

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN
NONLOCAL PROBLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Bilal ŞİMŞEK
DANIŞMAN: Yrd.Doç. Dr. Musa ÇAKIR

VAN - 2005

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN
NONLOCAL PROBLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Bilal ŞİMŞEK

VAN - 2005

KABUL ve ONAY SAYFASI

Yrd. Doç. Dr. Musa ÇAKIR danışmanlığında, Bilal ŞİMŞEK tarafından hazırlanan “*Diferensiyel Denklemler İçin Nonlocal Problemlerin Nümerik Çözümleri*” isimli bu çalışma/....../2005 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı’nda *Yüksek Lisans Tezi* olarak kabul edilmiştir.

Başkan :..... İmza:

Üye :..... İmza:

Üye :..... İmza:

Üye :..... İmza:

Üye :..... İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’ nun/....../..... gün ve.....sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN NONLOCAL PROBLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

ŞİMŞEK, Bilal

Yüksek Lisans Tezi , Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Musa ÇAKIR

Kasım 2005, 47 sayfa

Bu çalışmanın amacı, nonlocal sınır şartlı ikinci mertebeden adi diferensiyel denklem için singüler perturbe sınır değer probleminin nümerik çözümlerini bularak bir sonlu fark metodunu göstermektir. Orijinal problem için düzgün şebeke üzerinde üstel baz fonksiyonları ile ağırlık fonksiyonu ve integral biçiminde kalan terim içeren interpolasyon kuadratür formülleri kullanılarak, uygulanan integral özdeşlikleri metodu ile ayrık maksimum normda ε 'a göre birinci mertebeden düzgün yakınsak olan uygun üstel fark şeması kurulmuştur.

Ayrıca nonlocal sınır şartlı ısı denklemi için θ – metodu ele alınmış olup koşullu olmayan kararlılık, çok daha zayıf bir koşula bağlı $\theta \geq \frac{1}{2}$ için ispatlanabilir.

Nonlocal sınır şartları sebebiyle θ – metodu tarafından genelleştirilmiş lineer denklem sistemleri, ilk ve son satırları hariç üç köşegenli bir katsayı matrisine sahiptir. Burada önce lineer sistemlerin bu tipini çözmek için üç etkin algoritma ortaya konulmuş olup basit bir örnek verilerek onların yeterliliği karşılaştırılmıştır.

Nümerik sonuçlar teorik sonuçları örneklerle açıklanmış bir şekilde gösterilmiştir.

Anahtar kelimeler : Nonlocal sınır şartı, Sınır değer problemi, Sınır katı, Singüler pertürbasyon, Uygun üstel sonlu fark şeması

ABSTRACT

NUMERICAL SOLUTIONS OF NONLOCAL PROBLEMS FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS

ŞİMŞEK, Bilal

Msc, Mathematics Science

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Musa ÇAKIR

November 2005, 47 pages

The purpose of this paper is to present a finite difference method for numerical solution of singularly perturbed boundary value problem for second order ordinary differential equation with nonlocal boundary condition.

By the method of integral identities with the use of exponential basis functions and interpolating quadrature rules with the weight and remainder term in integral form an exponentially fitted difference scheme on a uniform mesh is developed which is shown to be ε -uniformly first order accurate in the discrete maximum norm for original problem.

Next the θ -method for the heat equation with nonlocal boundary conditions is discussed. The unconditional stability is proved for $\theta \geq \frac{1}{2}$. Due to the nonlocal boundary conditions, the systems of linear equations generated by the θ -method have a coefficient matrix that is tridiagonal except example is given to compare their efficiency.

Numerical results are presented, which illustrate the theoretical results.

Key words : Boundary layer, Boundary value problem, Exponentially fitted finite difference scheme, Nonlocal boundary condition, Singular perturbation.

ÖN SÖZ

Bu çalışmada diferensiyel denklemler için singüler pertürbe nonlocal sınır değer problemlerin nümerik çözümleri verilmiştir. Bu problem için düzgün şebekelerde üstel katsayılı fark şeması kurulmuş ve bunun özellikleri verilmiştir. Yaklaşık çözümün kesin çözüme ε 'a göre düzgün yakınsak olduğu ispatlanmış ve yakınsama hızı belirlenmiştir. Ayrıca alınan teorik sonuçlar somut örnekler üzerinde gösterilmiştir.

Bu çalışmayı bana veren ve çalışmalarım süresince karşılaştığım güçlüklerde yardımlarını esirgemeyen hocam, sayın Yrd. Doç. Dr. Musa ÇAKIR 'a teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Bilal ŞİMŞEK

İÇİNDEKİLER

	sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖN SÖZ	v
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
ÇİZELGELER DİZİNİ	xi
EKLER DİZİNİ	xiii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	xv
1. GİRİŞ ve KAYNAK BİLDİRİŞLERİ	1
2. TEMEL TANIM ve ÖN BİLGİLER	3
3. DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN NONLOCAL PROBLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ	8
3.1. Kesin Çözüm için Asimtotik Değerlendirmeler	8
3.2. Fark Şemasının Kurulması	9
3.3. Düzgün Hata Değerlendirmeleri	13
4. NONLOCAL SINIR ŞARTLI ISI DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ	18
4.1. Temel Sürece Bakış	18
4.2. θ – Metodu	20
4.3. Yakınsaklık	22
4.4. Etkin Algoritmalar	25
5. TARTIŞMA ve SONUÇ	31
KAYNAKLAR	30
EKLER	34
ÖZ GEÇMİŞ	38

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 3.1. $\varepsilon = 10^{-1}$ için veriler	15
Şekil 3.2. $\varepsilon = 10^{-3}$ için veriler	15
Şekil 3.3. $\varepsilon = 10^{-5}$ için veriler	15
Şekil 3.4. $\varepsilon = 10^{-7}$ için veriler	16

ÇİZELGELER DİZİNİ

	Sayfa
Çizelge 3.1. ϖ_h 'de N=16 ve N=32 için hatalar ve p yakınsaklık oranı	14
Çizelge 4.1. Hata ve zaman mukayeseli veriler	28

EKLER DİZİNİ

	Sayfa
Ek 1. 3. bölüm algoritması için 1. program	32
Ek 2. 3. bölüm algoritması için 2. program	34

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

ε	:	Singüler perturbe
N	:	Şebeke elemanlarının sayısı
h	:	Şebeke genişliği
g_i	:	$g(x)$ fonksiyonunun x_i şebeke noktasındaki değeri
C	:	ε ve h 'dan bağımsız genel sabit
ω_h	:	I bölgesinde düzgün şebeke
$\overline{\omega}_h$		$\omega_h \cup \{x = 0, x = \ell\}$
$\ g\ _{\infty, I}$		I 'da sürekli fonksiyon için maksimum norm
$\ g\ _{\infty, \omega_h}$		ω_h düzgün şebeke normu
$C^n(I)$		I bölgesinde n 'inci sürekli türevlere sahip fonksiyonlar kümesi
θ_i		Fark şemasının üstel katsayısı
l		Sonlu fark operatörü
L		Diferansiyel operatörü
$O(h^k)$		Yakınsama hızı
p		Yakınsaklık mertebesi
u		Diferansiyel denklemin kesin çözümü
y		Diferansiyel denklemin nümerik çözümü
$\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{N-1}$		Sonlu üstel baz fonksiyonları

1. GİRİŞ ve KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Bu çalışma iki problemden oluşmaktadır. Birincisi; singüler perturbe nonlocal sınır değer problemi ikinci olarak ise, nonlocal sınır şartlı ısı problemi ele alınmıştır.

Burada ele alınan singüler perturbe nonlocal sınır değer problemi genel olarak

$$Lu \equiv \varepsilon^2 u'' + \varepsilon a(x)u' - b(x)u = f(x), \quad 0 < x < l \quad (1.1)$$

$$u(0) = \mu_0 \quad (1.2)$$

$$L_1 u \equiv u(l) - \int_{l_0}^{l_1} g(x)u(x)dx = \mu_l, \quad 0 \leq l_0 < l_1 \leq l \quad (1.3)$$

biçiminde yazılabilir.

Burada ε küçük pozitif bir parametre, μ_0 ve μ_l verilen sabitler, $a(x) \geq \alpha > 0$, $b(x) \geq \beta > 0$, $g(x)$ ve $f(x)$; $[0, l]$ aralığında yeteri kadar düzgün fonksiyonlardır. (1.1)-(1.2) probleminin $u(x)$ çözümü genelde $x=0$ ve $x=l$ de ε 'un sıfır civarında sınır katlarına sahiptir.

Diferensiyel denklemler için singüler perturbe olmuş problemler uygulamalı matematik, fizik ve diğer birçok değişik alanlarda kullanılmaktadır. Örneğin; akışkanlar mekaniği, akışkanlar dinamiği, elastik kuantum mekaniği, plastik, kimyasal-reaktör teori, aerodinamik, plazma dinamik, reaksiyon difüzyon süreçleri, arıtılmış-gaz dinamik, oşinografi ve ışın yayan dalgalar v.b. gibi sahalarda çok sık ortaya çıkarlar (Kadalbajoo ve Patidar, 2002; Nayfeh, 1973). Diferensiyel denklemler için nonlocal tipli problemlerin önemi ilk kez Bitsadze ve Samarskii tarafından dikkat çekmiştir. Bu tür problemler ise daha çok ısı geçirme, kuantum mekaniği ve hidromekanik problemlerinde v.b. ortaya çıkmaktadır. Genel halde nonlocal şart, çözümün sınır eğrisinin bir kısımdaki değerleri ile dahili bölgede verilmiş belli eğri üzerindeki değerleri arasında bir bağlantı veriyor (Bitsadze ve Samarskii, 1969). Daha sonra Nahushev (1985), nonlocal sınır değer problemler üzerinde bazı matematiksel özellikleri vermiştir. Cziegis (1988, 1991), birinci tip sınır şartı içeren problemlerin asimtotik ve bazı nitelik özelliklerini incelemiş ve yaklaşık çözüm için fark şemasını kurmuş ve ayrıca problemin nümerik çözümünü bulmuştur. Pao (1998; 2001), nonlocal sınır şartlara sahip reaksiyon-difüzyon denklemleri için çözümlerin asimtotik davranışlarını incelemiş ve bu tür problemler için nümerik çözümler vermiştir. Ayrıca Liu (1999), nonlocal sınır şartlara sahip ısı denklemleri için nümerik çözümler vermiş ve bu nümerik çözümlerin kararlılığı üzerinde durmuştur. Samarskii (1983), Amiraliev (1990) ile Amiraliev ve Çakır (2000, 2002), fark şemaları teorisini geliştirerek singüler perturbe olmuş problemlerin fark şemasının kurulmasında yaklaşık çözümleri incelemiştir. Ayrıca karışık tipli nonlocal sınır şartlara sahip singüler perturbe olmuş problemler için fark şemalarını kurmuşlardır.

Singüler perturbe olmuş problemler, yüksek türevler karşısında küçük pozitif bir parametrenin bulunduğu problemler olarak bilinir. Bu tür problemlerin çözümü, tanım bölgesinin bazı kısımlarında çok hızlı değişime sahip olur. Yani

çözüm ince geçiş katlarında hızlı iken diğer yerlerde düzenli ve yavaş değişir. Bu nedenle de klasik nümerik yöntemlerin kararsızlıkları nedeniyle uygulanması imkansız olur. Böylece singüler perturbe olmuş problemlerin işleyişinde ciddi zorluklar ortaya çıkar. Bu özellikler nümerik çözümde de kendini gösterir (Doolan ve ark., 1980; Roos ve ark., 1996; O'Malley, 1991; Miller ve ark., 1996; Farrell ve ark., 2000). Bu tür zorluklar singüler perturbe olmuş nonlocal problemlerin işleyişinde de ortaya çıkmaktadır. Bunun için singüler perturbe olmuş nonlocal problemler için uygun metotlar geliştirilmesi gerekir.

Bu çalışmalara dayanarak, singüler perturbe olmuş problemler için sonlu bir fark metodu verildi ve nümerik çözümleri bulundu. Verilen metotların kararlılığı, yakınsaklığı ve yakınsama hızı gibi özellikleri incelendi. Ayrıca, bilgisayar programlama dilinde uygun bir program yapılarak, problemin yaklaşık çözümü bulundu.

Bu bölümde ise aşağıdaki gibi tanımlanan sınır şartlı ısı probleminin nümerik çözümü ele alınmıştır.

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= f(x, t), \quad x \in (0, 1), \quad 0 < t \leq T \\ u(0, t) &= \int_0^1 K_0(x) u(x, t) dx + g_0(t) \\ u(1, t) &= \int_0^1 K_1(x) u(x, t) dx + g_1(t) \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in [0, 1] \end{aligned} \quad (0 < t \leq T)$$

Burada f , K_0 , K_1 , g_0 , g_1 ve u_0 keyfi düzgün fonksiyonlar olduğunu varsayıyoruz.

