NEREDEYSE PROJEKTİF MODÜLLER ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Elif ÇİZMECİ

Danışman
Doç. Dr. Fatma KAYNARCA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN 2025

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NEREDEYSE PROJEKTİF MODÜLLER ÜZERİNE

Elif ÇİZMECİ

Danışman

Doç. Dr. Fatma KAYNARCA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2025

TEZ ONAY SAYFASI

Elif ÇİZMECİ tarafından hazırlanan "Neredeyse Projektif Modüller Üzerine" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca ....tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Fatma KAYNARCA

Başkan : Prof. Dr. Derya KESKİN TÜTÜNCÜ
Hacettepe Üniversitesi, Fen Fak.

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Tuğba YALÇIN UZUN
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Edebiyat Fak.

Üye : Doç. Dr. Fatma KAYNARCA
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Edebiyat Fak.

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
......./......./ 2025 tarih ve
.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. ....
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

....

Elif ÇİZMECİ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

NEREDEYSE PROJEKTİF MODÜLLER ÜZERİNE

Elif ÇİZMECİ

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Fatma KAYNARCA

Bu tez, neredeyse projektif modül kavramını ve çeşitli karakterizasyonlarını tanıtmayı amaçlar. 1980 yılında Roberto Martinez Villa tarafından tanıtılan neredeyse projektif modül kavramı, artin cebirlerinin temsil teorisinde yer alan bazı problemlerin çözümünde önemli rol oynamıştır. Tez çalışması üç bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde, neredeyse projektif modül kavramının tarihsel gelişim süreci ifade edilmiştir. İkinci bölümde, tez çalışmasında kullanılacak olan temel tanımlara ve özelliklere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde neredeyse projektif modüller, sırasıyla kalıtsal, artin ve kalıtsal olmayan cebirler üzerinde, üç alt başlıkta incelenmiştir.

2019, v+87 sayfa

Anahtar Kelimeler: Ayrıştırılamaz modül, Projektif modül, Neredeyse projektif modül, İndirgenemez morfizma, Neredeyse split dizi, Kalıtsal cebir, Artin cebir, Kalıtsal olmayan cebir, Kuiver.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

ON ALMOST PROJECTIVE MODULES

Elif ÇİZMECİ

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Fatma KAYNARCA

This thesis aims to introduce the concept of almost projective module and its various characterizations. The concept of almost projective module, introduced by Roberto Martinez Villa in 1980, has played an important role in solving some problems in the representation theory of artin algebras. The thesis study consists of three parts. In the introduction, the historical development process of the concept of almost projective module is expressed. In the second part, the basic definitions and properties that will be used in the thesis study are given. In the third part, almost projective modules are examined under three subheadings on hereditary, artin and non-hereditary algebras, respectively.

2019, v+87 pages

Key Words: Indecomposable module, Projective module, Almost projective module, Irreducible morphism, Almost split sequence, Hereditary algebra, Artin algebra, Non-hereditary algebra, Quiver.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmanın gerçekleştirilmesinde, değerli bilgilerini benimle paylaşan, güler yüzünü ve samimiyetini benden esirgemeyen ve gelecekteki mesleki hayatımda da bana verdiği değerli bilgilerden her zaman faydalanacağımı düşündüğüm kıymetli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Fatma KAYNARCA'ya, bilgilerini ve tecrübelerini paylaşarak bana yol gösteren Sayın Prof. Dr. Derya KESKİN TÜTÜNCÜ'ye teşekkürü bir borç bilirim.

Hayatımın her alanında olduğu gibi tez çalışmam süresince de hep benim yanımda olan, bana her zaman sevgi, sabır ve iyi niyetle yaklaşan, bugünlere gelmeme destek olan ve bana güvenen sevgili anneme, babama ve eşime teşekkürlerimi sunarım.

Elif ÇİZMECİ

Afyonkarahisar, 2025

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
$\leq$	Altmodül
$<$	Öz altmodül
$\cong$	İzomorfizm
$\trianglelefteq$	Büyük altmodül
$\ll$	Küçük altmodül
A	Sonlu boyutlu **k**-cebir
$\mathcal{C}$	Herhangi bir kategori
D	Dualite funktoru
F	Herhangi bir funktor
$\mathbf{k}[x]$	Bir **k** cismi üzerindeki polinomlar halkası
M	Sağ A-modül
M/N	Bölüm modülü
Tr	Transpoz funktoru
ν	Nakayama funktoru
τ	Auslander-Reiten dönüştürücüsü
$\mathrm{Ker} f$	Bir f homomorfizmasının çekirdeği
$\mathrm{Coker} f$	Bir f homomorfizmasının eşçekirdeği
$\mathrm{Im} f$	Bir f homomorfizmasının görüntüsü
$M \oplus M'$	M ve M' modüllerinin dik toplamı
$\mathrm{Soc} M$	Bir M modülünün sokulu
$\mathrm{Rad} M$	Bir M modülünün radikali
$\mathrm{Mod} A$	Sağ A-modüllerin kategorisi
$\mathrm{mod} A$	Sonlu üretilmiş sağ A-modüllerin kategorisi
$\mathrm{Hom}_A(M, N)$	$\mathrm{Mod}A$'da M'den N'ye giden tüm morfizmaların kümesi
$\mathrm{rad}_A(M, N)$	$\mathrm{Mod}A$'da M'den N'ye giden radikal morfizmaların kümesi
$\mathcal{E}(M, N)$	M'nin N ile tüm genişlemelerinin grubu
$\mathrm{End}_A M$	M'nin tüm endomorfizmalarının kümesi
$\mathrm{Ext}_A^1(M, N)$	M ve N'nin genişlemelerinin birinci grubu

1. GİRİŞ

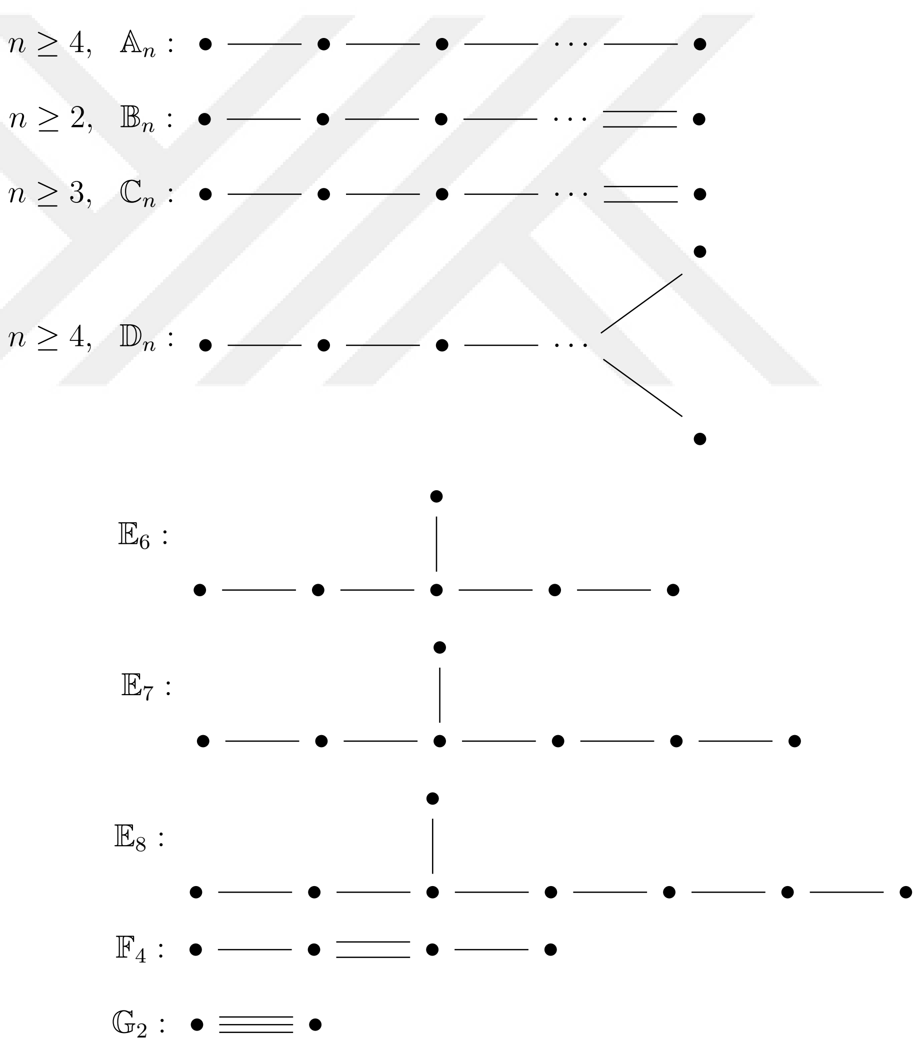
Neredeyse projektif modül kavramı, ilk olarak 1980 yılında Maurice Auslander'ın doktora öğrencisi Roberto Martinez Villa tarafından tanıtılmıştır. Tez çalışmasında; kalıtsal ve artin cebirler üzerinde neredeyse projektif modüller, Martinez Villa (1980-a,b) makaleleri temel kaynak alınarak tanıtılacak ve bazı karakterizasyonları verilecektir. Kalıtsal olmayan cebirler üzerinde neredeyse projektif modüllerin yapısı Kaynarca vd. (2023) esas alınarak incelenecektir. Ayrıca neredeyse projektif modüller yardımıyla temsil teoride önemli yer tutan bazı problemlerin çözümüne dair elde edilen sonuçlar ifade edilecektir.

R değişmeli bir halka ve Λ bir R-cebir olmak üzere R halkası artin ve Λ bir sonlu üretilmiş R-modül ise, Λ bir *artin* cebir olarak adlandırılır. Artin cebirlerinin temsil teorisindeki genel problemlerden biri, sonlu sayıda ayrıştırılamaz modülün izomorfizma sınıflarına sahip cebirlerin karakterizasyonlarını vermektir. Böyle cebirler *sonlu temsil tipli (finite representation type)* olarak adlandırılır. Diğer yandan projektif modüllerin her alt modüllerinin projektif olduğu cebirlere *kalıtsal (hereditary)* adı verilir. Kalıtsal artin cebirler Auslander ve Platzeck (1978), Bernstein vd. (1973), Dlab-Ringel (1975) ve Gabriel (1972) tarafından çalışılmış ve bilinen sonlu temsil tipli kalıtsal artin cebirlerin tam bir listesi yapılmıştır.

Λ bir artin cebir ve P_i'ler ayrıştırılamaz projektif modüller olmak üzere $\Lambda = \bigoplus_{i=1}^{n} P_i$ iken, $i \neq j$ için $P_i \ncong P_j$ oluyorsa Λ'ya bir *temel* (*basic*) cebir denir. Her artin cebir bir temel cebire Morita denk (yani bu cebirler üzerine kurulan modüllerin kategorileri denk) olduğundan Λ'yı bir ayrıştırılamaz temel kalıtsal cebir olarak kabul edebiliriz. Böyle bir cebirin yapısını incelemek ve onu görselleştirmek için ona karşılık gelen bir kuiver çizilir: r; Λ'nın radikali ve $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ Λ'nın ilkel ortogonal idempotentlerinin bir tam kümesi olmak üzere sonlu bir kuiver şu şekilde oluşturulur: her bir $e_1, e_2, ..., e_n$ idempotentine karşılık kuiverde $p_1, p_2, ..., p_n$ köşeleri oluşturulur.$e_i r/r^2 e_j \neq 0$ olması durumunda da p_i'den p_j'ye bir ϕ_{ij} oku çizilir. Kuiverdeki okların yönü ihmal edildiğinde elde edilen çizgeye, kuiverin altında yatan çizge adı verilir.

Sonlu temsil tipli cebirleri, bunlara karşılık gelen kuiverlerin altında yatan çizgelere göre karakterize eden aşağıdaki teorem, Dlab ve Ringel (1975), Bernstein vd. (1973) ve Gabriel (1972) tarafından farklı biçimde kanıtlanmıştır.

Teorem A: Bir ayrıştırılamaz temel kalıtsal artin Λ cebirinin sonlu temsil tipli olması için gerek ve yeter koşul bu cebire karşılık gelen kuiverin altında yatan çizgenin aşağıdaki Dynkin diyagramlarından biri formunda olmasıdır:



Bir kalıtsal artin cebirin sonlu temsil tipli olup olmadığını belirlemek için, bulunan kriterlerden biri de kuadratik formdur.

Λ, bir k cismi üzerinde sonlu boyutlu olan, bir ayrıştırılamaz temel kalıtsal artin cebir olsun. Λ'nın Grothendieck grubu; tabanı, izomorfik olmayan $S_1, S_2, ..., S_n$ basit modüllerinin $[S_1], [S_2], ..., [S_n]$ izomorfizma sınıfları olan bir serbest abelyan gruptur ve $Gr(\Lambda)$ ile gösterilir. $\bar{B}(X,Y) = \dim_k \mathrm{Hom}_\Lambda(X,Y) - \dim_k \mathrm{Ext}_\Lambda(X,Y)$ ile tanımlı bir $\bar{B} : Gr(\Lambda) \times Gr(\Lambda) \longrightarrow \mathbb{Z}$ ikilineer formuna karşılık

$$B(X,Y) = \frac{1}{2}\left[\bar{B}(X,Y) + \bar{B}(Y,X)\right]$$

ile tanımlı bir $B(X,Y)$ ilişkili simetrik ikilineer formu vardır. Bu ikilineer formla ilişkili olan ve

$$q(X) = B(X,X) - \dim_k \mathrm{End}_\Lambda(X) - \dim_k \mathrm{Ext}_\Lambda(X,X)$$

ile tanımlı bir $q : Gr(\Lambda) \longrightarrow \mathbb{Z}$ kuadratik formu yardımıyla sonlu temsil tipli cebirlerin bir karakterizasyonu Auslander ve Platzeck (1978), Dlab ve Ringel (1978) ve Bernstein vd. (1973) tarafından aşağıdaki teoremde ifade edilmiştir.

Teorem B: Ayrıştırılamaz kalıtsal bir Λ artin cebiri için aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) Λ sonlu temsil tiplidir.

(ii) Her $M \in Gr(\Lambda)$ için $q([M]) > 0$

(iii) Her sonlu üretilmiş M Λ-modülü için $\mathrm{Ext}(M,M) = 0$ dır.

Martinez Villa (1980a) tarafından, bir kalıtsal artin cebir üzerine kurulan sonlu üretilmiş modüllerin kategorisinin bir dolu altkategorisi olan neredeyse projektif modüllerin kategorisi üzerinde Teorem B'ye benzer bir teorem kanıtlanarak, sonlu sayıda izomorfik olmayan neredeyse projektif modüle sahip bir cebir üzerindeki gerek ve yeter koşullar ifade ve ispat edilmiştir.

Loupias (1975), sonlu temsil tipli Λ cebirlerinin bir ailesini bir kalıtsal cebirin faktörleri olarak sınıflandırmıştır. Bautista (1977) ise, sonlu temsil tipli artin cebirleri, *yerel olarak kalıtsal (locally hereditary)* ya da kısaca *l-kalıtsal (l-hereditary)* adı verilen şu özelliğe göre sınıflandırmıştır: ayrıştırılamaz projektif Λ-modüllerin herhangi

P, Q çifti için herhangi bir sıfırdan farklı $f : P \longrightarrow Q$ dönüşümü bir monomorfizmadır. Böylece l-kalıtsal cebirlerin bir alt sınıfı formunda olan ve Loupias (1975) tarafından incelenen cebirler l-projektif olarak adlandırılmış ve şöyle karakterize edilmiştir: herhangi bir Λ halkası için bir X Λ-modülünün yerel olarak projektif ya da kısaca l-projektif olması için gerek ve yeter koşul herhangi ayrıştırılamaz P projektif modülü için herhangi bir sıfırdan farklı $f : P \longrightarrow X$ dönüşümünün bir monomorfizma olmasıdır. O halde, l-kalıtsal bir halkanın; her ayrıştırılamaz modülü l-projektif olan bir halka olduğu açıktır. Herhangi bir artin halkada l-projektif modüllerin sınıfının altmodüller, genişlemeler ve çarpımlar altında kapalı olduğu Martinez Villa (1980a) tarafından ifade edilmiş ve yarımükemmel bir halka üzerinde l-projektif modüllerle ilgili elde edilen özellikler yarımükemmel l-kalıtsal bir halka üzerindeki l-projektif modüllere taşınmıştır. Bundan başka, bir kalıtsal cebir üzerindeki l-projektif modüllerin yapısı genel olarak bilinmemekle birlikte sonlu sayıda ayrıştırılamaz modülü l-projektif olan sonsuz temsil tipli kalıtsal cebirlerin var olduğu Martinez Villa (1980a) tarafından ifade edilmiştir.

Neredeyse projektif modüller, l-projektif modüllerin alt sınıfı olarak, Martinez Villa (1980a) tarafından şu şekilde tanımlanmıştır:

(i) X projektif değildir,

(ii) X'in her öz altmodülü projektiftir,

(iii) X bir ayrıştırılamaz projektif modülün bir faktörü değildir.

(i) ve (ii) koşullarını sağlayan bir modüle neredeyse projektif modül *(almost projective module)* denir ve tüm neredeyse projektif modüllerin sınıfı $\mathbb{A}$ ile gösterilir. Bir mükemmel Λ halkası üzerindeki neredeyse projektif modüller Martinez Villa (1980a) tarafından, bir projektif modülün bir faktörü olması ve olmamasına göre, 1977'de Auslander ve Reiten tarafından tanımlanan indirgenemez morfizmalar yardımıyla, aşağıdaki biçimde karakterize edilmiştir:

- Bir ayrıştırılamaz projektif modülün bir faktörü olmayan bir X Λ-modülünün neredeyse projektif olması için gerek ve yeter koşul P bir kalıtsal projektif modül olmak üzere X'in bir

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\alpha} P \xrightarrow{\pi} X \longrightarrow 0$$

temsilinde α'nın bir indirgenemez morfizma olmasıdır.

- Bir ayrıştırılamaz projektif P modülü ve onun aşikar olmayan bir K altmodülü için $X = P/K$ olacak şekildeki bir X Λ-modülünün neredeyse projektif olması için gerek ve yeter koşul rad$P = Q \oplus K$ olacak şekilde P'nin bir kalıtsal projektif Q altmodülünün var olmasıdır.

Böylece bir kalıtsal cebir üzerinde neredeyse projektif modülleri karakterize etmek için indirgenemez morfizmaları sınıflandırmak gerektiğini düşünen Martinez Villa (1980a), sonlu üretilmiş projektif Λ-modüller arasındaki indirgenemez morfizmaların bir tam karakterizasyonu verilmiştir. Böylece Teorem B'ye benzer olarak, sonlu sayıda neredeyse projektif Λ-modüle sahip kalıtsal artin Λ cebirler üzerindeki gerek ve yeter koşulları veren aşağıdaki teoremi kanıtlamıştır.

Teorem C: Λ bir sonsuz $\mathbf{k}$ cismi üzerinde sonlu üretilmiş bir kalıtsal cebir olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) modΛ sadece sonlu sayıda neredeyse projektif modüle sahiptir;

(ii) Her bir neredeyse projektif X modülü için

$$q(X) = \dim_{\mathbf{k}}\mathrm{Hom}_{\Lambda}(X,X) - \dim_{\mathbf{k}}\mathrm{Ext}_{\Lambda}(X,X) > 0 \text{ dır;}$$

(iii) Her bir neredeyse projektif X modülü için $\mathrm{Ext}_{\Lambda}(X,X) = 0$ dır;

(iv) Ayrıştırılamaz projektif olan, $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(L, rP/r^2P) \neq 0$, $\dim_{\mathrm{End}_{\Lambda}(L)}\mathrm{Hom}_{\Lambda}(L,P) = 1$ ya da $\dim_{\mathrm{End}_{\Lambda}(P)}\mathrm{Hom}_{\Lambda}(L,P) = 1$ özelliklerinden birini sağlayan her bir L, P çifti için, her neredeyse projektif X modülünün;
$L, P_1, ..., P_k$ izomorfik olmayan ayrıştırılamaz projektifler ve $1 \leq m_1 \leq 3$ olmak üzere $0 \longrightarrow L \longrightarrow P_1^{m_1} \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_k \longrightarrow X \longrightarrow 0$ biçiminde bir minimal projektif temsili ya da
$L_1, ..., L_s, P$ izomorfik olmayan ayrıştırılamaz projektifler ve $1 \leq n_1 \leq 3$ olmak

üzere $0 \longrightarrow L_1^{n_1} \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_s \longrightarrow P \longrightarrow X \longrightarrow 0$ biçiminde bir minimal projektif temsili vardır.

Neredeyse split diziler, Auslander ve Reiten (1977a,b,c) tarafından bir dizi makalede tanımlanan ve varlıkları ispatlanan, split olmayan kısa tam dizilerdir. Bu dizilerin ilk ve son terimleri arasında bir ilişki var olup, ilk veya son terimlerine göre izomorfizma farkıyla tek türlü tanımlı oldukları aşağıdaki teoremde ifade edilmiştir.

Teorem D:

(i) N ayrıştırılamaz projektif olmayan bir Λ-modül ise, bu durumda izomorfizma farkıyla bir tek $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ neredeyse split dizisi vardır. Ayrıca $L \cong \mathrm{DTr}(N)$ dir.

(ii) L ayrıştırılamaz injektif olmayan bir Λ-modül ise, bu durumda izomorfizma farkıyla bir tek $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ neredeyse split dizisi vardır. Ayrıca $N \cong \mathrm{TrD}(L)$ dir.

Dolayısıyla bir neredeyse split dizinin bilinmeyeni olan ortadaki E terimini belirlemek, özel olarak E'nin ne zaman ayrıştırılamaz olduğunu belirlemek asıl problem konusu olmuştur. Sonlu temsil tipli herhangi bir artin cebir üzerinde,

$$0 \longrightarrow \mathrm{DTr}(A) \longrightarrow E \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

neredeyse split dizisinin E terimi ayrıştırılamaz olacak şekilde ayrıştırılamaz bir A Λ-modülünün var olduğu Auslander ve Reiten (1977) tarafından kanıtlanmıştır. Herhangi bir artin cebir üzerinde de bunun sağlandığı, Martinez Villa (1980b) tarafından neredeyse projektif modüller kullanılarak gösterilmiştir. Ayrıca neredeyse split diziler yardımıyla neredeyse projektif modüllerin bazı karakterizasyonları Martinez Villa (1980a) tarafından verilmiştir. Bunlardan bazıları şunlardır:

- Kalıtsal bir cebir üzerinde bir sonlu üretilmiş burulmalı X modülünün neredeyse projektif olması için gerek ve yeter koşul $\mathrm{DTr}(X)$'in neredeyse injektif (yani kendisinin injektif değil fakat her faktörünün injektif) olmasıdır

- Kendisi basit fakat injektif olmayan ve $\mathrm{DTr}(X)$ basit projektif olmayan bir X modülü neredeyse projektif ise, $0 \longrightarrow \mathrm{DTr}(X) \longrightarrow E \longrightarrow X \longrightarrow 0$ neredeyse split dizinin ortadaki terimi ayrıştırılamazdır.

- X bir kalıtsal cebir üzerinde neredeyse projektif bir modül ise, bu durumda X, $\mathrm{TrD}(S)$'nin bir faktörü olacak şekilde injektif olmayan basit bir S modülü vardır. Bundan dolayı, özel olarak neredeyse projektif modüllerin $\mathbb{A}$ sınıfı düzgün olarak sınırlı uzunluğa sahiptir.

Martinez Villa (1980b) tarafından neredeyse projektif modüllerle biten neredeyse split dizilerin orta teriminin ayrıştırılamaz olması için gerek ve yeter koşullar verilmiştir. Park (1988) tarafından neredeyse projektif modüllerin ayrıştırılamaz olduğu, ilk morfizması indirgenemez ve ortadaki terimi neredeyse projektif olan bir kısa dizinin son teriminin neredeyse projektif olduğu kanıtlanmıştır. Kaynarca vd. (2023) tarafından kalıtsal olmayan cebirlerde neredeyse projektif modüller üzerine çalışılmış olup, sonsuz çoklukta ya da çok az sayıda neredeyse projektif modüle sahip kalıtsal olmayan cebirlerin var olduğu ve sonlu temsil tipli bir cebir ile onun karşıt cebirinin her zaman aynı sayıda neredeyse projektif modüle sahip olmadığı, kuiverler yardımıyla gösterilmiştir.

Tez çalışmasında, ilk olarak temel kavramların tanımları ve özellikleri verilecektir. Üçüncü bölümde; sırasıyla kalıtsal, artin ve kalıtsal olmayan cebirler üzerinde neredeyse projektif modüller yukarıda sözü edilen makaleler esas alınarak incelenecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tez çalışması için gerekli olan bazı temel kavramlar tanıtılarak kullanılacak olan bazı özellikler ifade edilecektir. Bu bölümde kullanılan temel kaynaklar Anderson and Fuller (1974), Pancar ve Alizade (2016), Assem and Coelho (2020), Rotman (1979)'dur.

2.1. Halkalar

Tanım 2.1.1 M bir toplamsal abelyan grup olsun. M'den M'ye giden bir grup homomorfizmasına, yani her $a, b \in M$ için

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$

koşulunu sağlayan bir $f : M \longrightarrow M$ fonksiyonuna *M'nin bir endomorfizması* (*endomorphism of M*) denir. M'nin tüm endomorfizmalarının kümesi E ile gösterilir. Her $a \in M$ ve $f, g \in E$ için

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a)$$

ile tanımlı işlemle E kümesi; birim elemanı her $a \in M$ için $0(a) = 0$ ile tanımlı sıfır homomorfizması olan bir toplamsal abel gruptur. E kümesi üzerinde ikinci bir işlem olarak fonsiyon bileşkesi aşağıdaki biçimde iki farklı şekilde tanımlanarak iki farklı halka yapısı oluşturulur.

