

PELL DİZİLERİNİN MATRİS ÜRETEÇLERİ

Selcan EKİCİ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**NİSAN 2006
ANKARA**


Selcan EKİCİ tarafından hazırlanan PELL DİZİLERİNİN MATRİS ÜRETEÇLERİ
adlı tezin yüksek lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

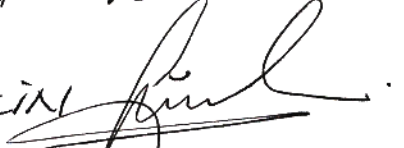
Prof. Dr. Durmuş TAŞCI


Tez Yöneticisi

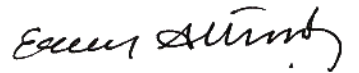



Bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

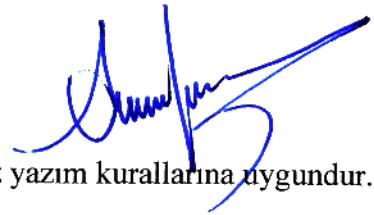
Başkan : Prof. Dr. Adnan TERCAN 

Üye : Prof. Dr. Ali Bülent EKİCİ 

Üye : Prof. Dr. Durmuş TAŞCI 

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ercan ALTINIŞIK 

Üye : Yrd. Doç. Dr. Naim TUĞLU 



Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

PELL DİZİLERİNİN MATRİS ÜRETEÇLERİ
(Yüksek Lisans Tezi)

Selcan EKİCİ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2006

ÖZET

Bu çalışmada $U_{n+2} = bU_{n+1} + U_n$, $U_0 = 0$, $U_1 = 1$ rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{U_n\}$ genel dizisi gözönüne alınarak Fibonacci ve Pell dizilerine ait bazı özellikler $B = \begin{bmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ üreteç matrisi kullanılarak elde edildi.

Ayrıca üstel ve karekök fonksiyonları için A 2×2 bir kare matris olmak üzere $f(B) = A$ şartını sağlayan A matrisinin elemanları belirlendi. Daha sonra $\widehat{A} = [\widehat{a}_{ij}] = f(B)$ kuvvet serilerinin açılımı yoluyla $f(B)$ nin bulunabileceği f fonksiyonlarının kümesi gözönüne alınarak bazı i ve j değerleri için a_{ij} ile \widehat{a}_{ij} eşitlendi. Böylece Fibonacci ve Pell dizilerine ait özellikler elde edildi.

Bilim Kodu : 204.1.025
Anahtar Kelimeler : Pell dizileri, Fibonacci dizileri
Sayfa Adedi : 55
Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Dursun TAŞCI

MATRIX GENERATORS OF PELL SEQUENCES**(M.Sc. Thesis)****Selcan EKİCİ****GAZI UNIVERSITY****INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY****January 2006****ABSTRACT**

In this article, by the help of general series $\{U_n\}$ which is defined recursively by $U_{n+2} = b U_{n+1} + U_n$, $U_0 = 0$, $U_1 = 1$, some of the properties of Fibonacci and Pell sequences are obtained by the use of generator matrix $B = \begin{bmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

First we determine a closed form expression of the entries a_{ij} of any function $f(B) = A = [a_{ij}]$ based on a polynomial representation of the function itself.

Then we consider a set of functions f such that $f(B)$ can be found by means of a power series expansion $\hat{A} = [\hat{a}_{ij}] = f(B)$ and equate a_{ij} ve \hat{a}_{ij} for some i and j , thus getting one or more Pell and Fibonacci-type identities.

Science Code : 204.1.025**Key Words : Pell sequences, Fibonacci sequences****Page Number : 55****Advisor : Prof. Dr. Dursun TAŞCI**

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her sayfasında emeği bulunanlara derin ve yürek dolusu teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yüreklendiren hocam Prof. Dr. Dursun Taşcı'ya; hayatımın her aşamasında olduğu gibi bu çalışmamda da manevi desteğiyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan hocam Ramazan Varol'a; kaynak bulma konusunda karşılaştığım engelleri aşmamda çok büyük katkısı olan Derya Ekici ve Ali Ekici'ye; çalışmamın hazırlık safhasında beni destekleyen hocalarım Atalay Çiçek ve Mehmet Ekşi'ye; çalışmamın bilgisayara aktarılması sırasında yardımını esirgemeyen arkadaşım İsmail Kalkanlı'ya; sonsuz sevgi ve bitmeyen inançlarıyla bana destek olan aileme; yetişmemde katkısı olan tüm öğretmenlerime, öğrencilerime ve arkadaşlarıma özel teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
ÇİZELGELERİN LİSTESİ	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR	ix
1. GİRİŞ	1
2. PELL DİZİLERİ	8
2.1. Karekök Matrisi	12
2.2. Üstel Fonksiyon Matrisi.....	17
2.3. Diğer Fonksiyonel Matrisler	18
2.4. Jacobsthal Sayıları	20
2.4.1. Jacobsthal sayılarının temel özellikleri	22
2.5. Jacobsthal Dizileri.....	26
2.6. Jacobsthal Polinomları.....	28
2.6.1. Jacobsthal polinomlarının temel özellikleri	30
3. PELL DİZİLERİNİN MATRİS ÜRETEÇLERİ.....	32
3.1. Karekök Matrisi	37
3.2. Üstel Fonksiyon Matrisi.....	43
3.3. Diğer Fonksiyonel Matrisler	47
4. SONUÇ VE ÖNERİLER	52

	Sayfa
KAYNAKLAR	53
ÖZGEÇMİŞ	55

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 2.1. Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayıları.....	21
Çizelge 2.2. Jacobsthal polinomları $\{ J_n(x) \} : 0 \leq n \leq 10$	30
Çizelge 2.3. Jacobsthal-Lucas polinomları $\{ j_n(x) \} : 0 \leq n \leq 10$	30

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 1.1. Altın dikdörtgen.....	6
Şekil 1.2. Gümüş dikdörtgen	7

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$\{U_n\}$	Genel dizi
$\{F_n\}$	Fibonacci dizileri
$\{L_n\}$	Lucas dizileri
$\{P_n\}$	Pell dizileri
$\{R_n\}$	Pell-Lucas dizileri
$\{J_n\}$	Jacobsthal dizileri
$\{j_n\}$	Jacobsthal-Lucas dizileri
B	Genel dizinin üreteç matrisi
Q	Fibonacci dizilerinin üreteç matrisi
M	Pell dizilerinin üreteç matrisi
D	Jacobsthal dizilerinin üreteç matrisi
$F_n(x)$	Fibonacci polinomları
$L_n(x)$	Lucas polinomları
$P_n(x)$	Pell polinomları
$R_n(x)$	Pell-Lucas polinomları
$J_n(x)$	Jacobsthal polinomları
$j_n(x)$	Jacobsthal-Lucas polinomları

1. GİRİŞ

E ve F,

$$H \equiv E^2 - 4F > 0$$

ifadesini sağlayan iki tamsayı olsun.

$$x^2 - Ex + F = 0$$

denkleminin kökleri

$$a \equiv \frac{1}{2}(E + \sqrt{H})$$

$$b \equiv \frac{1}{2}(E - \sqrt{H})$$

dir. Bu yüzden

$$a + b = E$$

$$a \cdot b = \frac{1}{4}(E^2 - H) = F$$

$$a - b = \sqrt{H}$$

olur.

Şimdi de,

$$U_n(E, F) \equiv \frac{a^n - b^n}{a - b}$$

$$V_n(E, F) \equiv a^n + b^n$$

ifadelerini tanımlayalım. Bu yüzden ilk birkaç terim,

$$U_0(E, F) = 0$$

$$U_1(E, F) = 1$$

$$V_0(E, F) = 2$$

$$V_1(E, F) = E$$

şeklinde bulunur.

$$U(E, F) = \{U_n(E, F) : n \geq 1\}$$

$$V(E, F) = \{V_n(E, F) : n \geq 1\}$$

dizilerine Lucas dizileri denir. Bu tanım genellikle,

$$U_{-1} = \frac{a^{-1} - b^{-1}}{a - b} = \frac{-1}{ab} = -\frac{1}{F}$$

da içerecek şekilde genişletilir.

$(E, F) = (1, -1)$ için U_n ler Fibonacci sayıları, V_n ler Lucas sayılarıdır.

$(E, F) = (2, -1)$ için Pell sayıları ve Pell - Lucas sayıları elde edilir.



1 birim uzunluğundaki AB doğru parçasını öyle iki parçaya bölelim ki, küçük parçanın ([AC]), büyük parçaya oranı ([BC]), büyük parçanın bütün doğruya oranına eşit olsun. Bu ifadeyi denkleme dönecek olursak,

$$\frac{[AC]}{[CB]} = \frac{[BC]}{[AB]}$$

veya

$$\frac{1 - y}{y} = \frac{y}{1}$$

yazarız. Burada içler dışlar çarpımı yaparak

$$y^2 = 1 - y$$

dolayısı ile

$$y^2 + y - 1 = 0$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemin iki kökü vardır ve bunlar;

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$y_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

dir. Yalnız bu köklerden ikinci kök negatif olduğundan çözüm kümesine onu alamayız (hiç bir uzunluk negatif olamayacağından); y_1 köküne altın oran denir. Altın oranı Φ ile göstereceğiz.

Gelelim Fibonacci'nin ünlü sorusuna...

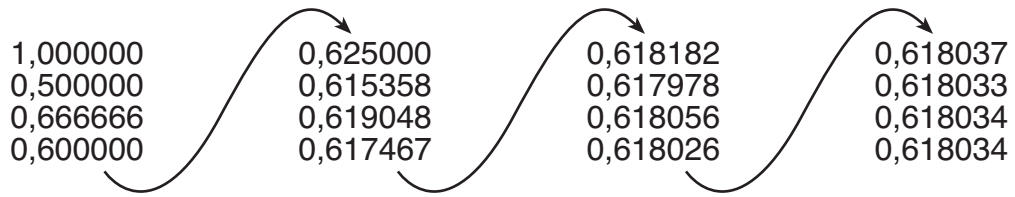
“Bir çift yavru tavşan (bir erkek bir dişi) var. Bir ay sonra yavrular erginleşiyor. Erginleşen her çift tavşan bir ay sonra bir çift yavru doğuruyor. Her yavru tavşan bir ay sonra erginleşiyor. Hiçbir tavşanın ölmediğini ve her dişi tavşanın bir erkek bir dişi yavru doğurduğunu varsayalım. Bir yıl sonra kaç tane tavşan olur?”

1. İlk ayın sonunda, sadece bir çift vardır.
2. İkinci ayın sonunda dişi bir çift tavşan doğurur ve elimizde 2 çift tavşan vardır.
3. Üçüncü ayın sonunda, ilk dişimiz bir çift yavru doğurur, 3 çift tavşanımız olur.
4. Dördüncü ayın sonunda, ilk dişimiz yeni bir çift yavru daha doğurur, iki ay önce doğan dişi de bir çift yavru doğurur ve 5 çift tavşanımız olur.

Bu şekilde devam ederek Fibonacci dizisi olarak adlandırılan aşağıdaki diziyi elde ederiz.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...