Nonlocal sınır şartlı ısı denklemi için koşullu olmayan kararlılık Ekin (1991) çalışmasında çok daha zayıf bir koşula bağlı ispatlanabilmiştir. (Day, 1982; 1983) çalışmasından hareketle termoelastikitenin yarı-statik teorisinde nonlocal sınır şartlı ısı denklemi için başlangıç-sınır değer problemi ortaya çıkarılabilir. Day'ın sonucu; Friedman (1986), Kawohl (1987) ve diğerleri tarafından birkaç uzay değişkeni vasıtasıyla genel parabolik denklemlere genişletilmiştir. Benzer problemler (Cannon, 1984; Cannon ve ark., 1987; Lin, 1991; Lin ve ark., 1997) çalışmalarında bulunmaktadır. Fairweather ve Lopez-Marcos (1996), verilen nonlocal sınır şartları ile belli başlangıç şartına bağlı yarı lineer parabolik bir denklem için Crank-Nicolson Galerkin metodu ve extrapole Crank-Nicolson Galerkin metodunu ele almıştır. Morton ve Mayers (1994), θ -metodunun belli koşulla Crank-Nicolson metodunu içerdiğini dikkate alarak istenen yakınsamayı ispatlamıştır. Cannon ve ark. (1987; 1990) gereğince kütlenin tanımına bağlı ısı denkleminin nümerik çözümü içinde bu görülebilir. Liu ve Wu (1994) bu konuda belli bazı algoritmaları tanımlamıştır.

Ayrıca; bu konuda daha detaylı bilgilere Amirali ve Duru (2002) ile geniş tarihsel süreç Hager (1989) çalışmalarında yer verilmiştir.

2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Bu bölümde düzgün şebekede fark şeması kurulmasında ihtiyaç duyulan notasyonlar, sürekli bölgede tanımlanmış fonksiyonlar için bazı notasyonlar ve bazı kuadratör formlar verilmektedir.

Tanım 2.1.

g herhangi bir fonksiyon olsun. Buna göre;

a) $g_{x,i} = \frac{g(x_{i+1}) - g(x_i)}{h}$ ifadesine *birinci mertebeden ileri fark türevi*

denir.

b) $g_{\bar{x},i} = \frac{g(x_i) - g(x_{i-1})}{h}$ ifadesine *birinci mertebeden geri fark türevi*

denir.

c) $g_{x,i}^0 = \frac{g(x_{i+1}) - g(x_{i-1}))}{2h}$ ifadesine *birinci mertebeden merkezi fark türevi* denir.

d) $g_{\bar{x},i} = \frac{g(x_{i+1}) - 2g(x_i) + g(x_{i-1}))}{h^2}$ ifadesine *ikinci mertebeden fark türevi* denir.

Tanım 2.2.

a) $\omega_h = \{x_i | x_i = ih, i = 1, 2, \dots, N-1 \text{ ve } h = l/N\}$ ifadesine $[0, l]$ aralığındaki *düzgün şebeke* denir.

b) $\|g\|_{C(\omega_h)} = \max_{x_i \in \omega_h} |g(x_i)|$ ifadesine *düzgün şebeke normu* denir.

c) $g_i = g(x_i)$ ifadesine ω_h 'ta tanımlanmış *şebeke fonksiyonu* denir.

Tanım 2.3.

a) $\|f\|_{C[0,l]} = \max_{x \in [0,l]} |f(x)|$ ifadesine $[0, l]$ aralığındaki sürekli fonksiyonlar için *maksimum norm* denir.

b) $C^{(n)}[0, l]$ ifadesine $[0, l]$ aralığında x 'e göre n . dereceden sürekli türevlere sahip fonksiyonlar kümesidir.

Fark şemasının kurulmasında aşağıdaki kuadratör formülleri kullanılmıştır:

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \left[\int_a^b p(x)dx \right] \{ \sigma f(b) + (1 - \sigma)f(a) \}$$

$$+ f(a; b) \int_a^b (x - x^{(\sigma)}) p(x) dx + R(f) \quad (2.1)$$

Burada σ -reel parametre, $p(x) \in C[a, b]$ ağırlık fonksiyonudur. Buna göre

$$\begin{aligned} R(f) &= \int_a^b dx p(x) \int_a^b f^{(n)}(\xi) K_{n-1}(x, \xi) d\xi, f \in C^n, n=1 \text{ veya } n=2 \\ K_s(x, \xi) &= T_s(x - \xi) - (b-a)^{-1}(x-a)(b-\xi)^s, s=0,1 \\ x^{(\sigma)} &= \sigma b + (1-\sigma)a, f(a; b) = (f(b) - f(a))/(b-a), \\ T_s(\lambda) &= \lambda^s / s!, \lambda \geq 0; T_s(\lambda) = 0, \lambda < 0. \\ \int_a^b p(x) f'(x) dx &= f(a; b) \int_a^b p(x) dx + \bar{R}(f) \\ \bar{R}(f) &= - \int_a^b dx p'(x) \int_a^b f^{(n)}(\xi) K_{n-1}(x, \xi) d\xi, f \in C^n, n=1 \text{ veya } n=2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\bar{R}(f) = - \int_a^b dx p(x) \int_a^b f''(\xi) K_0(\xi, x) d\xi, f \in C^2$$

olur. (2.1) ve (2.2) formüllerinde aynı $K_s(x, \xi)$ fonksiyonu kullanılmaktadır.

Ayrıca,

$$\begin{aligned} K_0(a, \xi) &= K_0(b, \xi) = 0, \\ K_1(a, \xi) &= K_1(b, \xi) = K_1(x, a) = K_1(x, b) = 0 \\ K_1(x, \xi) &= K_1(\xi, x), \\ \frac{\partial}{\partial \xi} K_1(x, \xi) &= -K_0(x, \xi), \frac{\partial}{\partial x} K_1(x, \xi) = -K_0(\xi, x) \end{aligned}$$

olduğu kolayca görülebilir.

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x) f(x) dx &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b p(x) dx + R^*(f), \\ R^*(f) &= \int_a^b dx p(x) \int_a^b f^{(n)}(\xi) K_{n-1}^*(x, \xi) d\xi + (n-1) f(a; b) \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) p(x) dx, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$n=1 \text{ veya } n=2$

$$K_s^*(x, \xi) = T_s(x - \xi) - T_s\left(\frac{a+b}{2} - \xi\right) + (b-a)^{-1}(b-\xi)^s \left(\frac{a+b}{2} - x\right), s = 0,1$$

Tanım 2.4 (Kovma Metodu)

Bu metot genelde üç köşegenli matrise sahip $Ay = f$ lineer denklemler sisteminin çözümü için geniş biçimde uygulanan bir algoritmadır, öyle ki buradaki $A = (a_{ij})$ matrisinde esas köşegen ve ona komşu iki köşegen hariç bütün elemanlar sıfırdır ($a_{ij} = 0$ $j > i+1$ ve $j < i-1$ için). Böyle sistemler bizim daha önce tanıdığımız

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (2.4)$$

$$y_0 = k_1 y_1 + \mu_1, \quad y_N = k_2 y_{N-1} + \mu_2 \quad (2.5)$$

biçiminde yazılabilir. İncelemiş olduğumuz üç noktalı sınır-değer fark problemlerinin çoğunluğu bu sınıfa girer. $k_1 = k_2 = 0$ hali birinci tip diferansiyel sınır şartına karşılıktır. (2.4)-(2.5) sistemine uygun kare matris

$$\begin{pmatrix} 1 & -k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & -C_1 & B_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & -C_2 & B_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & A_{N-1} & -C_{N-1} & B_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -k_2 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde ve boyutu $N+1$ 'dir. Birinci tip sınır şartları durumunda bunun boyutu $N-1$ olacaktır.

Şimdi de kovma metoduna uygun işlem formüllerinin bulunmasına geçelim. (2.4)-(2.5)'ün çözümünü

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.6)$$

şeklinde arayalım, buradaki α_i, β_i 'ler şimdilik belirsiz katsayılardır. Bu taktirde

$$y_{i-1} = \alpha_i y_i + \beta_i = \alpha_i (\alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}) + \beta_i = \alpha_i \alpha_{i+1} y_{i+1} + (\alpha_i \beta_{i+1} + \beta_i), \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

olur. Sonuncu bu eşitliği ve (2.6)'yı (2.4)'de yerine yazarsak

$$[\alpha_{i+1}(A_i \alpha_i - C_i) + B_i] y_{i+1} + \beta_{i+1}(A_i \alpha_i - C_i) + A_i \beta_i + F_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

şeklinde buluruz. Buna göre

$$\alpha_{i+1}(A_i \alpha_i - C_i) + B_i = 0, \quad \beta_{i+1}(A_i \alpha_i - C_i) + A_i \beta_i + F_i = 0$$

veya

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.7)$$

alırız. α_i, β_i 'lerin (2.7) formülleriyle hesaplanabilmesi için α_1, β_1 başlangıç değerlerinin bilinmesi gerekir. (2.5₁)'in (2.6)'nın $i = 0$ haliyle denk olmasından

$$\alpha_1 = k_1, \quad \beta_1 = \mu_1 \quad (2.8)$$

elde ederiz. (2.7)-(2.8) sürecine ileri (düz) kovma denir. α_i, β_i kovma katsayıları bulunduktan sonra, (2.6) formülüyle y_i 'nin bulunmasına geçeriz. Bu işleme başlamak için y_N 'nin bilinmesi gerekir ve bu değer

$$y_N = k_2 y_{N-1} + \mu_2, \quad y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta_N$$

bağıntılarından bulunur ve böylece ters kovma süreci

$$y_N = \frac{k_2 \beta_N + \mu_2}{1 - k_2 \alpha_N} \quad (2.9)$$

$$y_j = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad j = N-1, N-2, \dots, 0$$

biçiminde olur. (2.7)-(2.9) algoritmalarına, (2.4)-(2.5) sistemine uygun kovma metodu denir.

Görüldüğü gibi kovma metodu, (2.7) ve (2.9) formüllerindeki paydalar sıfırdan farklı olduğu zaman uygulanabilir:

$$C_i - \alpha_i A_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (2.10)$$

$$1 - k_2 \alpha_N \neq 0 \quad (2.11)$$

Bunların sağlanması için yeterli şartların

$$A_i \neq 0, \quad B_i \neq 0, \quad |C_i| \geq |A_i| + |B_i|, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (2.12)$$

$$|k_1| \leq 1, \quad |k_2| < 1 \quad (2.13)$$

olduğunu gösterelim. Önce (2.12), (2.13) şartları dahilinde $|\alpha_i| \leq 1$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$) olduğunu gösterelim. Tümevarım yönteminden yararlanırsak $i = 1$ için (2.8), (2.13)'den $|\alpha_1| = |k_1| \leq 1$ olur. $|\alpha_i| \leq 1$ olduğunu kabul edelim ve bu durumda $|\alpha_{i+1}| \leq 1$ olduğunu gösterelim.

$$|C_i - \alpha_i A_i| \geq |C_i| - |\alpha_i| |A_i| \geq |C_i| - |A_i| \geq |B_i| \quad (2.14)$$

ve (2.12)'ye göre $|C_i - \alpha_i A_i| > 0$, yani (2.10) sağlanır. Ayrıca, (2.14)'e göre

$$|\alpha_{i+1}| = \frac{|B_i|}{|C_i - \alpha_i A_i|} \leq 1$$

olduğu görülür. Böylece $|\alpha_i| \leq 1$ $i = 1, 2, \dots, N$ olduğunu göstermiş olduk.

Daha sonra, (2.13₂) 'den ve $|\alpha_N| \leq 1$ olmasından yararlanırsak

$$|1 - k_2 \alpha_N| \geq 1 - |k_2| |\alpha_N| \geq 1 - |k_2| > 0,$$

olur, başka bir ifadeyle, (2.11) şartı da sağlanır.

(2.13) şartının daha genel

$$|k_s| \leq 1, \quad s = 1, 2; \quad |k_1| + |k_2| < 2$$

şartı veya

$$|k_s| \leq 1, \quad s = 1, 2; \quad \exists i_0, \quad |C_{i_0}| > |A_{i_0}| + |B_{i_0}|$$

şartıyla değiştirilebileceğini belirtelim.