- Her $f, g \in E$ ve her $a \in M$ için $(fg)(a) = f(g(a))$ ile tanımlanırsa M'nin endomorfizmalarının kümesi $\mathrm{End}^l(M)$ ile gösterilir ve M'nin *sol endomorfizmalarının halkası* (*ring of left endomorphisms of M*) olarak adlandırılır.
- Her $f, g \in E$ ve her $a \in M$ için $(a)(fg) = ((a)f)g$ ile tanımlanırsa M'nin endomorfizmalarının kümesi $\mathrm{End}^r(M)$ ile gösterilir ve M'nin *sağ endomorfizmalarının halkası* (*ring of right endomorphisms of M*) olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.2 Herhangi bir $(A, +, .)$ halkasında çarpma işlemi farklı bir şekilde tanımlanarak yeni bir halka yapısı oluşturulabilir. Elemanları A'nın elemanlarıyla aynı olan ve *A'nın karşıt halkası* (*opposite ring*) olarak adlandırılan halka; A'daki toplama ve her $a, b \in A$ için $a \bullet b = b.a$ ile tanımlanan yeni çarpma işlemiyle bir halkadır ve $(A^{op}, +, \bullet)$ ile gösterilir.

Tez çalışmasında kullanılacak olan bazı özel halkaların tanımları ilerleyen bölümlerde verilecektir.

2.2. Modüller

Tez çalışması boyunca birimli bir A halkası üzerinde çalışılacaktır.

Tanım 2.2.1 A birimli bir halka ve $0 \neq M$ toplamsal bir abel grup olsun. A'dan M'nin sağ endomorfizmalarının $\mathrm{End}^r(M)$ kümesine bir λ halka homomorfizması varsa (M, λ) ikilisine bir *sağ A-modül* (*right A-module*) denir ve M_A ile gösterilir. Daha açık olarak; her $a, b \in A$ ve $x, y \in M$ için

(i) $(x + y)\lambda(a) = (x)\lambda(a) + (y)\lambda(a)$,

(ii) $(x)\lambda(a + b) = (x)\lambda(a) + (x)\lambda(b)$;

(iii) $(x)\lambda(ab) = ((x)\lambda(a))\lambda(b)$;

(iv) $(x)\lambda(1) = x$

özelliklerini sağlayan bir $\lambda : A \to \mathrm{End}^r(M)$ fonksiyonu ile birlikte M'ye bir sağ A-modül denir. Fakat pratikte bu tanım; yukarıdaki aksiyomlarda λ ve parantezler ihmal edilerek kullanılır. Benzer olarak sol A-modül tanımlanır ve ${}_AM$ ile gösterilir. M bir sol A-modül ve bir sağ B-modül olmak üzere her $a \in A, m \in M, b \in B$ için $a(mb) = (am)b$ özelliği sağlanırsa M'ye bir (A, B)-bimodül denir ve ${}_AM_B$ ile gösterilir. Tüm sağ A-modüllerin aynı zamanda sol A^{op}-modül olduğu açıktır. Ayrıca her A halkası kendisi üzerinde hem sol ${}_AA$ hem de sağ A_A modül yapılarına sahip olup, bu modüllere *regüler* (*regular*) modül adı verilir.

İkinci bölümde verilen tanımların tümü sağ modüller için verilmiştir. Fakat üçüncü bölümde hangi yanlı (sağ ya da sol) modüllerde çalışıldığı ayrıca belirtilecektir.

Tanım 2.2.2 M bir A-modül ve $\emptyset \neq N \subseteq M$ olsun. Eğer N; M'nin A ile skaler çarpımları altında kapalı olan bir altgrubu ise, N'ye M'nin bir *A-altmodülü* (*A-submodule*) denir ve $N \leq M$ ile gösterilir. Bir M modülünün iki alt modülü her zaman vardır. Bunlardan biri $0 = \{0_M\}$ sıfır altmodülü, diğeri ise M'nin kendisidir. Bunlara *aşikar* (*trivial*) altmodüller denir. M'nin kendisinden farklı bir N altmodülüne *öz altmodül* (*proper submodule*) adı verilir ve $N < M$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.3 M bir A-modül ve X, M'nin bir altkümesi olsun. M'nin X'i kapsayan tüm altmodüllerinin arakesitine *X tarafından üretilen* (*generated by X*) altmodül denir ve XA ile gösterilir. Bu küme X'in tüm A-lineer kombinasyonlarından oluşur. $XA = M$ olacak şekilde bir X altkümesi varsa X, M için bir *üreteç kümesi* (*generator set*) olarak adlandırılır. Bir sonlu küme tarafından üretilen M modülüne *sonlu üretilmiş* (*finitely generated*) modül adı verilir.

Teorem 2.2.4 M bir A-modül ve $X \subseteq M$ üreteç kümesi olsun. Bu durumda bir

$$A^{(|X|)} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

epimorfizması vardır. Ayrıca A'nın M'yi sonlu üretmesi için gerek ve yeter koşul M'nin sonlu üretilmiş olmasıdır.

Tanım 2.2.5 Bir M A-modülünün tüm altmodüllerinin ailesi $\mathcal{S}(M)$ olmak üzere $\mathcal{S}(M)$ *azalan zincir koşulunu* (*descending chain condition*) sağlarsa, yani; $\mathcal{S}(M)$'deki her azalan

$$L_1 \geq L_2 \geq \ldots \geq L_n \geq \ldots$$

zinciri için $L_{n+i} = L_n$ $(i = 1, 2, \ldots)$ olacak şekilde bir n varsa M modülü *artin* (*artinian*) olarak adlandırılır.

Özel olarak; ${}_AA$ (A_A) regüler sol (sağ) modülleri artin ise A halkası sol (sağ) *artin* olarak adlandırılır.

Teorem 2.2.6 Bir F A-modülü ve $X = \{x_i \mid i \in I\} \subseteq F$ altkümesi için aşağıdaki koşullar birbirine denktir:

(i) Her $a \in F$ elemanı, sadece sonlu sayıda $a_i \in A$ elemanı sıfırdan farklı (veya hepsi sıfır) olmak üzere, $a = \sum_{i \in I} x_i a_i$ biçiminde sonlu toplam olarak tek türlü yazılır.

(ii) Her $i \in I$ için $f_i(a) = x_i a$ ile tanımlı bir $f_i : A \longrightarrow x_i A$ izomorfizması vardır ve $F = \bigoplus_{i \in I} x_i A$ olur.

Tanım 2.2.7 Teorem 2.2.6'daki denk koşullardan birini sağlayan F'ye bir *serbest* (*free*) modül, $X = \{x_i \mid i \in I\}$ kümesine de F'nin *serbest üreteçler* (*free generators*) kümesi veya kısaca *tabanı* (*basis*) denir.

Tanım 2.2.8 M bir A-modül ve N; M'nin bir altmodülü olsun. Her $m, m_1, m_2 \in M$ ve her $a \in A$ için

$$(m_1 + N) + (m_2 + N) = m_1 + m_2 + N;$$

$$(m + N)a = ma + N$$

ile tanımlı işlemlerle bir A-modül yapısına sahip olan $M/N = \{m + N | m \in M\}$ kümesine M'nin N ile *bölüm modülü* ya da *faktör modülü* (*factor module*) denir.

Uyarı 2.2.9 Her modül, bir serbest modülün bölüm modülüne izomorftur.

Tanım 2.2.10 M sıfırdan farklı bir A-modül olmak üzere, A'nın aşikar altmodüllerinden başka altmodülü yoksa A'ya *basit* (*simple*) modül denir.

Tanım 2.2.11 M sıfırdan farklı bir A-modül olsun. Her bir i için, *kompozisyon faktörü* (*composition factor*) olarak adlandırılan M_{i+1}/M_i bölüm modülü basit olacak şekilde, M'nin altmodüllerinin bir sonlu

$$M = M_0 > M_1 > M_2 > \ldots > M_n = 0$$

dizisine M'nin *n uzunluklu kompozisyon serisi* (*composition series of length n*) denir. Jordan-Hölder Teoremi gereğince; bir M modülü bir kompozisyon serisine sahipse M'nin kompozisyon serilerinin her çifti izomorf olup, bunun bir sonucu olarak, bir kompozisyon serisine sahip olan herhangi bir modülün tüm kompozisyon serilerinin uzunlukları aynıdır. Bu sayıya M modülünün *uzunluğu* (*length*) denir ve $l(M)$ ile gösterilir. M'nin hiç kompozisyon serisi yoksa, bu durum $l(M) := \infty$ ile ifade edilir. Ayrıca $l(M) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $M = 0$ olmasıdır.

Tanım 2.2.12 M bir A-modül ve M_1 ve M_2 M'nin altmodülleri olsun. Eğer $M = M_1 + M_2$ ve $M_1 \cap M_2 = 0$ oluyorsa, M'ye M_1 ile M_2'nin *iç direkt toplamı* (*internal direct sum*) denir ve $M = M_1 \oplus M_2$ ile gösterilir ve bu yazılış M'nin bir *dik ayrışımı* (*direct decomposition*) olarak adlandırılır. Bu durumda her $m \in M$ elemanı; $m_1 \in M_1$ ve $m_2 \in M_2$ olmak üzere $m = m_1 + m_2$ biçiminde tek türlü olarak yazılır. Burada M_1 ve M_2'ye M'nin *dik toplananları* (*direct summand*) denir. Eğer M_1; M'nin bir dik toplananı ise $M = M_1 \oplus M_2$ olacak şekilde M'nin bir M_2 altmodülü vardır. Sıfırdan farklı bir M modülü sıfırdan farklı altmodüllerinin bir dik toplamı olarak yazılamıyorsa *ayrıştırılamaz* (*indecomposable*) olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.13 M bir A-modül ve $K \leq M$ olsun. $K \cap L = 0$ olacak şekildeki her $L \leq M$ için $L = 0$ oluyorsa K'ya *büyük* (*essential, large*) altmodül denir ve $K \trianglelefteq M$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.14 M bir A-modül ve $K \leq M$ olsun. $K + L = M$ olacak şekildeki her $L \leq M$ için $L = M$ oluyorsa K'ya *küçük* (*superfluous, small*) altmodül denir ve $K \ll M$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.15 M bir A-modül ve N; M'nin sıfırdan farklı bir altmodülü olmak üzere herhangi bir $L \leq M$ için $L \leq N$ iken $L = 0$ veya $L = N$ oluyorsa N'ye M'nin bir *minimal* altmodülü denir. Basit ve minimal modüllerin çakışık olduğu açıktır. M'nin tüm minimal (yani basit) altmodüllerinin toplamına M'nin *sokulu* (*socle*) denir ve $\mathrm{Soc}M$ ile gösterilir. Yani

$$\mathrm{Soc}M = \sum \{K_i \mid K_i, M\text{'nin basit (minimal) altmodülü}\}$$

olup

$$\mathrm{Soc}M = \bigcap \{E_i \mid E_i, M\text{'nin büyük altmodülü}\}$$

biçiminde de yazılır. M'nin hiç minimal altmodülü yoksa $\mathrm{Soc}M = 0$ yazılır.

Tanım 2.2.16 M bir A-modül ve N; M'nin bir öz altmodülü olmak üzere herhangi bir $L \leq M$ için $N \leq L$ iken $L = N$ veya $L = M$ oluyorsa N'ye M'nin bir *maksimal* altmodülü denir. M'nin tüm maksimal altmodüllerinin arakesitine M'nin *radikali* (*radical*) denir ve $\mathrm{Rad}M$ ile gösterilir. Yani

$$\mathrm{Rad}M = \bigcap \{N_i \mid N_i, M\text{'nin maksimal altmodülü}\}$$

olup

$$\mathrm{Rad}M = \sum \{S_i \mid S_i, M\text{'nin küçük altmodülü}\}$$

biçiminde de yazılır. M'nin hiç maksimal altmodülü yoksa $\mathrm{Rad}M = M$ yazılır.

2.3. Modül Homomorfizmaları

Tanım 2.3.1 M ve N birer A-modül olsun. Her $x, y \in M$ ve her $a \in A$ için

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$f(xa) = f(x)a$$

özelliklerini sağlayan bir $f : M \longrightarrow N$ fonksiyonuna A-*homomorfizma* (A-*homomorphism*) denir. Bir $f : M \longrightarrow N$ A-homomorfizması; (sırasıyla) birebir ise A-*monomorfizma*, örten ise A-*epimofizma*, hem birebir hem de örten ise A-*izomorfizma* olarak adlandırılır. Bir $f : M \longrightarrow M$ A-homomorfizmasına A-*endomorfizma* adı verilir.

M'den N'ye giden tüm A-homomorfizmalarının kümesi $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ ile gösterilir. Özel olarak $N = M$ olması durumunda $\mathrm{End}_A M$ ile gösterilir ve bu küme M'nin *endomorfizma halkası* (*endomorphism ring*) olarak adlandırılır.

Tanım 2.3.2 $f : M \longrightarrow N$ bir A-homomorfizma olsun.

(i) f'nin *çekirdeği* (*kernel*); $\mathrm{Ker}f = \{m \in M \mid f(m) = 0\}$,

(ii) f'nin *görüntüsü* (*image*); $\mathrm{Im}f = \{f(m) \mid m \in M\}$,

(iii) f'nin *eşçekirdeği* (*cokernel*); $\mathrm{Coker}f = N/\mathrm{Im}f = \{n + \mathrm{Im}f \mid n \in N\}$

ile tanımlanır.

Lemma 2.3.3 $f : M \longrightarrow N$ ve $f' : N \longrightarrow M$

$$ff' = 1_N$$

olacak şekilde A-homomorfizmalar olsun. Bu durumda f bir A-epimorfizma ve f' bir A-monomorfizma olup

$$M = \mathrm{Ker}f \oplus \mathrm{Im}f'$$

biçiminde yazılır.

Uyarı 2.3.4 Eğer bir $f : M \longrightarrow N$ A-homomorfizması $f = gh$ biçiminde yazılıyorsa, f'ye g ve h *üzerinden faktörlenir* (*factor through g and h*) denir. Aşağıda verilen ve Çarpan Teoremi (Factor Theorem) olarak adlandırılan teorem bir A-homomorfizmasının faktörlenmesinin karakterizasyonlarını içerir.

Teorem 2.3.5 M, N, M' ve N' birer A-modül ve $f : M \longrightarrow N$ bir A-homomorfizması olsun.
(i) Ker$g \subseteq$ Ker$f$ olacak şekilde bir $g : M \longrightarrow M'$ A-epimorfizması varsa;

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & N \\ & M' \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan, yani; $f = hg$ olacak şekilde, bir tek $h : M' \longrightarrow N$ A-homomorfizması vardır. Ayrıca Ker$h = g($Ker$f)$ ve Im$h =$ Imf olup h'nin birebir olması için gerek ve yeter koşul Ker$g =$ Ker$f$ olması ve h'nin örten olması için gerek ve yeter koşul f'nin örten olmasıdır.
(ii) Im$f \subseteq$ Img olacak şekilde bir $g : N' \longrightarrow N$ A-monomorfizması varsa;

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed, "h"'] & & N \\ & N' \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan, yani; $f = gh$ olacak şekilde, bir tek $h : M \longrightarrow N'$ A-homomorfizması vardır. Ayrıca Ker$h =$ Ker$f$ ve Im$h = g^{-1}($Im$f)$ olup h'nin birebir olması için gerek ve yeter koşul f'nin birebir olması ve h'nin örten olması için gerek ve yeter koşul Im$g =$ Imf olmasıdır.

Önerme 2.3.6 $f : M \longrightarrow N$ bir A-homomorfizma olsun. Bu durumda

$$f(\mathrm{Rad}M) \leq \mathrm{Rad}N$$

dir. Özel olarak f bir epimorfizma ise, $f(\mathrm{Rad}M) = \mathrm{Rad}N$ olduğu açıktır.

Tanım 2.3.7 Bir $f : L \longrightarrow M$ A-monomorfizması için Im$f \trianglelefteq M$ oluyorsa, f'ye *büyük monomorfizma* (*essential monomorphism*) denir. Başka bir deyişle; $f : L \longrightarrow M$ A-homomorfizmasının bir büyük monomorfizma olması için gerek ve yeter koşul hf monomorfizma olacak şekilde bir h'nin bir A-monomorfizma olmasıdır.

Tanım 2.3.8 Bir $g : M \longrightarrow N$ A-epimorfizması için Ker$g \ll M$ oluyorsa, g'ye *küçük epimorfizma* (*superflouos epimorphism*) denir. Başka bir deyişle; $g : M \longrightarrow N$ A-homomorfizmasının bir küçük epimorfizma olması için gerek ve yeter koşul gk epimorfizma olacak şekilde bir k'nın bir A-epimorfizma olmasıdır.

2.4. Tam Diziler

Tanım 2.4.1 A-homomorfizmaların bir sonsuz $\cdots \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+2}} \cdots$ dizisine, $i \in \mathbb{Z}$ için Imf_i=Kerf_{i+1} olması durumunda *tam* (*exact*) denir. Özel olarak

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

formundaki bir tam diziye *kısa tam dizi* (*short exact sequence*) denir. Burada f birebir, Imf = Ker$g$ ve g örtendir. Aynı zamanda bu kısa tam diziye M'nin N ile *genişlemesi* (*extension*) adı verilir. M'nin N ile tüm genişlemelerinin kümesi, Baer toplamı olarak adlandırılan bir toplama işlemine göre, birim elemanı

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} N \oplus M \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

olan bir toplamsal abel grup yapısına sahiptir ve $\mathcal{E}(M, N)$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.2 $f : N \longrightarrow L$ bir A-homomorfizma olsun. $hf = 1_N$ olacak şekilde bir $h : L \longrightarrow N$ varsa f'ye bir *split monomorfizma* (*section*) denir. f bir split A-monomorfizma ise, f'nin birebir olduğu açıktır. Fakat bu ifadenin karşıtı doğru değildir. (Örneğin; $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ içerim dönüşümü monomorfizmadır fakat split monomorfizma değildir.)

Tanım 2.4.3 $g : L \longrightarrow M$ bir A-homomorfizma olsun. $gk = 1_M$ olacak şekilde bir $k : M \longrightarrow L$ varsa g'ye bir *split epimorfizma* (*retraction*) denir. g bir split A-epimorfizma ise, g'nin örten olduğu açıktır. Fakat bu ifadenin karşıtı doğru değildir. (Örneğin; $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ doğal dönüşümü epimprfizmadır fakat split epimorfizma değildir.)

Teorem 2.4.4 $0 \longrightarrow N \underset{h}{\overset{f}{\rightleftarrows}} L \underset{k}{\overset{g}{\rightleftarrows}} M \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi için aşağıdaki koşullar denktir:

(i) f bir split A-monomorfizmadır;

(ii) g bir split A-epimorfizmadır;

(iii) $\mathrm{Im}f$; L'nin bir dik toplananıdır.

Ayrıca bu denk koşullardan biri sağlanırsa $L \cong N \oplus M$' dir.

Tanım 2.4.5 Teorem 2.4.4'teki denk koşullardan biri gerçeklendiğinde

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisine *split* dizi denir.

Lemma 2.4.6 (Kısa 5-Lemma) Aşağıdaki diyagram tam satırlara sahip ve değişmeli olacak şekilde A-homomorfizmalardan oluşsun.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & L \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "f'"] & L' \arrow[r, "g'"] & M' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(i) α ve γ A-monomorfizma ise, β A-monomorfizmadır.

(ii) α ve γ A-epimorfizma ise, β A-epimorfizmadır.

(iii) α ve γ A-izomorfizma ise, β A-izomorfizmadır.

2.5. Projektif Modüller ve Karakterizasyonları

Bu bölümde, tezin üçüncü bölümünde tanıtılacak olan neredeyse projektif modüller konusuna zemin hazırlaması amacıyla , projektif modüller tanıtılarak bazı karakterizasyonları verilecektir.

Tanım 2.5.1 P bir A-modül ve $f : M \longrightarrow N$ bir epimorfizma olsun. Her $g : P \longrightarrow N$ A-homomorfizması için

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] & \\
M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan, yani $g = fh$ olacak şekilde, bir $h : P \longrightarrow M$ A-homomorfizması varsa P'ye bir *projektif* (*projective*) modül denir.

Lemma 2.5.2 Her serbest modül projektiftir.

Sonuç 2.5.3 Her modül bir projektif modülün epimorfik görüntüsüdür.

Aşağıdaki önermede, projektif modüllerin karakterizasyonları, Bölüm 2.6'da tanımlanacak olan Hom funktorları yardımıyla verilmiştir.

Önerme 2.5.4 P bir A-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) P projektiftir;

(ii) Herbir $f : M \longrightarrow N$ A-epimorfizması için

$$\mathrm{Hom}_A(P, f) : \mathrm{Hom}_A(P, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P, N)$$

dönüşümü bir A-epimorfizmadır;

(iii) A-Mod'daki her $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ tam dizisi için

$$\mathrm{Hom}_A(P, M') \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_A(P, M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_A(P, M'')$$

dizisi tamdır.

Önerme 2.5.5 Bir P A-modülü için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) P projektiftir.

(ii) Her $M \xrightarrow{f} P \longrightarrow 0$ epimorfizması splittir.

(iii) P, bir serbest sol A-modülün bir dik toplananına izomorftur.

Önerme 2.5.6 Projektif modüllerin dik toplamları ve dik toplananları projektiftir.

Uyarı 2.5.7 P bir sol A-modül olsun. P'nin sonlu üretilmiş ve projektif modül olması için gerek ve yeter koşul uygun bir P' modülü ve $n > 0$ tam sayısı için $P \oplus P' \cong A^{(n)}$ olacak şekilde bir A-izomorfizmasının var olmasıdır.

Tanım 2.5.8 P projektif bir A-modül ve $f : P \to M$ morfizması bir küçük epimofizma ($\mathrm{Ker}f \ll P$) ise, f ile birlikte P'ye M modülünün *projektif örtüsü* (*projective cover*) denir. Bir modülün projektif örtüsü her zaman var olmayabilir, fakat varsa, izomorfizma farkıyla tektir.
Her A-modülün projektif örtüsünün var olması durumunda A halkası *mükemmel* (*perfect*), her sonlu üretilmiş A-modülün projektif örtüsünün var olması durumunda ise A halkası *yarımükemmel (semiperfect)* olarak adlandırılır.

Tanım 2.5.9 M bir A-modül olsun. Herhangi $j \geq 0$ için P_j'ler projektif olmak üzere mod$A$'da bir

$$\cdots \longrightarrow P_m \xrightarrow{f_m} P_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

tam dizisi vardır. $f_0 : P_0 \to M$ epimorfizması ile birlikte projektif A-modüllerin

$$\cdots \longrightarrow P_m \xrightarrow{f_m} P_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

tam dizisine M'nin *projektif çözücüsü* (*projective resolution*) denir. Herhangi bir M modülünün Mod$A$'da bir projektif çözüsü her zaman vardır. Ayrıca

$$0 \longrightarrow P_m \xrightarrow{f_m} P_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

olacak şekilde bir m doğal sayısı varsa, buna M'nin *projektif boyutu* (*projective dimension*) denir ve $\mathrm{pdim}M = m$ ile gösterilir. Tüm A-modüllerin projektif boyutları kümesinin supremumuna A'nın *küresel boyutu* (*global dimension*) denir ve $\mathrm{gldim}A$ ile gösterilir. Böyle bir m doğal sayısı yoksa M'nin projektif boyutu sonsuzdur denir. Eğer $P_0 \xrightarrow{f_0} M$ ve her $j \geq 1$ için $P_j \longrightarrow \mathrm{Im}f_j$ birer projektif örtü ise yukarıdaki tam dizi M'nin bir *minimal projektif çözücüsü* (*minimal projective resolution*) olarak adlandırılır.

Tanım 2.5.10 Her sağ (sol) ideali projektif olan bir halkaya sağ (sol) *kalıtsal* (*hereditary*) halka denir. Buna denk olarak her projektif modülün her altmodülünün projektif olması durumunda halka kalıtsal olarak adlandırılır. Ayrıca bir halkanın kalıtsal olması için gerek ve yeter koşul o halkanın küresel boyutunun en fazla 1 olmasıdır.

2.6. Kategoriler ve Funktorlar

Bu bölümde bazı kategorik kavramların tanımlarına ve özelliklerine yer verilecektir.

Tanım 2.6.1 Bir $\mathcal{C} = (\mathrm{Ob}\mathcal{C}, \mathrm{Mor}\mathcal{C}, \circ)$ *kategorisi* (*category*):

(i) $\mathrm{Ob}\mathcal{C}$; *nesnelerin* (*objects*) bir sınıfı;

(ii) $\mathrm{Mor}\mathcal{C}$; *morfizmaların* (*morphisms*) bir kümesi;
(öyle ki: her $(A, B) \neq (C, D)$ nesne çifti için $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \cap \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, D) = \emptyset$ özelliğine sahip)

(iii) $\circ$; *bileşke* (*composion*) olarak adlandırılan bir fonksiyonunun oluşturduğu bir sistemdir. Öyle ki: Her bir $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ve $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C)$ morfizma çiftini bir $g \circ f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C)$ morfizmasına karşılık getiren

$$\circ : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

bileşke fonksiyonu;

(a) Birleşme Özelliği: Her $A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ve her $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B), g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C)$ ve $h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, D)$ için $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

(b) Birim Eleman Özelliği: Her $A \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$ ve her $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ve $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A)$ için $f \circ 1_A = f$ ve $1_A \circ g = g$ olacak şekilde bir $1_A \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A)$ birim morfizması vardır.

özelliklerini sağlar.

Uyarı 2.6.2 A birimli bir halka olmak üzere;

- nesneleri; sağ A-modüller,
- morfizmaları; A-homomorfizmalar,
- bileşke işlemi; bilinen fonksiyon bileşkesi

ile tanımlı kategoriye sağ A-modüllerin kategorisi denir ve $\mathrm{Mod}A$ ile gösterilir. Gösterim kolaylığı için $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Mod}A}(M, N) = \mathrm{Hom}_A(M, N)$ kullanılır. Özel olarak sonlu üretilmiş sağ A-modüllerin kategorisi $\mathrm{mod}A$ ile gösterilir.

