GRUPLAR İÇİN 3-TİPTEN CEBİRSEL MODELLER

Enver Önder USLU

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

2005

ALGEBRAIC MODELS FOR 3-TYPE IN GROUPS

Enver Önder USLU

Department of Mathematics

The Thesis for Ph Degree

2005

GRUPLAR İÇİN
3-TİPTEN CEBİRSEL MODELLER

Enver Önder USLU

Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında
Doktora Tezi
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman:
Prof.Dr.MAHMUT KOÇAK

Ocak 2005

Enver Önder USLU'nun Doktora tezi olarak hazırladığı

"Gruplar İçin 3-Tipten Cebirsel Modeller"

başlıklı bu çalışma jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye: Prof. Dr. Mahmut KOÇAK

Üye: Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ

Üye: Doç. Dr. Murat ALP

Üye: Yrd. Doç. Dr. Ummuhan EGE

Üye: Yrd. Doç. Dr. İ.İlker AKÇA

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu′ nun .... gün ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. M. Selami KILIÇKAYA

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde simplisel gruplar ve hiper çaprazlanmış kompleks çiftleri ile ilgili temel bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde gruplar üzerinde 3-tipten cebirsel modeller için 3-çaprazlanmış modüller tanımlanmıştır. Üçüncü bölüm de simplisel gruplarla 3-çaprazlanmış modüller kategorilerinin ve 3. boyuttan kısıtlanmış simplisel gruplar ile çapraz lanmış 3-küp kategorilerinin denkliği verilmiştir. Son bölümde ise adım adım inşaalar yardımıyla (tamamen) serbest 3-çaprazlanmış modüller tanımlanmıştır.

SUMMARY

This thesis consist of four chapters. In the first chapter some basic properties of simplicial groups and hyper crossed complex pairings are given. In the second chapter, we define 3-crossed modules of groups which is an algebraic model in 3-type. In the third chapter, an equivalance between simplicial groups and 3-crossed modules and an equivalance between 3-dimensional truncated simlicial groups and 3-crossed cubes categories have been given. In the last chapter, (totally) free 3-crossed modules are defined by using step by step construction.

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmamın her aşamasında büyük yardımlarını ve desteklerini gördüğüm hocalarım;

Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ

ve

Prof. Dr. Mahmut KOÇAK'a

teşekkürlerimi sunarım.

Eskişehir, 2005

İçindekiler

Bölüm 0

Giriş

Simplisel gruplar ilk defa D.M.Kan tarafından 1950 lerde [28] de çalışılmıştır. Daha sonra Moore, Milnor ve Dold,

(i) bu objelerin, iyi yapılandırılmış bir homotopi teoriye sahip olduğunu,

(ii) bağlantılı uzayların tüm homotopi tipleri için bir cebirsel model olduğunu,

(iii) değişmeli simplisel grupların, zincir komplekslerine denk bir araç olduğunu ve böylece homolojik cebire uygulanabilir olduğunu

(iv) düşük boyutlarda hesaplamaların mümkün olduğunu, örneğin bir simplisel grubun seçilen bir CW-tabanı ile birlikte serbest olduğunu göster mişlerdir.

Ayrıca boyutu n den büyük olan elemanları birim elemandan oluşan simplisel grupların Moore kompleksi, simplisel grupların n tipleri için modeldir.

J.H.C.Whitehead [48] de $2-$ tiplerin bir cebirsel modeli olan çaprazlanmış modülleri tanımlamış ve bu tanımlama ışığında Conduché [18] de, $2-$kısıtlanmış simplisel grubun Moore kompleksinin bazı özelliklerini ve Peiffer özdeşliklerini kullanarak, $3-$tiplerin bir cebirsel modeli olan $2-$çaprazlanmış modülleri tanımlamıştır.

Benzer çalışmalara örnek olarak Loday [30] verilebilir. Loday burada $2-$tipler için Maclane ve Whitehead tarafından [49] de verilen yapının bir genellemesi olan cat$^n-$grupları tanımlamıştır. cat$^n-$gruplar G.J. Ellis ve R. Steiner tarafından [23] de tanımlanan çaprazlanmış $n-$küpler kategorisine denk bir kategori oluşturur. T.Porter [43] de simplisel gruplar ve ç.aprazlanmış $n-$küplerin (dolayısıyla cat$^n-$ grupların) $n-$tiplerini incelemiş ve simplisel gruplar kategorisi ile çaprazlanmış $n-$küpler kategorisinin denkliğini göster miştir.

Yine benzer çalışmalar doğrultusunda cebir durumu için [5] de ve grup durumu için [39] de $2-$çaprazlanmış modüller kategorisi ile simplisel gruplar kategorisi arasındaki denklik gösterilmiştir.

D.M.Kan [29] de serbest simplisel grupları, tanımladığı $CW-$tabanlar yardımıyla inşa etmiştir. Serbest çaprazlanmış modüller ise ilk olarak Whitehead tarafından [48] de tanımlanmış ve bu bağlamda Z. Arvasi ve T. Porter tarafından [3] de değişmeli cebirler üzerinde ve A.Mutlu ve T. Porter [38] de gruplar üzerinde (tamamen) serbest $2-$çaprazlanmış modülleri tanımlamıştır. Fakat serbest $2-$çaprazlanmış modüllerin inşaası, serbest çaprazlanmış modül lerin inşaasından daha zordur. Cebir durumu için Z. Arvasi ve T.Porter [3] de inşaa için Andre nin [1] de tanımladığı adım-adım inşaaları ve grup durumu için A.Mutlu, T.Porter [38] de inşaa için D.M.Kan ın [29] de tanımladığı $CW-$tabanları kullanmıştır.

0.1 Tezin Yapısı

Bölüm 1 de öncelikle simplisel grupların ve homotopi gruplarının bazı genel özellikleri verilecektir. Daha sonra Carrasco'nun [16] de tanımladığı hiper çaprazlanmış kompleks çiftleri yardımıyla, ilk olarak değişmeli cebirler için Z.Arvasi'nin [4] de ve daha sonra bu çalışma yardımıyla gruplar için A.Mutlu nun [37] de incelediği simplisel gruplarda yüksek mertebeden Peiffer elemanlarının özellikleri ile ilgili kısa bir özet verilmiştir. Bu özet verilirken tezin 2, 3 ve 4. bölümlerindeki tanımalamalar ve denklikler için gerekli bilgiler dikkate alınmıştır.

İkinci bölümde, ilk olarak bağlantılı $3-$tipler için cebirsel model olan $3-$çaprazlanmış modül kavramı tanımlanmıştır. Bu tanımlama Carrasco [16] ve Conduché [18] de verilen bazı sonuçlar kullanılarak yapılmıştır. Bu tanımlamanın ardından tanım içinde geçen bazı Peiffer dönüşümlerinin belli bir şart altında çaprazlanmış kare yapısı oluşturduğu gösterilmiş ve Ellis [21] de tanımlanan universal çaprazlanmış $3-$küp tanımı yardımıyla, verilen bir $3-$çaprazlanmış modülden bir çapraz-lanmış $3-$küp elde edilmiştir. Böylece $3-$çaprazlanmış modüller kategorisi, $\mathfrak{X}_3\mathfrak{Mod}$, dan çaprazlanmış $n-$küpler kategorisi, $\mathbf{Crs^n}$, ye bir funktor elde edilmiştir. Son olarak ise T.Porter tarafından [43] de genel n durumu için tanımlanan $(\mathfrak{M}_n(G))$ yapısını özelleşti rerek $n = 3$ durumu için $(\mathfrak{M}_3(G))$ ayrıntılı olarak incelenmiş ve böylece bir $3-$kısıtlanmış simplisel gruptan bir çaprazlanmış $3-$küp elde edilmiştir. Bu işlemler yapılırken özellikle A.Mutlu [37] den referans alınarak birinci bölümde verilen $n = 3$ durumu için $F_{\alpha,\beta}$ elemanlarının d_4 altındaki görüntüleri kullanılmıştır.

3. bölümde, değişmeli cebirler için Z. Arvasi [4] de ve gruplar için A.Mutlu nun [37] de tanımladığı $2-$kısıtlanmış simplisel gruplar kategorisi ile $2-$çaprazlanmış modüller kategorisi arasındaki doğal denkliğe benzer şekilde $3-$kısıtlanmış simplisel gruplar kategorisi ile $3-$çaprazlanmış modüller kategorisinin doğal denkliği verilmiştir.

Son bölümde ise (tamamen) serbest $3-$çaprazlanmış modül kavramı tanımlanmış ve serbest $2-$çaprazlanmış modüller için A.Mutlu'nun [38] de incelendiği gibi D.M.Kan'ın [29] de tanımladığı $CW-$tabanlar kavramı kullanılarak (tamamen) serbest $3-$çaprazlanmış modüllerin inşaası verilmiş ve son olarak $k-$iskeletin $n-$tiplerine nazar edilmiştir. Burada, A.Mutlu'nun [38] de $\mathbf{F}^{(2)}$ $2-$iskeleti için yaptığı çalışmanın bir üst boyutunda benzer yol kullanılarak $\mathbf{F}^{(3)}$, $3-$iskeletinin 0, 1, 2 ve 3. homotopi modülleri incelenmiştir.

Bölüm 1

Temel Kavramalar

1.1 Giriş

Bu bölümde ilk olarak tüm bağlantılı homotopi tipleri için cebirsel model teşkil eden simplisel gruplar kategorisi, **SimpGrp,** incelenecektir. Daha sonra simplisel objelerin ve P.Carrasco$'$nun [16] de tanımladığı yüksek mertebeden Peiffer elemanları ile hiperçaprazlanmış kompleks çiftlerinin bazı temel özellikleri verilecektir. Özellikle bölüm sonunda verilen tablo yardımıyla ikinci bölümde $3-$çaprazlanmış modül kavaramı tanımlanacaktır.

1.2 Simplisel Gruplar

Bu kısımda simplisel gruplar ve homotopi modülleri ile ilgili bilinen birkaç tanımla beraber bazı temel bilgiler verilecektir. Ayrıntılı bilgi için [39] dan edinilebilir.

Tanım 1.2.1 $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *grupların bir ailesi olsun.*

$$\begin{array}{rcccl} d_i^n & : & G_n & \longrightarrow & G_{n-1} \qquad 0 \leq i \leq n \neq 0, \\ s_i^n & : & G_n & \longrightarrow & G_{n+1} \qquad 0 \leq i \leq n, \end{array}$$

grup homomorfizmleri olmak üzere

$$\begin{array}{llcll}
1. & d_i^{n-1}d_j^n & = & d_{j-1}^{n-1}d_i^n & 0 \leq i < j \leq n \ \ ise \\
2. & s_i^{n+1}s_j^n & = & s_{j+1}^{n+1}s_i^n & 0 \leq i \leq j \leq n \ \ ise \\
3. & d_i^{n+1}s_j^n & = & s_{j-1}^{n-1}d_i^n & 0 \leq i < j \leq n \ \ ise \\
4. & d_i^{n+1}s_j^n & = & id & i = j \ ya \ da \ i = j+1 \ \ ise \\
5. & d_i^{n+1}s_j^n & = & s_j^{n-1}d_{i-1}^n & 0 \leq j < i-1 \leq n \ \ ise
\end{array}$$

*özdeşlikleri sağlanıyorsa $((G_n)_{n\in N}, d_i, s_i)$ üçlüsüne bir **simplisel grup** denir ve kısaca* **G** *ile gösterilir. d_i, s_i homomorfizmlerine sırasıyla **yüzey** ve **dejenere** operatörleri denir.*

Uygulamadaki kolaylığı açısından yukarıdaki aksiyomlardan elde edilen aşağıdaki eşitlikler daha sık kullanılır.

$$\begin{array}{llcll}
1. & d_id_j & = & d_jd_{i+1} & 0 \leq j \leq i \leq n \ \text{ ise} \\
2. & s_is_j & = & s_js_{i-1} & 0 \leq j < i \leq n \ \text{ ise} \\
3. & s_id_j & = & d_js_{i+1} & j \leq i \ \text{ ise} \\
4. & s_id_j & = & d_{j+1}s_i & i > j \ \text{ ise}
\end{array}$$

Bu eşitlikler standarttır ve detaylı bilgi [19],[20],[33] de bulunabilir.

Tanım 1.2.2 **G** *bir simplisel grup olsun. $x \in G_n$ elemanlarına **n-boyutlu simpleks** denir ve bazı y ler için $x = s_i(y)$ oluyorsa bu x simpleksine bir **dejenere simpleks** denir.*

Tanım 1.2.3 *Bütün d_i^n yüzey operatörleri ve bütün s_i^n dejenere operatörleri ile birleşmeli olan yani*

$$d_if_n = f_{n-1}d_i, \qquad f_ns_i = s_if_{n-1}.$$

şartını sağlayan $f_n : G_n \longrightarrow F_n$ grup homomorfizmlerinin bir f kümesine **G** *ve* **F** *simplisel grupları arasında bir **homomorfizm** denir ve*

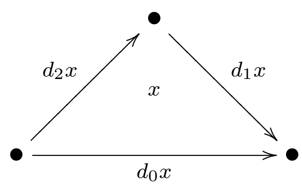
$$f : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{F}$$

şeklinde gösterilir. Böylece $\mathfrak{SimpGrp}$ *ile göstereceğimiz simplisel gruplar kategorisi tanımlanmış olur.*

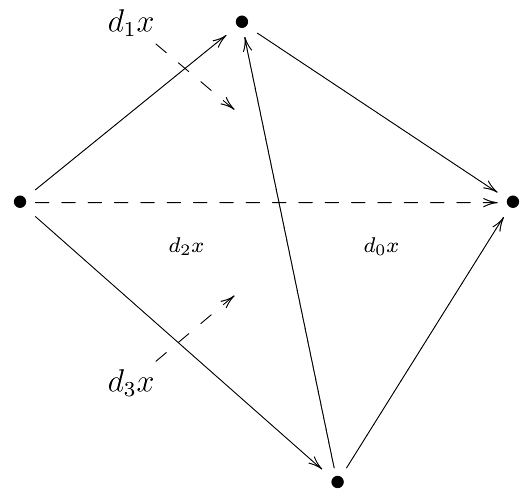
Bu tanımın düşük boyutlar için bir geometrik yorumu şu şekilde yapılabilir: $n = 0$ için bir 0-boyutlu simpleks açık şekilde bir $x \in G_0$ noktasıdır. $x \in G_1$ için 1-boyutlu simpleks,

$$d_1x \bullet \xrightarrow{\quad x \quad} \bullet\, d_0x$$

2-boyutlu simpleks üçgendir: $x \in G_2$ için



ve 3-boyutlu simpleks bir dörtyüzlüdür:



Tanım 1.2.4 *$fd_0^1 = fd_1^1 : G_1 \longrightarrow G$ ve $f = d_0^0 : G_0 \longrightarrow G$ örten grup homomorfizması ise $\mathbf{K}(G,0)$ sabit simplisel grubu ile birlikte bu f fonksiyonuna* **G *simplisel grubunun artırılmışı*** *denir. Diğer bir değişle* **G** *simplisel grubunun artırılmışı*

$$\mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{K}(G,0)$$

şeklinde bir fonksiyondur. $n > 0$ *için* $H_n(\mathbf{G}) \cong 1$ *ve* $H_0(\mathbf{G}) \cong G$ *ise artırılmış* $\mathbf{G}$ *simplisel grubuna* ***devirli simplisel grup*** *denir.*

1.2.1 Bir Simplisel Grubun Moore Kompleksi ve Homotopi Modülü

Tanım 1.2.5 $\mathbf{G}$ *bir simplisel grup olsun.*

$$(\mathbf{NG})_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} \textit{Çekd}_i^n$$

ve her $n \geq 0$ *için* $\partial_n : NG_n \longrightarrow NG_{n-1}$ *dönüşümü,* $d_n^n : G_n \to G_{n-1}$ *dönüşümünün* NG_n *kümesine kısıtlanışı olmak üzere* $(\mathbf{NG}, \partial)$ *zincir kompleksine* $\mathbf{G}$ *simplisel grubunun* ***Moore kompleksi*** *denir.*

$\mathbf{G}$ bir simplisel grup olsun. $\mathbf{G}$ nin Moore kompleksinin n. homolojisine $\mathbf{G}$ nin n. homotopi modülü denir ve $\pi_n(\mathbf{G})$, ile gösterilir. Yani

$$\begin{aligned} \pi_n(\mathbf{G}) &\cong H_n(\mathbf{NG}, \partial) \\ &\cong \bigcap_{i=0}^{n} \text{Çekd}_i^n / d_{n+1}^{n+1}\left(\text{Çekd}_i^{n+1}\right). \end{aligned}$$

dir.

$\mathbf{NG}$ ve $\pi_n(\mathbf{G})$ nin geometrik yorumu şu şekilde yapılabilir: $n = 1$, $\omega \in NG_1$ için

$$\partial\omega \bullet \xrightarrow{\ \omega\ } \bullet\ 0$$

ve $w \in NG_2$

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dr, "0"] & \\ \bullet \arrow[ur, "\partial\omega"] \arrow[rr, "0"'] & \omega & \bullet \end{tikzcd}$$

şeklinde resmedilebilir.

Not 1.2.6 *Eğer $w \in NG_2$,*

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dr, "0"] & \\ \bullet \arrow[ur, "0"] \arrow[rr, "0"'] \arrow[rr, phantom, bend left=40, "\omega"] & & \bullet \end{tikzcd}$$

şeklinde ise $w \in$Çek∂ içindedir. Eğer w nin 3. yüzeyi hariç diğer bütün yüzleri de sıfır olacak şekilde bir x 3-simpleksi varsa x, $\pi_2(\mathbf{G})$ nin aşikar (trivial) elemanını verir.

1.2.2 Kısıtlanmış Simplisel Gruplar

Tanım 1.2.7 **G** *simplisel grubunda mertebesinin boyutu $> k$ olan G_n elemanlarını yok sayarak elde edilen komplekse* **G** *simplisel grubunun bir k-kısıtlanmış simplisel grubu denir ve $\mathbf{tr_k G}$ ile gösterilir. k-kısıtlanmış simplisel grupların kategorisi $\mathbf{Tr_k}\mathfrak{SimpGrp}$ ile gösterilir.*

Simplisel gruplar kategorisinden k-kısıtlanmış simplisel gruplar kategorisine

$$\mathbf{tr_k} : \mathfrak{SimpGrp} \longrightarrow \mathbf{Tr_k}\mathfrak{SimpGrp}$$

kısıtlama funktoru vardır. Bu funktorun *k-koiskelet funktor* olarak adlandırılan bir

$$\mathbf{cosk_k} : \mathbf{Tr_k}\mathfrak{SimpGrp} \longrightarrow \mathfrak{SimpGrp}$$

sağ ek (adjoint) funktoru ve *k-iskelet funktor* olarak adlandırılan bir

$$\mathbf{sk_k} : \mathbf{Tr_k}\mathfrak{SimpGrp} \longrightarrow \mathfrak{SimpGrp},$$

sol ek funktoru vardır. İskelet funktor hakkındaki detaylı bilgi [20] den edinilebilir.

Teorem 1.2.8 *[18]* **G** *bir simplisel grup olsun. G nin koiskeleti,* $cosk_k(tr_k(\mathbf{G}))$, *nin Moore kompleksi* $k+1$ *uzunluğundadır. Yani*

$$i > k+1 \text{ için } N(\mathbf{cosk_k}(\mathbf{tr_k}(\mathbf{G})))_i = 0$$

dır ve $k+1$ *den küçük boyutlarda* **G** *nin Moore kompleksi ile özdeştir. Dahası*

$$N(\mathbf{cosk_k}(\mathbf{tr_k}(\mathbf{G})))_{k+1} = \text{Çek}(\partial_k : NG_k \longrightarrow NG_{k-1})$$

ve

$$\partial_{k+1} : N(\mathbf{cosk_k}(\mathbf{tr_k}(\mathbf{G})))_{k+1} \longrightarrow N(\mathbf{cosk_k}(\mathbf{tr_k}(\mathbf{G})))_k = NG_k$$

morfizmi birebirdir.

1.3 Yüksek Mertebeden Peiffer Elemanları

Bu kısım özellikle [39] referans alınarak hazırlanmıştır.

G, bir simplisel grup ve **NG**, **G** nin Moore kompleksi olsun. $n > 1$ için D_n, n boyutlu dejenere elemanları tarafından üretilen normal alt grup olsun. Bu kısımda temel hedef eğer $G_n \neq D_n$ ise her $n > 1$ için

$$\partial_n(NG_n) = \partial_n(N_n)$$

olacak şekilde G_n içinde, tanımlayacağımız elemanların kümesi tarafından üretilen bir N_n normal alt grubunun varlığını göstermektir.

Eğer $n = 2, 3{,}4$ ise bu durumda $\varnothing \neq I\ ,\ j \subset [n-1] = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ $I \cup J = [n-1]$ ve

$$K_I = \bigcap_{i \in I} \text{Çek} d_i \text{ ve } K_J = \bigcap_{j \in J} \text{Çek} d_j$$

olmak üzere **G** simplisel grubunun Moore kompleksinin n. elemanının ∂_n altındaki görüntüsü

$$\partial_n(NG_n) = \prod_{I,J} [K_I, K_J]$$

formunda verilebilir.

Genel anlamda asıl ulaşılmak istenen hedef $4 \geq n > 1$ için

$$\prod_{I,J} [K_I, K_J] \subseteq \partial_n(NG_n)$$

ifadesinin ve tersinin doğru olduğunu göstermektir.

1.3.1 Tanım ve Notasyon

İlk olarak P. Carrasca ,A.M. Cegarra [17] den aşağıdaki notasyon ve terminolojiyi hatırlayalım.

$$[n] = \{0 < 1 < \ldots < n\} \text{ sıralı kümesi için } \alpha_i^n : [n+1] \to [n]$$

$$\alpha_i^n(j) = \begin{cases} j & , \ j \leq i \quad \text{ise} \\ j-1 & , \ j > i \quad \text{ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan artan, örten fonksiyon olsun.

$S(n, n-r)$, $[n]$ den $[n-r]$ ye monoton artan örten bütün fonksiyonların kümesi olsun. Bu küme α_i^n lerin çeşitli bileşimleriyle üretilebilir. Bu üretilen fonksiyonların bileşimi aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$\alpha_j \alpha_i = \alpha_{i-1} \alpha_j \qquad j < i$$

$0 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq n-1$ olmak üzere bu eşitlik, her $\alpha \in S(n, n-r)$ elemanının

$$\alpha = \alpha_{i_1} \circ \alpha_{i_2} \circ \cdots \circ \alpha_{i_r}$$

şeklinde bir tek açılımının olmasını gerektirir. Burada i_k indeksleri

$$\{i_1, \ldots, i_r\} = \{i : \alpha(i) = \alpha(i+1)\}$$

olacak şekilde $[n]$ nin elemanlarıdır. Böylece $S(n, n-r)$,

$$\{(i_r, \ldots, i_1) : 0 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq n-1\}$$

kümesidir. Özellikle $[n]$ üzerinde birim fonksiyon ile tanımlanan $S(n, n)$ nin tek elemanı, ϕ_n ile gösterilen boş $0 - tuple$, ( ) a karşılık gelir. Benzer olarak $S(n, 0)$ ın bir tek elemanı vardır ve $(n-1, n-2, \ldots, 0)$ dır. Her $n \geq 0$ için

$$S(n) = \bigcup_{0 \leq r \leq n} S(n, n-r)$$

olsun. Eğer $i_1 = j_1, \ldots, i_k = j_k$ fakat $i_{k+1} > j_{k+1}$ ise yada $i_1 = j_1, \ldots, i_r = j_r$ ve $r < s$ ise $\alpha = (i_r, \ldots i_1) < \beta = (j_s, \ldots j_1)$, $S(n)$ nin içindedir denir. Bu $S(n)$ yi bir sıralı küme yapar. Örneğin $S(2)$, $S(3)$ ve $S(4)$ deki sıra

$$\begin{aligned}
S(2) &= \{\phi_2 < (1) < (0) < (1,0)\} \\
S(3) &= \{\phi_3 < (2) < (1) < (2,1) < (0) < (2,0) < (1,0) < (2,1,0)\} \\
S(4) &= \{\phi_4 < (3) < (2) < (3,2) < (1) < (3,1) < (2,1) < (3,2,1) < (0) < (3,0) < (2,0) \\
&< (3,2,0) < (1,0) < (3,1,0) < (2,1,0) < (3,2,1,0)\}
\end{aligned}$$

şeklindedir. $\alpha, \beta \in S(n)$ ise $\alpha \cap \beta$, hem α hemde β ya ait olan indekslerin kümesini belirtir.

1.3.2 Bir Simplisel Grubun Semidirect Çarpımlar Şeklinde Gösterimi

Buradaki temel fikir Conduche [18] de bulunabilir. Bir simplisel grup durumu için ayrıntılı inceleme Carasco ve Cegarra [17] de verilmiştir. Bu yapının grup durumu ise Carrasco'nun tezinde [16] mevcuttur.

Tanım 1.3.1 *M bir grup ve $n \geq 2$ olmak üzere $M_1, M_2, \ldots, M_n$, M nin alt grupları olsun. Aşağıdaki koşulların sağlanması durumunda M grubuna $M_1, M_2, \ldots M_n$ alt gruplarının bir $n-semidirect$ çarpımı denir ve $M = M_1 \rtimes M_2 \rtimes \ldots \rtimes M_n$ şeklinde gösterilir.*

(i) $M_1 \cdot \ldots \cdot M_s$ $1 \leq s \leq n$ için M nin bir altgrubudur.

(ii) $M_1 \cdot \ldots \cdot M_n = M$,

(iii) $(M_1 \cdot \ldots \cdot M_s) \cap M_t = 1 \quad 1 \leq s < t \leq n$ *için,*

$m_i \in M_i$ *olmak üzere herhangi bir eleman, tek türlü olarak* $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$ *şeklinde ifade edilebilir. Ayrıntılı bilgi için [17] ye bakınız.*

Aşağıda $n - semidirect$ çarpım gruplarının bir simplisel grup içinde nasıl ortaya çıktığını göstereceğiz.

Teorem 1.3.2 *[16]***G** *bir simplisel grup olsun. Bu durumda* G_n

$$G_n \cong Çek\ d_n^n \rtimes S_{n-1}^{n-1}(G_{n-1})$$

semidirect çarpım biçiminde ifade edilebilir.

