EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(DOKTORA TEZİ)

TÜREVLİ VE GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLİ ASAL HALKALAR

Hülya İNCEBOZ GÜNAYDIN

Matematik Anabilim Dalı
Bilim Dalı Kodu: 403.01.01
Tezin Sunulduğu Tarih: 11.09.2006

Tez Danışmanları
Prof. Dr. Nurcan ARGAÇ
Prof. Dr. Hatice KANDAMAR

Bornova-İZMİR

ÖZET

TÜREVLİ VE GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLİ ASAL HALKALAR

İNCEBOZ GÜNAYDIN, Hülya

Doktora Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Nurcan Argaç, Prof. Dr. Hatice Kandamar

Eylül 2006, 98 sayfa

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, tez konusu tanıtılmış ve bu konu ile ilgili çalışmalar hakkında kısa bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde, bu tezi anlamada kolaylık sağlayacak genel bilgiler yer almıştır. Ayrıca bu bölümde, halkalarda türev çeşitleri, halka ve modül yapılarındaki genelleştirilmiş türev tanımları verilmiş, günümüze kadar bu konudaki çalışmaların kısa bir özeti yapılmıştır.

Üçüncü bölümde, asal halkadaki polinom özdeşlikleri üzerinde türev çalışılarak, halkanın yapısı hakkında bazı sonuçlara ulaşılmış ve bu sonuçlar yarı-asal halkalara genişletilmiştir.

Dördüncü bölümde, asal halkalarda Jordan çarpımın, genelleştirilmiş türev için bazı özellikleri incelenmiştir.

Beşinci bölümde, tek yanlı idealler üzerindeki multilineer polinomlar, genelleştirilmiş türev için ele alınmıştır.

Son bölümde, bir modül yapısı üzerindeki τ-sol çarpan dönüşümü, Jordan τ-sol çarpan dönüşümü, Lie (σ,τ)-sol çarpan dönüşümü ve Brešar genelleştirilmiş Lie (σ,τ)-türev tanımları ilk kez verilmiş; Brešar ve Nakajima anlamındaki genelleştirilmiş (σ,τ)-türev kümelerinin arasında bir izomorfizma olması için bir gerek ve yeter koşul verilmiştir.

Anahtar sözcükler: Asal halka, yarı-asal halka, türev, genelleştirilmiş türev, (σ,τ)-türev, genelleştirilmiş (σ,τ)-türev, tam dizi.

ABSTRACT

PRİME RINGS WITH DERIVATIONS AND GENERALIZED DERIVATIONS

İNCEBOZ GÜNAYDIN, Hülya
Ph. D in Mathematics Department
Supervisors : Prof. Dr. Nurcan Argaç, Prof. Dr. Hatice Kandamar
September 2006, 98 pages

This thesis consists of six chapters. In the first chapter, the subject of thesis is introduced and the information about works which are related with this subject is shortly given.

In the second chapter, general informations are founded to make easy understanding of the thesis. Furthermore in this chapter the types of derivations in rings, generalized derivations in rings and in module structures are given and a short summary of works about this subject so far is done.

In the third chapter, having worked derivation on polynomial identities in prime rings, some corollories about structure of the rings are reached and these corollories are extended to semi-prime rings.

In the fourth chapter, some properties of Jordan product in prime rings are investigated for generalized derivations.

In the fifth chapter, multilinear polynomials on one sided ideals are considered for generalized derivations.

In the last chapter, the definitions of τ-left multilier transformation, Jordan τ-left multiplier trans., Lie (σ,τ)-left multiplier trans. and Brešar generalized Lie (σ,τ)-derivation on module structure are initially given; a necessary and sufficient condition is given for the sets of generalized (σ,τ)-derivations being isomorphic in the sense of Brešar and Nakajima.

Key Words: Prime ring, semi-prime ring, derivation, generalized derivation, (σ,τ)-derivation, generalized (σ,τ)-derivation, exact sequence.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince değerli görüşlerinden faydalandığım hocam sayın Prof. Dr. Nurcan Argaç' a, katkılarından dolayı Yrd. Doç. Dr. Vicenzo de Filippis' e, tezin yazım aşamasında ve biçimlenmesinde değerli yardımlarından ve dostluğundan dolayı arkadaşım Araş. Gör. Murat E. Berberler' e teşekkürlerimi sunarım.

Başaracağıma inanan ve sonuna kadar yanımda olan sevgili annem Gülderen İnceboz' a teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET ………………………………………………………………. V

ABSTRACT ……………………………………………………….. VII

TEŞEKKÜR ……………………………………………………….. IX

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ ………………................... XIII

1.GİRİŞ ………………………………………………………… 1

2. ÖN BİLGİLER ……………………………………………… 4

2.1 Genel Bilgiler …………………………………………… 4

2.2 Adi Türevli Halkalar …………………………....................... 18

2.3 Genelleştirilmiş Türevli Halkalar ……………………….…... 24

2.4 Genelleştirilmiş (σ,τ)-Türevli Halkalar ………………………… 31

3. İDEAL ÜZERİNDEKİ ADİ TÜREVLER ………………………… 36

3.1 Asal Halkalarda Türev ……………………………………….. 36

3.2 Yarı-asal Halkalarda Türev ……………………………….... 46

4. JORDAN ÇARPIMLI GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLER …… 48

5. TEK YANLI İDEALLER ÜZERİNDEKİ GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLİ MULTİLİNEER POLİNOMLAR …………………… 61

6. GENELLEŞTİRİLMİŞ (σ,τ)-TÜREVLER …………………..…….82

6.1 Genelleştirilmiş (σ,τ)-Türevlerin İzomorfluğu ……………….. 82

6.2 Brešar Genelleştirilmiş (σ,τ)-Türevlerin Genişlemesi………… 86

7. SONUÇ ……………………………………………………………..90

KAYNAKLAR DİZİNİ ………………………………………….... 91

ÖZGEÇMİŞ ……………………………………………………….. 98

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler	Açıklama	Sayfa No
$Z(R)$:	R halkasının merkezi ………………..........	4
$Ann_r(U)$:	U kümesinin sağ sıfırlayanı ………………	5
$Ann_l(U)$:	U kümesinin sol sıfırlayanı ……………….	5
$\oplus$:	Direkt toplam ……………………………..	5
$\otimes$:	Tensör çarpım …………………………….	22
$Soc_r(R)$:	R halkasının tüm minimal sağ ideallerinin toplamı ……………………………………...	6
$Ker\varphi$:	φ dönüşümünün çekirdeği ………………..	7
$Im\varphi$:	φ dönüşümünün görüntüsü ……………….	7
$Q(R)$ $(Q_r(R))$:	R halkasının (sağ) Martindale kesirler halkası ……………………………………..	9
C :	R halkasının genişletilmiş merkezi ……….	9
R_C :	R halkasının merkezi kapanışı ……………	10
$U(R)$:	R halkasının Utumi kesirler halkası ………	10
CharR :	R halkasının karakteristiği ………………..	11
I_a :	Bir halkanın a elemanı ile belirlenen iç türevi ……………………………………....	18
$[x,y]$:	$= xy - yx$ (kommutator çarpım) ………….	5

SİMGELER VE KISALTMALAR (Devam)

Simgeler	Açıklama	Sayfa No
xoy :	$= xy + yx$ (Jordan çarpım) ………………..	5
$Der_k(A,M)$:	Türevlerin kümesi ………………………..	27
$Inn_k(A,M)$:	İç türevlerin kümesi ………………………	27
$JDer_k(A,M)$:	Jordan türevlerin kümesi …………………	27
$LieDer_k(A,M)$:	Lie türevlerin kümesi …………………….	27
$BDer_k(A,M)$:	Brešar anlamında genelleştirilmiş türevlerin kümesi ……………………………..........	29
$BInn_k(A,M)$:	Brešar anlamında genelleştirilmiş iç türevlerin kümesi …………………………	29
$BJDer_k(A,M)$:	Brešar anlamında genelleştirilmiş Jordan türevlerin kümesi ………………………...	29
$BLieDer_k(A,M)$:	Brešar anlamında genelleştirilmiş Lie türevlerin kümesi ………………………...	29
$gDer_k(A,M)$:	Genelleştirilmiş türevlerin kümesi ……….	29
$gInn_k(A,M)$:	Genelleştirilmiş iç türevlerin kümesi …….	29
$gJDer_k(A,M)$:	Genelleştirilmiş Jordan türevlerin kümesi …	29
$gLieDer_k(A,M)$:	Genelleştirilmiş Lie türevlerin kümesi …...	29
m_r :	*m* ile sağ çarpım ………………………….	31
m_l :	*m* ile sol çarpım …………………………	30

SİMGELER VE KISALTMALAR (Devam)

Simgeler	Açıklama	Sayfa No
I_R :	R halkasının birim dönüşümü ……………	50
$[x,y]_{\sigma,\tau}$:	$= x\tau(y) - \sigma(y)x$ ……………………………	32
$Der_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)$:	(σ,τ)-türevlerin kümesi …………………...	33
$Inn_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)$:	İç (σ,τ)-türevlerin kümesi ………………..	33
$JDer_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)$:	Jordan (σ,τ)-türevlerin kümesi …………..	33
$LieDer_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)$:	Lie (σ,τ)-türevlerin kümesi ………………	33
$BDer_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)$:	Brešar anlamında genelleştirilmiş (σ,τ)-türevlerin kümesi …………………...	33
$BInn_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)$:	Brešar anlamında genelleştirilmiş iç (σ,τ)-türevlerin kümesi …………………..	33
$BJDer_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)$:	Brešar anlamında genelleştirilmiş Jordan (σ,τ)-türevlerin kümesi …………………..	33
$BLieDer_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)$:	Brešar anlamında genelleştirilmiş Lie (σ,τ)-türevlerin kümesi ………………….	83
$gDer_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)$:	Genelleştirilmiş (σ,τ)-türevlerin kümesi …	34
$gInn_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)$:	Genelleştirilmiş iç (σ,τ)-türevlerin kümesi …………………………………….	33

$gJDer_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)$: Genelleştirilmiş Jordan (σ,τ)-türevlerin kümesi 34

$gLieDer_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)$: Genelleştirilmiş Lie (σ,τ)-türevlerin kümesi 34

$Mul^{(\tau)}(A,M)$: τ-sol çarpan kümesi 82

$JMul^{(\tau)}(A,M)$: Jordan τ-sol çarpan kümesi 83

$LieMul^{(\sigma,\tau)}(A,M)$: Lie (σ,τ)-sol çarpan kümesi 83

1. GİRİŞ

Asal halkalarda türev tanımını ilk kez 1957 yılında Posner ortaya koymuştur. Posner (1957) bu çalışmasında, türevli asal halkaların değişmeliliğini incelemiştir.

Günümüze kadar türev konusuyla ilgili pek çok çalışma yapılmıştır. Herstein (1979); Giambruno ve Herstein (1981); Lee, P. H. ve Lee, T.K. (1981), bu konudaki ilk çalışanlar arasında yer almaktadır.

Daha sonraki yıllarda, Jordan türev, Lie türev, (σ,τ)-türev, Jordan (σ,τ)-türev tanımları verilmiş ve asal halkalarda bu türevlerin sağladığı özellikler araştırılmıştır. Ayrıca asal halkalarda elde edilen sonuçlar, yarı-asal halkalara genişletilmeye çalışılmıştır.

Giambruno ve Herstein (1981), bir asal halka üzerindeki bir türevin sabit bir pozitif tamsayı kuvvetinin sıfır olması durumunda, türevin sıfır dönüşümü olduğunu ispatlamışlardır. Herstein (1982), bu kuvvetin merkezde olma durumunu incelemiştir. Chang (2003), multilineer polinomların türevini çalışmıştır. Ashraf ve Rehman (2002), bir halkanın sıfırdan farklı bir ideali üzerindeki bir türevin sağladığı özellikleri araştırmışlardır.

1991 yılında Brešar, genelleştirilmiş türevi tanımlamış ve iki türevin bileşkesi ile ilgili bazı özellikler, genelleştirilmiş türevlere taşımıştır. Bu çalışmayı Hvala (1998), Lee (1999) ve Lee ve Shiue (2001) gibi matematikçilerin çalışmaları izlemiş bu çalışmalarda asal halka üzerinde tanımlı genelleştirilmiş türevlerin bazı cebirsel özellikleri verilmiştir.

Lee, T.K. (1999), her genelleştirilmiş türevin, yarı-asal halkanın sağ Martindale kesirler halkasına tek türlü genişletilebileceğini ispatlamıştır.

Nakajima (1999), bir modül yapısı üzerinde, farklı bir genelleştirilmiş türev tanımlayıp, bu tip türevlerin kümesinin homolojik yapısını incelemiştir. Ayrıca Nakajima (2000a, 2000b), genelleştirilmiş Jordan türev ve genelleştirilmiş Lie türevi tanımlamış, bu tür türevlerin kümesi ile genelleştirilmiş türevlerin kümesi arasındaki funktoral bağıntıyı ele almıştır.

Hamaguchi (2001), Brešar ve Nakajima anlamındaki genelleştirilmiş türev kümeleri arasında bir izomorfizma olması için bir gerek ve yeter koşul vermiştir.

Albaş ve Argaç (2002), Nakajima (2000a, 2000b)' deki sonuçları, genelleştirilmiş (σ,τ)-türev, genelleştirilmiş Jordan (σ,τ)-türev ve genelleştirilmiş Lie (σ,τ)-türevlere genişletmişlerdir.

Wei (2004), Giambruno ve Herstein (1981)'in çalışmasını genelleştirilmiş türevlere taşımaya çalışmıştır.

Argaç ve Albaş (2004), asal halkaların türevi ile ilgili bilinen bazı özellikleri, genelleştirilmiş türevlere genişletmişlerdir.

Bu tezin ilk amacı, asal halkalarda türev konusuyla ilgili açık noktaları kapatmaktır. Bu amaçla öncelikle, bir asal halkanın sıfırdan farklı bir ideali üzerinde türev çalışılmış, daha sonra elde edilen sonuçlar, yarı-asal halkalara genişletilmiştir.

Benzer düşünceyle, asal halkalarda genelleştirilmiş türev ele alınmış, Jordan çarpımlı asal halkalar için bazı özellikler elde edilmiştir.

Üçüncü olarak, bir asal halkanın sıfırdan farklı tek yanlı ideali üzerindeki genelleştirilmiş türevli multilineer polinomlar ele alınmıştır.

Son olarak, Hamaguchi (2001) ve Albaş ve Argaç (2002)'ın çalışmalarından esinlenerek; ilk olarak τ-sol çarpan dönüşümü, Jordan τ-sol çarpan dönüşümü, Lie (σ,τ)-sol çarpan dönüşümü ve Brešar genelleştirilmiş Lie (σ,τ)-türev tanımları ilk kez bu tezde tanıtılmış, daha sonra da, Brešar ve Nakajima anlamındaki genelleştirilmiş (σ,τ)-türevler arasındaki ilişki araştırılmıştır.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde tezin okunabilirliğini kolaylaştırmak için bazı temel tanımlar ile, yapılacak ispatlarda çok sık kullanılacak olan asal ve yarı-asal halkaların bazı özellikleri kolaylık sağlamak amacıyla alındıkları kaynaklarla birlikte verilecektir. Bu çalışma boyunca halka kavramı ile daima 'birleşmeli halka' anlaşılacaktır.

2.1 Genel Bilgiler

Tanım 2.1.1 R bir halka olsun. $a, b \in$ R için $a\mathrm{R}b = 0$ olduğunda $a = 0$ veya $b = 0$ oluyorsa R halkasına **asal halka** denir.

Tanım 2.1.2 R bir halka olsun. $a \in$ R için $a\mathrm{R}a = 0$ olduğunda $a = 0$ oluyorsa R halkasına **yarı-asal halka** denir.

Tanım 2.1.3 R bir halka olsun. Z(R) = $\{ x \in \mathrm{R} : xr = rx$, her $r \in \mathrm{R} \}$ kümesine R halkasının **merkezi** denir.

Z(R) R halkasının bir alt halkasıdır.

Y.Özellik 2.1.1 R bir asal halka, a ve b R halkasının herhangi iki elemanı olsun. $a \in$ Z(R) ve $ab \in$ Z(R) ise $b \in$ Z(R) veya $a = 0$ dır.

Tanım 2.1.4 R bir halka ve m bir tamsayı olsun. $x \in$ R için $m\mathrm{x} = 0$ olduğunda $m = 0$ veya $x = 0$ oluyorsa R halkasına ***m*-torsion free halka** denir.

Tanım 2.1.5 R ve R' herhangi iki halka ve $f : \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}'$ bir toplamsal dönüşüm olsun. Her $x, y \in$ R için $f(xy) = f(x)f(y)$ ise o zaman f dönüşümüne bir **halka homomorfizması**, özel olarak $\mathrm{R} = \mathrm{R}'$ ise o zaman f dönüşümüne R halkasının **endomorfizması** denir. Her $x, y \in$ R için $f(\mathrm{xy}) = f(\mathrm{y})f(\mathrm{x})$ ise o zaman f dönüşümüne bir **ters-homomorfizma** denir.

Not 2.1.1 Bu çalışma boyunca, R bir halka olmak üzere her x, $y \in$ R için $[x, y] = xy - yx$ ile kommutatör çarpım; $xoy = xy + yx$ ile de Jordan çarpım kastedilecektir.

Tanım 2.1.6 R ve R$'$ herhangi iki halka ve f : R $\rightarrow$ R$'$ bir toplamsal dönüşüm olsun. Her $x \in$ R için $f(x^2) = f(x)\,f(x)$ ise o zaman f dönüşümüne bir **Jordan homomorfizması**, her x, $y \in$ R için $f([x, y]) = [f(x), f(y)]$ ise o zaman f dönüşümüne bir **Lie homomorfizması** denir.

Tanım 2.1.7 U, R halkasının boş olmayan bir alt kümesi olmak üzere

Ann_r(U) = {$r \in$ R : Ur = 0 } kümesine U kümesinin **sağ sıfırlayanı**,

Ann_l(U) = {$r \in$ R : rU = 0 } kümesine U kümesinin **sol sıfırlayanı**,

denir.

Y. Özellik 2.1.2 (Lambek, 1966) R bir yarı-asal halka ve U, R halkasının bir ideali ise o zaman Ann_r(U) = Ann_l(U) olur. Bu durumda U idealinin sıfırlayanı Ann(U) ile gösterilir.

Y. Özellik 2.1.3 (Lambek, 1966) Bir R yarı-asal halkasının bir U ideali için U ∩ Ann(U) = 0 dır.

Tanım 2.1.8 Bir R halkasının U_1 ve U_2 idealleri için R = $U_1 + U_2$ ve $U_1 \cap U_2 = 0$ şartları sağlanıyorsa o zaman R halkası U_1 ve U_2 ideallerinin **direkt toplamıdır** denir ve R = $U_1 \oplus U_2$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.9 R bir halka ve J, R halkasının bir sağ ideali olsun. Her $0 \neq r_1$, $r_2 \in$ R için $r_1 r \neq 0$ ve $r_2 r \in$ J olacak şekilde bir $r \in$ R varsa o zaman J idealine **yoğundur** denir.

Tanım 2.1.10 R bir halka olsun. Her $a \in$ R için $axa = a$ olacak şekilde bir $x \in$ R varsa o zaman R halkasına **regüler halka** denir.

Y. Özellik 2.1.4 (Lecture notes on rings and modules (1972), Proposition 1.29) R bir regüler halka olsun. Her $a, b \in$ R için, aR + bR = gR ve $g^2 = g$ olacak şekilde bir $g \in$ R vardır. Üstelik $ga = a$ ve $gb = b$ dir.

Tanım 2.1.11 (Beidar, Martindale III and Mikhalev, 1996) Bir R halkasının tüm minimal sol ideallerinin toplamına R halkasının **sol socle** ı denir ve **Soc_l(R)** ile gösterilir. Benzer şekilde sağ socle Soc_r(R) de tanımlanabilir. Soc_r(R) ile Soc_l(R) her zaman eşit değildir. R bir yarı-asal halka ise Soc_r(R) = Soc_l(R) ve kısaca Soc(R) ile gösterilir.

Y. Özellik 2.1.5 (Beidar, Martindale III and Mikhalev, 1996) **(i)** R bir halka olsun. Soc_l(R), R halkasının tüm minimal sol ideallerinin direkt toplamına eşit olan bir idealdir.

(ii) R, Soc(R) ideali sıfırdan farklı olan bir primitif halka ise o zaman Soc(R) bir basit halkadır.

Y. Özellik 2.1.6 (Lecture Notes on Rings and Modules (1972), Proposition 1.28) R, bir minimal sağ ideali olan bir basit halka ise o zaman Soc_r(R) regülerdir.

Tanım 2.1.12 (Hungerford, 1974) K birimli, değişmeli bir halka ve A herhangi bir halka olsun. (A, +) bir birimli K-modül ve her $a \in$ K; $s, t \in$ A için

$$a(st) = (as)t = s(at)$$

eşitlikleri sağlanıyorsa o zaman A yapısına bir **K-cebir** veya A, K değişmeli halkası üzerinde bir **cebirdir** denir.

Tanım 2.1.13 (Nakajima,1999) **(i)** A, K değişmeli halkası üzerinde bir cebir, M bir sol ve sağ K-modül ve M bir sol ve sağ A-modül olsun. Her $a \in$ A, $\alpha \in$ K ve $m \in$ M için, $\alpha(am) = (\alpha a)m = a(\alpha m)$, $(ma)\alpha = (m\alpha)a = m(a\alpha)$ ve $\alpha m = m\alpha$ ise M yapısına **A/K-bimodül** denir.

(ii) M ve N, A/K-bimodüller ve f : M → N bir dönüşüm olsun. Eğer f hem K-modül hem de A-bimodül homomorfizması ise f dönüşümüne **A/K-bimodül homomorfizması** denir.

Tanım 2.1.14 (Hungerford, 1974) $\{M_n : n \in \mathbf{Z}\}$ modüller ailesi ve $\{ f : M_n \rightarrow M_{n-1} \}$ homomorfizma ailesi için

$$\ldots \rightarrow M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \rightarrow \ldots$$

dizisinde her $n \in$ için $\mathrm{Im}(f_{n+1}) = \mathrm{Ker}(f_n)$ ise o zaman bu diziye bir **tam dizi** denir.

Tanım 2.1.15 (Hungerford, 1974) A, B, C herhangi üç modül olsun.

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} C \rightarrow 0$$

dizisi tam ise o zaman g bir monomorfizma ve h bir epimorfizmadır. Ayrıca $\mathrm{Im}(g) \cong A$ ve $C \cong B/\mathrm{Im}(g)$ dir. Böylece izomorf modüller özdeşleştirilerek $C = B/A$ yazılabilir.

Sonuç 2.1.1 (Hungerford, 1974) Tanım 2.1.15 deki dizinin tam olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\mathrm{Ker}(g) = 0$, $\mathrm{Im}(h) = C$ ve $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(h)$ olmasıdır.

Tanım 2.1.16 (Hungerford, 1974) A, B, C herhangi üç modül olmak üzere

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

şeklinde bir tam diziye **kısa tam dizi** denir.

Y. Özellik 2.1.7 (Hungerford, 1974) A, B, C Herhangi üç modül olmak üzere

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

kısa tam dizisi için aşağıdaki koşullar denktir:

(i) $hf = 1_A$ olacak şekilde bir $h : B \rightarrow A$ homomorfizması vardır.

(ii) Im(f) alt modülü B modülünün bir direkt toplam terimidir.

(iii) $gk = 1_C$ olacak şekilde bir $k : C \to B$ homomorfizması vardır. Bu durumda $B \cong A \oplus C$ dir.

Tanım 2.1.17 (Hungerford, 1974) Y. Özellik 2.1.7 denk koşullarından biri gerçeklendiğinde

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

kısa tam dizisine **parçalanabilir kısa tam dizi** denir.

Y. Özellik 2.1.8 (Hungerford (1974), Five Lemma)

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \to & A_2 & \to & A_3 & \to & A_4 & \to & A_5 \\ \downarrow & \alpha_1 & \downarrow & \alpha_2 & \downarrow & \alpha_3 & \downarrow & \alpha_4 & \downarrow \alpha_5 \\ B_1 & \to & B_2 & \to & B_3 & \to & B_4 & \to & B_5 \end{array}$$

Yukarıdaki diyagram, R-modüllerinin ve R-modül homomorfizmalarının değişmeli diyagramı olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

(i) α_1 bir epimorfizma ve α_2 ile α_4 birer monomorfizma iseler, α_3 bir monomorfizmadır.

(ii) α_5 bir monomorfizma ve α_2 ile α_4 birer epimorfizma iseler, α_3 bir epimorfizmadır.

Tanım 2.1.18 (Pasman, 1989) U, R asal halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun. U dan R içine olan tüm sol R-modül homomorfizmalarının kümesine M diyelim.

$$\mathsf{M} = \{(U, f) \mid f : U \to R \text{ sol R-modül homomorfizması } \}$$

üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan ~ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

″ $(U, f) \sim (V, g) \Leftrightarrow$ R’ nin sıfırdan farklı bir $W \subseteq U \cap V$ ideali üzerinde $f = g$ dir.″

M kümesinin bir (U, f) elemanının denklik sınıfını $\overline{(U, f)}$ ile gösterelim. M kümesinin denklik sınıflarının kümesine $Q_l(R)$ diyelim. $Q_l(R)$ kümesi aşağıdaki tanımlar altında R halkasını kapsayan bir asal halkadır ve R, $Q_l(R)$ içine gömülebilir.

$$\overline{(U, f)} + \overline{(V, g)} = \overline{(U \cap V, f + g)}$$

$$\overline{(U, f)}\,\overline{(V, g)} = \overline{(VU, fg)}$$

$Q_l(R)$ halkasına **″sol Martindale kesirler halkası″** denir. Benzer şekilde sağ Martindale kesirler halkası $Q_r(R)$ de tanımlanabilir. Tez boyunca **Q** ile R' nin iki yanlı Martindale kesirler halkası kastedilecektir.

$Q_r(R)$ halkasının merkezine R asal halkasının **genişletilmiş merkezi (extended centroid)** denir ve C ile gösterilir. $Z(R) \subseteq C$ olduğu açıktır. Üstelik bir R asal halkasının genişletilmiş merkezi bir cisimdir. Ayrıca

$$Q_s(R) = \{q \in Q_r(R) : \exists\, J \triangleleft R \text{ (J, R nin ideali) için, } qJ \cup Jq \subseteq R\}$$

kümesi $Q_r(R)$' nin bir alt halkasıdır. Bu alt halkaya R halkasının **simetrik kesirler halkası** denir.