Ayrıca $|\alpha_i| \leq 1$ olması kovma sürecinin kararlılığını temin ediyor. Bu da, işlem sürecinde bırakılan yuvarlama hatalarının kesinlik kaybına veya taşmaya imkan vermeyeceği anlamına gelir. Gerçekten, y_{i_0+1} belli bir δ_{i_0+1} hatasıyla hesaplanmış olsun

$$\hat{y}_{i_0+1} = y_{i_0+1} + \delta_{i_0+1}$$

o zaman, bir sonraki adım için

$$y_{i_0} = \alpha_{i_0+1} y_{i_0+1} + \beta_{i_0+1} \quad (2.15)$$

yerine

$$\hat{y}_{i_0} = \alpha_{i_0+1} (y_{i_0+1} + \delta_{i_0+1}) + \beta_{i_0+1} \quad (2.16)$$

hesaplanacaktır. (2.15) ve (2.16)'den

$$\delta_{i_0} = \hat{y}_{i_0} - y_{i_0} = \alpha_{i_0+1} \delta_{i_0+1}$$

ve

$$|\delta_{i_0}| \leq |\alpha_{i_0+1}| |\delta_{i_0+1}| \leq |\delta_{i_0+1}|$$

elde edilir, başka bir deyişle hata artmaz.

3. DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN NONLOCAL PROBLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Burada daha sonraki bölümlerde uygun fark şemasının yakınsaklığının incelenmesinde $u(x)$ çözümü için bazı asimptotik değerlendirmelere ihtiyaç vardır.

3.1. Kesin Çözüm İçin Asimptotik Değerlendirmeler

Bu bölümde konuyla ilgili bir lemma ile bilgi verilerek çözümün asimptotik değerlendirmesine yönelme yapılacaktır.

Lemma 3.1.1.

$u(x)$, (1.1)-(1.3) probleminin çözümü ve $a, b, f \in C^1[0, l]$ olsun. Bundan başka

$$1 - \int_{l_0}^{l_1} g(x)u_1(x)dx \neq 0, \quad (3.1)$$

ve burada $u_1(x)$ fonksiyonu

$$Lu_1 = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3.2)$$

$$u_1(0) = 0, \quad u_1(l) = 1 \quad (3.3)$$

biçiminde iki noktalı sınır değer probleminin çözümüdür. O zaman

$$\|u\|_{C[0, l]} \leq C \quad (3.4)$$

$$|u'(x)| \leq C \left\{ 1 + \frac{1}{\varepsilon} \left(e^{-\frac{c_0 x}{\varepsilon}} + e^{-\frac{c_1(l-x)}{\varepsilon}} \right) \right\} \quad (3.5)$$

değerlendirmeleri doğrudur. Burada

$$c_0 = \frac{1}{2} \left[\sqrt{a^2(0) + 4b(0)} + a(0) \right]$$

$$c_1 = \frac{1}{2} \left[\sqrt{a^2(l) + 4b(l)} - a(l) \right]$$

olur.

Bu çalışmadaki $c, c_i; C, C_i$ ($i = 0, 1, \dots$) değerleri ε 'dan bağımsız pozitif sabitler olup şebeke büyüklüğü yada nümerik çözüm hakkındaki tartışmalar içinde geçerlidir.

İspat. $u(l) = \lambda$ olsun. Öyleyse $u(x)$ 'i

$$u(x) = u_0(x) + \lambda u_1(x), \quad (3.6)$$

biçiminde alabiliriz. Burada $u_0(x)$ fonksiyonu

$$Lu_0 = f(x), \quad 0 < x < l, \quad (3.7)$$

$$u_0(0) = \mu_0, \quad u_0(l) = 0, \quad (3.8)$$

sınır değer probleminin çözümüdür. (1.3) ve (3.6) dan

$$\lambda = \frac{\mu_1 + \int_{l_0}^{l_1} g(x)u_0(x)dx}{1 - \int_{l_0}^{l_1} g(x)u_1(x)dx} \quad (3.9)$$

olarak elde edilir. İlk olarak, [3.1]'in sağlandığını gösterelim. Burada maksimum prensibini kullanıyoruz.

$$v(x) \in C^2[0, l], \quad Lv(x) \leq 0 \quad (0 < x < l), \quad v(0) \geq 0, \quad v(l) \geq 0$$

şartlarını sağlayan fonksiyon olsun. Bu durumda $v(x) \geq 0 \quad (0 \leq x \leq l)$ olur.

Maksimum prensibini kullanarak $u_0(x)$ fonksiyonu ε 'a göre düzgün sınırlı olarak elde edilir. Buna göre

$$\|u_0\|_{C[0, l]} \leq \beta^{-1} \|f\|_{C[0, l]} + |\mu_0| \leq C$$

olur. Benzer şekilde maksimum prensibini kullanarak

$$\|u_1\|_{C[0, l]} \leq 1$$

olduğunu gösterebiliriz. Daha sonra

$$\|u\|_{C[0, l]} \leq \|u_0\|_{C[0, l]} + |\lambda| \|u_1\|_{C[0, l]}$$

olduğundan (3.4) hemen çıkar. Yani (3.4) değerlendirmesi doğrudur.

Ayrıca, $\|u(l)\|$ 'in ε 'a göre düzgün sınırlılığı kurulduğundan dolayı, (3.5) değerlendirmesi birinci tip sınır değer problemi gibi aynı yolla ispatlanır (Amiraliyev ve Çakır, 2000).

Uyarı 3.1.1.

(3.1)'in değerlendirmesi için yeter şart

$$1 - \int_{l_0}^{l_1} |g(x)| dx > 0$$

olur.

3.2. Fark Şemasının Kurulması

$[0, l]$ aralığında ω_h düzgün şebekesi

$$\omega_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N-1; Nh = l\}, \quad \bar{\omega}_h = \omega_h \cup \{x = 0, l\}$$

olarak tanımlarız. Fark şemasını aşağıdaki gibi özdeşlikten kuracağız:

$$\chi^{-1}h^{-1}\int_0^l Lu\varphi_i(x)dx = \chi^{-1}h^{-1}\int_0^l f(x)\varphi_i(x)dx, i=1,2,\dots,N-1, \quad (3.10)$$

Burada $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{N-1}$ aşağıdaki biçimde belirlenmiş baz fonksiyonlarıdır:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \varphi_i^{(1)}(x) \equiv \frac{e^{\lambda_{1,i}(x-x_{i-1})} - e^{\lambda_{2,i}(x-x_{i-1})}}{e^{\lambda_{1,i}h} - e^{\lambda_{2,i}h}}, & x_{i-1} < x < x_i, \\ \varphi_i^{(2)}(x) \equiv \frac{e^{-\lambda_{2,i}(x_{i+1}-x)} - e^{-\lambda_{1,i}(x_{i+1}-x)}}{e^{-\lambda_{2,i}h} - e^{-\lambda_{1,i}h}}, & x_i < x < x_{i+1}, \\ 0, & x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}). \end{cases}$$

$$\lambda_{1,i} = 0.5\varepsilon^{-1} \left[a_i + \sqrt{a_i^2 + 4b_i} \right], \quad \lambda_{2,i} = 0.5\varepsilon^{-1} \left[a_i - \sqrt{a_i^2 + 4b_i} \right],$$

$$\chi_i = h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x)dx = \frac{2h^{-1}(\lambda_{1,i} - \lambda_{2,i})}{\lambda_{1,i}\lambda_{2,i} \sinh \frac{(\lambda_{1,i} - \lambda_{2,i})h}{2}} \sinh\left(\frac{\lambda_{1,i}h}{2}\right) \sinh\left(\frac{\lambda_{2,i}h}{2}\right)$$

$\varphi_i^{(1)}(x)$ ve $\varphi_i^{(2)}(x)$ fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki problemlerin çözümleri olduğuna dikkat edelim:

$$\varepsilon^2 \varphi_i'' - a_i \varepsilon \varphi_i' - b_i \varphi_i = 0 \quad (x_{i-1} < x < x_i), \quad \varphi_i(x_{i-1}) = 0, \quad \varphi_i(x_i) = 1 \quad (3.11)$$

$$\varepsilon^2 \varphi_i'' - a_i \varepsilon \varphi_i' - b_i \varphi_i = 0 \quad (x_i < x < x_{i+1}), \quad \varphi_i(x_i) = 1, \quad \varphi_i(x_{i+1}) = 0 \quad (3.12)$$

Ayrıca (3.10) bağıntısı

$$\begin{aligned} \chi_i^{-1} \left[-\varepsilon^2 h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i'(x) u'(x) dx + \varepsilon a_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i'(x) u'(x) dx - b_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i'(x) u(x) dx \right] \\ = f_i - R_i, \end{aligned} \quad (3.13)$$

gibi yeniden yazılır. Burada kalan terim

$$\begin{aligned} R_i = \chi_i^{-1} \varepsilon h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [a(x) - a(x_i)] \varphi_i(x) u'(x) dx + \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [b(x_i) - b(x)] \varphi_i(x) u(x) dx \\ + \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [f(x_i) - f(x)] \varphi_i(x) u(x) dx \end{aligned} \quad (3.14)$$

olarak bulunur.

(3.13) bağıntısına her bir (x_{i-1}, x_i) ve (x_i, x_{i+1}) aralıkları üzerinde (2.1) ve (2.2) formülleri uygulanırsa ve ayrıca (3.11) ve (3.12) bağıntıları dikkate alınırsa, aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^2 h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u''(x) \varphi_i(x) dx + \varepsilon a_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) u'(x) dx - b_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) u(x) dx \\
&= \varepsilon^2 u_{\bar{x}x,i} + \varepsilon a_i (\chi_{1,i} u_{\bar{x},i} + \chi_{2,i} u_{x,i}) - b_i \chi_i u_i - b_i \mu_{1,i} u_{\bar{x},i} - b_i \mu_{2,i} u_{x,i} \\
&= \varepsilon^2 \left\{ 1 + 0.5h\varepsilon^{-1} a_i (\chi_{2,i} - \chi_{1,i}) - 0.5h\varepsilon^{-2} b_i (\mu_{2,i} - \mu_{1,i}) \right\} u_{\bar{x}x,i} \\
&+ \varepsilon a_i (\chi_i - \varepsilon^{-1} a_i^{-1} b_i \mu_i) u_{o_{x,i}} - b_i \chi_i u_i,
\end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned}
\chi_{1,i} &= h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)} dx, \quad \chi_{2,i} = h^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^{(2)} dx, \\
\mu_{1,i} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) \varphi_i^{(1)}(x) dx, \\
\mu_{2,i} &= h^{-1} \int_{x_1}^{x_{i+1}} (x - x_i) \varphi_i^{(2)}(x) dx, \\
\mu_i &= \mu_{i,1} + \mu_{i,2}, \quad u_i = u(x_i), \\
u_{\bar{x},i} &= \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, \quad u_{x,i} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}, \\
u_{o_{x,i}} &= \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}, \quad u_{\bar{x}x,i} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}
\end{aligned}$$

yazılır.

Basit hesaplamalardan sonra

$$1 + 0.5h\varepsilon^{-1} a_i (\chi_{2,i} - \chi_{1,i}) - 0.5h\varepsilon^{-2} b_i (\mu_{2,i} - \mu_{1,i}) = 0.5h(\lambda_{1,i} - \lambda_{2,i}) \frac{\cosh\left(\frac{(\lambda_{1,i} + \lambda_{2,i})h}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{(\lambda_{1,i} - \lambda_{2,i})h}{2}\right)}$$

$$\chi_i - \varepsilon^{-1} a_i^{-1} b_i \mu_i = \frac{(\lambda_{1,i} - \lambda_{2,i}) \sinh((\lambda_{1,i} + \lambda_{2,i})h/2)}{(\lambda_{1,i} + \lambda_{2,i}) \sinh((\lambda_{1,i} - \lambda_{2,i})h/2)}.$$

olarak bulunur.

