

**T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**RUNGE-KUTTA YÖNTEMLERİ İLE AÇIK KANALLARDA
YAVAŞ DEĞİŞEN AKIMIN SAYISAL ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

RASİM GÖKTUĞ GÖZ

DENİZLİ, NİSAN - 2025

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI



RUNGE-KUTTA YÖNTEMLERİ İLE AÇIK KANALLARDA
YAVAŞ DEĞİŞEN AKIMIN SAYISAL ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

RASİM GÖKTUĞ GÖZ

DENİZLİ, NİSAN - 2025

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

Rasim Göktuğ Göz



ÖZET

RUNGE-KUTTA YÖNTEMLERİ İLE AÇIK KANALLARDA YAVAŞ DEĞİŞEN AKIMIN SAYISAL ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

RASİM GÖKTUĞ GÖZ

PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. GÜRHAN GÜRARSLAN)

DENİZLİ, NİSAN - 2025

Bu tez çalışmasında, açık kanallarda meydana gelen tedrici değişken akımın (YDA) sayısal çözümü, yüksek mertebeden doğruluğa sahip açık (eksplisit) ve kapalı (implicit) Runge-Kutta yöntemleri kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Su yüzeyi profilini temsil eden diferansiyel denklem, dördüncü mertebeden Runge-Kutta (RK4) yöntemleriyle çözülmüş ve hesaplamalar, farklı hidrolik koşulları temsil eden iki trapez kesitli prizmatik kanal örneği üzerinde uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlar literatürde yer alan referans çözümlerle karşılaştırılmış; her iki yöntemin de yüksek düzeyde doğruluk ve kararlılık sunduğu tespit edilmiştir. Özellikle kapalı RK4 yöntemi, toplam mutlak hata bakımından açık yönteme kıyasla daha düşük sapma üretmiş ve nümerik stabilite açısından üstünlük sağlamıştır. Sonuç olarak, Runge-Kutta tabanlı yöntemlerin, açık kanal akımlarının mühendislik çözümlerinde etkin ve güvenilir sayısal araçlar olduğu ortaya konmuştur.

ANAHTAR KELİMELELER: Yavaş Değişen Akım, Su Yüzeyi Profili, Runge-Kutta Yöntemi, Sayısal Analiz

ABSTRACT

NUMERICAL ANALYSIS OF GRADUALLY VARIED FLOW IN OPEN CHANNELS USING RUNGE-KUTTA METHODS

MSC THESIS

RASİM GÖKTUĞ GÖZ

PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE

CIVIL ENGINEERING

(SUPERVISOR: PROF. DR. GURHAN GURARSLAN)

DENİZLİ, APRIL 2025

In this thesis, the numerical solution of gradually varied flow (GVF) in open channels is investigated using high-order accurate explicit and implicit Runge-Kutta methods. The differential equation representing the water surface profile is solved using fourth-order Runge-Kutta (RK4) methods, and the computations are applied to two trapezoidal prismatic channel cases representing different hydraulic conditions. The obtained results are compared with reference solutions from the literature, showing that both methods offer high accuracy and numerical stability. Notably, the implicit RK4 method yielded lower total absolute error compared to the explicit method, demonstrating its superior stability characteristics. Consequently, Runge-Kutta-based numerical approaches are shown to be effective and reliable tools for modeling open channel flows in engineering applications.

KEYWORDS: Gradually Varied Flow, Water Surface Profile, Runge-Kutta Method, Numerical Analysis

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	1
ABSTRACT	2
İÇİNDEKİLER	3
ŞEKİL LİSTESİ	4
TABLO LİSTESİ	5
SEMBOL LİSTESİ	6
ÖNSÖZ	7
1. GİRİŞ	8
1.1 Giriş	8
1.1.1 Akım Türleri	9
1.1.2 Akım Durumu	10
1.1.3 Akım Rejimleri	11
1.2 Açık Kanalların Özellikleri	13
1.2.1 Açık Kanal Türleri	13
1.2.2 Kanal Geometrisi	14
1.2.3 Kanal Kesitinin Geometrik Elemanları.....	14
1.2.4 Hız Dağılımı	14
1.2.5 Basınç Dağılımı	17
1.2.5.1 Hidrostatik Basınç Dağılımı.....	18
1.3 Tedrici Değişken Akım Teorisi	19
1.3.2 Tedrici Değişken Akımın Diferansiyel Denklemi	19
1.3.3 Akım Profillerinin Sınıflandırılması	24
1.3.4 Akım Profillerinin Bazı Özellikleri	27
1.3.5 Kontrol Kısımları	31
1.3.6 Akış Profillerinin Analizi.....	31
2. LİTERATÜR TARAMASI	32
3. YAVAŞ DEĞİŞEN AKIMIN SAYISAL ANALİZİ	36
3.1 Runge-Kutta Yöntemleri	36
3.2 Açık Runge-Kutta Yöntemleri	38
3.2.1 İki Aşamalı İkinci Dereceden Yöntemler	40
3.2.2 Dördüncü Mertebeden Runge-Kutta Yöntemi.....	41
3.3 Kapalı Runge-Kutta Yöntemleri.....	45
4. SAYISAL UYGULAMALAR	47
4.1 Sayısal Uygulama 1	47
4.2 Sayısal Uygulama 2	48
5. SONUÇLAR	51
6. KAYNAKLAR	52
7. ÖZGEÇMİŞ	54

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1: Boru akımı ve açık kanal akımı	8
Şekil 1.2: Değişken akım	9
Şekil 1.3: Açık kanal akışının dört rejimi arasındaki derinlik-hız ilişkileri.....	12
Şekil 1.4: Dikdörtgen kanallarda hız dağılımı	15
Şekil 1.5: Doğal kanallarda hız dağılımı.....	15
Şekil 1.6: Tipik hız profili.....	16
Şekil 1.7: Durgun suda basınç dağılımı	18
Şekil 1.8: YDA'nın şematik gösterimi.....	20
Şekil 1.9: Küçük eğimli kanal.....	25
Şekil 1.10: Büyük eğimli kanal.....	25
Şekil 1.11: Kritik eğimli kanal.....	25
Şekil 1.12: Yatay eğimli kanal.....	26
Şekil 1.13: Ters eğimli kanal	26
Şekil 1.14: M1 profili.....	27
Şekil 1.15: M2 profili.....	27
Şekil 1.16: M3 profili.....	28
Şekil 1.17: S1 profili	28
Şekil 1.18: S2 profili	29
Şekil 1.19: S3 profili	29
Şekil 1.20: S4 profili	30
Şekil 1.21: H2 ve H3 profilleri.....	30
Şekil 1.22: A2 profili	31
Şekil 3.1: Klasik Runge-Kutta yöntemiyle kullanılan eğimler	37
Şekil 3.2: Runge-Kutta yöntemlerinin diferansiyel denklemlerle karşılaştırılması	38

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Tablo 1.1: Kanallarda oluşan su yüzü profillerinin isimlendirilmesi.....	24
Tablo 1.2 YDA profil türleri	26
Tablo 4.1 Sayısal uygulama 1 için açık ve kapalı RK4 yöntemlerinin ve Chaudhry (1993) çözümünün karşılaştırılması	48
Tablo 4.2 Sayısal uygulama 2 için kullanılan yöntemlerin karşılaştırılması	50



SEMBOL LİSTESİ

R	:	Reynolds Sayısı
V	:	Akış hızı
L	:	Karakteristik Uzunluk
v	:	Kinematik Viskozite
g	:	Yerçekimi İvmesi
F	:	Froude Sayısı
p	:	Basınç
Z	:	Referans Düzlemi Üzerindeki Yükseklik
a	:	İvme
r	:	Eğrilik Yarıçapı
y_c	:	Kritik Derinlik
y₀	:	Normal Derinlik
S_f	:	Enerji Eğimi
E	:	Spesifik Enerji
H	:	Akışın Toplam Enerjisi
K	:	Herhangi Bir y Derinliğindeki Taşıma Kapasitesi
K₀	:	Normal Derinliğe karşılık Gelen Taşıma Kapasitesi
Q	:	Debi
n	:	Manning Katsayısı
t	:	Zaman
k	:	Eğim

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında, açık kanallarda meydana gelen yavaş değişen akımın sayısal analizi, diferansiyel denklemlerin dördüncü mertebeden açık ve kapalı Runge-Kutta yöntemleri ile çözülmesi yoluyla ele alınmıştır. Çalışma kapsamında, farklı hidrolik koşullara sahip trapez kesitli prizmatik kanallar üzerinde uygulamalar gerçekleştirilmiş ve elde edilen sonuçlar literatürdeki referans çözümlerle karşılaştırılmıştır. Sayısal yöntemlerin doğruluk, kararlılık ve mühendislik uygulamalarındaki uygulanabilirliği ayrıntılı olarak değerlendirilmiştir.

Bu çalışmanın her aşamasında değerli bilgi ve tecrübeleriyle bana yol gösteren, bilimsel yaklaşımı ve akademik desteği ile katkı sağlayan danışmanım Prof. Dr. Gürhan Gürarlan'a en içten teşekkürlerimi sunarım. Tez süreci boyunca gösterdiği sabır, anlayış ve yönlendirme sayesinde çalışmamı daha sistemli ve etkili bir şekilde yürütebildim.

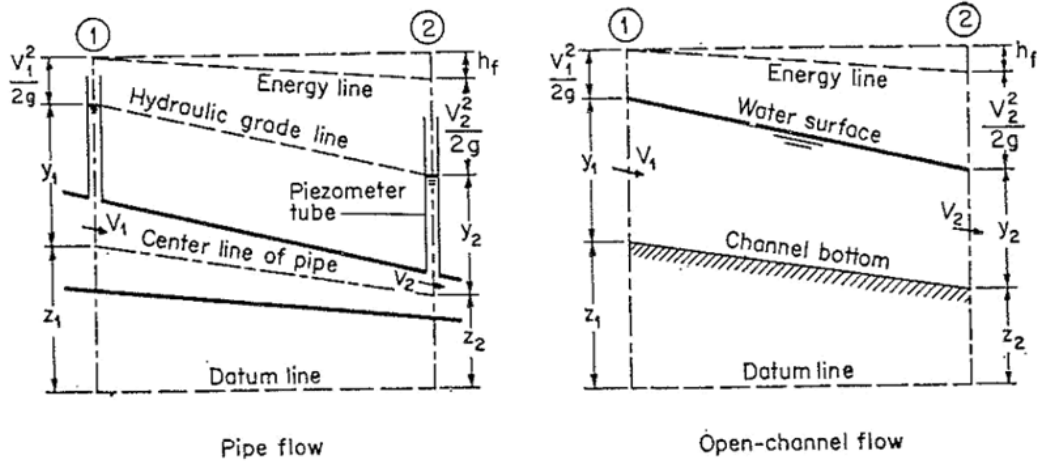
Ayrıca, lisansüstü eğitimim süresince bilgi birikimleriyle katkı sunan tüm öğretim üyelerine teşekkür ederim. Bu süreçte manevi desteğini esirgemeyen aileme ve arkadaşlarıma da sonsuz şükranlarımı sunuyorum.

Bu çalışmanın, açık kanal akımları ve sayısal analiz yöntemleri alanında yapılan akademik çalışmalara katkı sağlaması temennisiyle...

1. GİRİŞ

1.1 Giriş

Bir kanaldaki su akımı, açık kanal akımı veya boru akımı şeklinde gerçekleşebilir. Bu iki akım türü bazı yönlerden benzerlik gösterse de temel bir fark barındırmaktadır. Açık kanal akımında serbest bir su yüzeyinin bulunması zorunludur; bu yüzey doğrudan atmosfer basıncına maruz kalır. Buna karşılık, boru akımında serbest yüzey bulunmaz; çünkü akışkan boru kesitini tamamen doldurur ve akım yalnızca hidrolik basınç etkisi altında gerçekleşir. Bu nedenle, açık kanal ve boru akımları arasında basınç koşulları bakımından belirgin bir fark söz konusudur.



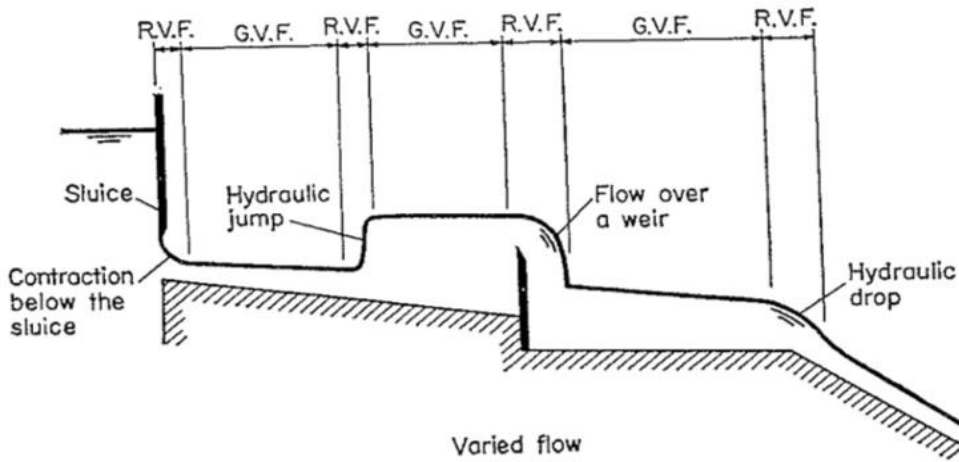
Şekil 1.1: Boru akımı ve açık kanal akımı

Şekil 1.1'de, basınçlı boru akımı ile açık kanal akımına ait enerji çizgisi ve piyezometre çizgisi karşılaştırmalı olarak sunulmuştur. Basınçlı akım koşullarında piyezometre çizgisi, boru ekseninin üzerinde yer almakta ve akışkanın basınç yükünü temsil etmektedir. Buna karşılık, açık kanal akımında piyezometre çizgisi su yüzeyiyle çakışmakta ve bu yüzey doğrudan atmosfer basıncına maruz kalmaktadır. Her iki akım tipinde de enerji çizgisi, sistemdeki toplam enerjiyi değil; akım boyunca oluşan yük kayıplarını da dikkate alarak taşınabilir enerji seviyesini ifade etmektedir.

