambda \cup \mu$ ile gösterilir. Bir X kümesinin iki μ ve λ fuzzy alt kümesinin kesişimi her $x \in X$ için

$$(\lambda \cap \mu)(x) = \inf\{\lambda(x), \mu(x)\}$$

olarak tanımlanan X kümesinin bir fuzzy alt kümesidir ve $\lambda \cap \mu$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.10.

X herhangi bir küme olsun. X kümesindeki bir μ fuzzy alt kümesi " eğer X kümesinin herhangi A alt kümesi için

$$\mu(x_0) = \sup\{\mu(x) : x \in A\}$$

olacak şekilde bir $x_0 \in A$ varsa " sup özelliğine sahiptir denir.

Teorem 3.1.2.

μ bir G grubunun bir fuzzy alt kümesi olsun. Bu durumda; μ , G 'nin bir fuzzy alt grubudur $\Leftrightarrow$ e, G grubunun birim elemanı olmak üzere her $t \in [0, \mu(e)]$ için G_μ^t , G grubunun (seviye alt grubu diye adlandırılan) bir alt grubudur (Aktaş, 2005).

Teorem 3.1.3.

μ bir G grubunun bir fuzzy alt grubu olsun. Bu durumda; her $x \in G$ ve $t \in [0,1]$ için $xG_\mu^t = G_{x\mu}^t$ yazılır (Aktaş, 2005).

3.2. Fuzzy Normal Alt Gruplar

Bu bölümde fuzzy normal alt grup tanımı ve onunla ilgili sonuçlara yer verilmektedir. Bunun için öncelikle bu konuda önem taşıyan iki lemmayı verelim:

Lemma 3.2.1.

Eğer μ sonlu bir G grubunun bir fuzzy alt grupoidi ise μ bir fuzzy alt grubudur (Aktaş, 2005).

İspat : $x \in G$ olsun. Önce tümevarımla her k için

$$\mu(x^k) \geq \mu(x)$$

olduğunu gösterelim. $k = 0$ için iddia Önerme 3.1.2'nin sonucudur. $k > 0$ ve iddia $k-1$ için doğru olsun. O zaman

$$\mu(x^k) = \mu(xx^{k-1}) \geq \min\{\mu(x), \mu(x^{k-1})\} = \mu(x)$$

ifadesi

$$\mu\left(x^{k-1}\right) \geq \mu(x)$$

olacağından dolayı sağlanır. Şimdi G sonlu olduğundan $x^n = e$ olacak biçimde $n \geq 1$ tamsayısı vardır. Buradan

$$\mu\left(x^{-1}\right) = \mu\left(x^{n-1}\right) \geq \mu(x)$$

bulunur. Ayrıca

$$\left(x^{-1}\right)^n = e$$

olduğundan benzer biçimde

$$\mu(x) \geq \mu\left(x^{-1}\right)$$

olur. Dolayısıyla

$$\mu(x) = \mu\left(x^{-1}\right)$$

ve μ bir fuzzy alt gruptur.

Lemma 3.2.2.

μ bir G grubunun fuzzy alt grubu ve $x \in G$ olsun. Bu taktirde $\forall y \in G$ için

$$\mu(xy) = \mu(y) \quad \Leftrightarrow \quad \mu(x) = \mu(e)$$

olmasıdır.

İspat : Kabul edelim ki $\forall y \in G$ için $\mu(xy) = \mu(y)$ olsun. Bu taktirde $y = e$ seçersek

$$\mu(x) = \mu(e)$$

elde ederiz.

Tersine kabul edelim ki $\mu(x) = \mu(e)$ olsun. Bu durumda Önerme 3.1.2'den $\forall y \in G$ için $\mu(y) \leq \mu(x)$'dir. $\mu(xy) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$ olduğundan $\forall y \in G$ için

$$\mu(xy) \geq \mu(y) \tag{3.1}$$

yazılır. Diğer taraftan

$$\mu(y) = \mu\left(x^{-1}xy\right) \geq \min\{\mu(x), \mu(xy)\}$$

ifadesi ile $\forall y \in G$ değeri için

$$\mu(x) \geq \mu(y)$$

olduğundan

$$\min\{\mu(x), \mu(xy)\} = \mu(xy)$$

yazılır ve dolayısıyla da burada $\forall y \in G$ için

$$\mu(xy) \leq \mu(y) \tag{3.2}$$

elde edilir. Böylece (3.1) ve (3.2) ifadelerinden istenen bulunur.

Sonuç 3.2.1.

Lemma 3.2.2'nin hipotezi sağlansın. $\mu(x)=\mu(e)$ ise $\forall y\in G$ için

$$\mu(xy)=\mu(yx)$$

olur.

Tanım 3.2.1.

μ bir G grubunun fuzzy alt grubu olsun. Eğer $\forall x,y\in G$ için $\mu(xy)=\mu(yx)$ ise μ 'ye fuzzy normal alt grup denir.

Teorem 3.2.1.

Bir G grubunun μ fuzzy alt grubunun normal olması için gerek ve yeter koşul μ 'nün G 'nin eşlenik sınıfları üzerinde sabit olmasıdır.

İspat : Kabul edelim ki μ bir fuzzy normal alt grubu olsun. Bu taktirde $\forall x,y\in G$ için

$$\mu\left(y^{-1}xy\right)=\mu\left(xyy^{-1}\right)=\mu(x)$$

olur. Tersine kabul edelim ki μ , G 'nin eşlenik sınıfları üzerinde sabit olsun. Bu taktirde verilenlerden $\forall x,y\in G$ için

$$\mu(xy)=\mu\left(xyxx^{-1}\right)=\mu\left(x(yx)x^{-1}\right)=\mu(yx)$$

olur. Dolayısıyla Tanım 3.2.1'den μ , G 'nin fuzzy normal alt grubudur.

Uyarı 3.2.1.

Fuzzy normal alt gruplarla ilgili bazı teoremleri, bir grubun komütatörlerini kullanarak ifade edebiliriz.

Tanım 3.2.2.

G herhangi bir grup ve $x,y\in G$ ise x ve y 'nin komütatörü $[x,y]$ şeklinde gösterilir ve $[x,y]=x^{-1}y^{-1}xy$ ile ifade edilir. Eğer $xy=yx$ ise $[x,y]=e$ olduğu açıktır. H ve K bir G grubunun iki alt grubu ise

$$[H,K]=<[x,y]:x,y\in G>$$

şeklinde tanımlanır.

Uyarı 3.2.2.

Aşağıdaki teoreme klasik gruplarda karşılık gelen ifade şudur. N, G 'nin herhangi bir alt grubu olmak üzere; $N\triangleleft G$ olması için gerek ve yeter koşul $[N,G]\le N$ olmasıdır (Aktaş, 2005).

Teorem 3.2.2.

μ , G 'nin bir fuzzy alt grubu olsun. Bu taktirde μ 'nün bir fuzzy normal alt grubu olması için gerek ve yeter koşul $\forall x, y \in G$ için $\mu([x, y]) \geq \mu(x)$ olmasıdır (Aktaş, 2005).

İspat : Kabul edelim ki μ , G 'nin bir fuzzy normal alt grubu ve $x, y \in G$ olsun. Bu durumda

$$\mu\left(x^{-1}y^{-1}xy\right) \geq \min\left\{\mu\left(y^{-1}xy\right), \mu\left(x^{-1}\right)\right\} = \min\{\mu(x), \mu(x)\} = \mu(x)$$

yazılır. Karşılıklı olarak μ , (3.1) bağıntısının sağlandığını varsayalım. Bu şekilde $x, z \in G$ için

$$\mu\left(x^{-1}zx\right) = \mu\left(zz^{-1}x^{-1}zx\right) \geq \min\{\mu(z), \mu([z, x])\} = \mu(z)$$

elde edilir.

Böylece $\forall x, z \in G$ için $\mu\left(x^{-1}zx\right) \geq \mu(z)$ olur. Aynı şekilde $\forall x, z \in G$ iken $\mu\left(x^{-1}zx\right) \geq \mu(z)$ elde edilebildiği için z değeri yerine $x^{-1}zx$ ve x değeri yerine x^{-1} alınırsa

$$\mu(z) = \mu\left(x\left(x^{-1}zx\right)x^{-1}\right) \geq \mu\left(x^{-1}zx\right)$$

bulunur. Dolayısıyla $\mu(z) = \mu\left(x^{-1}zx\right)$ ve Teorem 3.2.1 sebebiyle μ fuzzy normaldir.

Şimdi bir fuzzy normal alt grubun seviye alt gruplarını inceleyelim:

Teorem 3.2.3.

μ , G 'nin bir fuzzy normal alt grubu ve e , G 'nin birim elemanı olmak üzere $t \leq \mu(e)$ olacak biçimde $t \in [0,1]$ olsun. Bu durumda

$$A_t = \{x \in G : \mu(x) \geq t\}$$

kümesi G 'nin bir normal alt grubudur (Das, 1981).

İspat : Daha önce ifade edildiği üzere; A_t klasik anlamda G 'nin alt grubudur. Şimdi ise A_t 'nin G 'nin normal alt grubu gösterelim. $x \in A_t$ ve $u \in G$ olsun. μ fuzzy normal alt grup olduğundan ve Teorem 3.2.2'den $\mu\left(u^{-1}xu\right) = \mu(x)$ olur. Bu yüzden $\mu\left(u^{-1}xu\right) \geq t$ elde edilir. Dolayısıyla $u^{-1}xu \in A_t$ ve buradan $A_t \lhd G$ yazılır. Eğer μ , G 'nin görüntü kümesi $\{t_0, t_1, ..., t_r\}$ olan bir fuzzy normal alt grubu ise μ 'nün alt grupları

$$A_{t_0} < A_{t_1} < ... < A_{t_r} = G$$

(3.3)

normal alt gruplarının bir zincirini oluşturur. Burada

$$t_0 > t_1 > ... > t_r$$

yazılır.