Herhangi bir R asal halkasının sağ Martindale kesirler halkası $Q_r(R)$ olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) $R \subseteq Q_r(R)$ dir.

(ii) $q \in Q_r(R)$ için $qU \subseteq R$ olacak şekilde R halkasının sıfırdan farklı bir U ideali vardır.

(iii) $q \in Q_r(R)$ ve R halkasının sıfırdan farklı herhangi bir U ideali için

qU = 0 ise o zaman $q = 0$ dır.

(iv) R halkasının sıfırdan farklı bir ideali U ve $\varphi : U \to R$ sağ R-modül dönüşümü ise o zaman her $x \in U$ için $\varphi(x) = qx$ olacak şekilde $q \in Q_r(R)$ vardır.

Tanım 2.1.19 R bir asal halka olsun. R_C = RC halkasına R halkasının **merkezi kapanışı (central clouser)** denir. R_C bir asal halkadır.

Q_r, Q_l, R_C asal halkalarının merkezleri eşittir.

Tanım 2.1.20 $Q_r(R)$ halkasının tanımında R halkasının sıfırdan farklı iki yanlı ideali yerine yoğun sağ ideali alınırsa elde edilen kesirler halkasına R halkasının **'Utumi kesirler halkası'** denir ve **U(R)** ile gösterilir. Tez boyunca yazımda kolaylık sağlaması amacıyla U(R) yerine **U** gösterimi kullanılacaktır.

Tanım 2.1.21 $q_1, q_2, \ldots, q_n \in Q_r(R)$ ve $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \in C$ olmak üzere

$$\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 + \ldots + \lambda_n q_n = 0$$

olduğunda her $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için $\lambda_i = 0$ oluyorsa q_i elemanlarına **C-bağımsız**, en az bir $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için $\lambda_i \neq 0$ olmak üzere yukarıdaki eşitlik gerçekleniyorsa, q_i elemanlarına **C - bağımlıdır** denir.

Y. Özellik 2.1.9 (Beidar, Martindale III and Mikhalev, (1996), Remark 2.3.1) R bir asal halka ve $q \in Q_r(R_C)$ olsun. q elemanı R halkasının her elemanıyla yer değiştiriyorsa o zaman $q \in C$ dir.

Y. Özellik 2.1.10 (Brešar (1995), Lemma 1) R bir asal halka ve $a_i, b_i \in Q_s(R)$ olsun. Her $x \in R$ için $\Sigma\, a_i x b_i = 0$ ise o zaman tüm a_i elemanları veya tüm b_i elemanları sıfır olmadıkça a_i ve b_i elemanları C - bağımlıdır.

Y. Özellik 2.1.11 (Martindale III (1969), Theorem 2(a)' nın sonucu) R bir asal halka olsun. $a_i, b_i, c_j, d_j \in RC$ ve $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ olmak üzere, her $x \in R$ için

$\sum_{i=1}^{m} a_i x b_i \; + \; \sum_{j=1}^{n} c_j x d_j \; = \; 0$ olsun. Eğer a_1, a_2, ..., a_m C-bağımsız ise, her bir b_i ; d_1, d_2, ..., d_n üzerinde C-bağımlıdır. Benzer şekilde eğer b_1, b_2, ..., b_m elemanları C-bağımsız ise, her bir a_i ; c_1, c_2, ..., c_n üzerinde C-bağımlıdır.

Y. Özellik 2.1.12 (Brešar (1995), Proposion 8) R bir asal halka olsun. $1\leq i \leq m$ ve $1\leq j \leq n$ için a_j, $c_i \in$ R ve f_j : R $\to$ R ve h_i : R $\to$ R herhangi dönüşümler olmak üzere her x, $z \in$ R için

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(z)xa_j + \sum_{i=1}^{m} c_i z h_i(x) = 0$$

olsun. $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ve $\{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ kümeleri C – bağımsız ise o zaman

$$f_j(z) = - \sum_{i=1}^{m} c_i z q_{ij} \;\; \text{ve} \;\; h_i(z) = \sum_{j=1}^{n} q_{ij} x a_j$$

olacak şekilde $q_{ij} \in Q_r(R_C)$ dir.

Y. Özellik 2.1.13 (Herstein (1969), Lemma 1.1) I, R halkasının sıfırdan farklı bir sağ ideali ve n sabit bir tamsayı olsun. Her $x \in I$ için $x^n = 0$ ise o zaman R halkasının sıfırdan farklı bir nilpotent ideali vardır.

Y. Özellik 2.1.14 (Brešar (1993), Theorem 1) R bir asal halka, charR $\neq$ 2, R halkasının bir ideali U ve f : R $\to$ R bir toplamsal dönüşüm olsun. Her $x \in$ U için $xf(x) + f(x)x = 0$ ise o zaman her $x \in$ R için $f(x) = 0$ dır.

Y. Özellik 2.1.15 (Zalar (1991), Proposition 1.4) R 2-torsion free yarı-asal halka ve T : R $\to$ R, her $x \in$ R için $T(x^2) = x^2$ olacak şekilde bir toplamsal dönüşüm ise o zaman her x, $y \in$ R için $T(xy) = T(x)y$ dir.

Tanım 2.1.22 (Hungerford, 1974) V, bir D bölüm halkası üzerinde bir sol vektör uzayı ve R, $\mathrm{Hom}_D(V,V)$ endomorfizmalar halkasının bir alt halkası olsun. Her n

pozitif tamsayısı için, $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$, V vektör uzayının lineer bağımsız vektörlerinin kümesi ve $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de V vektör uzayının herhangi vektörlerinin kümesi olmak üzere $\theta(u_i) = v_i$ (i = 1, 2, ..., n) olacak şekilde R halkasının bir θ elemanı varsa o zaman R halkasına, V vektör uzayının endomorfizmalarının **yoğun halkası** denir.

Y. Özellik 2.1.16 (Hungerford (1974), Jacobson Yoğunluk Teoremi) R bir primitif halka ve A bir faithful, basit (simple) R-modül olsun. A R-modülünü $D = Hom_R(A,A)$ bölüm halkası üzerinde bir vektör uzayı olarak düşünelim. Bu durumda R, A vektör uzayının endomorfizmalarının yoğun bir halkasına izomorftur.

Y. Özellik 2.1.17 (Herstein, 1976) R bir halka ve S = RC, R halkasının merkezi kapanışı olsun. R birimli ve basit bir halka ise o zaman Q = R = S dir.

Tanım 2.1.23 (Herstein, 1976) R birimli ve basit bir halka olsun. R' nin bir minimal sağ ideali varsa o zaman R bir artinian halkadır.

Y. Özellik 2.1.18 (Weddeburn-Artin Theorem) **(i)** R sonlu boyutlu, basit bir halka olsun. Uygun bir *n* tamsayısı ve uygun bir F cismi için $R \cong M_n(F)$ dir (Rowen, 1976).

(ii) R sol artinian, basit bir halka ise, uygun bir *n* tamsayısı ve uygun bir D bölüm halkası için $R \cong M_n(D)$ dir (Hungerford, 1974).

Y. Özellik 2.1.19 (Beidar, 1978) R bir yarı-asal halka ise, sol Utumi kesirler halkası da yarı-asaldır. Bir yarı-asal halkanın genişletilmiş merkezi ile sol Utumi kesirler halkasının merkezi çakışır.

Tanım 2.1.24 (Koshlukov, 1999) K bir cisim, $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ elemanları değişmeli olmayan bir küme olsun. K üzerinde, X ile üretilmiş **serbest cebir K(X)**, $\{x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}...x_{i_k}, ...\}$ kümesini taban kabul eden bir K-uzaydır. K(X) serbest cebirinin elemanlarına **polinom (polynomial)** denir ve $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ şeklinde gösterilir. Taban elemanlarına da **monomial** denir. A, herhangi bir K-cebir ve $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in$ K(X) olmak üzere, her a_1, a_2, …, $a_n \in$ A için $f(a_1, a_2, ..., a_n) = 0$ ise f polinomuna A kümesinin bir **polinom özdeşliği (polinomial identity)** denir ve A halkasına da **polinom özdeşlik halkası (polinomial identity ring)** denir ve kısaca PI ile gösterilir.

Tanım 2.1.25 (Beidar, Martindale III and Mikhalev, 1996) T = $Q *_C C\{X\}$ serbest çarpımını ele alalım. T kümesinin elemanlarına **genelleştirilmiş polinom (generalized polinomial)** denir ve kısaca GPI ile gösterilir. $q_i \in$ Q ve $y_i \in$ X olmak üzere, $m = q_0y_1q_1y_2q_2\ldots y_nq_n$ tipindeki elemanlara **monomial**, q_i elemanlarına da m monamialının **katsayıları** denir. T kümesinin her f elemanı, monomiallerin sonlu toplamı şeklindedir ve bu gösterim tek türlüdür.

Tanım 2.1.26 (Leron, 1975) K birimli ve değişmeli bir halka, R bir K-cebir, $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, katsayıları K da olan bir polinom ve n sabit bir tamsayı olsun. Her $r_i \in$ R için $f(r_1, r_2, ..., r_n) = 0$ ise o zaman $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ polinomuna R halkasında **vanishing** denir.

Tanım 2.1.27 (Leron, 1975) K birimli ve değişmeli bir halka, R bir K-cebir, $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ katsayıları K da olan bir polinom ve m, n sabit tamsayılar olsun. Her $r_i \in$ R için $f(r_1, r_2, ..., r_n)^m = 0$ ise o zaman $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ polinomuna R halkasında **nil** denir.

Tanım 2.1.28 (Leron, 1975) K birimli ve değişmeli bir halka, R bir K-cebir, $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ katsayıları K da olan bir polinom ve n sabit bir tamsayı olsun. Her $r_i \in$ R için $f(r_1, r_2, ..., r_n) \in$ Z(R) ise o zaman $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ polinomuna R halkasında **merkezidir** denir. Diğer bir deyişle, $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ R de bir özdeşlik değil fakat $[f(x_1, x_2, ..., x_n), x_{n+1}]$ R de bir özdeşliktir.

Tanım 2.1.29 (Leron, 1975) K birimli ve değişmeli bir halka, R bir K-cebir, $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ katsayıları K da olan bir polinom ve n sabit bir tamsayı olsun. Her $r_i \in$ R için $f(r_1, r_2, ..., r_n)^m \in$ Z(R) olacak şekilde bir m tamsayısı varsa o zaman $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ polinomuna R de **kuvvet merkezli** denir.

Tanım 2.1.30 S_n simetrik grup olmak üzere

$$s_n(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (\mathrm{sign}\sigma)\, x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(n)}$$

polinomuna **standart polinom** denir.

Tanım 2.1.31 $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in$ K(X) polinomunda, bir x_i elemanının, her bir monomialdaki derecesi aynı ise bu polinoma **homojen polinom** denir. Örneğin, $x_1^2 x_2 + x_1 x_2 x_1$ homojen bir polinomdur. (deg $x_1 = 2$ ve deg $x_2 = 1$' dir.) Eğer bir polinom homojen ve her bir x_i elemanının homojenlik derecesi 1 ise bu polinoma **çoklu doğrusal polinom** denir. Örneğin, $x_1 x_2 x_3 - x_1 x_3 x_2$ homojendir ve her bir x_i elemanının homojenlik derecesi 1 dir.

Y. Özellik 2.1.20 (Rowen, 1976) Her polinom, çoklu doğrusal hale getirilebilir. Çoklu doğrusallaştırmada, $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ polinomu için

$$g(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}) = f(x_1 + x_{n+1}, x_2, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(x_{n+1}, x_2, ..., x_n)$$

eşitliği kullanılır.

Tanım 2.1.32 $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \alpha x_1 x_2 \ldots x_n + \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(n)}$ $(\sigma \neq (1))$

eşitliği, çoklu doğrusal polinomun kullanışlı ifadelerindendir. Burada σ ve α_σ, C genişletilmiş merkezinin elemanlarıdır.

Örnek: $f(x_1, x_2) = \alpha x_1 x_2 + \beta x_2 x_1$ iki değişkenli çoklu doğrusal polinomdur.

Tanım 2.1.33 $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ multilineer polinomu,

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_i t_i(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada t_i, n-1 değişkenli multilineer polinom ve x_i, t_i polinomunun hiçbir monomialında bulunmaz.

Y. Özellik 2.1.21 (Martindale III (1969), Theorem 3) R bir asal GPI halkadır $\Leftrightarrow$ R_C = RC (merkezi kapanış) sıfırdan farklı bir H= Soc(RC) idealine sahip primitif halkadır ve e, R_C nin minimal idempotent elemanı olmak üzere, eHe, C üzerinde sonlu boyutlu bir bölüm cebiridir.

Tanım 2.1.34 (Leron, 1975) R bir halka, R üzerindeki $n \times n$ matrisler halkası R_n ve $u = (A_1, A_2, ..., A_k)$, R_n in matrislerinin bir dizisi olsun. u dizisinin değeri $|u| = A_1 A_2 ... A_k$ çarpımı ve herhangi bir $\sigma \in S_k$ için u dizisinin bir permütasyonu $u^\sigma = (A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, ..., A_{\sigma(k)})$ olmak üzere, bir $a_i \in$ R (i = 1, 2, …., k) için $u = (a_1 e_{i_1 j_1}, ..., a_k e_{i_k j_k})$ ise u dizisine **basit dizi** denir. (Basit dizilerin değeri her zaman ae_{ij} formundadır ($a \in$ R)).

Tanım 2.1.35 (Leron, 1975) R bir halka, R üzerindeki $n \times n$ matrisler halkası R_n ve $u = ((A_1, A_2, ..., A_k)$, R_n halkasının matrislerinin bir basit dizisi olsun. $b \in$ R olmak üzere, $|u^\sigma| = be_{ii} \neq 0$ ise u dizisine **çift dizi**, $|u^\sigma| = be_{ij} \neq 0$ (i $\neq$ j) ise u dizisine **tek dizi** denir.

Y. Özellik 2.1.22 (Leron (1975), Lemma 2) R bir halka, $f(x_1, x_2, ..., x_k)$ bir çoklu doğrusal polinom ve u = ((A_1, A_2,..., A_k), R_n in matrislerinin bir basit dizisi olsun. u tek ise o zaman $f(u) = ae_{ij}$ ($i \neq j$) olacak şekilde bir $a \in$ R vardır.

Y. Özellik 2.1.23 (Lee (1993), Lemma) R bir halka, $f(x_1, x_2, ..., x_k)$ merkezi olmayan bir çoklu doğrusal polinom ise o zaman $f(r) = f(r_1, r_2, ..., r_k) \neq 0$ olacak şekilde R_n in bir $r = (r_1, r_2, ..., r_k)$ dizisi vardır.

Y. Özellik 2.1.24 (Herstein (1976), Kaplansky's Theorem) R bir basit, birimli ve GPI halka ise o zaman R sonlu boyutlu, merkezi, basit cebirdir, yani, $R \cong M_k(D)$ olacak şekilde bir D bölüm halkası vardır.

Y. Özellik 2.1.25 (Lanski (1993), Lemma 2) R değişmeli olmayan, merkezi üzerinde sonlu boyutlu bir basit cebir olsun. $g(x_1, x_2, ..., x_t) \in R *_{Z(R)} Z(R)\{x_i\}$ (Z(R) üzerindeki serbest çarpım), R için g, $\{x_1, x_2, ..., x_t\}$ lere göre derecesi d olan homojen özdeşlik ise öyle bir F cismi için, $n > 1$ olmak üzere, $R \subseteq M_n(F)$ dir ve ayrıca $g(x_1, x_2, ..., x_t)$, $M_n(F)$ için de bir özdeşliktir.

Y. Özellik 2.1.26 (Chuang and Lee (1996), Main Theorem′) K birimli, değişmeli bir halka, R bir yarı-asal K-cebir, I R halkasının bir sağ ideali, t bir sabit tamsayı ve $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, K üzerinde bir çoklu doğrusal polinom olsun. $a \in$ R ve her $x_i \in$ I için a $f(x_1, x_2, ..., x_n)^t = 0$ ise her $x_i \in$ I için a $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ I = dır.

Y. Özellik 2.1.27 (Wong (1996), Lemma 2) R, $End_D V$ halkasının bir yoğun halkası, $\phi(x)$ de katsayıları $End_D V$ halkasında olan bir genelleştirilmiş polinom olmak üzere $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, her $x_1, x_2, ..., x_n \in$ R için $\phi(f(x_1, x_2, ..., x_n)) = 0$ koşulunu sağlayan çoklu doğrusal polinom ise o zaman her $x \in End_D V$ için $\phi(x) = 0$ dır.

Y. Özellik 2.1.28 (Chuang and Lee (1996), Lemma 3) I, R asal K-cebirinin bir sol ideali ve $g(x_1, x_2, ..., x_t)$ K üzerinde herhangi bir polinom olsun. Her $x_i \in$ I için $a\,g(x_1, x_2, ..., x_t) = 0$ olacak şekilde bir $a \in$ R varsa o zaman $a = 0$ veya her $x_i \in$ I için I $g(x_1, x_2, ..., x_t) = 0$ dır.

Y. Özellik 2.1.29 (Lee (1996), Proposition) I, R asal halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun. I, trivial olmayan bir polinom özdeşliğini sağlarsa, IC = *e*RC olacak şekilde bir $e \in$ Soc(RC) idempotent elemanı vardır ve $f(x_1, x_2, ..., x_t)$, *e*RC*e* üzerinde merkezidir.

Y. Özellik 2.1.30 (Chang (1988), Theorem 2) **U**, R halkasının Utumi kesirler halkası olsun. **U** nun her rasyonel (yoğun) alt modülü I ile **U** aynı GPI sağlar. (Dolayısıyla I, I**U**, I**Q** aynı GPI sağlar).

Y. Özellik 2.1.31 (Chang (2003), Lemma 3) R = M_t(F), I = *e*R = $(e_{11} + e_{22} + ... + e_{ll})$R ve $f(x_1, x_2, ..., x_t)$, F üzerinde bir çoklu doğrusal polinom ve A = { $f(x_1, x_2, ..., x_t) : x_i \in$ I } olsun. $f(x_1, x_2, ..., x_t)$, I sağ idealinde bir özdeşlik değilse her $\alpha \in$ F için i $\leq l$ ve j $> l$ olmak üzere $\alpha e_{ij} \in$ A dır.

Y. Özellik 2.1.32 (Jacobson (1975), p.57, Theorem 2) R bir asal cebir olsun. R, trivial olmayan bir polinom özdeşliğini sağlarsa o zaman R' nin Z(R)' deki lokalizasyonu $R_{Z(R)}$ de aynı polinom özdeşliğini sağlar.

Aşağıda, diğer bölümlerde ele alınan ve genelleştirilmeleri verilen türev çeşitlerinin bazıları hatırlatılacak ve bu konuda yapılmış olan çalışmaların kısa bir özeti sunulacaktır.

2. 2 Adi Türevli Halkalar

Asal halkalarda türev üzerine ilk çalışma E. Posner tarafından 1957 yılında başlatılmıştır. Posner bu çalışmasında aşağıdaki türev tanımını vererek, türevli asal halkaların değişmeliliğini incelemiştir. Son yirmi yılı aşkın süredir, bu konu üzerine pek çok çalışma yapılmıştır (Herstein, 1979; Giambruno and Herstein, 1981; Bell and Kappe, 1989; Bresar, 1991; Bell and Daif, 1995; Daif and Bell, 1992; Lee, P. H. And Lee, T. K., 1981; … daha birçok çalışma bulunabilir).

Tanım 2.2.1 (Posner, 1957) R herhangi bir halka ve R halkasının bir toplamsal dönüşümü d olsun. Her $x, y \in$ R için $d(xy) = d(x)y + x\mathrm{d}(y)$ ise o zaman d dönüşümüne R halkasının **adi (ordinary) türevi** veya kısaca **türevi** denir.

Tanım 2.2.2 R herhangi bir halka ve $a \in$ R sabit bir eleman olmak üzere d_a: R$\rightarrow$ R dönüşümü her $x \in$ R için $d_a(x) = [a, x]$ olarak tanımlanan d_a dönüşümüne R halkasının ***a*** elemanı tarafından belirlenmiş **iç türevi** denir.

Tanım 2.2.3 R herhangi bir halka ve d R üzerinde bir toplamsal dönüşümü olsun. Her $x \in$ R için $d(x^2) = d(x)x + xd(x)$ ise o zaman d dönüşümüne R halkasının **Jordan türevi** denir.

Yukarıdaki tanımdan da anlaşıldığı gibi her türevin bir Jordan türev olduğu açıktır. Fakat tersi genelde doğru değildir. Herstein (1969) bir asal halkada ve daha sonra Cusack (1975) herhangi bir R halkasında bazı koşullar altında tersinin doğru olduğunu ispatlamışlardır.

Tanım 2.2.4 R herhangi bir halka ve R nin bir toplamsal dönüşümü d olsun. Her $x, y \in$ R için $d[x, y] = [d(x), y] + [x, d(y)]$ koşulu sağlanıyorsa o zaman d dönüşümüne R halkasının **Lie türevi** denir.

Y. Özellik 2.2.1 (Posner (1957), Lemma 3) R bir asal halka ve d : R $\rightarrow$ R bir türev olsun. d(R) $\subseteq$ Z(R) ise o zaman R değişmelidir veya d = 0 dır.

Y. Özelik 2.2.2 (Posner (1957), Theorem 2) R bir asal halka ve d : R $\rightarrow$ R sıfırdan farklı bir türev olsun. Her $x \in$ R için [d(x), x] $\in$ Z(R) ise o zaman R değişmelidir.

Y. Özellik 2.2.3 (Lee, P. H. And Lee, T. K. (1981), Theorem 3) R bir asal halka, charR $\neq$ 2 ve d R halkasının bir türevi olsun. d^2(R) $\subseteq$ Z(R) ise o zaman d = 0 veya R değişmelidir.

Y. Özellik 2.2.4 (Giambruno and Herstein (1981), Theorem 1) R bir asal halka ve d : R $\rightarrow$ R bir türev olsun. $n \geq 1$ sabit bir tamsayı olmak üzere, her $x \in$ R için $d(x)^n = 0$ ise o zaman d = 0 dır.

Y. Özellik 2.2.5 (Herstein, 1982) R değişmeli olmayan bir asal halka, d R nin sıfırdan farklı bir türevi ve n bir pozitif tamsayı olsun. Her $x \in$ R için $d(x)^n \in$ Z(R) ise o zaman R, s_4 standart polinomunu sağlar.

Y. Özellik 2.2.6 (Brešar (1993), Theorem 4.1) I, R asal halkasının sıfırdan farklı bir ideali, d ve g, R halkasının her $u \in$ I için $d(u)u - u$g$(u) \in$ Z(R) özelliğini sağlayan iki türevi olsun. Eğer $d \neq 0$ ise o zaman R değişmelidir.

Y. Özellik 2.2.7 (Ashraf and Rehman, 2002) I, R asal halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun. d, R halkasının her x, $y \in$ I için $d(x)y + xd(y) + d(y)x + yd(x) = xy + yx$ olacak şekilde bir türevi ise o zaman R değişmelidir.

Tanım 2.2.5 (Brešar and Vukman, 1990) R bir halka, X bir sol R-modül ve D : R $\rightarrow$ X bir toplamsal dönüşüm olsun. Her x, $y \in$ R için D(xy) = xD(y) + yD(x) ise o zaman D dönüşümüne **sol türev** denir.

Y. Özellik 2.2.8 (Brešar and Vukman (1990), Proposition 1.6) R bir asal halka, X bir sol R-modül ve D : R $\rightarrow$ X bir sol türev olsun.

(i) $a \in$ R ve $x \in$ X için aRx = 0 ise a = 0 veya x = 0 dır. Eğer D $\neq$ 0 ise R değişmelidir.

(ii) X = R bir yarı-asal halka olsun. Bu durumda D, R halkasından Z(R) içine tanımlı bir türev dönüşümüdür.

Y. Özellik 2.2.9 (Brešar (1995), Corollary 4.3, Theorem 4.18) I, R asal halkasının bir ideali olsun. f_1, f_2, f_3, f_4 : I $\rightarrow$ R toplamsal dönüşümler olmak üzere, her $x, y \in$ I için

$$\pi(x, y) = f_1(x)y + xf_2(y) + f_3(y)x + yf_4(x)$$

dönüşümü tanımlansın.

(i) Her $x, y \in$ I için $\pi(x, y) = 0$ ise o zaman her $x \in$ I için

$$f_1(x) = - xa + \mu(x), \qquad f_2(\mathrm{x}) = ax - \lambda(x)$$

$$f_3(x) = - xb + \lambda(x), \qquad f_4(\mathrm{x}) = bx - \mu(x)$$

olacak şekilde $a, b \in Q_s(R)$ ve λ, μ : I $\rightarrow$ C toplamsal dönüşümleri vardır.

(ii) Her $x, y \in$ I için $\pi(x, y) \in$ Z(R) ve charR $\neq$ 2, 3 ise R, s_4 standart polinomunu sağlar veya her $x, y \in$ I için $\pi(x, y) = 0$ dır.

(iii) Her $x, y \in$ I için $\pi(x, y) = 0$ ve bazı i $\in \{1, 2, 3, 4\}$ için f_i dönüşümleri sıfırdan farklı türev iseler o zaman R değişmelidir.

Y. Özellik 2.2.10 (Hvala (1998), Lemma 2) R bir asal halka ve $f : R \to R_C$ her $x, y \in$ R için $f(xy) = f(x)y$ koşulunu sağlayan bir toplamsal dönüşüm olsun. O zaman her $x \in$ R için $f(x) = qx$ olacak şekilde bir $q \in Q_r(R_C)$ vardır.

Y. Özellik 2.2.11 (Chang and Lee (1998), Theorem 1) R bir asal halka, $a \in$ R, I R halkasının $[I, I]I \neq 0$ olacak şekilde bir sağ ideali, d R halkasının bir türevi ve $\dim_C RC > 4$ olsun. Her $x, y \in$ I için $ad([x, y])^n \in Z(R)$ ise o zaman $ad(I) = 0$ veya d, **Q** Martindale kesirler halkasının, pI = 0 olacak şekilde bir p elemanı ile belirlenmiş bir iç türevdir. (Eğer $d([x, y])^n a \in Z(R)$ ise o zaman $a = 0$ veya d, **Q** nun pI = 0 olacak şekilde bir p elemanı ile belirlenmiş bir iç türevdir).