Uyarı 2.6.3 Hom kümelerinin bir toplamsal abelyan grup ve bu kümeler üzerinde bileşke işleminin ikilineer olduğu bir kategoriye *öntoplamsal* (*preadditive*) adı verilir. Sonlu dik toplamlara sahip öntoplamsal bir kategori ise *toplamsal* (*additive*) olarak adlandırılır ve objelerinin arasındaki morfizmalar gösterilirken aşağıdaki matris notasyonu kullanılır. Daha açık olarak; $i = 1, 2 \ldots n$ için $f_i : X_i \longrightarrow Y$ ve $g_i : Y \longrightarrow Z_i$ morfizmaları verildiğinde sırasıyla

$$\iota_j : \ X_j \longrightarrow X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n \quad \text{ve } p_i : \ Z_1 \oplus Z_2 \oplus \cdots \oplus Z_n \longrightarrow Z_i$$

içerim ve izdüşüm dönüşümleri olmak üzere dik toplam tanımı gereğince

$$\begin{tikzcd}
X_j \arrow[rr, "\iota_j"] \arrow[dr, "f_j"] & & X_1 \oplus \cdots \oplus X_n \arrow[dl, dashed, "f"] \\
& Y \arrow[dl, dashed, "g"] \arrow[dr, "g_i"] & \\
Z_1 \oplus \cdots \oplus Z_n \arrow[rr, "p_i"] & & Z_i
\end{tikzcd}$$

$f_j = f\iota_j$ olacak şekilde

$$f = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_n \end{pmatrix} : \ X_1 \oplus \cdots \oplus X_n \longrightarrow Y$$

morfizması tek türlü tanımlıdır. $g_i = p_i g$ olacak şekilde ve

$$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} : \ Y \longrightarrow Z_1 \oplus \cdots \oplus Z_n$$

morfizması tek türlü tanımlıdır.

Ayrıca $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$ ve $Z = Z_1 \oplus Z_2 \oplus \cdots \oplus Z_m$ olmak üzere bir $h : X \longrightarrow Z$ morfizması

$$X_j \xrightarrow{\iota_j} X \xrightarrow{h} Z \xrightarrow{p_i} Z_i$$

ve $h_{ij} = p_i h \iota_j \in \mathrm{Hom}(X_j, Z_i)$ olmak üzere

$$h = (h_{ij}) = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ h_{m1} & h_{m2} & \cdots & h_{mn} \end{pmatrix}$$

biçiminde ifade edilir.

Kategorik anlamda bir morfizmanın monomorfizma ve epimorfizma olması aşağıdaki biçimde sırasıyla soldan sadeleşme ve sağdan sadeleşme özellikleriyle tanımlanır.

Tanım 2.6.4 Herhangi bir $\mathcal{C}$ kategorisindeki bir $f : M \longrightarrow N$ morfizması için

(i) $g, h : L \longrightarrow M$ morfizmalar olmak üzere $fg = fh$ iken $g = h$ oluyorsa f'ye bir *monomorfizma*,

(ii) $g, h : N \longrightarrow K$ morfizmalar olmak üzere $gf = hf$ iken $g = h$ oluyorsa f'ye bir *epimorfizma*

adı verilir.

Tanım 2.6.5 Herhangi bir $\mathcal{C}$ kategorisinde $f : L \longrightarrow M$ ve $g : L' \longrightarrow M$ morfizmaları verilsin. f ve g' nin *geri çekmesi* (*pullback, fibered product*) $g\alpha = f\beta$ olacak şekildeki $\alpha : E \longrightarrow L'$ ve $\beta : E \longrightarrow L$ morfizmaları ile birlikte (E, α, β) üçlüsüdür, öyle ki: $g\alpha' = f\beta'$ olacak şekildeki her (X, α', β') üçlüsü için, aşağıdaki üçgensel diyagramları değişmeli yapan, yani $\alpha' = \alpha\theta$ ve $\beta' = \beta\theta$ olacak şekilde bir tek $\theta : X \longrightarrow E$ morfizması vardır.

$$\begin{tikzcd} & L' \arrow[d, "g"] \\ L \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[dr, dashed, "\theta"] \arrow[drr, bend left, "\alpha'"] \arrow[ddr, bend right, "\beta'"'] & & \\ & E \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & L' \arrow[d, "g"] \\ & L \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd}$$

Geri çekmeler var olduğu durumda izomorfizma farkıyla tek türlü tanımlıdırlar. Sağ A-modüllerin kategorisinde geri çekmeler vardır.

Tanım 2.6.6 Herhangi bir $\mathcal{C}$ kategorisinde $f : M \longrightarrow N$ ve $g : M \longrightarrow N'$ morfizmaları verilsin. f ile g'nin *ileri itmesi* (*pushout, fibered sum*) $\beta g = \alpha f$ olacak şekildeki $\alpha : N \longrightarrow F$ ve $\beta : N' \longrightarrow F$ morfizmaları ile birlikte (F, α, β) üçlüsüdür, öyle ki $\beta' g = \alpha' f$ olacak şekildeki her (Y, α', β') üçlüsü için, aşağıdaki üçgensel diyagramları değişmeli yapan, yani $\beta' = \theta\beta$ ve $\alpha' = \theta\alpha$ olacak şekilde bir tek $\theta : F \longrightarrow Y$ morfizması vardır.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & N' \\ N & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & N' \arrow[d, "\beta"] \arrow[ddr, "\beta'"] & \\ N \arrow[r, "\alpha"] \arrow[drr, "\alpha'"'] & F \arrow[dr, dashed, "\theta"] & \\ & & Y \end{tikzcd}$$

İleri itmeler var olduğu durumda izomorfizma farkıyla tek türlü tanımlıdırlar. Sağ A-modüllerin kategorisinde ileri itmeler vardır.

Tanım 2.6.7 $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori olsun. $\mathcal{C}$'nin her X nesnesine $\mathcal{D}$'nin bir $F(X)$ nesnesini, her $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ morfizmasına bir $F(f) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ (sırasıyla, $F(f) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(Y), F(X))$) morfizmasını karşılık getiren ve aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ fonksiyonuna bir *kovaryant funktor* (*covariant functor*) (sırasıyla, *kontravaryant funktor* (*contravariant functor*)) denir, öyle ki: $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ için

(i) $F(gf) = F(g)F(f)$ (sırasıyla, $F(gf) = F(f)F(g)$) dir.

(ii) Her $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$ için $F(1_X) = 1_{F(X)}$ dır.

Örnek 2.6.8 X keyfi bir sağ A-modül olmak üzere Mod$A$ kategorisinden abelyan grupların $\mathcal{A}$ kategorisine giden sırasıyla kovaryant ve kontravaryant olan $\mathrm{Hom}_A(X, -)$ ve $\mathrm{Hom}_A(-, X)$ ile gösterilen iki önemli funktor vardır. Bu funktorlar aşağıdaki biçimde tanımlanır:
$Hom_A(X, -)$ funktoru;

(i) Bir Y A-modülünü, toplamsal bir grup yapısına sahip olan ve X'den Y'ye giden tüm A-homomorfizmaların kümesi olan $\mathrm{Hom}_A(X, Y)$'ye götürür.

(ii) Bir $f : Y \longrightarrow Z$ A-homomorfizmasını $f_*(g) = f \circ g$ ile tanımlı

$$\mathrm{Hom}_A(X, f) = f_* : \mathrm{Hom}_A(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(X, Z)$$

morfizmasına götürür öyle ki:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, dashed, "f\circ g"] & \\ Y \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olur. Burada f_*; f'nin *ileri itmesi (push forward)* olarak adlandırılır.

$Hom_A(-, X)$ funktoru;

(i) Bir Y A-modülünü, toplamsal bir grup yapısına sahip olan ve Y'den X'e giden tüm A-homomorfizmaların kümesi olan $\mathrm{Hom}_A(Y, X)$'e götürür.

(ii) Bir $f : Y \longrightarrow Z$ A-homomorfizmasını $f^*(g) = g \circ f$ ile tanımlı

$$\mathrm{Hom}_A(f, X) = f^* : \mathrm{Hom}_A(Z, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(Y, X)$$

morfizmasına götürür öyle ki:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "g\circ f"'] & Z \arrow[d, "g"] \\ & X \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olur. Burada f^*; f'nin *geri çekmesi (pull back)* olarak adlandırılır.

Tanım 2.6.9 $\mathcal{A}$ abelyan grupların kategorisi olmak üzere $F : \mathrm{Mod}A \longrightarrow \mathcal{A}$ bir kovaryant funktor olsun.

(i) Her $\cdots \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \cdots$ tam dizisi için

$$\cdots \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \longrightarrow \cdots$$

dizisi tamsa, F' ye *tam funktor (exact functor)* denir.

(ii) Her $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ tam dizisi için

$$0 \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C)$$

dizisi tamsa, F' ye *soldan tam funktor (left exact functor)* denir.

(iii) Her $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ tam dizisi için

$$F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \longrightarrow 0$$

dizisi tamsa, F' ye *sağdan tam funktor (right exact functor)* denir.

$T : \text{Mod}A \longrightarrow \mathcal{A}$ bir kontravaryant funktor olsun.

(i) Her $\cdots \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \cdots$ tam dizisi için

$$\cdots \longrightarrow T(C) \xrightarrow{T(g)} T(B) \xrightarrow{T(f)} T(A) \longrightarrow \cdots$$

dizisi tamsa, T' ye *tam funktor (exact functor)* denir.

(ii) Her $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ tam dizisi için

$$0 \longrightarrow T(C) \xrightarrow{T(g)} T(B) \xrightarrow{T(f)} T(A)$$

dizisi tamsa, T'ye *soldan tam funktor (left exact functor)* denir.

(iii) Her $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ tam dizisi için

$$T(C) \xrightarrow{T(g)} T(B) \xrightarrow{T(f)} T(A) \longrightarrow 0$$

dizisi tamsa, T' ye *sağdan tam funktor (right exact functor)* denir.

Örnek 2.6.10 Her X nesnesi için $\text{Hom}_A(X, -)$ ve $\text{Hom}_A(-, X)$ funktorları soldan tamdır.

Tanım 2.6.11 Bir M modülünün bir $P_1 \xrightarrow{f} P_0 \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ projektif çözüsüne, herhangi bir N modülü için, soldan tam $\text{Hom}(-, N)$ funktoru uygulanırsa

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(M, N) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}(P_0, N) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}(P_1, N) \longrightarrow \text{Ext}^1(M, N) \longrightarrow 0$$

tam dizi elde edilir. Burada $\text{Ext}^1(M, N) = \text{Coker} f^*$ ile tanımlı olup *M ve N'nin genişlemelerinin birinci grubu* (*first group of extensions of M and N*) olarak adlandırılır.

Uyarı 2.6.12 M ve N modülleri için $\text{Ext}^1(M, N)$ ile $\mathcal{E}(M, N)$ arasında bir grup izomorfizması vardır. Böylece $\text{Ext}^1(M, N) \neq 0$ olması için gerek ve yeter koşul split olmayan bir $0 \longrightarrow N \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0$ genişlemesinin var olmasıdır.

Önerme 2.6.13 Her M A-modülü $\mathrm{Hom}_A(A, M)$ modülüne izomorftur.

Tanım 2.6.14 Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\mathcal{C}$ kategorisine ***k**-kategori* (***k**-category*) denir.

(i) $\mathcal{C}$'deki nesnelerin her X, Y çifti için $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ kümesi bir abel gruptur;

(ii) Morfizmaların bileşkesi **k**-bilineerdir. Yani; $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbf{k}$ skalerleri ve her $f, f_1, f_2 : X \longrightarrow Y$ ve $g, g_1, g_2 : Y \longrightarrow Z$ morfizmaları için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$g \circ (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1(g \circ f_1) + \lambda_2(g \circ f_2)$$

$$(\mu_1 g_1 + \mu_2 g_2) \circ f = \mu_1(g_1 \circ f) + \mu_2(g_2 \circ f).$$

Tanım 2.6.15 $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ birer **k**-kategori olsun. $\mathcal{C}$'deki her bir $f, g : X \longrightarrow Y$ morfizması ve her bir $\lambda, \mu \in \mathbf{k}$ skaleri için

$$F(\lambda f + \mu g) = \lambda F(f) + \mu F(g)$$

özelliğini sağlayan (kovaryant veya kontravaryant) bir $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ funktoru bir ***k**-funktor* (***k**-functor*) olarak adlandırılır.

Tanım 2.6.16 $\mathcal{C}$ bir **k**-kategori olsun. $\mathcal{C}$'deki nesnelerin her sonlu ailesi bir dik toplam ve dik çarpıma sahip ise, $\mathcal{C}$'ye ***k**-lineer* (***k**-linear*) denir. $\mathrm{mod}A$ kategorisi **k**-lineerdir.

Tanım 2.6.17 $\mathcal{C}$ toplamsal **k**-kategori olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $\mathcal{C}$'nin morfizmalarının bir $\mathcal{I}$ sınıfı, $\mathcal{C}$'de bir *iki yanlı (two sided) ideal* olarak adlandırılır:

(i) Her bir $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$ için, $0_x : X \longrightarrow X$ sıfır morfizması $\mathcal{I}$'ya aittir.

(ii) $f, g : X \longrightarrow Y$, $\mathcal{I}$'da morfizmalar ve $\lambda, \mu \in \mathbf{k}$ olmak üzere $\lambda f + \mu g \in \mathcal{I}$ dır.

(iii) $f \in \mathcal{I}$ ve g; f ile soldan bileşkeye girebilen $\mathcal{C}$'de bir morfizma ise $g \circ f \in \mathcal{I}$ dır.

(iv) $f \in \mathcal{I}$ ve h; f ile sağdan bileşkeye girebilen $\mathcal{C}$'de bir morfizma ise $f \circ h \in \mathcal{I}$ dır.

Tanım 2.6.18 Bir $\mathcal{C}$ **k**-kategorisinde bir $\mathcal{I}$ ideali verildiğinde, $\mathcal{C}/\mathcal{I}$ *bölüm kategorisi* (*quotient category*);

- nesneleri; $\mathcal{C}$'deki nesnelerin sınıfı ile aynı,
- morfizmaları; $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{I}}(X,Y) = \frac{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)}{\mathcal{I}(X,Y)}$ ile tanımlı,
- bileşkesi; morfizmaların bilinen bileşkesi

ile tanımlıdır.

Tanım 2.6.19 $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ birer kategori olmak üzere $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ kontravaryant funktorlar olsun. $\mathcal{C}$'deki her bir $f : X \longrightarrow Y$ morfizması için;

$$\begin{array}{ccc} F(Y) & \xrightarrow{F(f)} & F(X) \\ {\scriptstyle \Phi_Y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_X} \\ G(Y) & \xrightarrow{G(f)} & G(X) \end{array}$$

diyagramını değişmeli yapan, yani $\Phi_X F(f) = G(f)\Phi_Y$ olacak şekildeki Φ_X funktorlarının oluşturduğu $\Phi = (\Phi_X) : F \longrightarrow G$ fonksiyonuna bir *funktorsal morfizma* (*functorial morphism*) denir. Φ_X'lerin birebir olması durumunda Φ'ye *funktorsal monomorfizma* (*functorial monomorphism*), Φ_X'lerin örten olması durumda Φ'ye *funktorsal epimorfizma* (*functorial epimorphism*), Φ_X'lerin birebir ve örten olması durumunda Φ'ye *funktorsal izomorfizma* (*functorial isomorphism*) denir. Kovaryant funktorlar için de benzer tanımlar yapılır.

Tanım 2.6.20 $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ herhangi kategoriler olmak üzere $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ bir kovaryant funktor olsun. $GF \cong 1_{\mathcal{C}}$ ve $FG \cong 1_{\mathcal{D}}$ funktorsal izomorfizmaları var olacak şekilde bir $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ funktoru varsa F'ye bir *kategori denkliği* (*equivalence of category*) denir.

Tanım 2.6.21 Sonlu boyutlu cebirlerin en önemli özelliklerinden biri aşağıdaki biçimde tanımlanan (standart) dualite funktorunun var olmasıdır.

- Bir M A-modülünü; M'nin dual uzayı olarak adlandırılan ve $a \in A$, $f \in DM$, $m \in M$ için $(af)(m) = f(ma)$ işlemi ile bir modül yapısına sahip olan, $DM = \mathrm{Hom}_k(M, k)$'ya götüren,
- Bir $f : M \longrightarrow N$ morfizmasını; $u \in DN$ için $Df(u) = uf$ ile tanımlı bir $Df : DN \longrightarrow DM$ morfizmasına götüren

$$D = \mathrm{Hom}_k(-, k) : \mathrm{mod}A \longrightarrow \mathrm{mod}A^{op}$$

kontravaryant funktoruna *dualite* (*duality*) adı verilir. Benzer olarak modA^{op}'tan mod$A$'ya bir dualite funktoru vardır.

Tanım 2.6.22 Bir M A-modülünün bir $P_1 \xrightarrow{f} P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ minimal projektif çözücüsüne, $\mathrm{Hom}_A(-, A) : \underline{\mathrm{mod}}A \longrightarrow \underline{\mathrm{mod}}A^{op}$ funktoru uygulanırsa; ($\mathrm{Hom}_A(-, A) = ()^*$ olmak üzere)

$$0 \longrightarrow M^* \longrightarrow P_0^* \xrightarrow{f^*} P_1^*$$

soldan tam dizisi elde edilir. Bu dizinin sağ tarafına f^*'ın eşçekirdeği eklenirse

$$0 \longrightarrow M^* \longrightarrow P_0^* \xrightarrow{f^*} P_1^* \longrightarrow \mathrm{Coker}f^* \longrightarrow 0$$

dizisi tam olur. Burada $\mathrm{Hom}_A(-, A)$'ya *transpoz* (*transpose*) funktoru denir ve $()^*$ ya da $()^t$ ile gösterilir. Ayrıca Cokerf^*, M'nin *transpozu* olarak adlandırılır ve $\mathrm{Tr}(M)$ ile gösterilir.

Tanım 2.6.23 Her ikisi de soldan tam ve kontravaryant olan D= $\mathrm{Hom}_k(-, k)$ dualite ve Tr=$\mathrm{Hom}_A(-, A)$ transpoz funktorlarının bileşkesi olan DTr funktoruna *Nakayama* funktoru denir ve ν ile gösterilir. ν : mod$A \longrightarrow$ mod$A$ Nakayama funktoru, sağdan tam ve kovaryant olan bir funktordur fakat bir kategori denkliği değildir. Diğer yandan, proj$A$ ayrıştırılamaz projektif modüllerin kategorisi ve inj$A$ ayrıştırılamaz injektif modüllerin kategorisi olmak üzere, ν : proj$A \longrightarrow$ inj$A$ kısıtlanmış Nakayama funktoru, sözde tersi (quasi inverse) $\nu^{-1} = \mathrm{Hom}_A(DA, -)$: inj$A \longrightarrow$ proj$A$ olan bir kategori denkliği olur.

Tanım 2.6.24 mod$A$'da M ve N modülleri verildiğinde M'den N'ye giden ve bir projektif modül üzerinden faktörlenen morfizmaların kümesi $\mathcal{P}(M, N)$ ile, bir injektif modül üzerinden faktörlenen morfizmaların kümesi $\mathcal{I}(M, N)$ ile gösterilir. Nesneleri mod$A$'nın nesneleriyle aynı olan, morfizmaları (sırasıyla)

$$\underline{\mathrm{Hom}}_A(M, N) = \frac{\mathrm{Hom}_A(M, N)}{\mathcal{P}(M, N)} \quad \text{ve} \quad \overline{\mathrm{Hom}}_A(M, N) = \frac{\mathrm{Hom}_A(M, N)}{\mathcal{I}(M, N)}$$

ile tanımlı olan $\underline{\mathrm{mod}}A$ ve $\overline{\mathrm{mod}}A$ kategorilerine (sırasıyla) *projektif olarak kararlı* (*projectively stable*) ve *injektif olarak kararlı* (*injectively stable*) adı verilir.

Uyarı 2.6.25 Tanım 2.6.23 gereğince $\underline{\mathrm{mod}}A$ ve $\overline{\mathrm{mod}}A$ kategorileri arasında *Auslander-Reiten dönüştürücüleri* (*Auslander-Reiten translations*) olarak adlandırılan

$$\tau = \mathrm{DTr} : \underline{\mathrm{mod}}A \longrightarrow \overline{\mathrm{mod}}A$$

$$\tau^{-1} = \mathrm{TrD} : \overline{\mathrm{mod}}A \longrightarrow \underline{\mathrm{mod}}A$$

denklikleri vardır.

2.7. Cebirler

Tanım 2.7.1 Λ birimli bir halka ve K değişmeli bir halka olmak üzere bir $\phi : K \longrightarrow \mathrm{Cen}\Lambda$ halka homomorfizması varsa (Λ, K, ϕ) sistemine, ya da kısaca Λ'ya, bir *K-cebir* (*K-algebra*) adı verilir.

Tanım 2.7.2 $\mathbf{k}$ bir cisim olsun. Aşağıdaki denk koşullardan biri sağlanırsa $\mathbf{k}$'ya bir *cebirsel kapalı cisim* (*algebraically closed field*) denir.

(i) $\mathrm{der}(p) \geq 1$ olacak şekildeki her $p \in \mathbf{k}[x]$ polinomunun $\mathbf{k}$'da bir kökü vardır.

(ii) $\mathbf{k}$ üzerindeki her indirgenmez polinomun derecesi 1 dir.

(iii) $\mathrm{der}(p) \geq 1$ olacak şekildeki her $p \in \mathbf{k}[x]$ polinomu $c, c_1, \cdots, c_n \in \mathbf{k}$ olmak üzere

$$p = c(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$$

biçiminde yazılır.

Tez çalışmasında, aksi belirtilmedikçe $\mathbf{k}$ cebirsel kapalı bir cisim olarak alınacaktır. Tanım 2.7.1'deki tanıma denk olarak, bir $\mathbf{k}$ cismi üzerindeki cebir tanımı aşağıdaki biçimde verilir.

Tanım 2.7.3 $\mathbf{k}$ bir cisim olsun. Λ birimli bir halka ve aynı zamanda bir $\mathbf{k}$-vektör uzayı olmak üzere her $a, b \in \Lambda$ ve her $\lambda \in \mathbf{k}$ için

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b) = (ab)\lambda$$

oluyorsa Λ'ya bir ***k**-cebir* (***k**-algebra*) denir. Burada Λ birimli halkasının toplamsal yapısı ile Λ $\mathbf{k}$-vektör uzayının toplamsal yapısı birbiriyle uyumludur. Λ bir $\mathbf{k}$-vektör uzayı olarak sonlu boyutlu ise, Λ'ya bir *sonlu boyutlu **k**-cebir* (*finite dimensional **k**-algebra*) denir.

Uyarı 2.7.4 Tanım 2.7.1 ve Tanım 2.7.3'te verilen tanımların denk olduğu, $\phi(\lambda) = 1.\lambda$ ile tanımlı, bir ϕ halka homomorfizması yardımıyla görülür.

Tanım 2.2.1'de verilen birimli bir halka üzerindeki modül tanımına benzer olarak aşağıda bir **k**-cebir üzerinde modül tanımı verilmiştir.

Tanım 2.7.5 **k** bir cisim olmak üzere Λ bir **k**-cebir ve M bir **k**-vektör uzayı olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $(m, a) \longmapsto m \cdot a$ ile tanımlı $\cdot : M \times \Lambda \longrightarrow M$ işlemiyle birlikte bir $(M, \cdot)$ ikilisi bir *sağ* Λ*-modül* (*right* Λ*-module*) olarak adlandırılır: her $x, y \in M$, $a, b \in \Lambda$, $\lambda \in \mathbf{k}$ için

(i) $(x + y)a = xa + ya$;

(ii) $x(a + b) = xa + xb$;

(iii) $x(ab) = (xa)b$;

(iv) $(x\lambda)a = x(a\lambda) = (xa)\lambda$;

(v) $x1 = x$.

Sol Λ-modül benzer olarak tanımlanır. Bir Λ cebiri üzerindeki sol modüller ile Λ^{op} karşıt cebiri üzerindeki sağ modüller denktir.

Uyarı 2.7.6 Birimli bir R halkası üzerindeki bir M R-modülünün altında yatan cebirsel yapı bir toplamsal abel grup iken, bir Λ **k**-cebiri üzerindeki bir M Λ-modülünün altında yatan cebirsel yapı bir k-vektör uzayıdır.

Tanım 2.7.7 R artin bir halka ve Λ bir R-cebir olsun. Λ_R sonlu üretilmiş ise, Λ'ya R üzerinde bir *artin cebir* (*artinian algebra*) denir. Bu durumda Λ'nın artin ve bir Λ-modülün sonlu üretilmiş olması için gerek ve yeter koşul o modülün bir R-modül olarak sonlu üretilmiş olmasıdır. Ayrıca Λ'nın bir artin cebir olması için gerek yeter koşul CenΛ'nın artin olması ve Λ'nın bir CenΛ-modül olarak sonlu üretilmiş olmasıdır. Herhangi değişmeli bir artin halkanın bir artin cebir olduğu açıktır.

Aşağıda verilen önermede görüleceği gibi, bir cebirin üzerindeki modülün aynı zamanda cebirin üzerinde bulunduğu halkaya göre de modül yapısına sahip olduğu açıktır.

Önerme 2.7.8 Λ bir artin R-cebir olmak üzere

(i) A ve B birer Λ-modül ise, bu durumda A ve B birer R-modüldür ve $\mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)$, $\mathrm{Hom}_R(A,B)$'nin bir sonlu üretilmiş R-altmodülüdür.

(ii) A bir Λ-modül ise, bu durumda $\mathrm{End}_\Lambda(A)$, $\mathrm{End}_R(A)$'nın bir artin R-altcebiridir. (Auslander vd. 1997)

Uyarı 2.7.9 Λ bir sonlu boyutlu **k**-cebir olmak üzere;

- nesneleri; sonlu üretilmiş sağ Λ-modüller,
- morfizmaları; Λ-morfizmalar,
- bileşke işlemi; bilinen fonksiyon bileşkesi

ile tanımlı kategoriye sonlu üretilmiş sağ Λ-modüllerin kategorisi denir ve modΛ ile gösterilir.