Sonuç 3.2.2.

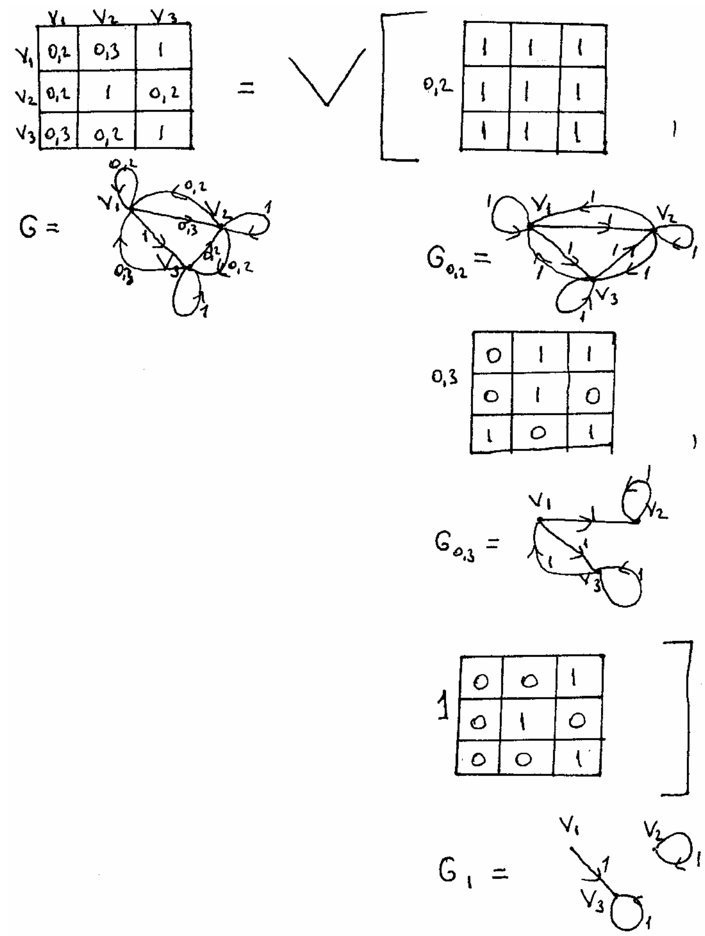
Tanım ve teoremler kısmında verilen Teorem 2.1 (Ayrışım Teoremi) ve yukarıdaki Teorem 3.2.3'ün birbirine denk olduğunu aşağıdaki örnekte görebiliriz.

Örnek 3.2.1.

	v_1	v_2	v_3
v_1	0,2	0,3	1
v_2	0,2	1	0,2
v_3	0,3	0,2	1

Şekil 2.1. Ayrışım teoremi ile ilgili bir gösterim

Yukarıdaki gibi bir fuzzy grafı verilmiş olsun. Verilen bu grafı aşağıdaki şekilde ayrıştırabiliriz.



Şekil 2.2. Ayrışım teoremi üzerine bir maksimum açılımı

Biçimindeki örnekte de açık bir biçimde görüldüğü üzere $t_0 = 0{,}2$, $t_1 = 0{,}3$, $t_2 = 1$ ve $t_0 < t_1 < t_2$ iken $G_{t_0} \supset G_{t_1} \supset G_{t_2}$ olup burada $\supset$ sembolü yerine $>$ sembolü alınırsa $t_0 < t_1 < t_2$ iken $G_{t_0} > G_{t_1} > G_{t_2}$ olur ki bu da Ayrışım Teoreminin normal alt grup teoremi ile aynı olduğunu gösterir.

Teorem 3.2.4.

Eğer μ, sonlu bir G grubunun fuzzy alt grubu ve μ 'nün seviye alt grupları G 'de normal ise μ bir fuzzy normal alt grubudur (Aktaş, 2005).

İspat : $t_0 > t_1 > ... > t_r$ olmak üzere $Im(\mu) = \{t_0, t_1, ..., t_r\}$ olsun. Bu taktirde G 'nin bütün seviye alt gruplarının kümesi $\{A_{t_i} : 0 \le i \le r\}$ ailesidir. Hipotezden her bir A_{t_i} , G 'de normaldir.

$$A_{t_i} - A_{t_{i-1}} = \{x \in G : \mu(x) = t_i\} \qquad (3.4)$$

olduğu seviye alt grupların tanımından anlaşılır.

Grup teoride bir grubun bir normal alt grubu G'nin eşlenik sınıflarının birleşimi olduğu bilinmektedir (Lederman, 1996).

Yine $A_{t_i} - A_{t_{i-1}}$, G'nin eşlenik sınıflarının birleşimidir. (3.4) ifadesinden μ'nün $A_{t_i} - A_{t_{i-1}}$ üzerinde sabit olduğu elde edilir. Bu ise; μ'nün G'nin her bir eşlenik sınıfı üzerinde sabit olmasını gerektirir. Teorem 3.2.1'den μ'nün fuzzy normal alt grup olduğu bulunur.

Şimdi fuzzy normal alt grup için bir örnek verelim:

Örnek 3.2.2.

G, karenin bütün simetrilerinin grubu olsun. O halde G'nin oluşturduğu grup kümesi

$$G = \{e,(1234),(13)(24),(1432),(13),(24),(14)(24),(12)(34)\}$$

olur. G'nin eşlenik sınıflarının

$$\{e}\ ,\ \{(13)(24)\}\ ,\ \{(13),(24)\}\ ,\ \{(14)(23),(12)(34)\}\ ,\ \{(1234),(1432)\}$$

olduğu kolayca görülebilir.

$$H = \{e,(13)(24)\}$$

ve

$$K = \{e,(1234),(1432),(13)(24)\}$$

olsun. H ve K'nın her ikisi de G'nin normal alt grubudurlar. Normal alt grupların bir zinciri olarak

$$E = \{e\} \subset H \subset K \subset G$$

(3.5)

yazılabilir. Şimdi elemanları tümüyle (3.5) zincirinde olan G'nin bir fuzzy alt grubunu inşa edelim.

Burada $t_i \in [0,1]$, $0 \le i \le 3$ öyle ki $t_0 > t_1 > t_2 > t_3$ olsun. $\mu : G \to [0,1]$ ise

$$\mu(e) = t_0\ ,\ \mu(H - E) = t_1\ ,\ \mu(K - H) = t_2\ ,\ \mu(G - K) = t_3$$

gibi tanımlansın. Burada μ'nün tanımından $\forall x \in G$ için $\mu(x) = \mu\left(x^{-1}\right)$ olduğu açıktır ve yine $\forall x, y \in G$ için $\mu(xy) \ge \min\{\mu(x), \mu(y)\}$ olduğu kolayca görülebilir. Böylece μ seviye alt grupları (3.5) zincirinde olan bir fuzzy alt gruptur. Dahası μ, G'nin eşlenik sınıfları üzerinde sabittir. Buradan μ fuzzy normal alt gruptur.

Teorem 3.2.5.

f , bir G grubundan başka bir grup içine bir homomorfizma ve μ , $f(G)$ grubunun bir fuzzy normal alt grubu olsun. Bu taktirde $v = \mu \circ f$, G 'nin bir fuzzy normal alt grubudur (Aktaş, 2005).

İspat : Buna göre;

$$v(xy) = \mu(f(x)f(y)) \geq \min\{\mu(f(x)), \mu(f(y))\} = \min\{v(x), v(y)\}$$

ifadesinde her $x, y \in G$ için v 'nin, G 'nin bir fuzzy alt grubu olduğu biçiminde bir anlam mevcuttur. $v(xy) = v(yx)$ olduğu da μ 'nün fuzzy normal alt grup olduğu kullanılarak görülür. Sonuçta; v , G 'nin bir fuzzy normal alt grubu olur.

Fuzzy koset kavramını vermeden önce bu kavrama yardımcı olacak aşağıdaki sonucu verelim:

Teorem 3.2.6.

μ birim elemanı e olan bir G grubunun fuzzy normal alt grubu ve aynı şekilde $G_\mu = \{x \in G : \mu(x) = \mu(e)\}$ verilsin.

Bu taktirde $G_\mu \triangleleft G$ 'dir. Bununla birlikte

$$\hat{\mu} : G/G_\mu \to [0,1]$$

dönüşümü $\hat{\mu}(G_\mu x) = \mu(x)$ biçiminde tanımlansın. $\hat{\mu}$, iyi tanımlı ve G/G_μ 'nün bir fuzzy normal alt grubudur.

Diğer yandan $N \triangleleft G$ ve $\hat{\mu}_1$, G/N 'nin sadece $g \in N$ olduğunda $\hat{\mu}_1(Ng) = \hat{\mu}_1(N)$ olacak şekilde bir fuzzy normal alt grubu ise $G_\mu = N$ ve $\hat{\mu} = \hat{\mu}_1$ olacak biçimde G 'nin bir μ fuzzy normal alt grubu vardır (Bhattacharya ve Mukherjee, 1987; Aktaş, 2005).