Y. Özellik 2.2.12 (Lee (1999), Teorem 2) R halkasının bir yoğun sağ idealinden **U** Utumi kesirler halkası içine tanımlı her türev, **U** ya tek türlü genişletilebilir.

Y. Özellik 2.2.13 (Beidar, Martindale III and Mikhalev (1996), Proposition 2.5.1) Bir yarı-asal R halkasının her türevi, sol Utumi kesirler halkasına tek türlü genişletilebilir ve R halkasının her türevi, tüm **U** üzerinde tanımlanabilir.

Y. Özellik 2.2.14 (Beidar (1978), Lemma 1, Theorem 1) R bir yarı-asal halka, **U** R halkasının Utumi kesirler halkası ve B, C genişletilmiş merkezindeki tüm idempotentlerin kümesi olsun. O zaman **U**, ortogonal tam B-cebirdir. B nin herhangi bir maksimal P ideali için P**U**, **U** nun bir asal idealidir ve bu ideal, **U** nun tüm türevleri altında sabit kalır. Üstelik $\cap$\{P**U** : P, B' nin herhangi bir asal ideali\}= 0 dır.

Tanım 2.2.6 (Beidar, Martindale III and Mikhalev, 1996) d, R asal halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve I, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun. Her $r_i \in$ I için, $f(r_1, r_2, ..., r_n, d(r_1), ..., d(r_n)) = 0$ ise $f(x_1, x_2, ..., x_n, d(x_1), ..., d(x_n))$ ifadesine I idealinde bir **differansiyel özdeşlik (differential identity)** denir.

Y. Özellik 2.2.15 (Kharchenko, 1978) *d*, R asal halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve I, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun. $f(x_1, x_2, ..., x_n, d(x_1), ..., d(x_n))$, I idealinde bir differansiyel özdeşlik, yani, her r_1, r_2,...., $r_n \in$ I için

$$f(r_1, r_2, ..., r_n, d(r_1), ..., d(r_n)) = 0$$

olsun. Bu durumda aşağıdakilerden birisi sağlanır:

(i) *d*, **Q** Martindale kesirler halkasında bir iç türevdir yani her $x \in$ R için $d(x) = [q, x]$ olacak şekilde bir $q \in$ **Q** vardır ve I,

$$f(r_1, r_2, ..., r_n, [q, r_1], ..., [q, r_n]) = 0$$

polinom özdeşliğini sağlar.

(ii) I ideali,

$$f(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n)$$

genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlar.

Y. Özellik 2.2.16 Her $x_i \in$ R için $d(f(x_1, x_2, ..., x_n)) = f^d(x_1, x_2, ..., x_n) + f(x_1, x_2, ..., d(x_i), ..., x_n)$ olduğu açıktır. Burada $f^d(x_1, x_2, ..., x_n)$ polinomu, $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ polinomunda her bir α_σ katsayısının yerine $d(\alpha_\sigma)$ alınmasıyla elde edilir.

Y. Özellik 2.2.17 (Rowen (1980), Exercise 2.3.4) ϕ bir sonsuz cisim, R ϕ üzerinde bir cebir ve H ϕ üzerinde bir değişmeli cebir olsun. R halkasının her özdeşliği, $R \otimes_\phi H$ için de bir özdeşliktir.

Y. Özellik 2.2.18 (Beidar, Martindale and Mikhalev, (1996), Corollary 4.2.2 or Vonessen (1994), Theorem 3.3) D, merkezi C üzerinde sonlu boyutlu bir bölüm cebiri ve F, D nin bir maksimal alt cismi olsun. Bu durumda F C yi kapsar ve ayrıca $D\otimes_C F \cong M_n(F)$ ve $\dim_C(D) = n^2$, $\dim_C(F) = n$ olacak şekilde bir n doğal sayısı vardır.

Y. Özellik 2.2.19 (Wong (1996), Theorem 2) d, R asal halkasının bir türevi, I R halkasının sıfırdan farklı bir ideali, $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ çoklu doğrusal polinom ve m, $n \geq 1$ sabit tamsayılar olsun. Her x_1, x_2,..., $x_n \in$ I için $d(f(x_1, x_2, ..., x_n))^m \in$ Z(R) ise o zaman $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ çoklu doğrusal polinomu merkezi polinomdur veya R, s_4 standart polinomunu sağlar.

Y. Özellik 2.2.20 (Chang, 2003) d, R asal halkasının bir türevi, I, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali, $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ bir çoklu doğrusal polinom ve m, $n \geq 1$ sabit tamsayılar olsun. $a \in$ R ve x_1, x_2,..., $x_n \in$ I olmak üzere $a(d(f(x_1, x_2, ..., x_n))^m = 0$ olduğunda aşağıdakilerden birisi sağlanır:

(i) aI = 0 dır.

(ii) d(I)I = 0 dır.

(iii) $[f(x_1, x_2, ..., x_n), x_{n+1}]\, x_{n+2}$, I idealinde bir polimom özdeşliğidir.

Y. Özellik 2.2.21 (Chang (1998), Theorem 1) I, R asal halkasının sıfırdan farklı bir sağ ideali olsun. I, merkezi bir diferansiyel özdeşliğe sahipse o zaman R bir PI-halkadır.

Y. Özellik 2.2.22 (Lee (1992), Theorem 3) R bir yarı-asal halka ve **U**, R halkasının Utumi kesirler halkası olsun. **U** nun her rasyonel R alt modülü I ile **U** aynı diferansiyel özdeşliği sağlar.

Y. Özellik 2.2.23 (Hamaguchi, 2001) A birimli olmayan bir K-cebir ve $\hat{A}$ kümesi,

$$\hat{A} = \{(n, a) \mid n \in K,\ a \in A\}$$

şeklinde tanımlı bir küme olsun. $\hat{A}$ kümesi üzerinde 'o' işlemi, her n_1, $n_2 \in$ K ve a_1, $a_2 \in$ A için

$$(n_1, a_1)o(n_2, a_2) = (n_1n_2, n_1a_2 + n_2a_1 + a_1a_2)$$

olarak tanımlansın. Buna göre aşağıdakiler sağlanır:

(i) $\hat{A}$, birimli bir K-cebirdir.

(ii) M bir A/K-bimodül ise, M $\hat{A}$/K-bimodüldür (Burada modül işlemleri, i = 1, 2 olmak üzere, her $m_i \in$ M, $a_i \in$ A ve $n_i \in$ K için, $(n_1, a_1).m_1 = n_1m_1 + a_1m_1$ ve $m_2.(n_2, a_2) = n_2m_2 + m_2a_2$ dir).

(iii) d : A $\rightarrow$ M bir türev olsun. Bu durumda, $\exists$ d′ : $\hat{A} \rightarrow$ M vardır ve d′$((n, a)) = d(a)$ şeklinde tanımlıdır. Ayrıca d′$|_A = d$ dir.

2. 3 Genelleştirilmiş Türevli Halkalar

Genelleştirilmiş türev kavramı ilk olarak 1991 yılında Brešar tarafından verilmiştir.

Tanım 2.3.1 (Brešar, 1991) R herhangi bir halka ve d : R $\rightarrow$ R bir toplamsal dönüşüm olsun. Her x, $y \in$ R için

$$d(xy) = d(x)y + x\alpha(y)$$

olacak şekilde R halkasının bir α türevi varsa o zaman d dönüşümüne R halkasının bir **genelleştirilmiş türevi** denir ve genellikle **(d, α)** ile gösterilir.

Genelleştirilmiş türev kavramının türev ve sol çarpan (yani $f(xy) = f(x)y$ koşulunu sağlayan R halkasının toplamsal dönüşümleri) kavramlarını içerdiği açıktır.

Tanım 2.3.2 (Bresar, 1991) R bir halka olsun. a ve $b \in$ R olmak üzere her $x \in$ R için $d(x) = ax + xb$ ile tanımlı d : R $\rightarrow$ R dönüşümüne R halkasının ***a*** ve ***b*** elemanları ile belirlenmiş **iç türev (Brešar anlamında)** veya kısaca **genelleştirilmiş iç türev** denir.

Türev (adi türev) ve genelleştirilmiş iç türev genelleştirilmiş türeve örnek teşkil ederler. Ayrıca Rx = 0 olduğunda x = 0 özelliğine sahip bir R halkasında, h : R $\rightarrow$ R bir fonksiyon olmak üzere her x, $y \in$ R için $d(xy) = d(x)y + xh(y)$ olacak şekilde bir d : R $\rightarrow$ R toplamsal dönüşümü varsa o zaman d dönüşümü h ile tek türlü belirlenir ve üstelik burada h bir türevdir (Brešar (1991), Remark 1). Genelleştirilmiş türev tanımı Ribenboim (1980) tarafından da verilmiştir ve bu tür yüksek türevlerin modül yapıları incelenmiştir. Genelleştirilmiş türevlerin diğer özellikleri Hvala (1998) ve Lee (1999) tarafından ele alınmıştır. Hvala 1998 yılında yayınladığı çalışmasında genelleştirilmiş türevleri cebirsel açıdan incelemiştir. Lee 1999 yılında yaptığı çalışmasında her genelleştirilmiş türevin Q_r(R) sağ Martindale kesirler halkasının bir genelleştirilmiş türevine tek türlü genişletilebileceğini ispatlamıştır. Lee ve Shiue 2001 yılında genelleştirilmiş türevli polinom özdeşliği sağlayan bazı sonuçlar vermişlerdir.

Şimdi genelleştirilmiş türevlerde yapılan çalışmaların kısa bir özetini sunalım:

Y. Özellik 2.3.1 (Hvala, (1998), Lemma 3) R değişmeli olmayan bir asal halka ve F : R $\rightarrow$ C bir genelleştirilmiş türev olsun. O zaman F = 0 dır.

Y. Özellik 2.3.2 (Hvala (1998), Theorem 2) R değişmeli olmayan, CharR $\neq$ 2 bir asal halka ve f, g : R $\rightarrow$ R, her $x \in$ R için $[f(x), g(x)] = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı iki genelleştirilmiş türev olsun. Bu durumda, her $x \in$ R için $f(x) = \lambda g(x)$ olacak şekilde bir $\lambda \in$ C vardır.

Y. Özellik 2.3.3 (Rehman (2002), Theorem 4.1) I, R asal halkasının sıfırdan farklı bir ideali ve F, R halkasının her $x, y \in$ I için F(xoy) = xoy olacak şekilde, d ile belirlenen bir genelleştirilmiş türevi olsun. Eğer F = 0 veya $d \neq 0$ ise R değişmelidir.

Y. Özellik 2.3.4 (Rehman (2002), Theorem 4.2) I, R asal halkasının sıfırdan farklı bir ideali ve F, R' nin, her $x, y \in$ I için F(xoy) + xoy = 0 olacak şekilde, d ile belirlenen bir genelleştirilmiş türevi olsun. Eğer F = 0 veya $d \neq 0$ ise o zaman R değişmelidir.

Y. Özellik 2.3.5 (Wei (2004), Theorem 5) I, R asal halkasının sıfırdan farklı iki yanlı ideali ve d, I üzerinde bir genelleştirilmiş türev olsun. n pozitif bir tamsayı olmak üzere, her $x \in$ I için $d(x)^n = 0$ ise o zaman $d = 0$ dır.

Y. Özellik 2.3.6 (Lee (1999), Theorem 4) R bir yarı-asal halka olsun. R' nin bir yoğun sağ idealinden **U** Utumi kesirler halkası içine tanımlı her genelleştirilmiş türev g, **U** ya tek türlü genişletilebilir ve bu türev, δ **U** da bir türev ve $a \in$ **U** olmak üzere $g(x) = ax + \delta(x)$ şeklindedir. Üstelik a ve δ, g tarafından tek türlü belirlenir.

Nakajima (1999), bir K değişmeli halkası üzerindeki bir A cebirinden bir M A/K-bimodülüne olan yeni bir genelleştirilmiş türev çeşidi tanıtmış ve bu tür türevlerin kategorik özelliklerini incelemiştir. Ayrıca Nakajima, (2000b) çalışmasında yüksek mertebeden genelleştirilmiş türev, genelleştirilmiş Jordan türev ve genelleştirilmiş Lie türev tanımlarını verip, 1999 ve 2000a yıllarında yapmış olduğu çalışmalarındaki bazı özellikleri yüksek mertebeden genelleştirilmiş türevler için vermiştir.

Nakajima' nın (1999) çalışmasındaki bazı tanım ve sonuçlar aşağıda özetlenmiştir.

Bu bölümde, K değişmeli halka, A bir K-cebir ve M bir A/K-bimodül alınacaktır.

Tanım 2.3.3 $f : A \to M$ K-modül homomorfizması, her $x \in A$ için,

$$f(x^2) = f(x)x + xd(x)$$

eşitliğini sağlıyorsa f dönüşümüne **Brešar anlamında genelleştirilmiş Jordan türev** denir. Burada d Jordan türevdir.

Tanım 2.3.4 $f : A \to M$ K-modül homomorfizması, her $x, y \in A$ için,

$$f([x, y]) = [f(x), y] + [x, d(y)]$$

eşitliğini sağlıyorsa f dönüşümüne **Brešar anlamında genelleştirilmiş Lie türev** denir. Burada d Lie türevdir.

Tanım 2.3.5 (Nakajima, 1999) $w \in M$ olmak üzere her $x, y \in A$ için

$$f(xy) = f(x)y + x\mathrm{f}(y) + xwy \qquad (2.3.1)$$

ile tanımlı bir K-modül $f : A \to M$ dönüşümüne bir **genelleştirilmiş türev (Nakajima anlamında)** denir ve **(*f, w*)** ile gösterilir.

Tanım 2.3.1' de verilen genelleştirilmiş türev kavramı, $d : A \to M$ türev olmak üzere her $x, y \in A$ için

$$f(xy) = f(x)y + xd(y) \qquad (2.3.2)$$

koşulunu sağlayan bir K-modül f : A $\rightarrow$ M dönüşümü olarak modül yapısı üzerine taşınabilir. Bu durumda (2.3.1) de yer alan tanımın (2.3.2) deki genelleştirilmiş türev tanımını kapsadığı açıktır. Ayrıca benzer şekilde Tanım 2.3.2 de verilen (Brešar, 1991) anlamındaki genelleştirilmiş iç türev dönüşümü de bu çalışmada, $m, n \in$ M olmak üzere her $x \in$ M için

$$f_{m,n}(x) = mx + xn \qquad (2.3.3)$$

olarak tanımlanan K-modül $f_{m,n}$: A $\rightarrow$ M dönüşümüdür.

Tanım 2.3.6 (Nakajima, 1999) $m, n \in$ M olmak üzere her $x, y \in$ A için

$$f_{m,n}(xy) = f_{m,n}(x)y + x\, f_{m,n}(y) + x(m - n)y \qquad (2.3.4)$$

olacak şekilde bir K-modül $f_{m,n}$: A $\rightarrow$ M dönüşümüne **genelleştirilmiş iç türev** denir.

Bu bölümde genelleştirilmiş iç türev tanımı olarak (2.3.4) kullanılacaktır. Ayrıca Nakajima aşağıdaki tanımları vermiştir (Nakajima, 2000a).

Tanım 2.3.7 (Nakajima, 2000a) f : A $\rightarrow$ M bir K-modül dönüşümü olsun. $w \in$ M olmak üzere her $x \in$ A için

$$f(x^2) = f(x)x + x\, f(x) + xwx$$

ile tanımlı (f, w) dönüşümüne bir **genelleştirilmiş Jordan türev** denir.

Tanım 2.3.8 (Nakajima, 2000a) $w \in$ M olmak üzere her $x, y \in$ A için

$$f([x, y]) = [f(x), y] + [x,\ f(y)] + xwy - ywx$$

olarak tanımlanan (f ,w) dönüşümüne bir **genelleştirilmiş Lie türev** denir.

Aşağıdaki kümeler bir K-cebir A dan bir A/K- bimodül M ye olan bazı dönüşümlerin kümelerini gösterecektir:

$\mathbf{Der_k(A,M)}$: Türevlerin kümesi,

$\mathbf{Inn_k(A,M)}$: İç türevlerin kümesi,

$\mathbf{JDer_k(A,M)}$: Jordan türevlerin kümesi,

$\mathbf{LieDer_k(A,M)}$: Lie türevlerin kümesi,

$\mathbf{BDer_k(A,M)}$: Brešar anlamında genelleştirilmiş türevlerin kümesi,

$\mathbf{BInn_k(A,M)}$: Brešar anlamında genelleştirilmiş iç türevlerin kümesi,

$\mathbf{BJDer_k(A,M)}$: Brešar anlamında genelleştirilmiş Jordan türevlerin kümesi,

$\mathbf{BLieDer_k(A,M)}$: Brešar anlamında genelleştirilmiş Lie türevlerin kümesi,

$\mathbf{gDer_k(A,M)}$: Genelleştirilmiş türevlerin kümesi (Nakajima anlamında),

$\mathbf{gInn_k(A,M)}$: Genelleştirilmiş iç türevlerin kümesi,

$\mathbf{gJDer_k(A,M)}$: Genelleştirilmiş Jordan türevlerin kümesi,

$\mathbf{gLieDer_k(A,M)}$: Genelleştirilmiş Lie türevlerin kümesi,

Yukarıda tanımlanan kümelerin tümü, f, $g \in \mathrm{Der_k(A,M)}$ ($\mathrm{JDer_k(A,M)}$, $\mathrm{LieDer_k(A,M)}$, $\mathrm{Inn_k(A,M)}$), her $a \in \mathrm{K}$ ve $x \in \mathrm{A}$ için

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ ve } (af)(x) = af(x)$$

ve benzer şekilde (f, m), $(g, n) \in \mathrm{gDer_k(A,M)}$ ($\mathrm{gJDer_k(A,M)}$, $\mathrm{gLieDer_k(A,M)}$, $\mathrm{gLieDer_k(A,M)}$) ve her $a \in \mathrm{K}$ için

$$(f, m) + (g, n) = (f + g, m + n) \text{ ve } a(f, m) = (af, am)$$

işlemlerine göre K-modül yapısındadır.

Bu tanımlardan hareketle $\mathrm{gDer_k(A,M)}$ ve $\mathrm{Der_k(A,M)}$ K-modülleri arasındaki bağıntı aşağıdaki özellikler yardımıyla verilebilir.

Bu bölümde, genelleştirilmiş türev dendiğinde, Nakajima anlamında genelleştirilmiş türev anlaşılacaktır. Ayrıca m ile soldan çarpım fonksiyonu için m_l gösterimi kullanılacaktır.

Y. Özellik 2.3.7 (Nakajima (1999), Lemma 2.1) $(f, m) : A \to M$ bir genelleştirilmiş türev olsun. O zaman her $x, y \in A$ için $f(xy) = f(x)y + xd(y)$ olacak şekilde bir d: $A \to M$ türevi vardır. Eğer $\{ m \in M \mid Am = 0 \} = 0$ ise o zaman d, f ile tek türlü belirlenir.

Y. Özellik 2.3.8 (Nakajima (1999), Lemma 2.2) $d : A \to M$ bir türev olsun. O zaman bir sıfırdan farklı $m \in M$ için $f \neq d$ olacak şekilde $(f = d+m_l, -m)$ dönüşümü bir genelleştirilmiş türevdir.

Y. Özellik 2.3.7 ve Y. Özellik 2.3.8 den yararlanarak $gDer_k(A,M)$ ve $Der_k(A,M)$ K-modülleri için aşağıdaki özellik verilebilir.

Y. Özellik 2.3.9 (Nakajima (1999), Theorem 2.4) M bir A\K-bimodül olsun. O zaman $\psi_M(m) = (m_l, -m)$ ve $\varphi_M(f, m) = f + m_l$ olmak üzere

$$0 \to M \xrightarrow{\psi_M} gDer_k(A,M) \xrightarrow{\varphi_M} Der_k(A,M) \to 0$$

dizisi K-modüllerin parçalanabilir tam dizisidir. Burada dönüşümler, her $m \in M$ için $\psi_M(m) = (m_l, -m)$ ve her $(f, m) \in gDer_k(A,M)$ için $\varphi_M((f, m)) = f + m_l$ olarak tanımlanmıştır.

Nakajima (2000a) çalışmasında genelleştirilmiş Jordan (Lie) türevler ve Jordan (Lie) türevler için aşağıdaki gibi bazı elemanter özelliklere yer verilmiştir.

Y. Özellik 2.3.10 (Nakajima (2000a), Lemma 2.1, 2.5) $f : A \to M$ bir K-doğrusal dönüşüm ve $w \in M$ olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır:

(i) (f, w) bir genelleştirilmiş Jordan (Lie) türevse o zaman $f + w_l$ ve $f + w_r$ dönüşümleri Jordan (Lie) türevlerdir.

(ii) F bir Jordan (Lie) türev ise o zaman ($f + w_l$, -w) ve ($f + w_r$, -w) dönüşümleri genelleştirilmiş Jordan (Lie) türevlerdir.

Genelleştirilmiş türevlere benzer olarak, genelleştirilmiş Jordan ve Lie türevlerin kategorik uygulamaları aşağıdaki özellik yardımıyla verilebilir. Bu özellik, $gJDer_k(A,M)$ ve $JDer_k(A,M)$ sırasıyla, $gLieDer_k(A,M)$ ve $LieDer_k(A,M)$ K-modülleri arasındaki ilişkiyi gösterir.

Y. Özellik 2.3.11 (Nakajima (2000a), Theorem 2.3, 2.6) $\psi_M(m) = (m_l, -m)$ ve $\varphi_M(f, m) = f + m_l$ olmak üzere

$$0 \to M \xrightarrow{\psi_M} gJDer_k(A,M) \xrightarrow{\varphi_M} JDer_k(A,M) \to 0$$

ve

$$0 \to M \xrightarrow{\psi_M} gLieDer_k(A,M) \xrightarrow{\varphi_M} LieDer_k(A,M) \to 0$$

dizileri K-modülleri olarak parçalanabilir tam dizilerdir.

2.4 Genelleştirilmiş (σ,τ)-Türevli Halkalar

Tanım 2.4.1 σ ve τ, bir A halkasının K-endomorfizmaları olmak üzere, $d : A \to M$ dönüşümü, her $x, y \in A$ için

$$d(xy) = d(x)\tau(y) + \sigma(x)d(y)$$

eşitliğini sağlıyorsa d dönüşümüne **(σ,τ)-türev** denir.

Tanım 2.4.2 $d : A \to M$ dönüşümü, her $x \in A$ için

$$d(x^2) = d(x)\tau(x) + \sigma(x)d(x)$$

eşitliğini sağlıyorsa d dönüşümüne **Jordan (σ,τ)-türev** denir.

Tanım 2.4.3 $d : A \to M$ dönüşümü, her $x, y \in A$ için

$$d([x, y]) = [d(x), y]_{\sigma,\tau} + [d(y), x]_{\sigma,\tau}$$

eşitliğini sağlıyorsa d dönüşümüne **Lie (σ,τ)-türev** denir. Burada her $x, y \in A$ için $[x, y]_{\sigma,\tau} = x\tau(y) - \sigma(y)x$ dir.

Tanım 2.4.4 $f : A \to M$ bir K-modül homomorfizması, d bir (σ,τ)-türev olmak üzere, her $x, y \in A$ için

$$f(xy) = f(x)\tau(y) + \sigma(x)d(y)$$

eşitliği sağlanıyorsa f dönüşümüne **Brešar anlamında genelleştirilmiş (σ,τ)-türev** denir ve **(*f*, *d*)** ile gösterilir.

Tanım 2.4.5 $f : A \to M$ bir K-modül homomorfizması, d bir Jordan (σ,τ)-türev olmak üzere, her $x \in A$ için

$$f(x^2) = f(x)\tau(x) + \sigma(x)d(x)$$

eşitliği sağlanıyorsa f dönüşümüne **Brešar anlamında genelleştirilmiş Jordan (σ,τ)-türev** denir.

Tanım 2.4.6 (Argaç and Albaş, 2002) $f : A \to M$ bir K-modül homomorfizması, $m \in M$ olmak üzere, her x, y $\in$ A için

$$f(xy) = f(x)\tau(y) + \sigma(x)f(\mathrm{y}) + \sigma(\mathrm{x})m\tau(y)$$

eşitliğini gerçekliyorsa f dönüşümüne **genelleştirilmiş (σ,τ)-türev (Nakajima anlamında)** denir ve **(*f*, *m*)** ile gösterilir.

Tanım 2.4.7 (Argaç and Albaş, 2002) $f : A \to M$ K-modül homomorfizması, $m \in M$ olmak üzere, her $x \in A$ için

$$f(x^2) = f(x)\tau(x) + \sigma(x) f(x) + \sigma(x)m\tau(x)$$

eşitliğini gerçekliyorsa f dönüşümüne **genelleştirilmiş Jordan (σ,τ)-türev** denir.

Tanım 2.4.8 (Argaç and Albaş, 2002) $f : A \to M$ K-modül homomorfizması, $m \in M$ olmak üzere, her $x, y \in A$ için

$$f([x, y]) = [f(x), y]_{\sigma,\tau} - [f(y), x]_{\sigma,\tau} + \sigma(x)m\tau(y) - \sigma(y)m\tau(x)$$

eşitliğini gerçekliyorsa f dönüşümüne **genelleştirilmiş Lie (σ,τ)-türev** denir.

Tanım 2.4.9 (Argaç and Albaş, 2002) $f : A \to M$ K-modül homomorfizması, $m, n \in M$ olmak üzere, her $x, y \in A$ için

$$f(xy)_{m,n} = f_{m,n}(x)\tau(y) + \sigma(x)f_{m,n}(y) + \sigma(x)(-m - n)\tau(y)$$

eşitliğini gerçekliyorsa f dönüşümüne **genelleştirilmiş iç (σ,τ)-türev** denir.