Tanım 2.7.10 Bir M Λ-modülünün altında yatan vektör uzayı sonlu boyutlu (yani $\dim_{\mathbf{k}} M < \infty$) ise, M'ye *sonlu boyutlu* (*finite dimensional*) adı verilir ve $\dim_\Lambda M < \infty$ ile gösterilir.

Uyarı 2.7.11 Sonlu boyutlu bir cebir üzerinde bir modülün sonlu üretilmiş olması için gerek ve yeter koşul sonlu boyutlu olmasıdır.

2.8. Radikal Morfizmalar

Bu bölümde Λ bir artin cebir olmak üzere tüm sonlu üretilmiş Λ-modüllerin modΛ kategorisinde çalışılacaktır. Tüm modüller Λ-modül olmak üzere bunlar arasındaki bir Λ-morfizmasına kısaca morfizma adı verilecektir.

Tanım 2.8.1 M ve N modülleri için $q : M' \longrightarrow M$ bir split monomorfizma ve $p : N \longrightarrow N'$ bir split epimorfizma olmak üzere $pfq : M' \longrightarrow N'$ bir izomorfizma olmayacak şekildeki tüm $f : M \to N$ morfizmalarının kümesine modΛ'nın *radikali* (*radical*) denir ve

$$\mathrm{rad}_\Lambda(M,N) = \{f : M \longrightarrow N \ \mid \ pfq : M' \longrightarrow N' \text{ izomorfizma değil}\}$$

ile gösterilir. $\text{rad}_\Lambda(M, N)$ kümesine ait olan bir f morfizması *radikal morfizma* (*radical morphism*) olarak adlandırılır.

Uyarı 2.8.2 M ve N ayrıştırılamaz modüller olsun.

(i) $M \ncong N$ ise, bu durumda $\text{rad}_\Lambda(M, N) = \text{Hom}_\Lambda(M, N)$ dir.

(ii) $M \cong N$ ise, bu durumda $\text{rad}_\Lambda(M, N) \cong \text{RadEnd}_\Lambda M$ kümesi tüm izomorfizma olmayan morfizmalardan, yani nilpotent endomorfizmalardan, oluşur.

Sonuç 2.8.3 M ve N modülleri için $f : M \longrightarrow N$'nin bir radikal morfizma olması için gerek ve yeter koşul her ayrıştırılamaz X modülü ve $u : X \longrightarrow M$ ve $v : N \longrightarrow X$ morfizmaları için vfu bileşkesinin bir izomorfizma olmamasıdır.

Aşağıdaki sonuç, M ve N modüllerinden birinin ayrıştırılamaz olması durumunda $\text{rad}_\Lambda(M, N)$'nin kolayca belirlenebileceğini gösterir.

Sonuç 2.8.4 Bir $f : M \longrightarrow N$ morfizması verilsin. Bu durumda

(i) M ayrıştırılamaz ise, f radikal morfizmadır $\Leftrightarrow$ f bir split monomorfizma değildir.

(ii) N ayrıştırılamaz ise, f radikal morfizmadır $\Leftrightarrow$ f bir split epimorfizma değildir.

2.9. İndirgenemez Morfizmalar

Bu bölümde indirgenemez morfizmalar tanıtılarak bazı özellikleri verilecektir. Ayrıca neredeyse split diziler ve bunların karakterizasyonları incelenecektir. Ayrıca bir neredeyse split dizinin ilk ve son terimleri arasındaki ilişkiyi veren Auslander-Reiten dönüştürücülerle ilgili temel bilgiler verilecektir.

Bu bölümde modΛ kategorisi üzerinde çalışılmaya devam edilecektir. Auslander ve Reiten; modΛ kategorisi hakkındaki bazı bilgilere erişmek için bu kategorinin radikalinin incelenmesi gerektiğini ifade etmiştir. Özellikle kategorinin radikali ile radikalinin karesi arasında yer alan ve indirgenemez morfizmalar olarak adlandırılan morfizmaların bu açıdan büyük önem taşıdığını ortaya koymuşlardır. Böylece ayrıştırılamaz modüller ve bunların arasındaki indirgenemez morfizmalar bilinirse diğer

modüller ve bunların arasındaki morfizmalar izomorfizma farkıyla belirlenmiş olur. Şimdi modül kategorisinin radikalinin karesini tanımlayalım.
$f : L \longrightarrow M$ ve $g : M \longrightarrow N$ radikal morfizmalar olsun. Bu durumda gf bileşke morfizmaları rad_Λ^2'yı oluşturur. Diğer bir deyişle L ve N modülleri verildiğinde;

$$\text{rad}_\Lambda^2(L, N) = \{\Sigma g_i f_i \ \mid \ f_i \in \text{rad}_\Lambda(L, M_i), g_i \in \text{rad}_\Lambda(M_i, N)\}$$

ile, modΛ 'daki herhangi bir M modülü $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$ biçiminde yazılırsa;

$$\text{rad}_\Lambda^2(L, N) = \{gf \ \mid \ f \in \text{rad}_\Lambda(L, M), g \in \text{rad}_\Lambda(M, N)\}$$

ile tanımlanır. Bundan sonraki bölümlerde radikalde olan fakat radikalin karesinde olmayan morfizmalarla ilgileneceğiz.

Tanım 2.9.1 L ve M (ayrıştırılamaz olması gerekmeyen) birer modül olmak üzere bir $f : L \longrightarrow M$ morfizması;

(i) bir split monomorfizma ve bir split epimorfizma değil ve,

(ii) f herhangi bir N modülü üzerinden faktörlendiğinde, aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan, yani $f = f_1 f_2$ olacak şekilde, $f_1 : N \longrightarrow M$ ve $f_2 : L \longrightarrow N$ morfizmaları var olduğunda; ya f_1 bir split epimorfizmadır ya da f_2 bir split monomorfizmadır.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_2"'] & & M \\ & N \arrow[ur, "f_1"'] & \end{tikzcd}$$

özellikleri sağlanırsa f'ye *indirgenemez* (*irreducible*) morfizma denir.

İndirgenemez morfizmaların bazı özellikleri aşağıdaki verilmiştir.

Lemma 2.9.2 Bir $f : L \longrightarrow M$ morfizması verilsin.

(i) L veya M ayrıştırılamaz modüller olsun. Bu durumda f indirgenemez ise, f radikal morfizmadır.

(ii) L ve M ayrıştırılamaz modüller olsun. Bu durumda f'nin indirgenemez olması için gerek ve yeter koşul $f \in \text{rad}_\Lambda(L, M) \setminus \text{rad}_\Lambda^2(L, M)$ olmasıdır.

Lemma 2.9.3 Her indirgenemez morfizma; bir monomorfizma veya bir epimorfizmadır.

İspat Kabul edelim ki $f : L \longrightarrow M$ indirgenemez morfizma olsun. f'nin görüntüsü üzerinden aşağıdaki aşikar faktorizasyonunu gözönüne alalım.

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & M \\
& Imf \arrow[ur, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

$f = jp$ olacak şekilde $j : \mathrm{im}f \hookrightarrow M$ içerim morfizması ve $p : L \twoheadrightarrow \mathrm{im}f$ izdüşüm morfizması vardır. f indirgenemez olduğundan j bir split epimorfizma veya p bir split monomorfizma olur. Eğer j bir split epimorfizma ise örten olup Teorem 2.3.5(1) gereğince f bir epimorfizma olur. Eğer p bir split monomorfizma ise birebir olup Teorem 2.3.5(2) gereğince f bir monomorfizma elde edilir. □

Uyarı 2.9.4 Bir M modülünden kendisine giden bir indirgenemez morfizma yoktur.

Aşağıdaki lemmanın (i) şıkkı, üçüncü bölümde verilecek olan bazı sonuçlarda önemli rol oynadığı için ispatı detaylı biçimde verilmiştir.

Lemma 2.9.5 $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ split olmayan bir kısa tam dizi olsun.

(i) $f : L \longrightarrow M$ morfizmasının indirgenemez olması için gerek ve yeter koşul her $v : V \longrightarrow N$ morfizması için aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan $v = gv_1$ olacak şekilde bir $v_1 : V \longrightarrow M$ morfizması vardır ya da $g = vv_2$ olacak şekilde bir $v_2 : M \longrightarrow V$ morfizması vardır.

$$\begin{tikzcd}
& & & V \arrow[d, "v"] \arrow[dl, dotted, bend left, "v_1"] & \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "v_2"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(ii) $g : M \longrightarrow N$ morfizmasının indirgenemez olması için gerek ve yeter koşul her $u : L \longrightarrow U$ morfizması için aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan $u = u_1 f$

olacak şekilde bir $u_1 : M \longrightarrow U$ morfizması vardır ya da $f = u_2u$ olacak şekilde bir $u_2 : U \longrightarrow M$ morfizması vardır.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[dl, dotted, "u_1"'] & N \arrow[r] & 0 \\ & U \arrow[ur, dashed, "u_2"'] & & & \end{tikzcd}$$

İspat (i) ($\Rightarrow$) $f : L \longrightarrow M$ indirgenemez bir morfizma olsun. Herhangi bir $v : V \longrightarrow N$ morfizmasını alalım.

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[d, "v"] \\ M \arrow[r, "g"] & N \end{tikzcd}$$

morfizmalarının geri çekmesi E olmak üzere tam satırlara sahip değişmeli bir

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f'"] \arrow[d, equal, "1_L"] & E \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "u"] & V \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

diyagramı vardır. Birinci kare diyagram değişmeli olduğundan $f = uf'$ ve buradan f indirgenemez olduğundan f' bir split monomorfizma veya u bir split epimorfizma olmalıdır.

`1. Durum:` f' bir split monomorfizma ise, Teorem 2.4.4 gereğince g' bir split epimorfizma olur. Yani $g'g'' = 1_V$ olacak şekilde $g'' : V \longrightarrow E$ sağ tersi vardır. Böylece

$$gv_1 = g(ug'') = (gu)g'' = (vg')g'' = v(g'g'') = v1_V = v$$

olacak şekilde $v_1 = ug'' : V \longrightarrow M$ aranılan dönüşümdür.

`2. Durum:` u bir split epimorfizma ise, $uu' = 1_M$ olacak şekilde $u' : M \longrightarrow E$ sağ tersi vardır. $v_2 = g'u' : M \longrightarrow V$ olarak alınırsa ikinci kare diyagramın değişmeliliği kullanılarak

$$vv_2 = v(g'u') = (vg')u' = (gu)u' = g(uu') = g1_M = g$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

($\Leftarrow$) Verilen ifadeler sağlansın. f'nin indirgenemez olduğunu gösterelim. Verilen dizi split olmadığından f bir split monomorfizma ve split epimorfizma değildir. Kabul edelim ki

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_2"'] & & M \\
& X \arrow[ur, "f_1"'] &
\end{tikzcd}$$

$f = f_1 f_2$ olacak şekilde $f_1 : X \longrightarrow M$ ve $f_2 : L \longrightarrow X$ morfizmaları var olsun. Verilen dizi tam olduğundan f birebir olup f_2 de birebirdir. $V = \mathrm{Coker} f_2$ olarak alınarak

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, equal, "1_L"'] & X \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d, "f_1"'] & V \arrow[r] \arrow[d, "v"] \arrow[dl, dashed, bend left=10, "v_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"'] & M \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, bend left=10, "v_2"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

tam satırlara sahip ve değişmeli diyagramı oluşturulur. Kabulden $v = gv_1$ olacak şekilde $v_1 : V \longrightarrow M$ veya $g = vv_2$ olacak şekilde $v_2 : M \longrightarrow V$ morfizmaları vardır. v_1 ve v_2 morfizmalarının var olmasını ayrı ayrı inceleyelim. Üstteki dizinin split olduğunu iddia ediyoruz. Gerçekten;

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[dr, "h"] \arrow[drr, bend left, "1"] \arrow[ddr, bend right, "v_1"'] & & \\
& X \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f_1"] & V \arrow[d, "v"] \\
& M \arrow[r, "g"] & N
\end{tikzcd}$$

$v = gv_1$ olacak şekilde $v_1 : V \longrightarrow M$ varsa; $v\pi = gf_1$ olup, geri çekmenin tanımından, $\pi h = 1$ olacak şekilde π'nin sağ tersi var olup π bir split epimorfizmadır. Böylece Teorem 2.4.4 gereğince f_2 bir split monomorfizma elde edilir.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, bend left, "v_2"] \arrow[ddr, bend right, "1_M"'] & & \\
& X \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f_1"] & V \arrow[d, "v"] \\
& M \arrow[r, "g"] & N
\end{tikzcd}$$

$g = vv_2$ olacak şekilde $v_2 : M \longrightarrow V$ varsa $v\pi = gf_1$ olup, geri çekmenin tanımından, $f_1 k = 1_M$ olacak şekilde f_1'in sağ tersi var olup f_1 bir split epimorfizmadır. Sonuç olarak f indirgenemezdir.

(ii) ($\Rightarrow$) $g : M \longrightarrow N$ indirgenemez olsun. Herhangi bir $u : L \longrightarrow U$ morfizmasını alalım.

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \\
U &
\end{tikzcd}$$

morfizmalarının ileri itmesi Y olmak üzere tam satırlara sahip değişmeli bir

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & N \arrow[r] \arrow[d, equal, "1_N"] & 0 \\
0 \arrow[r] & U \arrow[r, "f'"] & Y \arrow[r, "g'"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

diyagramı vardır. İkinci kare diyagram değişmeli olduğundan $g = g'v$ olup g indirgenemez olduğundan g' bir split epimorfizma veya v bir split monomorfizma olmalıdır.

`1. Durum:` g' bir split epimorfizma ise, Teorem 2.4.4 gereğince f' bir split monomorfizma olur. Yani $f''f' = 1_U$ olacak şekilde $f'' : Y \longrightarrow U$ sol tersi vardır. Böylece

$$u_1 f = (f''v)f = f''(vf) = f''(f'u) = (f''f')u = u$$

olacak şekilde $u_1 = f''v : M \longrightarrow U$ aranılan dönüşümdür.

`2. Durum:` v bir split monomorfizma ise, $v'v = 1_M$ olacak şekilde $v' : Y \longrightarrow M$ sol tersi vardır. Böylece

$$u_2 u = (v'f')u = v'(f'u) = v'(vf) = (v'v)f = 1_M f = f$$

olacak şekilde $u_2 = v'f' : U \longrightarrow M$ aranılan dönüşümdür.

($\Leftarrow$) Verilen ifadeler sağlansın. g'nin indirgenemez olduğunu gösterelim. Verilen dizi split olmadığından g bir split monomorfizma ve split epimorfizma değildir. Kabul edelim ki

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "g_2"'] & & N \\
& Y \arrow[ur, "g_1"'] &
\end{tikzcd}$$

$g = g_1 g_2$ olacak şekilde $g_1 : Y \longrightarrow N$ ve $g_2 : M \longrightarrow Y$ morfizmaları var olsun. Dizi tam olduğundan g örten olup g_1 de örtendir. $U = \mathrm{Ker} g_1$ olarak alınarak

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g_2"] \arrow[dl, dashed, bend right=15, "u_1"'] & N \arrow[r] \arrow[d, equal, "1_N"] & 0 \\
0 \arrow[r] & U \arrow[r, "\iota"] \arrow[ur, dashed, bend right=15, "u_2"'] & Y \arrow[r, "g_1"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

tam satırlara sahip ve değişmeli diyagramı oluşturulur. Kabulden; $u = u_1 f$ olacak şekilde $u_1 : M \longrightarrow U$ veya $f = u_2 u$ olacak şekilde $u_2 : U \longrightarrow M$ morfizmaları vardır. u_1 ve u_2 morfizmalarının var olmasını ayrı ayrı inceleyelim. Alttaki dizinin split olduğunu iddia ediyoruz. Gerçekten;

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[d, "g_2"] \arrow[dr, bend left, "u_1"] & \\
U \arrow[r, "\iota"'] \arrow[drr, bend right, "1_U"'] & Y \arrow[dr, "h"] & \\
& & U
\end{tikzcd}$$

$u = u_1 f$ olacak şekilde $u_1 : M \longrightarrow U$ varsa; $g_2 f = \iota u$ olup, ileri itmenin tanımından, $h\iota = 1_U$ olacak şekilde $h : Y \longrightarrow U$ sol tersi var olduğundan ι bir split monomorfizmadır. Buradan Teorem 2.4.4 gereğince g_1 bir split epimorfizma olur.

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[d, "g_2"] \arrow[dr, bend left, "1_M"] & \\
U \arrow[r, "\iota"] \arrow[drr, bend right, "u_2"'] & Y \arrow[dr, "k"] & \\
& & M
\end{tikzcd}$$

$f = u_2 u$ olacak şekilde $u_2 : U \longrightarrow M$ varsa; $g_2 f = \iota u$ olup, ileri itmenin tanımından, $kg_2 = 1_M$ olacak şekilde $k : Y \longrightarrow M$ sol tersi vardır. Böylece g_2 bir split monomorfizma bulunur. Sonuç olarak g indirgenemezdir. $\square$

Tanım 2.9.6 Bir $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ kısa tam dizisinde f ve g indirgenemez morfizmalar ise, bu diziye bir *neredeyse split dizi* (*almost split sequence*) ya da *Auslander-Reiten dizisi* adı verilir.

Auslander ve Reiten tarafından (1974) neredeyse split dizilerin varlığı gözlemlenmiş ve aynı yazarlar (1977a,b,c) tarafından bazı özellikleri incelenerek aşağıdaki biçimde bir karakterizasyonu verilmiştir.

Teorem 2.9.7

(i) N bir ayrıştırılamaz projektif olmayan modül ise, bu durumda izomorfizma farkıyla bir tek $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ neredeyse split dizisi vardır. Ayrıca $L \cong \mathrm{DTr}(N)$ dir.

(ii) L bir ayrıştırılamaz injektif olmayan modül ise, bu durumda izomorfizma farkıyla bir tek $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ neredeyse split dizisi vardır. Ayrıca $N \cong \mathrm{TrD}(L)$ dir.

3. NEREDEYSE PROJEKTİF MODÜLLER

Neredeyse projektif modül kavramı, Maurice Auslander'ın doktora öğrencisi olan, Roberto Martinez Villa tarafından ilk defa 1980 yılında kalıtsal cebirler üzerinde çalışılmıştır. Daha sonra bu tanım, herhangi bir artin cebir üzerindeki modüllere yine Martinez Villa (1980b) tarafından genelleştirilmiştir. Artin cebirlerinin temsil teorisinin genel bir problemi olan ve Auslander ve Platzeck (1978), Bernstein vd. (1973), Dlab ve Ringel (1975) ve Gabriel (1972) tarafından farklı yaklaşımlarla ele alınan, sonlu sayıda ayrışıtırılamaz temsile sahip cebirlerin belirlenmesi problemine benzer olarak, sonlu sayıda izomorfik olmayan neredeyse projektif modüle sahip kalıtsal cebirler üzerindeki gerek ve yeter koşulları belirleme problemi Martinez Villa (1980a) tarafından çözülmüştür. 1977'de Auslander ve Reiten tarafından kanıtlanan, $0 \longrightarrow \mathrm{DTr}(A) \longrightarrow E \longrightarrow A \longrightarrow 0$ dizisi neredeyse split olacak şekilde en az bir ayrıştırılamaz A modülü bulunduran sonlu temsil tipli herhangi bir artin cebirinde E'nin ayrıştırılamaz olduğu sonucunun herhangi bir artin cebirinde de doğru olduğu, neredeyse projektif modüller yardımıyla, Martinez Villa (1980b) tarafından gösterilmiştir. Neredeyse projektif modül kavramının tanıtıldığı ilk makalede, kalıtsal cebirler üzerinde neredeyse projektif modüllerin özellikleri incelemiştir (Martinez Villa 1980a). İkinci çalışmada ise bu kavram artin cebirlere genelleştirilmiş ve son terimi neredeyse projektif olan neredeyse split dizilerin orta terimlerinin sahip olduğu özellikler incelenmiştir (Martinez Villa 1980b). Her iki çalışmada da neredeyse projektif modüller, indirgenemez morfizmalar yardımıyla karakterize edilmiş ve farklı özellikleri incelenmiştir. Ayrıca Park (1988) tarafından artin cebirler üzerinde neredeyse projektif modüller için bazı sonuçlar elde edilmiştir. Bundan başka Kaynarca vd. (2023) tarafından kalıtsal olmayan cebirler üzerinde neredeyse projektif modüllerin yapısı kuiverler yardımıyla araştırılmıştır.

Tez çalışmasının bu bölümünde neredeyse projektif modüller sırasıyla, yukarıda adı geçen makaleler ele alınarak kalıtsal, artin ve kalıtsal olmayan cebirler üzerinde incelenecektir. Her bir bölümün başında hangi çalışmanın referans alındığı belirtilecektir.

3.1. Kalıtsal Cebirler Üzerinde Neredeyse Projektif Modüller

Bu bölümde verilen tüm sonuçlar, üç bölümden oluşan Martinez-Villa (1980a) çalışmasına dayanmaktadır. Martinez Villa (1980a) makalesinin ilk bölümünde l-projektif modüller ve l-kalıtsal halkalarla ilgili sonuçlar elde etmiş ve herhangi bir Λ halkası için yerel olarak kalıtsal projektif modül kavramını şu şekilde tanıtmıştır: herhangi bir ayrıştırılamaz P projektif modülü için herhangi bir sıfırdan farklı $f : P \longrightarrow X$ dönüşümü bir monomorfizma oluyorsa X'e *yerel olarak projektif* (*locally projective*) ya da kısaca *l-projektif* (*l-projective*) adını vermiştir. Böylece l-kalıtsal bir halka, her ayrıştırılamaz projektif modülü l-projektif olan bir halkadır. Martinez-Villa, mükemmel bir halka üzerinde l-projektif modüllerle ilgili elde ettiği sonuçları mükemmel l-kalıtsal bir halka üzerindeki l-projektif modüllere indirgemiştir. Bir neredeyse projektif modülün l-projektif olması için, onun bir ayrıştırılamaz projektif modülün bir faktörü olmadığını gerek ve yeter koşul olarak göstermiştir.

Martinez Villa (1980a) makalesinin ikinci bölümünde, neredeyse projektif modülleri tanıtarak bazı karakterizasyonlarını vermiştir. Üçüncü bölümde ise, sonlu sayıda neredeyse projektif modüle sahip kalıtsal artin cebirleri karakterize etmiştir. Böylece Auslander vd. (1994) te yer alan altıncı açık problemin kalıtsal cebirler için bir çözümünü yapmıştır.

Tez çalışmasında; neredeyse projektif modüller incelendiği için, Martinez Villa (1980a) makalesinin sadece ikinci bölümünde yer alan sonuçlar detaylı bir biçimde incelenecek olup üçüncü bölümdeki sonuçların yalnızca ifadelerine yer verilecektir. Ayrıca incelenen makalede modüllerin hangi yanlı olduğu belirtilmemiş olup, modΛ kategorisinde çalışıldığı için modüllerin sağ yanlı olduğu düşünülmektedir.

Neredeyse projektif modül kavramı Martinez Villa (1980a) tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 3.1.1 Herhangi bir Λ halkası üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan bir X modülüne *neredeyse projektif* (*almost projective*) adı verilir:

(i) X projektif değil,

(ii) X'in her öz altmodülü projektif.

Martinez-Villa (1980a) tarafından neredeyse projektif modüllere dair yapılan ilk gözlemler aşağıda verilmiştir.

Uyarı 3.1.2

(i) Neredeyse projektif modüller ayrıştırılamazdır. (Sonuç 3.2.4'te verilecek)

(ii) Projektif olmayan basit modüllerin neredeyse projektif olduğu açıktır.

(iii) X, kalıtsal projektif toplananı olmayan n uzunluklu bir Λ-modül ise, bu durumda her bir $1 \leq i \leq n$ için X_i/X_{i+1} neredeyse projektif olacak şekilde X'in altmodüllerinin n-uzunluklu bir

$$X = X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset X_{n+1} = 0$$

kompozisyon serisi vardır.

(iv) X, bir sol artin halka üzerinde sonlu uzunluklu bir neredeyse projektif modül ise, bu durumda $\mathrm{End}_\Lambda(X)$ bir bölümlü halkadır.

Aşağıdaki örnek, Uyarı 3.1.2 (iii)'deki uzunluğun ve kompozisyon faktörlerinin tek türlü belirli olmadığını gösterir.

Örnek 3.1.3 Bir K cismi üzerinde

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d] \arrow[dr] & 2 \arrow[d] & 3 \arrow[dl] \\ 4 & 5 & \end{tikzcd}$$

kuiveri ile belirli Λ cebirini ve $X = \begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 5 & \end{smallmatrix}$ modülünü gözönüne alalım. X'in

$$X_1 = \begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 5 & \end{smallmatrix} \;, \quad X_1' = \begin{smallmatrix} 1 \\ 5 \end{smallmatrix} \;, \quad \text{ve} \quad X_2' = \begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 5 & \end{smallmatrix}$$

altmodülleri için neredeyse projektif olan kompozisyon faktörleri:

$$X/X_1 = 1, \quad X/X'_2 = 2 \ \text{ ve } \ X'_2/X'_1 = 3$$

biçiminde olup, 1-uzunluklu $X \supset X_1 \supset 0$ zinciri ve 2-uzunluklu $X \supset X'_2 \supset X'_1 \supset 0$ zinciri vardır.