İspat: İzomorfizm aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

$$\begin{array}{rcl} \theta \ : \ G_n & \rightarrow & \text{Çek } d_n^n \rtimes S_{n-1}^{n-1}(G_{n-1}) \\ g & \rightarrow & (g s_{n-1} d_n g^{-1}, s_{n-1} d_n g) \end{array}$$

□

G_n ile Çek $d_n \rtimes S_{n-1} G_{n-1}$ arasında izomorfizm var olduğundan bu metodu herbir G_n için, Moore kompleksteki dejenere terimlerin bir çok katlı semidirect çarpımı şeklinde elde edilene kadar tekrarlayabiliriz. Gerçekten, K,

$$K_n = \text{Çek} d_{n+1}^{n+1}, \quad d_i^n = d_i^{n+1} |_{\text{Çek} d_{n+1}^{n+1}} \quad ve \quad s_i^n = s_i^{n+1} |_{\text{Çek} d_{n+1}^{n+1}} .$$

şeklinde tanımlanan simplisel grup olsun. Her $i \leq n-1$ için $d_{n-1}^{n-1} d_i^n = d_i^{n-1} d_n^n$ olduğundan Çek d_n^n bütün d_i^n , $i \leq n-1$ morfizmleri tarafından Çek d_{n-1}^{n-1} içine resmedilir. Dahası $i \leq n-2$ için $d_{n+1}^{n+1} s_i^n = s_i^{n-1} d_n^n$ olduğundan s_i^{n+1}, Çek d_n^n yi Çek d_{n+1}^{n+1} içine resmeder. Teorem 1.3.2.gereğince

$$\begin{array}{rcl} G_n & \cong & \text{Çek} d_n \rtimes s_{n-1} G_{n-1} \\ & = & \text{Çek} d_n \rtimes s_{n-1}(\text{Çek} d_{n-1} \rtimes s_{n-2} G_{n-1}) \\ & = & K_{n-1} \rtimes \ (s_{n-1} \text{Çek} d_{n-1} \rtimes s_{n-1} s_{n-2} G_{n-2}). \end{array}$$

elde edilir.

K bir simplisel grup olduğundan aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\begin{aligned} \text{Ç}ekd_n = K_{n-1} &\cong \text{Ç}ekd^{K}_{n-1} \rtimes s_{n-2}K_{n-2} \\ &= (\text{Ç}ekd_{n-1} \cap \text{Ç}ekd_n) \rtimes s_{n-2}\text{Ç}ekd_{n-1} \end{aligned}$$

ve buradan

$$G_n = ((\text{Ç}ekd^{n}_{n-1} \cap \text{Ç}ekd^{n}_{n}) \rtimes s_{n-2}(\text{Ç}ekd^{n-1}_{n-1})) \rtimes (s_{n-1}(\text{Ç}ekd^{n-1}_{n-1}) \rtimes s_{n-1}s_{n-2}(G_{n-2})).$$

elde edilir. Buradan G_n aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

Teorem 1.3.3 *[16]Eğer* **G** *bir simplisel grup ise herhangi* $n \geq 0$ *için*

$$\begin{aligned} G_n \cong\ & (\ldots(NG_n \rtimes s_{n-1}NG_{n-1}) \rtimes \ldots \rtimes s_{n-2}\ldots s_0NG_1) \rtimes \\ & (\ldots(s_{n-2}NG_{n-1} \rtimes s_{n-1}s_{n-2}NG_{n-1}) \rtimes \ldots \rtimes s_{n-1}s_{n-2}\ldots s_0NG_0). \end{aligned}$$

dir.

Bu çok katlı semidirect çarpımdaki terimlerin sırası ve parantezler

$$\begin{aligned} G_1 &\cong NG_1 \rtimes s_0NG_0 \\ G_2 &\cong (NG_2 \rtimes s_1NG_1) \rtimes (s_0NG_1 \rtimes s_1s_0NG_0) \\ G_3 &\cong ((NG_3 \rtimes s_2NG_2) \rtimes (s_1NG_2 \rtimes s_2s_1NG_1)) \rtimes \\ &\qquad ((s_0NG_2 \rtimes s_2s_0NG_1) \rtimes (s_1s_0NG_1 \rtimes s_2s_1s_0NG_0)). \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} G_4 \cong\ & (((NG_4 \rtimes s_3NG_3) \rtimes (s_2NG_3 \rtimes s_3s_2NG_2)) \rtimes \\ & ((s_1NG_3 \rtimes s_3s_1NG_2) \rtimes (s_2s_1NG_2 \rtimes s_3s_2s_1NG_1))) \rtimes \\ & s_0\ (G_3 \text{ ün ayrışımı}) \end{aligned}$$

dizisi tarafından üretilir.

Dikkat edilirse $\alpha = (i_r, ..., i_1) \in S(n)$ e benzer terim $S_\alpha(NG_{n-\sharp\alpha}) = S_{i_r...i_1}(NG_{n-\sharp\alpha})$ dir. Burada $\sharp\alpha = r$ dir.

Buradan herhangi bir $x \in G_n$ elemanı $y \in NG_n$ ve $x_\alpha \in NG_{n-\sharp\alpha}$ olmak üzere

$$x = y \prod_{\alpha \in S(n)} s_0(x_0)$$

formunda yazılabilir.

1.4 Hiperçaprazlanmış Kompleks Çiftleri

Bu kısımda verilen bilgiler [37] den alınmıştır.

Aşağıda bir **G** simplisel grubunun G_n elemanının N_n normal alt grubunu tanımlayacağız. Bu bölümde tanımlanan bilineer dönüşümler P.Carrasco [16] dan alınmıştır. $\alpha \cap \beta = \emptyset$ olmak üzere $S(n)$ in (α, β) ikili elemanlarından oluşan $P(n)$ kümesini tanımlayalım. $\alpha = (i_r, \ldots, i_1), \beta = (j_s, ..., j_1) \in S(n)$ dir. İhtiyacımız olan çiftler,

$$\{F_{\alpha,\beta} : NG_{n-\#\alpha} \otimes NG_{n-\#\beta} \longrightarrow NG_n : (\alpha, \beta) \in P(n), \quad n \geq 0\}$$

kompozisyonu olarak

$$\begin{tikzcd}
NG_{n-\#\alpha} \times NG_{n-\#\beta} \arrow[r, "F_{\alpha,\beta}"] \arrow[d, "s_\alpha \times s_\beta"'] & NG_n \\
G_n \times G_n \arrow[r, "\mu"] & G_n \arrow[u, "p"']
\end{tikzcd}$$

diyagramı ile verilir. Burada

$$s_\alpha = s_{i_r} \ldots s_{i_1} : NG_{n-\#\beta} \longrightarrow G_n \ , \quad s_\beta = s_{j_s} \ldots s_{j_1} : NG_{n-\#\beta} \longrightarrow G_n,$$

$$j = 0, 1, \ldots n-1 \text{ için } p_j(z) = (z)s_jd_j(z)^{-1}$$

olmak üzere $p : G_n \rightarrow NG_n$, dönüşümü izdüşüm dönüşümlerinin $p = p_{n-1} \ldots p_0$, kompozisyonu olarak tanımlanır, $\mu : G_n \times G_n \rightarrow G_n$ dönüşümü komutatör dönüşümüdür, ve $\#\alpha$, α kümesinin eleman sayısını temsil etmektedir. Böylece

$$\begin{aligned} F_{\alpha,\beta}(x_\alpha, y_\beta) &= p\mu(s_\alpha \times s_\beta)(x_\alpha, y_\beta) \\ &= p(s_\alpha(x_\alpha)s_\beta(y_\beta)) \end{aligned}$$

dir.

Şimdi, $x_\alpha \in NG_{n-\#\beta}$ ve $y_\beta \in NG_{n-\#\beta}$ olmak üzere

$$F_{\alpha,\beta}(x_\alpha, y_\beta)$$

formundaki elemanlar tarafından üretilen N_n normal alt grubunu tanımlayalım. Bu normal alt grubun yapısını görmek için $n = 2$ ve $n = 3$ için N_n normal altgrubunu tanımlayalım.

Örnek 1.4.1 *$n = 2$ için, , $\alpha = (1)$, $\beta = (0)$ ve $x, y \in NG_1 =$Çekd_0 olduğunu kabul edelim Buradan N_2 nin üreteç elemanı*

$$\begin{aligned} F_{(1)(0)}(x, y) &= p_1 p_0 [s_0 x, s_1 y] \\ &= p_1 [s_0 x, s_1 y] \\ &= [s_0 x, s_1 y] [s_1 y, s_1 x] \end{aligned}$$

bulunur.

$n = 3$, için olası eleman çiftleri aşağıdaki şekildedir.

$$\begin{array}{lll} F_{(1,0)(2)}, & F_{(2,0)(1)}, & F_{(2,1)(0)}, \\ F_{(2)(0)}, & F_{(2)(1)}, & F_{(1)(0)}. \end{array}$$

Her $x_1, y_1 \in NG_1,\ x_2, y_2 \in NG_2,$ *için* N_3 *ün üreteçleri:*

$$\begin{aligned}
F_{(1,0)(2)}(x_1, y_2) &= [s_1s_0x_1, s_2y]\,[s_2y, s_2s_0x_1]\,, \\
F_{(2,0)(1)}(x_{11}, y_2) &= [s_2s_0x_1, s_1y]\,[s_1y, s_2s_1x_1]\,[s_2s_1x_1, s_2y]\,[s_2y, s_2s_0x_1]\,, \\
F_{(0)(2,1)}(x_2, y_1) &= [s_0x_2, s_2s_1y_1]\,[s_2s_1y_1, s_1x_2]\,[s_2x_2, s_2s_1y_1]\,, \\
F_{(0)(1)}(x_2, y_2) &= [s_0x_2, s_1y_2]\,[s_1y_2, s_1x_2]\,[s_2x_2, s_2y_2]\,, \\
F_{(2)(0)}(x_2, y_2) &= [s_0x_2, s_2y_2]\,, \\
F_{(2)(1)}(x_2, y_2) &= [s_1x_2, s_2y_2]\,[s_2y_2, s_{2x}y_2]\,.
\end{aligned}$$

formundadır.

Aşağıda N_n deki elemanların çeşitli tipleri verilecek ve bu elemanların komutatörlerinin bazı özel durumlarda $\partial_n NG_n$ nin elemanlarının alternatif tanımı olduğu gösterilecektir.

Teorem 1.4.2 *[37]* **G** *bir simplisel grup,* $n > 0$ *ve* D_n *,* G_n *içindeki dejenere elemanlar tarafından üretilen altgrup olsun.* $G_n = D_n$ *olduğunu kabul edelim.* N_n *,* $x_\alpha \in NG_{n-\#\beta}, y_\beta \in NG_{n-\#\beta}$ *ve* $(\alpha,\beta) \in P(n)$ *olmak üzere*

$$F_{\alpha,\beta}(x_\alpha, y_\beta)$$

formundaki elemanlar tarafından üretilen normal altgrup olsun. Bu durumda

$$\partial_n(NG_n) = \partial_n(N_n)$$

olur.

1.4.1 $n = 2$, $n = 3$ ve $n = 4$ Durumları

$n = 2$ **Durumu**

Teorem 1.4.3 *[37]* $\partial_2(N_2) = [Kerd_0, Kerd_1] = \left[K_{\{0\}}, K_{\{1\}}\right] = [K_I, K_J]$ *dir.*

$n = 3$ **Durumu**

Teorem 1.4.4 *[37] Varsayalımki $G_3 = D_3$ olsun. $I \cup J = [2],\ I \cap J = \emptyset$ ve*

$$\begin{aligned} \left[K_{\{0,1\}}, K_{\{0,2\}}\right] &= [(\mathrm{Cek}d_0 \cap \mathrm{Cek}d_1), (\mathrm{Cek}d_0 \cap \mathrm{Cek}d_2)] \\ \left[K_{\{0,2\}}, K_{\{1,2\}}\right] &= [(\mathrm{Cek}d_0 \cap \mathrm{Cek}d_2), (\mathrm{Cek}d_1 \cap \mathrm{Cek}d_2)] \\ \left[K_{\{0,1\}}, K_{\{1,2\}}\right] &= [(\mathrm{Cek}d_0 \cap \mathrm{Cek}d_1), (\mathrm{Cek}d_1 \cap \mathrm{Cek}d_2)]\,. \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\partial_3(NG_3) = \left(\prod_{I,J} [K_I, K_J]\right) \left[K_{\{0,2\}}, K_{\{0,1\}}\right] \left[K_{\{1,2\}}, K_{\{0,2\}}\right] \left[K_{\{1,2\}}, K_{\{0,1\}}\right]$$

dir.

$n = 4$ **Durumu**

Teorem 1.4.5 *[37] $I \cup J = [3],\ I = [3] - \{\alpha\},\ J = [3] - \{\beta\}$ ve $(\alpha, \beta) \in P(4)$ olmak üzere*

$$\partial_4(NG_4) = \prod K_I K_J$$

dir.

Bu son ispatta kullanılan aşağıdaki bilgiler 2., 3. ve 4. bölümde sıkça kullanılacaktır: $x_1, y_1 \in NG_1,\ x_2, y_2 \in NG_2$ ve $x_3, y_3 \in NG_3$ olmak üzere N_4 normal alt grubunun üreteç elemanlarının ∂_4 altındaki görüntüleri aşağıdaki biçimdedir.

1)	$d_4(F_{(0)(3,2,1)}(y_3,x_1))$	$=$	$[s_0d_3x_3, s_2s_1y_1]\,[s_2s_1y_1, s_1d_3x_3]$
			$[s_2d_3x_3, s_2s_1y_1]\,[s_2s_1y_1, x_3]$
2)	$d_4(F_{(3,2,0)(1)}(x_1,y_3))$	$=$	$[s_2s_0x_1, s_1d_3y_3]\,[s_1d_3y_3]\,[s_2s_1x_1, s_2d_3y_3]$
			$[s_2d_3y_3, s_2s_0x_1]\,[s_2s_0x_1, y_3]\,[y_3, s_2s_1x_1]$
3)	$d_4(F_{(3,1,0)(2)}(x_1,y_3))$	$=$	$[s_1s_0x_1, s_2d_3y_3]\,[s_2d_3y_3, s_2s_0x_1]$
			$[s_2s_0x_1, y_3]\,[y_3, s_1s_0x_1]$
4)	$d_4(F_{(2,1,0)(3)}(x_1,y_3))$	$=$	$[s_2s_1s_0d_1x_1, y_3]\,[y_3, s_1s_0x_1]$
5)	$d_4(F_{(3,0)(2,1)}(x_2,y_2))$	$=$	$[s_0x_2, s_2s_1d_2y_2]\,[s_2s_1d_2y_2, s_1x_2]$
			$[s_2x_2, s_2s_1d_2y_2]\,[s_1y_2, s_2x_2]$
			$[s_1x_2, s_1y_2]\,[s_1y_2, s_0x_2]$
6)	$d_4(F_{(2,0)(3,1)}(x_2,y_2))$	$=$	$[s_2s_0d_2x_2, s_1y_2]\,[s_1y_2, s_2s_1d_2x_2]$
			$[s_2s_1d_2x_2, s_2y_2]\,[s_2y_2, s_2s_0d_2x_2]$
			$[s_0x_2, s_2y_2]\,[s_2y_2, s_1x_2]$
			$[s_1x_2, s_1y_2]\,[s_1y_2, s_0x_2]$
7)	$d_4(F_{(1,0)(3,2)}(x_2,y_2))$	$=$	$[s_1s_0d_2x_2, s_2y_2]\,[s_2y_2, s_2s_0d_2x_2]\,[s_0x_2, s_2y_2]$
8)	$d_4(F_{(1)(3,2)}(x_3,y_2))$	$=$	$[s_1d_3x_3, s_2y_2]\,[s_2y_2, s_2d_3x_3]\,[x_3, s_2y_2]$
9)	$d_4(F_{(0)(3,2)}(x_3,y_2))$	$=$	$[s_0d_3x_3, s_2y_2]$
10)	$d_4(F_{(3,1)(2)}(x_3,y_2))$	$=$	$[s_0d_3x_3, s_1y_2]\,[s_1y_2, s_1d_3x_3]$
			$[s_2d_3x_3, s_2y_2]\,[s_2y_2, x_3]$
11)	$d_4(F_{(0)(2,1)}(x_3,y_2))$	$=$	$[s_0d_3x_3, s_2s_1d_2y_2]\,[s_2s_1d_2y_2, s_1d_3x_3]$
			$[s_2d_3x_3, s_2s_1d_2y_2]\,[s_1y_2, x_3]$
12)	$d_4(F_{(3,1)(2)}(x_2,y_3))$	$=$	$[s_1x_2, s_2d_3y_3]\,[s_2d_3y_3, s_2x_2]$
			$[s_2x_2, y_3]\,[y_3, s_1x_2]$
13)	$d_4(F_{(2,1)(3)}(x_2,y_3))$	$=$	$[s_2s_1d_2x_2, y_3]\,[y_3, s_1x_2]$
14)	$d_4(F_{(3,0)(2)}(x_2,y_3))$	$=$	$[s_0x_2, s_2d_3y_3]\,[y_3, s_0x_2]$
15)	$d_4(F_{(3,0)(1)}(x_2,y_3))$	$=$	$[s_0x_2, s_1d_3y_3]\,[s_1d_3y_3, s_1x_2]$
			$[s_2x_2, s_2d_3y_3]\,[y_3, s_2x_2]$

16)	$d_4(F_{(2,0)(3)}(x_2,y_3))$	$=$	$[s_2s_0d_2x_2,y_3]\,[y_3,s_0x_2]$
17)	$d_4(F_{(2,0)(1)}(x_2,y_3))$	$=$	$[s_2s_0d_2x_2,s_1d_3y_3]\,[s_1d_3y_3,s_2s_1d_2x_2]$
			$[s_2s_1d_2x_2,s_2d_3y_3]\,[s_2d_3y_3,s_2s_0d_2x_2]\,[s_0x_2,y_3]$
			$[y_3,s_1x_2]$
18)	$d_4(F_{(1,0)(3)}(x_2,y_3))$	$=$	$[s_1s_0d_2x_2,y_3]$
19)	$d_4(F_{(1,0)(2)}(x_2,y_3))$	$=$	$[s_1s_0d_2x_2,s_2d_3y_3]\,[s_2d_3y_3,s_2s_0d_2x_2]\,[s_0x_2,y_3]$
20)	$d_4(F_{(2)(3)}(x_3,y_3))$	$=$	$[s_2d_3x_3,y_3]\,[y_3,x_3]$
21)	$d_4(F_{(1)(3)}(x_3,y_3))$	$=$	$[s_1d_3x_3,y_3]$
22)	$d_4(F_{(0)(3)}(x_3,y_3))$	$=$	$[s_0d_3x_3,y_3]$
23)	$d_4(F_{(1)(2)}(x_3,y_3))$	$=$	$[s_1d_3x_3,s_2d_3y_3]\,[s_2d_3y_3,s_2d_3x_3]\,[x_3,y_3]$
24)	$d_4(F_{(0)(2)}(x_3,y_3))$	$=$	$[s_0d_3x_3,s_2d_3y_3]$
25)	$d_4(F_{(0)(1)}(x_3,y_3))$	$=$	$[s_0d_3x_3,s_1d_3y_3]\,[s_1d_3y_3,s_1d_3x_3]$
			$[s_2d_3x_3,s_2d_3y_3]\,[y_3,x_3]$

Tablo 1.4.5

Teorem 1.4.6 *[37] $n=2,3$, veya 4, **G** bir simplisel grup ve **NG**, **G** nin Moore kompleksi olsun. $G_n=D_n$ ve $I\cup J=[n-1]$, $I=[n-1]-\{\alpha\}$, $J=[n-1]-\{\beta\}$, $(\alpha,\beta)\in P(n)$ olmak üzere herhangi $I,J\subseteq[n-1]$ için*

$$\partial_n(NG_n)=\prod_{I,J}[K_I,K_J]$$

dir.

Teorem 1.4.7 *[37] Eğer $G_n\neq D_n$, ise $n=2,3,4$ olmak üzere*

$$\partial_n(NG_n\cap D_n)=\prod_{I,J}[K_I,K_J]$$

dir.

Bölüm 2

3-Çaprazlanmış Modüller

2.1 Giriş

Çaprazlanmış modül kavramı ilk olarak J.H.C.Whitehead tarafından "*Combinatorial Homotopy Theory*" adlı çalışmasında tanımlanmıştır [48]. Daha sonra, çaprazlanmış modüller matematiğin değişik branşlarında (Homotopi teori, Grupların homoloji ve kohomolojisi, Cebirsel K- teori, Devirli homoloji, Combinatorial grup teori ve differensiel geometri v.b.) önemli bir rol oynamıştır. Bugünde çaprazlanmış modüller temel cebirsel yapılardan biri olarak kabul edilmektedir. Whitehead çaprazlanmış modülleri kullanarak $3-$tiplerin bir tanımlamasını vermiş ve bu tanımlama homotopi $2-$tipler için bir model olmuştur. Bu bölümde olarak ilk olarak kısaca çaprazlanmış modüllere değinilecek ve daha sonra homotopi sınıfı 3 olan cebirsel modeller için $3-$çaprazlanmış modül kavramı tanımlanacaktır. Bu yapı oluşturulurken Conduche'nin [18], $2-$çaprazlanmış modülü tanımlarken izlediği yol izlenmiş, Carrasco'nun [16] tanımladığı hiperçaprazlanmış kompleksler baz alınmış ve özellikle Peiffer üreteç elemanları kullanılmıştır.

2.2 Çaprazlanmış Modüller

Tanım 2.2.1 *F ve G iki grup olsun.*

$$\begin{aligned} G \times F &\rightarrow F \\ (g, f) &\mapsto {}^{g}f \end{aligned}$$

dönüşümü verilsin. Her $g, g' \in G$, $f, f' \in F$ için verilen bu dönüşüm

$$\begin{aligned} {}^{g}(ff') &= ({}^{g}f)({}^{g}f') \\ {}^{gg'}(f) &= {}^{g}({}^{g'}f) \\ {}^{1}f &= f \end{aligned}$$

*şartlarını sağlıyorsa bu dönüşüme bir **sol etki** ve F ye bir **G-grup** denir.*

Örnek 2.2.2 *G bir grup ve N, G nin bir normal alt grubu olsun.*

$$\begin{aligned} G \times N &\rightarrow N \\ (g, n) &\mapsto {}^{g}n = gng^{-1} \end{aligned}$$

*dönüşümü N üzerinde bir sol etki tanımlar ve bu etkiye **eşlenik etki** denir. Gerçekten $g, g' \in G, n, n' \in N$ olmak üzere*

$$\begin{aligned} {}^{g}(nn') &= gnn'g^{-1} \\ &= gng^{-1}gn'g^{-1} \\ &= (gng^{-1})(gn'g^{-1}) \\ &= ({}^{g}n)({}^{g}n') \end{aligned}$$

,

$$\begin{aligned} {}^{gg'}(n) &= (gg')n(gg')^{-1} \\ &= gg'n(g')^{-1}(g)^{-1} \\ &= g(g'n(g')^{-1})g^{-1} \\ &= g({}^{g'}n)g^{-1} \\ &= {}^{g}({}^{g'}n) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} {}^{1}n &= 1n1^{-1} \\ &= n \end{aligned}$$

dir.

Tanım 2.2.3 *L_1 bir grup ve L_2 bir L_1-grup olsun.*

$$\partial : L_2 \to L_1$$

bir grup homomorfizması olmak üzere her l_2', $l_2 \in L_2$, $l_1 \in L_1$ için

$$CM1) \quad \partial({}^{l_1}l_2) = l_1\partial(l_2)l_1^{-1}$$

ise (L_2, L_1, ∂) üçlüsüne bir ***önçaprazlanmış modül*** *denir.Buna ek olarak*

$$CM2) \quad ({}^{\partial(l_2)}l_2') = l_2l_2'l_2^{-1}$$

ise (L_2, L_1, ∂) önçaprazlanmış modülüne bir ***çaprazlanmış modül*** *denir. $(CM2)$ şartına* ***Peiffer özdeşliği*** *denir.*

Tanım 2.2.4 *(L_2, L_1, ∂) ve (L_2', L_1', ∂') birer çaprazlanmış modül olsun.*

$$\Phi : L_2 \to L_2', \quad \Psi : L_1 \to L_1'$$

grup dönüşümleri

$$\Phi({}^{l_1}l_2) = {}^{\Psi(l_1)}\Phi(l_2) \quad ve \quad \partial'\Phi(l_2) = \Psi\partial(l_2)$$

şartlarını sağlıyorsa (Φ, Ψ) iklisine (L_2, L_1, ∂) ve (L_2', L_1', ∂') ***çaprazlanmış modülleri arasında bir morfizm*** *denir. Böylece çaprazlanmış modüller kategorisi tanımlanmış olur. Bu kategoriyi $\mathfrak{XMod}$ ile göstereceğiz.*

Örnek 2.2.5 *G bir grup ve N, G nin bir normal altgrubu olsun G nin N üzerine etkisi eşlenik etki ve*

$$i : N \to G$$

içine dönüşüm olsun. bu durumda (N, G, i) bir çaprazlanmış modüldür. Gerçekten, $n, n' \in N$ ve $g \in G$ olmak üzere

$$\begin{aligned} CM1) \quad i({}^{g}n) &= i(gng^{-1}) \\ &= gng^{-1} \\ &= gi(n)g^{-1} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} CM1) \quad {}^{i(n)}(n') &= i(n)n'(i(n))^{-1} \\ &= nn'n^{-1} \end{aligned}$$

dir.

Örnek 2.2.6 *M bir L_1-modül olsun (Buradan hareketle M bir L_1-grup olarak düşünülebilir.). e, L_1 in birim elemanı olmak üzere*

$$\begin{aligned} \mathbf{1} : & M \to L_1 \\ & m \longmapsto e \end{aligned}$$

şeklinde aşikar grup homomorfizmasını tanımlayalım. Bu durumda $(M, L_1, \mathbf{1})$ bir çaprazlanmış modüldür.

Örnek 2.2.7 *G bir grup olsun. G nin birim elemanı 1 olsun.*

$$\begin{aligned} \partial_1 : \{1\} &\hookrightarrow G \\ 1 &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} Id : G &\to G \\ g &\longmapsto g \end{aligned}$$

dönüşümlerini elealalım. G nin G ve $\{1\}$üzerine eşlenik etkisi ile birlikte G ve $\{1\}$ birer $G-$gruptur. Buradan hareketle $(\{1\}, G, \partial_1)$ ve (G, G, Id) birer çaprazlanmış modüldür.

Yardımcı teorem 2.2.8 *[43]* $\mathbf{G}$ *bir simplisel grup ve* $\mathbf{N}$, $\mathbf{G}$ *nin bir normal altgrubu olsun.*

$$i : \mathbf{N} \hookrightarrow \mathbf{G}$$

içine dönüşümü yardımıyla elde edilen

$$\partial : \pi_0(\mathbf{N}) \hookrightarrow \boldsymbol{\pi_0}(\mathbf{G})$$

dönüşümü ve $\mathbf{G}$ *nin* $\mathbf{N}$ *üzerine eşlenik etkisi yardımıyla elde edilen* $\boldsymbol{\pi_0}(\mathbf{G})$ *nin* $\pi_0(\mathbf{N})$ *üzerine etkisi ile birlikte* $(\pi_0(\mathbf{N}), \boldsymbol{\pi_0}(\mathbf{G}), \partial)$ *bir çaprazlanmış modüldür.*

Önerme 2.2.9 *[43]*(L_2, L_1, ∂) *bir çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda*

(*i*) *Çek*∂, L_2 *nin merkezidir.*

(*ii*) *Çek*∂ *ve* $L_2/[L_2, L_2]$ *birer* $L_1/\partial L_2-$*modüldür.*

2.3 3-Çaprazlanmış Modüllerin Elde Edilişi

Conduche [18] de $2-$çaparazlanmış modülleri tanımlamıştır. Tanımlamayı yaparken 3. mertebeden kısıtlanmış bir simplisel grubun Moore kompleksini kullanmıştır. Önce s_0, s_1 ve s_2 vasıtasıyla etkileri ve bir Peiffer dönüşümü -ki bu dönüşüm $n = 2$ durumu için [16] de tanımlanan $F_{(0)(1)}$ dönüşümüne karşılık gelmektedir- tanımlamış ve Moore kompleksin ve tanımladığı etkilerin bazı özellikleri yardımıyla Peiffer özdeşliklerini hesaplamıştır. Son olarak bu özdeşlikler yardımıyla $2-$çaprazlanmış modül kavramını tanımlamıştır.