Fibonacci dizisindeki n. terimi F_n olarak ifade edelim. Fibonacci dizisi bu şekilde $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n, \dots$ olarak yazılabilir. Bu dizi sonsuza kadar devam eder. Eğer her Fibonacci sayısını bir sonraki komşusuyla bölerek bu oran yazılırsa, $F_1/F_2 = 1, F_2/F_3 = 1/2$ şeklinde devam edersek aşağıdaki diziyi elde ederiz.



bu sayılar 0,618034 ... sayısına doğru gidiyor. Altın oran 1,618... ve bu limit de onun ondalık kısmıdır.

Fibonacci dizileri ile Pell dizilerinin birçok özellikleri ortaktır ve ikisinin de başlangıç değerleri aynıdır. Ama yineleme bağıntıları farklıdır. Burada $\{U_n\}$ dizisinin özelliklerinin neler olduğu konusunda mantıklı bir soru akla gelir.

$$U_0 = 0, U_1 = 1, U_{n+1} = bU_n + U_{n-1}$$

Bu dizi özel durum olarak hem Fibonacci dizisini ($b = 1$) hem de Pell dizisini ($b = 2$) içerir.

$\{U_n\}$ nin ilk birkaç terimi:

$$U_0 = 0$$

$$U_1 = 1$$

$$U_2 = b$$

$$U_3 = b^2 + 1$$

$$U_4 = b^3 + 2b$$

$$U_5 = b^4 + 3b^2 + 1$$

$$U_6 = b^5 + 4b^3 + 3b$$

$$U_7 = b^6 + 5b^4 + 6b^2 + 1$$

$$U_8 = b^7 + 6b^5 + 10b^3 + 4b$$

.... ..

dir. Bunlar tamı tamına $F_n(x)$ Fibonacci polinomlarıdır.

$$F_0(x) = 0, F_1(x) = 1, F_{n+1}(x) = xF_n(x) + F_{n-1}(x)$$

x yerine b değerlerini yazarsak,

$$F_n(1) = F_n, F_n(2) = P_n, F_n(b) = U_n$$

eşitlikleri elde edilir.

Pell dizisi, $n \geq 1$ olmak üzere,

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}, P_1 = 1, P_2 = 2$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Dizi,

$$P_0 = 0, P_{-1} = 1, P_{-2} = -2, P_{-3} = 5, \dots, P_{-n} = (-1)^{n+1}P_n$$

eklenerek genişletilebilir.

Bu dizi ile bağlantılı $\{R_n\}$ dizisi, $R_n = P_{n-1} + P_{n+1}$ olmak üzere,

$$R_n = 2R_{n-1} + R_{n-2}, R_1 = 2, R_2 = 6$$

şeklinindedir. Dizinin ilk birkaç terimini 2, 6, 14, 34, 82, 198, ... şeklinde yazabilir ve diziyi

$$R_0 = 2, R_{-1} = -2, \dots, R_{-n} = (-1)^n R_n$$

ifadelerini ekleyerek genişletebiliriz.

Pell sayıları Binet formu kullanabilme özelliğine sahiptir. Eğer

$$y^2 = 2y + 1$$

denklemini alırsak, kökleri

$$\psi = (2 + \sqrt{8})/2 \quad \text{ve} \quad \psi' = (2 - \sqrt{8})/2$$

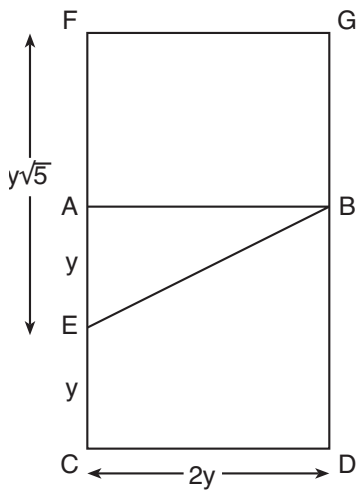
şeklinde buluruz. Tümevarım yöntemi ile de

$$P_n = \frac{\psi^n - \psi'^n}{\psi - \psi'}, \quad R_n = \psi^n + \psi'^n, \quad \psi'^n = \frac{R_n + P_n \sqrt{8}}{2}$$

olduğu ispatlanabilir.

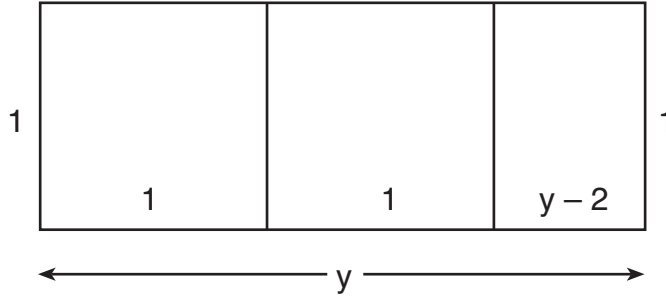
Binet formülleri kullanılarak, P_{nk} nın P_k ($k \neq 0$) ile tam olarak bölüneceği ispatlanabilir. Bu yüzden Pell dizileri, Fibonacci sayılarının bölünebilme özelliklerinin bazılarına sahiptir.

Geometrik olarak, Fibonacci sayıları Altın Dikdörtgen ile bağlantılıdır. Altın dikdörtgende, bir kenarı dikdörtgenin enine eşit olacak şekilde bir kare oluşturur ve kalan dikdörtgen yine bir altın dikdörtgendir (Şekil 1.1).



Şekil 1.1. Altın dikdörtgen

Pell sayılarına ait olan denklem, boyunun enine oranı “gümüş dikdörtgen”e eşit olan bir orana ulaşır (Boy y , en 1). Kenarları birbirine eşit olan iki kare enden taşındığında geriye kalan dikdörtgendeki oran, başlangıçtaki dikdörtgenin boyuyla eni arasındaki orana eşittir (Şekil 1.2).



Şekil 1.2. Gümüş dikdörtgen

Ya da

$$\frac{y}{1} = \frac{1}{y-2}, \quad y^2 - 2y - 1 = 0$$

bu yüzden de yukarıda verildiği gibi pozitif kök $y = 1 + \sqrt{2}$ dir.

2. PELL DİZİLERİ

Pell dizisi, $n \geq 1$ olmak üzere,

$$P_1 = 1, P_2 = 2 \text{ ve } P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n \quad [2.1]$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. “Pell eşitliği” denilen

$$y^2 = 2x + 1$$

eşitliğini alalım. Bu eşitliğin pozitif kökünü $\left(\psi = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{8})\right)$ ve negatif kökünü $\left(\psi' = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{8})\right)$ kullanarak Pell dizisini,

$$P_n = \frac{\psi^n - \psi'^n}{\psi - \psi'} \quad [2.2]$$

şeklinde ifade edebiliriz. ψ ve ψ' değerlerini Eş. 2.2 de yerlerine yazarsak,

$$P_n = \frac{1}{\sqrt{8}} \left[\left(\frac{2 + \sqrt{8}}{2} \right)^n - \left(\frac{2 - \sqrt{8}}{2} \right)^n \right] \quad [2.3]$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan kolayca,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{P_{n+1}} = \frac{-2 + \sqrt{8}}{2} = -\psi' \quad [2.4]$$

olduğu gösterilebilir.

$\{U_n\}$ genel dizisi için yinelenen bağıntı, $n \geq 1$ olmak üzere

$$U_1 = 1, U_2 = 2 \text{ ve } U_{n+2} = bU_{n+1} + U_n \quad (b \geq 1)$$

şeklindedir.

$\{U_n\}$ genel dizisi için

$$y^2 = by + 1 \quad [2.5]$$

eşitliğini inceleyelim. Buradan kökler

$$\alpha = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4}}{2} \quad \text{ve} \quad \beta = \frac{b - \sqrt{b^2 + 4}}{2} \quad [2.6]$$

olarak bulunur. Bu kökleri kullanarak (matematiksel induksiyonla)

$$U_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad [2.7]$$

eşitliğini yazabiliriz.

Ayrıca, Eş. 2.5 ve 2.6 yı kullanarak,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \cdot \frac{\alpha - \beta}{\alpha^n - \beta^n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha^n - \beta^n} \right) \\ &= \alpha = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4}}{2} \end{aligned} \quad [2.8]$$

ve

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{U_{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \cdot \frac{\alpha - \beta}{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}} \right) \\ &= -\beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4}}{2} \end{aligned} \quad [2.9]$$

eşitliklerini ifade edebiliriz.

Buradaki amacımız çok sayıda Fibonacci tipindeki özelliği elde etmek için 2×2 Q ve B matrislerinin fonksiyonunu kullanmaktır.

Bunun için genellikle şu yolu takip edeceğiz.

Fonksiyonun polinom gösterimine dayalı herhangi bir $f(Q) = A = [a_{ij}]$ fonksiyonunun a_{ij} elemanlarını kapalı formda belirteceğiz.

Daha sonra $\hat{A} = [\hat{a}_{ij}] = f(Q)$ kuvvet serilerinin açılımı yoluyla $f(Q)$ nun bulunabileceği f fonksiyonlarının kümesini göz önüne alalım ve a_{ij} ile \hat{a}_{ij} yi bazı i ve j değerleri için eşitleyelim ki Fibonacci dizileri ile ilgili özellikleri elde edelim.

İlk olarak T nin t tane farklı μ_k ($\ell = 1, 2, \dots, t$) özdeğeri varsa, c_i ler katsayı olmak üzere, analitik f fonksiyonunun polinom gösterimi

$$f(T) = \sum_{i=0}^{t-1} c_i T^i \quad [2.10]$$

şeklindedir.

T nin görüntüsü üzerinde tanımlı f fonksiyonunun c_i katsayıları, t denklemlilik ve t bilinmeyenli,

$$\sum_{i=0}^{t-1} c_i \mu_k^i = f(\mu_k) \quad (\ell = 1, 2, \dots, t) \quad [2.11]$$

sisteminin çözümüyle bulunur.

Fibonacci sayılarını üreten ve çok bilinen

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad [2.12]$$

matrisini gözönüne alalım.

Q nın farklı özdeğerlerinin $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ve $\Phi' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ olduğunu biliyoruz.

Eş. 2.10 ve 2.11 den, katsayıları c_0 ve c_1 olan

$$f(Q) = c_0 I + c_1 Q \quad (I, 2 \times 2 \text{ birim matris}) \quad [2.13]$$

polinom gösterimi elde edilir.

Q nın görüntüsü üzerindeki f fonksiyonunun katsayıları c_0 ve c_1

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 \Phi &= f(\Phi) \\ c_0 + c_1 \Phi' &= f(\Phi') \end{aligned} \quad [2.14]$$

sisteminin çözümüyle bulunur. Aslında Eş. 2.14 den $c_0 = f(\Phi) - c_1 \Phi$ ve $c_1 = (f(\Phi') - c_0) / \Phi'$ yi kullanırsak,

$$\begin{aligned} c_0 &= f(\Phi) - c_1 \Phi \\ c_0 &= f(\Phi) - \frac{(f(\Phi') - c_0)}{\Phi'} \Phi \\ \Phi' c_0 &= \Phi' f(\Phi) - \Phi f(\Phi') + \Phi c_0 \\ (\Phi' - \Phi) c_0 &= \Phi' f(\Phi) - \Phi f(\Phi') \\ c_0 &= (\Phi f(\Phi') - \Phi' f(\Phi)) / \sqrt{5} \end{aligned} \quad [2.15]$$

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{f(\Phi') - c_0}{\Phi'} \\ c_1 &= \frac{f(\Phi') - f(\Phi) + \Phi c_1}{\Phi'} \\ \Phi' c_1 &= f(\Phi') - f(\Phi) + \Phi c_1 \\ (\Phi' - \Phi) c_1 &= f(\Phi') - f(\Phi) \\ c_1 &= (f(\Phi) - f(\Phi')) / \sqrt{5} \end{aligned} \quad [2.15']$$

Eş. 2.13, 2.15 ve 2.15' nü kullanırsak,

$$\begin{aligned}
 f(Q) = A &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\
 &= c_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c_0 + c_1 & c_1 \\ c_1 & c_0 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} (\Phi - 1)f(\Phi') - (\Phi' - 1)f(\Phi) & f(\Phi) - f(\Phi') \\ f(\Phi) - f(\Phi') & \Phi f(\Phi') - \Phi' f(\Phi) \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \Phi f(\Phi) - \Phi' f(\Phi') & f(\Phi) - f(\Phi') \\ f(\Phi) - f(\Phi') & \Phi f(\Phi') - \Phi' f(\Phi) \end{bmatrix} \quad [2.16]
 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir (10,13).