Aşağıdaki kümeler bir K-cebir A dan bir A/K- bimodül M ye olan bazı dönüşümlerin kümelerini gösterecektir:

$\mathbf{Der_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)}$: (σ,τ)-türevlerin kümesi,

$\mathbf{Inn_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)}$: (σ,τ)-iç türevlerin kümesi,

$\mathbf{JDer_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)}$: Jordan (σ,τ)-türevlerin kümesi,

$\mathbf{LieDer_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)}$: Lie (σ,τ)-türevlerin kümesi,

$\mathbf{BDer_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)}$: Brešar anlamında genelleştirilmiş (σ,τ)-türevlerin kümesi,

$\mathbf{BInn_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)}$: Brešar anlamında genelleştirilmiş iç (σ,τ)-türevlerin kümesi,

$\mathbf{BJDer_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)}$: Brešar anlamında genelleştirilmiş Jordan (σ,τ)-türevlerin kümesi,

$\mathbf{BLieDer_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)}$: Brešar anlamında genelleştirilmiş Lie (σ,τ)-türevlerin kümesi,

$\mathbf{gDer_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)}$: Genelleştirilmiş (σ,τ)-türevlerin kümesi (Nakajima anlamında),

$\mathbf{gInn_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)}$: Genelleştirilmiş iç (σ,τ)-türevlerin kümesi,

$\mathbf{gJDer_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)}$: Genelleştirilmiş Jordan (σ,τ)-türevlerin kümesi,

$\mathbf{gLieDer_k^{(\sigma,\tau)}(A,M)}$: Genelleştirilmiş Lie (σ,τ)-türevlerin kümesi.

Aşağıda genelleştirilmiş (σ,τ)-türevlerle ilgili daha önce elde edilmiş sonuçlar verilmiştir:

Y. Özellik 2.4.1 (Argaç and Albaş (2002), Lemma 3.1) (f, m) bir (σ,τ)-türev olsun. Her $s, t \in A$ için, $f(st) = f(s)\tau(t) + \sigma(s)d(t)$ olacak şekilde bir $d : A \to M$ (σ,τ)-türevi vardır. Üstelik, $\{m \in M \mid Am = 0\} = 0$ ve $\sigma : A \to A$ dönüşümü örten ise o zaman d, f ile tek türlü belirlenir.

Y. Özellik 2.4.2 (Argaç and Albaş (2002), Lemma 3.2) $d : A \to M$ bir (σ,τ)-türev olsun. O zaman sıfırdan farklı bir $m \in M$ için, $f \neq d$ olacak şekilde $(f = d + m_l\tau, -m)$ dönüşümü bir genelleştirilmiş (σ,τ)-türevdir.

Y. Özellik 2.4.3 (Argaç and Albaş (2002), Theorem 3.1) $\{m \in M \mid Am = 0\}$ ve $\sigma : A \to A$ dönüşümü örten olsun. Bu durumda aşağıdaki dizi, parçalanabilir tam dizidir:

$$0 \to M \xrightarrow{\psi_M} gDer^{(\sigma,\tau)}(A,M) \xrightarrow{\varphi_M} Der^{(\sigma,\tau)}(A,M) \to 0$$

Burada dönüşümler: Her $m \in M$ ve her (f, m) $gDer^{(\sigma,\tau)}(A,M)$ için, $\psi_M(m) = (m_l\tau, -m)$ ve $\varphi_M(f, m) = f + m_l\tau$ olarak tanımlanmıştır.

Y. Özellik 2.4.4 (Argaç and Albaş (2002), Theorem 4.1) $\{m \in M \mid Am = 0\}$ ve $\sigma : A \to A$ dönüşümü örten olsun. Buna göre aşağıdaki dizi, parçalanabilir tam dizidir:

$$0 \to M \xrightarrow{\psi_M} gJDer^{(\sigma,\tau)}(A,M) \xrightarrow{\varphi_M} JDer^{(\sigma,\tau)}(A,M) \to 0$$

Burada dönüşümler: Her $m \in M$ ve her (f, m) $gDer^{(\sigma,\tau)}(A,M)$ için, $\psi_M(m) = (m_l\tau, -m)$ ve $\varphi_M(f, m) = f + m_l\tau$ şeklinde tanımlıdır.

Y. Özellik 2.4.5 (Argaç and Albaş (2002), Theorem 4.2)$\{m \in M \mid Am = 0\}$ ve $\sigma : A \to A$ dönüşümü örten olsun. Buna göre aşağıdaki dizi, parçalanabilir tam dizidir:

$$0 \to M \xrightarrow{\psi_M} gLieDer^{(\sigma,\tau)}(A,M) \xrightarrow{\varphi_M} LieDer^{(\sigma,\tau)}(A,M) \to 0$$

Burada dönüşümler: Her $m \in M$ ve her $(f, m) \in gDer^{(\sigma,\tau)}(A,M)$ için, $\psi_M(m) = (m_l\tau, -m)$ ve $\varphi_M(f,m) = f + m_l\tau$ şeklinde tanımlıdır.

3. İDEAL ÜZERİNDEKİ ADİ TÜREVLER

3.1 Asal Halkalarda Türev

Bu bölüm, Y. Özellik 2.2.7 nin bir genelleştirilmesidir. Ayrıca bu bölümde, Utumi kesirler halkası ve Martindale kesirler halkası için, tezin ilk bölümünde verildiği gibi, sırasıyla **U** ve **Q** gösterimleri kullanılacaktır.

Teorem 3.1.1 I, R asal halkasının sıfırdan farklı iki yanlı ideali ve n, pozitif sabit bir tamsayı olsun. d, R halkasının her $x, y \in$ I için $(d(x)y + xd(y) + d(y)x + yd(x))^n = xy + yx$ olacak şekilde bir türevi ise o zaman R değişmelidir.

İspat: $d = 0$ ise o zaman her $x, y \in$ I için $xy + yx = 0$ dır. Bu eşitlikte y yerine yz alınır, $xy = -yx$ olduğunu kullanılırsa, her $x, y, z \in$ I için $y[x, z] = 0$ elde edilir. Buradan her $x, z \in$ I için IR$[x, z] = 0$ bulunur. I $\neq 0$ ve R asal halka olduğu için, her $x, z \in$ I için $[x, z] = 0$ dır. O halde R değişmelidir.

Şimdi $d \neq 0$ ve her $x, y \in$ I için $(d(x)y + xd(y) + d(y)x + yd(x))^n = xy + yx$ olduğunu kabul edelim. O halde I bu diferansiyel özdeşliği sağlar. Y. Özellik 2.2.15 kullanılarak d, **Q** Martindale kesirler halkasının bir A elemanı ile belirlenmiş bir iç türevidir, yani $d = \mathrm{ad}(A)$ dır, veya I, her $x, y \in$ I ve her $z, w \in$ R için

$$(zy + xw + wx + yz)^n = xy + yx$$

polinom özdeşliğini sağlar. Bu durumda

$z = w = 0$ alınırsa her $x, y \in$ I için $xy + yx = 0$ elde edilir. O halde biraz önce gördüğümüz gibi R değişmelidir.

Şimdi $d = \mathrm{ad}(A)$ olduğunu kabul edelim. O zaman her $x, y \in$ I için

$$([A, x]y + x[A, y] + [A, y]x + y[A, x])^n = xy + yx$$

olur. Y. Özellik 2.1.30 dan I ve **Q** aynı genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağladığından her $x, y \in$ **Q** için

$$([A, x]y + x[A, y] + [A, y]x + y[A, x])^n = xy + yx$$

bulunur. Üstelik R asal olduğunda **Q** da asal olduğu için R yerine **Q** alabiliriz. A $\in$ R ve R halkasının merkezi C olur. Q merkezi kapalı asal C-cebir olduğundan, R merkezi kapalı asal C-cebirdir yani RC = R dir. Y. Özellik 2.1.21 den RC (ve dolayısıyla R) primitif halkadır. Böylece Y. Özellik 2.1.16 dan R, bir D bölüm halkası üzerindeki bir V vektör uzayının lineer dönüşümlerinin yoğun halkasına izomorftur.

Öncelikle $\dim_D V \geq 3$ olduğunu kabul edelim:

1. Adım: Amacımız herhangi bir $v \in$ V için, v ve Av' nin D-bağımlı olduğunu göstermektir. Eğer Av = 0 ise o zaman {v, Av} D-bağımlıdır. Bu nedenle A$v \neq 0$ olduğunu kabul edebiliriz. Av ve v lineer bağımsız ise o zaman $\dim_D V \geq 3$ olduğundan, {v, Av, w} lineer bağımsız olacak şekilde bir $w \in$ V vardır. I idealinin yoğunluğundan

$$xv = 0,\ \ xAv = w,\ \ yv = 0,\ \ yAv = 0\ \text{ ve }\ yw = v$$

olacak şekilde $x, y \in$ I vardır. Buradan

$$(-1)^n v = ([A, x]y + x[A, y] +[A, y]x +y[A, x])^n v = (xy + yx)v = 0$$

şeklinde bir çelişkiye ulaşırız. Bu nedenle her $v \in$ V için v ve Av lineer bağımlıdır.

2. Adım: Her $v \in$ V için Av = λv olacak şekilde bir $\lambda \in$ D var olduğunu göstermek istiyoruz. v, w lineer bağımsız olsun. $\dim_D V \geq 3$ olduğundan, $\{u, v, w\}$ lineer bağımsız olacak şekilde bir $u \in$ V vardır. 1. Adımdan,

$$Av = \lambda_v v, \quad Aw = \lambda_w w, \quad Au = \lambda_u u$$

olacak şekilde $\lambda_u, \lambda_v, \lambda_w \in$ D vardır. O halde

$$A(u + v + w) = (u + v + w)\lambda_{u+v+w}$$

eşitliğini sağlayan bir $\lambda_{u+v+w} \in$ D vardır. Buna göre,

$$0 = (\lambda_{u+v+w} - \lambda_v)v + (\lambda_{u+v+w} - \lambda_w)w + (\lambda_{u+v+w} - \lambda_u)u$$

dır. v, u, $w \in$ V lineer bağımsız olduklarından, $\lambda_u = \lambda_v = \lambda_w = \lambda_{u+v+w}$, yani λ, v nin seçimine bağlı değildir. O halde her $v \in$ V için Av = λv olacak şekilde bir $\lambda \in$ D vardır.

Şimdi herhangi $r \in$ R ve $v \in$ V için

$$Av = v\lambda, \quad r(Av) = r(v\lambda) \tag{3.1.1}$$

ve aynı zamanda

$$A(rv) = (rv)\lambda \tag{3.1.2}$$

elde edilir. (3.1.1) ve (3.1.2) den her $v \in$ V için

$$0 = A(rv) - r(Av) = [A, r]v$$

bulunur. Böylece herhangi bir $v \in$ V için

$$0 = [A, r]v$$

dir. V, indirgenemez sol faithful R-modül olduğundan, her $r \in$ R için

$$[A, r] = 0$$

olur. O halde $A \in Z(R)$ dir ve dolayısıyla $d = 0$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. O halde $\dim_D V \leq 2$ olmalıdır. **Q** birimli halka olduğundan ve R ile **Q** yu yer değiştirdiğimiz için R de birimlidir. R birimli, basit ve bir genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlıyor ise Y. Özellik 2.1.24 den R, merkezi üzerinde sonlu boyutlu merkezi, basit cebir olur. O halde Y. Özellik 2.1.25 den $R \subseteq M_k(F)$ olacak şekilde uygun bir F cismi vardır ve üstelik $M_k(F)$ ile R aynı genelleştirilmiş polinom özdeşliği sağlar.

***k* ≥ 3 ise**, 1. Adımdan çelişki elde ederiz. O halde $k < 2$ olmalıdır.

***k* = 1 ise**, R halkasının değişmeli olduğu açıktır. Böylece $R \subseteq M_2(F)$ kabul edebiliriz ve $M_2(F)$,

$$([A, x]y + x[A, y] + [A, y]x + y[A, x])^n = xy + yx$$

genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlar. $[A, x]y + x[A, y] + [A, y]x + y[A, x]$ ifadesini K ile gösterelim. $x = e_{12}$ ve $y = e_{21}$ seçersek $K = 0$ olur. Buradan, $0 = K^n = xy + yx = e_{11} + e_{22} \neq 0$ bulunur. Bu ise bir çelişkidir. O halde $k = 1$, yani R değişmelidir.

Y. Özellik 3.1.1 $R = M_k(F)$, char$F \neq 2$, bir F cismi üzerindeki $k\times k$ tipindeki matrisler halkası ve n sabit bir tamsayı olsun. $A = (a_{ij})$, R halkasının, her $x, y \in R$ için $([A, x]y + x[A, y] + [A, y]x + y[A, x])^n - (xy + yx) \in F$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir matrisi ise o zaman A merkezi bir matristir.

İspat: k ≥ 3 olduğunu kabul edelim. i, j, r farklı indisler ve $a_{mn} \in F$ olmak üzere $q = \sum a_{mn}e_{mn}$ olsun. A köşegen olmayan bir matris olsun. Sabit $i \neq j$ için $a_{ij} \neq 0$ olsun. i, j, r farklı indisleri için $x = e_{jr}$, $y = e_{ri}$ seçersek, $xy + yx = e_{ji}$ olur. $[A, x]y + x[A, y] + [A, y]x + y[A, x] = [A, xy + yx]$ ifadesini K ile gösterelim. O zaman

$$K = Ae_{ji} - e_{ji}A$$

ve

$$K^n = \sum_{l+t=n} (-1)^l (e_{ji}A)^l (Ae_{ji})^t$$

olur. Hipotezden,

$$\sum_{l+t=n} (-1)^l (e_{ji}A)^l (Ae_{ji})^t - (e_{ji}) \in F \tag{3.1.3}$$

elde ederiz. Bu matrisin tüm bileşenleri :

- j. Satırdaki terimler $(e_{ji}A)^n$ den,
- i. Sütunundaki terimler $(Ae_{ji})^n$ den gelir.

Ayrıca $(Ae_{ji})^n$ den gelen bileşenler, herhangi $h \neq j$, i için tüm $a_{hj}a_{ij}^{n-1}e_{hi}$ bileşenlerini ele alalım. Birinci olarak bu bileşenlerin $(e_{ji}A)^n$ de yer almadığını belirtelim. O halde $h \neq i$ ve (3.1.3) deki matris merkezi olmak zorunda olduğundan, herhangi $h \neq i$, j için $a_{hj}a_{ij}^{n-1} = 0$ olduğu açıktır.

$a_{ij} \neq 0$ olduğundan, her $h \neq i$, j için $a_{hj} = 0$ bulunur. Şimdi sabit $k \neq i$, j için $xy + yx = e_{jk}$ seçilirse,

$$\sum_{l+t=n} (-1)^l (e_{jk}A)^l (Ae_{jk})^t - (e_{jk}) \in F \tag{3.1.4}$$

elde edilir. Her $k \neq i$, j için $a_{kj} = 0$ olduğunu biliyoruz, yani (3.1.4) deki matris $e_{jk} \in F$ ye indirgenir bu ise bir çelişkidir. O halde her $i \neq j$ için $a_{ij} = 0$ dır yani A matrisi köşegen matristir.

Şimdi de **k = 2** olduğunu kabul edelim. Buradan

$$[A, xy + yx]^n - (xy + yx) \in F \text{ ve } R = M_2(F)$$

dir. **n çift** ise $[A, xy + yx]^n \in F$ dir. Buradan $xy + yx \in F$ bulunur. $x = e_{11}$, $y = e_{12}$ seçersek $xy + yx = e_{12} \in F$ olur bu ise bir çelişkidir. **n = 2t + 1 tek** ise her $x, y \in R$ için

$$[A, xy + yx]^{2t} [A, xy + yx] = (xy + yx) + \gamma$$

olacak şekilde bir $\gamma \in F$ vardır. Üstelik $[A, xy + yx]^{2t} = \beta$ olacak şekilde bir $\beta \in F$ vardır. Buradan

$$\beta[A, xy + yx] = (xy + yx) + \gamma$$

elde edilir. Özel olarak $x = e_{11}$ $y = e_{12}$ alınırsa

$$\beta[A, e_{12}] = e_{12} + \gamma$$

olacak şekilde $\beta, \gamma \in F$ vardır. Burada iki durum söz konusudur:

(i) $\beta = 0$ ise $[A, e_{12}]^{2t} = 0$, buradan da $e_{12}[A, e_{12}]^{2t} = 0$ dır. O halde A matrisinin (2,1) bileşeni yani $a_{21} = 0$ dır.

(ii) $\beta \neq 0$ ise

$$B = \beta[A,e_{12}] - e_{12} \in F$$

bulunur. B merkezi olduğundan $B = \sum_{i,j} b_{ij}e_{ij}$ matrisinde $b_{11} = b_{22}$ olmaktadır. Üstelik $\beta a_{21} = b_{11}$, $\beta a_{21} = b_{22}$ dir. O zaman $2\beta a_{21} = 0$ olur. CharR $\neq 2$ ve $\beta \neq 0$ olduğundan $a_{21} = 0$ dır. Benzer şekilde $a_{12} = 0$ olduğu görülür. Bu nedenle A, $k = 1$ ve R değişmeli olması durumu dışında her iki durumda da köşegen matristir.

Diğer taraftan i $\neq$ j için, $\varphi(x) = (1 - e_{ij})x(1 + e_{ij})$ şeklinde tanımlı φ dönüşümü, $M_k(F)$ üzerinde bir iç otomorfizmadır. Bu nedenle $\varphi(A) = \sum_t a_{tt}e_{tt} + (a_{ii} - a_{jj})e_{ij}$ köşegen matris olmak zorundadır, yani her i $\neq$ j için $a_{ii} = a_{jj}$ dir. O halde A merkezi matristir.

Teorem 3.1.2 R, charR $\neq$ 2 bir asal halka, I R halkasının sıfırdan farklı iki yanlı ideali, *d* R halkasının bir türevi ve *n* sabit bir tamsayı olsun. Her $x, y \in$ I için $(d(x)y + xd(y) + d(y)x + yd(x))^n - (xy + yx) \in Z(R)$ ise o zaman R değişmelidir.

İspat: $d = 0$ ise her $x, y \in$ I için $xy + yx \in Z(R)$ dir ve R aynı özdeşliği sağlar. Bu durumda bu özdeşlik polinom özdeşliğidir ve bu nedenle R ile $M_n(F)$ aynı özdeşliği sağlayacak şekilde uygun bir F cismi vardır. $x = e_{12}$ ve $y = e_{22}$ alırsak, $xy + yx \notin Z(R)$ elde ederiz. Bu ise bir çelişkidir. O halde $n = 1$ yani R değişmelidir. Bu nedenle $d \neq 0$ olduğunu kabul edebiliriz.

Z(R) = 0 ise o zaman her $x, y \in$ I için

$$(d(x)y + xd(y) + d(y)x + yd(x))^n = xy + yx$$

dir ve Teorem 3.1.1 den R değişmelidir.

Z(R) $\neq$ 0 ise kabulümüzden I $\cap$ Z(R)$\neq$ 0 dır. R halkasının merkezi kesirler halkası $R_{Z(R)}$ olmak üzere, $R_{Z(R)}$ nin sıfırdan farklı iki yanlı bir ideali J olsun. J $\cap$ R, R' nin bir ideali olduğundan J $\cap$ R $\cap$ Z(R) $\neq$ 0 dır. Böylece J, $R_{Z(R)}$ deki tersinir bir elemanı içerdiğinden, $R_{Z(R)}$ birimli bir basit halkadır. Hipotezden, her $x, y \in$ I ve her $r \in$ R için I ideali,

$$[(d(x)y + xd(y) + d(y)x + yd(x))^n - (xy + yx), r] = 0$$

diferansiyel özdeşliğini sağlar.

d iç türev değilse, Y. Özellik 2.2.15 den I,

$$[(zy + xw + yz + wx)^n - (xy + yx), r] = 0$$

polinom özdeşliğini sağlar. Burada $z = w = 0$ alınırsa

$$[xy + yx, r] = 0$$

özdeşliğini elde ederiz.Bu durumda Y. Özellik 2.1.25 den R ile $M_m(F)$ aynı polinom özdeşliğini sağlayacak şekilde uygun bir F cismi vardır. Bu nedenle $xy + yx$ matrisi, $M_m(F)$ de merkezidir.

m ≥ 2 olsun ve $x = e_{12}$ ve $y = e_{22}$ seçelim. O zaman $xy + yx = e_{12} \notin Z(R)$ bulunur. Bu ise hipotezimizle çelişir. O halde $m \leq 1$, yani R değişmelidir.

Şimdi ***d*, Q Martindale kesirler halkasının bir A elemanıyla belirlenen bir iç türev olsun**. Burada $d \neq 0$ olduğundan $A \neq 0$ kabul edebiliriz. Y. Özellik 2.1.33 den R ve $R_{Z(R)}$ aynı polinom özdeşliğini sağladığından her $x, y \in R_{Z(R)}$ için

$$([A, x]y + x[A, y] + [A, y]x + y[A, x])^n - (xy + yx) \in Z(R_{Z(R)})$$

bulunur. $R_{Z(R)}$ birimli ve basit olduğundan, R halkasının birimli ve basit olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda her $x, y \in R$ için

$$([A, x]y + x[A, y] + [A, y]x + y[A, x])^n - (xy + yx) \in Z(R)$$

dir. Bu nedenle R bir genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlar ve R birimli, basit bir halkadır. Y. Özellik 2.1.17 den **Q** = RC = R dir ve R halkasının bir minimal sağ ideali vardır. O halde A ∈ R = **Q** ve Tanım 2.1.23 den R, basit artinian halkadır yani Y. Özellik 2.1.24 den D, Z(R) üzerinde sonlu boyutlu bir bölüm halkası olmak üzere R = M_k(D) dir. Y. Özellik 2.1.25 den R $\subseteq$ M_k(F) olacak şekilde uygun bir F cismi vardır ve üstelik M_k(F), her $r \in$ R için

$$[([A, x]y + x[A, y] + [A, y]x + y[A, x])^n - (xy + yx), r] = 0$$

polinom özdeşliğini sağlar. Y. Özellik 3.1.1 den A merkezi bir matristir. Dolayısıyla $d = 0$ dır. İspatın ilk başlangıcında belirtildiği gibi R değişmelidir.

Sonuç 3.1.1 I, R asal halkasının sıfırdan farklı bir ideali ve *d*, R halkasının bir türevi olsun.

(i) Her $x \in$ I için d(x^2) = x^2 ise o zaman R değişmelidir.

(ii) CharR $\neq$ 2 ve her $x \in$ I için d(x^2) - $x^2 \in$ Z(R) ise o zaman R değişmelidir.

İspat: (i) Her $x \in$ I için $d(x)x + xd(x) = x^2$ ifadesi doğrusallaştırılırsa her $x, y \in$ I için

$$d(x)y + xd(y) + d(y)x + yd(x) = xy + yx$$

elde ederiz. $n = 1$ için Teorem 3.1.1 göz önünde bulundurulursa, R değişmelidir.

(ii) Her $x \in$ I için $d(x)x + xd(x) - x^2 \in$ Z(R) doğrusallaştırılırsa her $x, y \in$ I için

$$d(x)y + xd(y) + d(y)x + yd(x) - (xy + yx) \in Z(R)$$

elde edilir. $n = 1$ için Teorem 3.1.2 göz önünde bulundurulursa R değişmelidir.

Aşağıdaki örnekler, Teorem 3.1.1' deki asallık koşulunun kaldırılamayacağını gösterir:

Örnek: S herhangi bir değişmeli halka olsun.

(i) R = $\left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{a} & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{S} \right\}$ ve I = $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \mathrm{a} \in \mathrm{S} \right\}$ olsun. $d : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ dönüşümü, $d\begin{pmatrix} \mathrm{a} & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlansın. R kümesi, matrislerdeki toplama ve çarpma işlemleri altında bir halka teşkil eder. Ayrıca I, R halkasının bir idealidir ve *d*, R halkasının sıfırdan farklı bir türevidir. *n* sabit pozitif bir tamsayı olmak üzere, her $x, y \in \mathrm{I}$ için $(d(x)y + xd(y) + d(y)x + yd(x))^n = xy + yx$ dir fakat R değişmeli değildir.

(ii) R = $\left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{a} & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in \mathrm{S} \right\}$ ve I = $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \mathrm{a} \in \mathrm{S} \right\}$ olsun. $d : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ dönüşümü, $d\begin{pmatrix} \mathrm{a} & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a-b-c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlansın. R, matrislerdeki toplama ve çarpma işlemleri altında bir halkadır. I, R halkasının bir idealidir ve *d*, R halkasının sıfırdan farklı bir türevidir. *n* sabit pozitif bir tamsayı olmak üzere, her $x, y \in \mathrm{I}$ için $d(x)y + xd(y) + d(y)x + yd(x) = xy + yx$ dir fakat R değişmeli değildir.

3.2 Yarı-Asal Halkalarda Türev

Şimdi Teorem 3.1.1 ve Teorem 3.1.2 nin yarı-asal halkalara genelleştirilebileceğini görelim:

Teorem 3.2.1 R bir yarı asal halka ve n sabit pozitif bir tamsayı olsun. d R halkasının türevi olmak üzere, her $x, y \in$ R için $(d(x)y + xd(y) + d(y)x + yd(x))^n = xy + yx$ ise o zaman R değişmelidir.

İspat: R yarı asal halka olduğundan, Y. Özellik 2.1.19 dan Z(**U**) = C dir. O halde Y. Özellik 2.2.13 den d, **U** Utumi kesirler halkasına tek türlü genişletilebilir. Y. Özellik 2.1.30 dan **U** ve R aynı polinom özdeşliğini sağladığından her x, y $\in$ **U** için $(d(x)y + xd(y) + d(y)x + yd(x))^n = xy + yx$ elde edilir. B, C deki tüm idempotentlerin tam Boole cebiri ve M, B nin maksimal ideali olsun.

Y. Özellik 2.2.14 den **U**, ortogonal tam B-cebiridir. M**U**, **U** nun bir asal idealidir ve bu ideal d türevi altında sabit kalır. **U** ⁄ M**U** = $\overline{U}$ olarak gösterelim ve **U** üzerinde tanımlı olan d yardımıyla bir $\overline{d}$ türevini tanımlayalım. Bu nedenle $\overline{d}$, $\overline{U}$ üzerinde, d türevinin **U** üzerinde sağladığı özellikleri sağlar. Ayrıca $\overline{U}$, asal halkadır ve Teorem 3.1.1 den B Boole cebirinin her maksimal M ideali için [**U**,**U**] $\subseteq$ M**U** dur. Fakat Y. Özellik 2.2.14 den [**U**,**U**] $\subseteq \cap_{M}$ M**U** = 0 bulunur. O zaman **U** değişmelidir. Özel olarak R değişmelidir.

Teorem 3.2.2 R bir 2-torsion free yarı asal halka ve n bir sabit pozitif tamsayı olsun.d, R halkasının her $x, y \in$ R için $(d(x)y + xd(y) + d(y)x + yd(x))^n - (xy + yx)$ $\in$ Z(R) olacak şekilde bir türevi ise o zaman R değişmelidir.