İspat : μ 'nün bir fuzzy normal alt grubu olduğu ve Önerme 3.1.2 kullanılarak $G_\mu \triangleleft G$ olduğu kolayca görülebilir.

$x, y \in G$ için $G_\mu x = G_\mu y$ ise $xy^{-1} \in G_\mu$ ve böylece $\mu(xy^{-1}) = \mu(e)$ 'dir. Lemma 3.2.2'den bu bize $\mu(x) = \mu(y)$ olduğunu yani $\hat{\mu}(G_\mu x) = \hat{\mu}(G_\mu y)$ olduğunu verir.

Bu yüzden $\hat{\mu}$ iyi tanımlı bir dönüşümdür. Şimdi $\hat{\mu}$ 'nün G/G_μ 'nün bir fuzzy normal alt grubu olduğunu göstermek kolaydır. Şöyle ki; her $G_\mu x$, $G_\mu y$ için

$$\hat{\mu}(G_\mu x G_\mu y) = \hat{\mu}(G_\mu xy) = \mu(xy) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\} = \min\{\hat{\mu}(G_\mu x), \hat{\mu}(G_\mu y)\}$$

yazılabilir. Şimdi de μ 'nün fuzzy normal olduğunu gösterelim. $x, y \in G$ olsun. Bu taktirde

$$\hat{\mu}(G_\mu x G_\mu y) = \hat{\mu}(G_\mu xy) = \mu(xy) = \mu(yx) = \hat{\mu}(G_\mu y G_\mu x)$$

elde edilir. Böylece μ fuzzy normaldir.

Tersine G/N üzerinde $\hat{\mu}_1$ fuzzy normal alt grubu verilsin. Burada bir μ dönüşümü $\mu : G \to [0,1]$ biçiminde

$$\mu(x) = \hat{\mu}(Nx)$$

olarak tanımlansın. μ'nün iyi tanımlı olduğu ve G'nin bir fuzzy alt grubu olduğunu göstermek kolaydır. Biz μ'nün fuzzy normal olduğunu gösterelim. $x, y \in G$ olsun. Bu durumda;

$$\mu\left(y^{-1}xy\right) = \hat{\mu}_1\left(Ny^{-1}xy\right) = \hat{\mu}_1\left(Ny^{-1}NxNy\right) = \hat{\mu}_1(Nx) = \mu(x)$$

elde edilir. μ, G'nin eşlenik sınıfları üzerinde sabittir ve Teorem 3.2.1'den μ, G'nin bir fuzzy normal alt grubudur.

Ayrıca eğer $n \in N$ ise $\mu(n) = \hat{\mu}_1(Nn) = \hat{\mu}_1(N) = \mu(e)$ bulunur. Böylece $N \subseteq G_\mu$ olur. Eğer $x \in G_\mu$ ise $\mu(x) = \mu(e)$ ve buradan $\hat{\mu}_1(Nx) = \hat{\mu}_1(N)$ yazılır. Sonuç olarak $Nx = N$ ve $x \in N$ olduğundan $G_\mu \subseteq N$ olur. Her iki kapsamadan $N = G_\mu$ elde edilir. Bu ise $\hat{\mu} = \hat{\mu}_1$ olmasıdır.

3.3. Fuzzy Kosetler

Bu bölümde fuzzy gruplarda önemli bir yeri olan kosetlerin belli bazı özellikleri Bhattacharya (1987), Aktaş'da (2005) verildiği üzere ele alınarak birkaç sonuç verilecektir.

Tanım 3.3.1.

μ bir G grubunun fuzzy alt grubu olsun. Buna göre herhangi bir $x \in G$ için bir $\hat{\mu}_x : G \to [0,1]$ dönüşümü her $g \in G$ için

$$\hat{\mu}_x(g) = \mu\left(gx^{-1}\right) \tag{3.6}$$

ile tanımlayalım. $\hat{\mu}_x$, G'nin x ve μ ile belirlenen fuzzy koseti olarak adlandırılır.

Sonuç 3.3.1.

Tanım 3.3.1 gruplardaki alışılmış koset kavramının fuzzy kümeler üzerine genişletilmesidir. Şöyle ki; μ, G'nin H alt grubunun karakteristik fonksiyonu olsun. Yani

$$H = \{x \in G : \mu(x) = 1\}$$

ve

$$G - H = \{x \in G : \mu(x) = 0\}$$

olsun. $x \in G$ için $Gx = G$ olur. Eğer $g \in H$ ise

$$\hat{\mu}_x(gx) = \mu\left(gxx^{-1}\right) = \mu(g) = 1$$

olur.

Eğer $g \notin H$ ise $gx \notin Hx$ ve böylece $\hat{\mu}_x(gx) = \mu(g) = 0$ 'dır. Buradan $\hat{\mu}_x$, G üzerinde $\hat{\mu}|_{Hx} = 1$ ve $\hat{\mu}|_{Hx} = 0$ olan bir fonksiyondur.

Bu ise $\hat{\mu}$ 'nün Hx 'in karakteristik fonksiyonu olduğunu gösterir.

Önerme 3.3.1.

Eğer μ bir G grubunun bir fuzzy normal alt grubu ise her $x, y \in G$ ve her $g \in G$ için $\hat{\mu}_x(xg) = \hat{\mu}_x(gx) = \mu(g)$ olur.

İspat : Burada μ 'nün fuzzy normal olduğu ve Teorem 3.2.1 kullanılarak

$$\hat{\mu}_x(xg) = \hat{\mu}_x\left(xgx^{-1}x\right) = \mu\left(xgx^{-1}\right) = \mu(g)$$

elde edilir. Benzer şekilde $\hat{\mu}_x(gx) = \mu(g)$ olduğu görülebilir.

Sonuç 3.3.2.

Önerme 3.3.1, grup teorideki

" eğer $N \lhd G$ ise $\forall x \in G$ için $Nx = xN$ olur "

ifadesine benzerdir. Eğer N , G 'nin bir normal alt grubu ise N normal alt grubuna göre G 'nin kosetleri bir grup oluştururlar.

Şimdi de G/N bölüm grubu için fuzzy anlamda normal alt grubunun aşağıdaki benzer teoremini verelim:

Teorem 3.3.1.

μ , G 'nin bir fuzzy normal alt grubu olsun. F 'de μ 'nün bütün fuzzy kosetlerinin kümesi olsun. Bu taktirde $\forall x, y \in G$ için

$$\hat{\mu}_x \circ \hat{\mu}_y = \hat{\mu}_{xy} \tag{3.7}$$

işlemi altında bir gruptur. $\forall x \in G$ için

$$\overline{\mu}(\hat{\mu}_x) = \mu(x) \tag{3.8}$$

olacak biçimde $\overline{\mu} : F \to [0,1]$ dönüşümünü tanımlayalım. Bu taktirde $\overline{\mu}$, F üzerinde bir fuzzy alt gruptur (Bhattacharya ve Mukherjee, 1987).

İspat : İlk olarak (3.7) ile verilen işlemin iyi tanımlı olduğunu gösterelim. Buna göre; $x, y, x_0, y_0 \in G$ için

$$\hat{\mu}_x = \hat{\mu}_{x_0} \qquad \text{ve} \qquad \hat{\mu}_y = \hat{\mu}_{y_0} \tag{3.9}$$

olsun. Bu durumda

$$\hat{\mu}_x \circ \hat{\mu}_y = \hat{\mu}_{x_0} \circ \hat{\mu}_{y_0}$$

olduğunu yani

$$\hat{\mu}_{xy} = \hat{\mu}_{x_0 y_0}$$

olduğunu göstermeliyiz. Tanımla $\forall g \in G$ için

$$\hat{\mu}_{xy}(g) = \mu\left(gy^{-1}x^{-1}\right)$$

ve

$$\hat{\mu}_{x_0 y_0}(g) = \mu\left(gy_0^{-1}x_0^{-1}\right)$$

elde edilir. Şimdi

$$\mu\left(gy^{-1}x^{-1}\right) = \mu\left(gy_0^{-1}y_0y^{-1}x^{-1}\right) = \mu\left(gy_0^{-1}x_0^{-1}x_0y_0y^{-1}x^{-1}\right)$$

$$\geq \min\left\{\mu\left(gy_0^{-1}x_0^{-1}\right), \mu\left(x_0y_0y^{-1}x^{-1}\right)\right\}$$