$\mathbf{G}$, $n \geq 4$ için $G_n = \{1\}$ olacak şekilde bir simplisel grup ve $\mathbf{NG}$, $\mathbf{G}$ nin Moore kompleksi olsun. Dikkat edilileceği üzere **Tablo1.4.5** de verilen elemanların herbirinin yüzey operatörleri altındaki görüntüsü 1_{G_3} tür. Daha formal bir ifade ile $I \cup J = [3],\ I = [3] - \{\alpha\},\ J = [3] - \{\beta\}$ ve $(\alpha, \beta) \in P(4)$ olmak üzere $d_4(F_{\alpha\beta}) = \{1_{G_3}\}$ tür. $NG_0 = N$, $NG_1 = M$, $NG_2 = L$, $NG_3 = K$ olsun. N nin M, L, K üzerine, M nin L ve K üzerine, L nin K üzerine etkisini $x_0 \in N$, $x_1 \in M$, $x_2 \in L$, y_3, $x_3 \in K$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
{}^{x_0}x_1 &= s_0x_0x_1s_0x_0^{-1} \\
{}^{x_0}x_2 &= s_1s_0x_0x_2s_1s_0x_0^{-1} \\
{}^{x_0}x_3 &= s_2s_1s_0x_0x_3s_2s_1s_0x_0^{-1} \\
{}^{x_1}x_2 &= s_1x_1x_2s_1x_1^{-1} \\
{}^{x_1}x_3 &= s_2s_1x_1x_3s_2s_1x_1^{-1} \\
x_2 \cdot x_3 &= s_2x_2x_3s_2x_2^{-1} \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. Tablo 1.4.5 gereğince

$$[s_1s_0x_1s_2s_1\partial_1x_1, x_3] = 1$$

dir.

$$^{\partial_1x_1}x_3 = s_1s_0x_1x_3s_1s_0x_1^{-1}$$

ve

$$\left[s_1x_2^{-1}s_2s_1\partial_2x_2, x_3\right] = 1$$

olduğundan

$$^{\partial_2x_2}x_3 = s_1x_2x_3s_1x_2^{-1}$$

elde edilir. Yine Tablo 1.4.5gereğince

$$\left[y_3, x_3^{-1}s_2\partial_3x_3\right] = 1$$

olduğundan

$$\partial_3x_3 \cdot y_3 = x_3y_3x_3^{-1}$$

olur. Simplisel özdeşlikler yardımıyla

$$\begin{aligned}\partial_3(x_2 \cdot x_3) &= \partial_3(s_2 x_2 x_3 s_2 x_2^{-1}) \\ &= \partial_3 s_2 x_2 \partial_3 x_3 \partial_3 x_3 s_2 x_2^{-1} \\ &= x_2 \partial_3 x_3 x_2^{-1}\end{aligned}$$

bulunur.

Not: Burada $\partial_3(x_2 \cdot x_3) = x_2\partial_3 x_3 x_2^{-1}$ ve $\partial_3 x_3 \cdot y_3 = x_3 y_3 x_3^{-1}$ olduğundan $\partial_3 : K \to L$ bir çaprazlanmış modüldür.

$x_1,\, y_1, z_1 \in M,\, x_2,\, y_2 \in L$ olmak üzere

$$\begin{array}{llcl}
\{\ ,\ \}: & M \times M & \to & L \\
 & \{x_1, y_1\} & = & [s_1x_1, s_1y_1]\,[s_1y_1, s_0x_1] \\
\{\ ,\ \}_{(1)(0)}: & L \times L & \to & K \\
 & \{x_2, y_2\}_{(1)(0)} & = & [s_2y_2, s_2x_2]\,[s_1x_2, s_1y_2]\,[s_1y_2, s_0x_2] \\
\{\ ,\ \}_{(2)(1)}: & L \times L & \to & K \\
 & \{x_2, y_2\}_{(2)(1)} & = & [s_2x_2, s_2y_2]\,[s_2y_2, s_1x_2] \\
\{\ ,\ \}_{(0)(2)}: & L \times L & \to & K \\
 & \{x_2, y_2\}_{(0)(2)} & = & [s_2y_2, s_0x_2] \\
\{\ ,\ \}_{(1,0)(2)} & M \times L & \to & K \\
 & \{x_1, y_2\}_{(1,0)(2)} & = & [s_2s_0x_1, s_2y_2]\,[s_2y_2, s_1s_0x_1] \\
\{\ ,\ \}_{(2,0)(1)} & M \times L & \to & K \\
 & \{x_1, y_2\}_{(2,0)(1)} & = & [s_2s_0x_1, s_2y_2]\,[s_2y_2, s_2s_1x_1]\,[s_2s_1x_1, s_1y_2]\,[s_1y_2, s_2s_0x_1] \\
\{\ ,\ \}_{(0)(2,1)} & L \times M & \to & K \\
 & \{y_2, x_1\}_{(0)(2,1)} & = & [s_2s_1x_1, s_2y_2]\,[s_1y_2, s_2s_1x_1]\,[s_2s_1x_1, s_0y_2]
\end{array}$$

şeklinde tanımlı Peiffer dönüşümlerini ele alalım. Etki tanımları ve Tablo

1.4.5 kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$\begin{aligned}
\{x_1, \partial_3 y_3\}_{(2,0)(1)} &= [s_2s_0x_1, s_2\partial_3y_3]\,[s_2\partial_3y_3, s_2s_1x_1] \\
&\quad [s_2s_1x_1, s_1\partial_3y_3]\,[s_1\partial_3y_3, s_2s_0x_1] \\
&= [s_2s_0x_1, s_2\partial_3y_3]\,[s_2\partial_3y_3, s_2s_1x_1] \\
&\quad [s_2s_1x_1, s_2s_1\partial_2\partial_3y_3]\,[s_2s_1\partial_2\partial_3y_3, s_2s_0x_1] \\
&= [s_2s_0x_1, s_2\partial_3y_3]\,[s_2\partial_3y_3, s_2s_1x_1]\,[s_2s_1x_1, 1]\,[1, s_2s_0x_1] \\
&= [s_2s_0x_1, s_2\partial_3y_3]\,[s_2\partial_3y_3, s_2s_1x_1] \\
&= [s_2s_0x_1, s_2\partial_3y_3]\,[y_3, s_2s_1x_1]
\end{aligned}$$

olup

$$\boxed{\{x_1, \partial_3 y_3\}_{(2,0)(1)} = [s_2s_0x_1, s_2\partial_3y_3]\,[y_3, s_2s_1x_1]} \tag{2.2}$$

dir.

$$\begin{aligned}
\{x_1, \partial_3 y_3\}_{(1,0)(2)} &= [s_2s_0x_1, s_2\partial_3y_3]\,[s_2\partial_3y_3, s_1s_0x_1] \\
&= \{x_1, \partial_3 y_3\}_{(2,0)(1)}\,[s_2s_1x_1, y_3]\,[y_3, s_1s_0x_1] \qquad ((2.2)\text{ den}) \\
&= \{x_1, \partial_3 y_3\}_{(2,0)(1)}\; s_2s_1x_1y_3s_2s_1x_1^{-1}y_3^{-1}y_3s_1s_0x_1y_3^{-1}s_1s_0x_1^{-1} \\
&= \{x_1, \partial_3 y_3\}_{(2,0)(1)}\; s_2s_1x_1y_3s_2s_1x_1^{-1}s_1s_0x_1y_3^{-1}s_1s_0x_1^{-1} \\
&= \{x_1, \partial_3 y_3\}_{(2,0)(1)}\;\; {}^{x_1}(y_3)^{\partial_1 x_1}(y_3^{-1})\ (\textit{etki tanımından})
\end{aligned}$$

olup

$$\boxed{\{x_1, \partial_3 y_3\}_{(1,0)(2)} = \{x_1, \partial_3 y_3\}_{(2,0)(1)}\;\; {}^{x_1}(y_3)^{\partial_1 x_1}(y_3^{-1})} \tag{2.3}$$

dir.

$$\begin{aligned}
\{\partial_3 y_3, x_1\}_{(0)(2,1)} &= [s_2s_1x_1, s_2\partial_3y_3]\,[s_1\partial_3y_3, s_2s_1x_1]\,[s_2s_1x_1, s_0\partial_3y_3] \\
&= [s_2s_1x_1, y_3]\,[s_2s_1\partial_2\partial_3y_3, s_2s_1x_1]\,[s_2s_1x_1, s_0\partial_3y_3] \\
&= [s_2s_1x_1, y_3]\,[1, s_2s_1x_1]\,[s_2s_1x_1, s_0\partial_3y_3] \\
&= [s_2s_1x_1, y_3]\,[s_2s_1x_1, s_0\partial_3y_3] \\
&= s_2s_1x_1y_3s_2s_1x_1^{-1}y_3^{-1} \\
&= {}^{x_1}(y_3)y_3^{-1}
\end{aligned}$$

olup

$$\boxed{\{\partial_3 y_3, x_1\}_{(0)(2,1)} \;=^{x_1}\,(y_3)y_3^{-1}} \tag{2.4}$$

dir. (2.3) ve (2.4) den

$$\boxed{\{x_1, \partial_3 y_3\}_{(1,0)(2)} \;= \{x_1, \partial_3 y_3\}_{(2,0)(1)} \;\; \{\partial_3 y_3, x_1\}_{(0)(2,1)} \;\; y_3\;{}^{\partial_1 x_1}(y_3^{-1})} \tag{2.5}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
\{y_2, \partial_2 x_2\}_{(0)(2,1)} &= [s_2s_1\partial_2x_2, s_2y_2]\,[s_1y_2, s_2s_1\partial_2x_2]\,[s_2s_1\partial_2x_2, s_0y_2] \\
&= [s_1x_2, s_2y_2]\,[s_1y_2, s_1x_2]\,[s_1x_2, s_0y_2] \\
&= [s_1x_2, s_2y_2]\,[s_2y_2, s_2x_2]\,[s_2x_2, s_2y_2]\,[s_1y_2, s_1x_2]\,[s_1x_2, s_0y_2] \\
&= ([s_1x_2, s_2y_2]\,[s_2y_2, s_2x_2])([s_2x_2, s_2y_2]\,[s_1y_2, s_1x_2]\,[s_1x_2, s_0y_2]) \\
&= ([s_2x_2, s_2y_2]\,[s_2y_2, s_1x_2])^{-1}\,\{y_2, x_2\}_{(1)(0)} \\
&= \{x_2, y_2\}_{(2)(1)}^{-1}\,\{y_2, x_2\}_{(1)(0)}
\end{aligned}$$

olup

$$\boxed{\{y_2, \partial_2 x_2\}_{(0)(2,1)} = \{x_2, y_2\}_{(2)(1)}^{-1}\,\{y_2, x_2\}_{(1)(0)}} \tag{2.6}$$

dır.

$$\begin{aligned}
\{\partial_2 x_2, y_2\}_{(2,0)(1)} &= [s_2s_0\partial_2x_2, s_2y_2]\,[s_2y_2, s_2s_1\partial_2x_2] \\
&\quad [s_2s_1\partial_2x_2, s_1y_2]\,[s_1y_2, s_2s_0\partial_2x_2] \\
&= [s_2\partial_3s_0x_2, s_2y_2]\,[s_2y_2, s_1x_2] \\
&\quad [s_1x_2, s_1y_2]\,[s_1y_2, s_2\partial_3s_0x_2] \\
&= [\ s_0x_2, s_2y_2]\,[s_2y_2, s_1x_2] \\
&\quad [s_1x_2, s_1y_2]\,[s_1y_2,\ s_0x_2] \\
&= [\ s_0x_2, s_2y_2]\,[s_2y_2, s_1x_2]\,[s_2x_2, s_2y_2]\,[s_2y_2, s_2x_2] \\
&\quad [s_1x_2, s_1y_2]\,[s_1y_2,\ s_0x_2] \\
&= \{x_2, y_2\}^{-1}_{(0)(2)}\,[s_2y_2, s_1x_2]\,[s_2x_2, s_2y_2]\,\{x_2, y_2\}_{(1)(0)} \\
&= \{x_2, y_2\}^{-1}_{(0)(2)}\ [s_2y_2, s_2x_2]\,[s_2x_2, s_2y_2] \\
&\quad [s_2y_2, s_1x_2]\,[s_2x_2, s_2y_2]\,\{x_2, y_2\}_{(1)(0)} \\
&= \{x_2, y_2\}^{-1}_{(0)(2)}\ [s_2y_2, s_2x_2]\,\{x_2, y_2\}_{(2)(1)}\,[s_2x_2, s_2y_2]\,\{x_2, y_2\}_{(1)(0)} \\
&= \{x_2, y_2\}^{-1}_{(0)(2)}\ s_2\,[y_2,\ x_2]\,\{x_2, y_2\}_{(2)(1)}\,s_2\,[x_2,\ y_2] \\
&\quad \{x_2, y_2\}_{(1)(0)} \\
&= \{x_2, y_2\}^{-1}_{(0)(2)}\ {}^{[y_2,\ x_2]}\left(\{x_2, y_2\}_{(2)(1)}\right)\{x_2, y_2\}_{(1)(0)}
\end{aligned}$$

olup

$$\boxed{\{\partial_2 x_2, y_2\}_{(2,0)(1)} = \{x_2, y_2\}^{-1}_{(0)(2)}\ {}^{[y_2,\ x_2]}\left(\{x_2, y_2\}_{(2)(1)}\right)\{x_2, y_2\}_{(1)(0)}} \qquad (2.7)$$

dır.

$$\begin{aligned}
\{\partial_2 x_2, y_2\}_{(1,0)(2)} &= [s_2 s_0 \partial_2 x_2, s_2 y_2]\,[s_2 y_2, s_1 s_0 \partial_2 x_2] \\
&= [s_2 \partial_3 s_0 x_2, s_2 y_2]\,[s_2 y_2, s_1 s_0 \partial_2 x_2] \\
&= [\ s_0 x_2, s_2 y_2]\,[s_2 y_2, s_2 s_1 s_0 \partial_1 \partial_2 x_2] \\
&= [\ s_0 x_2, s_2 y_2]\,[s_2 y_2, 1] \\
&\ [\ s_0 x_2, s_2 y_2] \\
&= \left(\{x_2, y_2\}_{(0)(2)}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

olup

$$\boxed{\{\partial_2 x_2, y_2\}_{(1,0)(2)} = \left(\{x_2, y_2\}_{(0)(2)}\right)^{-1}} \tag{2.8}$$

dir.

$$\begin{aligned}
\partial_3(\{x_2, y_2\}_{(1)(0)}) &= [x_2, y_2]\,[\partial_3 s_1 x_2, \partial_3 s_1 y_2]\,[\partial_3 s_1 y_2, \partial_3 s_0 x_2] \\
&= [x_2, y_2]\, s_1\,[\partial_2 x_2, \partial_2 y_2]\,[s_1 \partial_2 y_2, s_0 \partial_2 x_2] \\
&= [x_2, y_2]\,\{\partial_2 x_2, \partial_2 y_2\}
\end{aligned}$$

olup

$$\boxed{\partial_3(\{x_2, y_2\}_{(1)(0)}) = [x_2, y_2]\,\{\partial_2 x_2, \partial_2 y_2\}} \tag{2.9}$$

dir.

$$\begin{aligned}
\partial_3\left(\{x_2, y_2\}_{(2)(1)}\right) &= [x_2, y_2]\,[y_2, s_1 \partial_2 x_2] \\
&= x_2 y_2 x_2^{-1} y_2^{-1} y_2 s_1 \partial_2 x_2 y_2^{-1} s_1 \partial_2 x_2^{-1} \\
&= x_2 y_2 x_2^{-1} ({}^{\partial_2 x_2} y_2)^{-1}
\end{aligned}$$

olup

$$\boxed{\partial_3\left(\{x_2, y_2\}_{(2)(1)}\right) = x_2 y_2 x_2^{-1} ({}^{\partial_2 x_2} y_2)^{-1}} \tag{2.10}$$

dir.

$$\boxed{\partial_3\left(\{x_2, y_2\}_{(0)(2)}\right) = \partial_3\left(\{\partial_2 x_2, y_2\}_{(1,0)(2)}\right)^{-1}} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
\partial_3 \{x_2, y_1\}_{(0)(2,1)} &= \partial_3 ([s_2 s_1 y_1, s_2 x_2] [s_1 x_2, s_2 s_1 y_1] [s_2 s_1 y_1, s_0 x_2]) \\
&= [s_1 y_1, x_2] [\partial_3 s_1 x_2, s_1 y_1] [s_1 y_1, \partial_3 s_0 x_2] \\
&= {}^{y_1} x_2 x_2^{-1} \{\partial_2 x_2, y_1\}
\end{aligned}$$

olup

$$\boxed{\partial_3 \{x_2, y_1\}_{(0)(2,1)} = {}^{y_1} x_2 x_2^{-1} \{\partial_2 x_2, y_1\}} \tag{2.12}$$

dir.

$$\begin{aligned}
\partial_3 \{x_1, y_2\}_{(1,0)(2)} &= [s_0 x_1, y_2] [y_2, \partial_3 s_1 s_0 x_1] \\
\partial_3 \{x_1, y_2\}_{(1,0)(2)} [\partial_3 s_1 s_0 x_1, y_2] &= [s_0 x_1, y_2] \qquad (2.13) \\
\partial_3 \{x_1, y_2\}_{(2,0)(1)} &= [s_0 x_1, y_2] [y_2, s_1 x_1] [s_1 x_1, \partial_3 s_1 y_2] [\partial_3 s_1 y_2, s_0 x_1] \\
&= [s_0 x_1, y_2] [y_2, s_1 x_1] [s_1 x_1, s_1 \partial_2 y_2] [s_1 \partial_2 y_2, s_0 x_1] \\
&= [s_0 x_1, y_2] [y_2, s_1 x_1] \{x_1, \partial_2 y_2\} \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

olup (2.13) ve (2.14) den

$$\begin{aligned}
\partial_3 \{x_1, y_2\}_{(2,0)(1)} &= \partial_3 \{x_1, y_2\}_{(1,0)(2)} [\partial_3 s_1 s_0 x_1, y_2] [y_2, s_1 x_1] \{x_1, \partial_2 y_2\} \\
&= \partial_3 \{x_1, y_2\}_{(1,0)(2)} [s_1 s_0 \partial_1 x_1, y_2] [y_2, s_1 x_1] \{x_1, \partial_2 y_2\} \\
&= \partial_3 \{x_1, y_2\}_{(1,0)(2)} \ {}^{\partial_1 x_1} y_2 \ {}^{x_1}(y_2^{-1}) \{x_1, \partial_2 y_2\}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\partial_3 \{x_1, y_2\}_{(2,0)(1)} = \partial_3 \{x_1, y_2\}_{(1,0)(2)} \ {}^{\partial_1 x_1} y_2 \ {}^{x_1}(y_2^{-1}) \{x_1, \partial_2 y_2\}} \tag{2.15}$$

dir.

$$\begin{aligned}
\{\partial_3 x_3, y_2\}_{(2)(1)} &= [s_2 \partial_3 x_3, s_2 y_2] [s_{2 2} y_2, s_1 \partial_3 x_3] \\
&= s_2 \partial_3 x_3 s_2 y_2 s_2 \partial_3 x_3^{-1} s_2 y_2^{-1} (s_2 y_2 \ s_1 \partial_3 x_3 s_2 y_2^{-1} s_1 \partial_3 x_3^{-1}) \\
&= x_3 s_2 y_2 \ x_3^{-1} s_2 y_2^{-1} (s_2 y_2 \ s_2 s_1 \partial_2 \partial_3 x_3 s_2 y_2^{-1} s_2 s_1 \partial_2 \partial_3 \ x_3^{-1}) \\
&= x_3 s_2 y_2 \ x_3^{-1} s_2 y_2^{-1} (s_2 y_2 1 s_2 y_2^{-1} 1 x_3^{-1}) \\
&= x_3 \ (y_2 \cdot x_3^{-1})
\end{aligned}$$

olup

$$\boxed{\{\partial_3 x_3, y_2\}_{(2)(1)} = x_3\ (y_2 \cdot x_3^{-1})} \tag{2.16}$$

dir.

$$\begin{aligned}
\{x_2, \partial_3 y_3\}_{(2)(1)} &= [s_2 x_2, s_2 \partial_3 y_3]\,[s_2 \partial_3 y_3, s_1 x_2] \\
&= s_2 x_2 s_2 \partial_3 y_3 s_2 x_2^{-1} s_2 \partial_3 y_3^{-1} s_2 \partial_3 y_3 s_1 x_2 s_2 \partial_3 y_3^{-1} s_1 x_2^{-1} \\
&= s_2 x_2\ y_3 s_2 x_2^{-1} y_3^{-1}\ y_3 s_1 x_2\ y_3^{-1} s_1 x_2^{-1} \\
&= s_2 x_2\ y_3 s_2 x_2^{-1} s_1 x_2\ y_3^{-1} s_1 x_2^{-1} \\
&= \ x_2 \cdot y_3\ ({}^{\partial_2 x_2} y_3^{-1})
\end{aligned}$$

olup

$$\boxed{\{x_2, \partial_3 y_3\}_{(2)(1)} = x_2 \cdot y_3\ ({}^{\partial_2 x_2} y_3^{-1})} \tag{2.17}$$

dir.

$$\begin{aligned}
\{\partial_3 x_3, y_2\}_{(1)(0)} &= [s_2 y_2, s_2\ \partial_3 x_3]\,[s_1 \partial_3 x_3, s_1 y_2]\,[s_1 y_2, s_0 \partial_3 x_3] \\
&= [s_2 y_2,\ x_3]\ \ [s_2 s_1 \partial_2 \partial_3 x_3, s_1 y_2]\,[s_1 y_2, s_0 \partial_3 x_3] \\
&= [s_2 y_2,\ x_3]\ \ [\ 1, s_1 y_2]\,[s_1 y_2, s_0 \partial_3 x_3] \\
&= [s_2 y_2,\ x_3] \\
&= s_2 y_2 x_3 s_2 y_2^{-1} x_3^{-1} \\
&= (y_2 \cdot x_3) x_3^{-1}
\end{aligned}$$

olup

$$\boxed{\{\partial_3 x_3, y_2\}_{(1)(0)} = (y_2 \cdot x_3) x_3^{-1}} \tag{2.18}$$

dir.

$$\begin{aligned}
\{x_2, \partial_3 y_3\}_{(1)(0)} &= [s_2\partial_3 y_3, s_2x_2]\,[s_1x_2, s_1\partial_3 y_3]\,[s_1\partial_3 y_3, s_0x_2] \\
&= [\ y_3, s_2x_2]\,[s_1x_2, s_2s_1\partial_2\partial_3 y_3]\,[s_2s_1\partial_2\partial_3 y_3, s_0x_2] \\
&= [\ y_3, s_2x_2]\,[s_1x_2, 1]\,[1, s_0x_2] \\
&= \ y_3 s_2 x_2 y_3^{-1} s_2 x_2^{-1} \\
&= \ y_3\ (x_2 \cdot y_3^{-1})
\end{aligned}$$

olup

$$\boxed{\{x_2, \partial_3 y_3\}_{(1)(0)} = y_3\ (x_2 \cdot y_3^{-1})} \tag{2.19}$$

dir.

$$\begin{aligned}
\{\partial_3 x_3, y_2\}_{(0)(2)} &= [s_2y_2, s_0\partial_3 x_3] \\
&= 1
\end{aligned}$$

olup

$$\boxed{\{\partial_3 x_3, y_2\}_{(0)(2)} = 1} \tag{2.20}$$

dir.

$$\begin{aligned}
\{\partial_2 x_2, \partial_3 y_3\}_{(1,0)(2)} &= [s_2s_0\partial_2 x_2\ , s_2\partial_3 y_3]\,[s_2\partial_3 y_3, s_1s_0\partial_2 x_2] \\
&= [s_2\partial_3(s_0x_2)\ , s_2\partial_3 y_3]\,[s_2\partial_3 y_3, s_2s_1s_0\partial_1\partial_2 x_2] \\
&= [(s_0x_2)\ ,\ y_3]\,[s_2\partial_3 y_3, 1] \\
&= \{x_2, \partial_3 y_3\}^{-1}_{(0)(2)}
\end{aligned}$$

olup

$$\boxed{\{\partial_2 x_2, \partial_3 y_3\}_{(1,0)(2)} = \{x_2, \partial_3 y_3\}^{-1}_{(0)(2)}} \tag{2.21}$$

dir.