1.1.1 Akım Türleri

Açık kanal akımları, zamanla ve mekânla olan ilişkilerine göre sınıflandırıldığında iki ana gruba ayrılır: kararsız akım ve kararlı akım. Kararsız akım, zamanla değişen bir akım türüdür ve kendi içinde üniform ve üniform olmayan olmak üzere ikiye ayrılır. Üniform kararsız akımda akım derinliği her noktada eşitken zamanla değişkenlik gösterir. Üniform olmayan kararsız akım ise hem zamanla hem de mekânla değişkenlik gösterir ve bu grup da tedrici değişken ve ani değişken olmak üzere iki alt sınıfa ayrılır. Benzer şekilde, kararlı akım zamanla sabit kalan bir akımı ifade eder ve bu da üniform ve üniform olmayan olarak ikiye ayrılır. Üniform kararlı akımda akım derinliği hem zaman hem de mekânda sabitken, üniform olmayan kararlı akımda derinlik yalnızca mekâna bağlı olarak değişir. Üniform olmayan kararlı akım da yine tedrici değişken ve ani değişken olmak üzere iki alt başlık altında sınıflandırılır.

Eğer üniform olmayan bir akımda su derinliğindeki değişim kademeli olarak gerçekleşiyor ve akım çizgilerinin eğriliği ihmal edilebilecek düzeydeyse, bu tür akım tedrici üniform olmayan akım olarak tanımlanır. Bu akım türünde sürtünme kuvveti önemli bir rol oynar. Bir barajdan aşağıya su bırakılması ya da bir kanal tabanında meydana gelen ani düşü sonucu su yüzeyinin kademeli olarak değişmesi, kararlı tedrici üniform olmayan akıma örnek teşkil eder. Buna karşılık, bir nehir yatağında sel dalgasının ilerlemesi gibi zamanla değişen koşullarda oluşan akım ise kararsız tedrici üniform olmayan akım kapsamında değerlendirilir.



Şekil 1.2: Değişken akım

Şekil 1.2'de, çeşitli kanal kesitleri boyunca meydana gelen değişken akım türleri şematik olarak gösterilmiştir. Şekilde; savak kapağı altındaki daralma, hidrolik sıçrama, savak üzerinden akış ve hidrolik düşü gibi karakteristik akım olayları ile birlikte, üniform olmayan akımın farklı bölgelerde gösterdiği hızlı değişim ve tedrici değişim tipleri karşılaştırmalı olarak sunulmaktadır. Bu durum, pratik mühendislik uygulamalarında kanal geometrisi ve taban eğiminin akım rejimi üzerindeki etkilerini açıkça ortaya koymaktadır.

1.1.2 Akım Durumu

Açık kanal akımının durumu veya davranışı, temel olarak akımın atalet kuvvetlerine kıyasla viskozite ve yerçekimi etkileriyle belirlenir. Su yüzey gerilimi bazı özel durumlarda akım davranışını etkileyebilse de mühendislik uygulamalarında karşılaşılan çoğu açık kanal problemi için ihmal edilebilir düzeydedir.

Viskozitenin atalet kuvvetlerine göre etkisine bağlı olarak akım; laminer, türbülanslı veya geçiş rejiminde olabilir: Laminer akımda viskoz kuvvetler atalet kuvvetlerine kıyasla baskın durumdadır ve bu nedenle akış davranışı üzerinde belirleyici rol oynar. Laminer akımda, su parçacıkları düzgün bir şekilde akım çizgileri boyunca hareket eder. Akış, sıvının birbirine paralel, sonsuz derecede ince katmanlarının, bitişik katmanlar üzerinde kayması şeklinde gerçekleşir. Türbülanslı akımda viskoz kuvvetlerin atalet kuvvetlerine göre zayıf kaldığı durumlarda türbülanslı akım meydana gelir. Bu tür akımda su parçacıkları düzensiz ve sürekli değişen yollar izler; ancak bu hareket, topluca akım yönünde ilerlemeyi sağlar. Geçiş akımı laminer ve türbülanslı rejim arasında bir ara durumdur. Akımın özellikleri zamanla değişkenlik gösterebilir.

Akışkan hareketinde viskoz kuvvetlerin, atalet kuvvetlerine kıyasla akım üzerindeki baskınlık düzeyi, akımın rejimini belirlemede temel bir kriter olan Reynolds Sayısı ile nicel olarak ifade edilir. Reynolds Sayısı, atalet kuvvetlerinin viskoz kuvvetlere oranı şeklinde tanımlanan boyutsuz bir parametre olup, aşağıdaki denklemle ifade edilir:

$$R = \frac{V \cdot L}{\nu} \quad (1.1)$$

Burada, V ortalama akım hızını, L karakteristik bir uzunluğu, ν kinematik viskoziteyi göstermektedir.

Akım üzerindeki yerçekimi etkisi, atalet kuvvetlerinin yerçekimi kuvvetlerine oranı ile değerlendirilir ve bu oran Froude Sayısı olarak adlandırılan boyutsuz bir parametre ile ifade edilir.

$$F = V / \sqrt{g \cdot L} \quad (1.2)$$

Burada, V ortalama akım hızını, g yerçekimi ivmesini, L karakteristik bir uzunluğu temsil etmektedir.

1.1.3 Akım Rejimleri

Açık kanal akımlarında, viskozite ve yerçekiminin etkileri birlikte değerlendirildiğinde akımın rejimi dört farklı kombinasyonla sınıflandırılabilir. Bu sınıflandırma, Reynolds Sayısı ve Froude Sayısı değerlerine bağlı olarak şu şekilde ortaya çıkar:

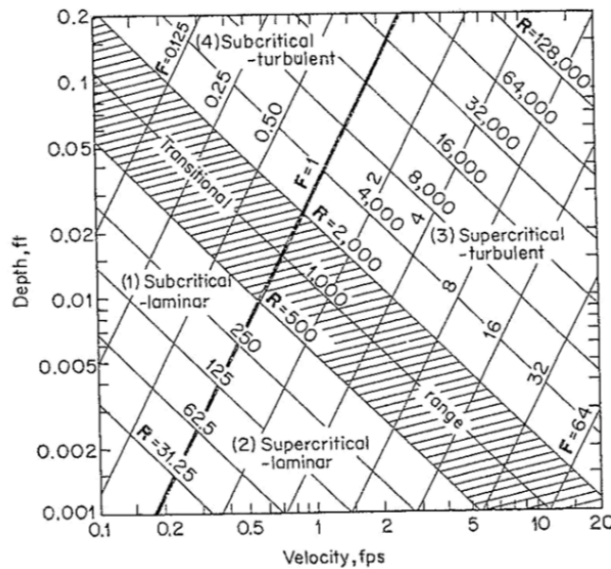
Kritik altı-laminer akım, Reynolds sayısının düşük ve Froude sayısının 1'den küçük olduğu durumlarda meydana gelir. Akım hem düşük hızlı hem de viskoz kuvvetlerin baskın olduğu bir yapıdadır. Su partikülleri birbirine paralel katmanlar hâlinde, düzgün çizgiler boyunca hareket eder. Akım yüzeyi sakin ve stabildir; dalgalanma veya karışma gözlenmez. Genellikle düşük eğimli, küçük kesitli ve düşük debili kanallarda ya da laboratuvar ölçekli deney sistemlerinde görülür. Pratik mühendislik uygulamalarında karşılaşılmaması oldukça nadirdir.

Kritik üstü-laminer akımda Reynolds sayısı yine düşüktür ancak Froude sayısı 1'den büyüktür. Akımın viskoz karakteri korunmakla birlikte, yerçekimi kuvvetlerine göre atalet kuvvetleri baskındır. Yani akım hızlıdır, ancak hâlâ düzenli ve laminer yapıdadır. Böyle bir durum genellikle düşük viskoziteli olmayan akışkanlarla, kısa ve dik eğimli küçük kanallarda meydana gelir. Yüzeyde ani

yükseklik değişimleri veya akım hızında keskin artışlar gözlemlenebilir. Bu rejim, geçici akım koşullarında veya özel deneysel düzeneklerde ortaya çıkabilir.

Kritik üstü-türbülanslı akımda Reynolds sayısının yüksek ve Froude sayısının 1'den büyüktür. Bu rejim hem akımın hızlı hem de düzensiz olduğu durumu ifade eder. Akım yüksek hızla ilerlerken su parçacıkları rastgele yönlerde hareket eder; girdaplar, türbülans ve yüzey dalgalanmaları yaygındır. Bu rejim genellikle sel rejimi olarak adlandırılır ve ani su seviyesi değişimleri ile enerji kayıpları da artar. Hidrolik sıçrama gibi akım geçişleri bu durumda sıkça görülür. Dik eğimli kanallar, sel drenaj sistemleri ve yüksek debili taşkın akımları bu rejime örnek teşkil eder.

Kritik altı-türbülanslı akımda Reynolds sayısı yüksek, ancak Froude sayısı 1'den küçüktür. Akım yavaş olmasına rağmen türbülanslı bir yapıdadır. Su yüzeyinde düzensizlikler ve akıntı içinde girdaplar gözlemlenir. Ancak yerçekimi kuvvetleri, akım rejimini kontrol eden ana etkidir; bu nedenle akım enerji açısından daha stabildir. Doğal nehir yataklarında, az eğimli geniş kanallarda ve sulama sistemlerinde bu tür akım sıkça görülür. Mühendislik uygulamalarında en yaygın karşılaşılan akım rejimidir ve çoğu kanal tasarımı bu koşullara göre yapılır.



Şekil 1.3: Açık kanal akışının dört rejimi arasındaki derinlik-hız ilişkileri

Şekil 1.3'te, açık kanal akımının dört rejimi (kritik altı laminer, kritik üstü laminer, kritik üstü türbülanslı ve kritik altı türbülanslı) için su derinliği ile akım hızı arasındaki ilişki gösterilmiştir. Grafikte Reynolds Sayısı ve Froude Sayısı sabit eğriler şeklinde sunulmakta, böylece her derinlik–hız kombinasyonunun hangi akım rejimine karşılık geldiği belirlenebilmektedir. Bu tür diyagramlar, açık kanal tasarımlarında akım rejimini değerlendirmek açısından pratik ve etkili bir araçtır.

1.2 Açık Kanalların Özellikleri

1.2.1 Açık Kanal Türleri

Açık kanal, serbest yüzeye sahip su akışlarını iletmek amacıyla kullanılan bir akım yoludur. Kanallar kökenlerine göre sınıflandırıldığında doğal veya yapay olmak üzere iki gruba ayrılır. Doğal kanallar, yeryüzünde kendiliğinden oluşmuş tüm su yollarını kapsar ve küçük yamaç dereciklerinden derelere, çaylara, nehir ve ırmaklara, hatta gelgit etkisindeki haliçlere kadar çok çeşitli boyutlarda olabilir. Serbest yüzeye sahip yeraltı akımları da bu sınıfa dâhildir. Doğal kanalların hidrolik özellikleri çoğunlukla düzensiz ve karmaşıktır. Ancak bazı durumlarda, bu tür kanallardaki akım koşullarını teorik hidrolik analizlere uygun hale getirebilmek için, gözlemsel veriler ve mühendislik deneyimiyle uyumlu ampirik varsayımlara başvurulabilir.

Yapay kanallar ise insan eliyle inşa edilen veya doğal kanalların belirli amaçlarla düzenlenmesiyle oluşturulan su yollarıdır. Ulaşım kanalları, enerji iletim kanalları, sulama kanalları, savak yapıları, drenaj hendekleri, taşkın yolları, yol kenarı olukları ve laboratuvar ortamında test amaçlı inşa edilen model kanallar bu gruba örnek olarak verilebilir. Bu tür kanalların hidrolik özellikleri büyük ölçüde kontrol edilebilir ve belirli tasarım kriterlerine uygun şekilde inşa edilebilir. Dolayısıyla, yapay kanallara uygulanan hidrolik teoriler, gerçek sistem koşullarına oldukça yakın sonuçlar vererek mühendislik tasarımı açısından güvenilir ve pratik çözümler sağlar.

1.2.2 Kanal Geometrisi

Sabit bir kesit alanına ve sabit bir taban eğimine sahip olan kanallar prizmatik kanal olarak adlandırılır. Eğer kanal boyunca kesit geometrisi veya taban eğimi değişkenlik gösteriyorsa, bu tür kanallar prizmatik olmayan kanal olarak kabul edilir. Örneğin, genişliği değişen ve eğrisel bir hatta sahip olan bir oluk savak, prizmatik olmayan kanal türüne örnek teşkil eder.