(3.10)

yazılır. Tekrar (3.9)'dan $\forall g \in G$ için

$$\mu\left(gx^{-1}\right) = \mu\left(gx_0^{-1}\right)$$

(3.11)

ve aynı koşulların sağlanması ile birlikte

$$\mu\left(gy^{-1}\right) = \mu\left(gy_0^{-1}\right)$$

(3.12)

bulunur. Yine (3.11)'de g yerine $x_0y_0y^{-1}$ yazar ve (3.12)'de y_0 ile g'yi yer değiştirirsek

$$\mu\left(x_0y_0y^{-1}x^{-1}\right) = \mu\left(x_0y_0y^{-1}x_0^{-1}\right) = \mu\left(y_0y^{-1}\right) = \mu(e)$$

elde edilir. Fakat $\forall u \in G$ değeri için $\mu(e) \geq \mu(u)$ olduğundan herhangi bir μ fuzzy alt grubu için

$$\mu(e) \geq \mu\left(gy_0^{-1}x_0^{-1}\right)$$

olur. Böylece (3.7) eşitliğinden

$$\mu\left(gy^{-1}x^{-1}\right) \geq \mu\left(gy_0^{-1}x_0^{-1}\right)$$

olur. Benzer düşünce ile

$$\mu\left(gy_0^{-1}x_0^{-1}\right) \geq \mu\left(gy^{-1}x^{-1}\right)$$

elde edilir ve bütün bunlardan

$$\mu\left(gy_0^{-1}x_0^{-1}\right) \geq \mu\left(gy^{-1}x^{-1}\right)$$

bulunur. Bu yüzden de (3.7) iyi tanımlıdır. (3.7)'de tanımlanan işlemin birleşmeli olduğu açıktır. Şöyle ki,

$$\mu_{x(yz)}(g) = \mu\left(g(x(yz))^{-1}\right) = \mu\left(g\left(z^{-1}y^{-1}\right)x^{-1}\right) = \mu\left(g((xy)z)^{-1}\right) = \mu_{(xy)z}(g)$$

olduğundan

$$\hat{\mu}_x \circ (\hat{\mu}_y \circ \hat{\mu}_z) = (\hat{\mu}_x \circ \hat{\mu}_y) \circ \hat{\mu}_z$$

elde edilir. $\hat{\mu}_e$ 'nin F 'nin bir elemanı ve $x \in G$ için $\hat{\mu}_x$ 'in tersinin $\hat{\mu}_{x^{-1}}$ olduğunu görmek kolaydır. Buradan F bir gruptur. Şimdi $x, y \in G$ olsun. O halde

$$\overline{\mu}(\hat{\mu}_{\mathrm{x}} \circ \hat{\mu}_{\mathrm{y}}) = \overline{\mu}(\hat{\mu}_{\mathrm{xy}}) = \mu(xy) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\} = \min\{\overline{\mu}(\hat{\mu}_{\mathrm{x}}), \overline{\mu}(\hat{\mu}_{\mathrm{y}})\}$$

olur. Ayrıca

$$\overline{\mu}(\hat{\mu}_{\mathrm{x}}) = \overline{\mu}(\hat{\mu}_{\mathrm{x}^{-1}}) = \mu(x) = \mu(x^{-1})$$

olur. Dolayısıyla $\overline{\mu}$ bir fuzzy alt grubudur.

Tanım 3.3.2.

μ , bir G grubunun bir fuzzy normal alt grubu olsun. Bu taktirde (3.11)'de tanımlanan $\overline{\mu}$, μ ile belirlenen fuzzy bölüm grubu olarak adlandırılır.

Sonuç 3.3.3.

Teorem 3.3.1'deki gösterimle $\theta : G \to F$ dönüşümünü

$$\theta(x) = \hat{\mu}_x$$

(3.13)

ie tanımlayalım. Bu taktirde θ çekirdeği

$$G_\mu = \{x \in G : \mu(x) = \mu(e)\}$$

ile verilen bir homomorfizmadır (Aktaş, 2005).

İspat : $x, y \in G$ olsun. O halde

$$\theta(xy) = \hat{\mu}_{xy} = \hat{\mu}_x \circ \hat{\mu}_y = \theta(x)\theta(y)$$

olur. Dolayısı ile θ bir homomorfizmadır. Ayrıca θ 'nın çekirdeği $\hat{\mu}_x = \hat{\mu}_e$ olan $\mu(x) = \mu(e)$ şartını sağlayan bütün $x \in G$ 'ler den oluşur.

Şimdi, grup teorideki homomorfizmanın temel teoremine benzer bir sonucu fuzzy gruplar için verelim:

Teorem 3.3.2.

μ , G 'nin bir fuzzy normal alt grubu ve F , μ 'nün bütün fuzzy kosetlerinin koleksiyonu olsun. Bu taktirde F 'nin her bir fuzzy (normal) alt grubu, G 'nin bir fuzzy (normal) alt grubuna karşılık gelir (Aktaş, 2005).

İspat : μ^* , F 'nin bir fuzzy (normal) alt grubu olsun. $v : G \to [0,1]$ dönüşümünü $\forall x, y \in G$ için

$$v(x) = \mu^*(\hat{\mu}_x)$$

(3.14)

ile tanımlayalım.

Burada $\hat{\mu}_x$, (3.7) tarafından tanımlanandır. Şimdi v 'nin bir fuzzy alt grup olduğunu gösterelim. $x, y \in G$ olsun. Bu taktirde

$$v(xy) = \mu^*(\hat{\mu}_{xy}) = \mu^*(\hat{\mu}_x \hat{\mu}_y) \geq \min\{\mu^*(\hat{\mu}_x), \mu^*(\hat{\mu}_y)\} = \min\{v(x), v(y)\}$$

elde edilir. Ayrıca $\forall x \in G$ için

$$v(x) = \mu^*(\hat{\mu}_x) = \mu^*(\hat{\mu}_{x^{-1}}) = v(x^{-1})$$

olur. Böylece v bir fuzzy alt gruptur. Dolayısıyla eğer μ^* fuzzy normal ise

$$v(xy) = \mu^*(\hat{\mu}_{xy}) = \mu^*(\hat{\mu}_x \circ \hat{\mu}_y) = \mu^*(\hat{\mu}_y \circ \hat{\mu}_x) = \mu^*(\hat{\mu}_{yx}) = v(yx)$$

olur ki buradan v bir fuzzy normal elde edilir.

Tanım 3.3.3.

μ bir G grubunun bir fuzzy alt grubu olsun. Bu durumda; herhangi $a, b \in G$ için G grubunun bir $a\mu b$ fuzzy orta koseti her $x \in G$ için

$$(a\mu b)(x) = \mu(a^{-1} x b^{-1})$$

olarak tanımlanır.

Örnek 3.3.1.

Bilinen çarpma işlemine göre $G = \{1, -1, i, -i\}$ grubu verilsin.

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x = 1 \\ 0.5 & , \quad x = -1 \\ 0 & , \quad x = i, -i \end{cases}$$

ile $\mu : G \to [0,1]$ tanımlayalım. Açıktır ki; μ G grubunun bir fuzzy alt grubudur. $a\mu b$ fuzzy orta koseti hesaplanabilir ve her $a = -1$ ile $b = -i$ için

$$(a\mu b)(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x = 1, -1 \\ 0.5 & , \quad x = -i \\ 1 & , \quad x = i \end{cases}$$

olarak verilebilir.

Örnek 3.3.2.

Bilinen çarpma işlemine göre $G = \{\mp 1, \mp i\}$ grubu verilsin.

$$\mu(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & , \quad x=-1\\ 1 & , \quad x=1\\ \dfrac{1}{4} & , \quad x=i,-i\end{cases}$$

olarak gösterilen $\mu : G \to [0,1]$ tanımlayalım. μ 'nün $i\mu$ ve $-i\mu$ fuzzy kosetleri

$$i\mu(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4} & , \quad x=1,-1\\ 1 & , \quad x=i\\ \dfrac{1}{2} & , \quad x=-i\end{cases}$$

ve

$$(-i\mu)(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4} & , \quad x=1,-1\\ 1 & , \quad x=-i\\ \dfrac{1}{2} & , \quad x=i\end{cases}$$

olarak hesaplanabilir.

4. FUZZY GRAFLARDA GRUP YAPISI

Bu bölümde Takeda ve Nishida (1976) çalışması ile fuzzy graflarda verilen herhangi bir üye ile ilişkiye sahip olan grup üyelerinin bir sınıfının tam olarak sınırının tanımlanmadığı böyle bir grup içinde bir ferdi üye tarafından oynanan rolü karakterize etmek amaçlanmaktadır. Ross ve Harary (1959) tarafından gösterilen alışılmış bir grafın zayıf ve kuvvetli tepelerinin kavramları, bir fuzzy grafın bu verilenlere genelleştirilmesi olarak ifade edilebilir.

Grup ve grup yapısı alanında graflar incelendiğinde; bir zayıf bağlantılılık kategorisine ait olmak için grafa yol açan birey zayıf bir üye iken o var olmadığı zaman mevcudiyeti elde edildiğinden çok daha fazla bağlantı kurulabileceği olası olan bir grafa yol açan bireyin kuvvetli bir üye olması; yapılacak bir mukayesede Ross ve Harary'nin (1959) böyle bir grup içinde bir bireysel üyenin bu tip bir rolünü karakterize etmek açısından grafı kullanmasının önemini daha iyi açıklar. Bununla birlikte; pek çok durumda bir ilişkinin sade varlığı yada yokluğu, verilen bir grup yapısını ortaya koymak için yeterli değildir.

Harary'ye(1959) göre, bireyler arasında ilişkilerin farklı güçleri olabilir. Böyle durumlarda; alışılmış graf, grup yapısını tam olarak gösteremez. Bunu yerine; fuzzy graf, daha uygun bir matematiksel model olarak gözükür.

4.1. Bir Yönlü Grafın Zayıf ve Kuvvetli Tepeleri

Bu bölümde; başlangıç olarak, Harary ve ark. (1965) gereğince yönlü grafların yada daha kısa bir biçimde yönlendirilmiş grafların bağlantılılığının çeşitli türlerine yer vereceğiz:

Tanım 4.1.1. Bir sonlu G yönlü grafı verilsin.

(i) G; eğer her iki tepesi karşılıklı olarak ulaşılabilir ise kuvvetli bağlantılı yada sadece kuvvetlidir denir.

(ii) G ; eğer herhangi iki tepesi için en az biri diğerinden ulaşılabilir ise, Tek taraflı bağlantılı yada sadece tek taraflıdır denir.