Uyarı 3.1.4 Herhangi bir R-modül,

$$P^{(I)} \longrightarrow P^{(J)} \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

formunda projektif temsile sahip bir X Λ-modülü ile özdeşleştirilebilir. Ayrıca, herbir altmodülü projektif olan bir projektif modüle *kalıtsal projektif* (*hereditary projective*) adı verilir. K; kalıtsal projektif Λ-modüllerin bir toplamı olmak üzere bir X Λ-modülünün

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow K \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

biçiminde bir temsili vardır (Martinez Villa 1980a). Eğer X, bir ayrıştırılamaz projektif modülün bir faktörü olmayan neredeyse projektif bir modül ise, bir projektif K modülünün bir faktörü olarak yazılır, öyle ki: $\pi : K \longrightarrow X$ doğal epimorfizması K'nın herbir dik toplananına kısıtlandığında bir monomorfizma olup, bu ayrıştırılamaz dik toplananların her biri X içine gömülür ve her biri kalıtsal projektif ve X bir R-modül olur. Ayrıca her neredeyse projektif R-modül bir Λ-modül olarak da neredeyse projektiftir. O halde, R üzerinde neredeyse projektif l-projektif modüllerin sınıfı ile Λ üzerinde neredeyse projektif l-projektif modüllerin sınıfı çakışıktır.

Aşağıdaki teoremde, neredeyse projektif modüller indirgenemez morfizmaların eşçekirdeği olarak karakterize edilmiştir.

Teorem 3.1.5 Λ bir sol mükemmel halka olsun.

(i) Bir ayrıştırılamaz projektif modülün bir faktörü olmayan X'in neredeyse projektif olması için gerek ve yeter koşul P bir projektif modül ve α bir indirgenemez morfizma olmak üzere X'in bir

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\alpha} P \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

temsilinin var olmasıdır.

(ii) $P/K \cong X$ olacak şekilde bir ayrıştırılamaz projektif P modülü ve P'nin aşikar olmayan bir K altmodülü var olsun. Bu durumda X'in neredeyse projektif olması için gerek ve yeter koşul $\mathrm{Rad}P = Q \oplus K$ olacak şekilde P'nin bir Q altmodülü var olmasıdır.

İspat (i) ($\Rightarrow$) X bir ayrıştırılamaz projektif modülün bir faktörü olmayan bir neredeyse projektif modül olsun. Uyarı 3.1.4 gereğince L ve P kalıtsal projektif modül olmak üzere bir $0 \longrightarrow L \xrightarrow{\alpha} P \xrightarrow{\pi} X \longrightarrow 0$ temsili vardır. Şimdi Lemma 2.9.5'in (i) şıkkını kullanarak α'nın indirgenemez olduğunu gösterelim. Bunun için bir $g : Y \longrightarrow X$ alalım.

`1. Durum:` g örten değil ise, bu durumda $\mathrm{Im}g \subsetneqq X$ olup kabulden $\mathrm{Im}g$ projektiftir. Böylece $\iota : \mathrm{Im}g \hookrightarrow X$ içerim dönüşümü π üzerinden faktörlenir, yani $\iota = \pi k$ olacak şekilde $k : \mathrm{Im}g \longrightarrow P$ vardır. Sonuç olarak $\pi k g = \iota g = g$ olacak şekilde $kg : Y \longrightarrow P$ dönüşümü var olduğundan g, π üzerinden faktörlenmiş olup ispat tamamlanır.

`2. Durum:` g örten ise, bu durumda $\mathrm{Im}g = X$ olup; P'nin projektif olduğu kullanılarak $\pi = hg$ olacak şekilde bir $h : P \longrightarrow Y$ var olup ispat tamamlanır.

($\Leftarrow$) P projektif ve α indirgenemez olacak şekilde X'in

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\alpha} P \xrightarrow{\pi} X \longrightarrow 0$$

projektif temsili var olsun. X'in bir Z öz altmodülünü alalım. Kabulden α indirgenemez olduğundan, Lemma 2.9.5 gereğince, ya $\iota : Z \longrightarrow X$ içerim dönüşümü π üzerinden faktörlenir ya da π, ι üzerinden faktörlenir.

$$\begin{tikzcd} & & & Z \arrow[dl, dashed, "k"'] \arrow[d, hook, "\iota"] & \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "\alpha"] & P \arrow[r, "\pi"] & X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

π bir epimorfizma olduğundan π'nin ι üzerinden faktörlenmesi çelişki yaratır. Bundan dolayı $\iota = \pi k$ olacak şekilde $k : Z \longrightarrow P$ morfizması var olup istenildiği gibi Z'nin projektif olduğu elde edilir.

(ii) ($\Rightarrow$) X bir ayrıştırılamaz projektif modülün bir faktörü olan neredeyse projektif bir modül olsun. Bu durumda P ayrıştırılamaz bir projektif modül olmak üzere

$X = P/K$ olacak şekilde P'nin aşikar olmayan bir K altmodülü vardır. Buradan $P = X \oplus K$ olup

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\iota} P \xrightarrow{\pi} X \longrightarrow 0$$

split tam dizisi vardır. Diğer taraftan $\mathrm{Rad}P \subseteq P$ olup $j : \mathrm{Rad}P \hookrightarrow P$ içerim dönüşümü yardımıyla $\pi j : \mathrm{Rad}P \longrightarrow X$ morfizması tanımlanır. Böylece

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\pi j \xrightarrow{\iota'} \mathrm{Rad}P \xrightarrow{\pi'} \mathrm{Im}\pi j \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisi vardır. Şimdi bu iki diziyi bir arada düşünerek aşağıdaki değişmeli diyagramı gözönüne alalım.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\pi j \arrow[r, "\iota'"] \arrow[d] & \mathrm{Rad}P \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "j"] & \mathrm{Im}\pi j \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\iota"] & P \arrow[r, "\pi"] & X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Diyagramın değişmeli olmasından $\mathrm{Ker}\pi j = K$ elde edilir. $\mathrm{Im}\pi j = Q$ diyelim. X neredeyse projektif ve $Q \subseteq X$ olduğundan Q projektif olup Önerme 2.5.5 gereğince birinci dizi split olur. Sonuç olarak $\mathrm{Rad}P = Q \oplus K$ bulunur.

($\Leftarrow$) $P = X \oplus K$ ve $\mathrm{Rad}P = Q \oplus K$ olacak şekilde ayrıştırılamaz projektif P modülü ve $K, Q \leq P$ altmodülleri var olsun. Bu durumda

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\iota} P \xrightarrow{\pi} X \longrightarrow 0$$

split tam dizisi vardır. X'in bir Z öz altmodülünü alalım. Bu durumda Z, $\mathrm{Rad}X$'te kapsanır. Diğer yandan $\mathrm{Rad}X = \mathrm{Rad}(P/K) = (\mathrm{Rad}P)/K = Q$ olduğundan Z, Q'nun altmodülü olup projektiftir. Sonuç olarak X neredeyse projektiftir. $\square$

Kalıtsal bir halkada her projektif modül kalıtsal projektif olduğundan, Teorem 3.1.5'in direkt bir sonucu aşağıda verilmiştir.

Sonuç 3.1.6 Λ bir kalıtsal cebir ise, X Λ-modülünün neredeyse projektif olması için gerek ve yeter koşul X'in $0 \longrightarrow L \xrightarrow{\alpha} P \xrightarrow{\pi} X \longrightarrow 0$ temsilindeki α'nın indirgenemez olmasıdır.

Aşağıdaki lemmada bir neredeyse projektif modülün projektif modüllerle genişlemeleri incelenmiştir.

Lemma 3.1.7

(i) π bir küçük epimorfizma olmak üzere $0 \longrightarrow K \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\pi} X \longrightarrow 0$ split olmayan bir kısa tam dizi olsun. K kalıtsal projektif ve X neredeyse projektif ise, E ya projektiftir ya da neredeyse projektiftir.

(ii) $0 \longrightarrow K \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\pi} X \longrightarrow 0$ dizisi (i)'deki özelliklere sahip bir dizi olsun. $p : P \longrightarrow X$ dönüşümü X'in projektif örtüsü olmak üzere

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{q} P \xrightarrow{p} X \longrightarrow 0$$

bir kısa tam dizi olsun.Bu durumda

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"] & P \arrow[r, "p"] \arrow[d, "h"] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & E \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & X \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

tam satılara sahip değişmeli diyagramı vardır. Burada E, q ve g'nin ileri itmesidir.

Karşıt olarak E, $q : L \longrightarrow P$ ve $g : L \longrightarrow K$ morfizmalarının ileri itmesi olacak şekilde bir

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow E \xrightarrow{\pi} X \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisinde π bir küçük epimorfizmadır ve E neredeyse projektiftir.

Sonuç 3.1.8 P kalıtsal projektif bir Λ-modül ve $\mathrm{Im}\alpha \subseteq \mathrm{rad}P$ olmak üzere

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\alpha} P \xrightarrow{\pi} X \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisinde α bir indirgenemez morfizma ve $j : L' \longrightarrow L$ bir split monomorfizma ise, αj indirgenemezdir.

İspat P kalıtsal projektif, $\mathrm{Im}\alpha \subseteq \mathrm{Rad}P$ olacak şekilde $\alpha : L \longrightarrow P$ indirgenemez bir morfizma ve $j : L' \longrightarrow L$ split bir monomorfizma olsun. Bu durumda α ve j'

dönüşümlerinin ileri itmesi Y olmak üzere tam satırlara sahip aşağıdaki değişmeli diyagram oluşturulur.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r] \arrow[d, "j"] \arrow[dr, dashed, "\alpha j"] & L' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "j'"] & P \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & L'' \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Lemma 3.1.7(ii)'nin karşıt yönü gereğince Y neredeyse projektif olup Teorem 3.1.5'ten αj indirgenemez elde edilir. □

Teorem 3.1.9 Λ ve Λ^{op} birer artin halka ise, bu durumda her neredeyse projektif modül sonlu üretilmiştir.

İspat Λ, sol ayrışımı $\Lambda = P_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus P_t^{n_t}$ biçiminde olan, bir artin halka olsun. Bu durumda $P_1, \ldots, P_k$ ayrıştırılamaz kalıtsal projektif modüller, $Q_1 = P_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus P_k^{n_k}$ ve $Q_2 = P_{k+1}^{n_{k+1}} \oplus \cdots \oplus P_t^{n_t}$ olmak üzere

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathrm{End}_\Lambda(Q_2)^{op} & 0 \\ \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_1, Q_2) & \mathrm{End}_\Lambda(Q_1)^{op} \end{pmatrix}$$

formunda yazılır. $T = \mathrm{End}_\Lambda(Q_2)^{op}$, $R = \mathrm{End}_\Lambda(Q_1)^{op}$ ve $M = \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_1, Q_2)$ denirse

$$\Lambda^{op} = \begin{pmatrix} T^{op} & M \\ 0 & R^{op} \end{pmatrix}$$

biçimde olup R^{op} halkası; Λ^{op}'un

$$A = \begin{pmatrix} T^{op} & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

idealine göre bir faktörü olduğundan, iki yanlı artin ve kalıtsal bir halkadır. P ayrıştırılabilir kalıtsal projektif bir modül ve $\pi : P \longrightarrow X$ dönüşümü X'in projektif örtüsü olmak üzere X neredeyse projektif bir modül ve

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\alpha} P \xrightarrow{\pi} X \longrightarrow 0$$

X'in bir minimal projektif temsili olsun. Bu durumda X bir R-modüldür. L', L'nin bir ayrıştırılamaz dik toplananı olmak üzere

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[d] & & L'' \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & P \arrow[r, "\pi"] & X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & L'' \arrow[d] & & 0 & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

tam diyagramı oluşturulur. Burada Y neredeyse projektif R-modüldür. Üstteki birinci diziye $\mathrm{Hom}_R(-, R)$ kontravaryant funktoru uygulanırsa

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(Y, R) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, R) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(L', R) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R(Y, R) \longrightarrow 0$$

tam dizisi elde edilir. Y ayrıştırılamaz projektif modül olmadığından ve R kalıtsal olduğundan $\mathrm{Ext}_R(Y, R) = 0$ olur. Böylece $\mathrm{Hom}_R(P, R) \subseteq \mathrm{Hom}_R(L', R)R^{op}$ artin olduğundan P sonlu üretilmiş olup X sonlu üretilmiştir. □

Teorem 3.1.5'in sonucu olarak, neredeyse projektif modüller indirgenemez morfizmalar yardımıyla karakterize edildiğinden Martinez Villa (1980a) indirgenemez morfizmaların bazı karakterizasyonlarını aşağıdaki biçimde vermiştir.

Lemma 3.1.10 Λ yarımükemmel bir halka ve $\alpha : L \longrightarrow P$ split olmayan bir morfizma olsun. α'nın sonlu üretilmiş projektif modüllerin kategorisinde indirgenemez olması için gerek ve yeter koşul projektif modüllerin kategorisinde indirgenemez olmasıdır.

İspat ($\Leftarrow$) İspat açıktır.
($\Rightarrow$) Kabul edelim ki $\alpha : L \longrightarrow P$; sonlu üretilmiş projektif modüllerin kategorisinde, indirgenemez bir morfizma olsun. α'nın bir Q projektif modülü üzerinden

faktörlendiğini varsayalım. Bu durumda $\alpha = hg$ olacak şekilde $g : L \longrightarrow Q$ ve $h : Q \longrightarrow P$ morfizmaları vardır. Anderson ve Fuller (1974) gereğince P_i ayrıştırılamaz sonlu üretilmiş projektif modüller olmak üzere $Q = \bigoplus_{i\in I} P_i$ biçiminde yazılır. L sonlu üretilmiş olduğundan Img sonlu üretilmiş olup Im$g = \bigoplus_{j\in J} P_j$ olacak şekilde sonlu bir $J \subseteq I$ altkümesi vardır. $Q_1 = \bigoplus_{j\in J} P_j$ ve $Q_2 = \bigoplus_{i\in I\setminus J} P_i$ denirse $Q = Q_1 \oplus Q_2$ olur. Böylece $g_1 : L \longrightarrow Q$ olmak üzere $g = \left(\begin{smallmatrix} g_1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ biçiminde yazılır. Buradan $\alpha = hg = h\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) g_1$ elde edilir. h'nin split epimorfizma olmadığını kabul edelim. Buradan $h\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ bir split epimorfizma değildir. α indirgenemez olduğundan g_1 bir split monomorfizma olup g split monomorfizma bulunur. Sonuç olarak α projektif modüllerin kategorisinde indirgenemezdir. $\square$

Lemma 3.1.11 Λ yarımükemmel kalıtsal bir halka olmak üzere sonlu üretilmiş projektif modüllerin kategorisinde bir $\alpha : L \longrightarrow P$ morfizmasının indirgenemez olması için gerek ve yeter koşul α'nın projektif modüllerin kategorisinde indirgenemez olmasıdır.

İspat ($\Leftarrow$) İspat açıktır.
($\Rightarrow$) Sonlu üretilmiş projektif modüllerin kategorisinde $\alpha : L \longrightarrow P$ indirgenemez bir morfizma olsun. Kabul edelim ki projektif modüllerin kategorisinde, α bir X üzerinden faktörlensin. Yani

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "f"'] & & P \\ & X \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan ($\alpha = gf$ olacak şekilde) f ve g morfizmaları var olsun. Im$g = Q$ diyelim. Bu durumda $j : Q \longrightarrow P$ içerim morfizması olmak üzere

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "g'"'] & & P \\ & Q \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramı vardır. Bu iki diyagram bir arada gözönüne alınırsa

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rrrr, "\alpha"] \arrow[dr, "f"] \arrow[ddrr, bend right, "f"'] & & & & P \\ & X \arrow[dr, "1_X"] & & Q \arrow[ur, "j"] & \\ & & X \arrow[ur, "g'"] \arrow[uurr, bend right, "g"'] & & \end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramında $\alpha = gf = jg'f$ olur. Kabulden ya j birim morfizmadır ya da $g'f$ split monomorfizmadır. Birinci durumdan g'nin split epimorfizma, ikinci durumdan ise f'nin split monomorfizma olduğu elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Sonuç 3.1.12 Λ yarımükemmel kalıtsal bir halka olsun. Sonlu üretilmiş projektif modüller arasındaki split olmayan bir $\alpha : L \longrightarrow P$ morfizmasının indirgenemez olması için gerek ve yeter koşul α'nın sonlu üretilmiş projektif modüllerin kategorisinde indirgenemez olmasıdır.

Transpoz funktorunun özelliği ve Sonuç 3.1.12 gereğince aşağıdaki teorem ifade edilir.

Teorem 3.1.13 Λ ve Λ^{op} kalıtsal ve Λ yarımükemmel bir halka olsun. Sonlu üretilmiş Λ-modüller arasındaki bir $\alpha : L \longrightarrow P$ morfizmasının indirgenemez olması için gerek ve yeter koşul $\alpha^* : P^* \longrightarrow L^*$ transpozunun indirgenemez olmasıdır.

Teorem 3.1.5 ve Teorem 3.1.13'ün direkt bir sonucu aşağıda verilmiştir.

Sonuç 3.1.14 Bir sol kalıtsal, sol ve sağ artin halkası üzerinde burulmalı bir X modülünün neredeyse projektif olması için gerek ve yeter koşul $\mathrm{Tr}X$'in bir neredeyse projektif Λ^{op}-modül olmasıdır. Ayrıca X basit ve projektif olmayan bir Λ-modül ise, bu durumda $\mathrm{Tr}X$ neredeyse projektif Λ^{op}-modüldür.

Sonuç 3.1.15 Λ sol kalıtsal, sol ve sağ artin bir halka ise, bu durumda neredeyse projektif Λ-modüllerin sınıfı düzgün sınırlı uzunluğa sahiptir. Daha açık olarak; minimal projektif temsili $0 \longrightarrow L \longrightarrow P \longrightarrow X \longrightarrow 0$ olan bir neredeyse projektif X Λ-modülü; L'nin herhangi bir ayrıştırılamaz L' dik toplananı için $\mathrm{Tr}((L')^*/\mathrm{rad}(L')^*)$'ın bir faktörüdür.

Aşağıdaki örnekte, Λ'nın l-kalıtsal bir halka olması durumunda Teorem 3.1.13'teki ifadenin sağlanmadığı, yani; $\alpha : P \longrightarrow Q$ sonlu üretilmiş projektif modüller arasında bir indirgenemez morfizma iken α^* transpozunun indirgenemez olmadığı gösterilmiştir.

Örnek 3.1.16 K keyfi bir cisim olmak üzere

$$\Lambda = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K & K & 0 & 0 & 0 \\ K & 0 & K & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 & K & 0 \\ K & K & K & K & K \end{bmatrix}$$

cebirini gözönüne alalım.

$$P_1 = \begin{bmatrix} K \\ K \\ K \\ K \\ K \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ K \\ 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \\ 0 \\ K \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ K \\ K \end{bmatrix}, P_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix}$$

olmak üzere $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \\ K \\ K \end{bmatrix}$ modülü için $P_3 \hookrightarrow X,\ P_4 \hookrightarrow X,\ X \hookrightarrow P_1$ içerim morfizmaları var olup X'in minimal projektif temsili

$$0 \longrightarrow P_5 \xrightarrow{\alpha} P_3 \oplus P_4 \xrightarrow{\pi} X \longrightarrow 0$$

olsun. Burada $\alpha(a) = a - a$ ve $\pi(a, b) = a + b$ ile tanımlıdır. X'in maksimal altmodüllerine bakıldığında bir neredeyse projektif altmodülü olduğu görülebilir. Bundan dolayı α indirgenemez bir morfizmadır. Bu diziye transpoz funktoru uygulanırsa

$$0 \longrightarrow X^* \xrightarrow{\pi^*} P_3^* \oplus P_4^* \xrightarrow{\alpha^*} P_5^* \longrightarrow \mathrm{Tr}X \longrightarrow 0$$

tam dizisi elde edilir. Fakat sıfırdan farklı en az bir $X \hookrightarrow P_1$ içerim morfizması var olduğundan $X^* = \mathrm{Hom}_\Lambda(X, \Lambda) \neq 0$ olduğundan α^* indirgenemez değildir.

Uyarı 3.1.17 Λ bir sol ve sağ artin kalıtsal cebir olmak üzere neredeyse projektif modüllerin izomorfizma sınıfları

$$[X] \preceq [Y] \ \Leftrightarrow\ \mathrm{Hom}_\Lambda(Y, X) \neq 0$$

bağıntısına göre kısmi sıralıdır. Bu bağıntıya göre, neredeyse projektif modüllerin izomorfizma sınıflarının maksimal elemanları; S projektif olmayan bir basit modül olmak üzere $X \cong \mathrm{Tr}S$ biçimindeki modüller, minimal elemanları ise projektif olmayan basit modüllerdir.

Uyarı 3.1.18 Neredeyse projektif modüllerin bir $X = \bigoplus_{i=1}^{n} X_i$ sonlu toplamı verildiğinde, Anderson ve Fuller (1994) gereğince sonlu uzunluklu bir modülün endomorfizma halkası yarıasal (semiprimary) olduğundan, $\mathrm{End}_\Lambda(X)$ endomorfizma halkası yarıasal l-kalıtsal bir halkadır.

Aşağıdaki önermede, maksimal neredeyse projektif modüllerin başka bir karakterizasyonu verilmiştir.

Önerme 3.1.19 Λ bir sol ve sağ kalıtsal artin halka olsun. Projektif olmayan bir S basit Λ^{op}-modülü için bir neredeyse projektif X modülünün, $\mathrm{Tr}(S) \cong X$ formunda olması için gerek ve yeter koşul herhangi ayrıştırılamaz Q projektif modülü ve herhangi split olmayan

$$0 \longrightarrow Q \longrightarrow Y \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

dizisinde Y'nin projektif olmasıdır.

Λ sol ve sağ kalıtsal bir halka olmak üzere bir neredeyse projektif modülün başka neredeyse projektif modüllerle genişlemeleri aşağıdaki önermede incelenmiştir.

Önerme 3.1.20

(i) X ve Y neredeyse projektif modüller olmak üzere

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow E \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

bir split olmayan tam dizi ise, ya E ayrıştırılamazdır ya da Y, X'in bir faktörüdür.

(ii) X neredeyse projektif ve S basit projektif olmayan bir modül ise, herhangi split olmayan

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow E \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

dizisinde E ayrıştırılamazdır.

(iii) Projektif olmayan basit bir S' Λ^{op}-modülü için X, $\mathrm{Tr}(S')$'nün bir faktörü ise, $\mathrm{Ext}_\Lambda(\mathrm{Tr}(S'), X) = 0$ dır.

Önerme 3.1.21 Λ bir sol ve sağ kalıtsal artin halka olmak üzere X ve Y neredeyse projektif modüller olsun. K'nın uygun bir dik toplananı, P'nin bir dik toplananı olacak şekilde X ve Y'nin minimal projektif temsilleri sırasıyla:

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow P \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow Q \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

biçiminde ise, bu durumda $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(Y, X) \neq 0$ dır.

Önerme 3.1.22 Λ bir artin halka olmak üzere A ve C sonlu üretilmiş modüller olsun. A neredeyse injektif ve C neredeyse projektif olacak şekildeki bir split olmayan

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\pi} C \longrightarrow 0$$

dizisinde aşağıdaki durumlardan biri doğrudur:

(i) B projektif ayrıştırılabilirdir.

(ii) B injektif ayrıştırılabilirdir.

(iii) B ayrıştırılamazdır.

Lemma 3.1.23 Λ bir kalıtsal artin halka ve X bir neredeyse projektif Λ-modül olsun. Bu durumda bir sonlu üretilmiş neredeyse injektif Y Λ-modülünün $Y \cong \mathrm{DTr}(X)$ biçiminde olması için gerek ve yeter koşul Y'nin $\mathrm{Ext}(X, Y) \neq 0$ olacak şekildeki sonlu üretilmiş neredeyse injektif modüller arasında maksimal uzunluğa sahip olmasıdır.

Teorem 3.1.24 $0 \longrightarrow \mathrm{DTr}(X) \longrightarrow E \longrightarrow X \longrightarrow 0$ neredeyse split dizisinde E'nin projektif (injektif) olması için gerek ve yeter koşul $\mathrm{DTr}(X)$'in basit projektif (X'in basit injektif) ve E'nin X'in projektif örtüsü (E'nin $\mathrm{DTr}(X)$'in injektif zarfı) olmasıdır.

Önceki bölümde; bir kalıtsal artin cebir üzerindeki neredeyse projektif modüllerin, iki sonlu üretilmiş projektif modül arasındaki indirgenemez morfizmaların eş çekirdekleri olarak verildiği ve böylece sonlu üretilmiş projektif modüller arasındaki indirgenemez morfizmaların tam bir sınıflandırması Martinez Villa (1980a) tarafından yapıldı. Bundan başka, bazı koşullar altında indirgenemez morfizmaların kümesinin bir afin çeşitlilik *(affine variety)* oluşturduğu ve bu çeşitlilik üzerine etki eden bir cebirsel grubun var olduğu gösterilerek bu grubun yörüngelerini saymak suretiyle sonlu sayıda neredeyse projektif modüle sahip olan bir cebirin kuiverinin üzerindeki gerek koşullar belirlenerek bunların aynı zamanda yeterli olduğu Martinez Villa (1980a) tarafından kanıtlandı ve aşağıdaki gibi bir ifadeye dönüştürüldü:

Neredeyse projektif her bir X modülü için $\mathrm{Ext}_\Lambda(X,X) = 0$'dır veya denk olarak: Auslander ve Platzeck (1978) tarafından tanımlanan $q(X) = \dim_{\mathbf{k}}\mathrm{Hom}_\Lambda(X,X) - \dim_{\mathbf{k}}\mathrm{Ext}_\Lambda(X,X)$ kuadratik formu neredeyse projektif her bir X modülü için pozitif tanımlıdır.
Sonuç olarak ; Martinez-Villa (1980a) tarafından aşağıdaki teorem ispatlanmış ve Auslander vd. (1994) tarafından ifade edilen altıncı açık problem kalıtsal cebirler için çözülmüştür.

Teorem 3.1.25 Λ sonsuz bir K cismi üzerinde sonlu üretilmiş bir kalıtsal cebir olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) $\mathrm{Mod}\Lambda$ izomorfik olmayan sadece sonlu sayıda neredeyse projektif modüle sahiptir.