1.2.3 Kanal Kesitinin Geometrik Elemanları

Kanal kesitinin geometrik özellikleri, kesit şekli ve akım derinliği ile tamamen tanımlanabilir niteliktedir. Bu özellikler, açık kanal akımıyla ilgili hidrolik hesaplamalarda önemli bir yer tutmakta ve yaygın olarak kullanılmaktadır. Düzenli ve basit kesit geometrilerine sahip kanallar için bu özellikler, akım derinliği ve diğer kesit boyutları cinsinden matematiksel olarak ifade edilebilir. Ancak doğal akarsular veya karmaşık kesit geometrileri söz konusu olduğunda, bu tür bir analitik ifade geliştirmek genellikle mümkün değildir. Bu durumda, geometrik elemanlar ile akım derinliği arasındaki ilişkiyi gösteren eğriler hazırlanarak hidrolik hesaplamalarda kullanılabilir.

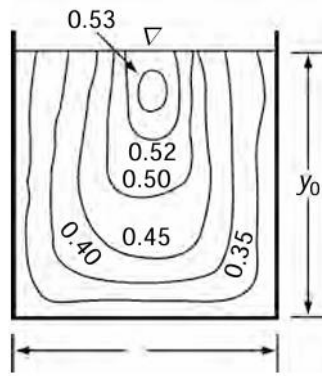
1.2.4 Hız Dağılımı

Açık kanallarda sınırların ve köşelerin varlığı, akımın hız vektörlerinin yalnızca boyuna ve yanal yönlerde değil, aynı zamanda akışa dik yönde de bileşenler içermesine neden olur. Ancak makro ölçekli analizlerde, genellikle yalnızca boyuna hız bileşeni dikkate alınır. Bu bileşen genellikle v_x ile gösterilir ve diğer iki bileşen (yanal ve düşey yönlü hızlar) nispeten küçük oldukları için ihmal edilir. Bu nedenle v_x değeri çoğunlukla basitçe v olarak ifade edilir.

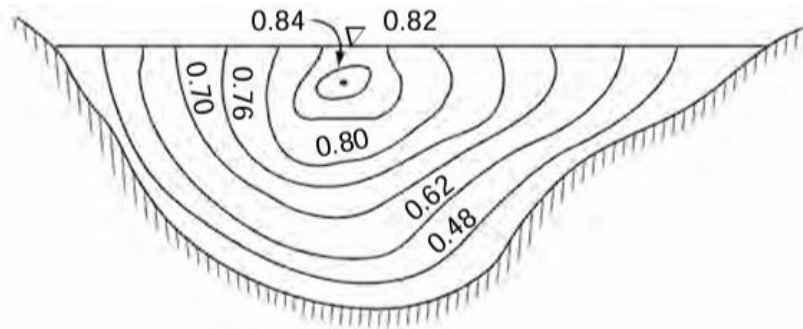
Kanal kesitindeki hız dağılımı, kanalın geometrisine doğrudan bağlıdır. Şekil 1.4 ve Şekil 1.5'te sırasıyla dikdörtgen ve doğal kesitli kanallar için eş hız eğrileri gösterilmektedir. Bu şekiller, kanal geometrisinin hız dağılımı üzerindeki etkisini açıkça ortaya koymaktadır. Hız, sınır yüzeylerinde sıfırdır ve sınırdan uzaklaştıkça

kademeli olarak artar. Maksimum hız, serbest yüzeyde değil, yüzeyin hemen altında bir noktada meydana gelir.

Bu maksimum hız noktasının serbest yüzeyden sapsması, rüzgâr etkisinden değil, kanalda oluşan ikincil akımlardan kaynaklanmaktadır. Bu sapma, kanalın derinlik–genişlik oranına bağlıdır. Dolayısıyla, aynı derinliğe sahip daha dar bir kanalda maksimum hız noktası, daha geniş bir kanala kıyasla serbest yüzeyden daha aşağıda bulunur. Bu karakteristik sapma, serbest yüzeydeki rüzgâr kaynaklı kayma gerilmeleriyle ilişkili değildir.



Şekil 1.4: Dikdörtgen kanallarda hız dağılımı



Şekil 1.5: Doğal kanallarda hız dağılımı

Şekil 1.6, akım yönüne dik bir düzlemde, tipik bir hız profilini göstermektedir. Bu hız profili, maksimum hıza kadar olan bölgede yaklaşık olarak

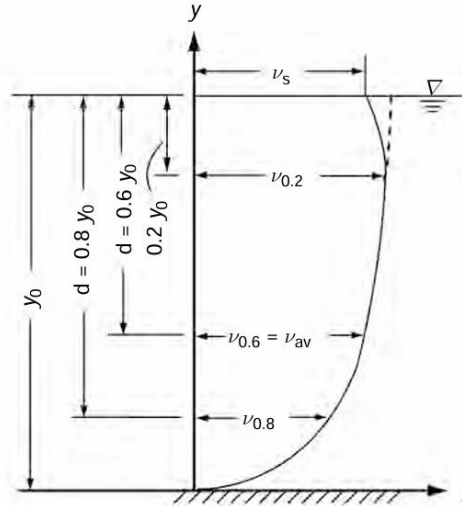
logaritmik ya da üstel bir dağılımla ifade edilebilir. Nehirler ve kanallarda yapılan saha gözlemleri, herhangi bir düşey doğrultuda ortalama akım hızının, serbest yüzeyden itibaren toplam akım derinliğinin yaklaşık %60'ı seviyesinde, yani derinliğin 0.6 katı noktasında gerçekleştiğini ortaya koymuştur. Ortalama hızı şu şekilde bulabiliriz:

$$v_{av} = \frac{v_{0.2} + v_{0.8}}{2} \quad (1.3)$$

Burada $v_{0.2}$, serbest yüzeyden $0.2 y_0$ derinlikteki hızı ve $v_{0.8}$ serbest yüzeyden $0.8 y_0$ derinlikteki hızı belirtmektedir. Hız dağılımının bu özelliği, alan-hız yöntemi kullanılarak debi belirlenmesinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Yüzey hızı v_s ile ortalama hız v_{av} arasındaki ilişki şu şekilde ifade edilir:

$$v_{av} = k \cdot v_s \quad (1.4)$$

Burada k , 0.8 ile 0.95 arasında bir değere sahip katsayıdır. k 'nın doğru değeri kanal kesitine bağlıdır ve saha kalibrasyonlarıyla belirlenmelidir. k bilindiğinde şamandıra ve diğer yüzey hızı ölçüm cihazları kullanılarak açık kanaldaki ortalama hız tahmin edilebilir.



Şekil 1.6: Tipik hız profili

1.2.5 Basınç Dağılımı

Bir akışkanın serbest yüzeyindeki basınç, çevresindeki atmosfer basıncına eşittir. Mühendislik uygulamalarında atmosfer basıncı genellikle referans alınır ve sıfır kabul edilir. Bu nedenle, serbest yüzey sıfır basınç yüzeyi olarak tanımlanır. Açık kanal akımında basınç dağılımı, yerçekimi ivmesi ile diğer ivmelerin etkisine bağlı olarak belirlenir ve bu durum Euler denklemi ile matematiksel olarak ifade edilir. Herhangi bir s yönünde:

$$-\frac{\partial(p + \gamma \cdot Z)}{\partial s} = \rho a_s \quad (1.5)$$

Ayrıca s yönüne dik olan n yönünde:

$$-\frac{\partial(p + \gamma \cdot Z)}{\partial n} = \rho a_n \quad (1.6)$$

Burada p basınç, a_s s yönündeki ivme bileşeni, a_n n yönündeki ivme bileşeni ve Z bir referans düzlemin üzerindeki yüksekliği temsil etmektedir.

Bir akım çizgisi boyunca, akım yönünü temsil eden s doğrultusu ile bu doğrultuya dik olan n doğrultusu tanımlansın. Normal yön, eğrilik merkezine doğru pozitif kabul edilmektedir. Bu çalışmada, özellikle n yönündeki basınç dağılımı incelenmektedir. Belirli bir kesitte, bir akım çizgisine ait normal ivme şu şekilde ifade edilir:

$$a_n = \frac{v^2}{r} \quad (1.7)$$

Bu denklemde v akım çizgisi boyunca olan hız, r ise eğrilik yarıçapıdır.

1.2.5.1 Hidrostatik Basınç Dağılımı

Hareket yok iken ($v = 0$) veya hidrolik yarıçap r sonsuza gittiğinde yani akım çizgileri düz olduğu zaman normal ivme a_n sıfır olacaktır.

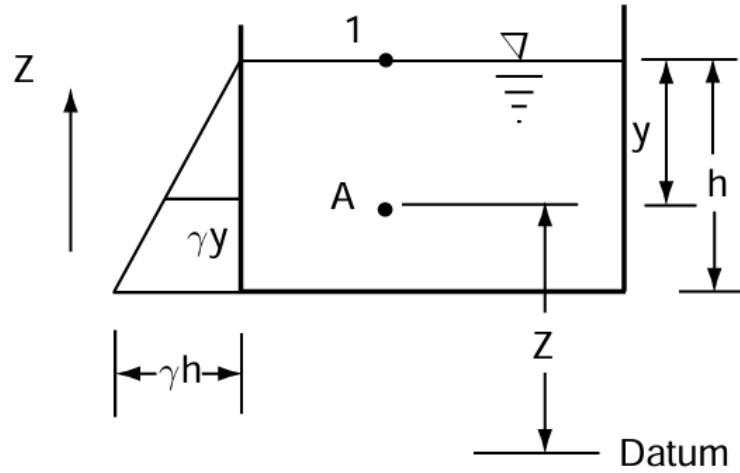
Hareketin olmadığı, yani akışkanın durgun olduğu bir durumu ele alalım. Denklem (1.6)'ya göre $a_n = 0$ olduğundan n yönünü Z doğrultusunda alıp entegrasyon yaparsak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\frac{p}{\gamma} + Z = \text{sabit} = C \quad (1.8)$$

Serbest yüzeyde, $p_1/\gamma = 0$ ve $Z = Z_1$ olduğundan, $C = Z_1$ elde edilir.

$$\frac{p_A}{\gamma} = (Z_1 - Z_A) = y, \quad p_A = \gamma y \quad (1.9)$$

Basıncın derinlikle doğrusal olarak değiştiği ve bu değişimde orantı katsayısının akışkanın birim hacim ağırlığına eşit olduğu durum, hidrostatik basınç dağılımı olarak tanımlanır.



Şekil 1.7: Durgun suda basınç dağılımı

1.3 Tedrici Değişken Akım Teorisi

Prizmatik bir kanalda, su yüzeyinin kademeli değişim gösterdiği kararlı ancak üniform olmayan akım, tedrici değişken akım (YDA) olarak tanımlanır. YDA koşullarında, akım hızı kanal boyunca değişiklik gösterdiğinden, yatak eğimi, su yüzeyi eğimi ve enerji eğimi birbirinden farklıdır. Bu tür akımların analizinde, hesaplamaların doğruluğunu sağlamak amacıyla yüksek eğrilik gösteren bölgeler genellikle dikkate alınmaz.

Tedrici Değişken Akım (YDA) analizinde, ilk temel varsayım hidrostatik basınç dağılımıdır. Bu varsayıma göre, kanal boyunca herhangi bir kesitte basınç dağılımı hidrostatik kabul edilir. Bunun temel nedeni, akımın su yüzeyinde kademeli değişiklikler göstermesi ve bu değişikliklerin yarattığı normal ivmelerin ihmal edilebilir büyüklükte olmasıdır. Böylece, hidrostatik basınç dağılımından meydana gelebilecek sapmalar da göz ardı edilebilir. YDA analizinde yüksek eğrilik içeren bölgelerin kapsam dışı bırakılması, bu varsayımın geçerliliğini sağlamak ve analizdeki doğruluğu korumak amacıyla gereklidir.

İkinci temel varsayım ise direnç denklemlerinin kullanımınıdır. Akıma karşı oluşan direnç, genellikle üniform akım koşulları için geliştirilmiş ampirik formüllerle, örneğin Manning denklemiyle ifade edilir. Ancak YDA analizinde, bu formülde kullanılan eğimin yatak eğimi değil, enerji eğimi (S_f) olması gerekir. Buna göre, herhangi bir kesitte akış derinliği y ise, enerji eğimi şu şekilde tanımlanır:

$$S_f = \frac{n^2 \cdot V^2}{R^{4/3}} \quad (1.10)$$

Burada n Manning pürüzlülük katsayısı, Q debi, A akım kesit alanı ve R ise hidrolik yarıçapı temsil eder. Bu ilişki, kanal boyunca değişen akım koşullarının analizinde temel bir bileşen olarak kullanılır.