(iii) G ; eğer her iki tepesi bir yarı yol tarafından birleştirilmiş ise, Zayıf bağlantılı yada sadece zayıftır denir.

(iv) G ; eğer hiç zayıf değil ise, bağlantısızdır denir.

(v) Sadece bir tepeden ibaret bir G yönlü grafı; iki ayrık tepe içermediği ve tanımı böyle sağlandığı için kuvvetlidir denir.

Uyarı 4.1.1.

U_3 ,U_2 ,U_1 ve U_0; sırasıyla, bütün kuvvetli yönlü graflar, bütün tek taraflı yönlü graflar, bütün zayıf yönlü graflar ve bütün bağlantısız yönlü grafların koleksiyonları olsun. Açıkçası;

$$U_3 \subset U_2 \subset U_1 \tag{4.1}$$

vardır.

Bütün yönlü grafları karşılıklı olarak özel bağlantılılık kategorilerine ayırmak için,

$$C_3 = U_3 \ , \ C_2 = U_2 \setminus U_3 \ , \ C_1 = U_1 \setminus U_2 \ \text{ve} \ C_0 = U_0 \tag{4.2}$$

verilsin. O zaman; her yönlü graf, yukarıdaki C_i , $i = 0,1,2,3$ kategorilerinin birine tam olarak aittir.

Ross ve Harary (1959), bu ayrık bağlantılılık kategorilerini kullanarak bir grubun zayıf ve kuvvetli üyelerini karakterize etmiştir.

Tanım 4.1.2.

(i) Uyarı 4.1.1 gereğince b, bir G yönlü grafının herhangi tepesi ve G_b , b 'nin yer değiştirmesi ile G 'den elde edilen alt graf olsun. Bir b tepesi; " eğer G_b , C_j 'de iken G , C_i 'de ise " (i, j) tipine aittir denir.

(ii) Yine (i) gereğince (i, j) 'nin b tepesi; " eğer $i > j$ ise " bir kuvvetli tepe diye adlandırılır.

(iii) (i, j) 'nin b tepesi; " eğer $i = j$ ise " bir izole tepe diye adlandırılır.

(iv) (i, j) 'nin b tepesi; " eğer $i < j$ ise " bir zayıf tepe diye adlandırılır.

Aşağıdaki teoremlere yardımcı olması bakımından şu uyarıyı verebiliriz:

Uyarı 4.1.2.

Bir grubun ulaşılabilir matrisi grup üyelerinin belirlenmesinde çok önem taşır. Bu matrisi R ile gösterirsek bağlantılılık durumlarının kategorize edilmesinde onun koşulları belirleyicidir. Uyarı 4.1.1'de verilen bağlantılılık kategorilerini güçlü bir biçimde aşağıdaki iki teorem ifade eder ve zayıf üyelerin kimliği ulaşılabilir matris tarafından doğrudan sınanır. Aşağıdaki Şekil 4.1'in herhangi yönlü grafının iki noktası arasındaki bir ayrıt istenen bir anda herhangi bir yön belirlenmeksizin çizildiği taktirde herhangi bir yöndeki ayrıt iki yönlü ayrıt için konum belirleyebilir.

Teorem 4.1.1.

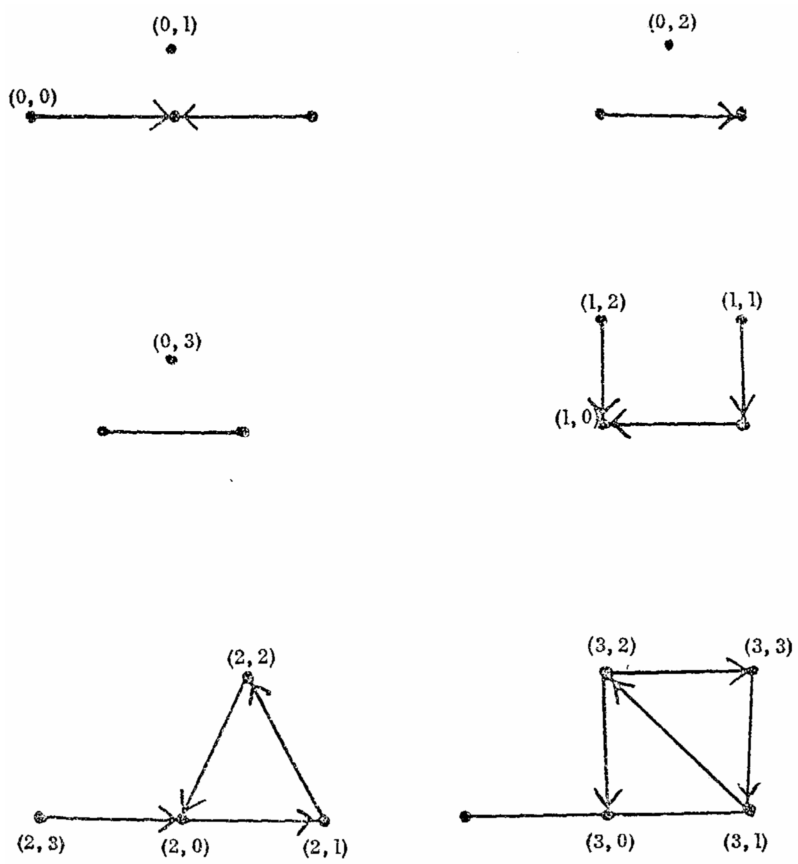
Her ne olursa olsun herhangi grupta, en çok iki zayıf üye vardır (Ross ve Harary, 1959).

Teorem 4.1.2.

Herhangi grupta, $(1,3)$ üyeleri yoktur ancak diğer bütün (i, j) üyelerinde olabilir (Ross ve Harary, 1959).

İspat : Teoremin ikinci kısmının geçerliliği bir defa aşağıdaki Şekil 4.1'in örneklerinden görülebilir. Buna göre; bir G grubunun $(1,3)$ biçiminde bir A üyesinin var olduğunu varsayıp tersini ortaya koyalım. Burada; G, U_1 sınıfından olup $G-A$ kuvvetlidir. Fakat en azından $G-A$ grubuna bir ayrıt tarafından A noktası kattığımız zaman orijinal G grubunun izole yani ya U_2 yada U_3 sınıfında olabilmesi söz konusudur. Bu ise G 'nin U_1 sınıfından olduğu hipotezi ile çelişir.

Şimdi ise şu tanımları vererek devam edelim. $A_1, A_2, ..., A_n$ grubun n üyesi ve grup bağıntısının M matrisi de; " eğer A_i ile A_j arasında bir bağıntı mevcut ise M 'nin i, j girişleri 1'e eşit aksi halde 0 " olarak tanımlanmış olsun. Burada bütün köşegen elemanlarının 1 olduğunu göz önüne alalım. Bağıntı simetrik olarak varsayılmamaktadır ama simetrik de olabilir.



Şekil 4.1. Her hangi bir grupta $(1,3)$ üyelerinin olmadığına dair bazı örnek gösterimler

Şekil 4 1. ile birlikte yukarıdakilerden hareketle; verilen bağıntı için grubun yada yönlü grafın ulaşılabilir matrisini Uyarı 4.1.2'deki gibi R olarak alırsak onun i, j elemanları bu taktirde " eğer A_i 'den A_j 'ye yönlü bir yol varsa 1 aksi halde 0 " olarak alınır. Bir yönlü D grafının d çapı, D 'nin herhangi iki noktası arasındaki en büyük uzaklıktır. Bir çevre aynı noktada başlayan ve biten bir yönlü ayrıttır. M 'nin bütün köşegen elemanlarının 1 olduğu yaklaşımı her bir noktada bir buklenin varlığına eştir.

4.2. Fuzzy Grafın Bağlantılılığı

Bu kesimde; Takeda ve Nishida (1976) gereğince herhangi verilen üye ile bağlantı içinde olan grup üyelerinin bir sınıfının, üyelikten üye olmayan duruma geçişin ani oluşundan ziyade aşamalı olduğu bir kısmi(veya belirsiz) sınırlı şeklindeki bir grupla ilişkilendirilebileceği görülecektir. Buna göre; bir fuzzy graf böyle bir grubu göstermek için kullanılabilir.

Tanım 4.2.1.

X ; $x_1, x_2, ... x_n$ tepelerinin sonlu bir kümesi olsun ve Γ , üyelik fonksiyonu $\mu_{\Gamma_{x_i}}$ olan X 'deki bir fuzzy Γ_{x_i} kümesi ile x_i denilen X 'in her bir tepesini birleştiren fonksiyon olsun. O zaman; $FG = (X, \Gamma)$ bir fuzzy graf olarak adlandırılır.

Uyarı 4.2.1.

Tanım 4.2.1'de olduğu üzere; eğer her $\mu_{\Gamma_{x_i}}$, $i = 1,2,...,n$ yalnızca 0 ve 1 biçiminde iki değeri alırsa; FG, bir alışılmış grafa indirgenir. Fuzzy graflarının daha detaylı bir çalışmasını Kaufmann (1975) yapmıştır.

Onun fuzzy grafının bağlantılılığı üzerine bir tepenin yer değiştirme etkisini değerlendirebilmek için şu tanımı verebiliriz:

Tanım 4.2.2.

$FG = (X, \Gamma)$ 'nin bir fuzzy alt grafı; Y, X 'in bir (fuzzy olmayan) alt kümesi ve Γ', herhangi $x_i \in Y$ için

$$\Gamma'_{x_i} = \Gamma_{x_i} \cap Y \tag{4.3}$$

şeklinde tanımlı olmak üzere, (Y, Γ') formunun bir fuzzy grafı olarak tanımlanır.