Ayrıca, (3.13)'e geri dönersek

$$lu_i \equiv \varepsilon^2 \theta_{1,i} u_{\bar{x}x,i} + \varepsilon a_i \theta_{2,i} u_{o_{x,i}} - b_i u_i = f_i - R_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.15)$$

şeklindeki özdeşliği elde ederiz. Burada

$$\theta_{1,i} = \frac{h^2 \lambda_{1,i} \lambda_{2,i} \cosh((\lambda_{1,i} + \lambda_{2,i})h/2)}{4 \sinh(\lambda_{1,i}h/2) \sinh(\lambda_{2,i}h/2)} \equiv -\frac{b_i h^2}{4\epsilon^2} [1 + \coth(\lambda_{1,i}h/2) \coth(\lambda_{2,i}h/2)], \quad (3.16)$$

$$\theta_{2,i} = \frac{h \lambda_{1,i} \lambda_{2,i} \sinh((\lambda_{1,i} + \lambda_{2,i})h/2)}{2(\lambda_{1,i} + \lambda_{2,i}) \sinh(\lambda_{1,i}h/2) \sinh(\lambda_{2,i}h/2)} \equiv -\frac{b_i h}{2a_i \epsilon} [\coth(\lambda_{1,i}h/2) \coth(\lambda_{2,i}h/2)] \quad (3.17)$$

yazılır. Şimdi ise, (1.3) sınır şartı için bir yaklaşım tanımlamak kalıyor. x_{N_0} ve x_{N_1} sırasıyla l_0 ve l_1 'e en yakın şebeke noktaları olsun. Burada aşağıdaki gibi bağıntılarla başlıyoruz:

$$\int_{l_0}^{l_1} g(x)u(x)dx = \int_{l_0}^{x_{N_0}} g(x)u(x)dx + \int_{x_{N_0}}^{x_{N_1}} g(x)u(x)dx + \int_{x_{N_1}}^{l_1} g(x)u(x)dx ,$$

ve

$$\int_{x_{N_0}}^{x_{N_1}} g(x)u(x)dx = \sum_{i=N_0}^{N_1} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)dx \right) \left\{ \frac{1}{2} (u(x_i) + u(x_{i-1})) \right\} + \bar{r}_i \equiv S(u) + \bar{r}_i \quad (3.18)$$

Burada

$$S(u) = \sum_{i=N_0}^{N_1} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)dx \right) \left\{ \frac{u(x_i) + u(x_{i-1})}{2} \right\}, \quad (3.19)$$

$$\bar{r}_i = \sum_{i=N_0}^{N_1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx g(x) \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(\xi) \left[T_0(x - \xi) - \frac{1}{2} \right] d\xi ,$$

$$T_0(s) = 1, s \geq 0; T_0(s) = 0, s < 0$$

olur.

Sonuç olarak,

$$l_1 u \equiv u(l) - S(u) = \mu_l + r \quad (3.20)$$

şeklinde bulunur. Burada kalan terim

$$r_i = \int_{l_0}^{x_{N_0}} g(x)u(x)dx + \int_{x_{N_1}}^{l_1} g(x)u(x)dx + \bar{r}_i \quad (3.21)$$

olarak bulunur.

(3.15) ve (3.20)'deki R_i ve r 'leri ihmal ederek (1.1) ve (1.3) yaklaşımı için aşağıdaki fark şemasını önerebiliriz:

$$ly_i \equiv \epsilon^2 \theta_{1,i} y_{\bar{x}x,i} + \epsilon a_i \theta_{2,i} y_{o_{x,i}} - b_i y_i = f_i, \quad x \in \omega_h, \quad (3.22)$$

$$y(0) = \mu_0, \quad (3.23)$$

$$l_1 y_N \equiv y_N - S(y) = \mu_l, \quad (3.24)$$

Burada $\theta_{1,i}$, $\theta_{2,i}$ ve $S(y)$ sırasıyla (3.16), (3.17) ve (3.19) bağıntıları ile verilmiştir.

3.3. Düzgün Hata Değerlendirmeleri

Şimdi (3.22)-(3.24) orijinal problemine geri dönelim ve $z_i = y_i - u_i$ şeklinde gösterelim. Burada y_i (3.22)-(3.24) orijinal fark probleminin çözümü ve u_i , x_i şebeke noktasındaki (1.1)-(1.3) probleminin çözümünü gösterir. Daha sonra (3.14) ve (3.21)'i göz önüne alarak z_i hatası için

$$lz_i = R_i \quad (i = 1, 2, \dots, N-1), \quad z_0 = 0, \quad l_1 z_N = r \quad (3.25)$$

alabiliriz. R_i ve r kalan hataları (3.14) ve (3.21) ile tanımlanmıştır. z_i 'nin aşağıdaki gibi ayrıştırılabilir olduğunu göstermek kolaydır:

$$z_i = z_{0i} + \bar{\lambda} z_{1i} \quad (3.26)$$

Burada z_{0i} ve z_{1i} ($i = 0, 1, 2, \dots, N$) sırasıyla aşağıdaki problemlerinin çözümüdür:

$$lz_{0i} = R_i \quad (i = 1, 2, \dots, N-1), \quad z_{0,0} = 0, \quad z_{0,N} = 0 \quad (3.27)$$

$$lz_{1i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N-1), \quad z_{1,0} = 0, \quad z_{1,N} = 1 \quad (3.28)$$

$$\bar{\lambda} = \frac{r + S(z_0)}{1 - S(z_1)}, \quad (3.29)$$

Burada

$$1 - S(z_1) \neq 0 \quad (3.30)$$

olduğunu varsayabiliriz.

Teorem 3.3.1.

Lemma 3.1.1'in aynı düzgünlüğünü ve (3.30) şartını ifade edelim. u (1.1)-(1.3) probleminin çözümü ve y 'de (3.22)-(3.24) probleminin çözümü olsun. Bu durumda Lemma 3.1.1'in şartları altında ε 'a göre düzgün

$$\|y - u\|_{C(\bar{\omega}_h)} \leq Ch \quad (3.31)$$

hata değerlendirmesi doğrudur.

İspat: İlk olarak (3.25)'in çözümü için

$$\|z\|_{C(\bar{\omega}_h)} \leq C(\beta^{-1} \|R\|_{C(\bar{\omega}_h)} + |r|) \quad (3.32)$$

değerlendirmesinin doğruluğunu gösterelim. (3.2) bağıntısını

$$\|z\|_{C(\bar{\omega}_h)} \leq \|z^{(0)}\|_{C(\bar{\omega}_h)} + |\bar{\lambda}| \|z^{(1)}\|_{C(\bar{\omega}_h)} \quad (3.33)$$

şeklinde ifade edebiliriz.

$\|z^{(0)}\|_{C(\bar{\omega}_h)}$ değerlendirmek için maximum prensibine göre

$$\|z^{(0)}\|_{C(\bar{\omega}_h)} \leq \beta^{-1} \|R\|_{C(\bar{\omega}_h)} \quad (3.34)$$

alabiliriz.

Ayrıca Lemma 3.1.1'i kullanarak R_i 'nin açık ifadesinden

$$\|R\|_{C(\bar{\omega}_h)} \leq Ch \quad (3.35)$$

olduğunu görüyoruz. (3.29) ve (3.30)'den dolayı $\bar{\lambda}$ değeri ε 'a göre düzgün olarak sınırlı olacaktır.

(3.20)'den r hatası ile ilgili olarak

$$\begin{aligned} |r| &\leq \sum_{i=N_0}^{N_1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx |g(x)| \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u'(\xi)| \left| T_0(x-\xi) - \frac{1}{2} \right| d\xi \\ &\quad + \int_{l_0}^{x_{N_0}} |g(x)| |u(x)| dx + \int_{x_{N_1}}^{l_1} |g(x)| |u(x)| dx \\ &\leq h \max |g(x)| \sum_{i=N_0}^{N_1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u'(\xi)| \left| T_0(x-\xi) - \frac{1}{2} \right| d\xi + O(h) \\ &\leq \frac{h}{2} \max |g(x)| \int_0^l |u'(x)| dx + O(h) \\ &\leq Ch \end{aligned} \quad (3.36)$$

elde ederiz. (3.35) ve (3.36) ile birlikte (3.32)'ün değerlendirilmesi ispatımızı tamamlar.

3.4. Nümerik Örnek ve Grafikler

Aşağıdaki problemin yaklaşık çözümünü hesaplamak için (3.13) ve (3.15) şemasını uyguluyoruz.

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 u'' + 2\varepsilon(x+1)u' - (-x^2 - 2x + 4)u &= -(e^x + e^{x^2}) \\ u(0) &= 1, \quad u(1) - \int_{0.5}^1 \cos xu(x) dx = 0 \end{aligned}$$

(3.22) ve (3.24) şeması için hesaplanan bazı sonuçlar aşağıdaki çizelge de gösterilmiştir. Burada E_∞ şebeke noktalarında maksimum hatadır, yani

$$\max_{0 \leq i \leq N} |y_i - u_i|$$

olur. Aşağıdaki gibi p düzgün yakınsaklık oranını da hesaplayabiliriz.

$$p = \ln(r^h / r^{h/2}) / \ln 2 ,$$

Burada

$$r^h = \max_{0 \leq i \leq N} |y_i^h - y_{2i}^{h/2}|$$

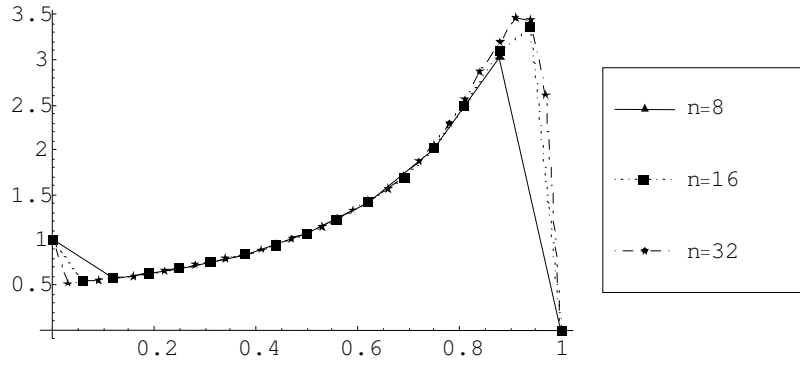
yazılır.

Elde edilen nümerik sonuçların teorik araştırma sonuçlarına uyumlu olduğu görülmektedir.

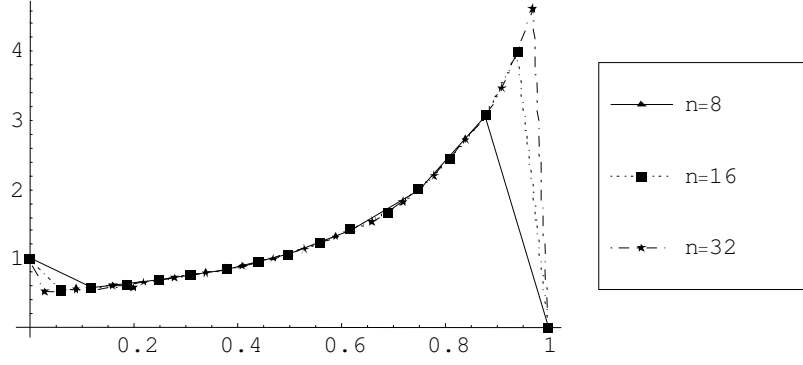
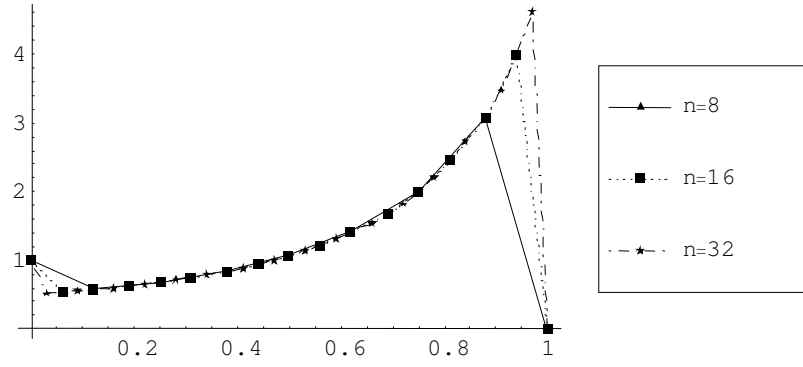
Çizelge 3.1. ϖ_h 'de $N=16$ ve $N=32$ için hatalar ve p yakınsaklık oranı

ε	E_∞		p
	N=16	N=32	
10^{-1}	0.058045	0.023538	1.30
10^{-3}	0.015304	0.007810	0.97
10^{-5}	0.015304	0.007881	0.96
10^{-7}	0.015304	0.007881	0.96

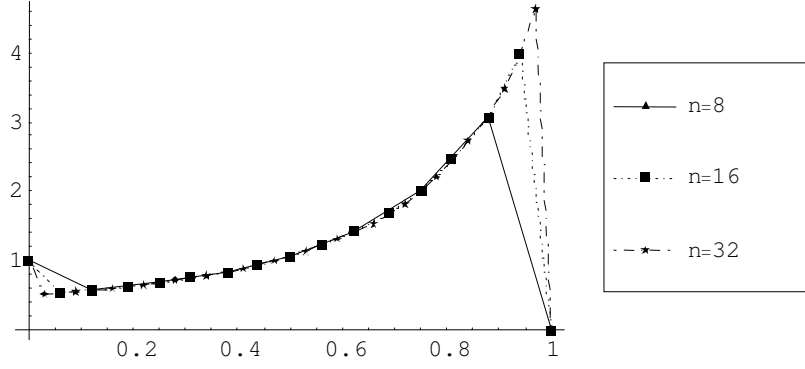
a) $\varepsilon = 10^{-1}$



Şekil 3.1. $\varepsilon = 10^{-1}$ için veriler

b) $\varepsilon=10^{-3}$ Şekil 3.2. $\varepsilon=10^{-3}$ için verilerc) $\varepsilon=10^{-5}$ Şekil 3.3. $\varepsilon=10^{-5}$ için veriler

d) $\varepsilon=10^{-7}$



Şekil 3.4. $\varepsilon=10^{-7}$ için veriler

Yukarıda verilenler ε ve N nin değişik değerleri için nümerik çözüm sağlamaktadır.