(ii) Her bir neredeyse projektif X modülü için

$$q(X) = \dim_{\mathbf{k}}\mathrm{End}_\Lambda(X) - \dim_{\mathbf{k}}\mathrm{Ext}_\Lambda(X,X) > 0 \text{ dır.}$$

(iii) Her bir neredeyse projektif X modülü için $\mathrm{Ext}_\Lambda(X,X) = 0$ dır.

(iv) $\mathrm{Hom}_\Lambda(L, rP/r^2P) \neq 0$, $\dim_{\mathrm{End}_\Lambda(L)}\mathrm{Hom}_\Lambda(L,P) = 1$ ya da $\dim_{\mathrm{End}_\Lambda(P)}\mathrm{Hom}_\Lambda$ $(L,P) = 1$ olacak şekildeki ayrıştırılamaz projektif modüllerin her bir L, P çifti için, her neredeyse projektif X modülünün aşağıdaki biçimde minimal projektif temsilleri vardır:

$1 \leq m_1 \leq 3$ ve $L, P_1, ..., P_k$ izomorfik olmayan projektif modüller olmak üzere $0 \longrightarrow L \longrightarrow P_1^{m_1} \oplus P_2 \cdots \oplus P_k \longrightarrow X \longrightarrow 0$ dizisi X'in minimal projektif temsilidir ya da

$1 \leq n_1 \leq 3$ ve $L_1, ..., L_s, P$ izomorfik olmayan projektif modüller olmak üzere $0 \longrightarrow L_1^{n_1} \oplus L_2 \cdots \oplus L_s \longrightarrow P \longrightarrow X \longrightarrow 0$ dizisi X'in minimal projektif temsilidir.

3.2. Artin Cebirler Üzerinde Neredeyse Projektif Modüller

Bu bölümde Martinez Villa (1980b) makalesi temel kaynak olarak kullanılacak olup, tüm modüller artin cebirler üzerindeki sonlu üretilmiş modüllerdir fakat hangi yanlı modül oldukları çalışmada belirtilmemiştir. Auslander ve Reiten (1977) sonlu temsil tipli bir artin cebirinin neredeyse split

$$0 \longrightarrow \mathrm{DTr}(A) \longrightarrow E \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

dizisinde E ayrıştırılamaz olacak şekilde en az bir ayrıştırılamaz A modülünün var olduğunu kanıtlamışlardır. Martinez Villa (1980b) bu ifadenin herhangi bir artin cebir için de sağlandığını ispatlamıştır.
Martinez Villa (1980a) tarafından tanımlanan ve kalıtsal halkalar üzerinde tam olarak karakterize edilen neredeyse projektif modüller, Martinez Villa (1980b) tarafından artin cebirlere aşağıdaki biçimde genelleştirilmiştir.

Tanım 3.2.1 X projektif olmayan bir modül olsun. Split olmayan bir kısa tam $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow X \longrightarrow 0$ dizisi ve X'in bir C öz altmodülü verildiğinde

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & W & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

geri çekmesi yardımıyla oluşturulan $0 \longrightarrow A \longrightarrow W \longrightarrow C \longrightarrow 0$ dizisi split ise, X'e *neredeyse projektif* (*almost projective*) modül denir.

Örnek 3.2.2 Neredeyse projektif modüllerin aşikar örnekleri projektif olmayan basit modüllerdir.

Neredeyse projektif modüller indirgenemez morfizmalar yardımıyla Teorem 3.1.5'e benzer olarak fakat farklı biçimde aşağıdaki gibi karakterize edilmiştir.

Teorem 3.2.3 Projektif dik toplananı bulunmayan bir X modülü için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) X bir neredeyse projektiftir modüldür.

(ii) P bir projektif modül ve α bir indirgenemez morfizma olmak üzere X'in bir

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\alpha} P \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

temsili vardır.

İspat $(i) \Rightarrow (ii)$ X bir neredeyse projektif modül olsun. Sonuç 2.5.3 gereğince P bir projektif modül olmak üzere bir $\beta : P \longrightarrow X$ epimorfizması vardır. Ker$\beta = L$ olsun. Bu durumda $0 \longrightarrow L \xrightarrow{\alpha} P \xrightarrow{\beta} X \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi vardır. Şimdi Lemma 2.9.5'in (i) şıkkını kullanarak α'nın indirgenemez olduğunu gösterelim. Bunun için bir $f : Y \longrightarrow X$ alalım.

`1. Durum:` f bir epimorfizma ise, P projektif olduğundan $\beta = fh$ olacak şekilde $h : P \longrightarrow Y$ var olup ispat biter.

`2. Durum:` f bir epimorfizma değil ise, Im$f = Z$; X'in bir öz altmodülü olur. X neredeyse projektif olduğundan $\beta : P \longrightarrow X$ ve $\iota : Z \longrightarrow X$ morfizmalarının geri çekmesi olan (W, γ, δ) yardımıyla

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{\delta} & W & \xrightarrow{\gamma} & Z & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle \iota} & & \\
0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{\alpha} & P & \xrightarrow{\beta} & X & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

diyagramı oluşturulur. Kabulden birinci dizi split olup $\gamma\gamma' = 1_Z$ olacak şekilde $\gamma' : Z \longrightarrow W$ vardır. Yukarıdaki diyagram değişmeli olduğundan $\iota\gamma = \beta g$ olup buradan $\iota = \beta g \gamma'$ elde edilir. Böylece

$$\beta h' = \beta(g\gamma' f) = (\beta g \gamma')f = \iota f = f$$

olacak şekilde $h' = g\gamma' f : Y \longrightarrow P$ var olup ispat biter.

$(ii) \Rightarrow (i)$ P projektif ve α indirgenemez olmak üzere X'in bir

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\alpha} P \xrightarrow{\beta} X \longrightarrow 0$$

temsili var olsun. X'in neredeyse projektif olduğunu gösterelim. Bunun için C, X'in bir öz altmodülü olmak üzere split olmayan

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisini gözönüne alalım. Şimdi $g : B \longrightarrow X$ ile $\iota : C \longrightarrow X$ morfizmalarının geri çekmesi alınarak

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f'"] \arrow[d, equal] & W \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\varphi"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\iota"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

değişmeli diyagramı ve $\beta : P \longrightarrow X$ ile $\iota : C \longrightarrow X$ morfizmalarının geri çekmesi alınarak

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, equal] & V \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "\theta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\iota"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "\alpha"] & P \arrow[r, "\beta"] & X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

değişmeli diyagramı oluşturulur. β epimorfizma olduğundan β, C'ye yükseltilemez (yani; $\beta = \iota h$ olacak şekilde $h : P \longrightarrow C$ yoktur). α indirgenemez olduğundan Lemma 2.9.5 gereğince $\iota = \beta h'$ olacak şekilde $h' : C \longrightarrow P$ vardır.(3.2) diyagramının evrensellik özelliği gereğince

$$\begin{tikzcd} C \arrow[dr, "\beta''"] \arrow[drr, bend left, "1_C"] \arrow[ddr, bend right, "h'"'] & & \\ & V \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "\theta"] & C \arrow[d, "\iota"] \\ & P \arrow[r, "\beta"] & X \end{tikzcd}$$

$\beta'\beta'' = 1_C$ olacak şekilde $\beta'' : C \longrightarrow V$ vardır. Böylece β' bir split epimorfizma olup (3.2) diyagramındaki birinci dizi split bulunur. Diğer yandan, P projektif olduğundan $g : B \longrightarrow X$ epimorfizması için $\beta = g\bar{\beta}$ olacak şekilde $\bar{\beta} : P \longrightarrow B$ var olup (3.2) diyagramının değişmeli olması kullanılarak $g(\bar{\beta}\theta) = (g\bar{\beta})\theta = \beta\theta = \iota\beta'$ elde edilir. Buradan (3.1) diyagramın evrensellik özelliği gereğince

$$\begin{tikzcd} V \arrow[dr, "s"] \arrow[drr, bend left, "\beta'"] \arrow[ddr, bend right, "\bar{\beta}\theta"'] & & \\ & W \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\varphi"] & C \arrow[d, "\iota"] \\ & B \arrow[r, "g"] & X \end{tikzcd}$$

$\beta' = g's$ olacak şekilde $s : V \longrightarrow W$ vardır. Sonuç olarak $1_C = \beta'\beta'' = (g's)\beta'' = g'(s\beta'')$ olacak şekilde $s\beta'' : C \longrightarrow W$ var olduğundan g' bir split epimorfizma olup (3.1) diyagramındaki birinci dizi split elde edilir. Sonuç olarak X neredeyse projektiftir. $\square$

Teorem 3.2.3'ün bir sonucu olan ve Uyarı 3.1.2(i)'de belirtildiği gibi Martinez Villa (1980b) tarafından da ifade edilen aşağıdaki sonuç, Park (1988) referans alınarak aşağıdaki biçimde kanıtlanmıştır.

Sonuç 3.2.4 Neredeyse projektif modüller ayrıştırılamazdır.

İspat X neredeyse projektif bir modül olsun. X'in ayrıştırılabilir olduğunu kabul edelim. Bu durumda $X_1 \neq 0$ ve $X_2 \neq 0$ olmak üzere $X = X_1 \oplus X_2$ biçiminde yazılır. Teorem 3.2.3 gereğince, P projektif ve α indirgenemez olacak şekilde X'in bir $0 \longrightarrow L \xrightarrow{\alpha} P \xrightarrow{\beta} X \longrightarrow 0$ temsili vardır. Doğal $\iota_i : X_i \longrightarrow X$ $(i = 1, 2)$ içerim dönüşümleri birer monomorfizma ve β örten olduğundan $\beta = \iota_i k_i$ olacak şekilde $k_i : P \longrightarrow X_i$ yoktur. Diğer yandan α indirgenemez olduğundan, Lemma 2.9.5 gereğince, $\iota_i = \beta h_i$ olacak şekilde $h_i : X_i \longrightarrow P$ $(i = 1, 2)$ vardır. ι_i'ler monomorfizma olduğundan h_i'lerin monomorfizma olduğu açıktır. Ayrıca doğal $\pi_i : X \longrightarrow X_i$ $(i = 1, 2)$ izdüşüm dönüşümleri gözönüne alındığında $\pi_i \beta h_i = \pi_i \iota_i = 1_{X_i}$ elde edilir. Buradan h_i'nin sol tersi var olup, h_i splittir. Böylece Lemma 2.3.3 gereğince $\mathrm{Im} h_i$ P'nin bir dik toplananı olur. $h_i : X_i \longrightarrow P$ morfizmaları için I.izomorfizma teoremi gereğince $\mathrm{Im} h_i \cong X_i$ olduğundan X_i'ler P'nin bir dik toplananı olur. P projektif olduğundan Önerme 2.5.6 gereğince X_i projektif ve buradan X projektif olur ki bu durum X'in neredeyse projektif olması ile çelişir. Sonuç olarak neredeyse projektif X modülü ayrıştırılamazdır. □

Park (1988) tarafından kanıtlanan aşağıdaki teoremde, değer kümesi neredeyse projektif bir modül olan bir indirgenemez morfizmanın eşçekirdeğinin de neredeyse projektif olduğu gösterilmiştir.

Teorem 3.2.5 Bir $0 \longrightarrow X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \longrightarrow 0$ kısa tam dizisinde Y neredeyse projektif ve α indirgenemez morfizma ise, Z neredeyse projektiftir.

İspat $0 \longrightarrow X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \longrightarrow 0$ kısa tam dizisinde Y neredeyse projektif ve α indirgenemez olsun. Bu durumda Teorem 3.2.3 gereğince, P projektif ve f indirgenemez olacak şekilde son terimi Y olan bir

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} Y \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisi vardır. Böylece $\beta g : P \longrightarrow Z$ epimorfizma olduğundan bir

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\beta g \xrightarrow{\iota} P \xrightarrow{\beta g} Z \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisi vardır.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & 0 \arrow[d] & & \\
& \mathrm{Ker}\beta g \arrow[dr, "\iota"] & L \arrow[d, "f"'] & T \arrow[dd, "\psi"] & \\
& & P \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "\beta g"] & & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\alpha"] & Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[dr] & 0 \\
& & 0 & & 0
\end{tikzcd}$$

diyagramında, α ve f'nin indirgenemez olduğu kullanılarak ι'nın indirgenemez olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. Önce α'nın indirgenemez olduğu kullanılırsa, Teorem 2.9.5'den, bir $\psi : T \longrightarrow Z$ morfizması için β örten olduğundan T'ye yükseltilemez fakat $\psi = \beta\theta$ olacak şekilde $\theta : T \longrightarrow Y$ morfizması vardır.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & 0 \arrow[d] & & \\
& \beta g \arrow[dr, "\iota"] & L \arrow[d, "f"'] & T \arrow[dd, "\psi"] \arrow[ddl, dotted, "\theta"'] & \\
& & P \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "\beta g"] & & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\alpha"] & Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[dr] & 0 \\
& & 0 & & 0
\end{tikzcd}$$

Şimdi f'nin indirgenemez olduğu kullanılarak $\theta : T \longrightarrow Y$ morfizması için, Teorem 2.9.5 gereğince, $\theta = gh$ olacak şekilde bir $h : T \longrightarrow P$ morfizması vardır ya da $g = \theta h'$ olacak şekilde bir $h' : P \longrightarrow T$ morfizması vardır. Sonuç olarak $\beta gh = \beta\theta = \psi$ olacak şekilde bir $h : T \longrightarrow P$ morfizması ya da $\psi h' = \beta\theta h' = \beta g$ olacak şekilde bir $h' : P \longrightarrow T$ morfizması

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & 0 \arrow[d] & & \\
& \beta g \arrow[dr, "\iota"] & L \arrow[d, "f"] & T \arrow[dl, dashed, shift left, "\theta"] \arrow[ddl, dotted, "h"'] \arrow[dd, "\psi"] & \\
& & P \arrow[ur, dashed, shift left, "h'"] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "\beta g"] & & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\alpha"] & Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[dr] & 0 \\
& & 0 & & 0
\end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapacak şekilde var olduğundan ι indirgenemez olup Z neredeyse projektiftir. $\square$

Martinez Villa (1980b), neredeyse projektif modülleri sınıflandırmak için ayrıştırılabilir modüller arasındaki indirgenemez morfizmalardan yararlanmıştır. Bu sebeple öncelikle indirgenemez morfizmaları, aşağıdaki biçimde tanımlanan iki morfizmanın denk olması kavramı ile karakterize etmiştir.

Tanım 3.2.6 $\alpha : A \longrightarrow B$ ve $\beta : A \longrightarrow B$ morfizmaları verilsin.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[d, "\psi"] \\
A \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\beta"] & B
\end{tikzcd}$$

$\beta = \psi\alpha\varphi$ olacak şekilde $\varphi : A \longrightarrow A$ ve $\psi : B \longrightarrow B$ otomorfizmaları varsa α ve β morfizmaları *denktir* (*equivalent*) denir.

Uyarı 3.2.7 α ve β denk morfizmalar olmak üzere α'nın indirgenemez olması için gerek ve yeter koşul β'nın indirgenemez olmasıdır. Gerçekten; $\alpha, \beta : A \longrightarrow B$ denk morfizmalar olsun. Bu durumda

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[d, "\psi"] \\
A \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\beta"] & B
\end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeleri yapan, yani $\psi\alpha = \beta\varphi$ olacak şekilde, φ, ψ otomorfizmaları vardır. α'nın bir C modülü üzerinden faktörlendiğini düşünelim. Bu durumda

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "g"'] & & B \\
& C \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli, yani $\alpha = hg$ olacak şekilde, g, h morfizmaları vardır. Buradan $\psi\alpha = \psi hg$ olup birinci diyagramın değişmeliliği kullanılarak $\beta\varphi = \psi hg$ bulunur. φ bir otomorfizma olduğundan $\beta = \psi hg\varphi^{-1}$ elde edilir. Böylece $\alpha = hg$ eşitliğinde (sırasıyla) g'nin split monomorfizma ya da h'nin split epimorfizma olması $\beta = (\psi h)(g\varphi^{-1})$ eşitliğinde (sırasıyla) $g\varphi^{-1}$'in split monomorfizma ya da ψh'nin split epimorfizma olmasına denk olduğu açıktır.

Aşağıdaki lemma, Uyarı 3.2.7 ve Lemma 2.9.5'in bir direkt sonucudur.

Lemma 3.2.8 Bir $\alpha : A \longrightarrow B$ morfizmasının tanım ve değer kümeleri $A \cong A' \oplus A''$ ve $B \cong B' \oplus A''$ biçiminde parçalandığında, $\alpha' : A' \longrightarrow B'$ ve $1_{A''} : A'' \longrightarrow A''$ olmak üzere, eğer α bir $\beta = \begin{bmatrix} \alpha' & 0 \\ 0 & 1_{A''} \end{bmatrix}$ morfizmasına denk ise, α'nın indirgenemez olması için gerek ve yeter koşul α''nün indirgenemez olmasıdır.

Aşağıdaki teorem, genel anlamda Bautista (1982) ve özel durumda Martinez Villa (1980a) tarafından kanıtlanmış olup, indirgenemez morfizmaların karakterizasyonlarını içerir.

Teorem 3.2.9 Bir $\alpha : A \longrightarrow B$ morfizması; $A \cong A' \oplus A''$ ve $B \cong B' \oplus A''$ iken $\alpha' : A' \longrightarrow B'$ ve $1_{A''} : A'' \longrightarrow A''$ olmak üzere bir $\beta = \begin{bmatrix} \alpha' & 0 \\ 0 & 1_{A''} \end{bmatrix}$ morfizmasına denk olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) α indirgenemezdir.

(ii) A_1 ayrıştırılamaz olmak üzere herhangi bir $j : A_1 \longrightarrow A$ split monomorfizması için αj indirgenemezdir.

(ii)' Herhangi bir $j : A_1 \longrightarrow A$ split monomorfizması için αj indirgenemezdir.

(iii) B_1 ayrıştırılamaz olmak üzere herhangi bir $p : B \longrightarrow B_1$ split epimorfizması için $p\alpha$ indirgenemezdir.

(iii)' Herhangi bir $p : B \longrightarrow B_1$ split epimorfizması için $p\alpha$ indirgenemezdir.

(iv) A_1 ve B_1 sırasıyla A ve B'nin ayrıştırılamaz dik toplananları olmak üzere $j : A_1 \longrightarrow A$ bir split monomorfizma ve $p : B \longrightarrow B_1$ bir split epimorfizma ise bu durumda $p\alpha j$ indirgenemezdir.

Teorem 3.2.9 ve Teorem 3.2.3'ün bir sonucu olarak neredeyse projektif modüllerin aşağıdaki biçimde bir karakterizasyonu Martinez Villa (1980b) tarafından verilmiştir. Bu teorem, aynı zamanda ayrıştırılabilir modüller arasındaki indirgenemez morfizmaların da tam bir karakterizasyonu içerir.

Sonuç 3.2.10 X'in projektif örtüsü P olmak üzere bir

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\alpha} P \xrightarrow{\beta} X \longrightarrow 0$$

temsili verilsin. X'in neredeyse projektif olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir $j : K_1 \longrightarrow K$ split monomorfizması ve herhangi bir $p : P \longrightarrow P_1$ split epimorfizması için $p\alpha j : K_1 \longrightarrow P_1$ bileşkesinin indirgenemez olmasıdır.

İndirgenemez morfizmaların karakterizasyonları farklı bir açıdan, Bautista (1982) tarafından aşağıdaki biçimde ele alınmıştır.

Tanım 3.2.11 A ve B sonlu üretilmiş ayrıştırılamaz modüller olmak üzere $\mathrm{r}(A, B)$ kümesi; A'dan B'ye giden ve split olmayan morfizmaların çarpımı biçiminde yazılan f morfizmalarının oluşturduğu $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)$'nin bir altkümesidir. Daha açık olarak,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & B \\ & C \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli (yani; $f = hg$) olacak şekilde split olmayan g ve h morfizmaları varsa, f morfizmaları $\mathrm{r}(A, B)$'yi oluşturur. Özel olarak $B = A$ iken $\mathrm{r}(A, A)$ yerine $\mathrm{rEnd}(A)$ yazılır.

Uyarı 3.2.12 A ve B ayrıştırılamaz iken $\mathrm{End}_\Lambda(A)$ ve $\mathrm{End}_\Lambda(B)$ birer yerel (local) halka olduğundan $\mathrm{r}(A, B)$; $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)$'nin $\mathrm{End}_\Lambda(A^{op})$-$\mathrm{End}_\Lambda(B^{op})$ altbimodülü olur. Ayrıca $\mathrm{End}_\Lambda(A)$ ve $\mathrm{End}_\Lambda(B)$'nin radikalleri sırasıyla $\mathrm{rEnd}(A)$ ve $\mathrm{rEnd}(B)$ olmak üzere

$$\mathrm{rEnd}_\Lambda(A)^{op} \circ \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B) \subseteq \mathrm{r}(A, B)$$

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)\circ \mathrm{rEnd}_\Lambda(B)^{op}\subseteq \mathrm{r}(A,B)$$

olduğundan $\frac{Hom_\Lambda(A,B)}{\mathrm{r}(A,B)}$ kümesinin bir $\frac{End_\Lambda(A)^{op}}{rEnd(A)^{op}}$-$\frac{End_\Lambda(B)^{op}}{rEnd(B)^{op}}$ bimodül yapısı vardır.

Uyarı 3.2.13 Uyarı 3.2.12'den açıkca görülebilir ki; bir $f\in \mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)$ morfizmasının indirgenemez olması için gerek ve yeter koşul $\bar{f}=f+\mathrm{r}(A,B)\in \frac{\mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)}{\mathrm{r}(A,B)}$ doğal görüntüsünün sıfırdan farklı olmasıdır. Dolayısıyla, bir $f\in \mathrm{End}_\Lambda(A)$ morfizmasının indirgenemez olması için gerek ve yeter koşul $\frac{\mathrm{End}_\Lambda(A)}{\mathrm{rEnd}(A)}$'da $\bar{f}$'nin sıfırdan farklı olmasıdır.

Uyarı 3.2.14 $1\le i\le n$ (sırasıyla $1\le j\le m$) için $d_i\in \mathrm{End}_\Lambda(B)$ (sırasıyla, $e_j\in \mathrm{End}_\Lambda(A)$) olmak üzere bir

$$p=\begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \cdots & d_n\end{bmatrix}: B^{(n)}\longrightarrow B \quad (\text{sırasıyla, } q=\begin{bmatrix} e_1\\ e_2\\ \vdots\\ e_n\end{bmatrix}: A\longrightarrow A^{(m)})$$

dönüşümünün bir split epimorfizma (sırasıyla, bir split monomorfizma) olması için gerek ve yeter koşul $\bar{d_i}$ doğal görüntülerinin (sırasıyla, $\bar{e_j}$ doğal görüntülerinin) sıfırdan farklı olmasıdır.

Bu uyarılar gözönüne alınarak aşağıdaki ifadeler elde edilir.

Uyarı 3.2.15

(a) A ve B ayrıştırılamaz modüller olsun. Bu durumda
(i) Bir $\alpha=[\alpha_{ij}]: A^{(m)}\longrightarrow B^{(n)}$ morfizmasının indirgenemez olması için gerek ve yeter koşul her $0\le i\le n$ ve $0\le j\le m$ için α_{ij}'lerin $\frac{\mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)}{\mathrm{r}(A,B)}$'deki $\overline{\alpha_{ij}}$ doğal görüntülerinin aşağıdaki özelliğe sahip olmasıdır: $\bar{d_i}\in \frac{\mathrm{End}_\Lambda(B)^{op}}{\mathrm{rEnd}(B)^{op}}$ ve $\bar{e_j}\in \frac{\mathrm{End}_\Lambda(A)^{op}}{\mathrm{rEnd}(A)^{op}}$ olmak üzere

$$\bar{p}\bar{\alpha}\bar{q}=\begin{bmatrix} \bar{d_1} & \bar{d_2} & \cdots & \bar{d_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{\alpha}_{11} & \bar{\alpha}_{12} & \cdots & \bar{\alpha}_{1m}\\ \bar{\alpha}_{21} & \bar{\alpha}_{22} & \cdots & \bar{\alpha}_{2m}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \bar{\alpha}_{n1} & \bar{\alpha}_{n2} & \cdots & \bar{\alpha}_{nm}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{e_1}\\ \bar{e_2}\\ \vdots\\ \bar{e_m}\end{bmatrix}=\bar{0}$$

iken

$$\bar{p} = \begin{bmatrix} \bar{d_1} & \bar{d_2} & \cdots & \bar{d_n} \end{bmatrix} = 0 \text{ veya } \bar{q} = \begin{bmatrix} \bar{e_1} \\ \bar{e_2} \\ \vdots \\ \bar{e_m} \end{bmatrix} = 0 \text{ dır.}$$

(ii) Bir $\alpha = \begin{bmatrix} \bar{\alpha_1} \\ \bar{\alpha_2} \\ \vdots \\ \bar{\alpha_n} \end{bmatrix} : A \longrightarrow B^{(n)}$ morfizmasının indirgenemez olması için gerek ve yeter koşul her $0 \leq i \leq n$ için $\bar{\alpha_i}$ elemanlarının $\mathrm{End}_\Lambda(B)^{op}/\mathrm{rEnd}(B)^{op}$'ta lineer bağımsız olmasıdır.

(iii) Bir $\alpha = \begin{bmatrix} \bar{\alpha_1} & \bar{\alpha_2} & \cdots & \bar{\alpha_m} \end{bmatrix} : A^{(m)} \longrightarrow B$ morfizmasının indirgenemez olması için gerek ve yeter koşul her $0 \leq i \leq m$ için $\bar{\alpha_i}$ elemanlarının $\mathrm{End}_\Lambda(A)^{op}/\mathrm{rEnd}(A)^{op}$'ta lineer bağımsız olmasıdır.

(b) A, B ve C izomorfik olmayan ayrıştırılamaz modüller olsun. Bu durumda

$$\alpha = \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \end{bmatrix} : A^{(n)} \longrightarrow B^{(m)} \oplus C^{(s)} \text{ ve } \alpha' = \begin{bmatrix} \beta' & \gamma' \end{bmatrix} : A^{(n)} \oplus C^{(s)} \longrightarrow B^{(m)}$$

morfizmaları için α (α')'nın indirgenemez olması için gerek ve yeter koşul β ve γ (β' ve γ')'nın indirgenemez olmasıdır.