İspat: Y. Özellik 2.1.19 dan Z(**U**) = C dir ve Y. Özellik 2.2.13 den d **U** üzerine tek türlü genişletilebilir. **U** ve R aynı polinom özdeşliğini sağladığından, her $x, y \in$ **U** için

$$(d(x)y + xd(y) + d(y) + yd(x))^n - (xy + yx) \in Z(R)$$

dir. B, C deki idempotentlerin tam Boole cebiri ve M, B nin herhengi bir maksimal ideali olsun. Teorem 3.2.1 nin ispatında belirtildiği gibi **U**, ortogonal, tam B-cebirdir ve Y. Özellik 2.2.14 den M**U**, **U** nun bir asal idealidir ve bu ideal d türevi altında sabit kalır. $\overline{d}$, d yardımıyla tanımlanan, $\overline{U}$ üzerinde tanımlı bir türevdir. Z($\overline{U}$) = (C + M**U**)∕ M**U** = C∕M**U** olduğundan her $x, y \in \overline{U}$ için

$$(\overline{d}(x)y + x\overline{d}(y) + \overline{d}(y)x + y\overline{d}(x))^n - (xy + yx) \in (C + M\mathbf{U})/\ M\mathbf{U}$$

olur. Üstelik, $\overline{U}$ bir asal halkadır ve Teorem 3.1.2 nin sonucu olarak, $\overline{U}$ değişmelidir. Bu da B nin herhangi bir maksimal M ideali için [**U**,**U**] ⊆ M**U** olmasını gerektirir. Y. Özellik 2.2.14 den [**U**,**U**] $\subseteq \cap_M$ M**U** = 0 dır. Özel olarak R değişmelidir.

Sonuç 3.2.1 R bir yarı asal halka ve d, R halkasının bir türevi olsun.

(i) Her $x \in$ R için d(x^2) = x^2 ise o zaman R değişmelidir.

(ii) R 2-torsion free ve her $x \in$ R için, d(x^2) - $x^2 \in$ Z(R) ise o zaman R değişmelidir.

İspat: **(i)** Her $x \in$ R için, d(x)x + xd(x) = x^2 ifadesi doğrusallaştırılırsa her $x, y \in$ R için

$$(d(x)y + xd(y) + d(y)x + yd(x))^2 - (xy + yx) = 0$$

elde edilir. Teorem 3.2.1 den R değişmelidir.

(ii) Teorem 3.2.2 kullanılarak, (i) deki yöntemle ispat yapılır.

4. JORDAN ÇARPIMLI GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLER

Bu bölümde, genelleştirilmiş türevin, Jordan çarpım ile ilgili özellikleri araştırılacaktır. (d,α) ile, Tanım 2.3.1 de verilen Brešar anlamında genelleştirilmiş türev kastedilecektir.

Teorem 4.1 R bir asal halka ve (d,α), R halkasının sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş türevi olsun. Her $x, y \in$ R için $d(xoy) = 0$ ise o zaman R değişmelidir.

İspat: Her $x, y \in$ R için $d(xoy) = 0$ ise $d(x)y + x\alpha(y) + d(y)x + y\alpha(x) = 0$ dır. Y. Özellik 2.2.9 (i) den

$$d(x) = - xa + \mu(x) \quad \text{ve} \quad \alpha(x) = ax - \lambda(x)$$

$$d(x) = - xb + \lambda(x) \quad \text{ve} \quad \alpha(x) = bx - \mu(x)$$

olacak şekilde $a, b \in Q_s($ R $)$ ve $\lambda, \mu :$ R $\to$ C dönüşümleri vardır. O halde her $x \in$ R için

$$d(x) + \alpha(x) = - xa + bx \quad \text{ve} \quad d(x) + \alpha(x) = - xb + ax$$

elde edilir. Böylece her $x \in$ R için

$$(b - a)x + x(b - a) = 0$$

bulunur. Y. Özellik 2.1.11 den $b - a \in$ C dir. $- xa + \mu(x) = - xb + \lambda(x)$ ve $\lambda(x), \mu(x) \in$ C olduğundan, her $x \in$ R için, $x(b - a) \in$ C olduğu açıktır. $b - a \in$ C olduğu kullanılarak

$$b - a = 0 \text{ veya R değişmelidir}$$

sonucuna ulaşılır. $b = a$ ise $\lambda(x) = \mu(x)$ olur. Bu nedenle, her $x \in$ R için

$$d(x) = - xa + \mu(x) \quad \text{ve} \quad \alpha(x) = ax - \mu(x)$$

olacak şekilde $a \in Q_s(R)$ ve $\mu : R \to C$ vardır. Buradan her $x \in R$ için

$$(d + \alpha)(x) = [a, x] \tag{4.1}$$

elde edilir. (4.1) de $r \in R$ için x yerine xr alınıp, (4.1) kullanılırsa, her $r, x \in R$ için $2x\alpha(r) = x[a, r]$ bulunur. R halkası asal olduğundan

$$2\alpha(r) = [a, r] \tag{4.2}$$

elde edilir. $\alpha = 0$ ise $[a, r] = 0$, dolayısıyla $a \in Z(R)$ dir. (4.1) den $d = 0$ bulunur. Bu bir çelişkidir. Bu nedenle $\alpha \neq 0$ olduğunu kabul edebiliriz. charR = 2 ise (4.2) den, $a \in Z(R)$, dolayısıyla (4.1) den $d = \alpha$ bulunur. Böylece başlangıç hipotezinden, her $x, y \in R$ için $\alpha(xoy) = 0$ elde edilir. α, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olduğundan, Y. Özellik 2.2.9 (iii) den R değişmelidir.

charR $\neq$ 2 ise, (4.1) ve (4.2) den $2d(x) = [a, x] = 2\alpha(x)$ olur. Buradan $d = \alpha$ elde edilir. Yukarıdaki benzer işlemlerle R halkasının değişmeli olduğu görülür.

Sonuç 4.1 R bir asal halka ve (d,α), R halkasının sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş türevi olsun. Aşağıdaki koşullardan birisi sağlanırsa o zaman R değişmelidir.

(i) Her $x \in R$ ve sabit bir $\lambda \in C$ için $d(x^2 - \lambda x) = 0$ dır.

(ii) Her $x \in R$ için $d(x^2) = 0$ dır.

İspat: (i) $d(x^2 - \lambda x) = 0$ eşitliğini doğrusallaştırırsak, her $x, y \in R$ için $d(xoy) = 0$ elde edilir. Teorem 4.1 den R değişmelidir.

(ii) Benzer şekilde ispatlanır.

Sonuç 4.2 R, charR $\neq$ 2, 3 bir asal halka olsun. (d,α), R halkasının sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş türevi olmak üzere, her $x, y \in R$ için $d(xoy) \in Z(R)$ ise R, s_4 standart polinomunu sağlar.

İspat: Teorem 4.1 den ve Y. Özellik 2.2.9 (ii) den ispat açıktır.

Sonuç 4.3 R, charR $\neq$ 2, 3 bir asal halka ve (d,α), R halkasının sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş türevi olsun. Aşağıdaki koşullardan birisi sağlanırsa R, s_4 standart polinomunu sağlar.

(i) Her $x \in$ R ve sabit bir $\lambda \in$ C için, $d(x^2 - \lambda x) \in Z(R)$ dir.

(ii) Her x $\in$ R için $d(x^2) \in Z(R)$ dir.

İspat: **(i)** Her $x \in$ R için $d(x^2 - \lambda x) \in Z(R)$ olduğunu kabul edelim. O halde her x, $y \in$ R için $d((x + y)^2 - \lambda(x + y)) \in Z(R)$ dir. Buradan her x, $y \in$ R için $d(xoy) \in Z(R)$ elde edilir. Sonuç 4.2 den ispat tamamlanır.

(ii) Benzer şekilde ispatlanır.

Teorem 4.2 R bir asal halka, (d,α) R halkasının, $\alpha \neq 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş türevi olsun. Eğer d, aşağıdaki koşullardan birisini sağlarsa o zaman R değişmelidir.

(i) Her $x, y \in$ R için $d(xoy) = xoy$ dır.

(ii) Her $x, y \in$ R için $d(xoy) = -(xoy)$ dır.

(iii) Her $x, y \in$ R için $d(xoy) = xoy$ veya $d(xoy) = -(xoy)$ dır.

İspat: **(i),(ii):** d, α ile belirlenen bir genelleştirilmiş türev olduğundan, I_R, R üzerinde birim dönüşüm olmak üzere, $d \pm I_R$ de genelleştirilmiş türevdir. Hipotezden, her x, $y \in$ R için $(d \pm I_R)(xoy) = 0$ bulunur. $\alpha \neq 0$ olduğundan, $d \pm I_R \neq 0$ dır. Teorem 4.1 den R değişmelidir.

(iii) Her $x \in$ R için, $R_x = \{ y \in R : d(xoy) = xoy \}$ ve $R_x^* = \{ y \in R : d(xoy) = -xoy \}$ kümelerini düşünelim. R_x ve R_x^* , $R = R_x \cup R_x^*$ olacak şekilde (R, +) nın iki toplamsal alt gruplarıdır. Fakat bir grup iki öz alt grubunun birleşimi şeklinde yazılamayacağından R = R_x veya R = R_x* olmalıdır. Benzer yöntemle R = { $r \in$ R : R = R_x } ve R = { $r \in$ R : R = R_x* } elde edilir. (i) ve (ii) den R değişmelidir.

Sonuç 4.4 R bir asal halka ve (d,α) R halkasının bir genelleştirilmiş türevi olsun. d, aşağıdaki koşullardan birisini sağlarsa o zaman R değişmelidir.

(i) Her $x \in$ R için $d(x^2) = x^2$ dir.

(ii) Her $x \in$ R için $d(x^2) = - x^2$ dir.

(iii) Her $x \in$ R için $d(x^2) = x^2$ veya $d(x^2) = - x^2$ dir.

Teorem 4.3 R, charR $\neq$ 2, 3 bir asal halka ve (d,α) R halkasının, $\alpha \neq 0$ olacak şekilde bir genelleştirilmiş türevi olsun. Eğer d, aşağıdaki koşullardan birisini sağlarsa o zaman R, s_4 standart polinomunu sağlar.

(i) Her $x, y \in$ R için $d(x\text{o}y) - x\text{o}y \in Z(R)$ dir.

(ii) Her $x, y \in$ R için $d(x\text{o}y) + x\text{o}y \in Z(R)$ dir.

(iii) Her $x, y \in$ R için $d(x\text{o}y) - x\text{o}y \in Z(R)$ veya $d(x\text{o}y) + x\text{o}y \in Z(R)$ dir.

İspat: (i) Hipotezden her $x, y \in$ R için, $\Pi(x, y) = d(x)y + x(\alpha(y) - y) + d(y)x + y(\alpha(x) - x) \in Z(R)$ elde edilir. Y. Özellik 2.2.9 (ii) den $\Pi(x, y) = 0$ bulunur. Bu ise her $x, y \in$ R için $d(x\text{o}y) = x\text{o}y$ demektir. Teorem 4.2 (i) den ispat açıktır.

(ii) ve (iii): İspat, benzer tekniklerle yapılır.

Sonuç 4.5 R, charR $\neq$ 2, 3 bir asal halka ve (d,α) R halkasının, $\alpha \neq 0$ olacak şekilde bir genelleştirilmiş türevi olsun. d, aşağıdaki koşullardan birisini sağlarsa R, s_4 standart polinomunu sağlar.

(i) Her $x \in$ R için $\mathrm{d}(x^2) - x^2 \in Z(R)$ dir.

(ii) Her $x \in$ R için $d(x^2) + x^2 \in$ Z(R) dir.

(iii) Her $x \in$ R için $d(x^2) - x^2 \in$ Z(R) veya $d(x^2) + x^2 \in$ Z(R) dir.

Aşağıdaki teorem, Y. Özellik 2.2.1 in bir genellemesi ve Y. Özellik 2.2.6 nın da kısmi bir genişlemesidir.

Teorem 4.4 R bir asal halka ve (d,α), R halkasının bir genelleştirilmiş türevi olsun. Her $x \in$ R için $d(x)x = x\alpha(x)$ ise o zaman $d = \alpha$ veya R değişmelidir. Üstelik $\alpha \neq 0$ ise o zaman R değişmelidir.

İspat: Her $x \in$ R için $d(x)x = x\alpha(x)$ eşitliğini doğrusallaştırırsak her $x, y \in$R için

$$\Pi(x, y) = d(x)y + d(y)x + x(-\alpha(y)) + y(-\alpha(x)) = 0$$

bulunur. Y. Özellik 2.2.9 (i) den

$$d(x) = -xa + \mu(x) \quad \text{ve} \quad -\alpha(x) = ax - \lambda(x)$$

$$d(x) = -xb + \lambda(x) \quad \text{ve} \quad -\alpha(x) = bx - \mu(x)$$

olacak şekilde $a, b \in Q_s$(R) ve λ, μ : R $\to$ C dönüşümleri vardır. Her $x \in$ R için

$$(b - a)x + x(b - a) = 0$$

bulunur. Teorem 4.1 in ispatındaki benzer düşünceyle,

$$b = a \quad \text{veya R değişmelidir}$$

elde edilir. $b = a$ ise $\lambda = \mu$ olur. Bu nedenle, her $x \in$ R için

$$d(x) = -xa + \lambda(x) \qquad \text{ve} \qquad \alpha(x) = -ax + \lambda(x)$$

elde edilir. Buradan her $x \in$ R için

$$d(x) = [a, x] + \alpha(x) \tag{4.3}$$

bulunur. Her (4.3) eşitliğinde x yerine xy alınır ve (4.3) kullanılırsa, her $x, y \in$ R için $x[a, y] = 0$ olur. R halkası asal olduğundan her $y \in$ R için $[a, y] = 0$ bulunur. O halde $a \in$ Z(R) dir. (4.3) den $d = \alpha$, dolayısıyla başlangıç hipotezinden her $x \in$ R için $[\alpha(x), x] = 0$ elde edilir. Üstelik $\alpha \neq 0$ ise o zaman Y. Özellik 2.2.2 den R değişmelidir.

Sonuç 4.6 R, charR $\neq 2$ bir asal halka ve d, her $x \in$ R için $d(x^2) = d(x)x = 0$ olacak şekilde R halkasının sıfırdan farklı bir toplamsal dönüşümü ise o zaman R değişmelidir.

İspat: Y. Özellik 2.1.14 den her $x, y \in$ R için, $d(xy) = d(x)y$ bulunur. Yani d, $\alpha = 0$ ile belirlenen genelleştirilmiş türevdir. Teorem 4.4 den ispat tamamlanır.

Sonuç 4.7 R, charR $\neq 2$, değişmeli olmayan bir asal halka ve (d,α), her $x \in$ R için $d(x)x - x\alpha(x) \in$ Z(R) olacak şekilde R halkasının bir genelleştirilmiş türevi ise o zaman $d = \alpha$ dır.

İspat: Her $x \in$ R için, $d(x)x - x\alpha(x) \in$ Z(R) olsun. Bu ifadeyi doğrusallaştırılırsa her $x, y \in$ R için

$$d(x)y + d(y)x - y\alpha(x) - x\alpha(y) \in \mathrm{Z(R)}$$

elde ederiz.

Z(R) = 0 ise Teorem 4.4 den ispat tamamlanır.

Z(R) $\neq 0$ olsun. O zaman Z(R) nin sıfırdan farklı bir c elemanı vardır. Özel olarak her $y \in$ R için $d(c)y + d(y)c - y\alpha(c) - c\alpha(y) \in$ Z(R), yani $(d(c)y - \alpha(c))y + (d(y) - \alpha(y))c \in$ Z(R) dir. $d - \alpha$, her $x, y \in$ R için $(d - \alpha)(xy) = (d - \alpha)(x)y$ olacak şekilde R halkasının toplamsal dönüşümü olduğundan, her $x \in$ R için $(d - \alpha)(x) = \lambda x$ olacak şekilde bir $\lambda \in Q_r(R_C)$ vardır. Buradan her $y \in$ R için $2\lambda yc \in$ Z(R) bulunur. R halkası asal olduğundan her $y \in$ R için

$\lambda y \in Z(R)$ dir. $\lambda \neq 0$ olduğundan R, sıfırdan farklı bir merkezi ideal içerir. Dolayısıyla R değişmelidir. Bu ise bir çelişkidir. O halde $\lambda = 0$ dır. Buradan $d = \alpha$ elde edilir.

Teorem 4.5 R, charR $\neq 2$ bir asal halka ve (d,α), R halkasının bir genelleştirilmiş türevi olsun. Eğer $\alpha d = 0$ ise $\alpha = 0$ veya her $x \in Q_r(R)$ için $\alpha(x) = [q, x]$ olacak şekilde bir $q \in Q_s(R)$ vardır.

İspat: Her $x \in R$ için $\alpha d(x) = 0$ eşitliğinde x yerine xy alınırsa her $x, y \in R$ için

$$d(x)\alpha(y) + \alpha(x)\alpha(y) + x\alpha^2(y) = 0 \qquad (4.4)$$

elde edilir. (4.4) denklemi soldan z ile çarpılırsa her $x, y, z \in R$ için

$$zd(x)\alpha(y) + z\alpha(x)\alpha(y) + zx\alpha^2(y) = 0 \qquad (4.5)$$

bulunur. (4.4) denkleminde x yerine zx alınırsa her $x, y, z \in R$ için

$$d(z)x\alpha(y) + z\alpha(x)\alpha(y) + \alpha(z)x\alpha(y) + z\alpha(x)\alpha(y) + zx\alpha^2(y) = 0$$

olur.

(4.4) ve (4.5) denklemleri birlikte kullanılırsa

$$(d(z)x + \alpha(z)x + z\alpha(x) - zd(x))\alpha(y) = 0$$

elde edilir. Son bağıntıda y yerine yw konulursa her $w, x, y, z \in R$ için

$$(d(z)x + \alpha(z)x + z\alpha(x) - zd(x))y\alpha(w) = 0$$

bulunur. R halkası asal olduğundan her $x, z \in R$ için

$$d(z)x + \alpha(z)x + z\alpha(x) - zd(x) = 0 \quad \text{veya} \quad \alpha = 0 \qquad (4.6)$$

olur. (4.6) daki ifadenin ilk durumunun geçerli olduğunu kabul edelim. O halde Y. Özellik 2.2.9 dan her $x \in R$ için

$$d(x) + \alpha(x) = - xa + \mu(x), \ \ \alpha(x) - d(x) = ax - \lambda(x)$$

olacak şekilde bir $a \in Q_s(R)$ ve $\lambda, \mu : R \to C$ dönüşümleri vardır. Buradan her $x \in R$ için, $2\alpha(x) - [a, x] \in C$ bulunur. Eğer $a \in C$ ise o zaman $2\alpha(x) \in C$ olur. charR $\neq 2$ olduğundan, $\alpha(x) \in C$ dir. Böylece Y. Özellik 2.3.1 den $\alpha = 0$ elde edilir.

Şimdi $a \notin C$ olduğunu kabul edelim. Her $x \in R$ için $2\alpha(x) - [a, x] \in C$ olduğundan, özel olarak her $x \in R$ için, $[2\alpha(x) - [a, x], [a, x]] = 2[\alpha(x), [a, x]] = 0$ dır. charR $\neq 2$ olduğundan her $x \in R$ için, $[\alpha(x), [a, x]] = 0$, dolayısıyla Y. Özellik 2.1.30 dan her $x \in Q_r(R)$ için bu eşitlik sağlanır. $d_a(x) = [a, x]$ alalım. $a \notin C$ olduğundan, d_a , R halkasından $Q_r(R)$ içine, sıfırdan farklı bir türevdir. Y. Özellik 2.1.11 den d_a ve α, $Q_r(R)$ halkasına genişletilebilir. Burada $\alpha \neq 0$ olduğunu kabul edebiliriz. Aksi halde, her $x \in R$ için, $d_a(x) = [a, x] \in C$ olur. Buradan $a \in C$ elde ederiz. Bu ise bir çelişkidir. O halde Y. Özellik 2.1.15 den her $x \in Q_r(R)$ için, $\alpha(x) = \beta d_a(x) = [a\beta, x]$ olacak şekilde bir $\beta \in Q_r(R)$ vardır.

Sonuç 4.8 R, charR $\neq 2$ bir değişmeli olmayan bir asal halka ve (d,α), R halkasının bir genelleştirilmiş türevi olsun. Her $x, y \in R$ için $d(x)\alpha(y) + \alpha(y)d(x) = xy + yx$ ise o zaman her $x \in Q_r(R)$ için $\alpha(x) = [\lambda, x]$ olacak şekilde bir $\lambda \in Q_s(R)$ vardır.

İspat: d = 0 ise o zaman $xy + yx = 0$ dır. Burada x yerine yz alınır ve bu eşitlik kullanılırsa, her $x, y, z \in R$ için $y[x, z] = 0$ bulunur. R asal olduğundan her $x, z \in R$ için, $[x, z] = 0$, yani R değişmelidir. Bu ise bir çelişkidir. O halde $d \neq 0$ kabul edebiliriz. Başlangıç hipotezinden her $x, y \in R$ için

$$d(x)\alpha(y) + \alpha(y)\mathrm{d}(x) = xy + yx \qquad (4.7)$$

bulunur. (4.7) de y yerine yz alınır, (4.7) eşitliği kullanılırsa,

$$\alpha(y)[z, d(x)] + [d(x), y]\alpha(z) + 2yxz = 0 \qquad (4.8)$$

elde edilir. (4.8) de z yerine zw alınır, (4.8) kullanılırsa, her $x, y, z, w \in$ R için

$$\alpha(y)z[w, d(x)] + [d(x), y]z\alpha(w) = 0 \qquad (4.9)$$

olur. Son eşitlikte w yerine $d(x)$ alınırsa her $x, y \in$ R için $[d(x), y]\mathrm{R}\alpha d(x) = 0$ bulunur. R halkası asal olduğundan, $[d(x), y] = 0$ veya $\alpha d(x) = 0$ dır. H = $\{x \in \mathrm{R} : \alpha d(x) = 0\}$ ve K = $\{x \in \mathrm{R} : [d(x), y] = 0$, her $y \in$ R için $\}$ kümelerini alalım. H ve K, (R, +) grubunun, R = H $\cup$ K olacak şekilde iki toplamsal alt grubu olur. Herhangi bir grup, iki alt grubunun birleşimi şeklinde yazılamayacağından R = H veya R = K olmalıdır.

Şimdi R = H olduğunu kabul edelim. O halde $\alpha = 0$ veya her $x \in Q_r(\mathrm{R})$ için Teorem 4.5 den, $\alpha(x) = [\lambda, x]$ olacak şekilde bir $\lambda \in Q_s(\mathrm{R})$ vardır. Eğer $\alpha = 0$ ise başlangıç hipotezinden her $x, y \in$ R için $xy + yx = 0$ olur. O halde R yukarıdaki gibi değişmelidir, bu ise bir çelişkidir.

Son olarak R = K olduğunu kabul edelim. Y. Özellik 2.3.1 den $d = 0$ dır, bu bir çelişkidir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Aşağıdaki teorem, Y. Özellik 2.2.8 nin kısmi bir genişlemesidir.

Teorem 4.6 d, R asal halkasının bir toplamsal dönüşümü, α R halkasının her $x, y \in$ R için $d(xy) = xd(y) + y\alpha(x)$ eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı bir türevi (d ye genelleştirilmiş sol türev denir) ise R değişmelidir ve d bir genelleştirilmiş türevdir.

Bu teoremin ispatı için aşağıdaki Y. Özelliğe ihtiyaç vardır.

Y. Özellik 4.1 R bir asal halka ve α, R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. Her $x \in$ R için $x\alpha(x) \in Z(\mathrm{R})$ ise o zaman R değişmelidir.

İspat: Hipotez doğrusallaştırılırsa her $x, y \in$ R için

$$x\alpha(y) + y\alpha(x) \in Z(R)$$

bulunur.

Z(R) = 0 ise her $x \in$ R için $x\alpha(x) = 0$ olur. Bu ise Y.Özellik 2.2.9 dan R halkasının değişmeli olmasını gerektirir.

Z(R) $\neq$ 0 olsun. O zaman Z(R) nin sıfırdan farklı bir a elemanı vardır. Elde ettiğimiz son ifadede x yerine a alınırsa

$$a\alpha(y) + y\alpha(a) \in Z(R) \tag{4.10}$$

elde edilir. Her $y \in$ R için $[a\alpha(y) + y\alpha(a), y] = 0$ dır. O halde $[y, \alpha(y)]\alpha(a) = 0$ dır. Burada R halkasının asal olduğu ve $\alpha(a) \in Z(R)$ olduğu kullanılırsa her $y \in$ R için $[\alpha(y), y] = 0$ veya $\alpha(a) = 0$ bulunur. İlk durumdan, Y. Özellik 2.2.2 kullanılarak R değişmelidir sonucuna ulaşılır. Şimdi $\alpha(a) = 0$ olduğunu kabul edelim. (4.10) dan her $y \in$ R için $a\alpha(y) \in Z(R)$ dir. $a \in Z(R)$ ise $a = 0$ veya her $y \in$ R için $\alpha(y) \in Z(R)$ olur. $a \neq 0$ olduğundan her $y \in$ R için $\alpha(y) \in Z(R)$ dir. Böylece Y. Özellik 2.2.2 den R değişmelidir.

Teoremin İspatı: Her $x, y \in$ R için $d(x(yx))$ ifadesini ele alalım.

$$\begin{aligned} d(x(yx)) &= xd(yx) + yx\alpha(x) \\ &= x(yd(x) + x\alpha(y)) + yx\alpha(x) \\ &= xyd(x) + x^2\alpha(y) + yx\alpha(x) \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Diğer taraftan, her $x, y \in$ R için

$$\begin{aligned} d((xy)x) &= xyd(x) + x\alpha(xy) \\ &= xyd(x) + x(\alpha(x)y + x\alpha(y)) \end{aligned}$$

$$= xyd(x) + x\alpha(x)y + x^2\alpha(y)$$

bulunur. O zaman her $x, y \in$ R için d($x(yx)$) = $d((xy)x)$ olduğundan, her $x \in$ R için

$$x\alpha(x) \in Z(R)$$

olur. Y. Özellik 3.1 den R değişmelidir. Böylece hipotezden her $x, y \in$ R için

$$d(yx) = d(xy) = yd(x) + x\alpha(y) = d(x)y + x\alpha(y)$$

elde edilir. Yani (d, α), R halkasının bir genelleştirilmiş türevidir.