2.1. Karekök Matrisi

Özel olarak ve Eş. 2.16 yı da kullanarak f yi karekök fonksiyonu ($f(Q) = \sqrt{Q}$) olarak alırsak, $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= (\Phi f(\Phi) - \Phi' f(\Phi')) / \sqrt{5} \\
 &= (\Phi \sqrt{\Phi} - i(1/\Phi)(\sqrt{1/\Phi})) / \sqrt{5} \\
 &= (\Phi \sqrt{\Phi} + i\sqrt{1/\Phi^3}) / \sqrt{5} \quad [2.17]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{12} = a_{21} &= (f(\Phi) - f(\Phi')) / \sqrt{5} \\
 &= (\sqrt{\Phi} - i\sqrt{1/\Phi}) / \sqrt{5} \quad [2.17']
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{22} &= (\Phi f(\Phi') - \Phi' f(\Phi)) / \sqrt{5} \\
 &= (i\Phi \sqrt{1/\Phi} - (-1/\Phi)\sqrt{\Phi}) / \sqrt{5} \\
 &= (\sqrt{1/\Phi} + i\sqrt{\Phi}) / \sqrt{5} \quad [2.17'']
 \end{aligned}$$

$$\left(\Phi \cdot \Phi' = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{1 - 5}{4} = -1 \text{ dir. Dolayısıyla } \Phi' = -1/\Phi \text{ dir.} \right)$$

eşitlikleri Q nun bir karekökünü tanımlar.

Q nun bir karekökünü elde etmek için alternatif yollardan birisi de $\widehat{A}^2 = Q$ matris denklemini çözmektir.

$$\begin{bmatrix} \widehat{a}_{11} & \widehat{a}_{12} \\ \widehat{a}_{21} & \widehat{a}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \widehat{a}_{11} & \widehat{a}_{12} \\ \widehat{a}_{21} & \widehat{a}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad [2.18]$$

Buradan

$$\begin{aligned} \widehat{a}_{11}^2 + \widehat{a}_{12}\widehat{a}_{21} &= 1 \\ \widehat{a}_{11}\widehat{a}_{12} + \widehat{a}_{12}\widehat{a}_{22} &= 1 \\ \widehat{a}_{21}\widehat{a}_{11} + \widehat{a}_{22}\widehat{a}_{21} &= 1 \\ \widehat{a}_{21}\widehat{a}_{12} + \widehat{a}_{22}^2 &= 0 \end{aligned} \quad [2.19]$$

sistemini elde ederiz. İkinci ve üçüncü eşitliklerden

$$\begin{aligned} \widehat{a}_{11}\widehat{a}_{12} + \widehat{a}_{12}\widehat{a}_{22} &= \widehat{a}_{21}\widehat{a}_{11} + \widehat{a}_{22}\widehat{a}_{21} \\ \widehat{a}_{12}(\widehat{a}_{11} + \widehat{a}_{22}) &= \widehat{a}_{21}(\widehat{a}_{11} + \widehat{a}_{22}) \\ \widehat{a}_{12} &= \widehat{a}_{21} \end{aligned}$$

yazabiliriz. (\sqrt{Q} simetrik bir matris olduğundan bu beklenen bir durumdur.) Bu yüzden, dördüncü eşitliği kullanarak $\widehat{a}_{12} = \widehat{a}_{21} = \pm i\widehat{a}_{22}$ eşitliğini elde ederiz. Birinci ve ikinci eşitliği kullanarak \widehat{a}_{11} i bulalım.

$$\begin{aligned} \widehat{a}_{11}^2 + \widehat{a}_{12}\widehat{a}_{21} &= 1 \quad \implies \widehat{a}_{11}^2 - \widehat{a}_{22}^2 = 1 \\ \widehat{a}_{11}\widehat{a}_{12} + \widehat{a}_{12}\widehat{a}_{22} &= 1 \quad \implies \widehat{a}_{12}(\widehat{a}_{11} + \widehat{a}_{22}) = 1 \end{aligned}$$

Elde ettiğimiz bu iki eşitliği birbirine bölersek, $\hat{a}_{11} = (1 \pm i)\hat{a}_{22}$ olarak bulunur.

Buradan Eş. 2.19 daki sistemin çözümleri,

$$\begin{aligned}\hat{a}_{11} &= (1 \pm i)\hat{a}_{22} \\ \hat{a}_{12} &= \hat{a}_{21} = \pm i\hat{a}_{22} \\ \hat{a}_{22} &= \pm \sqrt{(-1 \mp 2i)/5}\end{aligned}\quad [2.20]$$

olur.

$$-1 \mp 2i = \sqrt{5} e^{i(\pi \pm \arctan 2)}$$

olduğundan, \hat{a}_{22} kompleks elemanı

$$\hat{a}_{22} = (1/5)^{1/4} e^{i(\pi \pm \arctan 3)/2 + ik\pi} \quad (k = 0, 1)$$

şeklinde yazılabilir. \hat{a}_{22} nin reel kısmı

$$\text{Re}(\hat{a}_{22}) = (-1)^k (1/5)^{1/4} \cos \frac{\pi \pm \arctan 2}{2} \quad (k = 0, 1) \quad [2.21]$$

şeklinde dir. a_{22} ve \hat{a}_{22} nin reel kısımlarını eşitleyip iki tarafında karesini alırsak, Eş. 2.17 ve 2.21 den

$$\begin{aligned}(\sqrt{1/(5\Phi)})^2 &= \left((-1)^k (1/5)^{1/4} \cos \frac{\pi \pm \arctan 2}{2} \right)^2 \\ 1/(5\Phi) &= \sqrt{1/5} \sin^2 \frac{\arctan 2}{2}\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece

$$\Phi = 1/\left(\sqrt{5} \sin^2 \frac{\arctan 2}{2} \right) \quad [2.22]$$

şeklindeki geometrik özellik bulunur. a_{22} ve \hat{a}_{22} nin sanal kısımlarını eşitleyip iki tarafın karesini alırsak,

$$(\sqrt{\Phi/5})^2 = \left((-1)^k (1/5)^{1/4} \sin \frac{\pi \pm \arctan 2}{2} \right)^2$$

$$\Phi/5 = \sqrt{1/5} \cos^2 \frac{\arctan 2}{2}$$

eşitliği elde edilir. Böylece

$$\Phi = \sqrt{5} \cos^2 \frac{\arctan 2}{2} \quad [2.22']$$

şeklinde, Eş. 2.22 ye denk bir eşitlik elde edilir.

Önceki ele alış tarzımızı aşağıdaki gibi genelleseyebiliriz:

$$B = \begin{bmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad [2.23]$$

olduğundan, indüksiyonla

$$B^n = \begin{bmatrix} U_{n+1} & U_n \\ U_n & U_{n-1} \end{bmatrix} \quad [2.24]$$

olduğu bulunur. Buradaki U_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) genel dizisi

$$U_{n+2} = bU_{n+1} + U_n; U_0 = 0, U_1 = 1 \quad [2.25]$$

yinelenen bağıntısı ile tanımlanır. Bu dizide $b = 1$ için F_n Fibonacci sayılarını, $b = 2$ için P_n Pell sayılarını buluruz.

$\{U_n\}$ genel dizisi için yazdığımız. $y^2 = by + 1$ eşitliğini hatırlayalım. Burada

$$\Delta = \sqrt{b^2 + 4} \quad [2.26]$$

olur. Eş. 2.23 deki B nin özdeğerleri de,

$$\alpha_b = (b + \Delta)/2, \beta_b = (b - \Delta)/2 \quad [2.27]$$

olarak bulunur. Eş. 2.26 ve 2.27 yi kullanarak $\alpha_b \beta_b = -1$, $\beta_b = -1/\alpha_b$ eşitliğini elde ederiz.

$b = 1$ iken bu özdeğerler daha önce de gördüğümüz gibi $(1 \pm \sqrt{5})/2$ olur. ($\Phi = \alpha_1$ ve $\Phi' = \beta_1$ diyebiliriz). Eğer $b = 2$ olursa, bu özdeğerler $\psi = 1 + \sqrt{2}$ ve $\psi' = 1 - \sqrt{2}$ haline gelir.

Yukarıda Fibonacci sayılarıyla çizdiğimiz taslağa paralel olarak Eş. 2.22 ye karşılık olarak,

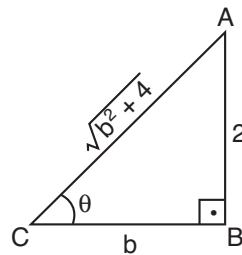
$$\alpha_b = 1 / \left(\Delta \sin^2 \frac{\arctan(2/b)}{2} \right) \quad [2.28]$$

özelliğini çıkarabiliriz.

Burada dikkat edilmesi gereken nokta Eş. 2.28 in doğrudan gerçekleştirilebilir olmasıdır.

Trigonometride çok iyi bilinen $\sin^2(x/2) = (1 - \cos x)/2$ eşitliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\arctan(2/b)}{2} &= \frac{1 - \cos \overbrace{\arctan(2/b)}^{\theta}}{2} \\ &= \frac{1 - b/\Delta}{2} \\ &= \frac{1}{a_b \Delta} \end{aligned}$$



($\tan \theta = 2/b$ olduğundan $\arctan(2/b) = \theta$ dir.)

ifadesini elde ederiz (11,13).

2.2. Üstel Fonksiyon Matrisi

Özel olarak f i üstel fonksiyon ($f(x) = e^x$) olarak alırsak,

Eş. 2.16 dan

$$\begin{aligned} a_{11} &= (\Phi e^\Phi - \Phi' e^{\Phi'}) / \sqrt{5} \\ a_{12} &= a_{21} = (e^\Phi - e^{\Phi'}) / \sqrt{5} \\ a_{22} &= (\Phi e^{\Phi'} - \Phi' e^\Phi) / \sqrt{5} \end{aligned} \quad [2.29]$$

olur.