1.3.2 Tedrici Değişken Akımın Diferansiyel Denklemi

Küçük eğimli bir kanalda dereceli değişen akışın toplam enerjisini (H) ve $\alpha = 1.0$ olduğu durumu şu şekilde ifade edelim:

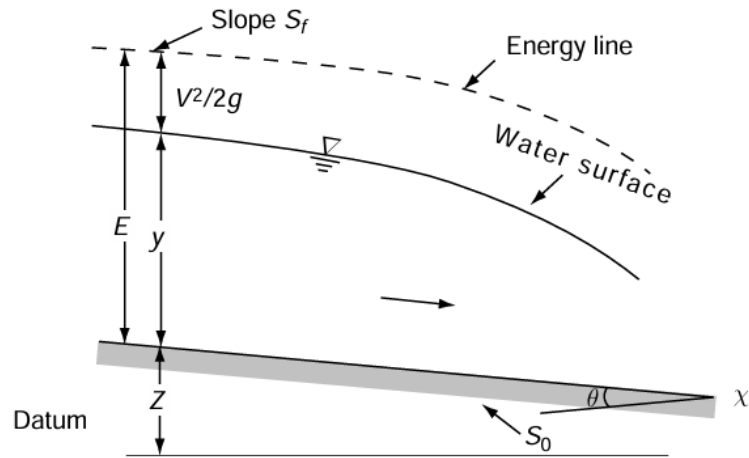
$$H = Z + E \equiv Z + \gamma + \frac{V^2}{2g} \quad (1.11)$$

Burada E, özgül enerji olarak tanımlanır.

Yavaş değişen bir akımın şematik bir tasviri Şekil 1.8'de gösterilmiştir. Genel olarak, su yüzeyi boyuna (x) doğrultuda değiştiği için, akım derinliği ve toplam enerji x'in birer fonksiyonudur. Denklem (1.11)'in x'e göre türevini alırsak

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dZ}{dx} + \frac{dE}{dx} \quad (1.12)$$

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dZ}{dx} + \frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx} \cdot \left(\frac{V^2}{2g} \right) \quad (1.13)$$



Şekil 1.8: YDA'nın şematik gösterimi

Denklem (1.13)'teki her terimin anlamı aşağıdaki gibidir: dH/dx , enerji eğimini temsil eder. Akışın toplam enerjisi her zaman hareket yönünde azaldığı için, azalan enerji çizgisinin eğiminin pozitif olarak alınması yaygındır. Bu eğimi S_f ile gösterirsek, şu şekilde ifade edilebilir.

$$\frac{dH}{dx} = -S_f \quad (1.14)$$

dZ/dx taban eğimini ifade eder. Kanal eğimi, akış yönünde kanal tabanının kotunun azalması durumunda pozitif kabul edilir. Bu eğim S_0 ile gösterilir ve şu şekilde ifade edilir:

$$\frac{dZ}{dx} = -S_0 \quad (1.15)$$

dy/dx kanal tabanına göre su yüzeyi eğimini temsil eder.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \cdot \left(\frac{V^2}{2g} \right) &= \frac{d}{dy} \cdot \left(\frac{Q^2}{2gA^2} \right) \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= -\frac{Q^2}{gA^3} \cdot \frac{dA}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

$dA/dy = T$ olduğundan,

$$\frac{d}{dx} \cdot \left(\frac{V^2}{2g} \right) = -\frac{Q^2 T}{gA^3} \cdot \frac{dy}{dx} \quad (1.16)$$

Denklem (1.14) artık şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$-S_f = -S_0 + \frac{dy}{dx} - \frac{Q^2 T}{gA^3} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Tekrardan düzenlersek:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - \frac{Q^2 T}{gA^3}} \quad (1.17)$$

Bu, YDA'nın temel diferansiyel denklemini oluşturur ve aynı zamanda YDA'nın dinamik denklemi olarak da bilinir. Kinetik enerji düzeltme faktörü α 'nın birden büyük bir değeri kullanılacaksa, Denklem (1.17) şu şekilde yazılır:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - \frac{\alpha Q^2 T}{gA^3}} \quad (1.18)$$

Denklem (1.17)'nin diğer biçimleri:

(a) Eğer K herhangi bir y derinliğindeki konveyansı ve K_0 normal derinlik y_0 'a karşılık gelen konveyansı ifade ediyorsa, o zaman:

$$K = Q / \sqrt{S_f} \quad (1.19a)$$

$$K_0 = Q / \sqrt{S_0} \quad (1.19b)$$

$$S_f / S_0 = K_0^2 / K^2 \quad (1.20)$$

Benzer şekilde, eğer Z , y derinliğindeki kesit faktörünü ve Z_c , y_c kritik derinliğindeki kesit faktörünü ifade ediyorsa:

$$Z^2 = A^3 / T$$

$$Z_c^2 = \frac{A_c^3}{T_c} = \frac{Q^2}{g}$$

Böylelikle,

$$\frac{Q^2 \cdot T}{gA^3} = \frac{Z_c^2}{Z^2} \quad (1.21)$$

Denklem (1.20) ve (1.21) kullanılarak, Denklem (1.17) artık şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= S_0 \frac{1 - \frac{S_f}{S_0}}{1 - \frac{\theta^2 T}{gA^3}} \\ &= S_0 \frac{1 - \left(\frac{K_0}{K}\right)^2}{1 - \left(\frac{Z_c}{Z}\right)^2} \end{aligned} \quad (1.22)$$

Bu denklem, doğrudan entegrasyon tekniklerinin geliştirilmesinde kullanışlıdır.

(b) Eğer Q_n , y derinliğindeki normal debiyi ve Q_c aynı y derinliğindeki kritik debiyi ifade ediyorsa:

$$Q_n = K\sqrt{S_0} \quad (1.23)$$

$$Q_c = Z\sqrt{g} \quad (1.24)$$

Bu tanımlar kullanılarak, Denklem (1.17) şu şekilde yazılabilir:

$$\frac{dy}{dx} = S_0 \frac{1 - (Q/Q_n)^2}{1 - (Q/Q_c)^2} \quad (1.25)$$

(c) Denklem (1.17)'nin bir başka biçimi olan Denklem (1.12) şu şekilde yazılabilir:

$$\frac{dE}{dx} = S_0 - S_f \quad (1.26)$$

Bu denklem, YDA'nın diferansiyel enerji denklemi olarak adlandırılır ve YDA diferansiyel denklemlerinden (Denklemler (1.17), (1.22) ve (1.25)) ayırt edilir. Bu enerji denklemi, YDA profil hesaplaması için sayısal tekniklerin geliştirilmesinde oldukça kullanışlıdır.

1.3.3 Akım Profillerinin Sınıflandırılması

Belirli bir kanalda Q , n ve S_0 sabit olduğunda y_0 ve y_c , sabit derinliklerdir. Ayrıca, y_0 ve y_c arasında üç olası ilişki vardır, $y_0 > y_c$, $y_0 < y_c$, $y_0 = y_c$ olabilir. Bunun yanı sıra, y_0 'ın olmadığı iki durum da mevcuttur. Bunlar ise kanal tabanının yatay olduğu ($S_0 = 0$) ve kanal ters eğimli olduğu durumlarıdır. Açıklandığı üzere Tablo 1.1'de gösterildiği gibi akım profilleri beş kategoriye ayrılmıştır.

Bu beş kanal kategorisinin her biri için, kritik derinliği ve (varsa) normal derinliği temsil eden çizgiler boyuna kesitte çizilebilir. Bu çizgiler, tüm akım alanını üç bölgeye ayıracaktır:

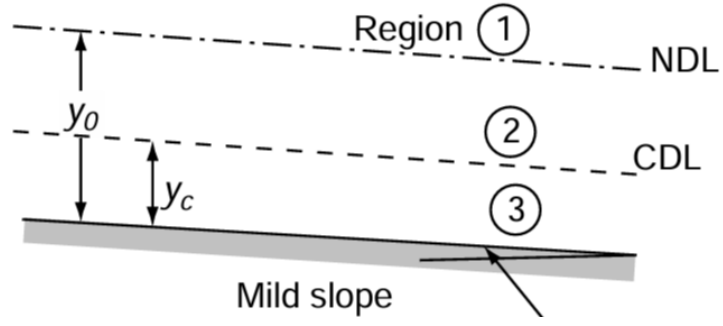
Bölge 1: En üst çizginin üzerindeki alan,

Bölge 2: Üst çizgi ile bir sonraki alt çizgi arasındaki alan,

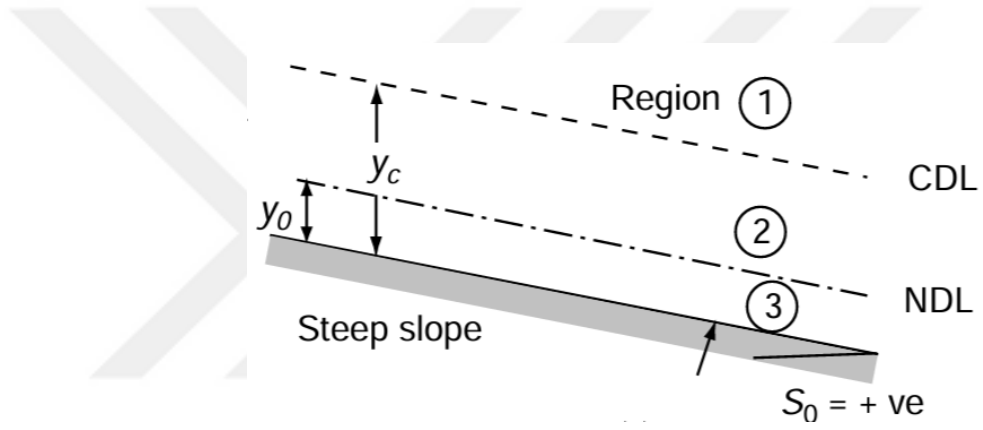
Bölge 3: İkinci çizgi ile taban arasındaki alan.

Tablo 1.1: Kanallarda oluşan su yüzü profillerinin isimlendirilmesi

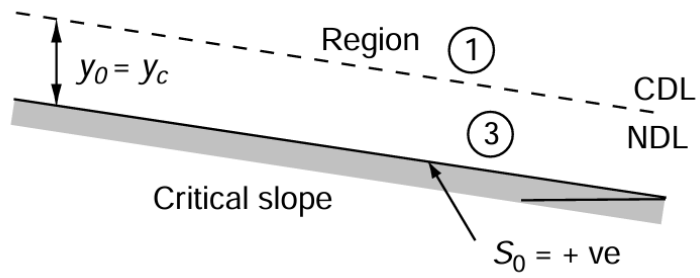
Sl. No	Channel category	Symbol	Characteristic condition	Remark
1	Mild slope	M	$y_0 > y_c$	Subcritical flow at normal depth
2	Steep slope	S	$y_c > y_0$	Supercritical flow at normal depth
3	Critical slope	C	$y_c = y_0$	Critical flow at normal depth
4	Horizontal bed	H	$S_0 = 0$	Cannot sustain uniform flow
5	Adverse slope	A	$S_0 < 0$	Cannot sustain uniform flow



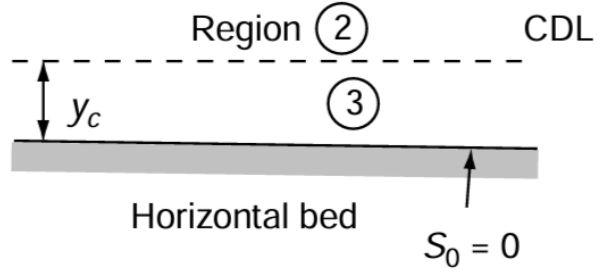
Şekil 1.9: Küçük eğimli kanal



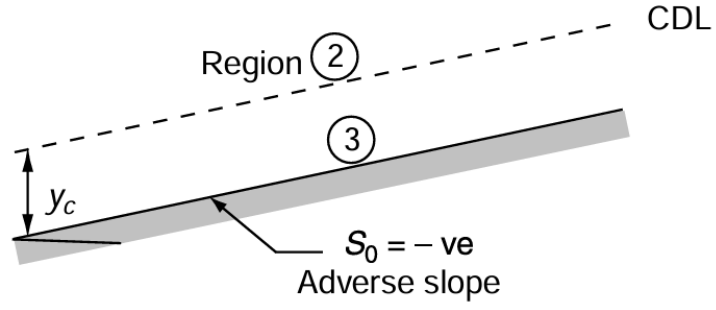
Şekil 1.10: Büyük eğimli kanal



Şekil 1.11: Kritik eğimli kanal



Şekil 1.12: Yatay eğimli kanal



Şekil 1.13: Ters eğimli kanal

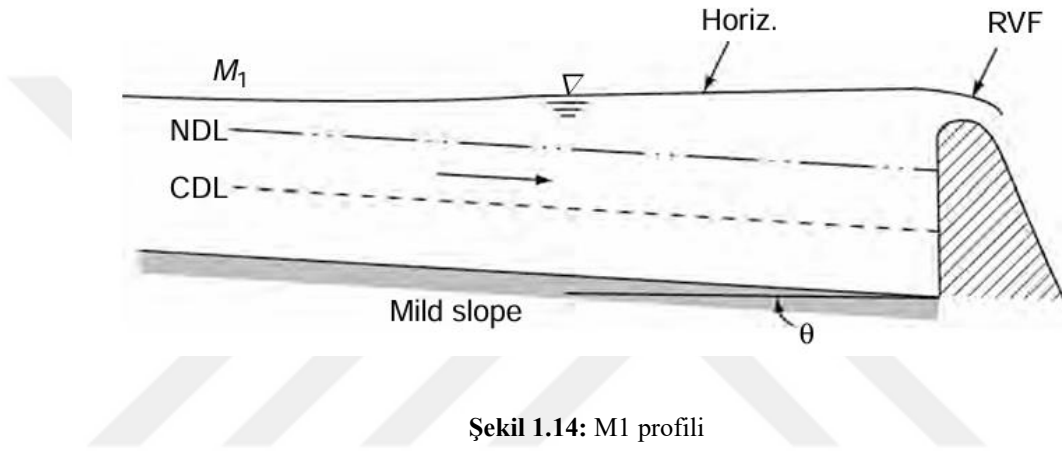
Tablo 1.1: YDA profil türleri

Channel	Region	Condition	Type
Mild slope	{1	$y > y_0 > y_c$	M_1
	2	$y_0 > y > y_c$	M_2
	3	$y_0 > y_c > y$	M_3
Steep slope	{1	$y > y_c > y_0$	S_1
	2	$y_c > y > y_0$	S_2
	3	$y_c > y_0 > y$	S_3
Critical slope	{1	$y > y_0 = y_c$	C_1
	3	$y < y_0 = y_c$	C_3
Horizontal bed	{2	$y > y_c$	H_2
	3	$y < y_c$	H_3
Adverse slope	{2	$y > y_c$	A_2
	3	$y < y_c$	A_3