Örnekler

1. M, charM = 2 olan herhangi bir değişmeli halka ve $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in M \right\}$ olsun. $d : R \to R$ dönüşümü $d\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ile, $\alpha : R \to R$ dönüşümü $\alpha\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ile tanımlansın. O zaman (d,α), her $x, y \in$ R için $d(xoy) = 0$ olacak şekilde bir genelleştirilmiş türevdir. Fakat R değişmeli değildir. O halde Teorem 4.1 in hipotezinde yer alan asallık kaldırılamaz.

2. M bir Boole halkası olmak üzere R ve d, örnek1 deki gibi tanımlansın. Her $x \in$ R için d($x^2 - x$) = 0 dır fakat R değişmeli değildir. O halde Sonuç 4.1 in hipotezinde yer alan asallık kaldırılamaz.

3. M ve R, örnek1 deki gibi tanımlansın ve d : R $\rightarrow$ R dönüşümü $d\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & b+c \\ 0 & c \end{pmatrix}$ ile , α : R $\rightarrow$ R dönüşümü de $\alpha\left(\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ile tanımlansın. O zaman (d,α), her x, $y \in$ R için $d(x\text{o}y) = \pm\,(x\text{o}y)$ olan bir genelleştirilmiş türevdir. Fakat R değişmeli değildir. O halde Teorem 4.2 nin hipotezinde yer alan asallık kaldırılamaz.

4. (i) Her $a \in$ M için $a^2 = 0$ olacak şekilde değişmeli olmayan bir halka M ve R = $\left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{a} & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{M} \right\}$ olsun. d : R $\rightarrow$ R d$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ dönüşümü, $\alpha = 0$ ile tanımlı bir genelleştirilmiş türevdir. $d(x)x = \begin{pmatrix} a^2 & ab+ba \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = 0$ olduğundan, her $x \in$ R için d$(x)x = x\alpha(x)$ dir. Fakat ne $d = 0$ dır ne de R değişmelidir.

(ii) Her $a \in$ M için $a^2 = 0$ olacak şekilde bir halka M ve charM = 2 olsun. R = $\left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{a} & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{M} \right\}$ olmak üzere, d : R $\rightarrow$ R dönüşümü, $d\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ile, α : R $\rightarrow$ R dönüşümü de $\alpha\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ile tanımlansın. O zaman (d,α) R' nin, her $x \in$ R için $d(x)x = x\alpha(x)$ olacak şekilde bir genelleştirilmiş türevidir. $\alpha \neq 0$ fakat R değişmeli değildir.

O halde Teorem 4.4 ün hipotezinde yer alan asallık kaldırılamaz.

5. R_1 değişmeli ve R_2 değişmeli olmayan asal halkalar olmak üzere $R = R_1 \oplus R_2$ olsun. α', R_1 üzerinde herhangi bir türev, d' R_2 üzerinde, sol R_2 homomorfizması olan fakat sağ R_2 homomorfizması olmayan bir toplamsal dönüşüm olsun. Her $(x, y) \in R$ için $d(x, y) = (\alpha'(x), d'(y))$ ve $\alpha(x, y) = (\alpha'(x),0)$ olarak tanımlansın. Bu durumda her $x, y \in R$ için, $d(xy) = xd(y) + y\alpha(x)$ dir fakat (d,α) bir genelleştirilmiş türev değildir. R_1 ve R_2 asal olduğundan, R bir yarı-asal halkadır. $\alpha \neq 0$ fakat R değişmeli değildir.

O halde teorem 4.6 yarı-asal halkalara genişletilemez.

5. TEK YANLI İDEALLER ÜZERİNDEKİ GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLİ ÇOKLU DOĞRUSAL POLİNOMLAR

Bu bölüm, Y . Özellik 2.2.4, 2.2.5, 2.2.19 ve 2.2.20 de verilen teoremlerin bir genelleştirilmesidir.

Teorem 5.1 K birimli değişmeli bir halka, R asal K-cebir ve g R halkasının sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş türevi olsun. $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ K üzerinde bir çoklu doğrusal polinom, I R halkasının sıfırdan farklı bir sağ ideali ve m, $n \geq 1$ olacak şekilde sabit tamsayılar olsun. Eğer her x_1, x_2, ..., $x_n \in$ I için $(g(f(x_1, x_2, ..., x_n)))^m = 0$ ise aşağıdakilerden birisi sağlanır:

(i) $[f(x_1, x_2, ..., x_n), x_{n+1}]\, x_{n+2}$ I ideali için bir özdeşliktir.

(ii) $a \in$ U için aI = 0 dır ve her $x \in$ R için $g(x) = ax$ dir.

(iii) $a, q \in$ U için aI = 0 ve $[q, \text{I}]\text{I} = 0$ dır ve her $x \in$ R için $g(x) = ax - [q, x]$ dir.

Bu teoremin ispatı için aşağıdaki Y. Özelliklere ihtiyaç vardır.

Y. Özellik 5.1 R bir asal halka, a, $b \in$ R ve m, $n \geq 1$ olacak şekilde sabit tamsayılar olsun. $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, her x_1, x_2, ..., $x_n \in$ R için $(a\, f(x_1, x_2, ..., x_n) + f(x_1, x_2, ..., x_n)\, b)^m = 0$ eşitliğini sağlayan C üzerinde merkezi olmayan bir çoklu doğrusal polinom ise o zaman $a = -\, b \in$ Z(R) dir.

İspat: $a \notin$ Z(R) veya $b \notin$ Z(R) olsun. O halde $(a\, f(x_1, x_2, ..., x_n) + f(x_1, x_2, ..., x_n)\, b)^m$, R için aşikar olmayan bir polinom özdeşliğidir. Y. Özellik 2.1.30 den $(a\, f(x_1, x_2, ..., x_n) + f(x_1, x_2, ..., x_n)\, b)^m$, RC için de bir polinom özdeşliğidir. Y. Özellik 2.1.21 den RC, Socle(RC) $\neq 0$ olan bir primitif halkadır.

O halde Y. Özellik 2.1.16 dan bir D bölüm halkası üzerinde bir V vektör uzayı vardır ve RC, D üzerinde D-lineer dönüşümlerin bir yoğun halkasıdır.

dim$_D$V = ∞ olsun. Y. Özellik 2.1.27 den RC, $(ax + xb)^m$ özdeşliğini sağlar. $h(x) = ax + xb$ diyelim. O zaman h, her $x \in$ R için, $h(x)^m = 0$ olacak şekilde RC üzerinde bir genelleştirilmiş türevdir. Y. Özellik 2.3.5 den $h(x) = 0$ yani her $x \in$ RC için $ax + xb = 0$ dır. Y. Özellik 2.1.11 den a, $b \in$ C dir. Bu bir çelişkidir. O halde $a \in$ Z(R) ve $b \in$ Z(R) bulunur.

dim$_D$V = k (sonlu tamsayı) olsun. O halde RC, bir basit halkadır ve aşikar olmayan genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlar. Y. Özellik 2.1.25 den RC $\subseteq$ $M_t(F)$ olacak şekilde uygun bir F cismi vardır ve $M_t(F)$, RC ile aynı genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlar. Bu nedenle her $x_1, x_2, \ldots, x_n \in M_t(F)$ için

$$(a\, f(x_1, x_2, ..., x_n) + f(x_1, x_2, ..., x_n)\, b)^m = 0$$

dır. Üstelik $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, $M_t(F)$ için merkezi olmayan bir polinomdur.

***t* = 1** ise ispat açıktır.

***t* ≠ 1** olsun. $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ $M_t(F)$ de merkezi olmadığından, Y. Özellik 2.1.22 ve Y. Özellik 2.1.23 den bazı k, l $(k \neq l)$ için $f(u_1, u_2, ..., u_n) = \alpha e_{kl}$ olacak şekilde $u_1, u_2, \ldots, u_n \in M_t(F)$ ve bir $\alpha \in$ F vardır. Üstelik $\{ f(u_1, u_2, ..., u_n) : u_1, u_2, \ldots, u_n \in M_t(F)\}$ kümesi, $M_t(F)$ nin tüm F-otomorfizmaları altında sabit kalır. O zaman herhangi i ≠ j için, $f(r_1, r_2, ..., r_n) = \alpha e_{ij}$ olacak şekilde $r_1, r_2, \ldots, r_n \in M_t(F)$ vardır. O halde her i ≠ j için

$$0 = (a\alpha e_{ij} + \alpha e_{ij}b)^{m} = \alpha^{m}(ae_{ij} + e_{ij}b)^{m} \qquad (5.1)$$

bulunur. Bu eşitliği sağdan e_{ij} ile çarparsak,

$$0 = \alpha^{m}(ae_{ij} + e_{ij}b)^{m}e_{ij} = (e_{ij}b)^{m+1}$$

elde edilir, yani b nin (j,i) bileşeni sıfırdır ($i \neq j$ için). O halde b köşegen matristir. Benzer şekilde a da köşegendir.

$\varphi(x) = (1 + e_{1j})x(1 + e_{1j})^{-1}$olsun. φ, $M_t(F)$' nin bir F-otomorfizmasıdır.

$$0 = (\varphi(a)\varphi(\, f(x_1, x_2,..., x_n)\,) + \varphi(\, f(x_1, x_2,..., x_n)\,)\varphi(b))^{m}$$

bulunur. Bu nedenle $\varphi(a)$ ve $\varphi(b)$ de köşegen matrisler olmalıdır.

$a = \sum_{i=1}^{t}\beta_i e_{ii}$, $\beta_i \in F$ alalım. Her $j \rangle 1$ için $\beta_j - \beta_1$, $\varphi(a) =(1 + e_{1j})a(1 + e_{1j})^{-1}$ nin (1, j). bileşenidir ve sıfırdır. O halde $\beta_j = \beta_1$ dir. Birden büyük her j için bunu söyleyebildiğimizden, $a \in F$ dir. Benzer şekilde $b \in F$ de bulunur. Bu bir çelişkidir. O halde $a, b \in Z(R)$ olmalıdır. O zaman

$$0 = ((a + b)\, f(x_1, x_2,..., x_n)\,)^{m} = (a + b)^{m}(\, f(x_1, x_2,..., x_n)\,)^{m}$$

bulunur. R asal olduğundan, $a = - b$ veya her $x_1, x_2, \ldots, x_n \in R$ için, $f(x_1, x_2,..., x_n)^{m} = 0$ elde edilir. $f(x_1, x_2,..., x_n)^{m} = 0$ ise Y. Özellik 2.1.26 dan $f(x_1, x_2,..., x_n) = 0$ dır. Bu bir çelişkidir. O halde $a = - b$ olmalıdır.

Sonuç 5.1 R bir asal halka, $a \in R$ ve $m, n \geq 1$ olacak şekilde sabit tamsayılar olsun. Her $x_1, x_2, ..., x_n \in R$ için $(a\, f(x_1, x_2,..., x_n)\,)^{m} = 0$ olacak şekilde C üzerinde, merkezi olmayan bir çoklu doğrusal polinom $f(x_1, x_2,..., x_n)$ ise o zaman $a = 0$ dır.

Y. Özellik 5.2 R bir asal K-cebir, I R halkasının sıfırdan farklı bir sağ ideali, $a \in$ R, m, $n \geq 1$ olacak şekilde sabit tamsayılar ve $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, her x_1, x_2, ..., x_n $\in$ I için $(a\, f(x_1, x_2, ..., x_n))^m = 0$ olacak şekilde bir çoklu doğrusal polinom olsun. Eğer $f(x_1, x_2, ..., x_n)\, x_{n+1}$, I idealinde bir özdeşlik değilse o zaman aşağıdakilerden birisi sağlanır:

(i) $[\, f(x_1, x_2, ..., x_n), x_{n+1}]\, x_{n+2}$ I idealinde bir özdeşliktir.

(ii) aI = 0 dır.

İspat: (i) ve (ii) sağlanmadığını kabul edelim ve bu durumda bir çelişkiye vardığımızı görelim. Bu durumda,

$$[\, f(b_1, b_2, ..., b_n), b_{n+1}]\, b_{n+2} \neq 0 \quad \text{ve} \quad aw \neq 0$$

olacak şekilde b_1, b_2, …, b_n, b_{n+1}, b_{n+2} , $w \in$ I vardır.

aI $\neq 0$ olduğundan $u \in$ I için $(a\, f(ux_1, ux_2, ..., ux_n))^m$, R için aşikar olmayan bir genelleştirilmiş polinom özdeşliktir. O halde R bir GPI halkadır. Y. Özellik 2.1.22 den RC nin sıfırdan farklı bir Soc(RC) = H ı vardır ve J = IH $\neq$ 0, H ın sağ idealdir. Y. Özellik 2.1.5 (ii) den H basittir. J = JH ve Y. Özellik 2.1.30 dan J, I nın sağladığı basit koşulları sağlar. O nedenle R yerine H; I yerine J alabiliriz. Dolayısıyla R basit ve R = Soc(R) olur. Ayrıca IR = I dır.

$f(x_1, x_2, ..., x_n)\, x_{n+1}$ ifadesi I için bir özdeşlik olmadığından

$$f(s_1, s_2, ..., s_n)\, s_{n+1} \neq 0 \tag{5.2}$$

olacak şekilde s_1, s_2, ..., s_n, $s_{n+1} \in$ I vardır. Tanım 2.1.33 den

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_i t_i\,(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)x_i$$

eşitliğini elde ederiz. (5.2) den $t_i(w_1, w_2, \ldots, w_{n-1})w_n \neq 0$ olacak şekilde $i \in \{1,2, \ldots, n\}$ ve $w_1, w_2, \ldots, w_n \in I$ vardır. Genelliği bozmaksızın $i = n$ ve $t_i(w_1, w_2, \ldots, w_{n-1})w_n \neq 0$ kabul edebiliriz. Üstelik Y. Özellik 2.1.6 dan R = H regülerdir. Tümevarım ve Y. Özellik 2.1.4 den $eR = wR + \sum_{i}^{n+2} b_i R + \sum_{j}^{n} w_j R$ olacak şekilde bir $e^2 = e \in R$ vardır. O zaman $e \in IR = I$ dır. Ayrıca $ew = w$, $eb_i = b_i$, $ew_j = w_j$ $i = 1, 2, \ldots, n+2$ ve $j = 1, 2,\ldots, n$ dir. Özel olarak

$$(at_n(er_1, \ldots, er_{n-1})er_n(1 - e))^m = 0$$

dır. Buradan

$$(1 - e)at_n(er_1, \ldots, er_{n-1})er_n)^{m+1} = 0$$

yani $(1 - e)at_n(er_1, \ldots, er_{n-1})eR$, sınırlı indekli bir nil sağ idealdir. Bu nedenle Y. Özellik 2.1.13 den her $r_1, r_2, \ldots, r_n \in R$ için

$$(1 - e)aet_n(er_1, \ldots, er_{n-1})er_n = 0$$

bulunur. Y. Özellik 2.1.28 den

$(1 - e)ae = 0$ veya $t_n(r_1, \ldots, r_{n-1})r_n$, eR için bir özdeşliktir.

$(1 - e)ae = 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman $(eae\, f(er_1e, er_2e, ..., er_ne))^m$, R için bir özdeşliktir. Sonuç 5.1 den

$eae = 0$ veya $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, eRe için bir merkezi polinomdur.

İkinci durumdan, $[f(er_1, er_2, ..., er_n), er_{n+1}]\, er_{n+2} = 0$ bulunur. Özel olarak,

$$[f(eb_1, eb_2, ..., eb_n), eb_{n+1}]\, eb_{n+2} = [f(b_1, b_2, ..., b_n), b_{n+1}]\, b_{n+2} \neq 0$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir.

Birinci durumdan, $0 = ae = aew = aw$ bulunur. Bu bir çelişkidir.

Son olarak, her r_1, r_2, …., $r_n \in$ R için $t_n(er_1, …., er_{n-1})er_n = 0$ olsun. O zaman $0 = t_n(ew_1, …., ew_{n-1})ew_n = t_n(w_1, …., w_{n-1})w_n$ olur. Bu ise bir çelişkidir. O halde kabulümüz yanlıştır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Y. Özellik 5.3 R bir asal halka, a, $b \in$ R ve m, $n \geq 1$ olacak şekilde sabit tamsayılar, I R' nin sıfırdan farklı bir sağ ideali, $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, her x_1, x_2, ..., $x_n \in$ I için $(a\, f(x_1, x_2, ..., x_n) + f(x_1, x_2, ..., x_n)\, b)^m = 0$ olacak şekilde C üzerinde, bir çoklu doğrusal polinom olsun. Eğer $[f(x_1, x_2, ..., x_n), x_{n+1}]\, x_{n+2}$ I idealinde bir özdeşlik değilse o zaman $(a + b)$I = 0 ve $[b,$ I]I = 0 dır.

İspat: $b \in$ C veya $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ merkezi polinom ise ispat Y. Özellik 5.2 den açıktır. Bu nedenle $b \notin$ C ve $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ merkezi polinom olmadığını kabul edelim. Amacımız, öncelikle R' nin bir GPI halka olduğunu göstermek.

Bir $u \in$ I için, $\{au, u\}$ C-lineer bağımsız ve

$$(a\, f(ux_1, ux_2, ..., ux_n) + f(ux_1, ux_2, ..., ux_n)\, b)^m \tag{5.3}$$

olsun. O zaman $(a\, f(ux_1, ux_2, ..., ux_n))^m$ (5.3) de aşikar olmayacak şekilde yer aldığından (5.3), R için bir aşikar olmayan genelleştirilmiş polinom özdeşliktir. O halde R, GPI halkadır. Şimdi $\{au, u\}$ nun lineer C-bağımlı olduğunu kabul edelim. Yani bazı $\alpha \in$ C için

$$au = \alpha u, \quad \text{olsun.}$$

O halde R,

$$(\alpha\, f(ux_1, ux_2, ..., ux_n) + f(ux_1, ux_2, ..., ux_n)\, b)^m = 0 \tag{5.4}$$

eşitliğini sağlar. $\{bu, u\}$ C-bağımsız ise $(f(ux_1, ux_2, ..., ux_n)\, b)^m$ (5.4) de aşikar olmayacak şekilde yer aldığından R, bir GPI halkadır. Eğer bazı $\beta \in$ C için

$$bu = \beta u$$

ise katsayılar sadece $\{b, u\}$ dır. Bazı $\mu \in C$ için $u = \mu b$ olsun. O zaman $b \notin C$ ise R, GPI halkadır. Eğer $\{u, b\}$ doğrusal C-bağımsız ise R yine GPI halkadır. Bu nedenle RC nin sıfırdan farklı bir H = Soc(RC) ı vardır ve $0 \neq J = IH$ dır. Y. Özellik 2.1.5 (ii) den H basit olduğundan J = JH dır ve ayrıca J, I ile aynı basit koşulları sağlar. R yerine H, I yerine J alınarak, R nin basit bir halka olduğu ve R = Soc(R) elde edilir ve IR = I dır.

Eğer $(a + b)I = 0$ ise her $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ için

$$(a\, f(x_1, x_2, ..., x_n) + f(x_1, x_2, ..., x_n)\, b)^m = 0$$

olduğundan her $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ için

$$[b,\ f(x_1, x_2, ..., x_n)] = 0$$

dır. Y. Özellik 2.1.18 den $[b, I]I = 0$ dır.

Teoremin sonucunun sağlanmadığını kabul edelim. O zaman

$$(a + b)w \neq 0 \text{ ve } [\, f(r_1, r_2, ..., r_n),\, r_{n+1}]\, r_{n+2} \neq 0$$

olacak şekilde $w, r_1, r_2, \ldots, r_{n+2} \in I$ vardır. $f(x_1, x_2, ..., x_n)\, x_{n+1}$, I ideali için bir özdeşlik olmadığından, $f(s_1, s_2, ..., s_n)\, s_{n+1} \neq 0$ olacak şekilde $s_1, s_2, \ldots, s_n \in I$ vardır. Tanım 2.1.33 den

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \Sigma\, t_i\, (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)x_i$$

dir. Y. Özellik 5.2 nin ispatındaki benzer teknikle,

$$t_n(w_1, w_2, \ldots, w_{n-1})w_n \neq 0$$

olacak şekilde $w_1, w_2, \ldots, w_n \in I$ vardır. R = H regüler olduğundan tümevarım ve Y. Özellik 2.1.4 den bazı $e \in R$ için,

$$\sum_{i=1}^{n+2} r_i R + \sum_{j=1}^{n} w_j R + w\mathrm{R} = e\mathrm{R}$$

dir. Üstelik, $e \in$ IR, i = 1, 2, …, n+2 ve j = 1, 2, …, n için $ew_\mathrm{j} = w_\mathrm{j}$, $er_\mathrm{i} = r_\mathrm{i}$, $ew = w$ dir. Hipotezden, her $x_1, x_2, \ldots, x_n \in$ I için

$$(at_n(ex_1, ex_2, \ldots, ex_{n-1})ex_n(1 - e) + t_n(ex_1, \ldots, ex_{n-1})ex_n(1 - \mathrm{e})b)^m = 0 \qquad (5.5)$$

bulunur. (5.5) eşitliği soldan 1 - e ile çarpılırsa,

$$0 = (1 - e)(at_n(ex_1, \ldots, ex_{n-1})ex_n(1 - e))^m$$

elde edilir. Bu da,

$$0 = (1 - e)(at_n(ex_1, \ldots, ex_{n-1})ex_n)^{m+1} = ((1 - e)(aet_n(ex_1, \ldots, ex_{\mathrm{n}-1})e\mathrm{R})^{m+1}$$

demektir. Y. Özellik 2.1.13 den

$$((1 - e)aet_n(ex_1, \ldots, ex_{n-1})e = 0 \text{ bulunur.}$$

Y. Özellik 2.1.28 den

$$(1 - e)ae = 0 \text{ veya } t_n(ex_1, \ldots, ex_{n-1})ex_n = 0$$

olur. İkinci durum gerçeklenirse özellikle

$$0 = t_n(ew_1, \ldots, ew_{n-1})ew_n = t_n(w_1, \ldots, w_{n-1})w_n \neq 0$$

sonucuna ulaşılır. Bu ise bir çelişkidir. O halde birinci durum geçerlidir. Yani $ae = eae$ elde edilir. (5.5) i sağdan e ile çarpılıp, aynı metot kullanılırsa

$$(1 - e)be = 0$$

olur. Böylece eR$\mathrm{C}e$, bir sonlu boyutlu basit merkezi cebirdir ve

$$(a\, f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, b)^m$$

özdeşliğini sağlar. Y. Özellik 5.1 den

$$eae = - ebe \in C \text{ veya } f(ex_1e, ex_2e, ..., ex_ne) \text{ merkezidir.}$$

İkinci durumdan

$$[\,f(er_1, er_2, ..., er_n)\,,\, er_{n+1}]\, er_{n+2} = [\,f(r_1, r_2, ..., r_n)\,,\, r_{n+1}]\, r_{n+2} \neq 0$$

sonucuna ulaşılır ve bu bir çelişkidir. O halde

$$ae = eae = - ebe = - be$$

eşitlikleri geçerlidir. Buna göre,

$$0 = (a + b)e = (a + b)ew = (a + b)w \neq 0$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. O halde ispat tamamlanmış olur.

Teoremin 5.1' in İspatı: Y. Özellik 2.3.6 dan R halkasının bir yoğun sağ ideali üzerindeki her genelleştirilmiş g türevi, **U** Utumi kesirler halkasına türlü genişletilebilir ve bu türev, $a \in$ **U** ve d, **U** üzerinde bir türev olmak üzere $g(x) = ax + d(x)$ şeklindedir. $u \in$ I için **U**,

$$(a\, f(ux_1, ux_2, ..., ux_n) + d(\,f(ux_1, ux_2, ..., ux_n)\,)^m = 0$$

differansiyel özdeşliğini sağlar.

$[\,f(x_1, x_2, ..., x_n)\,,\, x_{n+1}]\, x_{n+2}$ nin I için bir özdeşlik olmadığını kabul edelim.

d = 0 ise; her $x_1, x_2, \ldots, x_n \in$ I için

$$(a\, f(x_1, x_2, ..., x_n)\,)^m = 0$$

dır. Başlangıç hipotezinden ve Y. Özellik 5.2 den her $x \in$ I için

$$g(x) = ax \text{ ve } a\mathrm{I} = 0$$

bulunur. Bu ise (ii) de istenilen sonuçtur.

d ≠ 0 ise; Tanım 2.1.32 den

$$0 = (a\, f(x_1, x_2, ..., x_n) \; + \; f^{d}(x_1, x_2, ..., x_n) \; + \sum_{i} f(x_1, x_2, ..., d(x_i), ..., x_n))^m$$

elde edilir. Y. Özellik 2.2.15 den ispatın bundan sonraki kısmını iki parçaya ayırırız:

I. Durum: Eğer d, **U** nun bir q elemanıyla belirlenmiş bir iç türevi ise yani her $x \in$ **U** için $d(x) = qx - xq$ ise

$$g(x) = ax + d(x) = (a + q)x - xq$$

dır ve **U**,

$$((a\, f(ux_1, ux_2, ..., ux_n) \; - d(\, f(ux_1, ux_2, ..., ux_n)\,))^m = ((a + q)(\, f(ux_1, ux_2, ..., ux_n) \; - f(ux_1, ux_2, ..., ux_n)\, q)^m$$

özdeşliğini sağlar. $[\, f(x_1, x_2, ..., x_n)\, ,\, x_{n+1}]x_{n+2}$, I için bir özdeşlik olmadığından, Y. Özellik 5.2 den

$$0 = (a + q - q)\mathrm{I} = a\mathrm{I} \text{ ve } [q, \mathrm{I}]\mathrm{I} = 0$$

elde edilir. Bu ise (iii) de istenilen sonuçtur.