$\hat{A} = [\hat{a}_{ij}] = \exp Q$ yu elde etmenin alternatif yollarından birisi de kuvvet serilerinin açılımını

$$\exp Q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q^n}{n!} \quad [2.30]$$

kullanılmaktadır. Eş. 2.16 dan da kolayca görülebileceği gibi

$$\begin{aligned} \hat{a}_{11} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_{n+1}}{n!} \\ \hat{a}_{12} &= \hat{a}_{21} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{n!} \\ \hat{a}_{22} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_{n-1}}{n!} \end{aligned} \quad [2.31]$$

dir. Bundan dolayı, \hat{A} ile A nın karşılıklı elemanlarını eşitlersek, Eş. 2.29 ve 2.31 i de kullanarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{n!} = (e^{\Phi} - e^{\Phi'}) / \sqrt{5} \quad [2.32]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_{n+1}}{n!} = (\Phi e^{\Phi} - \Phi' e^{\Phi'}) / \sqrt{5} \quad [2.33]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_{n-1}}{n!} = (\Phi e^{\Phi'} - \Phi' e^{\Phi}) / \sqrt{5} \quad [2.34]$$

Fibonacci dizilerine ait özellikleri elde ederiz. L_n , Lucas sayıları belirtmek üzere $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ olduğunu biliyoruz. Eş. 2.33 ve 2.34 ü toplarsak

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_{n+1}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_{n-1}}{n!} &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\Phi e^{\Phi} - \Phi' e^{\Phi'} + \Phi e^{\Phi'} - \Phi' e^{\Phi}) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{n!} &= \frac{1}{\sqrt{5}} ((\Phi - \Phi') e^{\Phi} + (\Phi - \Phi') e^{\Phi'}) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{n!} &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\sqrt{5} e^{\Phi} + \sqrt{5} e^{\Phi'}) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{n!} &= e^{\Phi} + e^{\Phi'} \end{aligned} \quad [2.35]$$

eşitliği elde edilir (5,13).

2.3. Diğer Fonsiyonel Matrisler

Şimdi de

$$\sin Q = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{Q^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad [2.36]$$

$$\cos Q = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{Q^{2n}}{(2n)!} \quad [2.37]$$

$$\sinh Q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad [2.38]$$

$$\cosh Q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q^{2n}}{(2n)!} \quad [2.39]$$

şeklinde kuvvet serileri açılımlarını gözönüne alalım.

Öncekilere benzer bir mantık kullanarak buradan da Fibonacci sayılarına ait birçok özelliği elde edebiliriz. Eş. 2.16 dan A matrisinin a_{ij} elemanlarını

$$\begin{aligned} a_{11} &= (\Phi f(\Phi) - \Phi' f(\Phi')) / \sqrt{5} \\ a_{12} &= a_{21} = (f(\Phi) - f(\Phi')) / \sqrt{5} \\ a_{22} &= (\Phi f(\Phi') - \Phi' f(\Phi)) / \sqrt{5} \end{aligned}$$

şeklinde yazarız. $f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n$ olmak üzere,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n F_n = (f(\Phi) - f(\Phi')) / \sqrt{5} \quad [2.40]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n F_{n+1} = (\Phi f(\Phi) - \Phi f(\Phi')) / \sqrt{5} \quad [2.41]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n F_{n-1} = (\Phi f(\Phi') - \Phi' f(\Phi)) / \sqrt{5} \quad [2.42]$$

genel formundaki özellikleri elde ederiz. Buraya kadar gösterdiğimiz eşitlikleri kullanarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{F_{2n+1}}{(2n+1)!} = (\sin \Phi - \sin \Phi') / \sqrt{5} \quad [2.43]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{F_{2n}}{(2n)!} = (\cos \Phi - \cos \Phi')/\sqrt{5} \quad [2.44]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_{2n+1}}{(2n+1)!} = (\sinh \Phi - \sinh \Phi')/\sqrt{5} \quad [2.45]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_{2n}}{(2n)!} = (\cosh \Phi - \cosh \Phi')/\sqrt{5} \quad [2.46]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_{2n+1}}{(2n)!} = (\Phi \cosh \Phi - \Phi' \cosh \Phi')/\sqrt{5} \quad [2.47]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_{2n-1}}{(2n)!} = (\Phi \cosh \Phi' - \Phi' \cosh \Phi)/\sqrt{5} \quad [2.48]$$

şeklindeki özellikleri elde ederiz. Fibonacci dizileri ile ilgili özellikleri kullanarak Lucas dizileri ile ilgili benzer özellikleri bulabiliriz. $F_{n+1} + F_{n-1} = L_n$ olduğunu biliyoruz. Eş. 2.47 ve 2.48 i toplarsak,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_{2n+1}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_{2n-1}}{(2n)!} &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\Phi \cosh \Phi - \Phi' \cosh \Phi' + \Phi \cosh \Phi' - \Phi' \cosh \Phi) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_{2n}}{(2n)!} &= \frac{1}{\sqrt{5}} ((\Phi - \Phi') \cosh \Phi + (\Phi - \Phi') \cosh \Phi') \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_{2n}}{(2n)!} &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\sqrt{5} \cosh \Phi + \sqrt{5} \cosh \Phi') \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_{2n}}{(2n)!} &= \cosh \Phi + \cosh \Phi' \end{aligned} \quad [2.49]$$

elde edilir (11,13).

2.4. Jacobsthal Sayıları

$\{J_n\}$ Jacobsthal dizileri

$$J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n, \quad J_0 = 0, J_1 = 1, \quad n \geq 0, \quad [2.50]$$

$\{j_n\}$ Jacobsthal - Lucas dizileri

$$j_{n+2} = j_{n+1} + 2j_n, \quad j_0 = 2, j_1 = 1, \quad n \geq 0, \quad [2.51]$$

şeklinde tanımlanır.

Eş. 2.50 ve 2.51 den J_n Jacobsthal sayıları ve j_n Jacobsthal - Lucas sayılarına ait aşağıdaki tabloyu elde ederiz.

Çizelge 2.1. Jacobsthal ve Jacobsthal - Lucas sayıları

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 ...
J_n	0	1	1	3	5	11	21	43	85	171	341 ...
j_n	2	1	5	7	17	31	65	127	257	511	1025...

İhtiyaç duyulduğunda Eş. 2.50 ve 2.51 deki n nin negatif değerleri kullanılarak dizi genişletilebilir. Dikkat edersek J_0 ve j_0 hariç bütün J_n ve j_n ler, tanımın özelliğinden dolayı tektir (Çizelge 2.1).

Eş. 2.50 ve 2.51 deki rekürans bağıntıları

$$x^2 - x - 2 = 0 \quad [2.52]$$

karakteristik denklemini içerir. Eş. 2.52 deki denklemin kökleri

$$\varphi = 2, \varphi' = -1 \quad [2.53]$$

dir ve böylece

$$\varphi + \varphi' = 1, \varphi \cdot \varphi' = -2, \varphi - \varphi' = 3 \quad [2.54]$$

eşitlikleri elde edilir. Eş. 2.53 deki eşitlikten dolayı ψ, ψ' yerine sırasıyla 2, -1 yazabiliriz.

J_n ve j_n nin kapalı formları, $n \geq 1$ olmak üzere,

$$J_n = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-r}{r} 2^r \quad (n \text{ tek}) \quad [2.55]$$

ve

$$j_n = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n}{n-r} \binom{n-r}{r} 2^r \quad (n \text{ tek}) \quad [2.56]$$

şeklinde ifade edilir. Eş. 2.55 ve 2.56 n üzerine indüksiyonla gösterilir.

2.4.1. Jacobsthal sayılarının temel özellikleri

Binet Formülleri:

$$J_n = \frac{\varphi - \varphi'}{\alpha - \beta} = \frac{\varphi - \varphi'}{3} = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n) \quad [2.57]$$

$$j_n = \varphi + \varphi' = 2^n + (-1)^n \quad [2.58]$$

Simson Formülleri:

Jacobsthal sayılarının

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi tarafından üretildiğini biliyoruz. Bu R matrisinin birbirini takip eden kuvvetlerini alarak

$$R^n = \begin{bmatrix} J_n & J_{n+1} \\ J_{n+1} & J_{n+2} \end{bmatrix}$$

matrisini bulabiliriz.

$$\det R^n = (\det R)^n = (-2)^n = J_n J_{n+2} - J_{n+1}^2 \quad [2.59]$$

$$j_{n+1} j_{n-1} - j_n^2 = 9(-1)^{n-1} 2^{n-1} = -9(J_{n+1} J_{n-1} - J_n^2) \quad [2.60]$$

Toplam Formülleri:

$$\sum_{i=2}^n J_i = \frac{J_{n+2} - 3}{2} \quad [2.61]$$

$$\sum_{i=1}^n j_i = \frac{j_{n+2} - 5}{2} \quad [2.62]$$

2.1. Teorem

J_n Jacobsthal sayılarını, j_n Jacobsthal - Lucas sayılarını belirtmek üzere,

- (i) $j_n J_n = \frac{\varphi^{2n} - \varphi^{2n}}{3},$
- (ii) $j_{n+1} + 2J_{n-1} = j_n,$
- (iii) $j_{n+1} + 2j_{n-1} = 9J_n,$
- (iv) $j_{n+1} + j_n = 3 \cdot 2^n,$
- (v) $J_{n+1} + J_n = 2^n,$
- (vi) $j_{n+1} - j_n = 2^n + 2(-1)^{n+1},$
- (vii) $3J_n + j_n = 2\varphi^{n+1},$
- (viii) $J_n + j_n = 2J_{n+1}$

dir.

Ispat

$$(i) \quad j_n J_n = (\varphi^n + \varphi'^n) \frac{(\varphi^n + \varphi'^n)}{3} = \frac{\varphi^{2n} - \varphi'^{2n}}{3}$$

$$(ii) \quad J_{n+1} + 2J_{n-1} = \frac{\varphi^{n+1} - \varphi'^{n+1}}{3} + \frac{2\varphi^{n-1} - 2\varphi'^{n-1}}{3}$$

$$= \frac{\varphi^2 \varphi^{n-1} - \varphi'^2 \varphi'^{n-1}}{3} + \frac{2\varphi^{n-1} - 2\varphi'^{n-1}}{3}$$

$$= \frac{6\varphi^{n-1} - 3\varphi'^{n-1}}{3}$$

$$= \varphi^n + \varphi'^n = j_n$$

$$(iii) \quad j_{n+1} + 2j_{n-1} = \varphi^{n+1} + \varphi'^{n+1} + 2\varphi^{n-1} + 2\varphi'^{n-1}$$

$$= \varphi^2 \varphi^{n-1} + \varphi'^2 \varphi'^{n-1} + 2\varphi^{n-1} + 2\varphi'^{n-1}$$

$$= 4\varphi^{n-1} + \varphi'^{n-1} + 2\varphi^{n-1} + 2\varphi'^{n-1}$$

$$= 6\varphi^{n-1} + 3\varphi'^{n-1}$$

$$= 9 \frac{\varphi^n - \varphi'^n}{3}$$

$$= 9J_n$$

$$(iv) \quad j_{n+1} + j_n = \varphi^{n+1} + \varphi'^{n+1} + \varphi^n + \varphi'^n$$

$$j_{n+1} + j_n = \varphi^{n+1} + \varphi'^{n+1} + \varphi^n + \varphi'^n$$

$$= \varphi \cdot \varphi^n + \varphi' \cdot \varphi'^n + \varphi^n + \varphi'^n$$

$$= 3\varphi^n = 3 \cdot 2^n$$

$$(v) \quad J_{n+1} + J_n = \frac{\varphi^{n+1} + \varphi'^{n+1}}{3} + \frac{\varphi^n + \varphi'^n}{3}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\varphi \cdot \varphi^n + \varphi' \cdot \varphi'^n + \alpha^n + \beta^n}{3} \\
&= \frac{3\alpha^n}{3} = 2^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(vi)} \quad j_{n+1} - j_n &= \varphi^{n+1} + \varphi'^{n+1} - \varphi^n - \varphi'^n \\
&= \varphi \cdot \varphi^n + \varphi' \cdot \varphi'^n - \varphi^n - \varphi'^n \\
&= \varphi^n - 2\varphi'^n - \varphi^n - \varphi'^n \\
&= 2^n - 2(-1)^n = 2^n + 2(-1)^{n+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(vii)} \quad 3J_n + j_n &= (\varphi^n - \varphi'^n) + (\varphi^n + \varphi'^n) \\
&= 2\varphi^n \\
&= \varphi^{n+1} = 2\varphi^{n+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(viii)} \quad J_n + j_n &= \frac{\varphi^n - \varphi'^n}{\varphi - \varphi'} + \varphi^n + \varphi'^n \\
&= \frac{\varphi^n - \varphi'^n + \varphi^{n+1} - \varphi'^{n+1} - \varphi' \varphi^n + \varphi \varphi'^n + \varphi \varphi'^n - \varphi'^{n+1}}{\varphi - \varphi'} \\
&= \frac{\varphi^n - \varphi'^n + \varphi^{n+1} + \varphi^n + 2\varphi'^n - \varphi'^{n+1}}{\varphi - \varphi'} \\
&= \frac{2\varphi^{n+1} + 2\varphi'^{n+1}}{\varphi - \varphi'} \\
&= 2J_{n+1}
\end{aligned}$$