$$\begin{aligned}
\{\partial_2 x_2, \partial_3 y_3\}_{(2,0)(1)} &= [s_2 s_0\ \partial_2 x_2, s_2\ \partial_3 y_3]\,[s_2\ \partial_3 y_3, s_2 s_1\ \partial_2 x_2] \\
&\quad [s_2 s_1\ \partial_2 x_2, s_2 s_1 \partial_2 \partial_3 y_3]\,[s_2 s_1 \partial_2 \partial_3 y_3, s_2 s_0 \partial_2 x_2] \\
&= [s_2 s_0\ \partial_2 x_2, s_2\ \partial_3 y_3]\,[s_2\ \partial_3 y_3, s_2 s_1\ \partial_2 x_2] \\
&\quad [s_2 s_1\ \partial_2 x_2, 1]\,[1, s_2 s_0 \partial_2 x_2] \\
&= [s_2\ \partial_3 s_0 x_2, s_2\ \partial_3 y_3]\,[y_3, s_2 s_1\ \partial_2 x_2] \\
&= [s_0 x_2, s_2\ \partial_3 y_3]\,[\ y_3, s_2 s_1\ \partial_2 x_2] \\
&= \{x_2, \partial_3 y_3\}_{(0)(2)}\, y_3 s_2 s_1\ \partial_2 x_2 y_3^{-1} s_2 s_1 \partial_2 x_2^{-1} \\
&= \{x_2, \partial_3 y_3\}_{(0)(2)}\, y_3 ({}^{\partial_2 x_2} y_3^{-1})
\end{aligned}$$

olup

$$\boxed{\{\partial_2 x_2, \partial_3 y_3\}_{(2,0)(1)} = \{x_2, \partial_3 y_3\}_{(0)(2)}\, y_3 ({}^{\partial_2 x_2} y_3^{-1})} \tag{2.22}$$

dir. Son olarak

$$\boxed{\{\partial_3 y_3, \partial_2 x_2\}_{(0)(2,1)} = {}^{\partial_2 x_2}\ y_3\ y_3^{-1}} \tag{2.23}$$

dir. Yine simplisel özdeşlikler yardımıyla

$$\begin{aligned}
{}^{x_0}[s_2 y_2, s_2 x_2] &= s_2 s_1 s_0 x_0 [s_2 y_2, s_2 x_2] s_2 s_1 s_0 x_0^{-1} \\
&= [s_2 s_1 s_0 x_0 s_2 y_2 s_2 s_1 s_0 x_0^{-1}, s_2 s_1 s_0 s_2 x_2 s_2 s_1 s_0 x_0^{-1}] \\
&= [s_2 (s_1 s_0 x_0 y_2 s_1 s_0 x_0^{-1}), s_2 (s_1 s_0 x_0 y_2 s_1 s_0 x_0^{-1})] \\
&= [s_2 ({}^{x_0} y_2), s_2 ({}^{x_0} x_2)
\end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}
{}^{x_0}[s_1x_2, s_1y_2] &= [s_2s_1s_0x_0s_1x_2s_2s_1s_0x_0^{-1}, s_2s_1s_0x_0s_1y_2s_2s_1s_0x_0^{-1}] \\
&= [s_1s_1s_0x_0s_1x_2s_1s_1x_0^{-1}, s_1s_1s_0x_0s_1y_2s_1s_1s_0x_0^{-1}] \\
&= [s_1(s_1s_0x_0x_2s_1s_0x_0^{-1}), s_1(s_1s_0x_0y_2s_1s_0x_0^{-1})] \\
&= [s_1({}^{x_0}x_2), s_1({}^{x_0}y_2)] \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^{x_0}[s_1y_2, s_0x_2] &= [s_2s_1s_0x_0s_1y_2s_2s_1s_0x_0^{-1}, s_2s_1s_0x_0s_0x_2s_2s_1s_0x_0^{-1}] \\
&= [s_1({}^{x_0}y_2), s_2s_0s_0x_0s_0x_2s_2s_0s_0x_0^{-1}] \\
&= [s_1({}^{x_0}y_2), s_0s_1s_0x_0s_0x_2s_0s_1s_0x_0^{-1}] \\
&= [s_1({}^{x_0}y_2), s_0(s_1s_0x_0x_2s_1s_0x_0^{-1})] \\
&= [s_1({}^{x_0}y_2), s_0({}^{x_0}y_2)] \qquad (2.26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^{x_0}[s_2s_0x_1, s_2y_2] &= [s_2s_1s_0x_0s_2s_0x_1s_2s_1s_0x_0^{-1}, s_2s_1s_0x_0s_2y_2s_2s_1s_0x_0^{-1}] \\
&= [s_2(s_1s_0x_0s_0x_1s_1s_0x_0^{-1}), s_2({}^{x_0}y_2)] \\
&= [s_2(s_0s_0x_0s_0x_1s_0s_0x_0^{-1}), s_2({}^{x_0}y_2)] \\
&= [s_2(s_0(s_0x_0x_1s_0x_0^{-1})), s_2({}^{x_0}y_2)] \\
&= [s_2s_0({}^{x_0}x_1), s_2({}^{x_0}y_2)] \qquad (2.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^{x_0}[s_2y_2, s_1s_0x_1] &= [s_2({}^{x_0}y_2), s_2s_1s_0x_0s_1s_0x_1s_2s_1s_0x_0^{-1}] \\
&= [s_2({}^{x_0}y_2), s_1s_1s_0x_0s_1s_0x_1s_1s_1s_0x_0^{-1}] \\
&= [s_2({}^{x_0}y_2), s_1(s_1s_0x_0s_0x_1s_1s_0x_0^{-1})] \\
&= [s_2({}^{x_0}y_2), s_1(s_0s_0x_0s_0x_1s_0s_0x_0^{-1})] \\
&= [s_2({}^{x_0}y_2), s_1(s_0(s_0x_0x_1s_0x_0^{-1}))] \\
&= [s_2({}^{x_0}y_2), s_1s_0({}^{x_0}x_1)] \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^{x_0}[s_2y_2, s_2s_1x_1] &= [s_2({}^{x_0}y_2), s_2s_1s_0x_0s_2s_1x_1s_2s_1s_0x_0^{-1}] \\ &= [s_2({}^{x_0}y_2), s_2s_1(s_0x_0x_1s_0x_0^{-1})] \\ &= [s_2({}^{x_0}y_2), s_2s_1({}^{x_0}x_1)] \end{aligned} \tag{2.29}$$

$$\begin{aligned} {}^{x_0}[s_1x_1, s_1y_2] &= [s_1s_0x_0s_1x_1s_1s_0x_0^{-1}, s_1s_0x_0s_1y_1s_1s_0x_0^{-1}] \\ &= [s_1(s_0x_0x_1s_0x_0^{-1}), s_1(s_0x_0y_1s_0x_0^{-1})] \\ &= [s_1({}^{x_0}x_1), s_1({}^{x_0}y_2) \end{aligned} \tag{2.30}$$

$$\begin{aligned} {}^{x_0}[s_1y_1, s_0x_1] &= [s_1({}^{x_0}y_1), s_1s_0x_0s_0x_1s_1s_0x_0^{-1}] \\ &= [s_1({}^{x_0}y_1), s_0s_0x_0s_0x_1s_0s_0x_0^{-1}] \\ &= [s_1({}^{x_0}y_1), s_0(s_0x_0x_1s_0x_0^{-1})] \\ &= [s_1({}^{x_0}y_1), s_0({}^{x_0}x_1)] \end{aligned} \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned} {}^{x_1}\left([s_2x_2, s_2y_2]\,[s_2y_2, s_1x_2]\right) &= {}^{x_1}\,[s_2x_2, s_2y_2]\ {}^{x_1}\,[s_2y_2, s_1x_2] \\ &= [s_2s_1x_1s_2x_2, s_2s_1x_1s_2y_2]\,[s_2s_1x_1s_2y_2, s_2s_1x_1s_1x_2] \\ &= [s_2(s_1x_1x_2), s_2(s_1x_1y_2)]\ \ [s_2(s_1x_1y_2), s_1(s_1x_1x_2)] \\ &= [s_2({}^{x_1}x_2), s_2({}^{x_1}y_2)]\ \ [s_2({}^{x_1}y_2), s_1({}^{x_1}x_2)] \end{aligned} \tag{2.32}$$

bulunur. (2.23)-(2.31) de elde edilen sonuçlar gereğince

$$
\begin{aligned}
{}^{x_0}\{x_1, y_1\} &= \{{}^{x_0}x_1, {}^{x_0}y_1\} \\
{}^{x_0}\{x_2, y_2\}_{(1)(0)} &= \{{}^{x_0}x_2, {}^{x_0}y_2\}_{(1)(0)} \\
{}^{x_0}\{x_2, y_2\}_{(2)(1)} &= \{{}^{x_0}x_2, {}^{x_0}y_2\}_{(2)(1)} \\
{}^{x_0}\{x_2, y_2\}_{(0)(2)} &= \{{}^{x_0}x_2, {}^{x_0}y_2\}_{(0)(2)} \\
{}^{x_0}\{x_1, y_2\}_{(1,0)(2)} &= \{{}^{x_0}x_1, {}^{x_0}y_2\}_{(1,0)(2)} \\
{}^{x_0}\{x_1, y_2\}_{(2,0)(1)} &= \{{}^{x_0}x_1, {}^{x_0}y_2\}_{(2,0)(1)} \\
{}^{x_0}\{y_2, x_1\}_{(0)(2,1)} &= \{{}^{x_0}y_2, {}^{x_0}x_1\}_{(0)(2,1)} \qquad (2.33)
\end{aligned}
$$

olur. Yani tanımlanan her bir Peiffer dönüşümü N-equivariant tır. Ayrıca (2.32) gereğince

$$
\begin{aligned}
{}^{z_1}\{x_1, y_1\} &= \{{}^{z_1}x_1, {}^{z_1}y_1\} \\
{}^{z_1}\{x_2, y_2\}_{(1)(0)} &= \{{}^{z_1}x_2, {}^{z_1}y_2\}_{(1)(0)} \\
{}^{z_1}\{x_2, y_2\}_{(2)(1)} &= \{{}^{z_1}x_2, {}^{z_1}y_2\}_{(2)(1)} \\
{}^{z_1}\{x_2, y_2\}_{(0)(2)} &= \{{}^{z_1}x_2, {}^{z_1}y_2\}_{(0)(2)} \\
{}^{z_1}\{x_1, y_2\}_{(1,0)(2)} &= \{{}^{z_1}x_1, {}^{z_1}y_2\}_{(1,0)(2)} \\
{}^{z_1}\{x_1, y_2\}_{(2,0)(1)} &= \{{}^{z_1}x_1, {}^{z_1}y_2\}_{(2,0)(1)} \\
{}^{z_1}\{y_2, x_1\}_{(0)(2,1)} &= \{{}^{z_1}y_2, {}^{z_1}x_1\}_{(0)(2,1)} \qquad (2.34)
\end{aligned}
$$

olduğundan her bir Peiffer dönüşümü M-equivariant tır. Şimdi (2.1)-(2.23), (2.33) ve (2.34) sonuçları kullanılıp Conduche nin [18]de izlediği yol takip edilirse bir 3-çaprazlanmış modülün tanımı aşağıdaki biçimde olur.

Tanım 2.3.1 *$K \xrightarrow{\partial_3} L \xrightarrow{\partial_2} M \xrightarrow{\partial_1} N$ bir grup kompleksi olsun. $\partial_3 : K \to L$ bir çaprazlanmış modül olmak üzere herbiri N-equivariant ve M-equivariant olan*

$$\{,\}_{(1)(0),(2)(1),(0)(2)} : L \times L \to K$$
$$\{,\}_{(1,0)(2),(2,0)(1)} : M \times L \to K$$
$$\{,\} : M \times M \to L, \{,\}_{(0)(2,1)} : L \times M \to K$$

dönüşümleri

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{3CM1)} & \{x_1, \partial_3 y_3\}_{(1,0)(2)} & = \{x_1, \partial_3 y_3\}_{(2,0)(1)} \ \{\partial_3 y_3, x_1\}_{(0)(2,1)} \ y_3 \ {}^{\partial_1 x_1}(y_3^{-1}) \\
\mathbf{3CM2)} & \{y_2, \partial_2 x_2\}_{(0)(2,1)} & = \{x_2, y_2\}^{-1}_{(2)(1)} \{y_2, x_2\}_{(1)(0)} \\
\mathbf{3CM3)} & \{\partial_2 x_2, y_2\}_{(2,0)(1)} & = \{x_2, y_2\}^{-1}_{(0)(2)} \ {}^{[y_2,\ x_2]}(\{x_2, y_2\}_{(2)(1)}) \{x_2, y_2\}_{(1)(0)} \\
\mathbf{3CM4)} & \{\partial_2 x_2, y_2\}_{(1,0)(2)} & = (\{x_2, y_2\}_{(0)(2)})^{-1} \\
\mathbf{3CM5)} & \partial_3 \{x_2, y_2\}_{(1)(0)} & = [x_2, y_2] \{\partial_2 x_2, \partial_2 y_2\} \\
\mathbf{3CM6)} & \partial_3 \{x_2, y_2\}_{(2)(1)} & = x_2 y_2 x_2^{-1} ({}^{\partial_2 x_2} y_2)^{-1} \\
\mathbf{3CM7)} & \partial_3 \{x_2, y_2\}_{(0)(2)} & = \partial_3(\{\partial_2 x_2, y_2\}_{(1,0)(2)})^{-1} \\
\mathbf{3CM8)} & \partial_3 \{x_2, y_1\}_{(0)(2,1)} & = {}^{y_1} x_2 x_2^{-1} \{\partial_2 x_2, y_1\} \\
\mathbf{3CM9)} & \partial_3 \{x_1, y_2\}_{(2,0)(1)} & = \partial_3 \{x_1, y_2\}_{(1,0)(2)} \ {}^{\partial_1 x_1} y_2 \ {}^{x_1}(y_2^{-1}) \{x_1, \partial_2 y_2\} \\
\mathbf{3CM10)} & \{\partial_3 x_3, y_2\}_{(2)(1)} & = x_3 \ (y_2 \cdot x_3^{-1}) \\
\mathbf{3CM11)} & \{x_2, \partial_3 y_3\}_{(2)(1)} & = x_2 \cdot y_3 ({}^{\partial_2 x_2} y_3^{-1}) \\
\mathbf{3CM12)} & \{\partial_3 x_3, y_2\}_{(1)(0)} & = (y_2 \cdot x_3) x_3^{-1} \\
\mathbf{3CM13)} & \{x_2, \partial_3 y_3\}_{(1)(0)} & = y_3 \ (x_2 \cdot y_3^{-1}) \\
\mathbf{3CM14)} & \{\partial_3 x_3, y_2\}_{(0)(2)} & = 1 \\
\mathbf{3CM15)} & \{xy, z\}_{(2)(1)} & = x \cdot \{y, z\}_{(2)(1)} \left\{x, {}^{\partial_2 y} z\right\}_{(2)(1)} \\
\mathbf{3CM16)} & \{x, yz\}_{(2)(1)} & = \{x, y\}_{(2)(1)} \ {}^{\partial_2 x} y \{x, z\}_{(2)(1)} \\
\mathbf{3CM17)} & \{\partial_2 x_2, \partial_3 y_3\}_{(1,0)(2)} & = \{x_2, \partial_3 y_3\}^{-1}_{(0)(2)} \\
\mathbf{3CM18)} & \{\partial_2 x_2, \partial_3 y_3\}_{(2,0)(1)} & = \{x_2, \partial_3 y_3\}_{(0)(2)} y_3 ({}^{\partial_2 x_2} y_3^{-1}) \\
\mathbf{3CM19)} & \{\partial_2 x_2, \partial_3 y_3\}_{(0)(2,1)} & = {}^{\partial_2 x_2} y_3 y_3^{-1} \\
\mathbf{3CM20)} & \partial_2 \{x_1, y_1\} & = x_1 y_1 x_1^{-1} \ {}^{\partial_1 (x_1)} y_1^{-1}
\end{array}$$

*şartlarını sağlıyorsa $(K, L, M, N, \partial_3, \partial_2, \partial_1)$ yapısına bir **3-çaprazlanmış modül*** *denir.*

Not: $\partial_3 : K \to L$ bir çaprazlanmış modül ve $\{\ ,\ \}_{(2)(1)}$ dönüşümü M-equivariant olduğundan **3CM(6,10,11,15,16)** gereğince $K \overset{\partial_3}{\to} L \overset{\partial_2}{\to} M$ grup kompleksi bir 2-çaprazlanmış modüldür.

Tanım 2.3.2 $(K, L, M, N, \partial_3, \partial_2, \partial_1)$ *ve* $(K', L', M', N', \partial'_3, \partial'_2, \partial'_1)$ *birer* $3-$*çaprazlanmış modül olmak üzere bu iki yapı arasındaki dönüşüm aşağıdaki biçimde resmedilebilir,*

$$\begin{tikzcd} L_3 \arrow[r, "\partial_3"] \arrow[d, "f_3"'] & L_2 \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "f_2"'] & L_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "f_1"'] & L_0 \arrow[d, "f_0"'] \\ L'_3 \arrow[r, "\partial'_3"'] & L'_2 \arrow[r, "\partial'_2"'] & L'_1 \arrow[r, "\partial'_1"'] & L'_0 \end{tikzcd}$$

ve grup homomorfizmaları aşağıdaki şartları sağlamalıdır;

Her $k \in K, l \in L, m \in M, n \in N$ *için,*

$$f_1({}^n m) = {}^{(f_0(n))}f_1(m),\ f_2({}^n l) = {}^{(f_0(n))}f_2(l),\ f_3({}^n k) = {}^{(f_0(n))}f_3(k)$$

, $\{\ ,\ \}_{(0)(2)}$, $\{\ ,\ \}_{(2)(1)}$, $\{\ ,\ \}_{(1)(0)}$ *için*

$$\{\ ,\ \} f_2 \times f_2 = f_3 \{\ ,\ \}$$

, $\{\ ,\ \}_{(1,0)(2)}$, $\{\ ,\ \}_{(2,0)(1)}$ *için*

$$\{\ ,\ \} f_1 \times f_2 = f_3 \{\ ,\ \}$$

, $\{\ ,\ \}_{(0)(2,1)}$ *için*

$$\{\ ,\ \} f_2 \times f_1 = f_3 \{\ ,\ \}$$

ve $\{\ ,\ \}$ *için*

$$\{\ ,\ \} f_1 \times f_1 = f_2 \{\ ,\ \}$$

olur. Böylece 3-çaprazlanmış modüller kategorisini tanımlamış oluruz. Bu kategoriyi $\mathfrak{X}_3\mathfrak{Mod}$ *ile göstereceğiz.*

2.3.1 Çaprazlanmış n-küpler ve Simplisel Gruplar

Tanım 2.3.3 *[43] $A \subseteq \langle n \rangle = \{1, ..., n\}$ olmak üzere M_A, grupların bir ailesi, $i \in \langle n \rangle$ olmak üzere*

$$\mu_i \ : \ M_A \ \longrightarrow \ M_{A-\{i\}}$$

dönüşümleri grup homomorfizmleri olsun. $A \subseteq B$ için ${}^a b = h(a,b)b$, $A, B \subseteq \langle n \rangle$ olmak üzere

$$h \ : \ M_A \times M_B \ \longrightarrow \ M_{A \cup B}$$

fonksiyonları her $a, a' \in M_A$, $b, b' \in M_B$, $c \in M_C$,$i, j \in \langle n \rangle$ için

1) $\mu_i a = a, \quad i \notin A$ *ise*
2) $\mu_i \mu_j a = \mu_j \mu_i a$
3) $\mu_i h(a,b) = h(\mu_i a, \mu_i b)$
4) $h(a,b) = h(\mu_i a, b) = h(a, \mu_i b), \quad i \in A \cap B$ *ise*
5) $h(a,a') = [a,a']$
6) $h(a,b) = h(b,a)^{-1}$
7) $h(aa', b) =^a h(a',b)h(a,b)$
8) $h(a, bb') = h(a,b) \ {}^b h(a,b')$
9) $a \cdot h(b,c) = h(a \cdot b, a \cdot c), \ A \subseteq B \cap C$ *ise*
10) ${}^a h(h(a^{-1},b),c){}^c h(h(c^{-1},a),b){}^b h(h(b^{-1},c),a) = 1$
11) $h(a,b) = 1, \ a = 1$ *veya* $b = 1$ *ise*

*şartlarını sağlıyorsa $h-$dönüşümleri ve μ_i grup homomorfizmaları ile birlikte $\{M_A : A \subseteq \langle n \rangle\}$ ailesine bir **çaprazlanmış n-küp** denir.*

$\{f_A : M_A \longrightarrow M'_A\}$ grup homomorfizmalarının ailesi μ_i ve $h-$dönüşümleri ile birleşmeli ise bu aileye M_A ve M'_A çaprazlanmış $n-$küpleri arasında bir dönüşüm denir ve

$$\{M_A\} \to \{M'_A\}$$

*şeklinde gösterilir. Böylece $\mathfrak{Crs}^n$ ile göstereceğimiz **çaprazlanmış n-küpler kategorisi** tanımlanmış olur.*

Önerme 2.3.4 *[43] G bir grup ve $N_1, ..., N_n$,bu grubun normal altgrupları olsun. $A \subseteq \langle n \rangle$ olmak üzere*

$$M_A \;=\; \cap\{N_i : i \in A\} \quad ve \quad M_\varnothing \;=\; G$$

olsun.Bu durumda $i \in \langle n \rangle$ ise M_A , $M_{A-\{i\}}$ nin bir normal altgrubudur.

$$\mu_i \;:\; M_A \;\longrightarrow\; M_{A-\{i\}}$$

dönşümü içine (inclusion) dönüşümü olsun. $A, B \subseteq \langle n \rangle$ ise $a \in M_A$, $b \in M_B$ için $h-$dönüşümünü

$$\begin{array}{rcl} h \;:\; M_A \times M_B & \longrightarrow & M_{A \cup B} \\ (a,b) & \mapsto & [a,b] \end{array}$$

şekkinde tanımlayalım. Bu tanımlamalar doğrultusunda

$$\{M_A : A \subseteq \langle n \rangle \;,\; \mu_i \;,h\}$$

yapısı bir çaprazlanmış n-küptür.

Önerme 2.3.5 *[43] G bir grup ve $N_1, ..., N_n$,bu grubun normal altgrupları ve $A \subseteq \langle n \rangle$ için*

$$M_A \;=\; \pi_0(\bigcap_{i \in A} N_i)$$

olsun.

$$\mu_i \;:\; M_A \;\longrightarrow\; M_{A-\{i\}}$$

homomorfizmleri ve $h-$dönüşümlerini yukarıdaki önermede olduğu gibi tanım layalım. Böylece

$$\{M_A : A \subseteq \langle n \rangle, \mu_i, h\}$$

bir çaprazlanmış n-küptür.

Örnek 2.3.6 *[43] $n = 1$ için çaprazlanmış $1-$küp aynı zamanda bir çapraz lanmış modüldür.*

Örnek 2.3.7 *[43] $n = 2$ için bir çaprazlanmış kare elde edilir:*

$$\begin{tikzcd} M_{<2>} \arrow[r, "\mu_{\{2\}}"] \arrow[d, "\mu_{\{1\}}"'] & M_{\{1\}} \arrow[d, "\mu_1"] \\ M_{\{2\}} \arrow[r, "\mu_2"'] & M_{\emptyset} \end{tikzcd}$$

Her i için μ_i bir çaprazlanmış modüldür, dolayısıyla $\mu_1\mu_2$ çaprazlanmış modüldür. Tüm etkiler ve

$$h \;:\; M_{\{1\}} \times M_{\{2\}} \longrightarrow M_{\langle 2\rangle}$$

fonksiyonu h-dönüşümü yardımıyla elde edilir. μ_2 veya μ_1 dönüşümü bir çaprazlanmış modüldür. Gerçekten bir çaprazlanmış kare, çaprazlanmış modüller kategorisinde bir çaprazlanmış modül olarak düşünülebilir.

Örnek 2.3.8 *[43]* **G** *bir simplisel grup olsun. Aşağıdaki diagram bir çaprazlanmış karedir.*

$$\begin{tikzcd} NG_2/\partial_3 NG_3 \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta'"'] & NG_1 \arrow[d, "\partial'"] \\ \overline{NG_1} \arrow[r, "\partial"'] & G_1 \end{tikzcd}$$

Burada NG_1 =Çekd$_0^1$ ve $\overline{NG}_1$ =Çekd$_1^1$ dir.

G_1 in , $NG_2/\partial_3 NG_3$,$\overline{NG}_1$ ve NG_1 üzerine etkisi olduğundan $\overline{NG}_1$ nin $NG_2/\partial_3 NG_3$ ve NG_1 üzerine ∂ yardımıyla, ve NG_1 in $NG_2/\partial_3 NG_3$ ve $\overline{NG}_1$ üzerine ∂' yardımıyla etkisi vardır. ∂ ve ∂' içine dönüşümler olduğundan tüm etkiler eşlenik etki olarak verilebilir. $h-$dönüşümünü

$$\begin{array}{ccc} NG_1 \times \overline{NG}_1 & \longrightarrow & NG_2/\partial_3 NG_3 \\ (x, \overline{y}) & \mapsto & h(x,\overline{y}) = s_1x(s_y - s_0y) + \partial_3 NG_3 \end{array}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $\overline{NG}_1$ ve NG_1 arasında([37] de verilen Önerme 2.3.2 gereğince) bir bire-bir, örten fonksiyon olduğundan $x, y \in NG_1$ dir. $\overline{y}$, y nin bu fonksiyon altındaki görüntüsünü temsil etmektedir.

Sonuç 2.3.9 *Bu son örnekten hareketle*

$$\mathfrak{M}_2 \quad : \quad \mathfrak{SimpGrp} \quad \longrightarrow \quad \mathfrak{Crs}^2.$$

funktoru elde edilir.

Teorem 2.3.10 *[43]* $\mathbf{G}$ *bir simplisel grup olsun. Aşağıdaki tanımlama ile* $\mathfrak{M}(\mathbf{G}, n)$ *yapısı bir çaprazlanmış* $n-$*küptür.*

(i) $A \subseteq \langle n \rangle$,

$$\mathfrak{M}(\mathbf{G}, n)_A \quad = \quad \frac{\underset{j\in A}{\cap} Çekd^n_{j-1}}{d^{n+1}_{n+1}(Cekd^{n+1}_0 \cap \{\underset{i\in A}{\cap} Çekd^{n+1}_j\})}$$

(ii)

$$\underset{j\in A}{\cap} Çekd^n_{j-1} \quad \longrightarrow \quad \underset{j\in A\backslash\{i\}}{\cap} Çekd^n_{j-1}$$

kapsaması yardımıyla

$$\mu_i \quad : \quad M(\mathbf{G}, n)_A \quad \longrightarrow \quad M(\mathbf{G}, n)_{A\backslash\{i\}}$$

(iii) $A, B \subseteq \langle n \rangle$ *için,* $x \in \underset{j\in A}{\cap} Çekd^n_{j-1}$ *ve* $M(G, n)_A$ *nın elemanları* $\overline{x}$ *olmak üzere* h *fonksiyonu*

$$h \quad : \quad M(\mathbf{G}, n)_A \times M(\mathbf{G}, n)_B \quad \longrightarrow \quad M(\mathbf{G}, n)_{A\cup B}$$

$$h(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{[x, y]}$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 2.3.11 *[43]* $\mathbf{G}$ *bir simplisel grup olsun. Bu durumda*

(i) $A \subseteq \langle n \rangle$ *ve* $A \neq \langle n \rangle$ *için*

$$M(\mathbf{G}, n)_A \;\cong\; \bigcap_{i \in A} Çekd_{i-1}^{n-1}$$

ve özel olarak $M(\mathbf{G}, n)_\varnothing \cong G_{n-1}$; *tüm durumlarda izomorfizm* d_0 *dan indirgenir.*

(ii) $A \neq \langle n \rangle$ *ve* $i \in \langle n \rangle$ *için*

$$\mu_i \;:\; M(\mathbf{G}, n)_A \longrightarrow M(\mathbf{G}, n)_{A \setminus \{i\}}$$

dönüşümü bir normal simplisel altgrubun kapsamasıdır.