4. NONLOCAL SINIR ŞARTLI ISI DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde; Liu (1999) gereğince nonlocal sınır şartlı ısı denklemi için θ – metodu ele alınacaktır. Koşullu olmayan kararlılık, Ekin (1991) çalışmasında varsayıldığından çok daha zayıf bir koşula bağlı $\theta \geq \frac{1}{2}$ için ispatlanabilir. Nonlocal sınır şartları sebebiyle; θ – metodu tarafından genelleştirilmiş lineer denklem sistemleri, ilk ve son satırları hariç üç köşegenli bir katsayı matrisine sahiptir. Burada önce lineer sistemlerin bu tipini çözmek için üç etkin algoritma ortaya konulacaktır. Daha sonra ise basit bir örnek verilerek onların yeterliliği karşılaştırılacaktır.

4.1. Temel Sürece Bakış

Bu bölümde;

$$u_t - u_{xx} = f(x, t), \quad x \in (0, 1), \quad 0 < t \leq T \quad (4.1)$$

ısı denkleminin

$$\begin{cases} u(0, t) = \int_0^1 K_0(x) u(x, t) dx + g_0(t) \\ u(1, t) = \int_0^1 K_1(x) u(x, t) dx + g_1(t) \end{cases} \quad (0 < t \leq T) \quad (4.2)$$

nonlocal sınır şartları ve

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, 1] \quad (4.3)$$

başlangıç şartına bağlı nümerik çözümü ile bağlantılıdır.

Yukarıdaki başlangıç-sınır değer problemi, termoelastikitenin yarı-statik teorisinde ortaya çıkar (Day, 1982; 1983). Benzer problemler (Cannon, 1984; Cannon ve ark., 1987; Lin, 1991; Lin ve ark., 1997) çalışmalarında bulunmaktadır. Kolaylık için; “ f , K_0 , K_1 , g_0 , g_1 ve u_0 ”, keyfi düzgün fonksiyonlar olduğunu varsayıyoruz. (4.1)-(4.3)’ün çözümünün varlık, teklik ve bazı analitik özellikleri,

$$\int_0^1 |K_0(x)| dx < 1, \quad \int_0^1 |K_1(x)| dx < 1 \quad (4.4)$$

olduğu varsayımı altında Day (1982; 1983) tarafından çalışılmıştır. Day’ın sonucu; Friedman (1986), Kawohl (1987) ve diğerleri tarafından birkaç uzay değişkeni vasıtasıyla genel parabolik denklemlere genişletilmiştir. Ayrıca, (4.1)-(4.3) ve onun değişimlerinin nümerik çözümü bir kaç çalışmada da göz önüne alınmıştır. Ekin (1991), bir enerji argümanı kullanarak

$$\left(\int_0^1 |K_0(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_0^1 |K_1(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (4.5)$$

koşuluna bağlı Crank-Nicolson metodunun yakınsaklığını ispatladı. Ekolin şemasında; (4.2) nonlocal sınır şartlarındaki integraller, yamuk kuralı tarafından ayrıştırılabilir. Fairweather ve Lopez-Marcos (1996), (4.2) nonlocal sınır şartları ile (4.3) başlangıç şartına bağlı yarı lineer parabolik

$$u_t - (a(x)u_x)_x = F(u, x, t)$$

denklemini için Crank-Nicolson Galerkin metodu ve extrapole Crank-Nicolson Galerkin metodunu ele aldı ve Ekolin'ninkinden farklı olan bir enerji argümanı kullanarak

$$\int_0^1 |K_0(x)|^2 dx < 1, \quad \int_0^1 |K_1(x)|^2 dx < 1 \quad (4.6)$$

koşulu altında her iki metodun yakınsaklıklarını ispatladı. Ayrıca; Lin ve ark. (1997), (4.1)-(4.3)'ün iki boyutlu bir benzeri için geri Euler ve yarı kapalı metotlarını kullandılar ve nümerik çözümlerin yakınsaklığının yanı sıra, kesin çözümün bazı asimptotik özelliklerinin gösterimini de tartıştılar.

Bu bölümün bir amacı; (4.5)'in kendinden çok daha zayıf olan

$$\int_0^1 |K_0(x)|^2 dx + \int_0^1 |K_1(x)|^2 dx < 2 \quad (4.7)$$

koşulu ile yer değiştirebildiğini göstermektedir. Buna göre; Morton ve Mayers (1994) gereğince θ – metodunun $\theta = \frac{1}{2}$ için Crank-Nicolson metodunu içerdiğini dikkate

olarak; (4.4) ve (4.7)'nin sağladığı varsayımlar altında $\theta \geq \frac{1}{2}$ için θ – metodunun yakınsaklığını ispatlayacağız. Bu doğrultuda; θ – metodunu analiz etmek için kullanılan enerji metodu, Fairweather ve Lopez-Marcos (1996) çalışmasında kullanılan ile benzerdir.

Bu bölümün bir diğer amacı; katsayı matrislerinin ilk ve son satırları tam dolu olması hariç üç köşegenli biçiminde lineer denklem sistemlerini çözmek üzere etkin algoritmalar elde etmektir. Lineer sistemlerin bu tipi, $\theta > 0$ ile θ – metodu veya parçalı lineer polinom interpolasyonu ile Crank-Nicolson Galerkin metodu gibi kapalı nümerik bir metot yardımıyla (4.1)-(4.3) çözüldüğü zaman ortaya çıkar. Yine Cannon ve ark. (1987; 1990) gereğince kütlelerin tanımına bağlı ısı denkleminin nümerik çözümü içinde bu görülebilir. Ekolin (1991) çalışmasındaki nümerik deney göstermektedir ki; eğer bu lineer denklem sistemleri aynı seviyede doğruluğa ulaşmak için genel amaçlı NAG – kitaplığı usulleri tarafından çözümlerse, (4.1)-(4.3)

için geri Euler ve Crank-Nicolson metotları ileri Euler metodunun yaptığından fazla CPU zamanı harcar.

Bu bölümün dördüncü kesiminde üç etkin algoritma verilecektir. Onlardan biri üç köşegenli denklem sistemlerini çözmek için iyi bilinen Thomas algoritmasının dosdoğru bir değişimidir. Diğer ikisi, Sherman-Morrison-Woodbury formülü üzerine inşa edilmiştir. Bu bölümün sonunda, bu algoritmaların yeterliliğini karşılaştırmak için bir nümerik örnek ele alınacaktır.

4.2. θ – Metodu

“ $\Delta x = \frac{1}{M}$ ve $\Delta t = \frac{1}{N}$; $M, N \in \mathbb{Z}^+$ ” , sırasıyla, uzay ve zamanda adım ölçüleri iken $n = 0, 1, \dots, N$ ve $m = 0, 1, \dots, M$ için , sırasıyla, $t_n = n\Delta t$ ve $x_m = m\Delta x$ olsun. $(M+1)$ –boyutlu olan vektörler için $\langle \cdot, \cdot \rangle$ biçiminde iç çarpımı; “ $\sum$ ’ notasyonu, $\sum_{k=0}^M w_k = \frac{1}{2}w_0 + \sum_{k=1}^{M-1} w_k + \frac{1}{2}w_M$ ” olacak biçimde $\langle u, v \rangle = \Delta x \sum_{k=0}^M u_k v_k$ ile tanımlanır. Yine $\|\cdot\|$ ile ℓ_2 normu ve $\|\cdot\|_\infty$ ile maksimum normu, sırasıyla, $\|w\| = \langle w, w \rangle^{1/2}$ ve $\|w\|_\infty = \max_{0 \leq k \leq M} |w_k|$ olarak tanımlanır. u_m^n , (x_m, t_n) şebeke noktasında (4.1)-(4.3) başlangıç-sınır değer probleminin kesin çözümü için yaklaşımımız olsun. θ – metodu izah etmeden önce,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}u_m^n &= \Delta_t u_m^n - \Delta_{-x} \Delta_x \left[(1-\theta)u_m^n + \theta u_m^{n+1} \right], \quad m = 1, 2, \dots, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \\ \mathcal{L}_0 u^n &= u_0^n - \langle K_0^*, u^n \rangle, \quad n = 0, 1, \dots, N \\ \mathcal{L}_1 u^n &= u_M^n - \langle K_1^*, u^n \rangle, \quad n = 0, 1, \dots, N\end{aligned}$$

biçimindeki fark operatörlerini, bir parametrelili olan $\theta \in [0, 1]$, $u^n = (u_0^n, u_1^n, \dots, u_M^n)^T$ ve $K_i^* = (K_i(x_0), K_i(x_1), \dots, K_i(x_M))^T$, $i = 0, 1$ ile tarif ediyoruz. $\mathcal{L}$ ’nin tanımında;

$$\Delta_t u_m^n = \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t}, \quad \Delta_x u_m^n = \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{\Delta x}, \quad \Delta_{-x} u_m^n = \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{\Delta x}$$

şeklinde bölünmüş fark operatörleri kullanılır. (4.1)-(4.3) için θ – metodu,

$$\mathcal{L}u_m^n = f(x_m, (1-\theta)t_n + \theta t_{n+1}), \quad m = 1, 2, \dots, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0 u^n = g_0(t_n) \\ \mathcal{L}_1 u^n = g_1(t_n) \end{cases} \quad n = 1, \dots, N$$

$$u_m^0 = u_0(x_m), \quad m = 0, 1, \dots, M$$

olarak yazılabilir. (4.1) nonlocal sınır şartlarındaki integraller yamuk kuralı ile ayrıştırılabilir.

İleri Euler metodu, Crank-Nicolson metodu ve geri Euler metodu, sırasıyla, θ - metodunun $\theta = 0, \frac{1}{2}$ ve 1 haline uygundur. Kapalı bir metot olarak, ileri Euler metodu daima tek bir biçimde çözülebilir. Şimdi biz $\theta > 0$ durumunu göz önüne alalım.

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{M-1} & a_M \\ 1 & \lambda & 1 & & & \\ & 1 & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda & 1 \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{M-1} & b_M \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

matrisini, Courant sayısı $\mu = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ olmak üzere $\lambda = -\frac{1+2\theta\mu}{0\mu}$ değeri ve

$$a_0 = 1 - \Delta x K_0(x_0)/2, \quad b_0 = -\Delta x K_1(x_0)/2$$

$$a_m = -\Delta x K_0(x_m), \quad b_m = -\Delta x K_1(x_m), \quad m = 1, 2, \dots, M-1$$

$$a_M = -\Delta x K_0(x_M)/2, \quad b_M = 1 - \Delta x K_1(x_M)/2$$

ile gösterelim. Bu durumda; $u^n = (u_0^n, u_1^n, \dots, u_M^n)^T$ nümerik çözümü,

$$Au^n = w^n \quad (4.9)$$

denklemlerini, $n = 1, 2, \dots, N$ ile $m = 1, 2, \dots, M-1$ için $w^n = (w_0^n, w_1^n, \dots, w_M^n)$ ifadesi

$$w_0^n = g_0(t^n)$$

$$w_m^n = \frac{\theta-1}{\theta} u_{m-1}^{n-1} + \frac{2(1-\theta)\mu-1}{\theta\mu} u_m^{n-1} + \frac{\theta-1}{\theta} u_{m+1}^{n-1} - \frac{\Delta t}{\theta\mu} f(x_m, t_{n-1} + \theta\Delta t)$$

$$w_M^n = g_1(t^n)$$

olacak bir biçimde sağlar.

Eğer $\Delta x \sum_{m=0}^M |K_0(x_m)| < 1$, $\Delta x \sum_{m=0}^M |K_1(x_m)| < 1$ ise, o zaman A matrisi,

köşegensel dominant olduğundan nonsingülerdir.

Yukarıdaki eşitsizliklerin yalnızca (4.4)'in ayrışmış versiyonu olduğunu dikkate alarak, aşağıdaki basit sonucu elde ederiz.

Teorem 4.2.1.

Eğer (4.4) sağlanırsa, o zaman θ – metodu ile (4.1)-(4.3) başlangıç-sınır değer probleminin nümerik çözümü var ve herhangi $\Delta x < h_0$ için tek olacak biçimde $h_0 > 0$ mevcuttur.