1.3.4 Akım Profillerinin Bazı Özellikleri

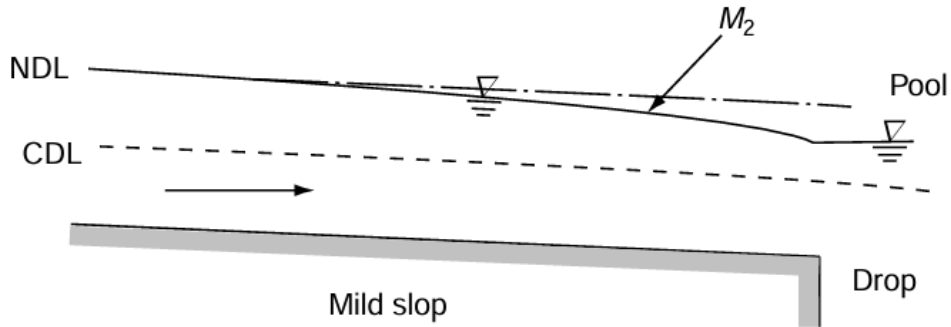
M tipi profiller;

YDA profilleri arasında en yaygın olanı, kritikaltı akım koşulunu temsil eden M_1 tipi profildir. Akışa engel oluşturan yapılar, örneğin savaklar, barajlar, kontrol yapıları ve doğal özellikler, örneğin kanal kıvrımları, M_1 kabarma eğrisini oluşturur (Şekil 1.14). Bu eğri, normal derinlik ile birleşmeden önce birkaç kilometre boyunca akışın yukarısına doğru uzanır.



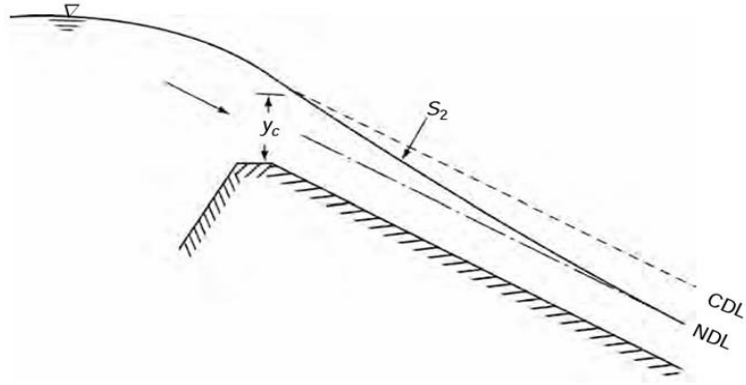
Şekil 1.14: M1 profili

M_2 profilleri, kanal tabanında ani bir düşüşün olduğu yerlerde, daralma tipindeki geçişlerde ve kanalların havuzlara boşaldığı çıkış noktalarında oluşur (Şekil 1.15).

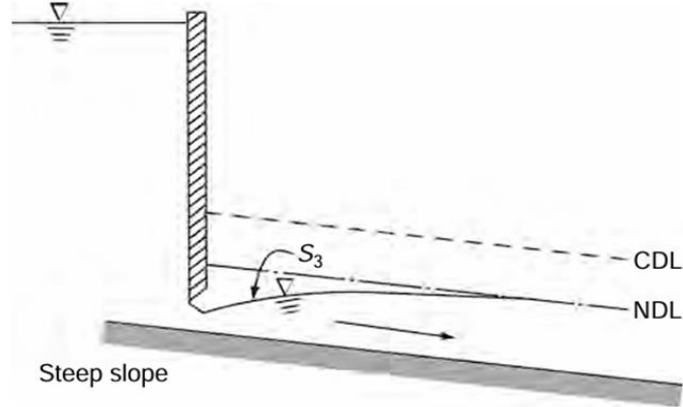


Şekil 1.15: M2 profili

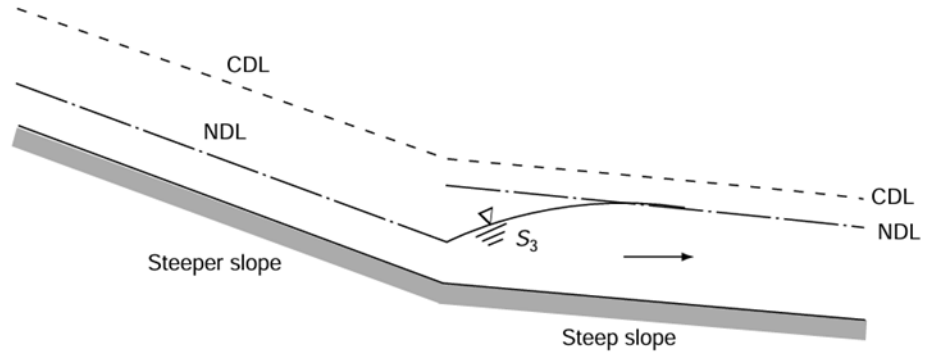
S_2 tipi profiller, bir rezervuardan çıkan dik bir kanalın giriş bölgesinde ve hafif eğimden dik eğime geçiş noktalarında oluşur (Şekil 1.18). Genellikle, S_2 profilleri kısa uzunluktadır. Dik bir eğime sahip bir sürgülü kapaktan serbest akış, S_3 tipi bir profile sahiptir (Şekil 1.19). S_3 eğrisi ayrıca daha dik bir eğimden daha az dik bir eğime geçen akış durumunda da meydana gelir (Şekil 1.20).



Şekil 1.18: S_2 profili



Şekil 1.19: S_3 profili



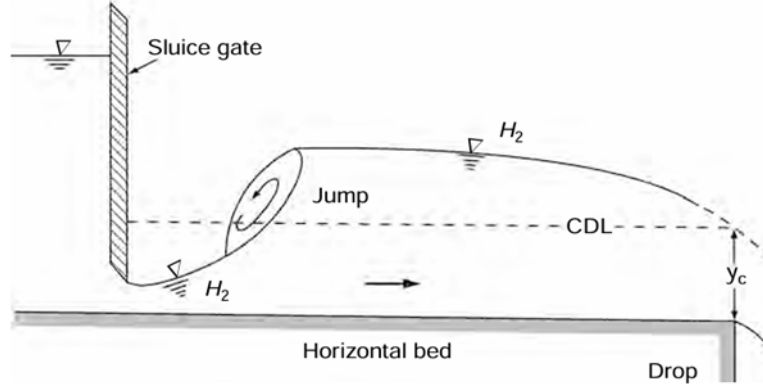
Şekil 1.20: S4 profili

C tipi profiller

C_1 ve C_3 profilleri çok nadir görülür ve oldukça kararsızdır.

D tipi profiller

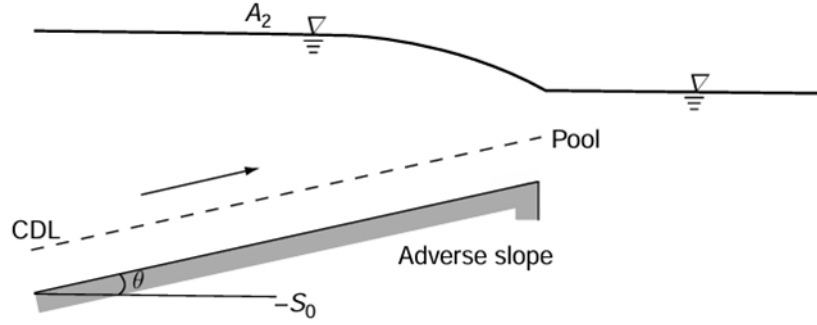
Yatay bir kanal, taban eğiminin düzleşmesiyle hafif eğimin ulaştığı alt sınır olarak kabul edilebilir. Yatay bir kanalda $y_0 = \infty$ olduğundan, bölge 1 mevcut değildir. H_2 ve H_3 profilleri sırasıyla M_2 ve M_3 profillerine benzerdir (Şekil 1.21). Ancak H_2 eğrisi yatay bir asimptota sahiptir.



Şekil 1.21: H2 ve H3 profilleri

A tipi profiller

Ters eğimler oldukça nadir görülür ve A_2 ve A_3 eğrileri sırasıyla H_2 ve H_3 eğrilerine benzer (Şekil 1.22). Bu profiller çok kısa uzunluktadır.



Şekil 1.22: A2 profili

1.3.5 Kontrol Kısımları

Kontrol kesiti, debi ve akış derinliği arasında sabit bir ilişkinin bulunduğu bir kesit olarak tanımlanır. Savaklar, taşkın savakları ve sürgü kapakları, kontrol kesitlerine yol açan tipik yapı örnekleridir. Kritik derinlik de bir kontrol noktasıdır. Ancak, etkili olduğu durum, akış profilinin kritik altı akıştan süperkritik akışa geçtiği durumdur. Süperkritik akıştan kritik altı akışa geçişin tersi bir durumda ise, kritik derinlik bir kontrol noktası olarak geçilerek genellikle bir hidrolik sıçrama oluşur. Herhangi bir YDA (tedrici değişken akış) profili en az bir kontrol kesitine sahip olacaktır.

1.3.6 Akış Profillerinin Analizi

Olası akış profillerinin belirlenmesi süreci, nicel hesaplamalara bir hazırlık olarak akış profilinin analizi olarak adlandırılır. Bu süreç, bir önceki bölümde tartışılan YDA profilleri ve kontrol kesitleri hakkındaki bilgilerin sentezinden oluşur. Kademeli değişen bir akışı taşıyan bir kanal genellikle farklı hidrolik özelliklere sahip çeşitli prizmatik kanal kesitlerini içerebilir. Farklı konumlarda birden fazla kontrol kesiti olabilir. Belirli bir durumda oluşan su yüzeyi profilini belirlemek için, seri halinde bağlanan farklı kanal kesitlerinin ve kontrollerinin etkilerini analiz edebilme yeteneğine sahip olunmalıdır.

2. LİTERATÜR TARAMASI

Su yüzeyi profilinin hesaplanması, açık kanal tasarımı ve doğal kanallardaki taşkın riskinin tahmini gibi hidroliğin kritik alanlarında önemli bir rol oynamaktadır. 1930 yılından itibaren bu konuda çok sayıda araştırma gerçekleştirilmiştir. Su yüzeyi profillerinin hesaplanmasında kullanılan yöntemler, genellikle enerji denklemine dayalı olarak geliştirilmiştir. Bu yöntemler, klasik yöntemler olarak adlandırılır ve su yüzeyi profil hesaplamalarında yaygın bir şekilde tercih edilir.

Chezy (1768), açık kanallardaki ortalama akış hızını tahmin etmek için kullanılan yarı deneysel bir direnç denklemidir. Bu formül, Paris'in su kanalı sisteminin tasarımı sırasında geliştirilmiştir. Chezy, bir kanalın akış özelliklerini diğer kanalların ölçümlerine dayanarak tahmin etmeye olanak tanıyan bir benzerlik parametresi keşfetmiştir. Chezy formülü, akışkanlar mekaniği alanında önemli bir katkı olarak, açık kanallardaki su akışını kanalın boyutları ve eğimiyle ilişkilendirir.

Manning (1890), Manning formülü, açık kanal akışını, yani sıvının tamamen dolmamış bir kanalda akış hızını tahmin etmeye yönelik ampirik bir yöntemdir. Ayrıca bu formül, serbest yüzeye sahip olan kısmen dolu kanallardaki akış koşullarını belirlemek ve akış değişkenlerini hesaplamak için de kullanılmaktadır.

Carl Runge ve Wilhelm Kutta (1900), Alman matematikçiler tarafından geliştirilen bu yöntem, Runge-Kutta yöntemi olarak bilinir ve elde edilen değerlerin birden fazla adımda kullanılmasıyla sonuçların daha doğru hale getirilmesini sağlar. Yöntemin formülasyonunda, bazı fonksiyonların Taylor serisi açılımı kullanılmakta olup, adlandırma ise Taylor serisinde yer alan en yüksek türev derecesine göre yapılmaktadır.

Wilson (1969), kademeli değişken akışın analizi için su yüzeyi eğimi ile akım derinliği arasında bir ilişki kurulmasının gerekli olduğunu vurgulamıştır. Çalışmasında, su yüzü profillerinin detaylı incelenmesinin önemine dikkat çekilmiş ve bu çerçevede prizmatik olmayan dikdörtgen kanal türleri üzerinde su yüzeyi profilleri araştırılmıştır.