Tanım 4.2.3.

X ’de bir fuzzy A kümesi için μ_A üyelik fonksiyonu ile iki ΓA ve $\Gamma^{-1}A$ fuzzy kümesi; $\forall x_i \in X$ için

$$\mu_{\Gamma A}(x_i) = \max_{x_j \in X} \min\left\{\mu_A(x_j), \mu_{\Gamma_{x_j}}(x_i)\right\} \tag{4.4}$$

ve $\forall x_i \in X$ için

$$\mu_{\Gamma^{-1}A}(x_i) = \max_{x_j \in X} \min\left\{\mu_A(x_j), \mu_{\Gamma_{x_i}}(x_j)\right\} \tag{4.5}$$

şeklinde sırasıyla tanımlanır.

Önerme 4.2.1.

A ve B , her biri kendi üyelik fonksiyonlarını gösteren μ_A ve μ_B ile birlikte X ’de iki fuzzy kümesi olsun. O zaman,

(i) $A \subset B$ ise $\Gamma A \subset \Gamma B$
(ii) $A \subset B$ ise $\Gamma^{-1}A \subset \Gamma^{-1}B$
(iii) $\Gamma(A \cap B) \subset \Gamma A \cap \Gamma B$
(iv) $\Gamma^{-1}(A \cap B) \subset \Gamma^{-1}A \cap \Gamma^{-1}B$
(v) $\Gamma(A \cup B) = \Gamma A \cup \Gamma B$
(vi) $\Gamma^{-1}(A \cup B) = \Gamma^{-1}A \cup \Gamma^{-1}B$

yazılır (Takeda ve Nishida, 1976).

İspat : (i) ve (ii) özellikleri, Tanım 4.2.3’den açıktır. (iii) ve (iv) özellikleri direkt olarak, sırasıyla, (i) ve (ii)’den görülür. (v) ise;

$$\begin{aligned}
\mu_{\Gamma(A\cup B)}(x_i) &= \max_{x_j \in X} \min\left\{\max\{\mu_A(x_j), \mu_B(x_j)\}, \mu_{\Gamma_{x_j}}(x_i)\right\} \\
&= \max\left\{\max_{x_j \in X} \min\left\{\mu_A(x_j), \mu_{\Gamma_{x_j}}(x_i)\right\}, \max_{x_j \in X} \min\left\{\mu_B(x_j), \mu_{\Gamma_{x_j}}(x_i)\right\}\right\} \\
&= \max\{\mu_{\Gamma A}(x_i), \mu_{\Gamma B}(x_i)\} = \mu_{\Gamma A \cup \Gamma B}(x_i)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. (vi) özelliği de, (v)’deki gibi aynı yolla görülebilir.

Tanım 4.2.4.

Bir $FG = (X, \Gamma)$ fuzzy grafı için $\hat{\Gamma}$ ile gösterilen Γ ’nın geçişli kapanışı; $x_i \in X$ için,

$$\hat{\Gamma}_{x_i} = \{x_i\} \cup \Gamma_{x_i} \cup \Gamma^2{}_{x_i} \cup \ldots \cup \Gamma^{n-1}_{x_i} \tag{4.6}$$

ifadesi $\Gamma_{x_i}^{m} = \Gamma\left(\Gamma_{x_i}^{m-1}\right)$, $m = 2,3,...,n-1$ olmak üzere tanımlanır. Aynı şekilde; $\hat{\Gamma}^{-1}$ ters geçişli kapanışı, $x_i \in X$ için $\Gamma_{x_i}^{-1} = \Gamma^{-1}\{x_i\}$ ve $\Gamma_{x_i}^{-m} = \Gamma^{-1}\left(\Gamma_{x_i}^{-m+1}\right)$, $m = 2,3,...,n-1$ olmak üzere

$$\hat{\Gamma}^{-1}{}_{x_i} = \{x_i\} \cup \Gamma^{-1}{}_{x_i} \cup \Gamma^{-2}{}_{x_i} \cup ... \cup \Gamma_{x_i}^{-n+1} \tag{4.7}$$

olur. Kolayca görülür ki; herhangi $x_i, x_j \in X$ için

$$\mu_{\hat{\Gamma}_{x_i}}\left(x_j\right) = \mu_{\hat{\Gamma}_{x_j}^{-1}}\left(x_i\right) \tag{4.8}$$

elde edilir. $\mu_{\hat{\Gamma}_{x_i}}\left(x_j\right)$ ve $\mu_{\hat{\Gamma}_{x_i}^{-1}}\left(x_j\right)$, üyeliğin dereceleri; sırasıyla, x_i'den x_j'ye ve x_j'den x_i'ye olan bir yönlü yolun varlığının derecesi olarak yorumlanabilir. $x_i \in X$ için; $\Delta_{x_i}^{m} = \Delta\left(\Delta_{x_i}^{m-1}\right)$, $m = 2,3,...,n-1$ iken

$$\Delta_{x_i} = \Gamma_{x_i} \cup \Gamma_{x_i}^{-1} \tag{4.9}$$

ve

$$\hat{\Delta}_{x_i} = \{x_i\} \cup \Delta_{x_i} \cup \Delta_{x_i}^{2} \cup ... \cup \Delta_{x_i}^{n-1} \tag{4.10}$$

olarak tarif edilir olsun. $\mu_{\hat{\Delta}_{x_i}}\left(x_j\right)$ üyelik fonksiyonunun değeri, bir yarı yol ile birleştirilen iki x_i ve x_j tepesi için derece olarak yorumlanabilir.

Yukarıdaki tanım ve verilenlerden hareketle aşağıdaki tanım yazılabilir:

Tanım 4.2.5.

U_3 , U_2 , U_1 ve U_0'daki bir $FG = (X, \Gamma)$ fuzzy grafının üyelik dereceleri, sırasıyla,

$$\mu_{U_3}(FG) = \min_{i,j} \mu_{\hat{\Gamma}_{x_i}}\left(x_j\right) ,$$
$$\mu_{U_2}(FG) = \min_{i,j} \max\left\{\mu_{\hat{\Gamma}_{x_i}}\left(x_j\right), \mu_{\hat{\Gamma}_{x_j}}\left(x_i\right)\right\} ,$$
$$\mu_{U_1}(FG) = \min_{i,j} \mu_{\hat{\Delta}_{x_i}}\left(x_j\right) ,$$
$$\mu_{U_0}(FG) = 1 - \min_{i,j} \mu_{\hat{\Delta}_{x_i}}\left(x_j\right) ,$$

olarak tanımlanır. Görülür ki; herhangi $FG = (X, \Gamma)$ için,

$$\mu_{U_3}(FG) \leq \mu_{U_2}(FG) \leq \mu_{U_1}(FG) \tag{4.11}$$

olur. Özel olarak; C_i 'deki herhangi G yönlü grafı için görülür ki; $3 \geq j > i$ iken $\mu_{U_j}(G) = 0$ ve $i \geq j \geq 1$ iken $\mu_{U_j}(G) = 1$ 'dir.

4.3. Bir Fuzzy Grafın Zayıf ve Kuvvetli Tepeleri

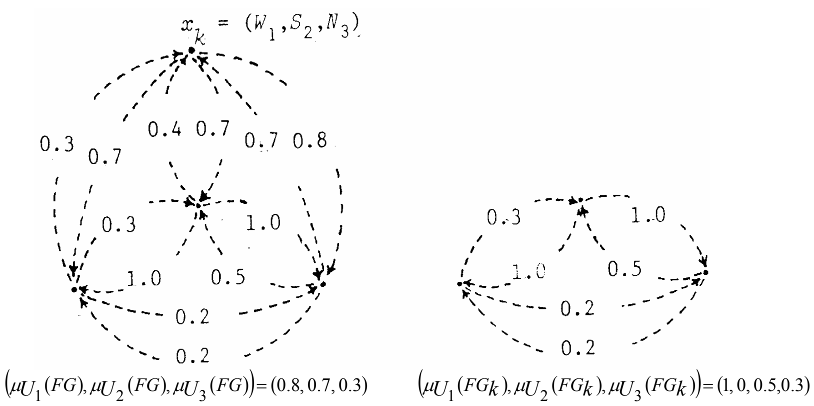
Bu bölümde; Ross ve Harary (1959) gereğince bir alışılmış grafın bunların bir doğal genişlemesi olan bir fuzzy grafın zayıf ve kuvvetli tepelerini tanımlayacağız. Bu durumda; onların temel özelliklerini inceleyelim:

Tanım 4.3.1.

Bir $FG = (X, \Gamma)$ fuzzy grafı için; FG_k , bir x_k tepesinin çıkarılması suretiyle FG 'den elde edilen $(X \setminus \{x_k\}, \Gamma')$ fuzzy alt grafı olsun. Bu durumda; x_k tepesi, eğer $\mu_{U_i}(FG) < \mu_{U_i}(FG_k)$ ise U_i (kısaca, bir W_i tepesi) için bir zayıf tepedir; eğer $\mu_{U_i}(FG) = \mu_{U_i}(FG_k)$ ise U_i (bir N_i tepesi) için bu bir izole tepedir ve eğer $i = 1,2,3$ iken $\mu_{U_i}(FG) > \mu_{U_i}(FG_k)$ ise U_i (bir S_i tepesi) için bu bir kuvvetli tepedir.

Örnek 4.3.1.