4.3. Yakınsaklık

Bu bölümde; Ekolin (1991) çalışmasının ileri ve geri Euler metodu için verdiği teoreme benzerini sağlayan aşağıdaki sonuç ile bazı bilgiler verilecektir.

Teorem 4.3.1.

Eğer (4.4) sağlanır ve

$$2(1 - \theta)\mu \leq 1 \quad (4.10)$$

ise, o zaman (4.1)-(4.3)'ün nümerik çözümü herhangi $\Delta x < h_0$ için

$$|u_m^n - u(x_m, t_n)| \leq C(\Delta x)^2$$

hata tahmini sağlayacak biçimde pozitif h_0 ve C sabitleri mevcuttur.

Bu teorem maksimum prensibi kullanılarak herhangi zorluk olmaksızın ispatlanabilir. $\theta = 1$ durumu hariç, bir önceki sonuç daha ziyade (4.10) kısıtlayıcı koşula bağlı olan θ – metodunun yakınsaklığını gösterir. Bununla birlikte iyi bilinmektedir ki; eğer K_0 ve K_1 sıfır ise, o zaman θ – metodu $\theta \geq \frac{1}{2}$ için μ Courant sayısı gerekmezsin yakınsar. Benzer bir sonucun nonlocal sınır şartları durumunda sağladığını göstermek için, ilk olarak enerji metodunu kullanmak suretiyle aşağıdaki kararlılık sonuçlarını ispatlayacağız.

Lemma 4.3.1.

(4.4) ve (4.7)'nin her ikisinde de sağladığını varsayalım. Eğer $\theta \geq \frac{1}{2}$ ise, o zaman

$$\begin{aligned} \|u^n\|_\infty \leq C \left\{ \|\Delta_x u^0\| + |u_0^0| + |u_M^0| + |\mathcal{L}_0 u^n| + |\mathcal{L}_1 u^n| \right. \\ \left. + \left[\Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \left(\|\mathcal{L} u^k\|^2 + |\mathcal{L}_0 \Delta_t u^k|^2 + |\mathcal{L}_1 \Delta_t u^k|^2 \right) \right]^{1/2} \right\} \end{aligned} \quad (4.11)$$

eşitsizliği $n=1,2,\dots,N$ ve herhangi $\Delta x < h_0$ için olacak biçimde (her ikisi de μ 'den bağımsız) h_0 ve C pozitif sabitleri mevcuttur.

İspat : $v_m^n = u_m^n - (1-x_m)u_0^n - x_m u_M^n$, $m=0,1,\dots,N$, $n=0,1,\dots,M$ olsun.

Buna göre; $\Delta_{-x} \Delta_x u^n = \Delta_{-x} \Delta_x v^n$ ve $v_0^n = v_M^n = 0$, $n=0,1,\dots,N$ olduğunu dikkate alarak,

$$\begin{aligned} -\Delta t \langle \Delta_t v^n, \Delta_{-x} \Delta_x [(1-\theta)u^n + \theta u^{n+1}] \rangle &= -\langle v^{n+1} - v^n, \Delta_{-x} \Delta_x [(1-\theta)v^n + \theta v^{n+1}] \rangle \\ &= \langle \Delta_x (v^{n+1} - v^n), \Delta_x [(1-\theta)v^n + \theta v^{n+1}] \rangle \\ &= \frac{1}{2} \left(\|\Delta_x v^{n+1}\|^2 - \|\Delta_x v^n\|^2 \right) + \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \|\Delta_x \Delta_t v\|^2 \end{aligned}$$

elde ederiz. $\mathcal{L} u^n = (\mathcal{L} u_0^n, \mathcal{L} u_1^n, \dots, \mathcal{L} u_M^n)^T$ olsun. O zaman,

$$\Delta t \langle \Delta_t v^n, \mathcal{L} u^n \rangle \geq \Delta t \langle \Delta_t v^n, \Delta_t u^n \rangle + \frac{1}{2} \left(\|\Delta_x v^{n+1}\|^2 - \|\Delta_x v^n\|^2 \right)$$

olur.

$$\langle \Delta_t v^n, \mathcal{L} u^n \rangle \leq \frac{1}{2} \|\Delta_t v^n\|^2 + \frac{1}{2} \|\mathcal{L} u^n\|^2$$

ve

$$\langle \Delta_t v^n, \Delta_t u^n \rangle - \frac{1}{2} \|\Delta_t v^n\|^2 = \frac{1}{2} \left[\|\Delta_t u^n\|^2 - \|\Delta_t u^n - \Delta_t v^n\|^2 \right]$$

olduğundan

$$\|\Delta_x v^{n+1}\|^2 \leq \|\Delta_x v^n\|^2 + \Delta t \left(\|\mathcal{L} u^n\|^2 + \|\Delta_t u^n - \Delta_t v^n\|^2 - \|\Delta_t u^n\|^2 \right)$$

eşitsizliği (4.12)'den görülür. $\|\Delta_t u^n - \Delta_t v^n\|$ normunu hesaplamak için,

$$\Delta_t u_m^n - \Delta_t v_m^n = (1-x_m) \mathcal{L}_0 \Delta_t u^n + x_m \mathcal{L}_1 \Delta_t u^n + \Delta x \sum_{i=0}^M [((1-x_m)K_0(x_i) + x_m K_1(x_i))] \Delta_t u_i^n$$

yazılır.

$$\Delta x \sum_{m=0}^M (1-x_m)^2 = \Delta x \sum_{m=0}^M x_m^2 = \frac{2+(\Delta x)^2}{6}, \quad \Delta x \sum_{m=0}^M x_m(1-x_m) = \frac{1-(\Delta x)^2}{6}$$

olduğundan dolayı

$$\Delta x \sum_{m=0}^M \left[(1-x_m) \mathcal{L}_0 \Delta_t u^n + x_m \mathcal{L}_1 \Delta_t u^n \right]^2 \leq \frac{1}{2} \left(\left| \mathcal{L}_0 \Delta_t u^n \right|^2 + \left| \mathcal{L}_1 \Delta_t u^n \right|^2 \right)$$

ve

$$\begin{aligned} & (\Delta x)^3 \sum_{m=0}^M \left\{ \sum_{i=0}^M \left[((1-x_m)K_0(x_i) + x_m K_1(x_i)) \Delta_t u_i^n \right] \right\}^2 \\ & \leq (\Delta x)^2 \left\| \Delta_t u^n \right\|^2 \sum_{i=0}^M \sum_{m=0}^M \left[(1-x_m)K_0(x_i) + x_m K_1(x_i) \right]^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \left(\|K_0\|^2 + \|K_1\|^2 \right) \left\| \Delta_t u^n \right\|^2 \end{aligned}$$

eşitsizliklerini yazabiliriz.

$$\rho_0 = \max \left\{ \int_0^1 |K_0(x)| dx, \int_0^1 |K_1(x)| dx, \frac{1}{2} \left(\int_0^1 |K_0(x)|^2 dx + \int_0^1 |K_1(x)|^2 dx \right) \right\}$$

iken

$$\delta = \frac{1-\rho_0}{1+\rho_0} > 0$$

alalım.

$$(a+b)^2 \leq \left(1 + \frac{1}{\delta} \right) a^2 + (1+\delta) b^2$$

eşitsizliğini kullanarak

$$\left\| \Delta_t u^n - \Delta_t v^n \right\|^2 \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\delta} \right) \left(\left| \mathcal{L}_0 \Delta_t u^n \right|^2 + \left| \mathcal{L}_1 \Delta_t u^n \right|^2 \right) + \frac{1+\delta}{2} \left(\|K_0\|^2 + \|K_1\|^2 \right) \left\| \Delta_t u^n \right\|^2$$

elde ederiz.

$$\max \left\{ \Delta x \sum_{m=0}^M |K_0(x_m)|, \Delta x \sum_{m=0}^M |K_1(x_m)|, \frac{1}{2} \left(\|K_0\|^2 + \|K_1\|^2 \right) \right\} < \frac{1+\rho_0}{2}$$

eşitsizliği herhangi $\Delta x < h_0$ için sağlanacak biçimde $h_0 > 0$ verilsin. Buna göre (4.13)'den dikkat edileceği üzere herhangi $\Delta x < h_0$ için

$$\left\| \Delta_x v^{n+1} \right\|^2 \leq \left\| \Delta_x v^n \right\|^2 + \Delta t \left[\left\| \mathcal{L} u^n \right\|^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\delta} \right) \left(\left| \mathcal{L}_0 \Delta_t u^n \right|^2 + \left| \mathcal{L}_1 \Delta_t u^n \right|^2 \right) \right]$$

olduğu görülür, böylece $\Delta x < h_0$ ve $n = 1, 2, \dots, N$ için

$$\left\| \Delta_x v^n \right\|^2 \leq \left\| \Delta_x v^0 \right\|^2 + \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left\| \mathcal{L} u^k \right\|^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\delta} \right) \left(\left| \mathcal{L}_0 \Delta_t u^k \right|^2 + \left| \mathcal{L}_1 \Delta_t u^k \right|^2 \right) \right] \quad (4.14)$$

yazılır. $v_0^n = 0$ olduğundan

$$\|v^n\|_\infty^2 \leq \Delta_x \|\Delta_x v^n\|^2 \quad (4.15)$$

elde edilir.

$$u_m^n = v_m^n + (1 - x_m) \langle K_0^*, u^n \rangle + x_m \langle K_1^*, u^n \rangle + (1 - x_m) \mathcal{L}_0 u^n + x_m \mathcal{L}_1 u^n, \quad m = 1, 2, \dots$$

olduğunu dikkate alarak,

$$|u_m^n| \leq |v_m^n| + \frac{1 + \rho_0}{2} \|u^n\|_\infty + |\mathcal{L}_0 u^n| + |\mathcal{L}_1 u^n|, \quad m = 1, 2, \dots$$

eşitsizliğini

$$\|u^n\|_\infty \leq \frac{2}{1 - \rho_0} \left(\|v^n\|_\infty + |\mathcal{L}_0 u^n| + |\mathcal{L}_1 u^n| \right) \quad (4.16)$$

olacak şekilde buluruz.

$$\|\Delta_x v^0\| \leq \|\Delta_x u^0\| + \|u_0^0\| + \|u_M^0\|$$

olduğundan (4.11) ifadesini sağlayacak biçimde bir C pozitif sabitinin var olduğu (4.14)-(4.16)'dan görülür.

$u_m^n - u(x_m, t_n)$ 'yi bir önceki (4.11) hesabında u_m^n yerine koyarak, standart kesim hata analizini kontrol ettikten sonra aşağıdaki yakınsaklık sonucunu elde ederiz.

Teorem 4.3.2.

(4.4)-(4.7)'nin her ikisinde de sağlandığını varsayalım. Eğer $\theta \geq \frac{1}{2}$ ise, o zaman (4.1)-(4.3)'nün nümerik u_m^n çözümü herhangi $\Delta x < h_0$, $n\Delta t \leq T$ için

$$|u_m^n - u(x_m, t_n)| \leq \begin{cases} C[(\Delta x)^2 + \Delta t] & , \quad \theta > \frac{1}{2} \\ C[(\Delta x)^2 + (\Delta t)^2] & , \quad \theta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

hata tahminini sağlayacak biçimde (μ 'nün her ikisi bağımsız) h_0 ve C pozitif sabiti mevcuttur. (4.7) koşulu (4.5)'den çok daha zayıftır. Bununla birlikte; nümerik deneyler göstermektedir ki, (4.4) ifadesi Courant sayısında herhangi kısıtlama olmaksızın $\theta \geq \frac{1}{2}$ iken θ -metodu ile genelleştirilmiş nümerik çözümün yakınsaklığı için yeterlidir. Buna göre; kontrol ettiğimiz nümerik deneyler, $\delta \in [\sqrt{3}, 2)$ için $K_0(x) = K_1(x) = \delta x$ ve $\delta \in [\sqrt{30}, 2)$ için

$$K_0(x) = K_1(x) = \delta x(1 - x)$$

durumlarını ihtiva eder.

4.4. Etkin Algoritmalar

Bu bölümde öncelikle bilinmelidir ki $\theta > 0$ olduğu zaman A , (4.8)'de verildiği üzere $Au = w$ formunun lineer denklem sistemlerini hızlı biçimde çözmeye ihtiyacımız vardır. Kapalı formda, bir önceki sistem

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^M a_k u_k &= w_0, \\ u_{m-1} + \lambda u_m + u_{m+1} &= w_m, \quad m = 1, 2, \dots, M-1, \\ \sum_{k=0}^M b_k u_k &= w_M \end{aligned} \quad (4.17)$$

olur. Buna göre bu bölümde (4.17) çözümünü için üç etkin algoritma vereceğiz.