Yao (1971), dikdörtgen kesitli kanallarda düzensiz akışlarla ilgili çalışmasında, kademeli değişken akış için su yüzeyi profilini belirlemeye yönelik bir tablo oluşturmuştur. Tabloyu kullanmak için gerekli olan temel değişken ise kritik derinliktir.

Fread ve Harbaugh (1971), kararlı kademeli değişken akışlar için su yüzü profillerini belirlemek amacıyla Newton-Raphson tekniğini temel alan bir çözüm yöntemi geliştirmişlerdir. Ayrıca, trapez kesitli kanallar için FORTRAN IV dilinde yazılmış bir bilgisayar programı da sunmuşlardır. Çalışma, Newton-Raphson yönteminin kademeli değişken akışlarda su yüzü profilinin belirlenmesinde etkili bir yaklaşım olduğunu ortaya koymuştur.

Hu (1980), USBR standartlarına uygun bir at nalı tüneli için su yüzü profili hesaplamaya yönelik bir yöntem geliştirmiştir. Çalışmada özel kesitlerin geometrik özellikleri detaylı olarak sunulmuş, hidrolik hesaplamalar tablo ve grafiklerle desteklenmiştir. Kullanılan yöntem, enerji denklemine dayalı doğrudan entegrasyon tekniğidir. Yazar, uygulama örnekleriyle yöntemin su yüzü profili belirlemede sağladığı pratikliği ve kolaylığı göstermiştir.

Molinas ve Yang (1985), enerji ve momentum denklemlerini kullanarak bir bilgisayar modeli geliştirmişlerdir. Bu model ile hidrolik sıçramalarda su yüzü profillerinin hesaplanabileceği ve kanal taban eğimi ne olursa olsun su yüzü profilinin belirlenebileceği belirtilmiştir. Kontrol kesitinin bir göl, savak kapak veya doğal akarsu olabileceği ifade edilmiştir. Çalışmada, su yüzü profilinin belirlenmesi çeşitli örnekler üzerinden detaylı şekilde ele alınmıştır.

Paine ve Drogin (1992), prizmatik kanallarda su yüzü profillerini belirlemek amacıyla yaygın bir yöntem olan standart adım yöntemini kullanan bir bilgisayar modeli geliştirmiştir. Newton-Raphson formunda tasarlanan algoritma, sel, nehir, kritik, ters ve yatay akış rejimleri için uygun bir yapıya sahiptir. Standart adım denklemlerinin sayısal çözümü, hızlı uygulama süreleri sağlamıştır. Geliştirilen bu yazılım, ilgililere ücretsiz olarak sunulmuştur.

Baril ve Drogin (1993), açık kanallarda veya borulardaki akışlar için, hesaplanmış sel ve nehir rejimlerinde su yüzü profilleri ile basınç gradyanlarını birleştiren iki modern bilgisayar programı geliştirmişlerdir.

Ilhan (1994), dikey eğrilikli kanallarda akışın analizi üzerine bir çalışma gerçekleştirmiştir. Bu çalışmada, serbest yüzeyli akışlar için sayısal bir çözüm yöntemi önerilmiştir. Su yüzü profili ve basınç dağılımı hesapları için iki farklı denklem sunulmuş ve bu denklemler Dressler (1978) tarafından elde edilen genelleştirilmiş sığ akım denklemleriyle karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma sonucunda, su yüzü profili hesabı için önerilen denklemin başarılı sonuçlar verdiği, ancak basınç dağılımı için önerilen denklemin doğru sonuçlar üretmediği belirtilmiştir.

Yazıcılar (1997), sık sık taşkın sorunları yaşayan Bartın Nehri üzerinde taşkın önleme önerileri geliştirmek amacıyla su yüzü profili hesaplamaları gerçekleştirmiştir. Bu hesaplamalar, ABD Mühendisler Birliği Hidroloji Mühendisliği Merkezi tarafından geliştirilen ve su yüzü profili hesaplamalarında yaygın olarak kullanılan HEC-RAS programı ile yapılmıştır. Çalışmada, bu programın doğal bir nehirdeki taşkın sorunlarına uygulanabilirliği değerlendirilmiş ve sonuçları tartışılmıştır.

Barutçular (1999), açık kanal akışlarında kademeli değişken akımın su yüzü profilini hesaplamak için daha önce geliştirilmiş yöntemlerden bazılarını kullanarak hesaplamalar gerçekleştirmiştir. Çeşitli durumlarda farklı yöntemler uygulayarak elde ettiği sonuçları karşılaştırmıştır. Sonuç olarak, sayısal integrasyon ve sonlu farklar yöntemlerinin genelde daha güvenilir olduğunu belirtmiştir.

Birsoy (2002), bileşik kanallarda su yüzü profili hesabı için bir bileşik kanal Froude sayısı tanımlamış ve bunu enerji ile momentum denklemleriyle birleştirmiştir. Hesaplamalar için C++ dilinde bir bilgisayar programı (CCWASP) geliştirmiştir. Geliştirilen programın doğruluğunu test etmek amacıyla laboratuvar ortamında M2 profili deneyleri gerçekleştirilmiştir. Sonuçlar karşılaştırıldığında, deney sonuçları ile program çözümlerinin birbirine yakın olduğu, ancak varsayımlardan dolayı kullanılan yöntemle daha yüksek su yüzü profilleri elde edildiği görülmüştür.

Demirel (2002), kademeli değişken akımın su yüzü profilini belirlemek için kullanılan birinci mertebeden diferansiyel denklemin doğrudan çözülememesi nedeniyle, yaklaşık yöntemlerle çözüm sırasında oluşan hata miktarlarını Euler yöntemiyle hesaplamış ve bu hataların %1'i aşmamasını sağlayarak bir bilgisayar programına entegre etmiştir. Geliştirilen bu programda prizmatik kanallar için Euler, Heun, Runge-Kutta, Doğrudan Adım, Standart Adım ve Grafik Entegrasyon gibi yöntemler uygulanmıştır.

Ponce ve Lohani (2002), kademeli değişken akım denklemine kritik eğim kavramını dahil ederek su yüzü profillerine yeni bir yaklaşım sunmuşlardır. Bu yaklaşımda, akım-derinlik gradyanının kritik eğim ile kanal taban eğimi arasında sınırlı olduğu belirtilmiştir. Bu yeni perspektifle, su yüzü profillerinin analizinde akım-derinlik gradyanı aralıklarını tanımlayan bir yöntem geliştirilmiştir.

Öztürkmen (2008), açık kanal akışında ani değişken akımın su yüzü profilini belirlemeyi amaçlamıştır. Çalışmada, sabit debi ve taban eğimi altında farklı eşik tipleri için su yüzü profilleri incelenmiştir. Deneyler, dikdörtgen kesitli ve kararlı akım koşullarında gerçekleştirilmiş ve çeşitli eşikler için su yüzü profilleri belirlenmiştir. Elde edilen su yüzü profilleri analiz edilerek eşiklerin su yüzü profiline olan etkileri araştırılmıştır.

Vatankhah (2011), trapez kesitli prizmatik bir açık kanal boyunca kademeli değişken akışın su yüzeyi profilini belirlemek amacıyla bir doğrudan entegrasyon yöntemi geliştirmiştir. Bu çözümün, akış profillerinin doğru bir şekilde hesaplanmasına olanak tanıdığı ve trapez kanalların analizi için uygun bir yöntem olduğu belirtilmiştir.

Kaçmaz, A. (2018), kademeli değişken akış koşullarında su yüzeyi profilini belirlemek amacıyla standart adım yönteminden yararlanmıştır. Denklemlerin çözümünü kolaylaştırmak için Newton-Raphson yöntemi uygulanmıştır. Trapez kesitli bir kanal için Visual Basic programlama dili kullanılarak bir yazılım geliştirilmiş ve elde edilen sonuçlar karşılaştırılarak analiz edilmiştir.

3. YAVAŞ DEĞİŞEN AKIMIN SAYISAL ANALİZİ

3.1 Runge-Kutta Yöntemleri

Sayısal analiz alanında, Runge–Kutta yöntemleri, eşzamanlı doğrusal olmayan denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için zamansal ayrıklaştırmada kullanılan, eksplisit ve implisit yinelemeli yöntemler ailesini ifade etmektedir. Bu yöntemler, Alman matematikçiler Carl Runge ve Wilhelm Kutta tarafından 1900'lü yıllarda geliştirilmiştir. Yöntem RK4 olarak da belirtilebilir.

Bir başlangıç değer problemi şu şekilde tanımlanabilir:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (3.1)$$

$$y(t_0) = y_0 \quad (3.2)$$

Burada y , zamanın (t) bir fonksiyonu olup (skaler ya da vektörel olabilir), yaklaşık olarak hesaplanması istenmektedir. (dy/dt) y 'nin değişim hızı olup, hem t hem de y 'nin bir fonksiyonu olarak tanımlanmıştır. Başlangıç anı t_0 'da, y 'nin değeri y_0 olarak verilmiştir. Fonksiyon f ve başlangıç koşulları t_0 ile y_0 bilinmektedir.

Şimdi, $h > 0$ olacak şekilde bir adım boyutu seçiyoruz ve şu şekilde tanımlıyoruz:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (3.3)$$

$$t_{n+1} = t_n + h \quad (3.4)$$

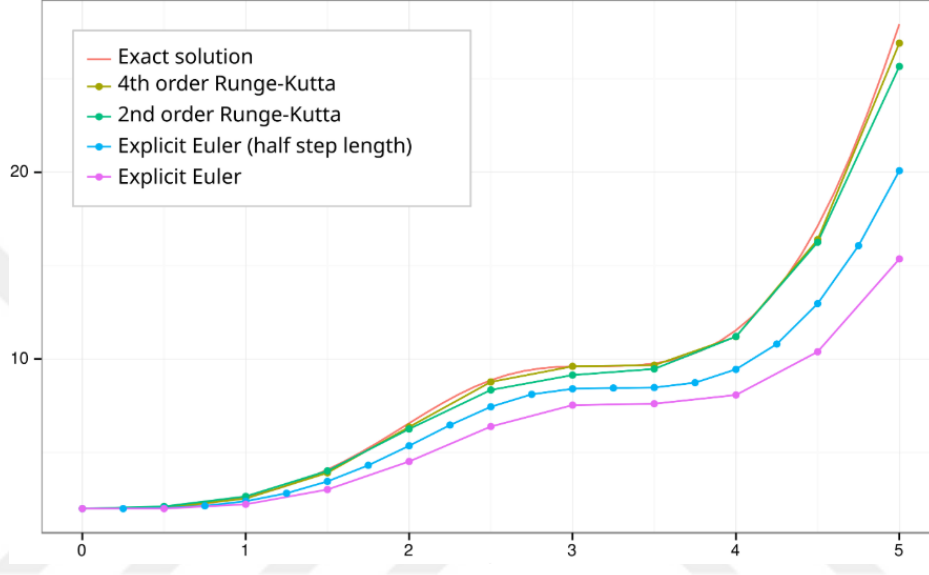
$n = 0, 1, 2, 3, \dots$ için şu şekilde kullanıyoruz:

$$k_1 = f(t_n, y_n) \quad (3.5)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h \frac{k_1}{2}\right) \quad (3.6)$$

Dört eğimin ortalamasında, orta noktadaki eğimlere daha fazla ağırlık verilir. Eğer f, y 'den bağımsız ise ve diferansiyel denklem basit bir integrale eşdeğer hale geliyorsa, o zaman RK4 yöntemi Simpson kuralına karşılık gelir.

RK4 yöntemi, dördüncü mertebeden bir yöntemdir; bu, yerel kesme hatasının $O(h^5)$ mertebesinde, toplam birikmiş hatanın ise $O(h^4)$ mertebesinde olduğu anlamına gelir.



Şekil 3.23: Runge-Kutta yöntemlerinin diferansiyel denklemlerle karşılaştırılması

3.2 Açık Runge-Kutta Yöntemleri

Açık Runge-Kutta yöntemleri, yukarıda bahsedilen RK4 yönteminin genelleştirilmiş halidir ve şu şekilde tanımlanır:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^8 b_i \cdot k_i \quad (3.9)$$

$$k_1 = f(t_n, y_n) \quad (3.10)$$

$$k_2 = f[t_n + c_2h, y_n + a_{21}k_1h] \quad (3.11)$$

$$k_3 = f[t_n + c_3h, y_n + (a_{31}k_1 + a_{32}k_2)h] \quad (3.12)$$

...

$$k_s = f[t_n + c_s h, y_n + (a_{s1}k_1 + a_{s2}k_2 + \dots + a_{s,s-1}k_{s-1})h] \quad (3.13)$$

Belirli bir yöntemi tanımlamak için s (aşamaların sayısı) tam sayısı ile birlikte a_{ij} ($1 \leq j < i \leq s$), b_i ($i = 1, 2, \dots, s$) ve c_i ($i = 2, 3, \dots, s$) katsayıları belirlenmelidir. $[a_{ij}]$ matrisi Runge-Kutta matrisi olarak adlandırılırken, b_i ve c_i sırasıyla ağırlıklar ve düğümler olarak bilinir. Bu veriler genellikle John C. Butcher'ın adıyla anılan bir hafıza yardımı düzenlemesi olan Butcher tablosu içinde sunulur.