Martinez Villa (1980b), her neredeyse projektif modülü basit olan artin cebirlerini Uyarı 3.2.15'teki karakterizasyonları kullanarak, aşağıdaki biçimde karakterize etmiştir.

Önerme 3.2.16 Bir Λ artin cebiri için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) Neredeyse projektif modüller sadece projektif olmayan basit modüllerdir.

(ii) (a) Her ayrıştırılamaz projektif P modülünün $\mathrm{Rad}P$ radikali ayrıştırılamazdır.

(b) P ve Q; $\mathrm{Rad}P \cong \mathrm{Rad}Q$ olacak şekilde ayrıştırılamaz projektif modüller ise $P \cong Q$ olur.

(c) $\dfrac{\mathrm{End}_\Lambda(P)}{\mathrm{RadEnd}_\Lambda(P)}$ ve $\dfrac{\mathrm{End}_\Lambda(\mathrm{Rad}P)}{\mathrm{RadEnd}_\Lambda(\mathrm{Rad}P)}$ bölümlü halkaları izomorftur.

Martinez Villa (1980b), kendine injektif (self injective) cebirlerin basit olmayan projektif modüllerinin olmadığını söyleyerek, yukarıdaki önermeyi doğrulayan en az bir cebirin var olduğuna dair örnek vermiştir.

Neredeyse projektif modüllerin başka bir karakterizasyonu, Tanım 2.6.24'de tanıtılan projektif olarak kararlı kategoriler yardımıyla, Martinez Villa (1980b) tarafından aşağıdaki biçimde verilmiştir.

Önerme 3.2.17 Projektif toplananı olmayan bir X modülü için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) X neredeyse projektiftir.

(ii) modΛ'da herhangi bir $f : X \longrightarrow Y$ epimorfizması $\underline{\text{mod}}\Lambda$'da bir monomorfizmadır.

(iii) S basit bir modül olmak üzere herhangi bir sıfırdan farklı $f : X \longrightarrow S$ morfizması yardımıyla $\underline{\text{mod}}\Lambda$'da bir monomorfizma tanımlanır.

İspat (i)$\Rightarrow$ (ii) X neredeyse projektif olsun. Teorem 3.2.3 gereğince, P projektif ve α indirgenemez olacak şekilde X'in bir $0 \longrightarrow L \xrightarrow{\alpha} P \xrightarrow{\beta} X \longrightarrow 0$ temsili vardır. modΛ'da herhangi bir $f : X \longrightarrow Y$ epimorfizmasını alalım. $\underline{f}$'nin $\underline{\text{mod}}\Lambda$'da bir monomorfizma olduğunu göstermek için Tanım 2.6.4'ü kullanarak, $\underline{\text{mod}}\Lambda$'da $\underline{fg} = \underline{0}$ olacak şekilde bir $g : Z \longrightarrow X$ morfizmasını alalım.
g'nin epik olması durumunda; fg bir epimorfizma olup $\underline{fg} = \underline{0}$ olması fg'nin Y'nin bir Q projektif örtüsü üzerinden faktörlenmesini gerektirir. Yani Y'nin projektif örtüsü; bir $q : Q \longrightarrow Y$ epimorfizmasıyla birlikte bir Q projektif modülü olmak üzere, $fg = qh$ olacak şekilde bir $h : Z \longrightarrow Q$ morfizması vardır. qh bir epimorfizma ve q küçük epimorfizma olduğundan h bir epimorfizma olup Z bir projektif dik toplanana sahip olur. Bu ise Z'nin $\underline{\text{mod}}\Lambda$'da olması ile çelişir.
g'nin epik olmaması durumunda; $\beta : P \longrightarrow X$ morfizması Z üzerinden faktörlenemez. Lemma 2.9.5 gereğince α indirgenemez olduğundan g, β üzerinden faktörlenir ve bundan dolayı g bir projektif modül üzerinden faktörlendiği için $\underline{g} = \underline{0}$ elde edilir. Böylece $\underline{f}$ bir monomorfizmadır.

(ii)$\Rightarrow$ (iii) modΛ'da herhangi bir epimorfizma $\underline{\text{mod}}\Lambda$'da bir monomorfizma olsun. S bir basit modül olmak üzere sıfırdan farklı bir $f : X \longrightarrow S$ morfizması için Im$f = S$ olup f bir epimorfizmadır. Kabulden istenen elde edilir.
(iii)$\Rightarrow$ (i) (iii) ifadesi sağlansın. Teorem 3.2.3'ü kullanarak X'in neredeyse projektif olduğunu gösterelim. Bunun için P, X'in projektif örtüsü olmak üzere X'in bir $0 \longrightarrow L \xrightarrow{\alpha} P \xrightarrow{\beta} X \longrightarrow 0$ temsilini gözönüne alalım. α'nın indirgenemez olduğunu göstermek yeterlidir. modΛ' da hiç projektif toplananı olmayan bir Z_1 modülü ve projektif olan bir Q modülü için $Z = Z_1 \bigoplus Q$ olmak üzere bir $g : Z \longrightarrow X$ morfizmasını alalım. Uyarı 2.6.3 gereğince $g_1 : Z_1 \longrightarrow X$ ve $g_2 : Q \longrightarrow X$ olmak üzere $g = (g_1, g_2)$ biçiminde yazılır. Aşağıdaki durumları ayrı ayrı inceleyelim:
g_1 bir epimorfizma ise g de epimorfizmadır ve P projektif olduğundan β, Z üzerinden faktörlenir ve Lemma 2.9.5'den α indirgenemez olup ispat tamamlanır.
g_1 bir epimorfizma değil ise, Img_1 X'in bir öz altmodülü olur. Img_1'i kapsayan X'in maksimal altmodülüne M diyelim. Bu durumda X/M bir basit modüldür ve $qg_1 = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı $q : X \longrightarrow X/M$ doğal epimorfizması vardır. Kabulden q yardımıyla $\underline{\text{mod}}\Lambda$'de bir $\underline{q}$ monomorfizması bulunur. Buradan $\underline{qg_1} = 0$ olup $\underline{g_1} = 0$ elde edilir. Böylece g_1, P üzerinden faktörlenir. Diğer yandan Q projektif olduğundan g_2 de P üzerinden faktörlenir. Böylece g, P üzerinden faktörlenir ve α'nın indirgenemez olduğu kanıtlanmış olur. $\square$

Sonuç 3.2.18 Neredeyse projektif modüller sınırlı uzunluktadır. Özellikle herhangi bir neredeyse projektif modül, uygun bir basit S Λ^{op}-modülün Tr(S) tranpozunun bir faktörüdür.

İspat X bir basit modülün transpozu olmayan bir neredeyse projektif modül ve S bir basit Λ^{op}-modül olmak üzere $f : \text{Tr}(X) \longrightarrow S$ sıfırdan farklı bir morfizma olsun. f'ye transpoz funktoru uygulanırsa Tr$f : \text{Tr}(S) \longrightarrow X$ morfizması elde edilir. Coker(Trf) $= Y$ olmak üzere modΛ'da $\pi : X \longrightarrow Y$ kanonik epimorfizması vardır. Y için aşağıdaki durumları inceleyelim:
$Y \neq 0$ ise, Önerme 3.2.17 gereğince $\underline{\text{mod}}\Lambda$'da $\underline{\pi}$ bir monomorfizma olup $\underline{\pi \text{Tr} f} = 0$ olduğundan $\underline{\text{Tr}f} = \underline{0}$ ve buradan Trf bir projektif modül üzerinden faktörlenmiş olur. Transpoz funktoru bir dualite olduğundan $f : \text{Tr}(X) \longrightarrow S$ morfizması

da S'nin projektif örtüsü üzerinden faktörlenir. Fakat $\mathrm{Tr}(X)$'in hiç projektif dik toplananı olmadığından bu bir çelişki yaratır.
O halde $Y = 0$ olmalıdır. Böylece $\mathrm{Tr}f$ bir epimorfizma olup $\mathrm{Tr}(S)/\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}f) \cong \mathrm{Im}(\mathrm{Tr}f) = X$ olduğundan X bir basit modülün transpozunun bir faktörü olarak yazılmış olur. $\square$

Önerme 3.2.17 ve Uyarı 2.6.25'in sonucu olarak aşağıdaki karakterizasyonlar verilebilir.

Sonuç 3.2.19 Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) X neredeyse projektiftir.

(ii) S basit modül olmak üzere sıfırdan farklı her $f : X \longrightarrow S$ morfizması $\underline{\mathrm{mod}}\Lambda$'da bir monomorfizmadır.

(iii) S basit modül olmak üzere $\underline{\mathrm{mod}}\Lambda^{op}$'daki sıfırdan farklı her $\mathrm{Tr}(S) \longrightarrow \mathrm{Tr}(X)$ morfizması $\underline{\mathrm{mod}}\Lambda^{op}$'da bir epimorfizmadır.

(iv) S basit modül olmak üzere $\overline{\mathrm{mod}}\Lambda$'daki sıfırdan farklı her $\mathrm{DTr}(X) \longrightarrow \mathrm{DTr}(S)$ morfizması $\overline{\mathrm{mod}}\Lambda$'da bir monomorfizmadır.

Aşağıdaki lemma, neredeyse projektif modüllerin diğer karakterizasyonları için gereklidir.

Lemma 3.2.20

(i) $\underline{\mathrm{mod}}\Lambda$'daki X ve Y modülleri için $\underline{\mathrm{mod}}\Lambda$'daki herhangi bir $f : X \longrightarrow Y$ epimorfizması bir Λ-epimorfizmadır.

(ii) $\overline{\mathrm{mod}}\Lambda$'daki X ve Y modülleri için $\overline{\mathrm{mod}}\Lambda$'daki herhangi bir $f : X \longrightarrow Y$ monomorfizması bir Λ-monomorfizmadır.

İspat (i) $\underline{\mathrm{mod}}\Lambda$'da $\underline{f} : X \longrightarrow Y$ sıfırdan farklı bir epimorfizma olsun. $\mathrm{mod}\Lambda$'da $\mathrm{Coker}f = Z$ olmak üzere $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\pi} Z \longrightarrow 0$ dizisinin tam olduğu ve $\pi f = 0$ olduğu açıktır. Buradan $\underline{\mathrm{mod}}\Lambda$'da $\underline{\pi}\underline{f} = \underline{0}$ olup $\underline{f}$ epimorfizma olduğundan $\underline{\pi} = \underline{0}$ elde edilir. Böylece π Z'nin projektif örtüsü üzerinden faktörlenir. $Z \neq 0$

olması durumunda Y bir projektif dik toplanana sahip olur ki bu durum Y'nin $\underline{\mathrm{mod}}\Lambda$'da olması ile çelişir. O halde $Z = 0$ yani $Y = \mathrm{Im}f$ olmalıdır ki bu durumda f bir Λ-epimorfizma bulunur. Benzer olarak (ii) ispatlanır. $\square$

Aşağıdaki sonuç, Teorem 2.9.7'nin bir direkt sonucudur

Sonuç 3.2.21 Bir neredeyse projektif X modülü için neredeyse split bir

$$0 \longrightarrow \mathrm{DTr}(X) \longrightarrow E \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

dizisi vardır.

Aşağıdaki önerme, son terimi basit olmayan neredeyse projektif olan, bir neredeyse split dizinin ortadaki teriminin parçalanması durumunda ilk morfizmanın iki parçasından birinin monik olduğunu ifade eder.

Önerme 3.2.22 X, basit olmayan bir neredeyse projektif modül olmak üzere $0 \longrightarrow \mathrm{DTr}(X) \xrightarrow{f} E \longrightarrow X \longrightarrow 0$ neredeyse split bir dizi olsun. $E_1 \neq 0 \neq E_2$ olmak üzere $E = E_1 \oplus E_2$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $f = (f_1, f_2)$ biçiminde olup f_1 ya da f_2 bir monomorfizmadır.

İspat X basit olmayan bir neredeyse projektif modül olsun. Bu durumda S bir basit modül olmak üzere bir $g : X \longrightarrow S$ epimorfizması vardır. Uyarı 3.2.17 ve Lemma 3.2.20 gereğince $\mathrm{DTr}(g) = h : \mathrm{DTr}(X) \longrightarrow \mathrm{DTr}(S)$ bir monomorfizma olur. Kabul edelim ki $0 \neq E_1, E_2$ olmak üzere $E = E_1 \oplus E_2$ biçiminde olsun. Neredeyse split dizilerin özelliğinden (f sol neredeyse split morfizma olduğundan) $tf = h$ olacak şekilde bir $t : E \longrightarrow \mathrm{DTr}(S)$ morfizması vardır. Uyarı 2.6.3 gereğince $f = (f_1, f_2)$ ve $t = (t_1, t_2)$ olmak üzere $h = t_1 f_1 + t_2 f_2$ biçiminde yazılır. Sonuç 3.2.19(iv) gereğince $\overline{\mathrm{mod}}\Lambda$'da $\overline{h} \neq \overline{0}$ olması $\overline{t_1 f_1} \neq \overline{0}$ ya da $\overline{t_2 f_2} \neq \overline{0}$ olmasını gerektirir. $\overline{t_1 f_1} \neq \overline{0}$ olması durumunda Önerme 3.2.19 ve Lemma 3.2.20 gereğince $t_1 f_1$ bir Λ-monomorfizma olup buradan f_1 bir monomorfizma elde edilir. Benzer olarak f_2'nin de monomorfizma olduğu gösterilir. $\square$

Aşağıdaki önerme, son terimi neredeyse projektif olan, bir neredeyse split dizinin ya ortadaki teriminin projektif olduğunu ya da ortadaki terimi parçalandığında son epimorfizmanın iki parçasının da epik olduğunu ifade eder.

Önerme 3.2.23 X neredeyse projektif modül olmak üzere

$$0 \longrightarrow \mathrm{DTr}(X) \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0$$

neredeyse split dizisi için aşağıdaki durumlardan biri geçerlidir.

(i) E projektiftir.

(ii) $E_1 \neq 0 \neq E_2$, $E = E_1 \oplus E_2$ ve $g = (g_1, g_2)$ olmak üzere g_1 ve g_2 epimorfizmalardır.

Martinez Villa (1980b), Önerme 3.2.22 ve Önerme 3.2.23'ün sonucu olarak bir artin cebir üzerinde bir neredeyse projektif modül ile biten neredeyse split dizilerin ortadaki terimi ile ilgili aşağıdaki sonuçları elde etmiştir.

Teorem 3.2.24 X neredeyse projektif modül olmak üzere Λ bir artin cebir olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadelerden biri doğrudur.

(i) $0 \longrightarrow \mathrm{DTr}(X) \longrightarrow E \longrightarrow X \longrightarrow 0$ neredeyse split dizisinde E ayrıştırılamaz modüldür.

(ii) $0 \longrightarrow \mathrm{DTr}(X) \longrightarrow E \longrightarrow X \longrightarrow 0$ neredeyse split dizisinde E projektif ve $\mathrm{DTr}(X)$ basit modüldür.

(iii) X basit modüldür.

Yukarıdaki teoremin (ii) şıkkında verilen neredeyse split dizide, E'nin projektif olması durumunda $\mathrm{DTr}(X)$'in basit olduğu sonucu Auslander ve Reiten (1975) tarafından gösterilmiştir. (i) şıkkındaki ifade de ise, herhangi bir yarıbasit olmayan artin cebirinde, neredeyse split bir dizinin orta terimi ayrıştırılamaz olacak şekilde en az bir ayrıştırılamaz modül olduğu Martinez Villa (1980b) tarafından şu şekilde kanıtlanmıştır: problemi önce kendine injektif (self injective) cebirlere kısıtlayan Martinez Villa, alt uzunluk (loewy length) üzerinde tümevarım kullanarak aşağıdaki sonucu ifade ve ispat etmiştir.

Önerme 3.2.25 Projektif olmayan ayrıştırılamaz her bir X modülü ve her bir $0 \longrightarrow \mathrm{DTr}(X) \longrightarrow E \longrightarrow X \longrightarrow 0$ neredeyse split dizisinde, E ayrıştırılabilir olacak şekildeki Λ cebirinin artin olması durumunda, Λ kendine injektiftir.

Yukarıdaki önermenin bir sonucu olarak, Martinez Villa (1980b) herhangi bir yarıbasit olmayan Λ cebirinin, X ile biten bir neredeyse split dizisinin orta teriminin ayrıştırılamaz olduğunu gösteren aşağıdaki teoremi kanıtlamıştır.

Teorem 3.2.26 Yarı basit olmayan herhangi bir Λ artin cebiri üzerinde, orta terimi olan E ayrıştırılamaz olacak şekilde bir $0 \longrightarrow \mathrm{DTr}(X) \longrightarrow E \longrightarrow X \longrightarrow 0$ neredeyse split dizinin son terimi olan en az bir ayrıştırılamaz X modülü vardır.

Aşağıdaki Park (1988) tarafından kanıtlanan teorem, bir neredeyse split dizinin orta terimi ayrıştırılabilirse, son terimi olan neredeyse projektif modülün uzunluğunun 3 olduğunu ifade eder.

Teorem 3.2.27 X bir injektif neredeyse projektif basit olmayan modül ve

$$0 \longrightarrow \mathrm{DTr}(X) \longrightarrow E \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

bir neredeyse split dizi olsun. E_1 ve E_2 ayrıştırılamaz modülleri için $E = E_1 \oplus E_2$ ise, $\ell(X) = 3$ tür.

Bir artin R halkasının *tamamen kalıtsal* (*completely hereditary*) olması için gerek ve yeter koşul her basit R-modülün ya injektif ya da projektif olmasıdır. Anderson ve Fuller (1974) tarafından ifade edilen bu sonuca dayanarak, Park (1988) aşağıdaki teoremi kanıtlamıştır.

Teorem 3.2.28 Λ artin ve tamamen kalıtsal bir cebir ise, her basit injektif modül bir neredeyse projektif modüldür.

3.3. Hereditary Olmayan Cebirler Üzerinde Neredeyse Projektif Modüller

Artin cebirler üzerinde izomorfizma farkıyla sonlu sayıda neredeyse projektif modülün var olup olmadığı sorusu Auslander vd. (1997) tarafından açık problem olarak verilmiştir. Bu problem kalıtsal cebirler üzerinde Martinez Villa (1980a,1980b) tarafından çözülmüş ve elde edilen sonuçlar Bölüm 3.1 ve 3.2'de ayrıntılı olarak incelenmiştir. Bu bölümde sonsuz sayıda ya da çok az sayıda neredeyse projektif modüle sahip kalıtsal olmayan cebirlerin yapısı incelenecek ve Kaynarca vd.(2023) tarafından elde edilen sonuçlar verilecektir.

Bu bölümdeki her A cebiri bir artin cebir ve tüm modüller sol A-modül olarak gözönüne alınacaktır. Auslander vd. (1997)'ne göre neredeyse projektif modül kavramı aşağıdaki biçimde genişletilmiştir.

Tanım 3.3.1 M projektif olmayan bir Λ-modül olsun. $g : P \longrightarrow M$ morfizması M'nin projektif örtüsü olmak üzere M'nin her X öz altmodülü için

$$\widetilde{g} = g|_{g^{-1}(X)} : g^{-1}(X) \longrightarrow X$$

kısıtlanmış epimorfizması split oluyorsa, M'ye *neredeyse projektif* (*almost projective*) modül adı verilir.

Auslander vd. (1997) tarafından kanıtlanan aşağıdaki önermede, neredeyse projektif modüllerin bir özelliği verilmiştir.

Uyarı 3.3.2 Bir modülün projektif örtüsü her zaman var olmayabilir. Yukarıdaki tanım, M'nin projektif örtüsünün var olduğu kabul edilerek verilmiştir.

Uyarı 3.3.3 Önceki bölümlerde görüldüğü üzere neredeyse projektif modül kavramı üç farklı şekilde tanımlanmıştır. M projektif olmayan bir modül olmak üzere

(1) Martinez Villa (1980a)'ya göre: M'nin her öz altmodülü projektif ise, M *neredeyse projektif* olarak adlandırılır.

(2) Martinez Villa (1980b)'ya göre: Split olmayan bir kısa tam

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

dizisi ve M'in bir X öz altmodülü verildiğinde

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & W & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

W geri çekmesi yardımıyla oluşturulan $0 \longrightarrow N \longrightarrow W \longrightarrow X \longrightarrow 0$ dizisi split ise, M *neredeyse projektif* olarak adlandırılır.

(3) Auslander vd. (1994)'ne göre: $g : P \longrightarrow M$ morfizması M'nin projektif örtüsü olmak üzere M'nin her X öz altmodülü için

$$\widetilde{g} = g|_{g^{-1}(X)} : g^{-1}(X) \longrightarrow X$$

kısıtlanmış epimorfizması split oluyorsa, M *neredeyse projektif* olarak adlandırılır.

Bu tanımlar arasında bir ilişki olup olmadığını, bu konuyu doktora tezinde ilk çalışan kişi olan Roberto Martinez Villa ile iletişime geçerek sorduk. Martinez Villa, herhangi bir cebir üzerinde neredeyse projektif modül kavramının (1)'deki tanımını kullanmanın mantıklı olduğunu ifade etti. (2) ve (3)'deki diğer tanımların kalıtsal olmayan cebirler için yapılan genellemeler olduğunu belirtti.
Şimdi bu tanımlar arasındaki ilişkiyi aşağıdaki biçimde açıklayalım:
(1)⇒ (3) Herhangi bir ${}_RM$ projektif olmayan bir modül olmak üzere M'nin her öz altmodülünün projektif olduğunu kabul edelim. X, M'nin bir öz altmodülü ve $g : P \longrightarrow M$ morfizması M'nin projektif örtüsü olsun. Bu durumda g'nin $g^{-1}(X)$'e kısıtlanmışı olan epimorfizmayı $\widetilde{g}$ ile gösterelim. Kabulden X projektif olduğundan

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, dashed, "g'"'] \arrow[d, "1_X"] & \\ g^{-1}(X) \arrow[r, "\widetilde{g}"] & X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli (yani, $1_X = \widetilde{g}g'$) olacak şekilde bir $g' : X \longrightarrow g^{-1}(X)$ morfizması var olduğundan $\widetilde{g}$ split elde edilir ve ispat tamamlanır.
(3)⇒(1) R halkasının sol kalıtsal olması durumunda bu gerektirme doğrudur. Gerçekten; $g : P \longrightarrow M$ morfizması M'nin projektif örtüsü ve X, M'nin bir öz altmodülü

olsun. Kabulden $\widetilde{g} : g^{-1}(X) \longrightarrow X$ kısıtlanmış epimorfizması split olur. Bu durumda Lemma 2.3.3 gereğince $g^{-1}(X) = \mathrm{Ker}\widetilde{g} \oplus L$ olacak şekilde bir $L \leq g^{-1}(X)$ altmodülü vardır. R halkası kalıtsal olduğundan $g^{-1}(X)$ (ve böylece L) projektif olur. Diğer yandan $X \cong g^{-1}(X)/\mathrm{Ker}\widetilde{g} \cong L$ olduğundan X projektif elde edilir ve ispat tamamlanır.

Auslander vd. (1997)'ne göre, Λ artin cebiri yarıbasit değil iken projektif olmayan basit Λ-modüller (yani neredeyse projektif modüller) vardır. Bundan dolayı, $\mathrm{rad}\Lambda \neq 0$ ve $\mathrm{rad}\Lambda^2 = 0$ ise, ortadaki terimi projektif olan neredeyse split diziler vardır. P orta terimi projektif olan bir $0 \longrightarrow S \longrightarrow P \longrightarrow \mathrm{TrD}(S) \longrightarrow 0$ neredeyse split dizisinden $\mathrm{TrD}(S)$ modülüyle ilgili üreteçler ve bağıntılar hakkındaki bilgilere ek olarak minimal projektif temsille verilen bazı ek bilgiler de elde edilebilir.
Aşağıda sağ minimal neredeyse split morfizmanın tanımı verilmiştir.

Tanım 3.3.4 $g : M \to N$ bir morfizma olsun.

(i) $gk = g$ olacak şekildeki her $k \in \mathrm{End}M$ bir otomorfizma oluyorsa, g'ye *sağ minimal*,

(ii) N ayrıştırılamaz olmak üzere $g : M \to N$ bir radikal morfizma olsun. Her $v : V \to N$ radikal morfizması için $gv' = v$ olacak şekilde $v' : V \to M$ varsa, g'ye *sağ neredeyse split* (*right almost split*)

morfizma adı verilir. Bir sağ neredeyse split morfizma aynı zamanda sağ minimal ise, *sağ minimal neredeyse split* (*right minimal almost split*) olarak adlandırılır.

Önerme 3.3.5 Sağ minimal neredeyse split (dolayısıyla indirgenemez) olan $g : P \longrightarrow M$ morfizması M'nin bir projektif örtüsü olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(i) $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M, N) \neq 0$ özelliğine sahip her ayrıştırılamaz N modülü basit olup $\mathrm{DTr}(M)$'ye izomorftur.

(ii) M neredeyse projektiftir.

İspat (i) N ayrıştırılamaz ve $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M,N) \neq 0$ olsun. Bu durumda Uyarı 2.6.12 gereğince split olmayan

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow E \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$$

dizisi vardır. Diğer yandan Auslander vd. (1997) gereğince split olmayan

$$0 \longrightarrow \mathrm{DTr}(M) \longrightarrow P \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

dizisi vardır. Bu iki dizi birarada düşünülerek tam satırlara sahip aşağıdaki

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{DTr}(M) \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & P \arrow[r, "g"] \arrow[d, "t"'] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & E \arrow[r, "f"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

değişmeli diyagram oluşturulur. N ayrıştırılamaz olduğundan f sağ minimal morfizmadır. Bu durumda ikinci diyagramın değişmeli olmasından $fts = f$ olup ts bir izomorfizma olur. Böylece Lemma 2.4.6 gereğince u bir izomorfizma bulunur ve Auslander vd. (1997) gereğince N'nin basit olduğu açık olup ispat tamamlanır.