İlk metodumuz, Thomas algoritmasının dosdoğru bir değişimidir. $d_0 = 0$, $e_0 = 1$, $f_0 = 0$ olsun ve sonra

$$d_m = -\frac{1}{\lambda + d_{m-1}}, \quad e_m = -\frac{e_{m-1}}{\lambda + d_{m-1}}, \quad f_m = \frac{w_m - f_{m-1}}{\lambda + d_{m-1}}, \quad m = 1, 2, \dots, M-1$$

rekürans bağıntılarını tanımlayalım. O zaman

$$u_m - d_m u_{m+1} = e_m u_0 + f_m, \quad m = 0, 1, \dots, M-1 \quad (4.18)$$

olduğu (4.17)'den tümevarımla görülebilir.

Öte yandan burada $g_M = 0$, $p_M = 1$, $q_M = 0$ olarak verilsin ve

$$g_m = d_m g_{m+1} + e_m, \quad p_m = d_m p_{m+1}, \quad q_m = d_m q_{m+1} + f_m, \quad m = M-1, M-2, \dots, 0$$

rekürans bağıntılarını tanımlayalım. Buna göre;

$$u_m = g_m u_0 + p_m u_M + q_m, \quad m = 0, 1, \dots, M \quad (4.19)$$

olduğu (4.18)'den tümevarımla ispatlanabilir. (4.17)'nin ilk ve son eşitliklerini (4.19)'da yerine yazmak suretiyle

$$\begin{aligned} u_0 \sum_{k=0}^M a_k g_k + u_M \sum_{k=0}^M a_k p_k &= w_0 - \sum_{k=0}^M a_k q_k \\ u_0 \sum_{k=0}^M b_k g_k + u_M \sum_{k=0}^M b_k p_k &= w_M - \sum_{k=0}^M b_k q_k \end{aligned}$$

sistemi çözülerek u_0 ve u_M değerleri elde edilebileceğini buluruz. Bu sebeple (4.17)'nin çözümü (4.19)'dan sağlanabilir. Yine (4.17) çözümünü için bir başka algoritma tasarlamak üzere Sherman-Morrison-Woodbury formülünü kullanabiliriz.

Buna göre B bir $(M+1) \times (M+1)$ matrisi ve U ile V 'de $(M+1) \times k$ ve $k \times (M+1)$ matrisleri olsun. B ve $I + VB^{-1}U$ 'nun her ikisinin nonsingüler olduğunu varsayalım. Ters matrisi değişim formülü olarak düşünüldüğü zamanlarda Sherman-Morrison-Woodbury formülü,

$$(B + UV)^{-1} = B^{-1} - B^{-1}U(I + VB^{-1}U)^{-1}VB^{-1} \quad (4.20)$$

diye okunur. (4.20)'nin uygulamaları ve harika tarihsel süreci Hager (1989) çalışmasında mevcuttur. (4.20)'nin kullanımını gerçekleştirmek için

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & \\ & 1 & \lambda & 1 & \\ & & 1 & \lambda & 1 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 & \lambda & 1 \\ & & & & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

seçeriz ve bu durumda $A = B + UV$ 'yi

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$V = \begin{bmatrix} a_0 - 1 & a_1 & \cdots & a_{M-1} & a_M \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{M-1} & b_M - 1 \end{bmatrix}$$

ile ifade ederiz. y , $By = w$ 'nun çözümü ve $(M+1) \times 2$ tipinden W matrisi de $BW = U$ 'nun çözümü olsun. Bu durumda (4.20)'den görülür ki; (4.17)'nin çözümü,

$$u = [I - W(I + VW)^{-1}]y$$

olur. u ve y 'nin her ikisi de, B bir üç köşegenli matris olduğundan Thomas algoritması kullanılarak elde edilebilir. A matrisinin mühim bir özelliği; ilk ve son satırları hariç, onun köşegen ve iki orta köşegen olmayan kısımları (köşegen kısmı için λ ve iki orta köşegen olmayan kısmı için 1) sabiti olduğudur. Bu mühim özelliği kullanmak üzere (4.17)'nin çözümü için Liu ve Wu (1994) çalışmasının aşağıdaki algoritmasını tanımlayalım.

$$\text{Buna göre } \alpha = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \text{ ve } \beta = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}, \quad x^2 - \lambda x + 1 = 0$$

kuadratik denkleminin çözümleri olmak üzere

$$A_0 = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & & & \\ 1 & \lambda & 1 & & \\ & 1 & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & \lambda & 1 \\ & & & & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

olsun. Bu durumda $A_0 = LU$ eşitliğini

$$L = \begin{bmatrix} \alpha & & & & \\ 1 & \alpha & & & \\ & 1 & \alpha & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \alpha \\ & & & & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

ve

$$U = \begin{bmatrix} 1 & \beta & & & \\ & 1 & \beta & & \\ & & 1 & \beta & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 & \beta \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

ile ifade ederiz. Öte yandan y , $A_0 y = w$ 'nin çözümü olsun. A_0 'ın LU faktörizasyonundan dolayı, yukarıdaki denklem sistemleri,

$$\begin{cases} v_0 = \beta w_0 \\ v_m = \beta(w_m - v_{m-1}) \end{cases}, m = 1, 2, \dots, M$$

rekürans bağıntısı ile verilen $Lv = w$ 'nin çözümü v olmak üzere,

$$\begin{cases} y_M = v_M \\ y_m = v_m - \beta y_{m+1} \end{cases}, m = 0, 1, \dots, M-1$$

rekürans bağıntısı ile çözülebilir. $|\beta| < 1$ olduğundan yukarıdaki prosedürler kararlıdır. $z = u - y$ olsun, bu durumda

$$Az = \begin{bmatrix} w_0 - \sum_{k=0}^M a_k y_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ w_M - \sum_{k=0}^M b_k y_k \end{bmatrix}$$

yazılır. Burada

$$z_{m-1} + \lambda z_m + z_{m+1} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, M-1$$

dikkate alınarak;

$$\gamma = \frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}, \quad x^2 + \lambda x + 1 = 0$$

kuadratik denkleminin bir çözümü ve c_0, c_1 'de iki

$$\begin{cases} c_0 \sum_{k=0}^M a_k \gamma^{M-k} + c_1 \sum_{k=0}^M a_k \gamma^k = w_0 - \sum_{k=0}^M a_k y_k \\ c_0 \sum_{k=0}^M b_k \gamma^{M-k} + c_1 \sum_{k=0}^M b_k \gamma^k = w_M - \sum_{k=0}^M b_k y_k \end{cases}$$

denklem sisteminin tarafından belirlenen sabitler olmak üzere

$$z_m = c_0 \gamma^{M-m} + c_1 \gamma^m, \quad m = 0, 1, \dots, M$$

elde ederiz.

Sonuç olarak,

$$u = y + z$$

alınarak (4.17)'nin çözümü sağlanır. Bu algoritma, B aynı A_0 matrisi gibi seçilerek ters matris değişim formülünden ortaya çıkarılabilir. Bununla birlikte, yukarıda formüle edilen prosedür çok sezgiseldir.

Yukarıdaki algoritmaları test etmek için; Day (1982) gereğince $\delta = 0.0144$ iken

$$u_t - u_{xx} = -e^{-t} \left\{ x(x-1) + \frac{\delta}{6(1+\delta)} + 2 \right\}, \quad x \in (0,1), \quad 0 < t \leq T$$

$$u(0,t) = -\delta \int_0^1 u(x,t) dx, \quad t > 0$$

$$u(1,t) = -\delta \int_0^1 u(x,t) dx, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = x(x-1) + \frac{\delta}{6(1+\delta)}, \quad x \in [0,1]$$

örneğini kullanacağız.

Çizelge 4.1. Hata ve zaman mukayeseli veriler

		M	N	hata	zaman		
ileri Euler metodu $\left(\Delta t \approx 0.4 * (\Delta x)^2\right)$							
		32	2561	2.3e-06	50.5		
		65	10563	5.7e-07	401		
M	N	hata	zaman(A0)	zaman(A1)	zaman(A0)	zaman(A0)	
geri Euler metodu $\left(\Delta t \approx 0.4 * (\Delta x)^{3/2}\right)$							
32	182	5.6e-05	3.98	8.65	8.50	4.22	
65	525	1.9e-05	33.3	46.2	49.2	21.7	
130	1483	6.8e-06	384	216	285	120	
Crank-Nicolson metodu $\left(\Delta t \approx \Delta x\right)$							
32	32	2.1e-05	0.91	1.31	1.60	0.73	
65	66	5.0e-06	4.60	4.92	6.36	2.88	
130	131	1.2e-06	37	19	25	11	
260	260	3.2e-07	440	76	113	45	

Yukarıdaki örnek; eğer A katsayı matrisinin yapısı işletilmezse, o zaman geri Euler ve Crank-Nicolson metotları, ileri Euler metodunun yaptığından daha fazla CPU zamanı harcayacağını göstermek için Ekolin (1991) tarafından kullanıldı. Bizim nümerik deneyimiz, MATLAB 4.2 kullanılarak bir Sun Sparc1 10 üzerine yapılmıştır. Çizelge 4.1’de “hata”, $\max_{0 \leq m \leq M, 1 \leq n \leq N} |u_m^n - u(x_m, t_n)|$ ile maksimum hatayı belirtir, “zaman”, CPU zamanını, sırasıyla, A_0 , A_1 , A_2 ve A_3 ’de, standart MATLAB çözücü ve bu bölümde tanımlanan (uygun biçimde) üç algoritmayı gösterir.

Yukarıdaki bilgiler karşılaştırılarak, sürpriz olmayan bir biçimde, Crank-Nicolson metodunun diğer ikisinden daha etkin olduğunu bulduk. Yine de, ileri Euler metodu, hala, geri Euler metodunu performans dışı bırakmaktadır. Basit bir hesap düşüşü gösterir ki, Gaussian eliminasyonlu (4.17) çözümünün (bir çok çarpım ve bölüm bakımından) maliyeti M^2 ninkine orantılıdır, keza A_1 , A_2 ve A_3 ’lü (4.17) çözümünün maliyeti de, sırasıyla, $14M$, $21M$ ve $8M$ civarındadır. A_3 en

hızlı olmasına rağmen, diğer iki algoritma daha genel lineer denklem sistemini çözmek için kolayca dönüştürülebilir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada diferensiyel denklemler için nonlocal problemlerin nümerik çözümleri incelendi. Bu tür problemlerin çözümü için sonlu fark metodu kullanıldı. Ayrıca düzgün şebekelerde üstel katsayılı fark şeması kuruldu ve özellikleri verildi. Yaklaşık çözümün, kesin çözüme ε 'a göre düzgün yakınsak olduğu ispatlandı ve yakınsama hızı belirlendi. Çözüm yapılırken interpolasyon kuadratör formlarından yararlanıldı. Burada kalan terim integral biçiminde alındı.

Singüler özellikli diferensiyel denklemler yüksek türevler karşısında ε gibi küçük pozitif bir parametrenin bulunduğu problemler olarak bilinir. Bu tür problemlerin çözümü, çok değişkenli bir karakter gösterir. Yani çözüm, ince geçiş katlarında hızlı diğer yerlerde düzenli ve yavaş değişir. Dolayısıyla singüler pertürbe problemlerin işleyişinde ciddi zorluklar ortaya çıkmıştır. Bu zorluklar nümerik çözümde de kendisini göstermiştir. Klasik nümerik yöntemler kararsızlıkları yada ıraksak olmaları nedeniyle uygulanması imkansız olmuştur. Bu nedenle ε 'a göre düzgün yakınsaklık özelliğine sahip nümerik metotların kurulması büyük önem taşımaktadır.

Singüler diferensiyel denklemlerin çözümü için bir program yapıldı ve yakınsama hızı belirlendi. Sadece sınır katlarında uygun üstel katsayılı şebekeye ihtiyaç duyulduğu, diğer yerlerde klasik metodun kullanılabileceği anlaşıldı. Alınan ε değerleri küçüldükçe kesin çözüme daha fazla yaklaşan hata tahminleri bulundu. Sınır katlarında kurulan uygun üstel katsayılı şemanın kesin çözüme büyük ölçüde yara sağladığı anlaşıldı.

Ayrıca metodun kullanımının ekonomik açıdan maliyetinin minimum olduğu anlaşıldı ve bu metodun uygun olduğu takdirde kullanılması gerektiği sonucuna varıldı.