Dikkat edersek son eşitlikte $\{J_n\}$ ve $\{j_n\}$ için verilen özellik sırasıyla $F_n L_n = F_{2n}$ Fibonacci ve Lucas sayıları, $P_n Q_n = P_{2n}$ Pell ve Pell - Lucas sayıları ile benzerdir (4, 15, 16, 18, 22).

2.5. Jacobsthal Dizileri

Jacobsthal dizisi,

$$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}, \quad J_0 = 0, J_1 = 1 \quad [2.63]$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır.

Pell dizileri Binet formu kullanabilme özelliğine sahiptir. Eğer

$$y^2 = y + 2 \quad [2.64]$$

denklemini alırsak, kökleri

$$\varphi = 2 \text{ ve } \varphi' = -1 \quad [2.65]$$

şeklinde buluruz. Matematiksel indüksiyon ile de,

$$J_n = \frac{\varphi^n - \varphi'^n}{\varphi - \varphi'} \quad [2.66]$$

olduğu ispatlanabilir.

Jacobsthal sayıları da bir A matrisi tarafından üretilir.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad [2.67]$$

Eş. 2.65 ten D nin farklı özdeğerlerinin $\varphi = 2$ ve $\varphi' = -1$ olduğunu biliyoruz.

Eğer bir W matrisinin w tane farklı μ_k ($k = 1, 2, \dots, w$) özdeğeri varsa, c_i ler katsayı olmak üzere, analitik h fonksiyonunun polinom gösteriminin

$$h(W) = \sum_{i=0}^{w-1} c_i W^i \quad [2.68]$$

şeklindedir.

W nun görüntüsü üzerinde tanımlı h fonksiyonunun c_i katsayıları, w denklemini ve w bilinmeyenli,

$$\sum_{i=0}^{w-1} c_i \mu_k^i = h(\mu_k) \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad [2.69]$$

sisteminin çözümüyle bulunur.

Jacobsthal sayılarını üreten

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisini gözönüne alalım.

D nin farklı özdeğerlerinin $\varphi = 2$ ve $\varphi' = -1$ olduğunu biliyoruz.

Eş. 2.68 ve 2.69 dan katsayıları c_0 ve c_1 olan

$$h(D) = c_0 I + c_1 D \quad [2.70]$$

polinom gösterimi elde edilir.

D nin görüntüsü üzerindeki h fonksiyonunun katsayıları c_0 ve c_1

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 \varphi &= h(\varphi) \\ c_0 + c_1 \varphi' &= h(\varphi') \end{aligned} \quad [2.71]$$

sisteminin çözümüyle bulunur. Aslında Eş. 2.71 den $c_0 = h(\varphi) - c_1 \varphi$ ve

$c_1 = (h(\varphi') - c_0)/\varphi'$ yı kullanırsak,

$$c_0 = h(\varphi) - c_1\varphi$$

$$c_0 = h(\varphi) - \frac{h(\varphi') - c_0}{\varphi'}\varphi$$

$$\varphi'c_0 = \varphi'h(\varphi) - \varphi h(\varphi') + \varphi c_0$$

$$c_0 = (\varphi h(\varphi') - \varphi' h(\varphi))/3 \quad [2.72]$$

$$c_1 = (h(\varphi') - c_0)/\varphi'$$

$$c_1 = \frac{h(\varphi') - h(\varphi) - c_1\varphi}{\varphi'}$$

$$\varphi'c_1 = h(\varphi') - h(\varphi) - c_1\varphi$$

$$(\varphi' - \varphi)c_1 = h(\varphi') - h(\varphi)$$

$$c_1 = (h(\varphi) - h(\varphi'))/3 \quad [2.72']$$

Eş. 2.70, 2.71, 2.72 ve 2.72' nü kullanırsak,

$$\begin{aligned} h(D) = A &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\ &= c_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_0 & c_1 \\ 2c_1 & c_0 + c_1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \varphi h(\varphi') - \varphi' h(\varphi) & h(\varphi) - h(\varphi') \\ 2h(\varphi) - 2h(\varphi') & \varphi h(\varphi) - \varphi' h(\varphi') \end{bmatrix} \end{aligned} \quad [2.73]$$

elde edilir (15, 16, 18).

2.6. Jacobsthal Polinomları

$\{J_n(x)\}$ Jacobsthal polinomları ve $\{j_n(x)\}$ Jacobsthal - Lucas polinomları

$$J_{n+2}(x) = J_{n+1}(x) + 2xJ_n(x), \quad J_0(x) = 0, \quad J_1(x) = 1 \quad [2.74]$$

ve

$$j_{n+2}(x) = j_{n+1}(x) + 2xj_n(x), \quad j_0(x) = 2, \quad j_1(x) = 1 \quad [2.75]$$

şeklinde tanımlanabilir.

$J_n(1/2) = F_n$, n. Fibonacci sayısı, $j_n(1/2) = L_n$, n. Lucas sayısı olduğuna dikkat edelim.

$\{J_n(x)\}$ ve $\{j_n(x)\}$ nın karakteristik denklemi

$$y^2 - y - 2x = 0 \quad [2.76]$$

dır. Eş. 2.76 nın kökleri

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1 + \sqrt{8x + 1}}{2} \\ \varphi'(x) &= \frac{1 - \sqrt{8x + 1}}{2} \end{aligned} \quad [2.77]$$

dür ve böylece

$$\begin{aligned} \varphi(x) + \varphi'(x) &= 1 \\ \varphi(x)\varphi'(x) &= -2x \\ \varphi(x) - \varphi'(x) &= \sqrt{8x + 1} = \Delta(x) \end{aligned} \quad [2.78]$$

eşitlikleri elde edilir. Burada

$$\Delta(1) = 3$$

tür. Ayrıca

$$\begin{aligned}\varphi^2(x) + 2x &= \Delta(x)\varphi(x) \\ \varphi^2(x) + 2x &= -\Delta(x)\varphi^1(x)\end{aligned}\quad [2.79]$$

eşitlikleri yazılabilir.

Çizelge 2.2. Jacobsthal Polinomları $\{J_n(x)\}$: $0 \leq n \leq 10$

$J_0(x) = 0$	$J_6(x) = 1 + 8x + 12x^2$
$J_1(x) = 1$	$J_7(x) = 1 + 10x + 24x^2 + 8x^3$
$J_2(x) = 1$	$J_8(x) = 1 + 12x + 40x^2 + 32x^3$
$J_3(x) = 1 + 2x$	$J_9(x) = 1 + 14x + 60x^2 + 80x^3 + 16x^4$
$J_4(x) = 1 + 4x$	$J_{10}(x) = 1 + 16x + 84x^2 + 160x^3 + 80x^4$
$J_5(x) = 1 + 6x + 4x^2$	

Çizelge 2.3. Jacobsthal - Lucas Polinomları $\{j_n(x)\}$: $0 \leq n \leq 10$

$j_0(x) = 2$	$j_6(x) = 1 + 2x + 36x^2 + 16x^3$
$j_1(x) = 1$	$j_7(x) = 1 + 14x + 56x^2 + 56x^3$
$j_2(x) = 1 + 4x$	$j_8(x) = 1 + 16x + 80x^2 + 128x^3 + 32x^4$
$j_3(x) = 1 + 6x$	$j_9(x) = 1 + 18x + 108x^2 + 240x^3 + 144x^4$
$j_4(x) = 1 + 8x + 8x^2$	$j_{10}(x) = 1 + 20x + 140x^2 + 400x^3 + 400x^4 + 64x^5$
$j_5(x) = 1 + 10x + 20x^2$	

2.6.1. Jacobsthal polinomlarının temel özellikleri

Binet Formu:

$$J_n(x) = \frac{\varphi^n(x) - \varphi^{1^n}(x)}{\Delta(x)} \quad [2.80]$$

$$j_n(x) = \varphi^n(x) + \varphi^{1^n}(x) \quad [2.81]$$

Simson Formülleri:

$$J_{n+1}(x)J_{n-1}(x) - J_n^2(x) = (-1)^n(2x)^{n+1} \quad [2.82]$$

$$\begin{aligned} j_{n+1}(x)j_{n-1}(x) - j_n^2(x) &= -\Delta^2(x)(-1)^n(2x)^{n-1} \\ &= -\Delta^2(x)(J_{n+1}(x)J_{n-1}(x) - J_n^2(x)) \end{aligned} \quad [2.83]$$

Toplam Formülleri:

$$\sum_{i=1}^n J_i(x) = \frac{J_{n+2}(x) - 1}{2x} \quad [2.84]$$

$$\sum_{i=1}^n j_i(x) = \frac{j_{n+2}(x) - 1}{2x} \quad [2.85]$$

Bazı Özel Bağlantılar:

$$\bullet \quad j_n(x)J_n(x) = J_{2n}(x) \quad (\text{Eş. 2.80 ve 2.81 den}) \quad [2.86]$$

$$\bullet \quad \Delta^2(x)J_n(x) = j_{n+1}(x) + 2xj_{n-1}(x) \quad (\text{Eş. 2.79, 2.80 ve 2.81 den}) \quad [2.87]$$

$$\bullet \quad \Delta(x)J_n(x) + j_n(x) = 2\alpha^n(x) \quad (\text{Eş. 2.80 ve 2.81 den}) \quad [2.88]$$

$$\bullet \quad \Delta(x)J_n(x) - j_n(x) = -2\beta^n(x) \quad (\text{Eş. 2.80 ve 2.81 den}) \quad [2.89]$$

$$\bullet \quad J_m(x)j_n(x) + J_n(x)j_m(x) = 2j_{m+n}(x) \quad (\text{Eş. 2.80 ve 2.81 den}) \quad [2.90]$$

$$\bullet \quad j_m(x)j_n(x) + \Delta^2(x)J_m(x)J_n(x) = 2j_{m+n}(x) \quad (\text{Eş. 2.80 ve 2.81 den}) \quad [2.91]$$

(4, 15, 16, 18)

3. PELL DİZİLERİNİN MATRİS ÜRETEÇLERİ

Fibonacci dizileri ile Pell dizilerinin birçok özellikleri ortaktır ve ikisinde de başlangıç değerleri aynıdır. Fakat rekürans bağıntıları farklıdır.