(iii) $j \in \langle n \rangle$ *için*

$$\mu_j \;:\; M(\mathbf{G}, n)_{\langle n \rangle} \longrightarrow \bigcap_{i \neq j} Çekd_i^{n+1}$$

dönüşümü d_n *yardımıyla elde edilir.*

Önerme 2.3.12 **G** *bir simplisel grup ve*

$$\begin{aligned}
K &= M(G,3)_{\{1,2,3\}} \cong NG_3/\partial_4(NG_4)\\
L &= M(G,3)_{\{1,3\}} \cong Çekd_0^2 \cap Çekd_2^2\\
M &= M(G,3)_{\{2,3\}} \cong Çekd_1^2 \cap Çekd_2^2\\
N &= M(G,3)_{\{1,2\}} \cong Çekd_0^2 \cap Çekd_1^2\\
P &= M(G,3)_{\{1\}} \cong Çekd_0^2\\
Q &= M(G,3)_{\{2\}} \cong Çekd_1^2\\
R &= M(G,3)_{\{3\}} \cong Çekd_2^2\\
S &= M(G,3)_{\emptyset} \cong G_2
\end{aligned}$$

olsun. K dan L ye tanımlı λ_L, λ_N ve λ_M dönüşümleri d_3^3 dönüşümünden elde edilen dönüşüm, v_P, v_R, v_Q, δ_1, δ_2 ve δ_3 dönüşümleri içine dönüşümler olmak üzere

$$\begin{aligned}
h_1 : Q \times L &\to K\\
(x,y) &\mapsto [s_1x_2s_0x_2^{-1}, s_2y_2^{-1}s_1y_2^{-1}]\partial_4(NG_4)\\
h_2 : P \times M &\to K\\
(x,y) &\mapsto [s_1x_2, s_2y_2s_1y_2^{-1}s_0y_2]\partial_4(NG_4)\\
h_3 : N \times R &\to K\\
(x,y) &\mapsto [s_2x_2, s_2y_2s_1y_2^{-1}]\partial_4(NG_4)\\
h_4 : P \times R &\to L\\
(x,y) &\mapsto [x,y]\\
h_5 : Q \times R &\to M\\
(x,y) &\mapsto [x,y]\\
h_6 : P \times Q &\to N\\
(x,y) &\mapsto [x,y]
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{rcll}
h_7 & : & L \times M & \rightarrow \; K \\
 & & (x,y) & \mapsto \; h_2(v_P x, y) = h_2(x,y) \\
h_8 & : & N \times L & \rightarrow \; K \\
 & & (x,y) & \mapsto \; h_3(x, v_R y) = h_3(x,y) \\
h_9 & : & N \times M & \rightarrow \; K \\
 & & (x,y) & \mapsto \; h_3(x, v_r y) = h_3(x,y)
\end{array}
$$

şeklinde tanımlı $h-$dönüşümleri ile birlikte

$$
\begin{tikzcd}
 & Çekd_0^2 \cap Çekd_1^2 \arrow[rr, "\nu_Q"] \arrow[dd, "\nu_P"] & & Çekd_1^2 \arrow[dd, "\delta_2"] \\
NG_3/\partial_4(NG_4) \arrow[ur, "\lambda_N"] \arrow[rr, "\lambda_M"] \arrow[dd, "\lambda_L"] & & Çekd_1^2 \cap Çekd_2^2 \arrow[ur, "\nu_Q"] \arrow[dd, "\nu_Q"] & \\
 & Çekd_0^2 \arrow[rr, "\delta_1"] & & G_2 \\
Çekd_0^2 \cap Çekd_2^2 \arrow[ur, "\nu_P"] \arrow[rr, "\nu_Q"'] & & Çekd_2^2 \arrow[ur, "\delta_3"] &
\end{tikzcd}
$$

, $(\mathcal{M}_3(G))$, *diagramı bir çaprazlanmış 3-küptür.*

İspat: h_3, $h-$dönüşümü ile birlikte $\mu = \delta_3$, $\mu' = \delta_2 \circ v_Q$, $\partial_3' = \lambda_N$ ve $\partial_3 = v_R \circ \lambda_L$ olmak üzere

$$
\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\partial_3"] \arrow[d, "\partial_3'"'] & R \arrow[d, "\mu"] \\
N \arrow[r, "\mu'"'] & G_2
\end{tikzcd}
$$

diagramının çaprazlanmış kare olduğunu gösterelim. G_2 nin $NG_3/\partial_4(NG_4)$ üzerine etkisi olduğundan R nin N ve K üzerine μ, N nin R ve K üzerine μ' vasıtasıyla etkisi vardır.

(**ÇK1**) μ ve μ' içine homomorfizmalar olduğundan ve ∂_3' ve ∂_3 ise d_3 ün kısıtlanışı olduğundan μ, μ', ∂_3 ve ∂_3' dönüşümleri çaprazlanmış modüldür. $\mu\partial_3$ ün çaprazlanmış modül olduğunu gösterelim. $\overline{x}, \overline{y} \in NG_3/\partial_4(NG_4)$ ve x, $y \in G_2$ olsun.

$$\begin{aligned}
\mu\partial_3({}^{x}\overline{y}) &= \mu\partial_3(s_2x\overline{y}s_2x^{-1}) \\
&= \mu(x\partial_3\overline{y}x^{-1}) \qquad \text{(etki tanımından)} \\
&= \mu x\mu\partial_3\overline{y}\mu x^{-1} \\
&= x\mu\partial_3\overline{y}x^{-1} \\
{}^{\mu\partial_3(\overline{x})}y &= s_2\mu\partial_3(\overline{x})\overline{y}s_2\mu(\partial_3\overline{x})^{-1} \\
&\equiv \overline{xy}(\overline{x})^{-1} \bmod(\partial_3 NG_3)
\end{aligned}$$

Böylece $\mu\partial_3$ bir çaprazlanmış modüldür. Benzer şekilde $\mu'\partial_3'$ de çaprazlanmış modüldür.

(**ÇK2**): $x \in N$ ve $y \in R$ için

$$\begin{aligned}
\partial_3 h(x,y) &= \partial_3[s_2x, s_2ys_1y^{-1}] \\
&= [x, ys_1d_2y^{-1}] \\
&= [x,y] \qquad (y \in R = \text{Ç}ekd_2) \\
&= x^{y}x^{-1} = x^{\mu y}x^{-1}
\end{aligned}$$

(**ÇK3**): $x \in N$ ve $y \in R$ için

$$\begin{aligned}
\partial_3' h(x,y) &= \partial_3'[s_2x, s_2ys_1y^{-1}] \\
&= [x, ys_1d_2y^{-1}] \\
&= [x,y] \\
&= {}^{x}yy^{-1} \\
&= {}^{\mu' x}yy^{-1}
\end{aligned}$$

(**ÇK4**): $x \in K$ ve $y \in R$ için

$$\begin{aligned} h(\partial_3^{\prime}(x), y) &= [s_2\partial_3 x, s_2 y s_1 y^{-1}]\partial_4 NG_4 \\ &= [s_2 d_3 x, s_2 y] s_2 y [s_2 d_3 x, s_1 y^{-1}] s_2 y^{-1} \\ &\equiv [x, s_2 y] \qquad \bmod \partial_4 NG_4 \\ &= x^y x^{-1} \end{aligned}$$

(**ÇK5**): $x_3 \in K$ ve $y \in N$ için

$$\begin{aligned} h(y, \partial_3 x_3) &= [s_2 y, s_2\partial_3 x_3 s_1 \partial_3 x_3^{-1}]\partial_4 NG_4 \\ &= \left([s_2 y, s_2\partial_3 x_3] s_2\partial_3 x_3 [s_2 y, s_1\partial_3 x_3] s_2 \partial_3 x_3^{-1}\right)\partial_4 NG_4 \\ &\equiv [s_2 x, x_3] \qquad \bmod \partial_4 NG_4 \\ &= {}^{y}x_3 x_3^{-1} \end{aligned}$$

(**ÇK6**): $x,\, x^{\prime} \in N$ ve $y \in R$ için

$$\begin{aligned} h(xx^{\prime}, y) &= [s_2(xx^{\prime}), s_2 y s_1 y^{-1}]\partial_4 NG_4 \\ &= s_2 x [s_2 x^{\prime}, s_2 y s_1 y^{-1}] s_2 x^{-1} [s_2 x, s_2 y s_1 y^{-1}] \\ &= {}^{x}h(x^{\prime}, y) h(x, y) \end{aligned}$$

(**ÇK7**): $x \in N$ ve $y,\, y_1 \in R$ için

$$\begin{aligned} h(x, yy_1) &= [s_2 x, s_2(yy_1) s_1 (yy_1)^{-1}] \\ &= [s_2 x, s_2 y s_1 y^{-1} s_1 y s_2 y_1 s_1 (yy_1)^{-1}]\partial_4 NG_4 \\ &= [s_2 x, (s_2 y s_1 y^{-1})(s_1 y s_2 y_1 s_1 y_1^{-1} s_1 y^{-1})]\partial_4 NG_4 \\ &= [s_2 x, s_2 y s_1 y^{-1}] s_2(y) s_1 y^{-1} [s_2 x, s_1 y s_2 y_1 s_1 y_1^{-1} s_1 y^{-1}] s_1 y s_2 y^{-1} \partial_4 NG_4 \\ &= [s_2 x, s_2 y s_1 y^{-1}]^{y} [s_1 y^{-1} s_2 x s_1 y, s_2 y_1 s_1 y_1^{-1}]\partial_4 NG_4 \\ &\equiv [s_2 x, s_2 y s_1 y^{-1}]^{y} [s_2 x, s_2 y_1 s_1 y^{-1}]\partial_4 NG_4 \\ &= h(x, y)^{y} h(x, y_1) \end{aligned}$$

Şimdi h_2, $h-$dönüşümü ile birlikte $\mu = \delta_1$, $\mu^{\shortmid} = \delta_2 \circ v_Q$, $\partial_3^{\shortmid} = \lambda_M$ ve $\partial_3 = v_P \circ \lambda_N$ olmak üzere

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\partial_3"] \arrow[d, "\partial_3'"'] & P \arrow[d, "\mu"] \\ M \arrow[r, "\mu'"'] & G_2 \end{tikzcd}$$

diagramının çaprazlanmış kare olduğunu gösterelim. h_3-dönüşümünün çaprazlanmış kare olduğunu göstermiştik. Bazı şartlar benzer olacağından tüm şartlar incelenmeyecektir. $x, x\prime \in P, y, y\prime \in M$ olmak üzere

(**ÇK2**)

$$\begin{aligned} \partial_3 h(x,y) &= \partial_3[s_2x, s_2ys_1y^{-1}s_0y] \\ &= [x, ys_1d_2y^{-1}s_0d_2y] \\ &= [x,y] \qquad (y \in R = \text{Ç}ekd_2) \\ &= x^y x^{-1} = x^{\mu y}x^{-1} \end{aligned}$$

(**ÇK4**)

$$\begin{aligned} h(\partial_3^{\shortmid}(x), y) &= [s_2\partial_3 x, s_2ys_1y^{-1}s_0y]\partial_4 NG_4 \\ &= [s_2d_3x, s_2y]s_2y[s_2d_3x, s_1y^{-1}s_0y]s_2y^{-1} \\ &\equiv [x, s_2y] \qquad \bmod \partial_4 NG_4 \\ &= x^y x^{-1} \end{aligned}$$

(**ÇK6**) x, $x^{\shortmid} \in N$ ve $y \in R$ için

$$\begin{aligned} h(xx^{\shortmid}, y) &= [s_2(xx^{\shortmid}), s_2ys_1y^{-1}s_0y]\partial_4 NG_4 \\ &= s_2x[s_2x^{\shortmid}, s_2ys_1y^{-1}]s_2x^{-1}[s_2x, s_2ys_1y^{-1}] \\ &= {}^{x}h(x^{\shortmid}, y)h(x,y) \end{aligned}$$

dir. Böylelikle h_2, $h-$dönüşümü bir çaprazlanmış karedir. Benzer şekilde h_1, $h-$dönüşümünün de bir çaprazlanmış kare olduğu gösterilir. Sırasıyla h_4, h_5, h_6, h_7, h_8 ve h_9, $h-$dönüşümleri ile birlikte

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[d] \\ R \arrow[r] & G_2 \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[d] \\ R \arrow[r] & G_2 \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} N \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[d] \\ Q \arrow[r] & G_2 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[d] \\ M \arrow[r] & R \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[d] \\ L \arrow[r] & P \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[d] \\ M \arrow[r] & Q \end{tikzcd}$$

diagramlarının birer çaprazlanmış kare olduğu ve diğer $3-$çaprazlanmış küp şartları komütatör işleminin özellikleri kullanılarak elde edilir. Tanımlanan $h-$dönüşümleri ve etkilerle verilen küp diagramı bir $3-$çaprazlanmış küptür.

□

Tanım 2.3.13 *[21] L, M, N, Q, P, R ve S birer grup olmak üzere herbir yüzeyi çaprazlanmış kare (çaprazlanmış $2-$küp) olan*

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[rr, "\nu_Q"] \arrow[dd, "\nu_P"'] & & Q \arrow[dd, "\delta"] \\ & & M \arrow[ur, "\nu_Q"] \arrow[dd, "\nu_R"'] & \\ & P \arrow[rr, "\delta"] & & S \\ L \arrow[ur, "\nu_P"] \arrow[rr, "\nu_R"'] & & R \arrow[ur, "\delta"] & \end{tikzcd}$$

diagramı verilsin. Herbir grubun birbiri üzerine etkisi S vasıtasıyla olsun.

Şimdi

$$\lambda_L : T \longrightarrow L \quad , \quad \lambda_M : T \longrightarrow M \quad , \quad \lambda_N : T \longrightarrow N$$

dönüşümleri ile birlikte yukarıda verilen diagramı universal'lik özelliğine sahip bir çaprazlanmış $3-$*küp yapacak şekilde bir* T *grubu elde edelim (Yani, verilen diagramı bir çaprazlanmış* $3-$*küp yapacak şekilde bir* T' *grubuna ve* $\lambda_{L'}$, $\lambda_{M'}$, $\lambda_{N'}$ *dönüşümlerine karşın bir tek* $T \to T'$ *çaprazlanmış* $3-$*küp dönüşümü olacak şekilde bir* T *bulacağız).* $(q,l) \in Q \times L$, $(p,m) \in P \times M$, $(n,r) \in N \times R$ *olmak üzere* T_0,

$$q \otimes_1 l \quad , \quad p \otimes_2 m \quad , \quad n \otimes_3 r$$

elemanları tarafından üretilen ve aşağıdaki şartları sağlayan bir grup olsun: (Aşağıda verilen bağıntılardaki etkilerin hepsinin S *vasıtasıyla olduğunu kabul edelim ve* $\{{}^s x \otimes_i {}^s y\}$ *yerine* ${}^s\{x \otimes_i y\}$ *yazalım) Her* $l, l' \in L$, $m, m' \in M$, $n, n' \in N$, $p, p' \in P$, $q, q' \in Q$, $r, r' \in R$ *için*

(i)

$$\begin{aligned}
q \otimes_1 ll' &= (q \otimes_1 l)\ {}^l(q \otimes_1 l') \\
qq' \otimes_1 l &= {}^q(q' \otimes_1 l)(q \otimes_1 l) \\
pp' \otimes_2 m &= {}^p(p' \otimes_2 m)(p \otimes_2 m) \\
p \otimes_2 mm' &= (p \otimes_2 m)\ {}^m(p \otimes_2 m') \\
nn' \otimes_3 r &= {}^n(n' \otimes_3 r)(n \otimes_3 r) \\
n \otimes_3 rr' &= (n \otimes_3 r)\ {}^r(n \otimes_3 r')
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
(p \otimes_2 m)(q \otimes_1 l)(p \otimes_2 m)^{-1} &= {}^{[p,m]}(q \otimes_1 l) \\
(n \otimes_3 r)(q \otimes_1 l)(n \otimes_3 r)^{-1} &= {}^{[n,r]}(q \otimes_1 l) \\
(q \otimes_1 l)(p \otimes_2 m)(q \otimes_1 l)^{-1} &= {}^{[q,l]}(p \otimes_2 m) \\
(n \otimes_3 r)(p \otimes_2 m)(n \otimes_3 r)^{-1} &= {}^{[n,r]}(p \otimes_2 m) \\
(q \otimes_1 l)(n \otimes_3 r)(q \otimes_1 l)^{-1} &= {}^{[q,l]}(n \otimes_3 r) \\
(p \otimes_2 m)(n \otimes_3 r)(p \otimes_2 m)^{-1} &= {}^{[p,m]}(n \otimes_3 r)
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
v_Q({}^p m m^{-1}) \otimes_1 l &= (p \otimes_2 m)\ {}^l(p \otimes_2 m)^{-1} \\
v_Q(n\ {}^r n^{-1}) \otimes_1 l &= (n \otimes_3 r)\ {}^l(n \otimes_3 r)^{-1} \\
v_P({}^q l l^{-1}) \otimes_2 m &= (q \otimes_1 l)^m (q \otimes_1 l)^{-1} \\
v_P(n\ {}^r n^{-1}) \otimes_2 m & \quad (n \otimes_3 r)^m (n \otimes_3 r)^{-1} \\
n \otimes_3 v_R({}^p m m^{-1}) &= {}^n(p \otimes_2 m)(p \otimes_2 m)^{-1} \\
n \otimes_3 v_R({}^q l l^{-1}) &= {}^n(q \otimes_1 l)(q \otimes_1 l)^{-1} \\
p \otimes_2 h(v_Q n, r) &= {}^p(n \otimes_3 r)(n \otimes_3 r)^{-1} \\
p \otimes_2 h(q, v_R l) &= {}^p(q \otimes_1 l)(q \otimes_1 l)^{-1} \\
q \otimes_1 h(p, v_R m) &= {}^q(p \otimes_2 m)(p \otimes_2 m)^{-1} \\
q \otimes_1 h(v_{Pn}, r) &= {}^q(n \otimes_3 r)(n \otimes_3 r)^{-1} \\
h(v_P l, q) \otimes_3 r &= (l \otimes_1 q)^r (l \otimes_1 q)^{-1} \\
h(p, v_Q m) \otimes_3 r &= (p \otimes_2 m)^r (p \otimes_2 m)^{-1}
\end{aligned}$$

(iv)

$$((v_P n)(v_P l) \otimes_2 m)((v_Q m)(v_Q n) \otimes_1 l) \quad = \quad (n \otimes_3 (v_R l)(v_R m))$$

(v)

$${}^q(h(p, q^{-1})^{-1} \otimes_3 r) \quad = \quad {}^p(q \otimes_1 h(p^{-1}, r))^r (p \otimes_2 h(q, r^{-1})^{-1})$$

(vi)

$$\begin{aligned}
v_Q m \otimes_1 l &= (v_P l \otimes_2 m)^{-1} \\
v_P n \otimes_2 m &= n \otimes_3 v_R m \\
v_Q n \otimes_1 l &= n \otimes_3 v_R l
\end{aligned}$$

Dikkat edileceği üzere S nin T_0 üzerine

$$\begin{aligned}
{}^s\{q \otimes_1 l\} &= \{{}^s q \otimes_1 {}^s l\} \\
{}^s\{p \otimes_2 m\} &= \{{}^s p \otimes_2 {}^s m\} \\
{}^s\{n \otimes_3 r\} &= \{{}^s n \otimes_3 {}^s r\}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı etkisi vardır. Üreteçler üzerinde

$$\lambda_L \ : \ T_0 \longrightarrow L \ , \ \lambda_M \ : \ T_0 \longrightarrow M \ , \ \lambda_N \ : \ T_0 \longrightarrow N$$

dönüşümlerini

$$\begin{aligned}
\lambda_L(q \otimes_1 l) &= {}^{q}l l^{-1} \\
\lambda_L(p \otimes_2 m) &= h(p, v_R m) \\
\lambda_L(n \otimes_3 r) &= h(v_P n, r) \\
\lambda_M(q \otimes_1 l) &= h(q, v_R l) \\
\lambda_M(p \otimes_2 m) &= {}^{p}m m^{-1} \\
\lambda_L \lambda_M(n \otimes_3 r) &= h(v_Q n, r) \\
\lambda_L \lambda_M \lambda_N(q \otimes_1 l) &= h(v_P l, q)^{-1} \\
\lambda_N(p \otimes_2 m) &= h(p, v_Q m) \\
\lambda_N(n \otimes_3 r) &= n^r n^{-1}
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlayalım. Son olarak

$$\begin{aligned}
h \ : \ Q \times L &\to T_0 \\
(q, l) &\mapsto q \otimes_1 l \\
h \ : \ P \times M &\to T_0 \\
(p, m) &\mapsto p \otimes_2 m \\
h \ : \ N \times R &\to T_0 \\
(n, r) &\mapsto n \otimes_3 r
\end{aligned}$$

dönüşümlerini tanımlayalım. Böylece verilen diagram; tanımlanan T_0 *grubu,* λ_L, λ_M, λ_N *homomorfizmaları ve* $h-$*dönüşümleriyle birlikte bir universal çaprazlanmış* $3-$*küptür.*

Önerme 2.3.14 *[21] Yukarıda tanımlanan* T_0 *grubu, verilen diagramın bir kübik tensör çarpımdır.*

Önerme 2.3.15 $K \xrightarrow{\partial_3} L \xrightarrow{\partial_2} M \xrightarrow{\partial_1} N$ *bir 3-çaprazlanmış modül olsun.* $M = \{1\}$ *ise*

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\partial_3} & L \\ {\scriptstyle \partial_3'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Id} \\ L & \xrightarrow[Id]{} & L \end{array}$$

değişmeli diagramı, L nin L üzerine etkisi eşlenik etki olmak üzere

$$\begin{aligned} \{,\}_{(2)(1)} &: L \times L \to K \\ \{,\}_{(0)(2)} &: L \times L \to K \\ \{,\}_{(0)(1)}) &: L \times L \to K \\ (x,y) &\mapsto \{y,x\}^{-1}_{(1)(0)} \end{aligned}$$

dönüşümlerinin herbiri ile birlikte bir çaprazlanmış kare yapısı oluşturur.

İspat: **(i)** İlk olarak $\{,\}_{(2)(1)}$ dönüşümü ile birlikte verilen diagramın bir çaprazlanmış kare olduğunu gösterelim. Öncelikle $M = \{1\}$ olduğundan $l \in L$ için $\partial_2(l) = 1_M$ dir. Dolayısıyla $l, l', l'' \in L$, $k, k' \in K$ için

$$\begin{aligned} \{l, \partial_3 k\}_{(2)(1)} &= l \cdot k({}^{\partial_2 l}k^{-1}) && \textbf{(3CM(11)} \text{ den)} \\ &= l \cdot k({}^{1}k^{-1}) \\ &= l \cdot k(k^{-1}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\{l, \partial_3 k\}_{(2)(1)} = l \cdot k(k^{-1})} \qquad \textbf{(I)}$$

$$\begin{aligned} \{ll', l''\}_{(2)(1)} &= l \cdot \{l', l''\}_{(2)(1)} \left\{l, {}^{\partial_2 l'} l''\right\}_{(2)(1)} && \textbf{(3CM(15)} \text{ den)} \\ &= l \cdot \{l', l''\}_{(2)(1)} \left\{l, {}^{1} l''\right\}_{(2)(1)} \\ &= l \cdot \{l', l''\}_{(2)(1)} \{l, l''\}_{(2)(1)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\{ll', l''\}_{(2)(1)} = l \cdot \{l', l''\}_{(2)(1)} \{l, l''\}_{(2)(1)}} \qquad \textbf{(II)}$$

$$\boxed{\{l,l'l''\}_{(2)(1)}=\{l,l'\}_{(2)(1)}\ \ l'\{l,l''\}_{(2)(1)}} \qquad \textbf{(III)}$$

$$\begin{aligned}\partial_3\{l,l'\}_{(2)(1)} &= ll'l^{-1}({}^{\partial_2 l}l')^{-1} && (\textbf{3CM(6)}\text{ dan})\\ &= ll'l^{-1}({}^{1}l')^{-1}\\ &= ll'l^{-1}(l')^{-1}\\ &= l({}^{l'}l^{-1})\end{aligned}$$

$$\boxed{\partial_3\{l,l'\}_{(2)(1)}=l({}^{l'}l^{-1})} \qquad \textbf{(IV)}$$

bulunur. Şimdi çaprazlanmış kare şartlarının sağlandığını gösterelim.

ÇK1) $K\overset{\partial_3}{\to}L\overset{\partial_2}{\to}M\overset{\partial_1}{\to}N$ bir 3-çaprazlanmış modül olduğundan tanım gereğince $K\overset{\partial_3}{\to}L$ bir çaprazlanmış modüldür. Yine çaprazlanmış modül tanımı gereğince L nin L üzerine konjuge etki olduğundan $L\overset{Id}{\to}L$ ve $Id(\partial_3)=\partial_3$ olduğundan $Id\partial_3$ birer çaprazlanmış modüldür.

ÇK2) (IV) gereğince

$$\begin{aligned}\partial_3\{l,l'\}_{(2)(1)} &= l({}^{l'}l^{-1})\\ &= l({}^{Ldl'}l^{-1})\end{aligned}$$

ÇK3) Yine **(IV)** gereğince

$$\begin{aligned}\partial_3\{l,l'\}_{(2)(1)} &= l({}^{l'}l^{-1})\\ &= ll'l^{-1}(l')^{-1}\\ &= {}^{l}l'(l')^{-1}\\ &= {}^{Idl}l'(l')^{-1}\end{aligned}$$

ÇK4) 3CM(10) gereğince

$$\{\partial_3 k,l\}_{(2)(1)}=k\ (l\cdot k^{-1})$$

ÇK5) (I) gereğince

$$\{l,\partial_3 k\}_{(2)(1)}=l\cdot k(k^{-1})$$

ÇK6) **(II)** gereğince

$$\{ll', l''\}_{(2)(1)} = l \cdot \{l', l''\}_{(2)(1)} \{l, l''\}_{(2)(1)}$$

ÇK7) **(III)** gereğince

$$\{l, l'l''\}_{(2)(1)} = \{l, l'\}_{(2)(1)} \; l' \cdot \{l, l''\}_{(2)(1)}$$

ÇK8) 3-çaprazlanmış modül tanımı gereğince

$$l \cdot \{l', l''\}_{(2)(1)} = \{l \cdot l', l \cdot l''\}_{(2)(1)}$$

böylece verilen diagram $\{,\}_{(2)(1)}$ dönüşümü ile beraber bir çaprazlanmış karedir. $M = \{1\}$ olduğundan **3CM(2)** gereğince

$$\begin{aligned} \{l, \partial_2 l'\}_{(0)(2,1)} &= (\{l, l'\}_{(2)(1)})^{-1} \{l', l\}_{(1)(0)} \\ \{l, 1\}_{(0)(2,1)} &= (\{l, l'\}_{(2)(1)})^{-1} \{l', l\}_{(1)(0)} \\ 1 &= (\{l, l'\}_{(2)(1)})^{-1} \{l', l\}_{(1)(0)} \end{aligned}$$

ve buradan

$$(\{l', l\}_{(1)(0)}) = \{l, l'\}_{(2)(1)}$$

olur. Şimdi tanımlanan $\{l', l\}_{(0)(1)}$ dönüşümü ile birlikte verilen diagramın bir çaprazlanmış kare olduğunu gösterelim.