II. Durum: d, **U** nun bir dış türevi olsun. Y. Özellik 2.1.31 den I ve I**U** aynı diferansiyel özdeşliği sağlayacağından,

$$(a\, f(x_1, x_2, ..., x_n) \; + d(\, f(x_1, x_2, ..., x_n)\,))^m$$

I**U** için bir özdeşliktir, yani, herhangi $u \in$ I için

$$(a\, f(ux_1, ux_2, ..., ux_n) \; + d(\, f(ux_1, ux_2, ..., ux_n)\,))^m$$

U için bir özdeşliktir. Bu nedenle **U**,

$$(a\, f(ux_1, ux_2, ..., ux_n) \;+\; f^{\,d}(ux_1, ux_2, ..., ux_n) \;+$$

$$\sum_{\mathrm{i}} f(ux_1, ux_2, ..., d(u)x_i + ud(x_i), ..., ux_n))^m$$

özdeşliğini sağlar. *d* dış türev olduğundan, Y. Özellik 2.2.15 den **U**,

$$(a\, f(ux_1, ux_2, ..., ux_n) \;+\; f^{\,d}(ux_1, ux_2, ..., ux_n) +$$

$$\sum_{\mathrm{i}} f(ux_1, ux_2, ..., d(u)x_i + uy_i, ..., ux_n))^m$$

özdeşliğini sağlar. Burada özel olarak $x_{\mathrm{i}} = 0$ alınırsa **U**,

$$f(ux_1, ux_2, ..., uy_i, ..., ux_n)^m$$

polinomunu sağlar yani I, $f(x_1, x_2, ..., y_i, ..., x_n)^m$ polinomunu sağlar. Y. Özellik 2.1.29 dan $f(x_1, x_2, ..., y_i, ..., x_n)\mathrm{I} = 0$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir.

Teorem 5.2 K birimli değişmeli bir halka, R bir asal K-cebir ve *g* R halkasının sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş türevi olsun. $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ K üzerinde bir çoklu doğrusal polinom, I R halkasının sıfırdan farklı bir sağ ideali, *m*, $n \geq 1$ olacak şekilde sabit tamsayılar ve $x_1, x_2, ..., x_n \in$ I için $g(\, f(x_1, x_2, ..., x_n))^m \in$ Z(R) olsun. Eğer $g(\, f(a_1, a_2, ..., a_n))^m \neq 0$ olacak şekilde $a_1, a_2, ..., a_n \in$ I varsa aşağıdakilerden birisi sağlanır:

(i) $f(x_1, x_2, ..., x_n)\, x_{n+1}$, I ideali için bir özdeşliktir.

(ii) Her $x_{\mathrm{i}} \in$ R için $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ R üzerinde merkezidir.

(iii) $a \in$ Z(R) için $g(x) = ax$ ve $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ R üzerinde kuvvet merkezlidir.

(iv) R, s_4 standart polinomunu sağlar.

Teorem 5.2 nin ispatını vermeden önce aşağıdaki Y. Özellikleri verelim.

Y. Özellik 5.4 R bir asal halka, m, $n \geq 1$ olacak şekilde sabit tamsayılar, I R halkasının sıfırdan farklı bir sağ ideali olsun. Eğer $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, her x_1, x_2, ..., $x_n \in$ I için $f(x_1, x_2, ..., x_n)^m \in$ Z(R) olacak şekilde C üzerinde, bir çoklu doğrusal polinom ise her x_1, x_2, ..., x_n, $x_{n+1} \in$ I için $f(x_1, x_2, ..., x_n)x_{n+1} = 0$ veya $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ R üzerinde kuvvet merkezlidir.

İspat: Herhangi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in$ I için

$$f(x_1, x_2, ..., x_n)^m \in \mathrm{Z(R)}$$

olduğunu kabul edelim. $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ nin R için bir özdeşlik olmadığı açıktır. I, aşikar olmayan $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ polinomunu sağladığından, Y. Özellik 2.1.29 dan IC = eRC olacak şekilde bir $e^2 = e \in$ socle(RC) vardır.

Y. Özellik 2.1.30 dan her x_1, x_2, …, $x_n \in$ IC ve $r \in$ R için $[f(x_1, x_2, ..., x_n)^m, r] = 0$ olduğundan her $r_1, r_2, \ldots, r_{n+1} \in$ R için

$$0 = [f(er_1, er_2, ..., er_n)^m, \ r_{n+1}(1 - e)] = f(er_1, er_2, ..., er_n)^m r_{n+1}(1 - \mathrm{e})$$

dır. R asal olduğundan

$$(1 - e) = 0 \ \text{ veya } \ f(er_1, er_2, ..., er_n)^m = 0$$

bulunur. Birinci durumda, $e = 1$ dir ve bu nedenle IC = RC elde edilir. Buradan, $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, RC üzerinde kuvvet merkezlidir. Dolayısıyla R üzerinde kuvvet merkezlidir. İkinci durumda $f(er_1, er_2, ..., er_n)^m = 0$ ise Y. Özellik 2.1.26 dan

$f(er_1, er_2, ..., er_n)\, e$ = 0 dır. Bu da, her $x_1, x_2, \ldots, x_n \in$ IC için $f(x_1, x_2, ..., x_n)\, x_{n+1}$ = 0 olması demektir. O halde her $x_1, x_2, \ldots, x_n \in$ I için $f(x_1, x_2, ..., x_n)\, x_{n+1}$ = 0 dır.

Y. Özellik 5.5 R = $M_t(F)$, F cismi üzerindeki tüm $t\times t$ tipindeki matrislerin halkası ve $t \geq 3$ olsun. a, $b \in$ R ve m, $n \geq 1$ olacak şekilde sabit tamsayılar ve her $x_1, x_2, ..., x_n \in$ R için $(a\, f(x_1, x_2, ..., x_n) + f(x_1, x_2, ..., x_n)\, b)^m \in$ Z(R) olsun. Bu durumda aşağıdakilerden birisi sağlanır:

(i) $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ merkezidir.

(ii) $a = - b \in$ Z(R) dir.

(iii) a, $b \in$ Z(R) ve $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ R üzerinde kuvvet merkezlidir.

İspat: $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ nin, R üzerinde kuvvet merkezli olmadığını kabul edelim. O zaman Y. Özellik 2.1.22 ve Y. Özellik 2.1.23 den $f(u_1, u_2, ..., u_n) = \alpha e_{kl}$, $k \neq l$ olacak şekilde $u_1, u_2, \ldots, u_n \in M_t(F)$ ve $0 \neq \alpha \in$ F dir. $\{ f(u_1, u_2, ..., u_n) : u_1, u_2, \ldots, u_n \in M_t(F)\}$ kümesi, $M_t(F)$ nin tüm F-otomorfizmalarının hareketi altında sabit kaldığından, herhangi $i \neq j$ için $f(r_1, r_2, ..., r_n) = \alpha e_{ij}$ olacak şekilde $r_1, r_2, \ldots, r_n \in M_t(F)$ vardır. Bu nedenle hipotezden, her $i \neq j$ için $(a\alpha e_{ij} + \alpha e_{ij} b)^m \in$ Z(R) dir. Üstelik, $(a\alpha e_{ij} + \alpha e_{ij} b)^m$ matrisinin rankı ≤ 2 olduğundan, R de $(a\alpha e_{ij} + \alpha e_{ij} b)^m$ = 0 olmalıdır. Bunu sağdan e_{ij} ile çarparsak, $(\alpha e_{ij} b)^m e_{ij} = 0$ bulunur. O halde b matrisinin, her $i \neq j$ için (j,i) bileşeni sıfırdır. Bu ise b matrisinin köşegen olması demektir. Benzer şekilde a matrisinin de köşegen olduğu görülür.

φ, $M_t(F)$' nin bir otomorfizması ise, o zaman

$$(\varphi(a)\varphi(f(x_1, x_2, ..., x_n)) + \varphi(f(x_1, x_2, ..., x_n))\, \varphi(b))^m \in Z(R)$$

dir. Bu nedenle, φ(a) ve φ(b) matrisleri köşegen olmalıdır. O halde $\beta_i \in F$ olmak üzere, $a = \sum_{i=1}^{t} \beta_i e_{ii}$ alalım. $\varphi(x) = (1 + e_{ij})x(1 + e_{ij})^{-1}$ $M_t(F)$ nin bir iç F-otomorfizması olsun. O zaman her $j \rangle 1$ için

$$\varphi(a) = (1 + e_{ij})a(1 + e_{ij})^{-1}$$

matrisinin (1,j) bileşeninin $\beta_j - \beta_1$ olduğu görülür. φ(a) köşegen olduğundan, $j \rangle 1$ için $\beta_j - \beta_1 = 0$ dır. O halde $a \in F$ dir. Benzer şekilde $b \in F$ elde edilir. Böylece hipotezden

$$(a + b)^m f(x_1, x_2, ..., x_n)^m \in Z(R)$$

bulunur. Y. Özellik 5.1 den $a = - b \in Z(R)$ veya her $x_1, x_2, \ldots, x_n \in R$ için $f(x_1, x_2, ..., x_n)^m \in Z(R)$ sonucuna ulaşılır.

Y. Özellik 5.6 R bir asal halka, $m, n \geq 1$ olacak şekilde tamsayılar, $a, b \in R$ ve her $x_1, x_2, ..., x_n \in R$ için $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, $(af(x_1, x_2, ..., x_n) + f(x_1, x_2, ..., x_n)b)^m \in Z(R)$ olacak şekilde R üzerinde vanishing olmayan bir çoklu doğrusal polinom ise aşağıdakilerden birisi sağlanır:

(i) $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ merkezidir.

(ii) $a = - b \in Z(R)$ dir.

(iii) R, s_4 standart polinomunu sağlar.

(iv) $a, b \in Z(R)$ ve $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ R üzerinde kuvvet merkezlidir.

İspat: I, R' nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. Her $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ için

$$(a\, f(x_1, x_2, ..., x_n) + f(x_1, x_2, ..., x_n)\, b)^m = 0$$

olduğunu kabul edelim. Y. Özellik 2.1.30 dan I ve R aynı genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağladığından her $x_1, x_2, \ldots, x_n \in$ R için

$$(a\, f(x_1, x_2, ..., x_n) + f(x_1, x_2, ..., x_n)\, b)^m = 0$$

dır. Y. Özellik 5.1 den

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \text{ merkezidir veya } a = -b \in Z(R) \text{ dir.}$$

Ve ispat biter. $(a\, f(x_1, x_2, ..., x_n) + f(x_1, x_2, ..., x_n)\, b)^m \neq 0$ ise kabulümüzden, I $\cap$ Z(R) $\neq$ 0 dır. K, $R_{Z(R)}$ nin sıfırdan farklı iki yanlı ideali olsun. K $\cap$ R, R halkasının bir ideali olduğundan K $\cap$ R $\cap$ Z(R) $\neq$ 0 dır. Yani K, $R_{Z(R)}$ de bir tersinir eleman içerir ve böylece $R_{Z(R)}$ birimli ve basittir. Y. Özellik 2.1.32 den R ve $R_{Z(R)}$ aynı polinom özdeşliğini sağladığından her $x, y \in R_{Z(R)}$ için

$$(a\, f(x_1, x_2, ..., x_n) + f(x_1, x_2, ..., x_n)\, b)^m \in Z(R_Z)$$

olduğu açıktır. R halkasının $[f(x_1, x_2, ..., x_n), x_{n+1}]$ yi sağladığını göstermek için R halkasının basit ve birimli olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda her $x_1, x_2, \ldots, x_n \in$ R için

$$(a\, f(x_1, x_2, ..., x_n) + f(x_1, x_2, ..., x_n)\, b)^m \in Z(R)$$

dir. O halde R bir genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlar ve üstelik birimli ve basit halkadır. Bu durumda **Q** = RC = R dir ve R halkasının bir minimal sağ ideali vardır. Bu nedenle Tanım 2.1.23 den R basit artinian halkadır yani D, Z(R) üzerinde sonlu boyutlu bir bölüm halkası olmak üzere R $\cong$ M_k(D)dır. Yani R, merkezi üzerinde sonlu boyutlu basit cebirdir. Y. Özellik 2.1.25 den R $\subseteq$ M_k(F) olacak şekilde F cismi üzerinde bir $k\times k$ matrisler halkası vardır ve üstelik M_k(F),

$$[(a\, f(x_1, x_2, ..., x_n) + f(x_1, x_2, ..., x_n)\, b)^m, x_{n+1}]$$

genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlar. Y. Özellik 5.5 den ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 5.2 R bir asal halka, $0 \neq a \in$ R, m, $n \geq 1$ olacak şekilde sabit tamsayılar ve $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, her x_1, x_2, ..., $x_n \in$ R için $(a\, f(x_1, x_2, ..., x_n))^m \in$ Z(R) olacak şekilde R üzerinde bir merkezi olmayan çoklu doğrusal polinom ise R, s_4 standart polinomunu sağlar veya $a \in$ Z(R) ve $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, R üzerinde kuvvet merkezlidir.

Y. Özellik 5.7 K bir birimli değişmeli halka, R asal K-cebir ve g R halkasının sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş türevi olsun. $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ K üzerinde bir çoklu doğrusal polinom ve m, $n \geq 1$ sabit tamsayılar olsun. Eğer her x_1, x_2, ..., x_n $\in$ R için $(g(\, f(x_1, x_2, ..., x_n)))^m \in$ Z(R) ise aşağıdakilerden birisi sağlanır:

(i) $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ R üzerinde merkezlidir.

(ii) $a \in$ Z(R) için $g(x) = ax$ ve $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ R üzerinde kuvvet merkezlidir.

(iii) R, s_4 standart polinomunu sağlar.

İspat: T, R halkasının sıfırdan farklı iki yanlı ideali olsun. Her r_1, r_2, …, $r_n \in$ T için

$$(g(\, f(r_1, r_2, ..., r_n)))^m = 0$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda Teorem 5.1 in iki yanlı ideal için ele alınmasıyla, $g = 0$ veya $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ R de merkezi olması elde edilir. Aksi taktirde, kabulümüzden T $\cap$ Z(R) $\neq 0$ dır. K, $R_{Z(R)}$ nin sıfırdan farklı iki yanlı ideali olsun. K $\cap$ R, R halkasının bir idealidir ve K $\cap$ R $\cap$ Z(R) $\neq 0$ dır. Yani K nın $R_{Z(R)}$ de bir tersinir elemanı vardır. Böylece $R_{Z(R)}$ basit ve birimlidir. Hipotezden her r_1, r_2, …, r_n, $s \in$ R için

$$[(g(\,f(r_1,r_2,...,r_n)\,)^m\,,\,s] = 0$$

dır.

Y. Özellik 2.3.6 dan uygun bir $a \in$ **Q** için, d R halkasının bir türevi olmak üzere, $g(x) = ax + d(x)$ dır. Bu nedenle R

$$[a\,f(x_1,x_2,...,x_n) + d(\,f(x_1,x_2,...,x_n)\,))^m,\,x_{n+1}] = [(a\,f(x_1,x_2,...,x_n) + f^d(x_1,x_2,...,x_n) + \sum_i f(x_1,x_2,...,d(x_i),...,x_n)\,)^{\mathrm{m}},\,x_{n+1}]$$

differansiyel özdeşliğini sağlar.

d iç türev değilse, Y. Özellik 2.2.15 den R,

$$[(a\,f(x_1,x_2,...,x_n) + f^d(x_1,x_2,...,x_n) + \sum_i f(x_1,x_2,...,y_i,...,x_n)\,)^m,\,x_{n+1}]$$

polinom özdeşliğini sağlar. Özel olarak $x_{\mathrm{i}} = 0$ alınırsa R, her i $\in \{1,2, .., n\}$ için

$$[a\,f(x_1,x_2,...,y_i,...,x_n)\,)^m,\,x_{n+1}]$$

polinom özdeşliğini sağlar. O halde Y. Özellik 5.4 den ispat tamamlanmış olur.

Şimdi ***d*, Q' nun bir *q* elemanı ile belirlenmiş bir iç türev** olsun. Y. Özellik 2.1.32 den R ve $\mathrm{R}_{\mathrm{Z(R)}}$ aynı polinom özdeşliğini sağladığından, her $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathrm{R}_{\mathrm{Z(R)}}$ için

$$(a\,f(r_1,r_2,...,r_n) + [q,\;f(r_1,r_2,...,r_n)\,])^m \in \mathrm{Z}(\mathrm{R}_{\mathrm{Z(R)}})$$

dir. R yerine $\mathrm{R}_{\mathrm{Z(R)}}$ alınarak R halkasını birimli ve basit kabul edebiliriz. Bu durumda her $r_1, r_2, \ldots, r_n \in$ R için

$$(a\,f(r_1,r_2,...,r_n) + [q,\;f(r_1,r_2,...,r_n)\,])^m \in \mathrm{Z(R)}$$

dir. Bu nedenle R bir genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlar. Öyleyse Soc(RC) sıfırdan farklıdır.Ayrıca R birimli ve basit olduğundan Y. Özellik 2.1.17

den **Q** = RC = R dir ve R halkasının bir minimal sağ ideali vardır. Bu nedenle a, $q \in$ R = **Q** dur ve Tanım 2.1.23 den R basit artinian halkadır. Y. Özellik 2.1.18 den D, Z(R) üzerinde sonlu boyutlu bir bölüm halkası olmak üzere, R $\cong$ M_k(D)dır. O halde R, merkezi üzerinde sonlu boyutlu bir basit cebirdir. Y. Özellik 2.1.25 den R $\subseteq$ M_k(F) ve M_k(F),

$$[(a\, f(x_1,x_2,...,x_n) + [q,\ \ f(x_1,x_2,...,x_n)\,])^m, x_{n+1}] = [(a\, f(x_1,x_2,...,x_n) +$$

$$q\, f(x_1,x_2,...,x_n) - f(x_1,x_2,...,x_n)\, q)^m, x_{n+1}] =$$

$$[(a+q)\ f(x_1,x_2,...,x_n) + f(x_1,x_2,...,x_n)\,(-q))^m, x_{n+1}]$$

genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlar. Y. Özellik 5.6 dan $f(x_1,x_2,...,x_n)$ merkezidir veya aşağıdakilerden birisi sağlanır:

(i) $a + q$, $q \in$ Z(R) ve $f(x_1,x_2,...,x_n)$ R de kuvvet merkezlidir.

(ii) $a + q = -q \in$ Z(R) dir.

(iii) R, s_4 standart polinomunu sağlar.

(i) ve (ii) de $d = 0$ ve $a \in$ Z(R) için $g(x) = ax$ elde ederiz. $g \neq 0$ olduğundan $a \neq 0$ kabul edebiliriz ve Sonuç 5.2 den $f(x_1,x_2,...,x_n)$ kuvvet merkezlidir veya R, s_4 standart polinomunu sağlar.

Teoremin 5.2' nin İspatı: Y. Özellik 2.3.6 dan **Q** Martindale kesirler halkasının uygun bir a elemanı için d, R halkasının bir türevi olmak üzere, $g(x) = ax + d(x)$ dir. Hipotezden

$$(a\, f(x_1,x_2,...,x_n) + d(\, f(x_1,x_2,...,x_n)\,)^m$$

I için bir merkezi diferansiyel özdeşlik olduğundan, Y. Özellik 2.2.19 dan R bir PI-halkadır ve dolayısıyla RC, sonlu boyutlu, merkezi, basit C-cebirdir. Y. Özellik 2.1.18 den, bazı $k \geq 1$ için, D sonlu boyutlu, merkezi, basit C-cebir olmak üzere, RC $\cong$ $M_k(D)$ dir. Y. Özellik 2.2.20 den her $x_1, x_2, \ldots, x_n \in$ IC için

$$(a\, f(x_1, x_2, ..., x_n) + d(f(x_1, x_2, ..., x_n))^m \in \mathrm{C}$$

dir. Genelliği bozmaksızın R yerine RC alabiliriz ve R = $M_k(D)$ olduğunu kabul edebiliriz. Herhangi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in$ I ve $r \in$ R için

$$(a\, f(x_1, x_2, ..., x_n) + f^d(x_1 r, x_2, ..., x_n) + f(d(x_1)r + x_1 d(r), x_2, ..., x_n) +$$

$$\sum_{\mathrm{i}\geq 2} f(x_1 r, x_2, ..., d(x_{\mathrm{i}}), ..., x_{\mathrm{n}})^m \in \mathrm{C}$$

dir.

d bir dış türev ise, Y. Özellik 2.2.15 den

$$(a\mathrm{f}\, f(x_1 r, x_2, ..., x_n) + f^d(x_1 r, x_2, ..., x_n) + f(d(x_1)r + x_1 y, x_2, ..., x_n) +$$

$$\sum_{\mathrm{i}\geq 2} f(x_1 r, x_2, ..., d(x_{\mathrm{i}}), ..., x_{\mathrm{n}})^m \in \mathrm{C}$$

dir. Özel olarak $r = 0$ alınırsa her $x_1, x_2, \ldots, x_n \in$ I ve $y \in$ R için

$$f(x_1 y, x_2, ..., x_n)^m \in \mathrm{C}$$

elde ederiz. Y. Özellik 5.4 den her $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1} \in$ I için

$f(x_1, x_2, ..., x_n)\, x_{n+1} = 0$ veya $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ R de kuvvet merkezlidir.

İkinci durumun geçerli olduğunu kabul edelim. Her $x_1, x_2, \ldots, x_n \in$ I için

$$f(x_1, x_2, ..., x_n)^m = 0$$

ise Y. Özellik 5.4' ün bir indirgenmiş durumu olarak her $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1} \in$ I için, $f(x_1, x_2, ..., x_n)\, x_{n+1} = 0$ olduğu açıktır. Eğer $0 \neq f(b_1, b_2, ..., b_n)^m \in$ C olacak şekilde $b_1, b_2, \ldots, b_n \in$ I var ise o zaman C cisim olduğundan I, R' nin tersinir bir elemanını içerir. Bu nedenle I = R dir. Y. Özellik 5.7 den ispat tamamlanır.

***d* iç türev olsun.** O zaman $q \in$ Q için $d(x) = [q, x] = qx - xq$ olsun. F, D nin bir maksimal alt cismi olsun. Böylece $t = k \times$ [F:C] olmak üzere, Y. Özellik 2.2.18 den $M_k(D)\otimes_C F \cong M_t(F)$ dir. Ayrıca d, $M_k(D)\otimes_C F$ e genişletilebilir (Lee and Wong, 1995) ve Y. Özellik 2.2.17 den her $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I\otimes F$ için

$$(a\, f(x_1, x_2, ..., x_n) + d(f(x_1, x_2, ..., x_n)))^m \in Z(M_t(F))$$

dir. Bu nedenle $t \geq 2$ ve $l \leq t$ olmak üzere

$$R \cong M_t(F) \text{ ve } I = eR = e_{11}R + \ldots.+ e_{ll}R$$

dir.

$t \geq 3$ olsun. Aksi halde ispat biter. q_{rs}, $a_{rs} \in$ F için, q = $\sum_{r,s} q_{rs} e_{rs}$, $a = \sum_{r,s} a_{rs} e_{rs}$ yazalım. $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, I ideali için bir özdeşlik değilse Y. Özellik 2.1.31 den herhangi $i \leq l$, $j > l$ için, e_{ij} elemanı, $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ nin I idealindeki tüm değerleriyle üretilen RC nin toplamsal alt grubunun içine düşer. $(ae_{ij} + qe_{ij} - e_{ij}q)^m$ matrisinin rankı ≤ 2 olduğundan, bu matris merkezi değildir. Bu nedenle,

$$(ae_{ij} + qe_{ij} - e_{ij}q)^m = 0$$

olmalıdır. Bunu sağdan e_{ii} ile çarparsak,

$$(-e_{ij}q)^m e_{ii} = 0$$

bulunur. Bu da, herhangi $i \leq l$ ve $j \geq l$ için $q_{ji} = 0$ demektir. Yani $q\mathrm{I} \subseteq \mathrm{I}$ dır. Üstelik,

$$e_{jj}(ae_{ij} + qe_{ij} - e_{ij}q)^m = 0$$

olduğundan, $e_{jj}(ae_{ij})^m = 0$ dır. Yani $a_{ji} = 0$ dır ve $a\mathrm{I} \subseteq \mathrm{I}$ dır. Bunların sonucu olarak

$$g(\mathrm{I}) \subseteq \mathrm{I}$$

elde edilir. $0 \neq g(\, f(y_1, y_2, ..., y_n)\,)^m \in \mathrm{I} \cap \mathrm{F}$ olduğundan, bu eleman tersinirdir ve dolayısıyla I = R dir. O halde Y. Özellik 5.7 den ispat tamamlanmış olur.

6. GENELLEŞTİRİLMİŞ (σ,τ)-TÜREVLER

6.1. Genelleştirilmiş (σ,τ) – Türevlerin İzomorfluğu

(Argaç and Albaş , 2002), (Nakajima, 2000)' de genelleştirilmiş türevlerle ilgili elde edilen sonuçları, (σ,τ), Jordan (σ,τ) ve Lie (σ,τ)-türevlere genişletmişlerdir. Ayrıca (Hamaguchi, 2001), gDer(A,M) ile BDer(A,M) arasında bir izomorfizma olması için gerek ve yeter koşulu vererek bunu Jordan ve Lie türevlere uygulamıştır.

Bu bölümde amacımız, $\mathrm{gDer}^{(\sigma,\tau)}(A,M)$ ile $\mathrm{BDer}^{(\sigma,\tau)}(A,M)$ arasında benzer bir izomorfizma kurmak, bunun sonuçlarını araştırmak ve bize bu konuda gerekli olan yeni tanımları vermektir.

Tanım 6.1.1 $f : A \to M$ bir K-modül homomorfizması ve τ A nın bir otomorfizması olsun. Her x, $y \in A$ için, $f(xy) = f(x)\tau(y)$ eşitliği sağlanıyorsa f dönüşümüne **τ-sol çarpan dönüşümü** denir. A dan M ye tanımlı tüm τ-sol çarpan dönüşümlerinin kümesini **$\mathrm{Mul}^{(\tau)}(A,M)$** ile gösterelim. Her f, $g \in \mathrm{Mul}^{(\tau)}(A,M)$ ve her $\alpha \in K$ için, $f + g$ ve αf dönüşümleri, τ-sol çarpan dönüşümleridir. Dolayısıyla $\mathrm{Mul}^{(\tau)}(A,M)$ kümesi, K-modül yapısındadır.

Şimdi Jordan τ-sol çarpan, Lie (σ,τ)-sol çarpan ve Brešar genelleştirilmiş Lie (σ,τ)-türev dönüşümlerini tanımlayalım:

Tanım 6.1.2 $g : A \to M$ bir K-modül homomorfizması olsun. Her $x \in A$ için, $g(x^2) = g(x)\tau(x)$ eşitliği sağlanıyorsa, g ye **Jordan τ-sol çarpan dönüşümü** denir. A dan M ye tanımlı tüm Jordan τ-sol çarpan dönüşümlerinin kümesini

JMul$^{(\tau)}$(A,M) ile gösterelim. JMul$^{(\tau)}$(A,M) kümesinin K-modül yapısında olduğunu görmek kolaydır.