$\{U_n\}$ genel dizisi,

$$U_{n+2} = bU_{n+1} + U_n, \quad U_0 = 0, \quad U_1 = 1 \quad [3.1]$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Bu dizi özel durum olarak hem Fibonacci dizisini ($b = 1$) hem de Pell dizisini ($b = 2$) içerir.

Genel dizinin üreteç matrisi

$$B = \begin{bmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad [3.2]$$

dir.

3.1. Teorem

$B = \begin{bmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi, $\{U_n\}$ genel dizisinin üreteç matrisi olmak üzere,

$$B^n = \begin{bmatrix} U_{n+1} & U_n \\ U_n & U_{n-1} \end{bmatrix}$$

dir.

İspat

İspatımızı n üzerinde tümevarımla yapalım. $n = 1$ için

Fonksiyonun polinom gösterimine dayalı herhangi bir $f(B) = A = [a_{ij}]$ fonksiyonunun a_{ij} elemanlarını belirleyeceğiz.

Daha sonra $\widehat{A} = [\widehat{a}_{ij}] = f(B)$ kuvvet serilerinin açılımı yoluyla $f(B)$ nin bulunabileceği f fonksiyonlarının kümesini göz önüne alalım ve a_{ij} ile \widehat{a}_{ij} yi bazı i ve j değerleri için eşitleyelim ki Fibonacci ve Pell özelliklerini elde edelim.

İlk olarak T nin t tane farklı $\mu_\ell (\ell = 0, 1, \dots, t-1)$ özdeğeri varsa, c_i ler katsayı olmak üzere, analitik f fonksiyonunun polinom gösterimi

$$f(T) = \sum_{i=0}^{t-1} c_i T^i \quad [3.3]$$

şeklindedir.

T nin görüntüsü üzerinde tanımlı f fonksiyonunun c_i katsayıları, t denklemlilik ve t bilinmeyenli,

$$\sum_{i=0}^{t-1} c_i \mu_\ell^i = f(\mu_\ell) \quad (\ell = 0, 1, \dots, t-1) \quad [3.4]$$

sisteminin çözümüyle bulunur.

$\{U_n\}$ genel dizisi için yazdığımız $y^2 = by + 1$ eşitliğini hatırlayalım. Burada

$$\Delta = \sqrt{b^2 + 4} \quad [3.5]$$

olur. Eş. 3.2 deki B nin özdeğerleri de

$$\alpha_b = (b + \Delta)/2, \quad \beta_b = (b - \Delta)/2 \quad [3.6]$$

olarak bulunur. Eş. 3.5 ve 3.6 yı kullanarak $\alpha_b \cdot \beta_b = -1$, $\beta_b = -1/\alpha_b$ eşitlikleri-

ni elde ederiz.

Bu özdeğerler $b = 1$ iken Fibonacci sayılarını üreten Q matrisinin farklı özde-

$$\text{ğerlerine eşit, yani } \alpha_1 = \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \beta_1 = \Phi' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2};$$

$b = 2$ iken Pell sayılarını üreten M matrisinin farklı özdeğerlerine eşit, yani

$$\alpha_2 = \psi = \frac{2 + \sqrt{8}}{2}, \beta_2 = \psi' = \frac{2 - \sqrt{8}}{2} \text{ olur.}$$

Eş. 3.3 ve 3.4 den katsayıları c_0 ve c_1 olan

$$f(B) = c_0 I + c_1 B \quad [3.7]$$

polinom gösterimi elde edilir. Burada I ; 2×2 birim matristir.

B nin görüntüsü üzerindeki f fonksiyonunun katsayıları c_0 ve c_1

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 \alpha_b &= f(\alpha_b) \\ c_0 + c_1 \beta_b &= f(\beta_b) \end{aligned} \quad [3.8]$$

sisteminin çözümüyle bulunur. Aslında Eş. 3.8 den $c_0 f(\alpha_b) - c_1 \alpha_b$ ve $c_1 = (f(\beta_b) - c_0)/\beta_b$ kullanırsak,

$$\begin{aligned} c_0 &= f(\alpha_b) - c_1 \alpha_b \\ c_0 &= f(\alpha_b) - \frac{f(\beta_b) - c_0}{\beta_b} \alpha_b \\ \beta_b c_0 &= \beta_b f(\alpha_b) - \alpha_b f(\beta_b) + \alpha_b c_0 \\ (\beta_b - \alpha_b) c_0 &= \beta_b f(\alpha_b) - \alpha_b f(\beta_b) \\ c_0 &= (\alpha_b f(\beta_b) - \beta_b f(\alpha_b)) / \Delta \end{aligned} \quad [3.9]$$

$$c_1 = \frac{f(\beta_b) - c_0}{\beta_b}$$

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{f(\beta_b) - f(\alpha_b) - c_1 \alpha_b}{\beta_b} \\
\beta_b c_1 &= f(\beta_b) - f(\alpha_b) - c_1 \alpha_b \\
(\beta_b - \alpha_b) c_1 &= f(\beta_b) - f(\alpha_b) \\
c_1 &= (f(\alpha_b) - f(\beta_b)) / \Delta \tag{3.9'}
\end{aligned}$$

Eş. 3.7, 3.9 ve 3.9' nü kullanırsak,

$$\begin{aligned}
f(B) = A &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\
&= c_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_0 + bc_1 & c_1 \\ c_1 & c_0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} (\alpha_b - b)f(\beta_b) - (\beta_b - b)f(\alpha_b) & f(\alpha_b) - f(\beta_b) \\ f(\alpha_b) - f(\beta_b) & \alpha_b f(\beta_b) - \beta_b f(\alpha_b) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \alpha_b f(\alpha_b) - \beta_b f(\beta_b) & f(\alpha_b) - f(\beta_b) \\ f(\alpha_b) - f(\beta_b) & \alpha_b f(\beta_b) - \beta_b f(\alpha_b) \end{bmatrix} \tag{3.10}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Pell sayılarını üreten

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisini gözönüne alalım.

M nin farklı özdeğerlerinin $\psi = \frac{2 + \sqrt{8}}{2}$ ve $\psi' = \frac{2 - \sqrt{8}}{2}$ olduğunu biliyoruz.

3.1. Sonuç

$b = 2$ için $\alpha_2 = \psi = \frac{2 + \sqrt{8}}{2}$, $\beta_2 = \psi' = \frac{2 - \sqrt{8}}{2}$ olacağından

$$f(M) = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} \psi f(\psi) - \psi' f(\psi') & f(\psi) - f(\psi') \\ f(\psi) - f(\psi') & \psi f(\psi') - \psi' f(\psi) \end{bmatrix} \quad [3.11]$$

eşitliği elde edilir.

3.1. Karekök Matrisi

Özel olarak ve Eş. 3.10 u kullanarak f ye karekök fonksiyonu olarak alırsak, $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} a_{11} &= (\alpha_b f(\alpha_b) - \beta_b f(\beta_b))/\Delta \\ &= (\alpha_b \sqrt{\alpha_b} - i(-1/\alpha_b)(\sqrt{1/\alpha_b}))/\Delta \\ &= (\alpha_b \sqrt{\alpha_b} + i(\sqrt{1/\alpha_b^3}))/\Delta \end{aligned} \quad [3.12]$$

$$\begin{aligned} a_{12} = a_{21} &= (f(\alpha_b) - f(\beta_b))/\Delta \\ &= (\sqrt{\alpha_b} - i\sqrt{1/\alpha_b})/\Delta \end{aligned} \quad [3.12']$$

$$\begin{aligned} a_{22} &= (\alpha_b f(\beta_b) - \beta_b f(\alpha_b))/\Delta \\ &= (i\alpha_b \sqrt{1/\alpha_b} - (-1/\alpha_b)\sqrt{\alpha_b})/\Delta \\ &= (\sqrt{1/\alpha_b} + i\sqrt{\alpha_b})/\Delta \end{aligned} \quad [3.12'']$$

($\alpha_b \cdot \beta_b = -1$ dir. Dolayısıyla $\beta_b = -1/\alpha_b$ dir.)

eşitlikleri B nin karekökünü tanımlar.

B nin karekökünü elde etmek için başka bir yol ise $\widehat{A}^2 = B$ matris denklemini çözmektir.

$$\begin{bmatrix} \widehat{a}_{11} & \widehat{a}_{12} \\ \widehat{a}_{21} & \widehat{a}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \widehat{a}_{11} & \widehat{a}_{12} \\ \widehat{a}_{21} & \widehat{a}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad [3.13]$$

Buradan

$$\begin{aligned} \widehat{a}_{11}^2 + \widehat{a}_{12}\widehat{a}_{21} &= b \\ \widehat{a}_{11}\widehat{a}_{12} + \widehat{a}_{12}\widehat{a}_{22} &= 1 \\ \widehat{a}_{21}\widehat{a}_{11} + \widehat{a}_{22}\widehat{a}_{21} &= 1 \\ \widehat{a}_{21}\widehat{a}_{12} + \widehat{a}_{22}^2 &= 0 \end{aligned} \quad [3.14]$$

sistemini elde ederiz. İkinci ve üçüncü eşitliklerden

$$\begin{aligned} \widehat{a}_{11}\widehat{a}_{12} + \widehat{a}_{12}\widehat{a}_{22} &= \widehat{a}_{21}\widehat{a}_{11} + \widehat{a}_{22}\widehat{a}_{21} \\ \widehat{a}_{12}(\widehat{a}_{21} + \widehat{a}_{22}) &= \widehat{a}_{21}(\widehat{a}_{11} + \widehat{a}_{22}) \\ \widehat{a}_{12} &= \widehat{a}_{21} \end{aligned}$$

yazarız. (\sqrt{B} simetrik bir matris olduğundan bu beklenen bir durumdu.) Bu yüzden dördüncü eşitliği kullanarak $\widehat{a}_{12} = \widehat{a}_{21} = \pm ia_{22}$ eşitliğini elde ederiz. Birinci ve ikinci eşitliği kullanarak \widehat{a}_{11} i bulalım.

$$\begin{aligned} \widehat{a}_{11}^2 + \widehat{a}_{12}\widehat{a}_{21} &= b \implies \widehat{a}_{11}^2 - \widehat{a}_{22}^2 = b \\ \widehat{a}_{11}\widehat{a}_{12} + \widehat{a}_{12}\widehat{a}_{22} &= 1 \implies \widehat{a}_{11} + \widehat{a}_{22} = 1/\widehat{a}_{12} \end{aligned}$$

Elde ettiğimiz iki eşitliği birbirine bölersek, $\widehat{a}_{11} = (1 \pm bi)\widehat{a}_{22}$ olarak bulunur. Buradan Eş. 3.14 deki sistemin çözümleri,

$$\begin{aligned} \widehat{a}_{11} &= (1 \pm bi)\widehat{a}_{22} \\ \widehat{a}_{12} = \widehat{a}_{21} &= \pm i\widehat{a}_{22} \\ \widehat{a}_{22} &= \pm \sqrt{(-b \mp 2i)/\Delta} \end{aligned} \quad [3.15]$$

olur.

$$-b \pm 2i = \Delta e^{i(\pi \pm \arctan(2/b))}$$

olduğundan, \hat{a}_{22} kompleks elemanı

$$\hat{a}_{22} = (1/\Delta)^{1/2} e^{i(\pi \pm \arctan(2/b))/2 + ik\pi}, \quad (k = 0, 1)$$

şeklinde yazılabilir.