ÇK1) $K \overset{\partial_3}{\to} L \overset{\partial_2}{\to} M \overset{\partial_1}{\to} N$ bir bir 3-çaprazlanmış modül olduğundan tanım gereğince $K \overset{\partial_3}{\to} L$ bir çaprazlanmış modüldür. Yine çaprazlanmış modül tanımı gereğince L nin L üzerine konjuge etkisi ile birlikte $L \overset{Id}{\to} L$ ve $Id(\partial_3) = \partial_3$ olduğundan $Id\partial_3$ birer çaprazlanmış modüldür.

ÇK2) **(3CM5)** gereğince

$$\begin{aligned} \partial_3 \{l, l'\}_{(0)(1)} &= ([l', l]\{\partial_2 l, \partial_2 l'\})^{-1} \\ &= [l, l'] \\ &= ll'(l)^{-1}(l')^{-1} \\ &= l({}^{l'}l^{-1}) \\ &= l({}^{Ldl'}l^{-1}) \end{aligned}$$

ÇK3) Yine **(3CM5)** gereğince

$$\begin{aligned}\partial_3 \{l,l'\}_{(0)(1)} &= ll'(l)^{-1}(l')^{-1} \\ &= {}^{l}l'(l')^{-1} \\ &= {}^{Idl}l'(l')^{-1}\end{aligned}$$

ÇK4) 3CM(12) gereğince

$$\begin{aligned}\{\partial_3 k,l\}_{(0)(1)} &= \big((l\cdot k)k^{-1}\big)^{-1} \\ &= k\ (l\cdot k^{-1})\end{aligned}$$

ÇK5) 3CM(13) gereğince

$$\begin{aligned}\{l,\partial_3 k\}_{(0)(1)} &= (k(l\cdot k^{-1}))^{-1} \\ &= (l\cdot k)k^{-1}\end{aligned}$$

ÇK6) 3CM(16) gereğince

$$\begin{aligned}\{ll',l''\}_{(0)(1)} &= (\{ll',l''\}_{(1)(0)})^{-1} \\ &= (\{l'',ll'\}_{(2)(1)})^{-1} \\ &= (\{l'',l'\}_{(2)(1)}\ {}^{\partial_2 l''}l\cdot\{l'',l'\}_{(2)(1)})^{-1} \\ &= l\cdot\{l'',l'\}^{-1}_{(2)(1)}\,\{l'',l\}^{-1}_{(2)(1)} \\ &= l\cdot\{l',l''\}^{-1}_{(1)(0)}\,\{l,l''\}^{-1}_{(1)(0)} \\ &= l\cdot\{l',l''\}_{(0)(1)}\,\{l,l''\}_{(0)(1)}\end{aligned}$$

ÇK7) 3CM(15) gereğince

$$\begin{aligned}
\{l, l'l''\}_{(0)(1)} &= (\{l, l'l''\}_{(0)(1)})^{-1} \\
&= (\{l'l'', l\}_{(2)(1)})^{-1} \\
&= (l' \cdot \{l'', l\}_{(2)(1)} \left\{l', {}^{\partial_2 l''} l\right\}_{(2)(1)})^{-1} \\
&= \{l', l\}_{(2)(1)}^{-1}\, l' \cdot \{l'', l\}_{(2)(1)}^{-1} \\
&= \{l, l'\}_{(1)(0)}^{-1}\, l' \cdot \{l, l''\}_{(1)(0)}^{-1} \\
&= \{l, l'\}_{(0)(1)}\;\; l' \cdot \{l, l''\}_{(0)(1)}
\end{aligned}$$

ÇK8) 3-çaprazlanmış modül tanımı gereğince

$$l \cdot \{l', l''\}_{(0)(1)} = \{l \cdot l', l \cdot l''\}_{(0)(1)}$$

dir. Böylece verilen diagram $\{,\}_{(0)(1)}$ dönüşümü ile beraber bir çaprazlanmış karedir. **3CM(4)** gereğince

$$\{\partial_2 l, l'\}_{(1,0)(1)} = (\{l, l'\}_{(0)(2)})^{-1}$$

dir ve $M = \{1\}$ olduğundan her $l, l' \in L$

$$1 = (\{l, l'\}_{(0)(2)})^{-1}$$

olur. Buradan hareketle verilen diagram $\{,\}_{(0)(2)}$ dönüşümü ile beraber bir çaprazlanmış karedir. □

Not 2.3.16 *Tanım 2.3.12 de verilen universal küp tanımında* $P, R, N, M = L,\ S = M$ *ve* $T_0 = K \otimes K \otimes K$ *alınırsa;* $\{,\}_{(0)(1)}$, $\{,\}_{(2)(1)}$,

$\{,\}_{(0)(2)}$ *döünüşümleri yardımıyla elde edilen çaprazlanmış kareler kullanılarak*

$$\begin{tikzcd}
& K \arrow[rr] \arrow[dd] & & L \arrow[dd] \\
K \otimes K \otimes K \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & K \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
& L \arrow[rr] & & L \\
K \arrow[ur] \arrow[rr] & & L \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

şeklinde bir universal çaprazlanmış 3-küp elde edilir.

Bölüm 3

Simplisel Gruplar ve 3-Çaprazlanmış Modüller

3.1 Giriş

Z. Arvasi [5] değişmeli cebirler için Moore kompleksinin boyutu 1 olan simplisel cebirler kategorisinin çaprazlanmış modüller kategorisine denkliğini göstermiş ve Peiffer elemanları kullanılarak bu sonuç boyut 2 ye genişletilmiştir. Daha sonra A.Mutlu [37] bu sonuçları gruplar için ispatlamıştır. Bu bölümde ilk olarak Z.Arvasi nin [5] de kullandığı metod yardımıyla bir simplisel grubun Moore kompleksini ve ilk bölümde verilen Peiffer üreteçlerini kullanarak Simplisel gruplar kategorisinden 3-çaprazlanmış modüller kategorisine bir funktor tanımlayacağız. Daha sonra Conduche'nin [18] de kullandığı metod yardımıyla tanımlanan bu funktorun bir sol adjointini tanımlayarak 3-çaprazlanmış modüller kategorisi ile simplisel gruplar kategorisinin doğal denkliğini göstereceğiz.

3.2 $\mathfrak{SimpGrp}$ ve $\mathfrak{X}_3\mathfrak{Mod}$ Kategorilerinin Denk liği

Önerme 3.2.1 **G** *bir simplisel grup ve Moore kompleksi* **NG** *olsun. Bu durumda*

$$NG_3/\partial_4(NG_4 \cap D_4) \xrightarrow{\overline{\partial}_3} NG_2 \xrightarrow{\partial_2} NG_1 \xrightarrow{\partial_1} NG_0$$

grup kompleksi aşağıdaki biçimde tanımlanan Peiffer dönüşümleri ile birlikte bir 3-çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

$$\begin{array}{rcl}
\{,\} : NG_1 \times NG_1 & \rightarrow & NG_2 \\
\{x_1, y_1\} & \mapsto & [s_0x_1, s_1y_1]\,[s_1y_1, s_1x_1] \\
\{,\}_{(1)(0)} : NG_2 \times NG_2 & \rightarrow & NG_3/\partial_4(NG_4 \cap D_4) \\
\{x_2, y_2\} & \mapsto & \overline{([s_0x_2, s_1y_2]\,[s_1y_2, s_1x_2]\,[s_2x_2, s_2y_2])} \\
\{,\}_{(2)(1)} : NG_2 \times NG_2 & \rightarrow & NG_3/\partial_4(NG_4 \cap D_4) \\
\{x_2, y_2\} & \mapsto & \overline{([s_1x_2, s_2y_2]\,[s_2y_2, s_2x_2])} \\
\{,\}_{(0)(2)} : NG_2 \times NG_2 & \rightarrow & NG_3/\partial_4(NG_4 \cap D_4) \\
\{x_2, y_2\} & \mapsto & \overline{([s_0x_2, s_2y_2])} \\
\{,\}_{(1,0)(2)} : NG_1 \times NG_2 & \rightarrow & NG_3/\partial_4(NG_4 \cap D_4) \\
\{x_1, y_2\} & \mapsto & \overline{([s_1s_0x_1, s_2y_2]\,[s_2y_2, s_2s_0x_1])} \\
\{,\}_{(2,0)(1)} : NG_1 \times NG_2 & \rightarrow & NG_3/\partial_4(NG_4 \cap D_4) \\
\{x_1, y_2\} & \mapsto & \overline{([s_2s_0x_1, s_1y_2]\,[s_1y_2, s_2s_1x_1]\,[s_2s_1x_1, s_2y_2]\,[s_2y_2, s_2s_0x_1])} \\
\{,\}_{(0)(2,1)} : NG_2 \times NG_1 & \rightarrow & NG_3/\partial_4(NG_4 \cap D_4) \\
\{y_2, x_1\} & \mapsto & \overline{([s_0y_2, s_2s_1x_1]\,[s_2s_1x_1, s_1y_2])\,[s_2y_2, s_2s_1x_1]}
\end{array}$$

burada $\overline{[,]}$ *şeklindeki elemanlar* $NG_3/\partial_4(NG_4 \cap D_4)$ *içinde bir kosettir ve* NG_3 *içinde ki bir eleman ile temsil edilmektedir.*

İspat:

3CM1)

$$\begin{aligned} d_4(F_{(3,2,0)(1)}(x_1,y_3)) &= [s_2s_0x_1,s_1d_3y_3]\,[s_1d_3y_3,s_2s_1x_1]\,[s_2s_1x_1,s_2d_3y_3] \\ &\quad [s_2d_3y_3,]\,[s_2s_0x_1,y_3]\,[y_3,s_2s_1x_1] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} d_4(F_{(3,1,0)(2)}(x_1,y_3)) &= [s_1s_0x_1,s_2d_3y_3]\,[s_2d_3y_3\ ,s_2s_0x_1] \\ &\quad [s_2s_0x_1,y_3]\,[y_3,s_1s_0x_1] \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \{x_1,\overline{\partial}_3y_3\}_{(2,0)(1)} &= ([s_2s_0x_1,s_2\overline{\partial}_3y_3][s_2\overline{\partial}_3y_3,s_2s_1x_1] \\ &\quad [s_2s_1x_1,s_1\overline{\partial}_3y_3][s_1\overline{\partial}_3y_3,s_2s_0x_1])^{-1} \\ &\equiv ([s_2s_0x_1,y_3][y_3,s_2s_1x_1] \quad mod\ \partial_4(NG_4\cap D_4) \quad (3.1) \\ \{x_1,\overline{\partial}_3y_3\}_{(1,0)(2)} &= ([s_2s_0x_1,s_2\overline{\partial}_3y_3][s_2\overline{\partial}_3y_3,s_1s_0x_1])^{-1} \\ &\equiv [s_2s_0x_1,y_3][y_3,s_1s_0x_1] \quad mod\ \partial_4(NG_4\cap D_4) \quad (3.2) \end{aligned}$$

$$d_4(F_{(2,1,0)(3)}(x_1,y_3)) = [s_2s_1s_0d_1x_1,y_3]\,[y_3,s_1s_0x_1]$$

olduğundan

$$\boxed{[s_2s_1s_0d_1x_1,y_3]\equiv[y_3,s_1s_0x_1] \quad mod\ \partial_4(NG_4\cap D_4)} \qquad (3.3)$$

tür ve (3.1) denklemi (3.2) de terine yazılıp (3.3) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \{x_1,\overline{\partial}_3y_3\}_{(1,0)(2)} &\equiv \{x_1,\overline{\partial}_3y_3\}_{(2,0)(1)}[s_2s_1x_1,y_3][y_3,s_1s_0x_1] \\ &\equiv \{x_1,\overline{\partial}_3y_3\}_{(2,0)(1)}[s_2s_1x_1,y_3] \\ &\quad [y_3,s_2s_1s_0\partial_1x_1] \quad mod\ \partial_4(NG_4\cap D_4) \\ &= \{x_1,\overline{\partial}_3y_3\}_{(2,0)(1)}{}^{x_1}y_3({}^{\partial_1x_1}y_3)^{-1} \qquad (3.4) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\{\overline{\partial}_3 x_3, y_1\}_{(0)(2,1)} &= ([s_2s_1y_1, s_2\overline{\partial}_3 x_3][s_1\overline{\partial}_3 x_3, s_2s_1y_1][s_2s_1y_1, s_0\overline{\partial}_3 x_3])^{-1} \\
&\equiv [s_2s_1y_1, x_3] \ \ mod\ \partial_4(NG_4 \cap D_4) \\
&= {}^{y_1}x_3x_3^{-1}
\end{aligned}$$

yani

$$\{\overline{\partial}_3 y_3, x_1\}_{(0)(2,1)} \equiv {}^{x_1}y_3y_3^{-1} \ \ mod\ \partial_4(NG_4 \cap D_4) \qquad (3.5)$$

tür. (3.4) denklemi (3.5) te yerine yazılırsa

$$\{x_1, \overline{\partial}_3 y_3\}_{(1,0)(2)} = \{x_1, \overline{\partial}_3 y_3\}_{(2,0)(1)}\{\overline{\partial}_3 y_3, x_1\}_{(0)(2,1)}y_3(\ {}^{\partial_1 x_1}y_3)^{-1}$$

bulunur.

3CM2)

$$\begin{aligned}
d_4(F_{(3,0)(2,1)}) &= [s_0x_2, s_2s_1\partial_2y_2][s_2s_1\partial_2y_2, s_1x_2][s_2x_2, s_2s_1\partial_2y_2] \\
&\quad [s_1y_2, s_2x_2][s_1x_2, s_1y_2][s_1y_2, s_0x_2]
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\{x_2, \partial_2y_2\}_{(0)(2,1)} &= [s_0x_2, s_2s_1\partial_2y_2][s_2s_1\partial_2y_2, s_1x_2][s_2x_2, s_2s_1\partial_2y_2] \\
&\equiv [s_1y_2, s_2x_2][s_1x_2, s_1y_2][s_1y_2, s_0x_2] \qquad mod\ \partial_4(NG_4 \cap D_4) \\
&= [s_1y_2, s_2x_2][s_2x_2, s_2y_2][s_2y_2, s_2x_2][s_1x_2, s_1y_2][s_1y_2, s_0x_2] \\
&= ([s_2y_2, s_2x_2][s_2x_2, s_1y_2])^{-1}\{x_2, y_2\}_{(1)(0)} \\
&= (\{y_2, x_2\}_{(1)(2)})^{-1}\{x_2, y_2\}_{(1)(0)}
\end{aligned}$$

bulunur.

3CM3)

$$\begin{aligned} d_4(F_{(2,0)(3,1)}(x_2,y_2)) &= [s_2s_0d_2x_2,s_1y_2][s_1y_2,s_2s_1d_2x_2] \\ &\quad [s_2s_1d_2x_2,s_2y_2][s_2y_2,s_2s_0d_2x_2] \\ &\quad [s_0x_2,s_2y_2][s_2y_2,s_1x_2] \\ &\quad [s_1x_2,s_1y_2][s_1y_2,s_0x_2] \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \{\partial_2x_2,y_2\}_{(2,0)(1)} &= [s_2s_0\partial_2x_2,s_1y_2][s_1y_2,s_2s_1\partial_2x_2] \\ &\quad [s_2s_1\partial_2x_2,s_2y_2][s_2y_2,s_2s_0\partial_2x_2] \\ &\equiv [s_0x_2,s_2y_2][s_2y_2,s_1x_2] \\ &\quad [s_1x_2,s_1y_2][s_1y_2,s_0x_2] \qquad mod\ \partial_4(NG_4\cap D_4) \\ &= \{x_2y_2\}^{-1}_{(0)(2)}[s_2y_2,s_1x_2][s_2x_2,s_2y_2] \\ &\quad [s_2y_2,s_2x_2][s_1x_2,s_1y_2][s_1y_2,s_0x_2] \\ &= \{x_2y_2\}^{-1}_{(0)(2)}[s_2y_2,s_1x_2][s_2x_2,s_2y_2]\{x_2,y_2\}_{(1)(0)} \\ &= \{x_2y_2\}^{-1}_{(0)(2)}[s_2y_2,s_2x_2][s_2x_2,s_2y_2] \\ &\quad [s_2y_2,s_1x_2][s_2x_2,s_2y_2]\{x_2,y_2\}_{(1)(0)} \\ &= \{x_2y_2\}^{-1}_{(0)(2)}[s_2y_2,s_2x_2] \\ &\quad \{x_2,y_2\}_{(1)(0)}[s_2x_2,s_2y_2]\{x_2,y_2\}_{(1)(0)} \\ &= \{x_2,y_2\}^{-1}_{(0)(2)}s_2([y_2,x_2])\{x_2,y_2\}_{(2)(1)}s_2([y_2,x_2]^{-1}) \\ &\quad \{x_2,y_2\}_{(1)(0)} \\ &= \{x_2,y_2\}^{-1}_{(0)(2)}\ {}^{[y_2,x_2]}(\{x_2,y_2\}_{(2)(1)})\{x_2,y_2\}_{(1)(0)} \end{aligned}$$

bulunur.

3CM4)

$$d_4(F_{(1,0)(3,2)}(x_2,y_2)) = [s_1s_0\overline{\partial}_2x_2,s_2y_2][s_2y_2,s_2s_0\overline{\partial}_2x_2][s_0x_2,s_2y_2]$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\{\partial_2 x_2, y_2\}_{(1,0)(2)} &= [s_1 s_0 \overline{\partial}_2 x_2, s_2 y_2][s_2 y_2, s_2 s_0 \overline{\partial}_2 x_2] \\ &\equiv [s_0 x_2, s_2 y_2] \qquad mod\ \partial_4(NG_4 \cap D_4) \\ &= ([s_2 y_2, s_0 x_2])^{-1} \\ &= \{x_2, y_2\}^{-1}_{(0)(2)}\end{aligned}$$

bulunur.

3CM5)

$$\begin{aligned}\overline{\partial}_3(\{x_2, y_2\}_{(1)(0)}) &= [x_2, y_2]\left[\overline{\partial}_3 s_1 x_2, \overline{\partial}_3 s_1 y_2\right]\left[\overline{\partial}_3 s_1 y_2, \overline{\partial}_3 s_0 x_2\right] \\ &= [x_2, y_2]\, s_1 \left[\partial_2 x_2, \partial_2 y_2\right]\left[s_1 \partial_2 y_2, s_0 \partial_2 x_2\right] \\ &= [x_2, y_2]\left\{\partial_2 x_2, \partial_2 y_2\right\}\end{aligned}$$

3CM6)

$$\begin{aligned}\overline{\partial}_3\left(\{x_2, y_2\}_{(2)(1)}\right) &= [x_2, y_2]\left[y_2, s_1 \partial_2 x_2\right] \\ &= x_2 y_2 x_2^{-1} y_2^{-1} y_2 s_1 \partial_2 x_2 y_2^{-1} s_1 \partial_2 x_2^{-1} \\ &= x_2 y_2 x_2^{-1} ({}^{\partial_2 x_2} y_2)^{-1}\end{aligned}$$

3CM7)

$$\overline{\partial}_3\left(\{x_2, y_2\}_{(0)(2)}\right) = \overline{\partial}_3\left(\{\partial_2 x_2, y_2\}_{(1,0)(2)}\right)^{-1}$$

3CM8)

$$\begin{aligned}\overline{\partial}_3 \{x_2, y_1\}_{(0)(2,1)} &= \overline{\partial}_3\left([s_2 s_1 y_1, s_2 x_2]\left[s_1 x_2, s_2 s_1 y_1\right]\left[s_2 s_1 y_1, s_0 x_2\right]\right) \\ &= [s_1 y_1, x_2]\left[\overline{\partial}_3 s_1 x_2, s_1 y_1\right]\left[s_1 y_1, \overline{\partial}_3 s_0 x_2\right] \\ &= {}^{y_1} x_2 x_2^{-1}\left\{\partial_2 x_2, y_1\right\}\end{aligned}$$

3CM9)

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}_3\left\{x_1,y_2\right\}_{(1,0)(2)} &= \left[s_0x_1,y_2\right]\left[y_2,\overline{\partial}_3s_1s_0x_1\right] \\
\overline{\partial}_3\left\{x_1,y_2\right\}_{(1,0)(2)}\left[\overline{\partial}_3s_1s_0x_1,y_2\right] &= \left[s_0x_1,y_2\right] \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}_3\left\{x_1,y_2\right\}_{(2,0)(1)} &= \left[s_0x_1,y_2\right]\left[y_2,s_1x_1\right]\left[s_1x_1,\partial_3s_1y_2\right]\left[\partial_3s_1y_2,s_0x_1\right] \\
&= \left[s_0x_1,y_2\right]\left[y_2,s_1x_1\right]\left[s_1x_1,s_1\partial_2y_2\right]\left[s_1\partial_2y_2,s_0x_1\right] \\
&= \left[s_0x_1,y_2\right]\left[y_2,s_1x_1\right]\left\{x_1,\partial_2y_2\right\} \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

(3.5) ve (3.6) den

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}_3\left\{x_1,y_2\right\}_{(2,0)(1)} &= \overline{\partial}_3\left\{x_1,y_2\right\}_{(1,0)(2)}\left[\overline{\partial}_3s_1s_0x_1,y_2\right]\left[y_2,s_1x_1\right]\left\{x_1,\partial_2y_2\right\} \\
&= \overline{\partial}_3\left\{x_1,y_2\right\}_{(1,0)(2)}\left[s_1s_0\partial_1x_1,y_2\right]\left[y_2,s_1x_1\right]\left\{x_1,\partial_2y_2\right\} \\
&= \overline{\partial}_3\left\{x_1,y_2\right\}_{(1,0)(2)}\ {}^{\partial_1x_1}y_2\ {}^{x_1}(y_2^{-1})\left\{x_1,\partial_2y_2\right\}
\end{aligned}$$

bulunur.

3CM10)

$$d_4(F_{(1)(3,2)}(x_3,y_2)) = \left[s_1d_3x_3,s_2y_2\right]\left[s_2y_2,s_2d_3x_3\right]\left[x_3,s_2y_2\right]$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\{\overline{\partial}_3x_3,y_2\}_{(2)(1)} &= [s_1\overline{\partial}_3x_3,s_2y_2][s_2y_2,s_2\overline{\partial}_3x_3] \\
&\equiv [x_3,s_2y_2] \quad mod\ \partial_4(NG_4\cap D_4) \\
&= x_3s_2y_2x_3^{-1}s_2y_2^{-1} \\
&= x_3({}^{y_2}x_3)^{-1}
\end{aligned}$$

bulunur.

3CM11)

$$d_4(F_{(3,1)(2)}(x_2,y_3)) = [s_1x_2, s_2d_3y_3]\,[s_2d_3y_3, s_2x_2]\,[s_2x_2, y_3]\,[y_3, s_1x_2]$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\left\{x_2, \overline{\partial}_3y_3\right\}_{(2)(1)} &= \left[s_2x_2, s_2\overline{\partial}_3y_3\right]\left[s_2\overline{\partial}_3y_3, s_1x_2\right] \\
&\equiv [s_2x_2, y_3]\,[y_3, s_1x_2] \qquad mod\ \partial_4(NG_4 \cap D_4) \\
&= s_2x_2y_3s_2x_2^{-1}y_3^{-1}y_3s_1x_2y_3^{-1}s_1x_2^{-1} \\
&= {}^{x_2}y_3s_1x_2y_3^{-1}s_1x_2^{-1} \\
&\equiv {}^{x_2}y_3({}^{\partial_2x_2}y_3)^{-1}
\end{aligned}$$

bulunur.

3CM12)

$$d_4(F_{(0)(3,1)}(x_3,y_2)) = [s_0d_3x_3, s_1y_2][s_1y_2, s_1d_3x_3][s_2d_3x_3, s_2y_2][s_2y_2, x_3]$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\{\overline{\partial}_3x_3, y_2\}_{(1)(0)} &= [s_0\overline{\partial}_3x_3, s_1y_2][s_1y_2, s_1\overline{\partial}_3x_3][s_2\overline{\partial}_3x_3, s_2y_2] \\
&\equiv [s_2y_2, x_3] \qquad mod\ \partial_4(NG_4 \cap D_4) \\
&= s_2y_2x_3s_2y_2^{-1}x_3^{-1} \\
&= ({}^{y_2}x_3)x_3^{-1}
\end{aligned}$$

bulunur.

3CM13)

$$\begin{aligned}
d_4(F_{(3,0)(1)}(x_2,y_3)) &= [s_0x_2, s_1d_3y_3]\,[s_1d_3y_3, s_1x_2] \\
&\quad [s_2x_2, s_2d_3y_3]\,[y_3, s_2x_2]
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\left\{x_2,\overline{\partial}_3y_3\right\}_{(1)(0)} &= \left[s_0x_2,s_1\overline{\partial}_3y_3\right]\left[s_1\overline{\partial}_3y_3,s_1x_2\right]\left[s_2x_2,s_2\overline{\partial}_3y_3\right] \\
&\equiv [y_3,s_2x_2] \qquad\quad mod\ \partial_4(NG_4\cap D_4) \\
&= y_3s_2x_2y_3^{-1}s_2x_2^{-1} \\
&= y_3({}^{x_2}y_3)^{-1}
\end{aligned}$$

bulunur.

3CM14)

$$d_4(F_{(0)(3,2)}(x_3,y_2)) = [s_0d_3x_3,s_2y_2]$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\{\overline{\partial}_3x_3,y_2\}_{(0)(2)} &= [s_0\overline{\partial}_3x_3,s_2y_2] \\
&\equiv 1\ \ mod\ \partial_4(NG_4\cap D_4)
\end{aligned}$$

bulunur.