0	
c_2	a_{21}
c_3	$a_{31} \quad a_{32}$
\vdots	$\vdots \quad \ddots$
c_s	$a_{s1} \quad a_{s2} \quad \dots \quad a_{s,s-1}$
	$b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_{s-1} \quad b_s$

Bir Taylor serisi açılımı, Runge-Kutta yönteminin yalnızca ve ancak şu durumda tutarlı olduğunu gösterir:

$$\sum_{i=1}^s b_i = 1 \quad (3.14)$$

Bir yöntemin belirli bir p mertebesine sahip olması yani yerel kesme hatasının $O(h^{p+1})$ olması istendiğinde, buna eşlik eden ek koşullar gereklidir. Bu koşullar, kesme hatasının tanımından türetilir. Örneğin, iki aşamalı bir yöntemin ikinci mertebeden olması için, $(b_1 + b_2 = 1)$, $(b_2.c_2 = 0.5)$, $(b_2.a_{21} = 0.5)$ koşulları sağlanmalıdır.

Dikkat edilmelidir ki, katsayıların belirlenmesi için yaygın olarak kullanılan bir koşul şudur ($i= 2,3,\dots,s$ için):

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = c_i \quad (3.15)$$

Ancak, bu koşul tek başına tutarlılık için ne yeterlidir ne de gereklidir. Genel olarak, eğer bir açık s aşamalı Runge-Kutta yöntemi p mertebesine sahipse, aşama sayısının ($s \geq p$) koşulunu sağlaması gerektiği kanıtlanabilir ve eğer ($p \geq 5$) ise bu durumda ($s \geq p + 1$) olması gerekir. Ancak, bu sınırların tüm durumlarda kesin olup olmadığı bilinmemektedir. Bazı durumlarda, bu sınırın sağlanamayacağı kanıtlanmıştır. Örneğin, Butcher, ($p > 6$) için ($s = p + 1$) aşamalı bir açık yöntem bulunmadığını kanıtlamıştır. Ayrıca, Butcher ($p > 7$) için ($s = p + 2$) aşamalı açık bir Runge-Kutta yönteminin bulunmadığını da göstermiştir. Bununla birlikte, genel olarak açık bir Runge-Kutta yönteminin p mertebesine sahip olması için gerekli minimum aşama sayısı s 'nin ne olduğu konusu hala bir problemdir. Bilinen bazı değerler şunlardır:

p	1	2	3	4	5	6	7	8
$\min s$	1	2	3	4	6	7	9	11

Yukarıdaki kanıtlanabilir sınır, ($p = 1, 2, \dots, 6$) mertebelerindeki yöntemler için, zaten bilinen yöntemlerden daha az aşama gerektiren bir yöntem bulunamayacağını göstermektedir. Butcher'in çalışması ayrıca 7. ve 8. mertebe yöntemlerinin sırasıyla en az 9 ve 11 aşamaya sahip olması gerektiğini kanıtlamıştır.

3.2.1 İki Aşamalı İkinci Dereceden Yöntemler

İki aşamalı bir ikinci dereceden yönteme örnek olarak açık orta nokta yöntemi verilebilir:

$$y_{n+1} = y_n + hf \cdot \left(t_n + \frac{1}{2}n, y_n + \frac{1}{2}hf(t_n, y_n) \right) \quad (3.16)$$

Bu yöntemin karşılık gelen tablo gösterimi şu şekildedir:

0	
1/2	1/2
	0 1

Orta nokta yöntemi, iki aşamalı ikinci dereceden Runge–Kutta yöntemlerinden yalnızca biridir. Bu tür yöntemler, bir parametre α ile ifade edilen bir aile oluşturur ve aşağıdaki formülle tanımlanır:

$$y_{n+1} = y_n + h \left(\left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) f(t_n, y_n) + \frac{1}{2\alpha} f(t_n + \alpha h, y_n + \alpha h f(t_n, y_n)) \right) \quad (3.17)$$

Bunun Butcher tablo gösterimi ise şu şekildedir:

0	0
α	α
	$\left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right), \frac{1}{2\alpha}$

Bu durumda,

$\alpha = 1/2$ değeri orta nokta yöntemini verir,

$\alpha = 1$ değeri Heun yöntemine,

$\alpha = 2/3$ ise Ralston yöntemini tanımlar.

3.2.2 Dördüncü Mertebeden Runge-Kutta Yöntemi

Genel olarak, s -mertebeden bir Runge–Kutta yöntemi şu şekilde ifade edilebilir:

$$y_{t+h} = y_t + h \cdot \sum_{i=1}^s a_i k_i + O(h^{s+1}) \quad (3.18)$$

burada:

$$k_i = \sum_{j=1}^s \beta_{ij} f(k_j, t_n + \alpha_i h) \quad (3.19)$$

İfadesi, y_t 'nin türevlerinin i . derecedeki artımlarını temsil eder.

Genel formül kullanılarak $s=4$ için Runge-Kutta dördüncü derece yönteminin türetimi, yukarıda açıklandığı gibi, herhangi bir $(t, t+h)$ aralığındaki başlangıç noktası, orta nokta ve son noktada değerlendirilerek geliştirilmiştir; bu nedenle şu seçimler yapılır:

α_i	β_{ij}
$\alpha_1 = 0$	$\beta_{21} = \frac{1}{2}$
$\alpha_2 = \frac{1}{2}$	$\beta_{32} = \frac{1}{2}$
$\alpha_3 = \frac{1}{2}$	$\beta_{43} = 1$
$\alpha_4 = 1$	

Ayrıca $\beta_{ij} = 0$ olacak şekilde, aşağıdaki değerleri açıklayarak başlanabilir:

$$y_{t+h}^1 = y_t + hf(y_t, t) \quad (3.20)$$

$$y_{t+h}^2 = y_t + hf\left(y_{t+h/2}^1, t + \frac{h}{2}\right) \quad (3.21)$$

$$y_{t+h}^3 = y_t + hf\left(y_{t+h/2}^2, t + \frac{h}{2}\right) \quad (3.22)$$

Burada $y_{t+h/2}^1 = \frac{y_t + y_{t+h}^1}{2}$ ve $y_{t+h/2}^2 = \frac{y_t + y_{t+h}^2}{2}$ olarak tanımlarsak:

$$k_1 = f(y_t, t) \quad (3.23)$$

$$k_2 = f\left(y_{t+h/2}^1, t + \frac{h}{2}\right) = f\left(y_t + \frac{h}{2}k_1, t + \frac{h}{2}\right) \quad (3.24)$$

$$k_3 = f\left(y_{t+h/2}^2, t + \frac{h}{2}\right) = f\left(y_t + \frac{h}{2}k_2, t + \frac{h}{2}\right) \quad (3.25)$$

$$k_4 = f(y_{t+h}^3, t + h) = f\left(y_t + hk_3, t + \frac{h}{2}\right) \quad (3.26)$$

Önceki bağıntılar için, aşağıdaki eşitliklerin $O(h^2)$ mertebesine kadar geçerli olduğunu gösterebiliriz:

$$\begin{aligned} k_2 &= f\left(y_{t+h/2}^1, t + \frac{h}{2}\right) = f\left(y_t + \frac{h}{2}k_1, t + \frac{h}{2}\right) \\ &= f(y_t, t) + \frac{h}{2} \frac{d}{dt} f(y_t, t) \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} k_3 &= f\left(y_{t+h/2}^2, t + \frac{h}{2}\right) = f\left(y_t + \frac{h}{2}f\left(y_t + \frac{h}{2}k_1, t + \frac{h}{2}\right), t + \frac{h}{2}\right) \\ &= f(y_t, t) + \frac{h}{2} \frac{d}{dt} \left[f(y_t, t) + \frac{h}{2} \frac{d}{dt} f(y_t, t) \right] \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} k_4 &= f(y_{t+h}^3, t + h) = f\left(y_t + hf\left(y_t + \frac{h}{2}k_2, t + \frac{h}{2}\right), t + h\right) \\ &= f\left(y_t + hf\left(y_t + \frac{h}{2}f\left(y_t + \frac{h}{2}f(y_t, t), t + \frac{h}{2}\right), t + \frac{h}{2}\right), t + h\right) \\ &= f(y_t, t) + h \frac{d}{dt} \left[f(y_t, t) + \frac{h}{2} \frac{d}{dt} \left[f(y_t, t) + \frac{h}{2} \frac{d}{dt} f(y_t, t) \right] \right] \end{aligned} \quad (3.29)$$

Burada, $f(y_t, t)$ 'nin zamana göre toplam türevi şu şekilde verilir:

$$\frac{d}{dt} f(y_t, t) = \frac{\partial}{\partial y} f(y_t, t) y_t' + \frac{\partial}{\partial t} f(y_t, t) = f_y(y_t, t) y_t' + f_t(y_t, t) := y_t'' \quad (3.30)$$

Elde edilen sonuçları kullanarak genel formülü şu şekilde ifade edebiliriz:

$$\begin{aligned}
y_{t+h} &= y_t + h \left\{ a \cdot f(y_t, t) + b \cdot \left[f(y_t, t) + \frac{h}{2} \frac{d}{dt} f(y_t, t) \right] \right. \\
&\quad + c \cdot \left[f(y_t, t) + \frac{h}{2} \frac{d}{dt} \left[f(y_t, t) + \frac{h}{2} \frac{d}{dt} f(y_t, t) \right] \right] \\
&\quad + d \cdot \left[f(y_t, t) + h \frac{d}{dt} \left[f(y_t, t) + \frac{h}{2} \frac{d}{dt} \left[f(y_t, t) + \frac{h}{2} \frac{d}{dt} f(y_t, t) \right] \right] \right] \left. \right\} \\
&\quad + O(h^5) \\
&= y_t + a \cdot hf_t + b \cdot hf_t + b \cdot \frac{h^2}{2} \frac{df_t}{dt} + c \cdot hf_t + c \cdot \frac{h^2}{2} \frac{df_t}{dt} + c \cdot \frac{h^3}{4} \frac{d^2 f_t}{dt^2} + d \cdot hf_t \\
&\quad + d \cdot h^2 \frac{df_t}{dt} + d \cdot \frac{h^3}{2} \frac{d^2 f_t}{dt^2} + d \cdot \frac{h^4}{4} \frac{d^3 f_t}{dt^3} + O(h^5) \tag{3.31}
\end{aligned}$$

Taylor serisini y_{t+h} için t ye bağlı olarak açarak şu ifadeyi elde ederiz:

$$\begin{aligned}
y_{t+h} &= y_t + hy'_t + \frac{h^2}{2} y''_t + \frac{h^3}{6} y_t^{(3)} + \frac{h^4}{24} y_t^{(4)} + O(h^5) \\
&= y_t + hf(y_t, t) + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{d}{dt} f(y_t, t) + \frac{h^3}{6} \cdot \frac{d^2}{dt^2} f(y_t, t) + \frac{h^4}{24} \cdot \frac{d^3}{dt^3} f(y_t, t) \tag{3.32}
\end{aligned}$$

Katsayılar üzerinden aşağıdaki cebir sistemini elde ederiz;

$$a + b + c + d = 1$$

$$\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c + d = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4}c + \frac{1}{2}d = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{4}d = \frac{1}{24}$$

Bu sistem çözüldüğünde aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$a = 1/6, b = 1/3, c = 1/3, d = 1/6.$$

3.3 Kapalı Runge-Kutta Yöntemleri

Şimdiye kadar bahsedilen tüm Runge–Kutta yöntemleri açık yöntemlerdir. Açık Runge–Kutta yöntemleri, bazı denklemlerin çözümü için uygun değildir, çünkü mutlak kararlılık bölgeleri küçüktür; özellikle de sınırlıdır. Bu durum, kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde özellikle önem taşımaktadır. Açık Runge-Kutta yöntemlerinin kararsızlığı, kapalı yöntemlerin geliştirilmesine yol açmıştır. Kapalı Runge-Kutta yöntemi şu forma sahiptir:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \cdot k_j \quad (3.33)$$

Burada ($i=1, \dots, s$) için:

$$k_i = f \left(t_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j \right) \quad (3.34)$$

Eksplisit bir yöntem ile implisit bir yöntem arasındaki fark, eksplisit bir yöntemde, j üzerindeki toplamın yalnızca $(i-1)$ 'e kadar gitmesidir. Bu durum, Butcher tablosunda da görülür. Açık bir yöntemin katsayı matrisi a_{ij} , alt üçgensel bir yapıya sahiptir. İmplicit bir yöntemde ise, j üzerindeki toplam s 'ye kadar gider ve katsayı matrisi üçgensel değildir. Bu durum, aşağıdaki formdaki bir Butcher tablosunu ortaya çıkarır.

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \dots & b_s \\ & b_1^* & b_2^* & \dots & b_s^* \end{array} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{b}^T} \bigg| \begin{array}{c} A \\ \end{array}$$

Bu farkın bir sonucu olarak, her adımda bir cebirsel denklemler sistemi çözümlenmesi gerekir. Bu durum hesap zorluğunu önemli ölçüde artırır. Eğer s aşamalı bir yöntem, m bileşenli bir diferansiyel denklemler için kullanılıyorsa, cebirsel denklemler sisteminin $(m \cdot s)$ bileşeni olacaktır. Bu durum, adi diferansiyel denklemler için kullanılan diğer büyük yöntem olan implisit doğrusal çok adımlı yöntemlerle karşılaştırılabilir: Bir implisit s adımlı doğrusal çok adımlı yöntem, yalnızca m bileşenli bir cebirsel denklemler sisteminin çözümlenmesini gerektirir, dolayısıyla sistemin boyutu adım sayısı arttıkça artmaz.