3.2. Teorem

$\alpha_b, \{U_n\}$ genel dizisinin üreteç matrisi B nin pozitif özdeğeri olmak üzere,

$$\alpha_b = 1/\left(\Delta \sin^2 \frac{\arctan(2/b)}{2}\right)$$

dir.

İspat

$$\hat{a}_{22} = (1/\Delta)^{1/2} e^{i(\pi \pm \arctan(2/b))/2 + ik\pi}, \quad (k = 0, 1) \text{ in reel kısmı}$$

$$\text{Re}(\hat{a}_{22}) = (-1)^k (1/\Delta)^{1/2} \cos \frac{\pi \pm \arctan(2/b)}{2}, \quad (k = 0, 1)$$

şeklindedir.

a_{22} ve \hat{a}_{22} nin reel kısımlarını eşitleyip iki tarafın karesini alırsak,

$$\left(\sqrt{1/(\Delta^2 \alpha_b)}\right)^2 = \left((-1)^k (1/\Delta)^{1/2} \cos \frac{\pi \pm \arctan(2/b)}{2}\right)^2$$

$$1/(\Delta^2 \alpha_b) = (1/\Delta) \sin^2 \frac{\arctan(2/b)}{2}$$

eşitliği elde edilir. Böylece

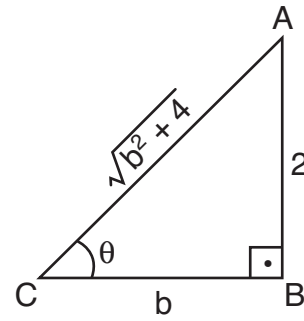
$$\alpha_b = 1/\left(\Delta \sin^2 \frac{\arctan(2/b)}{2}\right)$$

şeklinde geometrik özellik bulunur.

Burada dikkat edilmesi gereken nokta $\alpha_b = 1/\left(\Delta \sin^2 \frac{\arctan(2/b)}{2}\right)$ eşitliğinin doğrudan gerçekleştirilebilir olmasıdır.

Trigonometride çok iyi bilinen $\sin^2(x/2) = (1 - \cos x)/2$ eşitliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\arctan(2/b)}{2} &= \frac{1 - \cos\left(\overbrace{\arctan(2/b)}^{\theta}\right)}{2} \\ &= \frac{1 - \cos\theta}{2} \\ &= \frac{1 - b/\sqrt{b^2 + 4}}{2} \\ &= \frac{1 - b/\Delta}{2} \\ &= \frac{\Delta - b}{2\Delta} \\ &= \frac{-\beta_b}{\Delta} \\ &= \frac{1}{\alpha_b \Delta} \end{aligned}$$



($\tan\theta=2/b$ olduğundan $\arctan(2/b) = \theta$ dir.)

ifadesini elde ederiz.

3.3. Teorem

$\alpha_b, \{U_n\}$ genel dizisinin üreteç matrisi B nin pozitif özdeğeri olmak üzere,

$$\alpha_b = \Delta \cos^2 \frac{\arctan(2/b)}{2}$$

dir.

İspat

$\hat{a}_{22} = (1/\Delta)^{1/2} e^{i(\pi \pm \arctan(2/b))/2 + ik\pi}$, ($k = 0, 1$) in sanal kısmı

$$\text{Im}(\hat{a}_{22}) = (-1)^k (1/\Delta)^{1/2} \sin \frac{\pi \pm \arctan(2/b)}{2}, \quad (k = 0, 1)$$

şeklindedir.

a_{22} ve \hat{a}_{22} nin sanal kısımlarını eşitleyip iki tarafın karesini alırsak,

$$\left(\sqrt{\alpha_b / \Delta^2} \right)^2 = \left((-1)^k (1/\Delta)^{1/2} \sin \frac{\pi \pm \arctan(2/b)}{2} \right)^2$$

$$\alpha_b / \Delta^2 = (1/\Delta) \cos^2 \frac{\arctan(2/b)}{2}$$

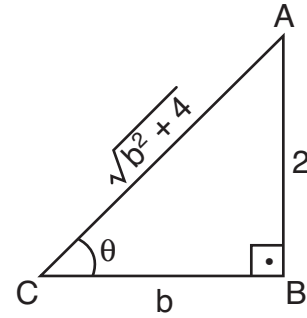
eşitliği elde edilir. Böylece

$$\alpha_b = \Delta \cos^2 \frac{\arctan(2/b)}{2}$$

şeklinde, 3.2. Teoreme göre denk bir eşitlik elde edilir. Burada dikkat edilmesi gereken nokta $\alpha_b = \Delta \cos^2 \frac{\arctan(2/b)}{2}$ eşitliğinin doğrudan gerçekleştirilebilir olmasıdır.

Trigonometride çok iyi bilinen $\cos^2(x/2) = (1 + \cos x)/2$ eşitliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}
\cos^2 \frac{\arctan(2/b)}{2} &= \frac{1 - \cos(\overbrace{\arctan(2/b)}^{\theta})}{2} \\
&= \frac{1 + \cos\theta}{2} \\
&= \frac{1 + b/\sqrt{b^2 + 4}}{2} \\
&= \frac{1 + b/\Delta}{2} \\
&= \frac{\Delta + b}{2\Delta} \\
&= \frac{\alpha_b}{\Delta}
\end{aligned}$$



($\tan\theta = 2/b$ olduğundan
 $\arctan(2/b) = \theta$ dir.)

olduğunu gerçekleyebiliriz.

3.2. Sonuç

Fibonacci sayılarını üreten Q matrisinin pozitif özdeğeri Φ olmak üzere,
 $\alpha_1 = \Phi$ olduğundan

$$\Phi = 1/\left(\sqrt{5} \sin^2 \frac{\arctan 2}{2}\right)$$

dir.

3.3. Sonuç

Pell sayılarını üreten M matrisinin pozitif özdeğeri ψ olmak üzere, $\alpha_2 = \psi$ olduğundan

$$\psi = 1/\left(\sqrt{8} \sin^2 \frac{\arctan 1}{2}\right)$$

dir.

3.4. Sonuç

Fibonacci sayılarını üreten Q matrisinin pozitif özdeğeri Φ olmak üzere, $\alpha_1 = \Phi$ olduğundan

$$\Phi = \sqrt{5} \cos^2 \frac{\arctan 2}{2}$$

dir.

3.5. Sonuç

Pell sayılarını üreten M matrisinin pozitif özdeğeri ψ olmak üzere, $\alpha_2 = \psi$ olduğundan

$$\psi = \sqrt{8} \sin^2 \frac{\arctan 1}{2}$$

dir.

3.2. Üstel Fonksiyon Matrisi

Özel olarak f yi üstel fonksiyon olarak alırsak, Eş. 3.10 dan

$$\begin{aligned} a_{11} &= (\alpha_b e^{\alpha b} - \beta_b e^{\beta b})/\Delta \\ a_{12} &= a_{21} = (e^{\alpha b} - e^{\beta b})/\Delta \\ a_{22} &= (\alpha_b e^{\beta b} - \beta_b e^{\alpha b})/\Delta \end{aligned} \quad [3.16]$$

olur.

$\widehat{A} = [\widehat{a}_{ij}] = \exp B$ yi elde etmenin alternatif yollarından birisi de kuvvet serilerinin açılımını

$$\exp B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!} \quad [3.17]$$

kullanmaktadır. 3.1. Teoremden kolayca görülebileceği gibi

$$\begin{aligned} \hat{a}_{11} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_{n+1}}{n!} \\ \hat{a}_{12} &= \hat{a}_{21} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_n}{n!} \\ \hat{a}_{22} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_{n-1}}{n!} \end{aligned} \quad [3.18]$$

dir. Bundan dolayı \hat{A} ile A nın karşılıklı elemanlarını eşitlersek, Eş. 3.16 ve 3.17 yi de kullanarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_n}{n!} = (e^{\alpha_b} - e^{\beta_b})/\Delta \quad [3.19]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_{n+1}}{n!} = (\alpha_b e^{\alpha_b} - \beta_b e^{\beta_b})/\Delta \quad [3.20]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_{n-1}}{n!} = (\alpha_b e^{\beta_b} - \beta_b e^{\alpha_b})/\Delta \quad [3.21]$$

eşikliklerini elde ederiz.

3.6. Sonuç

Fibonacci sayılarını üreten Q matrisinin özdeğerleri Φ ve Φ' olmak üzere, $\alpha_1 = \Phi$ ve $\beta_1 = \Phi'$ olduğundan,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{n!} = (e^{\Phi} - e^{\Phi'})/\sqrt{5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_{n+1}}{n!} = (\Phi e^{\Phi} - \Phi' e^{\Phi'}) / \sqrt{5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_{n-1}}{n!} = (\Phi e^{\Phi'} - \Phi' e^{\Phi}) / \sqrt{5}$$

Fibonacci özellikleri elde edilir.

3.4. Teorem

L_n , Lucas sayılarını belirtmek üzere,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{n!} = e^{\Phi} + e^{\Phi'}$$

dür.

İspat

L_n , Lucas sayılarını belirtmek üzere, $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ olduğunu biliyoruz.

3.6. Sonuçtaki son iki eşitliği toplarsak,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_{n+1}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_{n-1}}{n!} &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\Phi e^{\Phi} - \Phi' e^{\Phi'} + \Phi e^{\Phi'} - \Phi' e^{\Phi}) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{n!} &= \frac{1}{\sqrt{5}} ((\Phi - \Phi') e^{\Phi} + (\Phi - \Phi') e^{\Phi'}) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{n!} &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\sqrt{5} e^{\Phi} + \sqrt{5} e^{\Phi'}) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{n!} &= e^{\Phi} + e^{\Phi'} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

3.7. Sonuç

Pell sayılarını üreten M matrisinin özdeğerleri ψ ve ψ' olmak üzere, $\alpha_2 = \psi$ ve $\beta_2 = \psi'$ olduğundan,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n}{n!} = (e^{\psi} - e^{\psi'}) / (2\sqrt{2})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_{n+1}}{n!} = (\psi e^{\psi} - \psi' e^{\psi'}) / (2\sqrt{2})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_{n-1}}{n!} = (\psi e^{\psi'} - \psi' e^{\psi}) / (2\sqrt{2})$$

Pell özellikleri bulunur.

3.5. Teorem

R_n , Pell - Lucas sayılarını belirtmek üzere,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_n}{n!} = e(e^{\sqrt{2}} + e^{-\sqrt{2}})$$

dir.