3CM15)

$$\begin{aligned}
\{x_2y_2,z_2\}_{(2)(1)} &= [s_1(x_2y_2),s_2z_2]\,[s_2z_2,s_2(x_2y_2)] \\
&= s_1(x_2y_2)s_2z_2s_1(x_2y_2)^{-1}s_2(x_2y_2)s_2z_2^{-1}s_2(x_2y_2)^{-1} \\
&\equiv s_2(x_2y_2)s_2z_2^{-1}s_2(x_2y_2)^{-1}s_1(x_2y_2) \\
&\quad\ s_2z_2s_1(x_2y_2)^{-1}\ \ mod\ \partial_4(NG_4\cap D_4) \\
&= s_2(x_2(y_2z_2^{-1}y_2^{-1})x_2^{-1})s_1x_2s_1y_2s_2z_2s_1(x_2y_2)^{-1} \\
&= s_2(x_2(y_2z_2^{-1}y_2^{-1})x_2^{-1})s_1x_2s_2(y_2z_2^{-1}y_2^{-1})^{-1} \\
&\quad\ s_1x_2s_1x_2^{-1}s_2(y_2z_2^{-1}y_2^{-1})s_1y_2s_2z_2s_1(x_2y_2)^{-1} \\
&= \left\{x_2,y_2z_2y_2^{-1}\right\}_{(2)(1)}s_1x_2\left\{y_2,z_2\right\}_{(2)(1)}s_1x_2^{-1} \\
&= \left\{x_2,y_2z_2y_2^{-1}\right\}_{(2)(1)}\ {}^{\partial_1x_2}\left\{y_2,z_2\right\}_{(2)(1)}
\end{aligned}$$

3CM16)

$$\begin{aligned}
\{x_2, y_2z_2\}_{(2)(1)} &= [s_1(x_2), s_2(y_2z_2)]\,[s_2(y_2z_2), s_2(x_2)] \\
&\equiv [s_2(x_2), s_2(y_2z_2)]\,[s_2(y_2z_2), s_1(x_2)] \quad mod\ \partial_4(NG_4 \cap D_4) \\
&= [s_2(x_2), s_2(y_2)]\, s_2(y_2)\,[s_2(x_2), s_2(z_2)]\,[s_2(z_2), s_1(x_2)]\, s_2y_2^{-1}\,[s_2(y_2), s_1(x_2)] \\
&= [s_2(x_2), s_2(y_2)]\, s_2(y_2)\,\{x_2, z_2\}_{(2)(1)}\, s_2y_2^{-1}\,[s_2(y_2), s_1(x_2)] \\
&= s_2(x_2)s_2(y_2)s_2(x_2)^{-1}\,\{x_2, z_2\}_{(2)(1)}\, s_1(x_2)s_2(y_2)s_1(x_2)^{-1} \\
&= s_2(x_2)s_2(y_2)s_2(x_2)^{-1}\,\{x_2, z_2\}_{(2)(1)}\,(s_2(x_2)s_2(y_2)s_2(x_2)^{-1})^{-1} \\
&\quad\ (s_2(x_2)s_2(y_2)s_2(x_2)^{-1})s_1(x_2)s_2(y_2)s_1(x_2)^{-1} \\
&= s_2(x_2)s_2(y_2)s_2(x_2)^{-1}\,\{x_2, z_2\}_{(2)(1)} \\
&\quad\ (s_2(x_2)s_2(y_2)s_2(x_2)^{-1})^{-1}\,\{x_2, y_2\}_{(2)(1)} \\
&= (x_2y_2x_2^{-1}) \cdot \{x_2, z_2\}_{(2)(1)}\,\{x_2, y_2\}_{(2)(1)}
\end{aligned}$$

3CM17)

$$d_4(F_{(3,0)(2)}(x_2, y_3)) = [s_0x_2, s_2d_3y_3]\,[y_3, s_0x_2]$$

ve

$$d_4(F_{(1,0)(2)}(x_2, y_3)) = [s_1s_0\partial_2x_2, s_2\partial_3y_3]\,[s_2\partial_3y_3, s_2s_0\partial_2x_2]\,[s_0x_2, y_3]$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\left\{x_2, \overline{\partial}_3y_3\right\}_{(0)(2)} &= \left[s_0x_2, s_2\overline{\partial}_3y_3\right] \\
&\equiv [y_3, s_0x_2] \qquad mod\ \partial_4(NG_4 \cap D_4) \\
&\equiv \left[s_2s_0\partial_2x_2, s_2\overline{\partial}_3y_3\right]\left[s_2\overline{\partial}_3y_3, s_1s_0\partial_2x_2\right] \qquad mod\ \partial_4(NG_4 \cap D_4) \\
&= \left\{\partial_2\left(x_2\right), \overline{\partial}_3\left(y_3\right)\right\}_{(1,0)(2)}^{-1}
\end{aligned}$$

bulunur.

3CM18)

$$
\begin{aligned}
d_4(F_{(2,0)(1)}(x_2,y_3)) &= [s_2s_0\partial_2x_2, s_1\partial_3y_3]\,[s_1\partial_3y_3, s_2s_1\partial_2x_2] \\
&\quad [s_2s_1\partial_2x_2, s_2\partial_3y_3]\,[s_2\partial_3y_3, s_2s_0\partial_2x_2] \\
&\quad [s_0x_2, y_3]\,[y_3, s_1x_1]
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
\left\{\partial_2x_2, \overline{\partial}_3y_3\right\}_{(2,0)(1)} &= \left[s_2s_0\partial_2x_2, s_1\overline{\partial}_3y_3\right]\left[s_1\overline{\partial}_3y_3, s_2s_1\partial_2x_2\right] \\
&\quad \left[s_2s_1\partial_2x_2, s_2\overline{\partial}_3y_3\right]\left[s_2\overline{\partial}_3y_3, s_2s_0\partial_2x_2\right] \\
&\equiv [s_0x_2, y_3]\,[y_3, s_1x_1] \qquad mod\ \partial_4(NG_4\cap D_4) \\
&\equiv [s_0x_2, y_3]\,y_3({}^{\partial_2x_2}y_3)^{-1} \quad mod\ \partial_4(NG_4\cap D_4) \\
&\equiv \left[s_1s_0\partial_2x_2, s_2\overline{\partial}_3y_3\right]\left[s_2\overline{\partial}_3y_3, s_2s_0\partial_2x_2\right] \qquad mod\ \partial_4(NG_4\cap D_4) \\
&= \left\{\partial_2x_2, \overline{\partial}_3y_3\right\}_{(1,0)(2)}
\end{aligned}
$$

bulunur.

3CM19)

$$
\begin{aligned}
d_4(F_{(0)(2,1)}(x_3,y_2)) &= [s_0d_3x_3, s_2s_1d_2y_2]\,[s_2s_1d_2y_2, s_1d_3x_3] \\
&\quad [s_2d_3x_3, s_2s_1d_2y_2]\,[s_1y_2, x_3]
\end{aligned}
$$

ve

$$
d_4(F_{(0)(2,1)}(x_2,y_3)) = [s_2s_1d_2x_2, y_3]\,[y_3, s_1x_2]
$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\left\{\overline{\partial}_3 x_3, \partial_2 y_2\right\}_{(0)(2,1)} &= \left[s_0\overline{\partial}_3 x_3, s_2 s_1 \partial_2 y_2\right]\left[s_2 s_1 \partial_2 y_2, s_1 \overline{\partial}_3 x_3\right]\left[s_2 \overline{\partial}_3 x_3, s_2 s_1 \partial_2 y_2\right] \\
&\equiv [s_1 y_2, x_3] \\
&\equiv [x_3, s_2 s_1 \partial_2 y_2] \\
&= x_3 s_2 s_1 \partial_2 y_2 x_3^{-1} s_2 s_1 \partial_2 y_2 \\
&= x_3 ({}^{\partial_2 y_2} x_3)^{-1}
\end{aligned}$$

bulunur.

3CM20)

$$\begin{aligned}
\partial_2\{x_1, y_1\} &= [x_1, y_1][y_1, \partial_2 s_0 x_1] \\
&= [x_1, y_1][y_1, s_0 \partial_1 x_1] \\
&= x_1 y_1 x_1^{-1} y_1^{-1} y_1 s_0 \partial_1 x_1 y_1^{-1} s_0 \partial_1 x_1 \\
&= x_1 y_1 x_1^{-1} (\partial_1 x_{1 y_1})^{-1}
\end{aligned}$$

böylece

$$NG_3/\partial_4(NG_4 \cap D_4) \xrightarrow{\overline{\partial}_3} NG_2 \xrightarrow{\partial_2} NG_1 \xrightarrow{\partial_1} NG_0$$

yapısı tanımlanan dönüşümlerle birlikte bir 3-çaprazlanmış modüldür. □

Teorem 3.2.2 *3-çaprazlanmış modüller kategorisi, Moore kompleksinin uzunluğu 3 olan simplisel gruplar kategorisine doğal denktir.*

İspat: **G**, Moore kompleksinin uzunluğu 3 olan bir simplisel grup olsun. Önerme 3.2.1 gereğince

$$NG_3 \xrightarrow{\partial_3} NG_2 \xrightarrow{\partial_2} NG_1 \xrightarrow{\partial_1} NG_0$$

yapısının bir 3-çaprazlanmış modül olduğunu göstermiştik. (Moore kompleksin boyu 3 olduğu için $NG_4 \cap D_4 = 1$ buradanda $\partial_4(NG_4 \cap D_4) = 1$ olur. Dolayısıyla $NG_3/\partial_4(NG_4 \cap D_4)$ yerine NG_3 alınmıştır). Sonuç olarak

$$\mathfrak{I}_3 : \mathfrak{SimpGrp}_{\leq 3} \to \mathfrak{X}_3\mathfrak{Mod}$$

şeklinde Moore kompleksinin boyu 3 olan simplisel gruplar kategorisinden 3-çaprazlanmış modüller kategorisine bir funktor elde edilir. Tersine bir

$$K \stackrel{\partial_3}{\rightarrow} L \stackrel{\partial_2}{\rightarrow} M \stackrel{\partial_1}{\rightarrow} N$$

3-çaprazlanmış modülü verilsin. $H_0 = N$ olsun. N nin M üzerine etkisi yardımıyla $H_1 = M \rtimes N$ semidirekt çarpımını elde edelim.$(m,n) \in M \rtimes N$ olmak üzere dejenere ve yüzey operatörlerini

$$\begin{array}{rlcl}
d_0 : & M \rtimes N & \rightarrow & N \\
 & (m,n) & \mapsto & n \\
d_1 : & M \rtimes N & \rightarrow & N \\
 & (m,n) & \mapsto & (\partial_1(m))n \\
s_0 : & N & \rightarrow & M \rtimes N \\
 & n & \mapsto & (1,n)
\end{array}$$

şeklinde tanımlayalım. M nin ve N nin L üzerine etkilerini kullanarak $H_2 = (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N)$ semidirekt çarpımını ele alalım. $l \in L, m, m' \in M, n \in N$ olmak üzere dejenere ve yüzey operatörlerini

$$\begin{array}{rlcl}
d_0 : & (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N) & \rightarrow & (M \rtimes N) \\
 & (l,m,m',n) & \mapsto & (m',n) \\
d_1 : & (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N) & \rightarrow & (M \rtimes N) \\
 & (l,m,m',n) & \mapsto & (mm',n) \\
d_2 : & (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N) & \rightarrow & (M \rtimes N) \\
 & (l,m,m',n) & \mapsto & (\partial_2(l)m, \partial_1(m')n) \\
s_0 : & (M \rtimes N) & \rightarrow & (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N) \\
 & (m',n) & \mapsto & (1,1,m',n) \\
s_1 : & (M \rtimes N) & \rightarrow & (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N) \\
 & (m',n) & \mapsto & (1,m',1,n)
\end{array}$$

şeklinde tanımlayalım. **(3CM10)** gereğince $l \in L$ nin $k \in K$ üzerine

$$^{l}k = \{\partial_3 k, l\}_{(2)(1)}\, k$$

şeklinde tanımlı bir ^{l}k etkisi vardır. Bu etki yardımıyla $K \rtimes L$ semi direkt çarpımını elde ederiz. $(l, m) \in L \rtimes M$ nin $(k, l) \in K \rtimes L$ üzerine etkisi

$$\begin{aligned} ^{(1,m)}(k, l') &= (^{m}(^{1}k), ^{m}(^{1}l')) \\ &= (^{m}(k), ^{m}(l')) \end{aligned}$$

,

$$\begin{aligned} ^{(l,1)}(k, l') &= (^{1}(^{l}k), ^{1}(^{l}l')) \\ &= (^{l}k, ^{l}l') \\ &= (\ ^{\partial_2 l}k\, \{l, \partial_3 k\}_{(2)(1)}\,, ll'l^{-1}) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. . Burada ayrı ayrı $(1, m)$ ve $(l, 1)$ elemanlarının etkilerini vermemizdeki sebep

$$\begin{aligned} (1, m)(l, 1) &= (l\ ^{1}1, 1m) \\ &= (l, m) \end{aligned}$$

ve etki tanımından

$$^{((l,1)(1,m))}(k, l) = \ ^{(l,1)}(^{(1,m)}(k, l))$$

olmasıdır. Şimdi bu tanımlamalar yardımıyla $H_3 = (K \rtimes L)(L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N)$

semidirekt çarpımını tanımlayalım. Dejenere ve yüzey operatörlerini

$$
\begin{array}{lllll}
d_0 : & (K \rtimes L) \rtimes (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N) & \longrightarrow & (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N) \\
 & (k, l, l', m, m', n) & \longmapsto & (l, m, m', n) \\
d_1 : & (K \rtimes L) \rtimes (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N) & \longrightarrow & (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N) \\
 & (k, l, l', m, m', n) & \longmapsto & (ll', m, m', n) \\
d_2 : & (K \rtimes L) \rtimes (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N) & \longrightarrow & (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N) \\
 & (k, l, l', m, m', n) & \longmapsto & (\partial_3 kl, \partial_2 l'm, m', n) \\
d_3 : & (K \rtimes L) \rtimes (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N) & \longrightarrow & (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N) \\
 & (k, l, l', m, m', n) & \longmapsto & (l, \partial_2 l'm, m', n) \\
s_0 : & (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N) & \longrightarrow & (K \rtimes L) \rtimes (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N) \\
 & (l, m, m', n) & \longmapsto & (1, 1, l, m, m', n) \\
s_1 : & (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N) & \longrightarrow & (K \rtimes L) \rtimes (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N) \\
 & (l, m, m', n) & \longmapsto & (1, l, l, m, m', n) \\
s_2 : & (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N) & \longrightarrow & (K \rtimes L) \rtimes (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N) \\
 & (l, m, m', n) & \longmapsto & (1, l, l, m, m', n)
\end{array}
$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece $\mathbf{H} = \{H_0, H_1, H_2, H_3\}$ şeklinde bir 3-kısıtlanmış simplisel grup elde edilir. 3-kısıtlanmış simplisel gruplar kategorisinden simplisel gruplar kategorisine $\mathfrak{cost}_3$ 3-koiskelet funktoru ve ayrıca $\mathfrak{SimpGrp}_{\leq 3}$ kategorisinden $\mathfrak{Tr}_3\mathfrak{SimpGrp}$ kategorisine bir truncating funktoru vardır. Bu iki funktorun bileşkesi yardımıyla $\mathfrak{X}_3\mathfrak{Mod}$ kategorisinden $\mathfrak{SimpGrp}_{\leq 3}$ kategorisine $\mathfrak{T}_3$ funktoru vardır. Buradan aşağıdaki değişmeli diagram elde edilir.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{Tr}_3\mathfrak{SimpGrp} \arrow[dl, shift left, "\mathfrak{cost}_3"] \arrow[dr, shift left] & \\
\mathfrak{SimpGrp}_{\leq 3} \arrow[ur, shift left, "\mathfrak{tr}_3"] \arrow[rr, shift left, "\mathfrak{J}_3"] & & \mathfrak{X}_3\mathfrak{Mod} \arrow[ul, shift left] \arrow[ll, shift left, "\mathfrak{T}_3"]
\end{tikzcd}
$$

böylece $\mathfrak{X}_3\mathfrak{Mod}$ kategorisi ile $\mathfrak{SimpGrp}_{\leq 3}$ kategorisinin doğal denkliği elde edilmiş olur. $\square$

Bölüm 4

Serbest 3-Çaprazlanmış Modüller

4.1 Giriş

Serbest çaprazlanmış modül kavramı ilk olarak J.H.C.Whitehead [48] de tanım lanmış ve [18] deki $2-$çaprazlanmış modül tanımına bağlı olarak serbest $2-$çaprazlanmış modüller, [38] de tanımlanmıştır. Bu bölümde ilk olarak [38] de verilen tanımlama yardımıyla $3-$serbest çaprazlanmış modüller tanımlana caktır. Bu yapının inşaasında [29] da tanımlanan CW-tabanlar kullanılacaktır. Son olarak $k-$iskeletin $n-$tipleri incelenecektir. Bölümde ağırlıklı olarak [37], ve [38] referans alınmıştır.

Tanım 4.1.1 (L_2, L_1, ∂) *bir çaprazlanmış modül,* S *bir küme ve* $v : S \to L_2$ *bir fonksiyon olsun. Herhangi bir* (L'_2, L_1, ∂') *çaprazlanmış modülü ve* $\partial' v' = \partial v$ *şartını sağlayan herhangi* $v' : S \to L'_2$ *fonksiyonuna karşılık* $\Phi v = v'$ *olacak şekilde bir tek*

$$\Phi : (L_2, L_1, \partial) \to (L'_2, L_1, \partial')$$

morfizmi varsa (L_2, L_1, ∂) *çaprazlanmış modülüne* $\partial v : S \to L_1$ *üzerinde bir* ***serbest çaprazlanmış modül*** *denir.*

Örnek 4.1.2 L_2, *bir* S *kümesi üzerinde bir serbest* L_1-*modül olsun. Bu durumda* $(L_2, L_1, 1)$, $v : S \to L_1$ *fonksiyonu üzerinde bir serbest çaprazlanmış modüldür. Gerçekten, Örnek 2.2.6 gereğince* $(L_2, L_1, 1)$ *bir çaprazlanmış modül dür. Şimdi* $v' : S \to L_2'$ *fonksiyonu ile beraber bir* $(L_2', L_1,)$ *çaprazlanmış modülü seçelim. Böylece*

$$\begin{aligned} \partial' v' &= 1v \\ &= 1 \end{aligned}$$

olduğundan $\operatorname{Im} v' \subseteq$*Çek*$\partial'$ *olur. Dolayısıyla* $\Phi v = v'$ *olacak şekilde bir tek* $\Phi : L_2 \to L_2'$ *dönüşümü vardır.*

4.2 Adım Adım İnşaalar

Bu kısım simplisel çözümlemelerin nasıl inşa edildiğinin kısa bir özetidir. Çalışmada ağırlıklı olarak [36],[1] referans alınmıştır.

Tanım ve Notasyon

İlk olarak bir simplisel çözümlemenin inşaasında kullanılacak aşağıdaki notasyon ve terminolojiyi hatırlayalım. $[n] = \{0 < 1 < ... < n\}$ sıralı kümesi verilsin. $\delta_i^n(x)$ fonksiyonunu tanımlayalım. $0 \leq i \leq n \neq 0$ için bire bir monoton $\delta_i^n : [n-1] \to [n]$ fonksiyonu

$$\delta_i^n(x) = \begin{cases} x & , \quad x < i \quad \text{ise} \\ x+1 & , \quad x \geq i \quad \text{ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. $0 \leq i \leq n$ için örten monoton artan $\sigma_i^n : [n+1] \to [n]$ fonksiyonu

$$\sigma_i^n(x) = \begin{cases} x & , \quad x \leq i \quad \text{ise} \\ x-1 & , \quad x > i \quad \text{ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. Buradan itibaren $\{m, n\}$, artan örten $[m] \to [n]$ fonksiyonlarının kümesini temsil edecektir.

Homotopi Gruplarında Yutan Elemanlar

Aşağıdaki bölümde A, Mutlu [36] de yer alan adım adım inşaa anlatılmaktadır.

$\mathbf{G}$ bir simlisel grup ve $k \geq 1$ sabit olsun.

$$\Omega = \{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}, \;\; x_\lambda \in \pi_{k-1}(\mathbf{G})$$

biçiminde bir Ω kümesi tanımlayalım. Bu durumda her x_λ elemanına karşılık

$$x_\lambda = v_\lambda \partial_k(NG_k)$$

olacak şekilde $v_\lambda \in NG_{k-1}$ elemanlarının kümesini oluşturalım. (Eğer $k = 1$ ise bu durumda $NG_0 = G_0$ olduğu için $v_\lambda \in NG_0$ koşulu aşikardır.) Şimdi Ω içindeki elemanları yok ederek aşağıdaki biçimde bir $\mathbf{F}$ simplisel grubu tanımlayalım.

1) F_n bir serbest G_n-grup,

$$\lambda \in \Lambda \text{ ve } t \in \{n, k\} \text{ olmak üzere } F_n = \coprod_{\lambda, t} G_n \{y_{\lambda,t}\}$$

(burada $G_n \{y\}$, G_n ile y tarafından üretilen bir serbest grubun sertbest çarpımını temsil etmektedir.)

2) $0 \leq i \leq n$, için $s_i^n : F_n \to F_{n+1}$ grup homomorfizmi, $s_i^n : G_n \to G_{n+1}$ homomorfizminden

$$u = t\sigma_i^n, \quad t : [n] \to [k] \text{ olmak üzere } s_i^n(y_{\lambda,t}) = y_{\lambda,u}$$

bağıntıları ile elde edilir.

3) $0 \leq i \leq n \neq 0$, için $d_i^n : F_n \to F_{n-1}$ grup homomorfizmi $d_i^n : G_n \to G_{n-1}$ den

$$d_i^n(y_{\lambda,t}) = \begin{cases} y_{\lambda,u} & \text{eğer fonksiyon} \quad u = t\delta_i^n \quad \text{örten} \\ t'(v_\lambda) & \text{eğer} \quad u = \delta_k^k t' \\ 0 & \text{eğer} \quad u = \delta_j^k t' \quad \text{ile} \quad j \neq k \end{cases}$$

bağıntıları ile elde edilir.

Simplisel çözümlemelerin adım adım inşaasında sonuç olarak aşağıdaki özellikler vardır.

Not 4.2.1 *i) $n < k$ için $F_n = G_n$*

ii) $n = k$ için F_k, k ıncı yüzeyi hariç tüm yüzeyleri sıfır olan dejenere olmayan elemanların oluşturduğu bir küme üzerinde serbest G_k-gruptur.

iii) F_n , $n > k$ için dejenere elemanları üzerinde bir serbest G_n-gruptur.

İleride bu inşa, bir çözümlemenin k-iskeleti olarak adlandırılacaktır.

Buradan hareketle aşağıdaki sonucu verelim.

Önerme 4.2.2 $\mathbf{F} = \mathbf{G}[\Omega]$ *olmak üzere* $\mathbf{G} \hookrightarrow \mathbf{F}$ *simplisel grupların içine dönüşümü*

$$\pi_n(\mathbf{G}) \longrightarrow \pi_n(\mathbf{F})$$

homomorfizmini üretir. $n < k - 1$ *için*

$$\pi_n(\mathbf{G}) \cong \pi_n(\mathbf{F})$$

ve $n = k - 1$ *için bu homomorfizm, çekirdeği* $\bar{w}_\lambda = w_\lambda \partial_k N G_k$ *formundaki elemanlar tarafından üretilen bir epimorfizmdir.*

4.2.1 Simplisel Çözümlemelerin İnşaası

Aşağıdaki sonuç ilk olarak cebir durumu için [1] de tanımlanmış ve buna bağlı olarak [36] de grup durumuna genelleştirilmiştir.

Teorem 4.2.3 *[39]G bir grup olsun. Bu durumda, G nin bir* **F** *serbest simplisel çözümlemesi vardır.*

4.2.2 Bir Serbest Simplisel Çözümlemenin $CW-$Tabanlar Yardımıyla "Adım-Adım" Çözümlemesi ve 3-iskeleti

Tanım 4.2.4 *D. M. Kan [29] da tanımlandığı üzere;* **F** *serbest simplisel grup olsun. $\Im$ yapısı aşağıdaki şartları sağlıyorsa, $\Im$ ya* **F** *nin bir $CW-$tabanı denir.*

(i) *Her $n \geq 0$ için $\Im_n = \Im \cap F_n$, F_n yi serbestçe üretir.*

(ii) *$\Im$ dejenere operatorleri altında kapalıdır, yani her $0 \leq i \leq n$ için $x \in \Im_n$ ise $s_i(x) \in \Im_{n+1}$ dir.*

(iii) *$x \in \Im_{n+1}$ dejenere olmayan bir eleman ise $d_i(x) = e_{n-1}$ dir. (Burada e_{n-1}, F_{n-1} in birim elemanıdır.)*

F bir serbest simplisel grup ve $\Im$, F nin $CW-$tabanı olsun, bu durumda $\Im_0 = X_0$ kümesi F_0 grubunu serbestçe üretir yani $F_0 = F(X_0)$ dır. Devam edilecek olursa, $\Im_1$, F_1 grubunu serbestçe üretir ve $s_0(X_0) \subseteq \Im_1$ dir ve $y \in Y_1 = \Im_1 \diagdown s_0(X_0)$ ise $0 \leq i \leq 1$ için $d_i(y) = e_0$ dır ve ayrıca

$$F_1 = F(s_0(X_0) \cup Y_1) \cong F(s_0(X_0)) \star F(Y_1)$$

dir. F_2 için, $s_0(\Im_1) \cup s_1(\Im_1) \subset \Im_2$ dir. $y \in Y_2 = \Im_2 \diagdown \bigcup\limits_{i=0,1} s_i(\Im_i)$ ise $d_0(y) = d_1(y) = e_1$ ve $y \in NG_2$ dir.

G nin serbest simplisel çözümlemesinin $1-$iskelet'i olan $\mathbf{F}^{(1)}$, yeni indeterminantların eklenmesiyle

$$F_1^{(1)} = F_1^{(0)}(X_0) = F(s_0(X_0) \cup Y_1) \cong F(s_0(X_0)) \star F(Y_1)$$

şeklinde elde edilir; yüzey ve dejenere dönüşümleri

$$F(s_0(X_0) \cup Y_1) \underset{s_0}{\overset{d_0,d_1}{\rightrightarrows\!\!\!\leftarrow}} F(X_0) \xrightarrow{d_0^0} G_1$$

biçimindedir. Burada $F(X_0) \overset{d_0^0}{\to} G$ bir genişleme dönüşümüdür ve $b_i^0 \in X_0$ için $d_0(b_i^0) = b_i$ şeklinde tanımlıdır, ayrıca s_0, $d_0^{\text{!}}$ ve d_1^1 dönüşümleri

$$d_1^1(X_i) = b_i \in \text{Çek} d_0^0 \quad , \quad d_0^1(X_i) = 1 \quad , \quad x_0 \in X_0 \text{ için } s_0(x_0) = s_0(x_0)$$

şeklinde tanımlıdır. $\mathbf{F}^{(1)}$, $1-$iskeleti

$$\mathbf{F}^{(1)} : \ldots F(s_1s_0(X_0) \cup s_0(Y_1) \cup s_1(Y_1)) \underset{s_1,s_0}{\overset{d_0,d_1,d_2}{\rightrightarrows\!\!\!\rightarrow\!\!\!\leftleftarrows}} F(s_0(X_0) \cup (Y_1) \underset{s_0}{\overset{d_1,d_0}{\rightrightarrows\!\!\!\leftarrow}} F(X_0)$$

biçiminde tanımlanır. Benzer işlemler tekrar edilirse $\mathbf{F}^{(2)}$, $2-$iskeleti

$$\mathbf{F}^{(2)} : \ldots F(s_1s_0(X_0) \cup s_0(Y_1) \cup s_1(Y_1) \cup (Y_2)) \underset{s_0,s_1}{\overset{d_0,d_1,d_2}{\rightrightarrows\!\!\!\rightarrow\!\!\!\leftleftarrows}} F(s_0(X_0) \cup (Y_1) \underset{s_0}{\overset{d_1,d_0}{\rightrightarrows\!\!\!\leftarrow}} F(X_0)$$

biçiminde ve

$$F_3^{(3)} = (s_2s_1s_0(X_0) \cup s_2s_0(Y_1) \cup s_2s_1(Y_1) \cup s_1s_0(Y_1) \cup s_2(Y_2) \cup s_1(Y_2) \cup s_0(Y_2) \cup Y_3)$$

olmak üzere $\mathbf{F}^{(3)}$ $3-$iskeleti:

$$\mathbf{F}^{(3)} : \ldots F_3^{(3)} \underset{s_2,s_1,s_0}{\overset{d_3,\ldots,d_0}{\rightrightarrows\!\!\!\rightrightarrows\!\!\!\leftleftarrows\!\!\!\leftarrow}} F(s_1s_0(X_0) \cup s_0(Y_1) \cup s_1(Y_1) \cup (Y_2)) \underset{s_1,s_0}{\overset{d_2,d_1,d_0}{\rightrightarrows\!\!\!\rightarrow\!\!\!\leftleftarrows}} F(s_0(X_0) \cup (Y_1) \underset{s_0}{\overset{d_1,d_0}{\rightrightarrows\!\!\!\leftarrow}} F(X_0)$$

biçimindedir.