Tanım 6.1.3 g : A $\rightarrow$ M bir K-modül homomorfizması olsun. Her x, $y \in$ A için, $g([x, y]) = [-\ g(y), x]_{\sigma,\tau}$ eşitliği sağlanıyorsa, g ye **Lie (σ,τ)-sol çarpan dönüşümü** denir. A dan M ye tanımlı tüm Lie (σ,τ)-sol çarpan dönüşümlerinin kümesini **LieMul$^{(\sigma,\tau)}$(A,M)** ile gösterelim. Benzer şekilde LieMul$^{(\sigma,\tau)}$(A,M) kümesi K-modül yapısındadır.

Tanım 6.1.4 f : A $\rightarrow$ M bir K-modül homomorfizması olsun. Her x, $y \in$ A için $f([x, y]) = [L(x), y]_{\sigma,\tau} - [f(y), x]_{\sigma,\tau}$ olacak şekilde bir L Lie (σ,τ)-türevi varsa, f dönüşümüne **Brešar genelleştirilmiş Lie (σ,τ)- türev** denir.

Teorem 6.1.1 ϕ : gDer$^{(\sigma,\tau)}$(A,M) $\rightarrow$ BDer$^{(\sigma,\tau)}$(A,M) ve ψ : M $\rightarrow$ Mul$^{(\tau)}$(A,M) dönüşümleri, her x, $y \in$ A için $\phi((f, m)) = (f, f + m_l\tau)$ ve $\psi(m) = m_l\tau$ olarak tanımlansın.

ϕ dönüşümünün bir K- modül izomorfizması olması için gerek ve yeter koşul ψ nin bir K-modül izomorfizması olmasıdır.

İspat: ψ_1 : Mul$^{(\tau)}$(A,M) $\rightarrow$ BDer$^{(\sigma,\tau)}$(A,M) ve ψ_2 : BDer$^{(\sigma,\tau)}$(A,M) $\rightarrow$ Der$^{(\sigma,\tau)}$(A,M) dönüşümleri, her $g \in$ Mul$^{(\tau)}$(A,M) ve her $(f, d) \in$ BDer$^{(\sigma,\tau)}$(A,M) için $\psi_1(g) = (g, 0)$ ve $\psi_2((f, d)) = d$ olacak şekilde K- modül homomorfizmaları olmak üzere,

$$0 \rightarrow \mathrm{Mul}^{(\tau)}(A,M) \xrightarrow{\psi_1} \mathrm{BDer}^{(\sigma,\tau)}(A,M) \xrightarrow{\psi_2} \mathrm{Der}^{(\sigma,\tau)}(A,M) \rightarrow 0$$

dizisi parçalanabilir tam dizidir.

Ayrıca ι_2 : $\mathrm{Der}^{(\sigma,\tau)}(A,M) \rightarrow \mathrm{BDer}^{(\sigma,\tau)}(A,M)$ dönüşümü, $\iota_2(d) = (d, d)$ şeklinde tanımlansın. Y. Özellik 2.4.3 kullanılarak, K-modüllerin aşağıdaki parçalanabilir tam dizisini elde ederiz:

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{\varphi_1} \mathrm{gDer}^{(\sigma,\tau)}(A,M) \xrightarrow{\varphi_2} \mathrm{Der}^{(\sigma,\tau)}(A,M) \rightarrow 0.$$

Burada $\varphi_1(m) = (m_l\tau, -m)$ ve $\varphi_2((f, m)) = f + m_l\tau$ olarak tanımlanmıştır. O halde aşağıdaki diyagram değişmelidir:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \rightarrow & M & \xrightarrow{\varphi_1} & gDer^{(\sigma,\tau)}(A,M) & \xrightarrow{\varphi_2} & Der^{(\sigma,\tau)}(A,M) & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow\psi & & \downarrow\phi & & \downarrow id & & \\
0 & \rightarrow & Mul^{\tau}(A,M) & \xrightarrow{\psi_1} & BDer^{(\sigma,\tau)}(A,M) & \xrightarrow{\psi_2} & Der^{(\sigma,\tau)}(A,M) & \rightarrow & 0
\end{array}$$

Y. Özellik 2.1.8 den, ispat tamamlanır.

Sonuç 6.1.1 ϕ : $\mathrm{gJDer}^{(\sigma,\tau)}(A,M) \rightarrow \mathrm{BJDer}^{(\sigma,\tau)}(A,M)$ dönüşümünün bir K-modül izomorfizması olması için gerek ve yeter koşul, ψ : $M \rightarrow \mathrm{JMul}^{(\tau)}(A,M)$ dönüşümünün bir K-modül izomorfizması olmasıdır.

Teorem 6.1.2 ϕ : $\mathrm{gLieDer}^{(\sigma,\tau)}(A,M) \rightarrow \mathrm{BLieDer}^{(\sigma,\tau)}(A,M)$ ve ψ : $M \rightarrow \mathrm{LieMul}^{(\sigma,\tau)}(A,M)$ dönüşümleri, her $x, y \in A$ için $\phi((f, m)) = (f, f + m_l\tau)$ ve $\psi(m) = m_l\tau$ olsun. $M^{(\sigma,\tau)}(A) = \{ m \in M \mid [m, x]_{\sigma,\tau} = 0,$ her $x \in A\}$ olarak tanımlansın.

$M^{(\sigma,\tau)}(A) = M$ ise o zaman ϕ dönüşümünün bir K- modül izomorfizması olması için gerek ve yeter koşul ψ' nin bir K-modül izomorfizması olmasıdır.

İspat: ψ_1 : LieMul$^{(\sigma,\tau)}$(A,M) → BLieDer$^{(\sigma,\tau)}$(A,M) ve ψ_2 : BLieDer$^{(\sigma,\tau)}$(A,M) → LieDer$^{(\sigma,\tau)}$(A,M) dönüşümleri, her $g \in$ LieMul$^{(\sigma,\tau)}$(A,M) ve her (f, L) $\in$ BLieDer$^{(\sigma,\tau)}$(A,M) için, $\psi_1(g) = (g, 0)$ ve $\psi_2((f, L)) = L$ olacak şekilde iki K-modül homomorfizması olsun. Ayrıca, ι_2 : LieDer$^{(\sigma,\tau)}$(A,M) → BLieDer$^{(\sigma,\tau)}$(A,M) K-homomorfizması, $\iota_2(L) = (L, L)$ olarak tanımlansın. O halde $\psi_2\iota_2 = id_{LieDer^{(\sigma,\tau)}(A,M)}$ bulunur. Böylece aşağıdaki parçalanabilir tam dizi elde edilir:

$$0 \to LieMul^{(\sigma,\tau)}(A,M) \xrightarrow{\psi_1} BLieDer^{(\sigma,\tau)}(A,M) \xrightarrow{\psi_2} LieDer^{(\sigma,\tau)}(A,M) \to 0$$

Ayrıca Y. Özellik 2.4.5 den aşağıdaki parçalanabilir tam dizi vardır:

$$0 \to M \xrightarrow{\varphi_1} gLieDer^{(\sigma,\tau)}(A,M) \xrightarrow{\varphi_2} LieDer^{(\sigma,\tau)}(A,M) \to 0$$

Burada $\varphi_1(m) = (m_l\tau, -m)$ ve $\varphi_2((f, m)) = (f + m_l\tau)$ ile tanımlıdır. M$^{(\sigma,\tau)}$(A) = M olduğundan, $\psi(m) = m_l\tau \in$ LieMul$^{(\sigma,\tau)}$(A,M) bulunur. Dolayısıyla aşağıdaki değişmeli diyagramı elde ederiz:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & M & \xrightarrow{\varphi_1} & gLieDer^{(\sigma,\tau)}(A,M) & \xrightarrow{\varphi_2} & LieDer^{(\sigma,\tau)}(A,M) & \to & 0 \\
 & & \downarrow \psi & & \downarrow \phi & & \downarrow id & & \\
0 & \to & LieMul^{(\sigma,\tau)}(A,M) & \xrightarrow{\psi_1} & BLieDer^{(\sigma,\tau)}(A,M) & \xrightarrow{\psi_2} & LieDer^{(\sigma,\tau)}(A,M) & \to & 0
\end{array}$$

Y. Özellik 2.1.8 kullanılarak, ispat tamamlanır.

6.2 Brešar Genelleştirilmiş (σ,τ)-Türevlerin Genişlemesi

Teorem 6.2.1 A bir K-cebir, M bir A/K-bimodül ve $\hat{A}$ Y. Özellik 2.2.23 de tanımlandığı şekilde bir K-cebir olsun. (f, d) A dan M ye bir Brešar genelleştirilmiş (σ,τ)-türev ise o zaman aşağıdakiler denktir:

(i) A' dan M' ye bir (f, d) Brešar genelleştirilmiş (σ,τ)-türevi, $\hat{A}$ dan M ye Brešar genelleştirilmiş (σ,τ)-türev olarak genişletilebilir.

(ii) A dan M ye bir f - d Brešar genelleştirilmiş τ-sol çarpan dönüşümü, $\hat{A}$ dan M ye Brešar genelleştirilmiş τ-sol çarpan dönüşümü olarak genişletilebilir.

(iii) f - d = $m_l\tau$ olacak şekilde bir $m \in$ M vardır.

İspat: (i) ⇒ (ii): $\tau' : \hat{A} \to \hat{A}$ bir otomorfizma ve $\tau'|_A = \tau$ olsun. Her $(n, a) \in \hat{A}$ için, $\tau'((n, a)) = (n, \tau(a))$ olarak tanımlansın. Ayrıca $(f, d) \in \mathrm{BDer}^{(\sigma,\tau)}(A,M)$ ve (F,D) dönüşümü, (f, d) dönüşümünün $\hat{A}$ dan M ye bir genişlemesi olsun. $(f - d) \in \mathrm{Mul}^{(\tau)}(A,M)$ olduğunu görelim. Her $(n_1, a_1), (n_2, t_2) \in \hat{A}$ için

$$(F\text{-}D)((n_1, a_1)o(n_2, a_2)) = (F\text{-}D)((n_1, a_1)).\,\tau'((n_2, a_2))$$

dir. O halde $(F\text{-}D) \in \mathrm{Mul}^{(\tau)}(\hat{A},M)$ olur. Ayrıca $(F\text{-}D)|_A =$ f-d elde edilir.

(ii) ⇒ (iii): $(f - d) \in$ Mul(A,M) için, bu dönüşümün bir $G \in \mathrm{Mul}^{(\tau)}(\hat{A},M)$ genişlemesi vardır. Buradan, her $a \in$ A için

$$\begin{aligned}(f - d)(a) &= G((0, a)) \\ &= G((1,0)o(0, a))\end{aligned}$$

$$= G((1,0)).\tau'((0, a))$$

$$= G((1,0)).(0, \tau(a))$$

$$= G((1,0))\tau(a)$$

elde edilir. $G((1,0)) = m \in M$ alınırsa istenilen sonuca ulaşılır.

(iii)⇒ (i): $D \in Der(\hat{A},M)$ dönüşümü, $d \in Der(A,M)$ nin tek genişlemesi olsun. $F : \hat{A} \rightarrow M$ bir K-modül homomorfizması olsun ve her $(n, a) \in \hat{A}$ için

$$F((n, a)) = nm + f(a)$$

olarak tanımlanan bir K-modül homomorfizması olsun. σ' ve τ' dönüşümleri $\hat{A}$ nın iki otomorfizması olmak üzere, $\tau'|_A = \tau'$ ve $\sigma'|_A = \sigma$ olsun. Ayrıca bu otomorfizmalar, her $(n, a) \in \hat{A}$ için $\tau'((n, a)) = (n, \tau(a))$ ve $\sigma'((n, a)) = (n, \sigma(a))$ olarak tanımlansın. Buradan, her $(n_1, a_1), (n_2, a_2) \in \hat{A}$ için,

$$F((n_1, a_1)o(n_2, a_2)) = F((n_1n_2, n_1a_2 + n_2a_1 + a_1a_2))$$

elde edilir. F dönüşümünün tanımı kullanılarak,

$$n_1n_2\, m + n_1f(a_2) + n_2\, f(a_1) + f(a_1)\tau(a_2) + \sigma(a_1)d(a_2)$$

bulunur. Diğer bir deyişle,

$$n_1n_2\, m + n_1f(a_2) + n_2\, f(a_1) + f(a_1)\tau(a_2) + \sigma(a_1)d(a_2) + n_1d(a_2) - n_1d(a_2)$$

olur. Yani

$$n_2(n_1m + f(a_1)) + n_1(f - d)(a_2) + f(a_1)\tau(a_2) + \sigma(a_1)d(a_2) + n_1d(a_2)$$

dir. Hipotezden, yukarıdaki eşitlik

$$n_2(n_1m + f(a_1)) + n_1m\tau(a_2) + f(a_1)\tau(a_2) + \sigma(a_1)d(a_2) + n_1d(a_2)$$

olur. D dönüşümünün tanımı ve M ile $\hat{A}$ arasındaki işlem tanımı kullanılarak,

$$(n_1m + f(a_1)).(n_2, \tau(a_2)) + n_1\mathrm{D}((n_2, a_2)) + \sigma(a_1)\mathrm{D}((n_2, a_2))$$

bulunur. Buradan,

$$(n_1m + f(a_1)).(n_2, \tau(a_2)) + (n_1, \sigma(a_1)).\mathrm{D}((n_2, a_2)).$$

elde edilir. F' nin ve τ' nün tanımı bize,

$$\mathrm{F}((n_1, a_1)).\, \tau'((n_2, a_2)) + \sigma'((n_1, a_1)).\mathrm{D}((n_2, a_2))$$

ifadesini verir. Buna göre (F,D) $\in$ $\mathrm{BDer}^{(\sigma,\tau)}(\hat{A},\mathrm{M})$ dir ve $(\mathrm{F},\mathrm{D})|_{\mathrm{A}} = (f, d)$ olduğu açıktır.

Sonuç 6.2.1 A bir K-cebir, M bir A/K-bimodül ve $\hat{A}$ Y. Özellik 2.2.23 de tanımlandığı şekilde bir K-cebir olsun. (f, d) A dan M ye bir Brešar genelleştirilmiş Jordan (σ,τ)-türev ise, aşağıdakiler denktir:

(i) A dan M ye bir (f, d) Brešar genelleştirilmiş Jordan (σ,τ)-türevi, $\hat{A}$ dan M ye bir Brešar genelleştirilmiş Jordan (σ,τ)-türev olarak genişletilebilir.

(ii) A dan M ye bir f - d Brešar genelleştirilmiş Jordan τ-sol çarpan dönüşümü, $\hat{A}$ dan M ye Brešar genelleştirilmiş Jordan τ-sol çarpan dönüşümü olarak genişletilebilir.

(iii) $f - d = m_l\tau$ olacak şekilde bir $m \in$ M vardır.

Teorem 6.2.2 A bir K-cebir, M bir A/K-bimodül ve $\hat{A}$ Y. Özellik 2.2.23 de tanımlandığı şekilde bir K-cebir olsun. (f, d) A dan M ye bir Brešar genelleştirilmiş Lie (σ,τ)-türev ve (F,D), (f, d) dönüşümünün $\hat{A}$ dan M ye bir genişlemesi olsun. $f - d$, A dan M ye Lie (σ,τ)-sol çarpan dönüşümü, $\hat{A}$ dan M ye Lie (σ,τ) -sol çarpan dönüşümü olarak genişletilebilir.

İspat: (f, d) bir Brešar genelleştirilmiş Lie (σ,τ)-türev ve (f, d) dönüşümünün $\hat{A}$ dan M ye bir genişlemesi (F,D) olsun. $f - d$ nin A dan M ye Lie (σ,τ)-sol çarpan dönüşümü olduğunu kabul edelim. O zaman her $(n_1, a_1), (n_2, a_2) \in \hat{A}$ için

$$(F - D)[(n_1, a_1), (n_2, a_2)] = [- (F - D)((n_2, a_2)), (n_1, a_1)]$$

dir. Dolayısıyla $(F - D) \in \text{LieMul}^{(\sigma,\tau)}(\hat{A},M)$ olur. Ayrıca, $(F - D)|_A = f - d$ olduğu açıktır.

7. SONUÇ

Üçüncü bölümde, asal halkalarda polinom özdeşlikleri üzerinde türev çalışılarak, halkanın yapısı ile ilgili bazı sonuçlara ulaşılmıştır. Daha sonra bu sonuçlar, yarı-asal halkalara genişletilmeye çalışılmıştır.

Dördüncü bölümde, asal halkalarda Jordan çarpımlı genelleştirilmiş türevler ele alınmış, böylece asal halkalarda çok iyi bilinen bazı özelliklerin genelleştirilmiş türevlere kısmen genişletilebileceği gösterilmiştir. Genelleştirilmiş türev kavramı, hem sol çarpan, hem de türev dönüşümlerini kapsadığından, elde edilen sonuçlar daha önce bu konuda yapılmış olan çalışmaların bir genellemesidir.

Beşinci bölümde, asal halkaların sıfırdan farklı tek yanlı idealleri üzerindeki genelleştirilmiş türevli polinomlar konusunda çalışılarak, bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Son bölümün ilk kesiminde, A, K değişmeli halkası üzerinde bir cebir, σ ve τ, A cebirinin iki endomorfizması olmak üzere, τ-sol çarpan dönüşümü, Jordan τ-sol çarpan dönüşümü, Lie (σ,τ)-sol çarpan dönüşümü ve Brešar genelleştirilmiş Lie (σ,τ)-türev tanımları ilk kez verilmiştir. Ayrıca Hamaguchi' nin 2001 yılında yaptığı çalışmadan esinlenilerek, Brešar ve Nakajima anlamındaki genelleştirilmiş (σ,τ)-türevlerin kümeleri arasında bir izomorfizma olması için bir gerek ve yeter koşul verilmiştir. Daha sonra bu teoremin bir sonucu, genelleştirilmiş Jordan (σ,τ)-türevler için yapılmış, genelleştirilmiş Lie (σ,τ)-türevler için de benzer bir izomorfizma kurulmuştur. Son bölümün ikinci kesiminde, Brešar genelleştirilmiş (σ,τ)-türevlerin bir genişlemesi verilmiştir.

KAYNAKLAR

Albaş, E. and Argaç, N., 2004, Generalized derivations of prime rings, Algebra Coll. 11 (3), 399-410.

Argaç, N. and Albaş, E., 2002, On generalized (σ,τ)-derivations, Siberian Math. Journal, 43, 6, 977-984.

Ashraf, M. and Rehman, N., 2002, On commutativity of rings with derivations, Results in Math., 42, no: 1-2, 3-8.

Beidar, K. I., 1978, Rings of quotients of semiprime rings, Vestnik Moskov. Univ. Ser I Math. Meh. (Eng. Trans. Moskow Univ. Math. Bull.) 33, 36-42.

Beidar, K. I., Martindale III, W. S. and Mikhalev, A. V., 1996, Rings with generalized identities, Pure and Applied Math. , Dekker, New York.

Bell, H. E. and Kappe, L. C., 1989, Rings in which derivations satisfy certain algebraic conditions, Acta Math., Hungar, 53 (3-4): 339-346.

Bell, H. E. and Daif, M. N., 1995, On derivations and commutattivity in prime rings, Acta Math., Hungar, 66 (4): 337-343.

Brešar, M. and Vukman, J., 1990, On left derivations related mappings, Proc. Amer. Math. Soc., 110, 7-16.

Brešar, M., 1991, On the distance of the composition of two derivations to the generalized derivations, Glasgow Math., J., 33: 89-93.

KAYNAKLAR (devam)

Brešar, M., and Vukman, J., 1991, (θ,φ)-derivations, Glasnic Matematički, 26 (46) : 13-17.

Brešar, M., 1993, On skew-commuting mappings of rings, Bull. Austral. Math. Soc., 47: 291-296.

Brešar, M., 1993, Centralizing mappings and derivations in prime rings, J. Algebra, 156, 384 385.

Brešar, M., 1995, Functional identities of degree two, J. Algebra, 172: 690-720.

Brešar, M., 1995, On generalized biderivations and related maps, J. Algebra, 172, 764-787.

Carini, L. and Filippis, V., 2000, Commutators with power central values on a Lie ideals, pasific J. of Math., Vol.193, No.2, 269-278.

Chang, J. C., 1975, On fixed power central (α,β)-derivations, Bull. Of Inst. Math. Acad. Sinica., 15 (2): 163-178.

Chang, C.M. and Lee T. K., 1998, Annilihators of power values of derivations in prime rings, Comm. Algebra 26 (7), 2091-2113.

Chang, C.M., 2003, Power central values of derivations on multilinear polynomials, Taiwanese J. Math. Vol.2, 329-338.

KAYNAKLAR (devam)

Chuang, C. L., 1988, GPI's having coefficients in Utumi quotient rings, Proc. Amer. Math. Soc., 103 (3), 723-728.

Chuang, C. L. and Lee, T. K., 1996, Rings with annilihator conditions on multilinear polynomials, Chinese J. Math., 24 (2), 177-185.

Cusack, J. M., 1975, Jordan derivations on rings, Proc. Amer. Math. Soc., 53: 321-324.

Daif, M. N., and Bell, H. E. 1992, Remarks on derivations on semiprime rings, Internat. J. Math. And Math. Sci., 15: 205-206.

Ericson, J.S., Martindale III, W.S. and Osborn, J. M., 1975, Prime nonassociative algebras, Pacific J. Math., 60, 49-63.

Faith, C., 1967, Lecture on injective modules and quotient rings, Lecture Notes in Mathematics, 49, Springer Verlag, New York.

Filippis, V., 2000, On the annihilator of commutators with derivation in prime rings, Pendiconti Del Circolo Mat., Palermo, 49, 343-352.

Giambruno, A. and Herstein, I. N., 1981, Derivations with nilpotent values, Rend. Circ. Mat. Palermo, 30 (2), 199-206.

Hamaguchi, N., 2001, Generalized d-derivations of rings without unit elements, Scientiae math. Jap., 54, 1, 337-342.

KAYNAKLAR (devam)

Herstein, I. N., 1957, Jordan derivations of prime rings, Proc. Amer. Math. Soc., 8 : 1104-1110.

Herstein, I. N., 1969, Topics in ring theory, Univ. of Chicago III. and London.

Herstein, I. N., 1976, Rings with involution, Univ. of Chicago.

Herstein, I. N., 1979, A note on derivations II, Canad. Math. Bull., 22 (4) : 509-511.

Herstein, I. N., 1982, Derivations of prime rings having power central values, Algebraist's Homepage, Contemp. Math. 13, AMS, Provient, Rhode Island, 163-171.

Hungerford, T. W., 1974, Algebra, Holf, Rinehart and Wiston, Inc., Newyork, Chicago.

Hvala, B., 1998, Generalized derivations in rings, Comm. Algebra, 26 (4), 1147-1166.

Jacobson, N., 1975, PI-algebras, an introduction, Lecture Notes in Math., 441, Springer Verlag, New York.

Kharchenko, V. K., 1978, Differential identities of prime rings, Algebra and Logic, 17, 155-168.

KAYNAKLAR (devam)

Koshlukov, P., 1999, Matemática Contemporânea, 16, 137-186.

Lambek, J., 1966, Lecture on rings and modules, Blaisdell Waltham, MA.

Lanski, C., 1993, An Engel condition with derivation, Proc. Amer. Math. Soc., 118 (39), 731-734.

Lectures on rings and modules, Spring-Verlag, 1972, Berlin Heidelberg, New York.

Lee, P. H. and Lee, T. K., 1981, On derivations of prime rings, Chinese J. Math., 9 (2) : 107-110.

Lee, T. K., 1992, Semiprime rings with differential identities, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 20 (1), 27-38.

Lee, T.K., 1993, Derivations with invertible values on a multilineer polynomial, Proc. Amer. Math. Soc., 119, 1077-1083.

Lee, T. K., 1995, Left annilihators chacracterized by GPIs, Trans. Amer. Soc. 347, 3159-3165.

Lee, T. K., and Wong T. L., 1995, Derivations centralizing Lie ideals, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 23, 1-5.

KAYNAKLAR (devam)

Lee, T. K., 1996, Power reduction property for generalized identities of one-sided ideals, Algebra Colloq., 3, 19-24.

Lee, T. K., 1999, Generalized derivations of left faithful rings, Comm. Algebra, 27 (8), 4057-4073.

Lee, T. K., and Shiue, W. K., 2001, Identities with generalized derivations, Comm. Algebra, 29 (10), 4435-4450.

Leron, U., 1975, Nil and power central polynomials in rings, Trans. Amer. Math. Soc., 202, 297-103.

Martindale III, W. S., 1969, Prime rings satisfying a generalized polynomial identity, J. Algebra, 12, 576-584.

Nakajima, A., 1999, On categorical properties of generalized derivations, Scientiae Mathematicae, 2 : 345-352.

Nakajima, A., 2000a, Generalized Jordan derivations, International Conference on ring Theory, Birkhäuser.

Nakajima, A., 2000b, On generalized higher derivations, Turkish J. Math., 24: 295-311.

Passman, D., 1989, Infinite crossed products, Accademic Pres, San Diego.

KAYNAKLAR (devam)

Posner, E. C., 1957, Derivations in prime rings, Proc. Amer. Soc. 8, 1093-1100.

Rehman, N., 2002, On commutatitivity of rings with generalized derivations, Math. J. Okayama Univ., Vol. 44, 43-50.

Ribenboim, P., 1980, High order derivations of modules, Portgaliae Math., 39 : 381-397.

Rowen, L. , 1976, Polynomial identities in ring theory, Pure and Applied Math..

Smiley, M. F., 1975, Jordan homomorphisms onto prime rings, Proc. Amer. Math. Soc., 8 : 426-429.

Vonessen, N., 1994, Rings with polynomial identities an elementary introduction, Math. Contemp. 7, 199-231.

Wei, W., 2004, Generalized derivations with nilpotent values on semiprime rings, Acta Math. Sinica, 20 (3), 453-462.

Wong, T. L., 1996, Derivations with power central values on multilinear polynomials, Algebra Colloq., 3(4), 369-378.

Zalar, B., 1991, On centralizers of semiprime rings, Comment. Math. Univ. Carolinae 32, 609-614.

ÖZGEÇMİŞ

1975 yılında Manisa' nın Akhisar ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Akhisar' da tamamladı. 1992 yılında girdiği Ege Üniversitesi Matematik Bölümü' nden 1996 yılında mezun oldu. Aynı yıl Adnan Menderes Üniversitesi' nde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı. 2001 yılından itibaren Ege Üniversitesi' nde doktora yapmaktadır.