KAYNAKLAR

- Amirali, G., Duru, H., 2002. *Nümerik Analiz*. Pegem A Yayıncılık, Ankara. 1-371.
- Amiraliyev, G., 1990. Difference method for the solution of one problem of the theory of dispersive waves (in Russian). *Differential Equations*, **26**: 2146-2154.
- Amiraliyev, G., Cakir, M., 2000. A uniformly convergent difference scheme for a singularly perturbed problem with convective term and zeroth order reduced equation. *Int. J. Appl. Math.*, **2**(12): 1407-1419.
- Amiraliyev, G., Cakir, M., 2002. Numerical solution of the singularly perturbed problem with nonlocal boundary condition (English Edition). *Appl. Math. And Mech.*, **23**(7): 755-764.
- Bitsadze, A. V., Samarskii, A. A., 1969. Lineer eliptik sınır değer problemlerinin genelleştirmeleri. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **185**(4): 739-740.
- Cannon, J. R., 1984. *One-Dimensional Heat Equation Volume 23*. Encyclopedia of Math. And Its Appl, Addison-Wesley Reading, MA.
- Cannon, J. R., Esteve, S. P., Perez Esteve, S., Van Der Hoek, J., 1987. A galerkin procedure for the diffusion equation subject to the specification of mass. *SIAM J. Numer. Anal.*, **24**: 499-515.
- Cannon, J. R., Lin, Y., Wang, S., 1990. An implicit finite difference scheme for the diffusion equation subject to mass specification. *Int. J. Eng. Sci.*, **28**: 573-578.
- Cziegis, R., 1988. The numerical solution of singularly perturbed nonlocal problem (in Russian). *Lietuvas Matem. Rink*, **28**: 144-152.
- Cziegis, R., 1991. The difference schemes for problems with nonlocal conditions. *Informatica (Lietuva)*, **2**: 155-170.
- Day, W. A., 1982. Extension of a property of the heat equation to linear thermoelasticity and other theories. *Quart. Appl. Math.*, **40**: 319-330.
- Day, W. A., 1983. A decreasing property of solutions of parabolic equations with applications to thermoelasticity. *Quart. Appl. Math.*, **41**: 468-475.
- Doolan, E. P., Miller, J. J. H., Schilders, W. H. A., 1980. *Uniform Numerical Methods For Problems With Problems With Initial And Boundary Layers*. Boole Press, Dublin. 324.
- Ekolin, G., 1991. Finite difference methods for a nonlocal boundary value problem for the heat equation. *BIT*, **31**: 245-261.
- Fairweather, G., Lopez-Marcos, J. C., 1996. Galerkin methods for a semilinear parabolic problem with nonlocal boundary conditions. *Adv. Comput. Math.*, **6**: 243-262.
- Friedman, A., 1986. Monotonic decay of solutions of parabolic equations with nonlocal boundary conditions. *Quart. Appl. Math.*, **44**: 401-407.
- Farrell, P. A., Hegarty, A. F., Miller, J. J. H., O'Riordan, E., Shishkin, G. I., 2000. *Robust Computational Techniques For Boundary Layers*. Chapman-Hall/CRC, Boca Raton. 254.
- Hager, W. W., 1989. Updating the inverse of a matrix. *SIAM Rev.*, **31**: 221-239.

- Kadalbajoo, M. K., Patidar, K. C., 2002. A survey of numerical techniques for solving singularly perturbed ordinary differential equations. *Appl. Math. and Comput.*, **130**: 457-510.
- Kawohl, B., 1987. Remark on a paper by W.A. Day on a maximum principle under nonlocal boundary conditions. *Quart. Appl. Math.*, **44**: 751-752.
- Lin, Y. 1991. An inverse problem for a class of quasilinear parabolic equations. *SIAM J. Math. Anal.*, **22**: 146-156.
- Lin, Y., Xu, S., Yin, H.-M., 1997. Finite difference approximations for a class of non-local parabolic equations. *Int. J. Math. Math.Sci.*, **20**: 147-163.
- Liu, Y., Wu, C. W., 1994. *Solution Of Quasi-tridiagonal System Of Linear Equations, In: Functional Analysis, Approximation Theory And Numerical Analysis*. World Sci. Publ., River Edge, NJ. 259-269.
- Liu, Y., 1999. Numerical solution of the heat equation with nonlocal boundary conditions. *J. Comput. And Appl. Math.*, **110**: 115-127.
- Miller, J. J. H., O'Riordan, E., Shishkin, G. I., 1996. *Fitted Numerical Methods For Singular Perturbation Problems*. World Scientific, Singapore. 166.
- Morton, K. W., Mayers, D. F., 1994. *Numerical Solution Of Partial Differential Equations*. Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- Nahushev, A. M., 1985. On nonlocal boundary value problems (in Russian). *Differential Equations*, **21**: 92-101.
- Nayfeh, A.H., 1973. *Perturbation Methods*. Wiley, New york.
- O'Malley, R. E., 1991. *Singular Perturbation Methods For ,Ordinary Differential Equations*. Springer Verlag, New york. 225.
- Pao, C. V., 2001. Numerical solutions of reaction-diffusion equations with nonlocal boundary conditions. *J.Comput.Appl.Math.*, **136**: 227-243.
- Roos, H. G., Stynes, M., Tobiska, L., 1996. *Numerical Methods For Singularly Perturbed Differential Equations, Convection-Diffusion And Flow Problems*. Springer Verlag, New york. 348.
- Samarskii, A. A., 1983. *Theory Of Difference Schemes 2. Edition*. Nauka, Moskow. 616.

EK 1

3. BÖLÜM ALGORİTMASI İÇİN 1. PROGRAM

```

/*****
/*Bu program nonlocal singüler pertürbe olmuş sınır değer probleminin*/
/*Q-basic'te nümerik çözümünü yapar*/
*****/

CLS
DIM AF(100), BF(100), FF(100), A(100), B(100), C(100), ALF(100), BTA(100),
Y(100), RH(100)
10 INPUT E, H, N
IF N = -1 THEN 200
DEF FNA (L1, L2, H) = EXP(-(L1 + L2) * H) / ((EXP(-(L1 * H)) - 1) * (EXP(-(L2
* H)) - 1))
DEF FNB (L1, L2, H) = 1 / ((1 - EXP(-(L1 * H))) * (1 - EXP(-(L2 * H))))
DEF FNC (L1, L2, H) = (((1 + EXP(-(L1 * H))) / (1 - EXP(-(L1 * H)))) * (((1 +
EXP(-(L2 * H))) / (1 - EXP(-(L2 * H)))))) - 1
REM Kovma Yonteminin Y0'a Uygulanması
ALF(1) = 0: BTA(1) = 0
FOR I = 1 TO N - 1
AF(I) = 2 * ((I * H) + 1): BF(I) = 4 - (I * H) ^ 2 - 2 * (I * H) - E: FF(I) = 2 * E * ((I
* H) + 1) + (1 - (I * H)) * (4 - (I * H) ^ 2 - 2 * (I * H) - E)
L1 = (AF(I) + SQR(AF(I) ^ 2 + 4 * BF(I))) / (2 * E)
L2 = (AF(I) - SQR(AF(I) ^ 2 + 4 * BF(I))) / (2 * E)
A(I) = BF(I) * FNA(L1, L2, H)
B(I) = BF(I) * FNB(L1, L2, H)
C(I) = (BF(I) / 2) * FNC(L1, L2, H)
ALF(I + 1) = B(I) / (C(I) - ALF(I) * A(I))
BTA(I + 1) = (A(I) * BTA(I) + FF(I)) / (C(I) - AF(I) * A(I))
NEXT I
Y(N) = 0: Y(0) = 0
FOR J = N - 1 TO 1 STEP -1
Y(J) = ALF(J + 1) * Y(J + 1) + BTA(J + 1)
NEXT J
FOR J = 0 TO N
S$ = "Y(##):###.#####"
PRINT USING S$; J; Y(J)
NEXT J
GOTO 10
200 INPUT N
IF N = -1 THEN 400
```

```
IF N = 10 THEN
FOR J = 1 TO N
RH(J) = ABS(Y(J) - Y(2 * J))
S$ = "RH(##):###.#####"
PRINT USING S$; J; RH(J)
NEXT J
ELSE
FOR J = 2 TO N STEP 2
RH(J) = ABS(Y(J) - Y(2 * J))
S$ = "RH(##):###.#####"
PRINT USING S$; J; RH(J)
NEXT J
END IF
GOTO 200
400 END
```

EK 2

3. BÖLÜM ALGORİTMASI İÇİN 2. PROGRAM

```

/*****
// Bu program nonlocal singüler pertürbe olmuş sınır değer probleminin */
// C-programlama dilinde nümerik çözümünü yapar */
*****/

#include<stdio.h>
#include<math.h>
#include<conio.h>
int i,n,l;
float y[130],y1[130],y2[130],lambda,s0,s1,s2,s;
float alfa[130],beta[130],beta1[130],ep,x,x0,x1,y00,y0n,h;
float A1,B1,C,F1,r1,r2,p;
float a(float x)
{ return(2*(x+1));}
float b(float x)
{ return(-x*x-2*x+4);}
float f(float x)
{ return(-(exp(x)+exp(x*x)));}
float L1(float x)
{ return(.5*(a(x)+sqrt(pow(a(x),2)+4*b(x)))/ep);}
float L2(float x)
{ return(.5*(a(x)-sqrt(pow(a(x),2)+4*b(x)))/ep);}
float max(float t1,float t2)
{ return((t1<t2)?t2:t1);}
main()
{ float y12[130],y13[130];
  clrscr();
  printf("a degeri   :");scanf("%f",&x0);
  printf("b degeri   :");scanf("%f",&x1);
  printf("epsilon   :");scanf("%f",&ep);
  printf("y0 degeri   :");scanf("%f",&y00);
  printf("nokta sayisi:");scanf("%d",&n);
  h=(x1-x0)/n;
  for(l=1;l<=3;l++)
  { alfa[l]=0; beta[l]=1;beta1[l]=0;
    if(l!=1) { n=2*n;h=h/2;}
    for(i=1;i<=n-1;i++)
    { x=x0+i*h;
      A1=b(x)*exp(-L1(x)*h)/((1-exp(-L1(x)*h))*(1-exp(L2(x)*h)));
      B1=b(x)*exp(L2(x)*h)/((1-exp(-L1(x)*h))*(1-exp(L2(x)*h)));
      C=b(x)*(1+exp(-(L1(x)-L2(x))*h))/((1-exp(-L1(x)*h))
        *(1-exp(L2(x)*h)));
    }
  }
}

```

```

    F1=-f(x);
    s=C-alfa[i]*A1;
    alfa[i+1]=B1/s;
    beta[i+1]=(A1*beta[i]+F1)/s;
    beta1[i+1]=(A1*beta1[i])/s;
}
y1[0]=y00; y1[n]=0;
y2[0]=0;y2[n]=1;
for(i=n-1;i>=1;i--) y1[i]=y1[i+1]*alfa[i+1]+beta[i+1];
for(i=n-1;i>=1;i--) y2[i]=y2[i+1]*alfa[i+1]+beta1[i+1];
s1=0;s2=0;
for(i=n/2;i<=n;i++)
{ s0=sin(x0+i*h)-sin(x0+(i-1)*h);
  s1=s1+s0*(y1[i]-y1[i-1]);
  s2=s2+s0*(y2[i]-y2[i-1]);}
lambda=s1/(1-s2);
for(i=0;i<=n;i++) {y[i]=y1[i]+lambda*y2[i];}
for(i=0;i<=n;i++)
{ switch (l)
  { case 1:y12[i]=y[i];break;
    case 2:y13[i]=y[i];break;
  }
}
}
n=n/4;h=4*h;
r1=fabs(y12[0]-y13[0]);
for(i=1;i<=n;i++) r1=max(r1,fabs(y12[i]-y13[2*i]));
r2=fabs(y13[0]-y[0]);
for(i=2;i<=n*2;i=i+2) r2=max(r2,fabs(y13[i]-y[2*i]));
p=log(r1/r2)/log(2);
printf("r1=%10.7f r2=%10.7f p=%10.7f\n",r1,r2,p);
for(i=0;i<=n*4;i++) { x=x0+h*i/4;printf("{ %4.2f, %10.8f}",x,y[i]);}
printf("\n"); printf("\n");
for(i=0;i<=n*2;i++) { x=x0+h*i/2;printf("{ %4.2f, %10.8f}",x,y13[i]);}
printf("\n");printf("\n");
for(i=0;i<=n;i++) { x=x0+h*i;printf("{ %4.2f, %10.8f}",x,y12[i]);}
getch();
}

```

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Diyarbakır'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Diyarbakır'da tamamladı. 1998 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 2002 yılında bölümü başarıyla bitirdikten sonra aynı yıl Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı ve devam etmektedir. Bu zaman zarfında dershanelerde Matematik ve Geometri öğretmeni olarak görev yaptı.