Mesela; aşağıda verilen bir $x_k = (W_1, S_2, N_3)$ tepesinin, bir FG_k fuzzy alt grafının U_1 'deki üyeliğinin derecesi , FG 'nin olduğundan daha büyük olması halinde U_1 için bir zayıf tepe olur. Benzer biçimde; bu aynı zamanda bir S_2 ve bir N_3 tepesi olur. Buradan hareketle x_k 'ya (W_1, S_2, N_3) tipinin bir tepesi denilebilir.



Şekil 4.2. Bir FG fuzzy grafı ile bir FG_k fuzzy alt grafı gösterimi

Uyarı 4.3.1.

Yukarıda verilenlerden görüldüğü üzere; notasyonun kısalığı bakımından,

$$p_{ij} = \mu_{\hat{\Gamma}_{x_i}}\left(x_j\right) \ ; \ (i,j=1,2,...,n) \tag{4.12}$$

ve

$$q_{ij} = \mu_{\hat{\Delta}_{x_i}}\left(x_j\right) \ ; \ (i,j=1,2,...,n) \tag{4.13}$$

ile

$$r_{ij} = \mu_{\hat{\Gamma}'_{x_i}}\left(x_j\right) \ ; \ i,j \neq k \ ; \ (i,j=1,2,...,n) \tag{4.14}$$

olur. Burada; $\hat{\Gamma}$ ve $\hat{\Delta}$, sırasıyla; (4.6) ve (4.10)'da tanımlandığı gibi, $\hat{\Gamma}'$; Γ' değerinin geçişli kapanışı ; P ve Q , sırasıyla; p_{ij} ve q_{ij} elemanlı $n\times n$ matrisleri ve R ; her (i,j) elemanı " $i,j\neq k$; $i,j=1,2,...,n$ " iken r_{ij} ve k. satır ile k. sütundaki elemanları sıfır elemanlarından oluşan bir $n\times n$ matrisi olarak alınacaktır.

Şimdi verilecek olan lemma, her bağlantılılık kategorisi için zayıf tepeleri karakterize etmek üzere yardımcı olmaktadır:

Lemma 4.3.1.

(i) Bir x_k tepesi, bir W_3 tepesidir $\Leftrightarrow$ $\mu_{U_3}(FG)$'ye denk olan P'nin elemanlarının hepsi, P'nin k. satır veya k. sütunundadır.

(ii) Bir x_k tepesi, bir W_2 tepesidir $\Leftrightarrow$ $\max\{p_{ij}, p_{ji}\} = \mu_{U_2}(FG)$ olacak biçimde P'nin herhangi (i,j) elemanları, P'nin k. satır veya k. sütunundadır.

(iii) Bir x_k tepesi, bir W_1 tepesidir $\Leftrightarrow$ $\mu_{U_1}(FG)$'ye denk olan Q'nun tüm elemanları, Q'nun k. satır veya k. sütunundadır (Takeda ve Nishida, 1976).

İspat : (i) durumunu inceleyelim. x_k , bir W_3 tepesi olsun. Varsayalım ki; $\mu_{U_1}(FG)$'ye denk olan bir (ℓ,m) elemanı $(\ell,m\neq k)$ olacak şekilde mevcuttur. $r_{ij}\leq p_{ij}$; $i,j\neq k$; $(i,j=1,2,...,n)$ olduğundan, x_k'nın bir W_3 tepesi oluşu varsayımı ile çelişen bir biçimde

$$\mu_{U_3}(FG_k) = \min_{i,j\neq k}\{r_{ij}\} \leq p_{\ell m} = \mu_{U_3}(FG)$$

yazılır. Bu sebeple; $\mu_{U_3}(FG)$'ye denk olan P'nin her elemanı, P'nin k. satır veya k. sütunundadır.

Tersine varsayalım ki; $\mu_{U_3}(FG)$'ye denk olan P'nin elemanlarının hepsi, P'nin k. satır veya k. sütunundadır. İlk olarak; not edilmelidir ki, eğer $\mu_{U_3}(FG)$'ye denk olan bir elemanı, P'nin k. satırında (sütununda) ise, o zaman P'nin k. satırı(sütun)'daki her köşegen elemanı, $\mu_{U_3}(FG)$'ye denktir. Bu durumda; $r_{ij} = p_{ij} > \mu_{U_3}(FG)$; $i, j \neq k$; $(i, j = 1,2,...,n)$ şartını sağlayacak biçimde $\min\{p_{ik}, p_{kj}\} = \mu_{U_3}(FG) < p_{ij}$; $i, j \neq k$; $(i, j = 1,2,...,n)$ olur. Bu yüzden; $\mu_{U_3}(FG_k) = \min_{i,j\neq k}\{r_{ij}\} > \mu_{U_3}(FG)$ yazılır öyle ki x_k, bir W_3 tepesidir ki bu (i)'nin ispatını tamamlar. (ii) ve (iii)'nin ispatları, (i)'nin olduğunkine benzerdir.

Aşağıdaki teorem, Lemma 4.3.1'in bir direkt sonucudur:

Teorem 4.3.1.

$i = 1,2,3$ iken herhangi fuzzy grafta en çok iki W_i tepesi vardır. Dahası; n $(n \geq 3)$ tepeleri ile birlikte herhangi fuzzy grafı en çok bir W_1 (W_3) tepesine sahiptir (Takeda ve Nishida, 1976).

Lemma 4.3.2.

Herhangi $FG = (X, \Gamma)$ fuzzy grafı için,

(i) X'in her tepesi, yolda görülür.
(ii) $\mu_{\Gamma_{x_{i_\ell}}}(x_{i_{\ell+1}}) \geq \mu_{U_2}(FG)$ **,** $\ell = 1,2,...,s-1$

olacak şekilde bir $\{x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_s}\}$; $(s \geq n)$ yolu vardır(Takeda ve Nishida, 1976).

İspat : FG'den bir $G = (X, \Gamma'')$ alışılmış yönlü grafını aşağıdaki gibi oluşturalım:

$$\mu_{\Gamma''_{x_i}}(x_j)\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix} \ ; \ p_{ij}\begin{Bmatrix}\geq\\<\end{Bmatrix}\mu_{U_2}(FG) \ ; \ i, j = 1,2,...,n$$

Buna göre; $\max\{p_{ij}, p_{ji}\} \geq \mu_{U_2}(FG)$ olduğundan, G ; G'nin bir kısmi grafı olan bir turnuvayı içerir. Her turnuva, bir Hamiltonian yoluna sahip olduğundan, G bir Hamiltonian yoluna sahiptir. Öte yandan; eğer $p_{ij} \geq \mu_{U_2}(FG)$ şartı var ise, bu durumda

$$\mu_{\Gamma_{x_i}}(x_u) \geq \mu_{U_2}(FG) \ , \ ..., \ \mu_{\Gamma_{x_v}}(x_j) \geq \mu_{U_2}(FG)$$

olacak şekilde verilen en az bir $\{x_i, x_u, ..., x_v, x_j\}$ yolunun varlığı Tanım 4.2.4'den kolayca görülebilir. Buradan istenen sonuç elde edilir.

Aşağıdaki teorem gösterir ki; n $(n \geq 2)$ tepeleri ile herhangi bir fuzzy grafında, U_2 (U_1) için bütün tepelerin kuvvetli olabilmesi imkansızdır:

Teorem 4.3.2.

n $(n \geq 2)$ tepeleri ile herhangi FG fuzzy grafında; U_2 (U_1) için ya zayıf yada izole olan en az iki tepe vardır (Takeda ve Nishida, 1976).

İspat : Bir $\{x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_s}\}$ yolu, Lemma 4.3.2'nin (i) ve (ii) koşullarını sağlasın. Genelleme eksikliği olmaksızın varsayılabilir ki; x_{i_1} ve x_{i_s}, başlangıç ile bitim tepeleri yolda tam olarak bir kez karşılaşır. Onun için; eğer başlangıç tepesi (bitim tepesi) yolda bir kez den daha fazla karşılaşırsa, yolun ilk tepesi (son tepesi) silinebilir öyle ki çıkarılan yolda (i) ve (ii) koşulları sağlanır. Yine yukarıdaki varsayıma göre; bir $\{x_{i_2}, x_{i_3}, ..., x_{i_s}\}$ ve bir $\{x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_{s-1}}\}$ yolu, sırasıyla, $X \setminus \{x_{i_1}\}$'deki tüm tepeleri ve $X \setminus \{x_{i_s}\}$'deki tüm tepeleri içerir. Bu sebeple; burada

$$\mu_{U_2}(FG_{i_1}) \geq \mu_{U_2}(FG) \text{ ve } \mu_{U_2}(FG_{i_s}) \geq \mu_{U_2}(FG)$$

yazılır. Böylece; x_{i_1} ve x_{i_s}'nin her biri ya bir W_2 yada bir N_2 tepesidir ki bu, U_2 için ispatı tamamlar. Ayrıca; U_1 için ispat benzer yollarla bulunabilir.

Sonuç 4.3.1.

n $(n \geq 3)$ tepeleri ile herhangi fuzzy grafı en az bir N_1 tepesine sahiptir (Takeda ve Nishida, 1976).

İspat : Teorem 4.3.1 ve 4.3.2'nin direkt bir sonucudur.

Teorem 4.3.3.

Eğer n $(n \geq 3)$ tepeleri ile bir FG fuzzy grafı iki W_2 tepesine sahip ise, bu taktirde $\mu_{U_2}(FG) < \mu_{U_1}(FG)$'dir (Takeda ve Nishida, 1976).