Yardımcı teorem 4.2.5 $\mathbf{F}^{(3)}$ *yukarıda tanımlandığı biçimde verilsin. Bu durumda* $Z_1 = \{s_1(y_2)s_0(y_2)^{-1} : y_2 \in Y_2\}$, $Z_2 = \{s_2(y_2)s_1(y_2)^{-1} : y_2 \in Y_2\}$, $T_1 = \{s_2s_0(y_1)s_2s_1(y_1)^{-1} : y_1 \in Y_1\}$ *ve* $T_2 = \{s_2s_0(y_1)s_1s_0(y_1)^{-1} : y_1 \in Y_1\}$ *olmak üzere*

(i) Ç$ek(d_0^{(3)}) = \langle s_1(Y_2) \cup s_2(Y_2) \cup Y_3 \rangle$

(ii) Ç$ek(d_1^{(3)}) = \langle T_1 \cup Z_1 \cup s_2(Y_2) \cup Y_3 \rangle$

(iii) Ç$ek(d_2^{(3)}) = \langle T_2 \cup Z_2 \cup s_0(Y_2) \cup Y_3 \rangle$ olur.

Tanım 4.2.6 $\{K, L, M, N, \partial_3, \partial_2, \partial_1\}$ *bir 3-çaprazlanmış modül,* S *bir küme ve* $v : S \to K$ *bir fonksiyon olsun. Bir* $\{K', L, M, N, \delta, \partial_2, \partial_1\}$ *3-çaprazlanmış modülü ve* $\partial_3 v = \delta v'$ *olacak şekilde bir* $v' : S \to K'$ *fonksiyonu için* $\delta\Phi = \partial_3$ *olacak şekilde bir tek*

$$\phi : K \to K'$$

morfizmi varsa $\{K, L, M, N, \partial_3, \partial_2, \partial_1\}$ *yapısına* $\partial_3 v : S \to L$ *fonksiyonu üzerinde bir serbest 3-çaprazlanmış modül denir.*
Eğer $\partial_1 : M \to N$ *bir serbest önçaprazlanmış modül ise* $\{K, L, M, N, \partial_3, \partial_2, \partial_1\}$ *serbest 3-çaprazlanmış modülüne tamamen serbest'tir denir. Bu durumu aşağıdaki biçimde resmedebiliriz.*

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[rr, "\partial_3"] \arrow[dd, dashed, "\Phi"'] & & L \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[dd, "Id"] & M \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[dd, "Id"] & N \arrow[dd, "Id"] \\
& S \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur] \arrow[dl, "\varphi'"'] \arrow[dr] & & & \\
K' \arrow[rr, "\partial_3'"'] & & L \arrow[r, "\partial_2"'] & M \arrow[r, "\partial_1"'] & N
\end{tikzcd}$$

Şimdi tamamen serbest bir 3-çaprazlanmış modülün inşasını tanımlayalım. Bunun için, bir serbest simplisel grubun

$$\mathbf{F}^{(3)} : \ldots F_3^{(3)} \underset{s_0,s_1,s_2}{\overset{d_0,d_1,d_2,d_3}{\rightrightarrows}} F(s_1s_0(X_0) \cup s_0(Y_1) \cup s_1(Y_1) \cup (Y_2)) \underset{s_1,s_0}{\overset{d_0,d_1,d_2}{\rightrightarrows}} F(s_0(X_0) \cup (Y_1) \underset{s_0}{\overset{d_0,d_1}{\rightrightarrows}} F(X_0)$$

biçimindeki 3-iskelet'ine ihtiyaç duyacağız. Bu 3-boyutlu inşa datası $\varphi : Y_1 \to F(X_0)$ biçiminde bir 1-boyutlu inşa datası içerir. Burada $\varphi : Y_1 \to F(X_0)$ dönüşümü $d_1 : F(s_0(X_0) \cup Y_1) \to F(X_0)$ dönüşümünün Y_1 kümesine kısıtlanışıdır. $\langle Y_1 \rangle$ ve $\langle Y_2 \rangle$ sırasıyla Y_1 ve Y_2 kümelerinin $F(s_0(X_0) \cup Y_1)$ ve $F(s_1s_0(X_0) \cup s_0(Y_1) \cup s_1(Y_1) \cup Y_2)$ içinde normal kapanışları olmak üzere $\beta : Y_3 \to \langle Y_2 \rangle$, $\psi : \langle Y_2 \rangle \to \langle Y_1 \rangle$ dönüşümleri ile birlikte $(Y_3, Y_2, Y_1, \beta, \psi, \varphi, F(X_0))$ şeklinde bir 3-boyutlu inşa datası elde edilir. Burada β ve ψ dönüşümleri sırasıyla $d_3^{(3)}$ ve $d_2^{(2)}$ dönüşümlerinin Y_2 ve Y_1 e kısıtlanışıdır.

Teorem 4.2.7 $(Y_3, Y_2, Y, F(X_0), \beta, \psi, \varphi)$, *yukarıda tanımlanan biçimde bir 3-boyutlu inşa data'sı olsun, bu durumda bu data tarafından tanımlanan bir* $\{K, L, M, F(X_0), \partial_3, \partial_2, \partial_1\}$ *tamamen serbest 3-çaprazlanmış modülü vardır.*

İspat: $M = \langle Y_1 \rangle$ olsun. $F(X_0)$ 'ın s_0 vasıtasıyla M üzerine etkisi ile birlikte φ dönüşümü bir $\mathcal{M} = (M, F(X_0), \partial_1)$ serbest önçaprazlanmış modülüdür. $L = \langle Y_2 \rangle$ olsun.

Şimdi $Z_1 = \{s_1(y_2)s_0(y_2)^{-1} : y_2 \in Y_2\}$, $Z_2 = \{s_2(y_2)s_1(y_2)^{-1} : y_2 \in Y_2\}$, $T_1 = \{s_2s_0(y_1)s_2s_1(y_1)^{-1} : y_1 \in Y_1\}$ ve $T_2 = \{s_2s_0(y_1)s_1s_0(y_1)^{-1} : y_1 \in Y_1\}$ kümeleri yardımıyla $F_3^{(3)}$ içinde bir

$$D = \langle s_1(Y_2) \cup s_2(Y_2) \cup Y_3 \rangle \cap \langle T_1 \cup Z_1 \cup s_2(Y_2) \cup Y_3 \rangle \cap \langle T_2 \cup Z_2 \cup s_0(Y_2) \cup Y_3 \rangle$$

kümesinin oluşturalım, böylece M nin s_2s_1 vasıtasıyla ve L nin s_2 vasıtasıyla D üzerine etkisi vardır. β fonksiyonu yardımıyla $y \in Y_3$ için $\theta(y) = \beta(y)$

şeklinde tanımlı bir

$$\theta : D \to \langle Y_2 \rangle$$

dönüşümü elde edilir. Dikkat edileceği üzere burada $D = NF_2^{(2)}$ dir.

Birinci bölümde verilen D içindeki P_3 Peiffer normal altgrubu hatırlayalım. P_3 normal altgrubu

$$\left[x_3^{-1}s_2d_3x_3s_1d_3x_3^{-1}s_0d_3x_3\ ,\ s_2s_1y_1\right]$$

$$\left[s_2s_1x_1^{-1}s_2s_0x_1\ ,\ y_3s_2d_3y_3^{-1}s_1d_3y_3\right]$$

$$\left[s_2s_0x_1^{-1}s_1s_0x_1\ ,\ y_3^{-1}s_2d_3y_3\right]$$

$$\left[s_1s_0x_1^{-1}s_2s_1s_0d_1x_1\ ,\ y_3\right]$$

$$\left[s_1y_2^{-1}s_2s_1d_2y_2\ ,\ s_0x_2^{-1}s_1x_2s_2x_2^{-1}\right]$$

$$\left[s_0x_2^{-1}s_1x_2s_2s_1d_2x_2^{-1}s_2s_0d_2x_2\ ,\ s_2y_2^{-1}s_1y_2\right]$$

$$\left[s_0x_2s_2s_0d_2x_2^{-1}s_1s_0d_2x_2\ ,\ s_2y_2\right]$$

$$\left[x_3s_2d_3x_3^{-1}s_1d_3x_3\ ,\ s_2y_2\right]$$

$$\left[s_0d_3x_3s_1d_3(x_3)^{-1}s_2d_3x_3(x_3)^{-1}\ ,\ s_2y_2\right]$$

$$\left[x_3^{-1}s_2d_3x_3s_1d_3x_3^{-1}s_0d_3x_3\ ,\ s_2y_2^{-1}s_1y_2\right]$$

$$\left[x_2^{-1}s_2d_3x_2s_1d_3x_2^{-1}s_0d_3x_2\ ,\ s_2s_1d_2y_3s_1y_3^{-1}\right]$$

$$\left[s_2x_2^{-1}s_1x_2\ ,\ y_3^{-1}s_2d_3y_3\right]$$

$$\left[s_1x_2^{-1}s_2s_1d_2x_2\ ,\ y_3\right]$$

$$\left[s_0x_2s_1x_2^{-1}s_2x_2\ ,\ y_3^{-1}s_2d_3y_3\right]$$

$$\left[s_2x_2s_1x_2^{-1}s_0x_2\ ,\ s_1d_3y_3s_2d_3y_3^{-1}y_3\right]$$

$$\left[s_2s_0d_2x_2^{-1}s_0x_2s_1x_2^{-1}s_2s_1d_2x_2\ ,\ y_3^{-1}\right]$$

$$\left[s_1x_2^{-1}s_0x_2s_2s_0d_2x_2^{-1}s_2s_1d_2x_2\ ,\ s_1d_3y_3^{-1}s_2d_3y_3(y_3)^{-1}\right]$$

$$\left[s_1s_0d_2x_2s_2s_0d_2x_2^{-1}s_0x_2\ ,\ y_3\right]$$

$$\left[s_0x_2s_2s_0d_2x_2^{-1}s_1s_0d_2x_2\ ,\ s_2d_3y_3(y_3)^{-1}\right]$$

$$\left[y_3\ ,\ x_3^{-1}s_2d_3x_3\right]$$

$$\left[s_1d_3x_3s_2d_3(x_3)^{-1}x_3\ ,\ y_3\right]$$

$$\left[x_3^{-1}s_2d_3x_3s_1d_3(x_3)^{-1}s_0d_3x_3\ ,\ y_3\right]$$

$$\left[x_3s_2d_3x_3^{-1}s_1d_3x_3\ ,\ s_2d_3y_3(y_3)^{-1}\right]$$

$$\left[x_3^{-1}s_2d_3x_3s_1d_3(x_3)^{-1}s_0d_3x_3\ ,\ s_2d_3y_3(y_3)^{-1}\right]$$

$$\left[x_3^{-1}s_2d_3x_3s_1d_3(x_3)^{-1}s_0d_3x_3\ ,\ \mathrm{s}_1d_2y_3s_2d_3(y_3)^{-1}y_3\right]$$

formundaki elemanlar tarafından üretilir. P_3 ün üreteçleri Çekd_3 içinde olduğundan $\theta(P_3) = \{1\}$ olur. $K = D\diagup P_3$ bölüm grubunu aldığımızda, q bölüm dönüşüm olmak üzere

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "\Theta"] \arrow[dr, "q"'] & & L \arrow[dl, "\partial_3"] \\
& K &
\end{tikzcd}$$

diagramı değişmeli olacak şekilde bir $\partial_3 : K \to L$ dönüşümü elde ederiz.

Şimdi $\{K, L, M, F(X_0), \partial_3, \partial_2, \partial_1\}$ yapısının, yani,

$$D\diagup P_3 \xrightarrow{\partial_3} \langle Y_2\rangle \xrightarrow{\partial_2} \langle Y_1\rangle \xrightarrow{\partial_1} F(X_0)$$

kompleksinin $(Y_3, Y_2, Y_1, F(X_0), \beta, \psi, \varphi)$ üzerinde serbest olması istenen 3-çaprazlanmış modül olduğunu gösterelim.

$$
\begin{array}{llcl}
\mathcal{W}: & \langle Y_1 \rangle \times \langle Y_1 \rangle & \rightarrow & \langle Y_2 \rangle \\
 & \{x_1, y_1\} & \mapsto & [s_1x_1, s_1y_1]\,[s_1y_1, s_0x_1] \\
\mathcal{W}_{(1)(0)}: & \langle Y_2 \rangle \times \langle Y_2 \rangle & \rightarrow & D\diagup P_3 \\
 & \{x_2, y_2\}_{(1)(0)} & \mapsto & ([s_2y_2, s_2x_2]\,[s_1x_2, s_1y_2]\,[s_1y_2, s_0x_2])\,P_3 \\
\mathcal{W}_{(2)(1)}: & \langle Y_2 \rangle \times \langle Y_2 \rangle & \rightarrow & D\diagup P_3 \\
 & \{x_2, y_2\}_{(2)(1)} & \mapsto & ([s_2x_2, s_2y_2]\,[s_2y_2, s_1x_2])\,P_3 \\
\mathcal{W}_{(0)(2)}: & \langle Y_2 \rangle \times \langle Y_2 \rangle & \rightarrow & D\diagup P_3 \\
 & \{x_2, y_2\}_{(0)(2)} & \mapsto & ([s_2y_2, s_0x_2])\,P_3 \\
\mathcal{W}_{(1,0)(2)} & \langle Y_1 \rangle \times \langle Y_2 \rangle & \rightarrow & D\diagup P_3 \\
 & \{x_1, y_2\}_{(1,0)(2)} & \mapsto & ([s_2s_0x_1, s_2y_2]\,[s_2y_2, s_1s_0x_1])\,P_3 \\
\mathcal{W}_{(2,0)(1)} & \langle Y_1 \rangle \times \langle Y_2 \rangle & \rightarrow & D\diagup P_3 \\
 & \{x_1, y_2\}_{(2,0)(1)} & \mapsto & ([s_2s_0x_1, s_2y_2]\,[s_2y_2, s_2s_1x_1]\,[s_2s_1x_1, s_1y_2]\,[s_1y_2, s_2s_0x_1])\,P_3 \\
\mathcal{W}_{(0)(2,1)} & \langle Y_2 \rangle \times \langle Y_1 \rangle & \rightarrow & D\diagup P_3 \\
 & \{y_2, x_1\}_{(0)(2,1)} & \mapsto & ([s_2s_1x_1, s_2y_2]\,[s_1y_2, s_2s_1x_1]\,[s_2s_1x_1, s_0y_2])\,P_3
\end{array}
$$

dönüşümlerini tanımlayalım. Teorem 4.2.1 gereğince $\{K, L, M, F(X_0), \partial_3, \partial_2, \partial_1\}$ kompleksi bir 3−çaprazlanmış modüldür. $\{K', L, M, F(X_0), \partial_3, \partial_2, \partial_1\}$, $\mathcal{M}$ önçaprazlanmuş modülü üzerinde bir 3−çaprazlanmış modüldür. $\theta' : Y_3 \rightarrow K'$, $\delta\theta' = \Psi$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. Bu $\theta' : Y_3 \rightarrow K'$ fonksiyonu, M-equivariant olan ve elde edilen eşlenikleri (conjugation) s_0, s_1 ve s_2 vasıtasıyla ilgili etkilere götüren bir tek $D \rightarrow K'$ dönüşümüne genişler. Bu genişleme P_3 ün elemanlarını K' grubunun birim elemanına götürür. Böylece $\{\Phi, Id, Id, Id\}$, 3-çaprazlanmış modüller arasında bir dönüşüm olacak şekilde $\Phi : K \rightarrow K'$ dönüşümü elde edilir ve bu dönüşüm istenildiği üzere tektir. $\square$

4.2.3 k-iskeletin n-tipleri

A.Mutlu ve T.Porter [38] de $n-$tiplerin grup modellerinin tanımlanmasında bir serbest simplisel grubun $k-$iskeletinin nasıl ortaya çıktığını göstermiş ve 1, 2 ve 3$-$tipleri incelemiştir. Yine [38] de genel olarak serbest simplisel grubun $k-$iskeleti $\mathbf{F}^{(k)}$ olmak üzere $k \geq 1$ için

$$\pi_k(\mathbf{F}^{(k)}) = \text{Ç}ek(NF_k^{(k)}/\partial_{k+1}(NF_{k+1}^{(k+1)}) \to F_{k-1})$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu bilgiler ışığında biz 4$-$tipleri inceleyeceğiz.

4$-$**tipler**

Bir serbest simplisel grubun

$$\mathbf{F}^{(3)} : \ldots F_3^{(3)} \underset{s_2,s_1,s_0}{\overset{d_3,\ldots,d_0}{\rightrightarrows}} F(s_1s_0(X_0) \cup s_0(Y_1) \cup s_1(Y_1) \cup (Y_2)) \underset{s_1,s_0}{\overset{d_2,d_1,d_0}{\rightrightarrows}} F(s_0(X_0) \cup (Y_1) \underset{s_0}{\overset{d_1,d_0}{\rightrightarrows}} F(X_0)$$

3$-$iskeleti verilsin. Bu yapı yardımıyla elde edilen 3$-$kısıtlanmış simplisel grup $\mathfrak{Ttr}_3(\mathbf{F}^{(3)}, 3)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\pi_0(\mathfrak{Ttr}_3(\mathbf{F}^{(3)}, 3)) &\cong F(X_0)/N \\
\pi_1(\mathfrak{Ttr}_3(\mathbf{F}^{(3)}, 3)) &\cong \text{Ç}ek(\overline{\langle Y_1 \rangle}/P_1 \to F(X_0)) \\
\pi_2(\mathfrak{Ttr}_3(\mathbf{F}^{(3)}, 3)) &\cong \text{Ç}ek((\overline{\langle s_1(Y_1) \cup Y_2 \rangle} \cap \overline{\langle Z \cup Y_2 \rangle})/P_2 \to \overline{\langle Y_1 \rangle})
\end{aligned}$$

dir. Teorem 4.1.10 gereğince

$$D = \langle s_1(Y_2) \cup s_2(Y_2) \cup Y_3 \rangle \cap \langle T_1 \cup Z_1 \cup s_2(Y_2) \cup Y_3 \rangle \cap \langle T_2 \cup Z_2 \cup s_0(Y_2) \cup Y_3 \rangle$$

olmak üzere

$$\pi_3(\mathfrak{Ttr}_3(\mathbf{F}^{(3)}, 3)) \cong \text{Ç}ek(D \to \overline{\langle Y_2 \rangle})$$

olur. Son olarak $i > 3$ için

$$\pi_i(\mathfrak{Ttr}_3(\mathbf{F}^{(3)}, 3)) \cong 1$$

dir.

Sonuç 4.2.8 *Serbest* $3-$*çaprazlanmış modüller serbest simplisel grubun* $3-$*iskeletinin* $4-$*tiplerinin grup modelleridir.*

Kaynaklar

[1] M.André. Homologie des Algèbres Commutatives. *Springer-Verlag* **206** (1970).

[2] M.Artin and B.Mazur Etale Homotopy. *Springer Lecture Notes in Math.* **100** (1968).

[3] Z.Arvasi and T.Porter. Freeness Conditions for 2-Crossed Modules of Commutative Algebras *Applied Categorical Structures* , 6 , 455-471 (1998).

[4] Z. Arvasi. Applications in Commutative Algebras of the Moore Complex of a Simplicial Algebra. *Ph. D. Thesis,* University of Wales (1994).

[5] Z.Arvasi and T.Porter. Higher dimensional Peiffer elements in simplicial commutative algebras. *Theory and Applications of Categories* , 3 , 1-23 (1997).

[6] N.Ashley. Simlicial T-Complexes: a non abelian version of a theorem of Dold-Kan. Dissertationes Math. **165** (1988), 11-58. *Ph.D. Thesis*, U.C.N.W. (1978).

[7] E.R.Aznar. Cohomologia no abeliana in categorias de interés. *Ph.D. Thesis,* Universidad de Santiago de Compostela, Alxebra **33** (1981).

[8] H.J.Baues. Combinatorial Homotopy and 4-Dimensional Complexes. *Walter de Gruyter*, (1991).

[9] R.Brown. Some Non-abelian Methods in Homotopy Theory and Homological Theory. *Category Proc. Conference Toledo, Ohio* (1983), 108-146.

[10] R.Brown. Topology. *Ellis Horwood Series in Mathematics and its Applications Ellis Horwood, Ltd.* (1988), 460 pages.

[11] R.Brown and P.J.Higgins. Colimit Theorems for Relative Homotopy Groups. *J.P.A.A.* **22** (1981), 11-41.

[12] R.Brown and P.J.Higgins. Crossed Complexes and Non-abelian Extensions. *Springer Lecture Notes in Math.* **962** (1982), 39-50.

[13] R.Brown and J.Huesbschmann. Identities Among Relations. *Low dimension topology* London Math. Soc. Lecture Note Series, 48 (1978).

[14] R.Brown and J-L.Loday. Van Kampen Theorems for Diagram of Spaces. *Topology* **26** (1987), 311-335.

[15] R.Brown and J-L.Loday. Homotopical Excision and Hurewicz Theorems for n-cubes of Spaces. *Proc. London. Math. Soc. (3)*, **92** 176-192.

[16] P.Carrasco. Complejos Hipercruzados, Cohomologia y Extensiones. *Ph.D. Thesis*, Universidad de Granada, (1987).

[17] P.Carrasco and A.M.Cegarra. Group-theoretic Algebraic Models for Homotopy Types. *J.P.A.A.* **75** (1991), 195-235.

[18] D.Conduché. Modules Croisés Généralisés de Longueur 2. *J.P.A.A.* **34** (1984), 155-178.

[19] E.B.Curtis. Simplicial Homotopy Theory. *Adv. in Math.* **6** (1971), 107-209.

[20] J.Duskin. Simplicial Methods and the Interpretation of Triple Cohomology. *Memoir A.M.S.* Vol. 3 **163** (1975).

[21] G.J.Ellis. Crossed Modules and Their Higher Dimensional Analogues. *Ph.D. Thesis*, U.C.N.W. (1984).

[22] G.J.Ellis. Higher Dimensional Crossed Modules of Algebras *J.P.A.A.* **52** (1988), 277-282.

[23] G.J.Ellis and R.Steiner. Higher Dimensional Crossed Modules and the Homotopy Groups of (n+1)-ads. *J.P.A.A.* **46** (1987), 117-136.

[24] M.Gerstenhaber. On the Deformation of Rings and Algebras. *Annals of Maths* **84** (1966), 1-19.

[25] A.R.Grandjeán and M.J.Vale. 2-Modulos Cruzados en la Cohomologia de André-Quillen. *Memorias de la Real Academia de Ciencias* **22** (1986).

[26] D.Guin-Waléry and J.L.Loday. Obstructions à l'Excision en K-théorie Algébrique. *Springer Lecture Notes in Math.* **854** (1981), 179-216.

[27] L.Illusie. Complex Cotangent et Déformations I, II. *Springer Lecture Notes in Math.* **239** (1971), II **283** (1972).

[28] D.M.Kan. A Combinatorial Definition of Homotopy Groups. *Annals of Maths,* **61** (1958), 288-312.

[29] D.M.Kan. A Relation Between CW-Complex and Free c.s.s. Groups. *Amer. Jour. Math.* **81** (1959), 512-528.

[30] J.L.Loday. Spaces with Finitely Many Non-trivial Homotopy Groups. *J.P.A.A.* **24** (1982), 179-202.

[31] A.S-T.Lue. Cohomology of Algebras Relative to a Variety. *Math. Z.* **121** (1971), 220-232.

[32] S. Lichtenbaum and M. Schlessinger. The Cotangent Complex of a Morphism. *Trans. Amer. Math. Soc.* **128** (1967), 41-70.

[33] J.P.May. Simplicial Objects in Algebraic Topology. *Van Nostrand, Math. Studies 11.*

[34] J.C.Moore. Seminar in Algebraic Homotopy. *Princeton* (1956).

[35] C.Morgenegg. Sur les Invariants d'un Anneau Local A Corps Résiduel de Caractéristique 2. *Ph.D. Thesis*, Lausanne EPFL (1979).

[36] A.Mutlu and T.Porter. Free Cross Resolutions From Simplicial Resolutions With Given CW-Basis. *Chairs de Topologie*, Volume XL-4 (1999). 261-283.

[37] A.Mutlu. Peiffer Pairings in The Moore Complex of A Simplicial Group. *Ph. D. Thesis,* University of Wales (1997).

[38] A.Mutlu and T.Porter. Freeness Conditions For 2-Crossed Modules And Complexes. *Theory and Applications of Categories* Volume 4 No. 8, 174-194 (1998).

[39] A.Mutlu and T.Porter. Applications of Peiffer Pairing in The Moore Complex of A Simplicial Group. *Theory and Applications of Categories* Volume 4 No. 7, 148-173 (1998).

[40] T.Porter. Internal Categories and Crossed Modules in Category Theory: *Springer Lecture Notes in Math.* **962** (1982), 249-255.

[41] T.Porter. Homology of Commutative Algebras and an Invariant of Simis and Vasconceles. *J. Algebra* **99** (1986), 458-465.

[42] T.Porter. Some Categorical Results in the Theory of Crossed Modules in Commutative Algebras. *J. Algebra* **109** (1987).

[43] T.Porter. n-Types of Simplicial Groups and Crossed n-Cubes. *Topology* **32** 5-24, (1993).

[44] D.Quillen. On the Homology of Commutative Rings. *Proc. Sympos. Pure Math.* **17** (1970), 65-87.

[45] J.G.Ratcliffe. Free and Projective Crossed Modules. *J. London Math. Soc.* **22** (1980), 66-74.

[46] R.Y.Sharp. Steps in Commutative Algebra. *London Mathematical Society Student Texts,* **19** 321 pages.

[47] N.M.Shammu. Algebraic and Categorical Structure of Category of Crossed Modules of Algebras. *Ph.D. Thesis,* U.C.N.W. (1992).

[48] J.H.C. Whitehead. Combinatorial Homotopy. *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949), 453-496.

[49] J.H.C. Whitehead. A Certain Exact Sequence. *Annals. of Math.* **52** (1950), 51-110.