İspat

R_n , Pell - Lucas sayılarını belirtmek üzere, $R_n = P_{n-1} + P_{n+1}$ olduğunu biliyoruz. 3.7. Sonuçtaki son iki eşitliği toplarsak,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_{n+1}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_{n-1}}{n!} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (\psi e^{\psi} - \psi' e^{\psi'} + \psi e^{\psi'} - \psi' e^{\psi}) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_n}{n!} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} ((\psi - \psi') e^{\psi} + (\psi - \psi') e^{\psi'}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_n}{n!} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(2\sqrt{2}e^{\psi} + 2\sqrt{2}e^{\psi'}) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_n}{n!} &= e^{\psi} + e^{\psi'} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_n}{n!} &= e^{1+\sqrt{2}} + e^{1-\sqrt{2}} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_n}{n!} &= e(e^{\sqrt{2}} + e^{-\sqrt{2}})\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

3.3. Diğer Fonksiyonel Matrisler

Şimdi de

$$\sin B = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{B^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad [3.22]$$

$$\cos B = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{B^{2n}}{(2n)!} \quad [3.23]$$

$$\sinh B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad [3.24]$$

$$\cosh B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^{2n}}{(2n)!} \quad [3.25]$$

şeklindeki kuvvet serileri açılımlarını gözönüne alalım. Öncekilere benzer bir mantık kullanarak buradan da $\{U_n\}$ genel dizisine ait birçok özellik elde edebiliriz. Eş. 3.10 dan A matrisinin a_{ij} elemanlarını

$$a_{11} = (\alpha_b f(\alpha_b) - \beta_b f(\beta_b)) / \Delta$$

$$a_{12} = a_{21} = (f(\alpha_b) - f(\beta_b)) / \Delta$$

$$a_{22} = (\alpha_b f(\beta_b) - \beta_b f(\alpha_b))/\Delta$$

şeklinde yazarız. $f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n$ olmak üzere,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n U_n = (f(\alpha_b) - f(\beta_b))/\Delta \quad [3.26]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n U_{n+1} = (\alpha_b f(\alpha_b) - \beta_b f(\beta_b))/\Delta \quad [3.27]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n U_{n-1} = (\alpha_b f(\beta_b) - \beta_b f(\alpha_b))/\Delta \quad [3.28]$$

genel formundaki özellikleri elde ederiz. Bu kısımdaki $\{U_n\}$ genel dizisiyle ilgili özellikleri kullanırsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{U_{2n+1}}{(2n+1)!} = (\sin\alpha_b - \sin\beta_b)/\Delta \quad [3.29]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{U_{2n}}{(2n)!} = (\cos\alpha_b - \cos\beta_b)/\Delta \quad [3.30]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_{2n+1}}{(2n+1)!} = (\sinh\alpha_b - \sinh\beta_b)/\Delta \quad [3.31]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_{2n}}{(2n)!} = (\cosh\alpha_b - \cosh\beta_b)/\Delta \quad [3.32]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_{2n+1}}{(2n)!} = (\alpha_b \cosh\alpha_b - \beta_b \cosh\beta_b)/\Delta \quad [3.33]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_{2n-1}}{(2n)!} = (\alpha_b \cosh \beta_b - \beta_b \cosh \alpha_b) / \Delta \quad [3.34]$$

şeklindeki önemli $\{U_n\}$ genel dizi özelliklerini elde ederiz.

3.8. Sonuç

Fibonacci sayılarını üreten Q matrisinin özdeğeri Φ ve Φ' olmak üzere, $\alpha_1 = \Phi$ ve $\beta_1 = \Phi'$ olduğundan,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{F_{2n+1}}{(2n+1)!} = (\sin \Phi - \sin \Phi') / \sqrt{5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{F_{2n}}{(2n)!} = (\cos \Phi - \cos \Phi') / \sqrt{5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_{2n+1}}{(2n+1)!} = (\sinh \Phi - \sinh \Phi') / \sqrt{5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_{2n}}{(2n)!} = (\cosh \Phi - \cosh \Phi') / \sqrt{5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_{2n+1}}{(2n)!} = (\Phi \cosh \Phi - \Phi' \cosh \Phi') / \sqrt{5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_{2n-1}}{(2n)!} = (\Phi \cosh \Phi' - \Phi' \cosh \Phi) / \sqrt{5}$$

şeklinde önemli Fibonacci özelliklerini elde ederiz.

3.6. Teorem

L_n Lucas sayılarını belirtmek üzere,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_{2n}}{(2n)!} = \cosh\Phi + \cosh\Phi'$$

dır.

İspat

L_n , Lucas sayılarını belirtmek üzere, $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ olduğunu biliyoruz.

3.8. Sonuçtaki son iki eşitliği toplarsak,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_{2n+1}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_{2n-1}}{(2n)!} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi \cos\Phi - \Phi' \cos\Phi' + \Phi \cos\Phi' - \Phi' \cos\Phi) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_{2n}}{(2n)!} &= \frac{1}{\sqrt{5}}((\Phi - \Phi') \cosh\Phi + (\Phi - \Phi') \cosh\Phi') \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_{2n}}{(2n)!} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{5} \cosh\Phi + \sqrt{5} \cosh\Phi') \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_{2n}}{(2n)!} &= \cosh\Phi + \cosh\Phi' \end{aligned}$$

özelliğini elde ederiz.

3.9. Sonuç

Pell sayılarını üreten M matrisinin özdeğerleri ψ ve ψ' olmak üzere, $\alpha_2 = \psi$ ve $\beta_2 = \psi'$ olduğundan,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{P_{2n+1}}{(2n+1)!} = (\sin\psi - \sin\psi')/(2\sqrt{2})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{P_{2n}}{(2n)!} = (\cos\psi - \cos\psi')/(2\sqrt{2})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_{2n+1}}{(2n+1)!} = (\sinh\psi - \sinh\psi')/(2\sqrt{2})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_{2n}}{(2n)!} = (\cosh\psi - \cosh\psi')/(2\sqrt{2})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_{2n+1}}{(2n)!} = (\psi \cosh\psi - \psi' \cosh\psi')/(2\sqrt{2})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_{2n-1}}{(2n)!} = (\psi \cosh\psi' - \psi' \cosh\psi)/(2\sqrt{2})$$

şeklinde önemli Pell özelliklerini elde ederiz.

3.7. Teorem

R_n Pell - Lucas sayılarını belirtmek üzere,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_{2n}}{(2n)!} = \cosh\psi + \cosh\psi'$$

dir.

İspat

R_n , Pell - Lucas sayılarını belirtmek üzere, $R_n = P_{n-1} + P_{n+1}$ olduğunu biliyoruz. 3.9. Sonuçtaki son iki eşitliği toplarsak,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_{2n+1}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_{2n-1}}{(2n)!} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (\psi \cos\psi - \psi' \cos\psi' + \psi \cos\psi' - \psi' \cos\psi) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_{2n}}{(2n)!} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} ((\psi - \psi') \cosh\psi + (\psi - \psi') \cosh\psi') \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_{2n}}{(2n)!} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (2\sqrt{2} \cosh\psi + 2\sqrt{2} \cosh\psi') \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_{2n}}{(2n)!} &= \cosh\psi + \cosh\psi' \end{aligned}$$

özelliğini elde ederiz.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, matrislerin ve Fibonacci sayılarının özelliklerinden faydalanaarak bazı özel matrisler ile Pell sayıları arasındaki ilişkileri ele aldık. Özel fonksiyonlar kullanarak Pell dizilerine ait yeni eşitliklere ulaştık. Bu çalışmada karekök matrisi, üstel fonksiyon matrisi gibi bazı elementer matris fonksiyonlarını kullandık. Çalışmayı $B_{k,x}$ in hiperbolik ve dairesel fonksiyon matrislerini, ters fonksiyon matrislerini ve diğer elementer matris fonksiyonlarını ekleyerek genişletebiliriz.

Bu çalışmada 2×2 , Q, M ve B matrislerini kullandık. 3×3 tipinde matrisler kullanılarak farklı bir çalışma yaparsak, yeni eşitliklere ulaşabiliriz.

KAYNAKLAR

1. Gantmacher, F. R., "The Theory Matrices", **Chelsea Publishing Company**, United States of America, 95-116 (1959).
2. Huntley, H. E., "The Divine Proportion", **Dover Publications**, New York, 23-30 (1970).
3. Bicknell, Marjorie, "A Primer on the Pell Sequence an Related Sequences", **The Fibonacci Quarterly**, 13(4) : 345-349 (1975).
4. Ercolano, Joseph, "Golden Sequences of Matrices with Applications to Fibonacci Algebra", **The Fibonacci Quarterly**, 14(5) : 419-426 (1976).
5. Hoggatt, V. E. and Bicknell, Marjorie, "Convolution Arrays for Jacobsthal and Fibonacci Polynomials", **The Fibonacci Quarterly**, 16(5) : 385-402 (1978).
6. Ercolano, Joseph, "Matrix Generators of Pell Sequences", **The Fibonacci Quarterly**, 17(1) : 71-77 (1979).
7. Wegener, Delano P., "An Application of Pell's Equation", **The Fibonacci Quarterly**, 19(2) : 450-451 (1981).
8. Walton, J. E. And Horadam, A. F., "Generalized Pell Polynomials and Other Polynomials" **The Fibonacci Quarterly**, 22(4) : 336-339 (1984).
9. Horadam, A. F. and Mahon, Bro. J. M., "Pell and Pell-Lucas Polynomials", **The Fibonacci Quarterly**, 23(1) : 7-20 (1985).
10. Bergum, G. E., Horadam, A. F., Moore, S. D. and Bennett, Larry, "Jacobsthal Polynomials and a Conjecture Concerning Fibonacci-Like Matrices", **The Fibonacci Quarterly**, 23(3) : 240-248 (1985).
11. Mahon, Bro. J. M. and Horadam, A. F., "Matrix and Other Summation Techniques for Pell Polynomials", **The Fibonacci Quarterly**, 24(4) : 290-309 (1986).

12. Mahon, Bro. J. M. and Horadam, A. F., "Pell Polynomial Matrices", **The Fibonacci Quarterly**, 25(1) : 21-28 (1987).
13. Horadam, A. F. and Mahon, Bro. J. M., "Mixed Pell Polynomials", **The Fibonacci Quarterly**, 25(4) : 291-299 (1987).
14. Filipponi, Piero and Horadam, Alwyn F., "A Matrix Approach to Certain Identities", **The Fibonacci Quarterly**, 26(2) : 115-126 (1988).
15. Vajda, S., "Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section", **Halsted Press**, New York, 9-51 (1989).
16. Horadam, A. F., "Jacobsthal Representation Numbers", **The Fibonacci Quarterly**, 34(1) : 40-54 (1996).
17. Horadam, A. F., "Jacobsthal Representation Polynomials", **The Fibonacci Quarterly**, 35(2) : 137-148 (1997).
18. Dunlap, Richard A., "The Golden Ratio and Fibonacci Numbers", **World Scientific**, Singapore, 1-13 (1997)
19. Swamy, M. N. S., "A Generalized of Jacobsthal Polynomials", **The Fibonacci Quarterly**, 37(2) : 141-142 (1999).
20. Swamy, M. N. S., "Network Properties of a Pair of Generalized Polynomials", **The Fibonacci Quarterly**, 37(4) : 350-360 (1999).
21. Taşçı, Dursun, "Lineer Cebir", **Sel-Ün Vakfı Yayınları**, Konya, 84-212 (1999).
22. Djordjevic', Gospava B., "Generalized Jacobsthal Polynomials", **The Fibonacci Quarterly**, 38(4) : 239-243 (2000).
23. Horadam, A. F., "Convolutions for Jacobsthal-Type Polynomials", **The Fibonacci Quarterly**, 40(3) : 212-222 (2002).

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Kırşehir’de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Ankara’da tamamladı. 1999 yılında Çankaya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik-Bilgisayar bölümünü burslu olarak kazandı. 2003 yılında üniversiteden mezun oldu. Aynı yıl Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik anabilimdalına yüksek lisans öğrencisi olarak kabul edildi. 2004 yılında yüksek lisans derslerini ve seminer çalışmalarını tamamladı. 2005 yılında yüksek lisans tez çalışmalarına başladı.