İspat : x_k ve x_ℓ , W_2 tepeleri yani

$$\mu_{U_2}(FG_k) > \mu_{U_2}(FG) \tag{4.15}$$

ve

$$\mu_{U_2}(FG_\ell) > \mu_{U_2}(FG) \tag{4.16}$$

olsun. Varsayalım ki;

$$\mu_{U_2}(FG) = \mu_{U_1}(FG) \tag{4.17}$$

yazılsın. (4.11) ve (4.15)'den (4.17)'ye doğru bulunur ki; x_k ve x_ℓ , W_1 tepeleridir ki bu, Teorem 4.3.1 ile çelişir. Böylece, ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.4.

Herhangi W_3 tepesi ya bir W_2 yada bir N_2 tepesidir (Takeda ve Nishida, 1976).

İspat : x_k bir W_3 tepesi olsun. Lemma 4.3.1'in ispatından; $r_{ij} = p_{ij}$ $i, j \neq k$; $(i, j = 1,2,...,n)$ elde edilir. Bu sebeple;

$$\mu_{U_2}(FG_k) \geq \mu_{U_2}(FG)$$

olur. Buda ispatı tamamlar.

Aşağıdaki teorem, Tanım 4.3.1 ve (4.11)'den direkt olarak görülür:

Teorem 4.3.5.

Bazı $i < j$ için eğer $\mu_{U_j}(FG) = \mu_{U_j}(FG)$ oluyorsa, o zaman bir S_i tepesinde bir S_j tepesi vardır (Takeda ve Nishida, 1976).

Teorem 4.3.6.

Bazı $i > j$ için eğer $\mu_{U_i}(FG) = \mu_{U_i}(FG)$ oluyorsa, o zaman bir W_i tepesi da $1 \leq \ell \leq i$ iken bir W_ℓ tepesidir(Takeda ve Nishida, 1976).

İspat : $i = 3$ ve $j = 1$ yani

$$\mu_{U_3}(FG) = \mu_{U_1}(FG) \tag{4.18}$$

olsun. x_k bir W_3 tepesi verilsin. Tanım 4.3.1 ve (4.18)'den

$$\mu_{U_2}(FG_k) > \mu_{U_2}(FG)$$

ve

$$\mu_{U_1}(FG_k) > \mu_{U_1}(FG)$$

elde edilir. Böylece; $1 \leq \ell \leq 3$ iken x_k bir W_ℓ tepesidir. Yine varsayalım ki x_k bir W_2 tepesi ve

$$\mu_{U_2}(FG) = \mu_{U_1}(FG)$$

olur. Buradan itibaren görülür ki;

$$\mu_{U_1}(FG_k) > \mu_{U_1}(FG)$$

olur. Buradan, $1 \leq \ell \leq 2$ iken x_k bir W_ℓ tepesidir. Açıktır ki; x_k bir W_2 tepesi olduğundan, x_k'nın bir W_1 tepesi olduğunu göstermek yeterlidir. Lemma 4.3.1'i kullanırsak görülür ki P'nin hem k. satır ve hem de k. sütununda, $\mu_{U_3}(FG)$'ye denk olan bir eleman vardır. Bu durumda; Lemma 4.3.1'in ispatından

$$p_{kj} = p_{jk} = \mu_{U_3}(FG) \ ; \ j \neq k \ ; \ (j = 1,2,...,n)$$

elde edilir. Dolayısıyla burada

$$q_{kj} = q_{jk} \leq \mu_{U_3}(FG) \ ; \ j \neq k \ ; \ (j = 1,2,...,n)$$

şeklindeki ifade burada sağlanacak biçimde

$$\mu_{\Gamma_{x_k} \cup \Gamma^{-1}{}_{x_k}}(x_j) \leq \mu_{U_3}(FG) \ ; \ j \neq k \ ; \ (j = 1,2,...,n)$$

olur. Bu nedenlerle de görülür ki

$$\mu_{U_1}(FG) = \mu_{U_3}(FG)$$

olur öyle ki $\mu_{U_1}(FG_k) > \mu_{U_1}(FG)$ olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.7.

x_k bir W_i tepesi olsun. Eğer bazı $i < j$ için, $\mu_{U_i}(FG_k) = \mu_{U_j}(FG_k)$ ise, bu taktirde $1 \leq \ell \leq j$ iken x_k'da bir W_ℓ tepesidir(Takeda ve Nishida, 1976).

İspat : Bu teoremin ispatı, Teorem 4.3.6'nınkine benzer olarak ispatlanabilir.

Uyarı 4.3.2.

Ayrıca Ross ve Harary (1959) gereğince not edilmelidir ki; alışılmış bir G yönlü grafının durumunda,

$$\mu_{U_i}(G_k) > \mu_{U_i}(G) \ \Leftrightarrow \ \mu_{U_i}(G_k) = 1 \text{ ve } \mu_{U_i}(G) = 0$$

yani $G_k \in U_i$ ve $G \notin U_i$'dir. Anlaşılır ki; U_0 için zayıf bir tepe, onun varlığını kendi tepesi olmamasından daha çok bağlantısız bir biçimde onu fuzzy graf yapar ve W_0 tepesi, W_1 tepesi olarak tanımlanır. Teorem 4.3.1'den kolayca görülür ki, herhangi yönlü graf en fazla iki zayıf tepeye sahiptir ve Teorem 4.3.6'dan gözlemlenebilir ki, herhangi yönlü grafta $(1,3)$ tepeleri yoktur.

KAYNAKLAR

Ajmal, N., Prajapati, A. S., 1992. Fuzzy cosets and fuzzy normal subgroups. ***Information Science,* 64:** 17-25.

Aktaş, H., 2005. Fuzzy normal alt gruplar ve Fuzzy kosetler. ***Y.Y.U. Fen-Bil. Ens. Der.,* Özel sayı:** 45-54.

Bhattacharya, P., 1986a. Fuzzy groups: Some group-theoretic analogs. ***Information Science,* 39**(3): 247-268.

Bhattacharya, P., 1986b. Fuzzy groups: Some group-theoretic analogs II. ***Information Science,* 41**(1): 77-91.

Bhattacharya, P., 1987. Fuzzy subgroups: Some characterizations. ***Journal of Math. Anal. And App.,* 128:** 241-252.

Bhattacharya, P., Mukherjee, N. P., 1987. Some group-theoric analogs II. ***Information Science***, **41:** 77-91.

Cayley, A., 1895. The theory of groups graphical representation. ***Math. Pap.Camb.,* 10:** 26-28.

Ceyhun, Y., 1976. ***Çizge Kuramı.*** O.D.T.Ü. Yayınları, Ankara.1-265.

Christofides, N., 1975. ***Graph Theory.*** Acad. Press, London.1-400.

Das, P. S., 1981. Fuzzy groups and level subgroups. ***J. Math. Anal. Appl.,* 84:** 264-269.

Euler, L., 1736. Solutio problematis and geometrian situs pertinentis. ***Comment. Acad. Sci. Petropolitanae,* 8:** 128-140.

Harary, F., 1959. Graph theoretic methods in the management sciences. ***Management Science,* 5:** 387-403.

Harary, F., Norman, R. Z., Cartwright, D., 1965. ***Structural Models: An İntroduction To The Theory Of Directed Graphs.*** John Wiley and Sons Inc., New york.1.

Harary, F., 1972. ***Graph Theory.*** Addison-Wesley, Philippines.1-274.

Kaufmann, A., 1975. ***Introduction To The Theory Of Fuzzy Subsets I.*** Academic Press, New york.1.

Kirchhoff, G., 1847. Über die auflösung der gleichungen auf elche man bei der untersuchung der linearen verteilung galvanisher ströme geführt wird. ***Ann. Phys. Chem.,* 72:** 497-508.

Kelarev, A. V., Praeger, C. E., 2003. On transitive Cayley graphs of groups and semigroups. ***European J. of Combinatorics,* 24**(1): 59-72.

Lederman, W., Weir, A. J., 1996. ***Introduction To Group Theory.*** Longman Co., New york.1.

Mukherjee, N. P., Bhattacharya, P., 1984. Fuzzy normal subgroups and fuzzy cosets. ***Information Science,* 34:** 225-239.

Mukherjee, N. P., Bhattacharya, P., 1986. Fuzzy groups, some group-theoretic analogs. ***Information Science,* 39:** 247-267.

Rosenfeld, A., 1971. Fuzzy groups. ***J. Math. Anal.,* 35:** 512-517.

Ross, I. C., Harary, F., 1959. A description of strengthening and weakening members of a group. ***Sociometry,* 22:** 139-147.

Takeda, E., Nishida, T., 1976. An application of fuzzy graphs to the problem concerning group structure. ***Jour. Of The Operations Research,* 19:** 217-227.

Wilson, R. T., 1972. ***Introduction To Graph Theory.*** Acad. Press, London.1-400.
Zadeh, L. A., 1965. Fuzzy sets. ***Infor. And Control,*** **8:** 338-353.

ÖZ GEÇMİŞ

1978 yılında Van'da doğdu. İlk öğrenimini Van Erciş Bayezit İlköğretim Okulu'nda, orta ve lise öğrenimini Van Alparslan Anadolu Öğretmen Lisesinde tamamladı. 1997 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünü kazandı ve 2001 yılında da mezun oldu. 2003 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Yüksek Lisans eğitimine başladı. Evli olup halen Milli Eğitim Bakanlığı'nda matematik öğretmeni olarak çalışmaktadır.