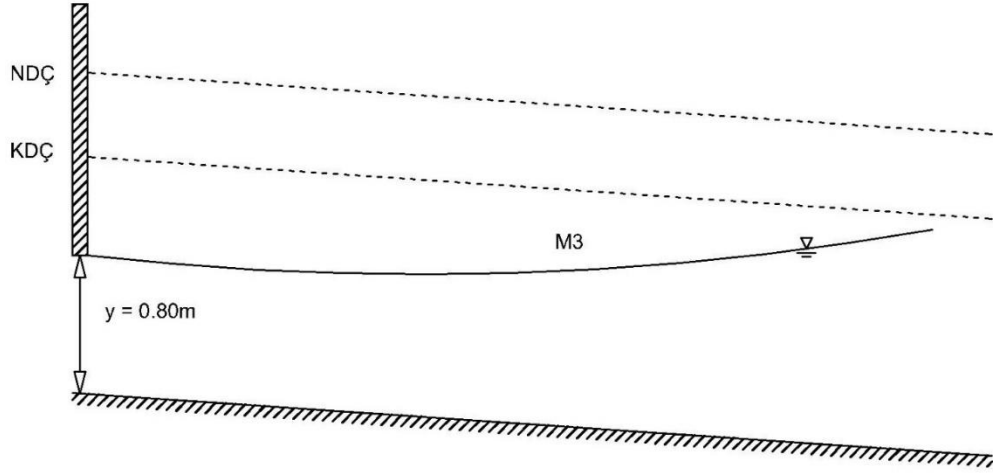
üretmiş ve bu durum, kapalı yöntemlerin görece doğruluk avantajını göstermektedir. Buna karşılık, Chaudhry (1993) çözümünde elde edilen toplam mutlak hatanın 25.14 gibi yüksek bir değere sahip olması, klasik yöntemlerle modern sayısal yaklaşımlar arasındaki duyarlılık farkını ortaya koymaktadır. Genel değerlendirme sonucunda, dördüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemlerinin, yavaş değişen akım problemlerinin çözümünde etkin, kararlı ve güvenilir sayısal araçlar sunduğu söylenebilir.

Tablo 4.1: Sayısal uygulama 1 için açık ve kapalı RK4 yöntemlerinin ve Chaudhry (1993) çözümünün karşılaştırılması

y (m)	x (m)			
	Açık RK4	Kapalı RK4	Chaudhry (1993)	Referans Çözüm (Acar 2020)
5.00	0.00	0.00	0.00	0.00
4.50	-500.41	-500.41	-500.50	-500.41
4.00	-1001.14	-1001.14	-1001.30	-1001.14
3.66	-1341.94	-1341.94	-1342.10	-1341.94
3.33	-1673.15	-1673.15	-1673.40	-1673.15
3.00	-2005.05	-2005.05	-2005.40	-2005.05
2.75	-2257.28	-2257.28	-2257.70	-2257.28
2.50	-2510.63	-2510.63	-2511.20	-2510.63
2.25	-2765.89	-2765.89	-2766.70	-2765.89
2.00	-3024.60	-3024.60	-3025.90	-3024.60
1.80	-3236.22	-3236.21	-3238.00	-3236.22
1.60	-3456.16	-3456.15	-3459.00	-3456.15
1.40	-3695.37	-3695.30	-3700.40	-3695.33
1.30	-3832.70	-3832.61	-3838.20	-3832.65
1.20	-4004.60	-4004.30	-4010.20	-4004.42
Toplam Mutlak Hata	0.29	0.23	25.14	

4.2 Sayısal Uygulama 2

Bir bent kapağı altında, trapez kesitli kanaldan $200 \text{ m}^3/\text{s}$ debi ile su iletilmektedir. Kanal taban eğimi 0.004, genişliği 20 metre ve şev eğimi 1/2 olarak verilmiştir. Bent kapağı altındaki su derinliği 0.8 m olarak bilinmektedir. Boy kesiti Şekil 4.1'de verilen kanalda Manning pürüzlülük katsayısını $n= 0.025$ ve hız düzeltme katsayısını $\alpha=1$ alarak kapağın mansap kısmında oluşacak su yüzü profilini belirleyiniz.



Şekil 4.2: Sayısal uygulama 2 için kanal boy kesiti (Acar 2020)

Tablo 4.2’de sunulan veriler, trapez kesitli bir kanalda $200 \text{ m}^3/\text{s}$ debi altında gerçekleşen nehir rejimi koşullarındaki akım için, farklı dördüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemleriyle elde edilen su yüzeyi profili sonuçlarının karşılaştırmalı analizini içermektedir. Yapılan hesaplamalar sonucunda kritik derinlik 2.02 m , normal derinlik ise 2.20 m olarak belirlenmiş ve akımın karakteristik özelliği doğrultusunda su yüzeyi profili M3 tipi olarak tanımlanmıştır. Açık ve kapalı RK4 yöntemleriyle hesaplanan boyuna mesafe değerleri, referans çözüm ile yüksek düzeyde uyum göstermektedir. Özellikle tüm yöntemlerle elde edilen sonuçların, 1.99 m derinliğe kadar olan aralıkta üç basamaklı duyarlılıkla çakıştığı gözlemlenmiştir. Bu durum, hem açık hem de kapalı Runge-Kutta yöntemlerinin sayısal doğruluğunun ve kararlılığının oldukça yüksek olduğunu ortaya koymaktadır. Toplam mutlak hata bakımından kapalı RK4 yöntemi 0.04 birimlik hata ile, açık RK4 yöntemine kıyasla (0.06) daha düşük hata üretmiş olup, bu durum kapalı yöntemlerin nümerik stabilite açısından görece üstünlüğüne işaret etmektedir. Genel olarak değerlendirildiğinde, dördüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemleri, M3 tipi su yüzeyi profillerinin hesaplanmasında son derece etkili ve güvenilir sayısal araçlar olarak öne çıkmaktadır.

Tablo 4.2: Sayısal uygulama 2 için kullanılan yöntemlerin karşılaştırılması

y (m)	x (m)		
	Açık RK4	Kapalı RK4	Referans Çözüm
0.8	0.00	0.00	0
0.87	9.98	9.98	9.98
0.93	18.67	18.67	18.67
1	28.93	28.93	28.93
1.06	37.82	37.82	37.82
1.12	46.77	46.77	46.77
1.19	57.25	57.25	57.25
1.25	66.26	66.26	66.26
1.31	75.26	75.26	75.26
1.37	84.21	84.21	84.21
1.43	93.10	93.10	93.1
1.5	103.33	103.33	103.33
1.56	111.92	111.92	111.92
1.63	121.65	121.65	121.65
1.69	129.66	129.66	129.66
1.76	138.45	138.45	138.45
1.84	147.43	147.43	147.43
1.99	158.46	158.49	158.48
Toplam Mutlak Hata	0.06	0.04	

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada, açık kanallarda meydana gelen YDA analizine yönelik olarak, su yüzeyi profillerinin çözümünde dördüncü mertebeden açık (eksplisit) ve kapalı (implicit) Runge-Kutta yöntemlerinin etkinliği incelenmiştir. Su yüzeyi diferansiyel denklemi esas alınarak, belirli su derinlikleri için boyuna mesafe (Δx) değerleri sayısal olarak hesaplanmıştır. Analizler, trapez kesitli prizmatik kanallar üzerinde tanımlanan iki farklı örnek problem üzerinden yürütülmüş ve elde edilen sonuçlar literatürdeki referans çözümlerle karşılaştırılmıştır.

Birinci uygulamada, düşük eğime sahip bir trapez kesitli kanalda M1 tipi akım profili gözlemlenmiş ve hem açık hem de kapalı RK4 yöntemleriyle elde edilen mesafe verileri Acar (2020) tarafından sunulan referans sonuçlarla yüksek düzeyde uyum göstermiştir. Kapalı RK4 yöntemi, 0.23 birimlik toplam mutlak hata ile açık yöntemle kıyasla daha düşük sapma üretmiş ve bu durum, implicit yöntemlerin doğruluk açısından üstünlüğünü ortaya koymuştur.

İkinci uygulamada ise yüksek debi ve eğim koşulları altında M3 tipi akım profili oluşmuştur. Her iki yöntemle elde edilen sonuçlar referans çözümle neredeyse tam çakışmış; özellikle kapalı RK4 yöntemi, sadece 0.04 birimlik toplam mutlak hata ile en düşük sapmayı sağlamıştır. Bu durum, yöntemin nümerik doğruluk ve kararlılık bakımından yüksek performans sergilediğini göstermektedir.

Genel değerlendirme sonucunda, dördüncü mertebeden açık ve kapalı Runge-Kutta yöntemlerinin, YDA sayısal çözümünde etkili, kararlı ve güvenilir araçlar olduğu ortaya konmuştur. Özellikle kapalı Runge-Kutta yöntemlerinin nümerik stabilite açısından daha avantajlı olduğu ve düşük eğimli kanallar dahil olmak üzere çeşitli hidrolik koşullarda başarılı sonuçlar üretebildiği görülmüştür. Bu bağlamda, Runge-Kutta tabanlı sayısal yaklaşımların açık kanal akımlarıyla ilgili mühendislik uygulamaları ve akademik çalışmalarda yaygın olarak kullanılabilir güçlü yöntemler olduğu sonucuna varılmıştır.

6. KAYNAKLAR

- Acar, E., "Prizmatik Kanallarda Yavaş Değişen Akımın Sayısal Analizi", Yüksek Lisans Tezi, Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Denizli, (2020).
- Baril, G. J. and Drogin, G., "Computational Hydraulics - The Systems Approach", *National Conference on Hydraulic Engineering*, 779–784, (1993).
- Barutçular, S., "Açık Kanallarda Yavaş Değişen Su Yüzeyi Profilleri Hesaplama Yöntemlerinin Karşılaştırmalı Değerlendirilmesi", Yüksek Lisans Tezi, Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Diyarbakır, (1999).
- Birsoy, O., "Water Surface Profiles in Compound Channels", Yüksek Lisans Tezi, Ortadoğu Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, (2002).
- Chaudhry, M. H., "Gradually Varied Flow", *Open-Channel Flow*, ABD: Springer Science, (1993).
- Chow, V. T., "Gradually Varied Flow", *Open Channel Hydraulics*, New York: McGraw-Hill Book Company, (1959).
- Das, M. M., "Gradually Varied Flow", *Open Channel Flow*, New Delhi: PHI Learning PVT LTD, (2008).
- Demirel, E., "Prizmatik Kanallarda T.D.A. Su Yüzü Profillerinin Bilgisayar Destekli Hesabı", Yüksek Lisans Tezi, Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, (2002).
- Fread, D. L. and Harbaugh, T. E., "Open Channel Profiles by Newton's Iteration Technique", *Journal of Hydrology*, 13, 70–80, (1971).
- Hu, W. W., "Water Surface Profile for Horseshoe Tunnel", *ASCE Transportation Engineering Journal*, 106(2), 133–139, (1980).
- Ilhan, M. H., "Computation of Flow Over Vertically Curved Channels", Yüksek Lisans Tezi, Ortadoğu Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, (1994).
- Kaçmaz, A., "Açık Kanal Su Yüzü Profil Hesabının Newton-Raphson ile Çözümü ve Bilgisayar Programı Geliştirilmesi", Yüksek Lisans Tezi, Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Diyarbakır, (2018).

- Karaboğa, N., Sayısal Yöntemler ve Matlab Uygulamaları, İstanbul: Nobel Akademik Yayıncılık, (2000).
- Kumar, A., *Proceedings of the ICE*, Sheffield: ICE, 435–452, (1979).
- Molinas, A. and Yang, C. T., “Generalized Water Surface Profile Computations”, *Journal of Hydraulic Engineering*, 111(3), 381–397, (1985).
- Öztürkmen, G., "Açık Kanallarda Su Yüzü Profillerinin Farklı Hidrolik Koşullar Altında Belirlenmesi", Yüksek Lisans Tezi, Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Diyarbakır, (2008).
- Paine, G. J. and Drogin, G., “Open-Channel Flow Algorithm in Newton-Raphson Form”, *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 118(2), 306–319, (1992).
- Ponce, V. M., Lohani, A. and Shetty, A. V., “New Perspective on Water-Surface Profiles Using Critical Slope”, Bachelor Thesis, San Diego State University, San Diego, (2002).
- Ünsal, İ., Değişken Akımların Hidroliği, İstanbul: Matbaa Teknisyenleri Basımevi, (1978).
- Vatankhah, A. R., “Direct Integration of Manning-based GVF Equation in Trapezoidal Channels”, *ASCE Journal of Hydraulic Division*, 22, 235–41, (2011).
- Wilson, E. H., "Surface Profiles in Non-Prismatic Rectangular Channels", *Water Power*, 21(11), 438-43, (1969).
- Yao, K. M., “Non-uniform Flow in Flat Rectangular Channels”, *ASCE Journal of Hydraulic Division*, 97, 1343–1348, (1971).
- Yazıcılar, F., "Water Surface Profile Computations in Floodplain Channels", Yüksek Lisans Tezi, Ortadoğu Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, (1997).
- Zaghloul Nabil, A. and Darwish, A. Y., “Solution of Gradually Varied Flow Problems Using The Direct Step Method with the IBM PC Lotus 1-2-3 System”, *Environmental Software*, 2(4), 199–206, (1987).