(ii) Tanımın direkt sonucudur. □

Aşağıdaki lemma, neredeyse projektif modüllerin karakterizasyonunda kullanılacaktır.

Lemma 3.3.6 M projektif olmayan bir modül olsun. X;

(i) X projektif;

(ii) $g : P \longrightarrow M$ projektif örtü iken $g^{-1}(X)$ yarıbasit

özelliklerinden birine sahip olacak şekilde M'nin bir öz altmodülü ise, bu durumda M neredeyse projektiftir.

İspat $g : P \longrightarrow M$ morfizması projektif olmayan bir M modülünün projektif örtüsü olsun. Bu durumda $\widetilde{g} : g^{-1}(X) \longrightarrow X$ kısıtlanmış epimorfizması vardır. Yukarıdaki özelliklerden birini sağlayan M'nin bir X öz altmodülünü alalım. X projektif ise, M neredeyse projektif olup ispat tamamlanır. $g^{-1}(X)$ yarıbasit ise, Anderson ve Fuller (1974) gereğince $\widetilde{g}$ split olup ispat tamamlanır. □

Sonsuz çoklukta izomorfik olmayan neredeyse projektif modüle sahip cebirlerin var olduğunu gösteren örnekler aşağıda verilmiştir.

Örnek 3.3.7 $\mathbf{k}$ bir cisim olmak üzere, $|\mathbf{k}|$ çoklukta ikişer ikişer izomorfik olmayan boyutu iki olan sonsuz projektif boyuta sahip neredeyse projektif teksıralı (uniserial) modül bulunduran bir A $\mathbf{k}$-cebiri vardır.
Cebirin İnşası: $\mathbf{k}\langle x, y\rangle$; x ve y değişkenleri tarafından üretilen bir serbest cebir ve I; x^2, xy, yx, y^2 tekterimlileri tarafından üretilen bir ideali olmak üzere, $A = \mathbf{k}\langle x, y\rangle/I$ cebirini gözönüne alalım. M_λ ise $xv_1 = v_2,\ yv_1 = \lambda v_2$ olacak şekilde v_1, v_2 tabanına sahip iki boyutlu bir teksıralı modül olsun. $\lambda \neq \mu$ iken $M_\lambda \ncong M_\mu$ olduğu açıktır. Ayrıca M_λ'nın tek öz altmodülü $\mathrm{Soc}M_\lambda = \langle v_2\rangle$ dır. M_λ'nın projektif örtüsü $g : P \longrightarrow M_\lambda$ ise, $P \cong A$ ve $g^{-1}(\mathrm{Soc}M_\lambda) = \mathrm{Soc}P$ olup Lemma 3.3.6 gereğince M_λ neredeyse projektif elde edilir. Bundan başka, A'nın üç boyutlu bir yerel cebir olması M_λ'nın projektif boyutunun sonsuz olmasını gerektirir.

Örnek 3.3.8 $\mathbf{k}$ bir cisim olmak üzere, $|\mathbf{k}|$ çoklukta ikişer ikişer izomorfik olmayan projektif boyutu iki olan iki boyutlu neredeyse projektif teksıralı modüller bulunduran bir A $\mathbf{k}$-cebiri vardır.
Cebirin İnşası: Sonlu boyutlu A cebiri

$$1 \underset{b}{\overset{a}{\rightrightarrows}} 2 \xrightarrow{c} 3$$

kuiveri ve $ca = 0$ ve $cb = 0$ bağıntıları ile verilsin. $P_1 = \begin{matrix} 1 \\ 2\ 2 \end{matrix}$ olmak üzere herhangi $\lambda \in \mathbf{k}$ için M_λ teksıralı modülü $P_1/(a - \lambda b) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$ olsun. $\lambda \neq \mu$ iken $M_\lambda \ncong M_\mu$ olduğu açıktır. $g : P \longrightarrow M_\lambda$ morfizması M_λ'nın projektif örtüsü olmak üzere $P \cong P_1$ ve $g^{-1}(\mathrm{Soc}M_\lambda) = \mathrm{Soc}P$ olup Lemma 3.3.6 gereğince M_λ bir iki boyutlu neredeyse projektif modül olur. Ayrıca M_λ'nın

$$0 \longrightarrow 3 \longrightarrow \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1 \\ 2\ 2 \end{matrix} \longrightarrow M_\lambda \longrightarrow 0$$

biçiminde bir projektif çözücüsü var olduğundan projektif boyutu ikidir.

Aşağıda, Lemma 3.3.6'nın (i) (sırasıyla (ii)) koşulunu sağlayan tam olarak iki (sırasıyla bir) öz altmodülü bulunan üç boyutlu ayrıştırılamaz bir modül örneği inşa edilmiştir.

Örnek 3.3.9 Ayrıştırılamaz I injektif modülü aşağıdaki özelliklere sahip olacak şekilde bir A cebiri vardır:

(i) I'nın her maksimal altmodülü projektiftir.

(ii) $g : P \longrightarrow I$ morfizması I'nın projektif örtüsü ve L, I'nın maksimal olmayan bir öz altmodülü ise, bu durumda $\mathrm{Soc}(I) = L$ ve $g^{-1}(L)$ yarıbasittir.

(iii) I'nın projektif boyutu sonsuzdur.

Cebirin İnşası: A cebiri, $ba = 0$ ve $b^2 = 0$ bağıntıları ve

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "a"] & 2 \arrow[loop right, "b"] \end{tikzcd}$$

kuiveri ile verilsin. Bu durumda A dört boyutlu bir cebir olup, bunun Auslander-Reiten kuiveri aşağıdaki biçimdedir.

$$\begin{tikzcd}
 & & & 2 \\
 & \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \arrow[dr] & & \\
2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix}1\ 2\\2\end{smallmatrix} \arrow[uur] \arrow[ddr] & \\
 & \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix} \arrow[ur] & & \\
 & & & 1
\end{tikzcd}$$

$I = \begin{smallmatrix}1\ 2\\2\end{smallmatrix}$ olarak alınırsa maksimal altmodülleri $\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$ ve $\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}$ olup (i) özelliği sağlanır. Ayrıca $\mathrm{Soc}(I) = 2$ olup, bu I'nın tek öz maksimal olmayan altmodülüdür. Diğer yandan, I'nın projektif örtüsü $g : P \longrightarrow I$ ise, $P = \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}$ biçimindedir. Buradan $g^{-1}(2) =$

$2 \oplus 2 = \mathrm{Soc}(P)$ olup (ii) özelliğinin sağlandığı görülür. Son olarak I'nın aşağıdaki biçimde bir projektif çözücüsü var olduğundan (iii) özelliği de sağlanır.

$$\cdots \longrightarrow \begin{matrix}2\\2\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}2\\2\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}2\\2\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}1\\2\end{matrix} \oplus \begin{matrix}2\\2\end{matrix} \longrightarrow I \longrightarrow 0 \ .$$

Yukarıdaki örnekte verilen A cebirinin; ne projektif ne de basit olan, fakat hem injektif hem de neredeyse projektif olan bir tek ayrıştırılamaz modül içerdiği ifade edilmiştir. Aşağıdaki örnekte, A'nın A^{op} karşıt cebirinin de aynı özelliğe sahip olduğu gösterilmiştir.

Örnek 3.3.10 Her ayrıştırılamaz modülü (bir veya sonsuz projektif boyuta sahip) ne projektif ne de basit olan, fakat hem injektif hem de neredeyse projektif olan bir A cebiri vardır.

Cebirin İnşası: A cebiri, $ba = 0$ ve $a^2 = 0$ bağıntıları ve

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "a"] \arrow[r, "b"] & 2 \end{tikzcd}$$

kuiveri ile verilsin. Bu durumda A cebirinin boyutu dört olup Auslander-Reiten kuiveri aşağıdaki biçimde çizilir.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr] & & \begin{matrix}1\\2\end{matrix} \arrow[dr] & \\
& \begin{matrix}1\\1\ 2\end{matrix} \arrow[ur] \arrow[dr] & & 1 \\
2 \arrow[ur] & & \begin{matrix}1\\1\end{matrix} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Böylece aşikar olarak $g : \begin{matrix}1\\1\ 2\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}1\\1\end{matrix}$ ve $h : \begin{matrix}1\\1\ 2\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}1\\2\end{matrix}$ projektif örtüleri vardır.

Buna göre $g^{-1}(1) = 1 \oplus 2 = h^{-1}(2)$ olduğundan Lemma 3.3.6(ii) gereğince $\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}$ ve $\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$ modülleri neredeyse projektiftir. Ayrıca $0 \longrightarrow 2 \longrightarrow \begin{smallmatrix}&1&\\1&&2\end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix} \longrightarrow 0$ Auslander-Reiten dizisi yardımıyla $\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}$'in projektif boyutunun bir olduğu görülürken

$$\cdots \longrightarrow \begin{smallmatrix}&1&\\1&&2\end{smallmatrix} \oplus 2 \longrightarrow \begin{smallmatrix}&1&\\1&&2\end{smallmatrix} \oplus 2 \longrightarrow \begin{smallmatrix}&1&\\1&&2\end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix}&1&\\1&&2\end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \longrightarrow 0$$

projektif çözüsü yardımıyla $\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$ modülünün projektif boyutunun sonsuz olduğu görülür.

Örnek 3.3.9 ve Örnek 3.3.10 gözönüne alınarak, sonlu temsil tipli karşıt cebirlerin sahip oldukları ayrıştırılamaz neredeyse projektif modüllerinin sayısı karşılaştırılabilir. Aşağıda, sonlu temsil tipli bir cebirin ve onun karşıt cebirinin aynı sayıda ayrıştırılamaz neredeyse projektif modüle sahip olmadığını gösteren bir örnek verilmiştir.

Örnek 3.3.11 Aynı sayıda ayrıştırılamaz neredeyse projektif modüle sahip olmayan sonlu temsil tipli A ve A^{op} cebirleri vardır.

Cebirin İnşası: (1) A cebiri; $ca = 0$ bağıntısı ve

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[d, "a"] & \\ & 2 \arrow[dl, "b"'] \arrow[dr, "c"] & \\ 3 & & 4 \end{tikzcd}$$

kuiveri ile tanımlansın. A'nın sonlu boyutlu bir cebir olduğu açık olup Auslander-Reiten kuiveri:

$$
\begin{tikzcd}
3 \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix}2\\4\end{smallmatrix} \arrow[dr] & & & \\
& \begin{smallmatrix}2\\3\,4\end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] & & 2 \arrow[dr] & & 1 \\
4 \arrow[ur] & & \begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \arrow[ur] & \\
& & & \begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

biçimindedir. $g : \begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$ doğal epimorfizması $\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$'nin projektif örtüsü olup g yardımıyla tanımlanan $\widetilde{g} : g^{-1}(2) = \begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix} \to 2$ epimorfizması split olmadığından $\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$ neredeyse projektif değildir. Böylece, A cebirinin projektif olmayan ayrıştırılamaz neredeyse projektif modülleri: $1,\ 2,\ \begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}2\\4\end{smallmatrix}$ dür.

(2) A^{op} karşıt cebiri $ac = 0$ bağıntısı ve

$$
\begin{tikzcd}
3 \arrow[dr, "b"'] & & 4 \arrow[dl, "c"] \\
& 2 \arrow[d, "a"] & \\
& 1 &
\end{tikzcd}
$$

kuiveri ile verilir. Bu karşıt cebir de sonlu boyutlu olup Auslander-Reiten kuiveri

$$\begin{tikzcd}
 & & \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \arrow[dr] & & & \\
 & \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \arrow[dr] & & 4 \\
1 \arrow[ur] & & 2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix}3\,4\\2\end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & & \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix} \arrow[ur] & & 3
\end{tikzcd}$$

biçimindedir. $g : \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$ ve $h : \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}3\,4\\2\end{smallmatrix}$ doğal epimorfizmaları sırasıyla $\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$ ve $\begin{smallmatrix}3\,4\\2\end{smallmatrix}$ modüllerinin projektif örtüsü olup, bunlar yardımıyla tanımlanan $\widetilde{g} : g^{-1}(2) = \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \to 2$ ve $\widetilde{h} : h^{-1}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus 2 \to \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$ morfizmaları split olmadığından $\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$ ve $\begin{smallmatrix}3\,4\\2\end{smallmatrix}$ neredeyse projektif modüller değildir. Böylece A^{op} karşıt cebirinin ayrıştırılamaz neredeyse projektif modülleri: $2, 3,$ ve 4'dür.

Sonuç olarak, A ve A^{op} cebirleri aynı sayıda ayrıştırılamaz neredeyse projektif modüle sahip değildir.

Sonuç 3.3.12 Aşağıdaki özelliklere sahip sonlu temsil tipli bir A cebiri vardır:

(i) A ve A^{op} üzerinde, projektif olmayan bir altmodüle sahip olan sadece bir ayrıştırılamaz projektif sol modül vardır.

(ii) A ve A^{op} üzerinde, ayrıştırılamaz projektif olmayan neredeyse projektif modüllerin öz altmodülleri projektiftir.

İspat Örnek 3.3.11'deki A cebirini gözönüne alalım. Bir projektif olmayan altmodüle (radikaline) sahip tek ayrıştırılamaz projektif sol A-modül (sırasıyla sağ A^{op}-modül) $\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}$ (sırasıyla $\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}$) dir. Böylece (i) özelliği sağlanır.

Diğer yandan, 1, 2, $\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}$ ve $\begin{smallmatrix}2\\4\end{smallmatrix}$ (sırasıyla 2, 3 ve 4) projektif olmayan ayrıştırılamaz neredeyse projektif sol A-modüller (sırasıyla sağ A^{op}-modüller) olduğundan (ii) özelliği sağlanır.

Tüm altmodülleri teksıralı olan neredeyse projektif modül örnekleri yukarıda verildi. Aşağıdaki örnek, kalıtsal halkada olsa bile teksıralı altmodüllerden çok az bilgi elde edilebildiğini gösterir.

Örnek 3.3.13 Aşağıdaki özelliklere sahip bir ayrıştırılamaz injektif modülü bulunan bir A cebiri vardır:

(i) I'nın teksıralı her altmodülü projektiftir,

(ii) I neredeyse projektif olmayan tek ayrıştırılamaz A-modüldür,

(iii) I; 3 tane teksıralı projektif modülün ve aynı zamanda 2 tane ayrıştırılamaz neredeyse projektif modülün toplamı olarak yazılır.

Cebirin İnşası: Sonlu boyutlu kalıtsal A cebiri

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr] & 2 \arrow[d] & 3 \arrow[dl] \\ & 4 & \end{tikzcd}$$

kuiveri ile verilsin ve ayrıştırılamaz injektif I modülü $\begin{smallmatrix}1\ 2\ 3\\4\end{smallmatrix}$ olsun. I'nın teksıralı altmodülleri $\begin{smallmatrix}1\\4\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}2\\4\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}$, 4 olup A'nın Auslander-Reiten kuiveri

$$\begin{tikzcd}
 & \begin{smallmatrix}1\\4\end{smallmatrix} \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix}2\,3\\4\end{smallmatrix} \arrow[dr] & & 1 \\
4 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \begin{smallmatrix}2\\4\end{smallmatrix} \arrow[r] & \begin{smallmatrix}1\,2\,3\\4\,4\end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \begin{smallmatrix}1\,3\\4\end{smallmatrix} \arrow[r] & \begin{smallmatrix}1\,2\,3\\4\end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & 2 \\
 & \begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix} \arrow[ur] & & \begin{smallmatrix}1\,2\\4\end{smallmatrix} \arrow[ur] & & 3
\end{tikzcd}$$

biçimindedir. Böylece (i) sağlanır.

I'nın $\begin{smallmatrix}1\,2\\4\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1\,3\\4\end{smallmatrix}$ ve $\begin{smallmatrix}2\,3\\4\end{smallmatrix}$ maksimal altmodülleri projektif değildir. A kalıtsal bir cebir olduğundan I neredeyse projektif değildir. Teksıralı bir modülün ya projektif ya da basit olduğu gözönünde bulundurulmalıdır. Diğer yandan yukarıda verilen maksimal altmodüller üç boyutlu ve herhangi özaltmodülleri projektiftir. Aynı zamanda $\begin{smallmatrix}1\,2\,3\\4\,4\end{smallmatrix}$ modülünün her öz altmodülü projektiftir. $\begin{smallmatrix}1\,2\,3\\4\end{smallmatrix}$ ve $\begin{smallmatrix}1\,2\,3\\4\,4\end{smallmatrix}$ boyutu üçten büyük tek ayrıştırılamaz modüller olduğundan (ii) sağlanır. Bundan başka,

$$I = \begin{matrix}1\,2\,3\\4\end{matrix} = \begin{matrix}1\\4\end{matrix} + \begin{matrix}2\\4\end{matrix} + \begin{matrix}3\\4\end{matrix} = \begin{matrix}1\,2\\4\end{matrix} + \begin{matrix}2\,3\\4\end{matrix}$$

olduğundan (iii) sağlanır.

Örnek 3.3.9'da verilen $\begin{smallmatrix}1\,2\\2\end{smallmatrix}$ modülü ve Örnek 3.3.13'de verilen $\begin{smallmatrix}1\,2\\4\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1\,3\\4\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}2\,3\\4\end{smallmatrix}$ modülleri, P ve Q ayrıştırılamaz projektif modüller olmak üzere $P + Q$ formunda yazılır. Fakat iki ayrıştırılamaz projektif modülün toplamının neredeyse projektif olmasının gerekmediği aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 3.3.14 Kalıtsal olmayan bir cebir üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan ayrıştırılamaz bir M modülü vardır:

(i) P ve Q ayrıştırılamaz projektif modüller olmak üzere $M = P + Q$ dur,

(ii) M neredeyse projektif değildir,

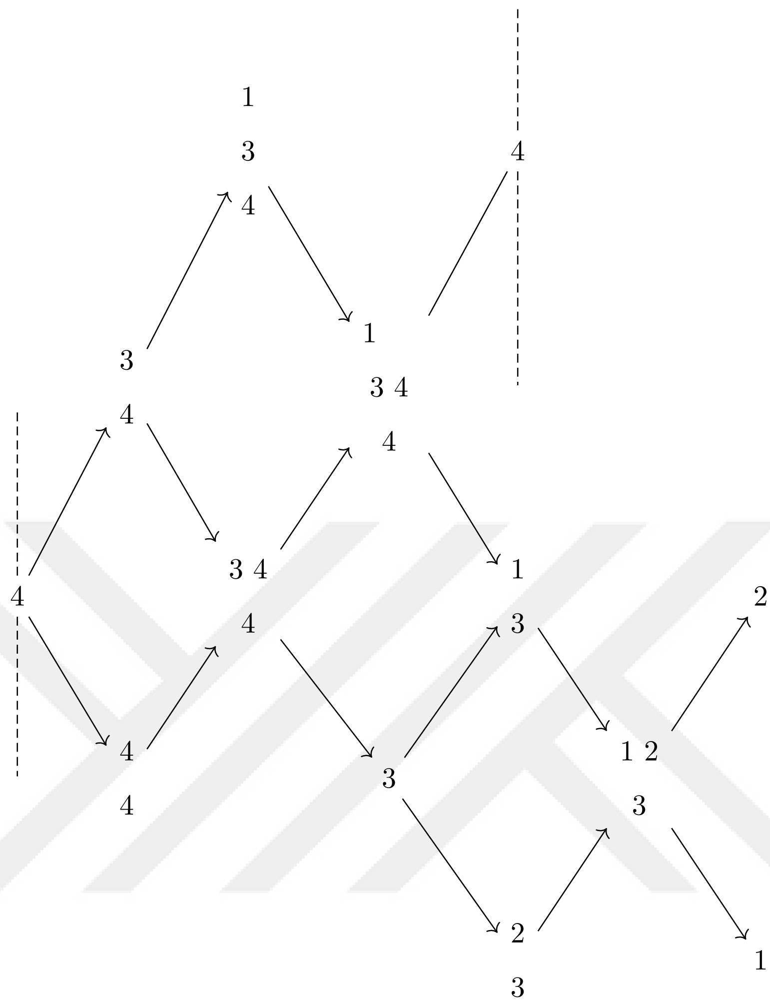
(iii) M, Lemma 3.3.6'nın (ii) koşulunu sağlamayan sadece bir tane projektif olmayan öz altmodüle sahiptir,

(iv) M'nin maksimal altmodülleri ya projektif ya da neredeyse projektiftir.

Cebirin İnşası: Sonlu boyutlu A cebiri, $cb = 0, dc = 0, d^2 = 0$ bağıntıları ve

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr, "a"'] & & 2 \arrow[dl, "b"] \\ & 3 \arrow[d, "c"] & \\ & 4 \arrow[loop right, "d"] & \end{tikzcd}$$

kuiveri ile tanımlansın. $\begin{smallmatrix}1\\3\\4\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}$ and $\begin{smallmatrix}4\\4\end{smallmatrix}$ ayrıştırılamaz projektif modüllerdir. $\begin{smallmatrix}1\\3\\4\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}$ ve $\begin{smallmatrix}4\\4\end{smallmatrix}$ modüllerinin projektif olmayan bir altmodülü 4 iken, $\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}$ modülünün projektif olmayan bir altmodülü 3 tür. A'nın Auslander-Reiten kuiveri



biçimindedir. M ayrıştırılamaz injektif modülü $\begin{matrix}1\\3\ 4\\4\end{matrix}$ olsun. Bu durumda $P \cong \begin{matrix}1\\3\\4\end{matrix}$ ve $Q \cong \begin{matrix}4\\4\end{matrix}$ olmak üzere $M = P + Q$ biçiminde yazılır ve (i) sağlanır. Diğer yandan, M'nin projektif örtüsü $g : \begin{matrix}1\\3\\4\end{matrix} \oplus \begin{matrix}4\\4\end{matrix} \to M$ olmak üzere $g^{-1}(X) = \begin{matrix}3\\4\end{matrix} \oplus \begin{matrix}4\\4\end{matrix}$ olacak şekildeki bir $X = \begin{matrix}3\ 4\\4\end{matrix}$ öz altmodülü için $\widetilde{g} : g^{-1}(X) \to X$ epimorfizması split olmadığı için M neredeyse projektif değildir ve (ii) sağlanır. Aynı zamanda buradan (iii) sağlandığı görülür. $\begin{array}{c}1\\3\\4\end{array}$ ve $\begin{array}{ccc}3 & & 4\\ & 4 & \end{array}$, M'nin iki maksimal altmodülü olduğundan (iv)'nin sağlandığı açıktır.

4. KAYNAKLAR

Alizade R, Pancar A, 1999, Homoloji Cebirine Giriş, Ondokuz Mayıs Üniyersitesi, 178s, Samsun.

Anderson F W, Fuller K R, 1992, Rings and Categories of Modules, Graduate Text in Mathematics, Springer-Verlag, 385p, New York, Inc.

Assem I, Coelho F U, 2020, Basic Representation Theory of Algebras, Graduate Text in Mathematics, Springer Nature, 311p, Switzerland.

Auslander M, 1974, Representation theory of artin algebras II. Comm. in Algebra, 2, 269-310.

Auslander M and Platzeck M I, 1978, Representation theory of hereditary artin algebras, Lecture Notes in pure and applied mathematics, 37, Marcel Dekker, New York and Basel, 389-424.

Auslander M, Reiten I, 1975, Representation theory of artin algebras III. Comm. in Algebra, 239-294.

Auslander M, Reiten I, 1977a, Representation theory of artin algebras IV. Invariants given by almost split sequences, Comm. in Algebra, 5, 443-518.

Auslander M, Reiten I, 1977b, Representation theory of artin algebras V. Methods for computing almost split sequences and irreducible morphisms, Comm. in Algebra, 5, 519-554.

Auslander M, Reiten I, 1977c, Representation theory of artin algebras VI. A functorial approach to almost split sequences, Comm. in Algebra, 2, 279-291.

Auslander M, Reiten I, Smalo O S, 1997, Representation Theory of Artin Algebras Cambridge Studies in Advanced Mathematics 36, Cambridge University Press, Cambridge, New York.

Bautista R, 1977, On algebras closed to hereditary algebras, Oberwolfack Conference Report, 17-21.

Bautista R, 1982, Irreducible morphisms and the radical of a category, An. Inst. Mat. Univ. Nac. Autónoma México, 22, 83-135.

Bernstein I N, Gelfand I M, and Ponomarev V A, 1973, Coxeter functors and Gabriel's theorem. Usp. Mat. Nauk 28, 19-33, Transl. Russ. Math. Surv. 28 1973) 17-32.

Dlab V and Ringel C M., 1975, On algebras of finite representation type, J. Algebra, 33, 306-394.

Gabriel P, 1972, Unzerlegbare Darstellungen I. Manuscripta Math, 6, 71-103.

Hungerford T W, 1974, Algebra, Springer-Verlag, 229p, New York.

Kaynarca F, D'Este G, Tütüncü K D , 2023, Almost projective modules over non hereditary algebras, Contemporary Mathematics, 785, 167-177.

Loupias M, 1975, Indecomposable representation of finite ordered sets, Proceedings of the International Conference on Representation of Algebras, Ottawa, Lecture Notes in Mathematics, 488, 201-209.

Martinez Villa R, 1980a, Almost projective modules over hereditary algebras, An. İns. Mat. Univ. Nac. Autonoma, Mexico, 20, 1-89.

Martinez Villa R, 1980b, Almost projective modules and almost split sequences with indecomposable middle term, Comm. Algebra, 8, 1123-1150.

Park J S, 1988, Almost projective modules over artin algebras, Dep. of Math. Jung. Nat. Univ. Taejon, Korea, 43-53.

Rotman J J, 1979, An Introduction to Homological Algebra, Academic Press, New York-San Francisco-London.

Schiffler R, 2014, Quiver Representations, Springer International Publishing, 230p, Switzerland.