T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAUSS HİPER-FİBONACCİ VE GAUSS HİPER-LUCAS SAYILARI ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEVFİK KALAN

DENİZLİ, HAZİRAN - 2025

T.C.
PAMUKKALE ÜNIVERSITESI
FEN BILIMLERI ENSTITÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GAUSS HİPER-FİBONACCİ VE GAUSS HİPER-LUCAS SAYILARI ÜZERİNE

YÜKSEK LISANS TEZI

TEVFİK KALAN

DENİZLİ, HAZİRAN - 2025

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

TEVFİK KALAN

ÖZET

GAUSS HİPER-FİBONACCİ VE GAUSS HİPER-LUCAS SAYILARI ÜZERİNE
YÜKSEK LISANS TEZI
TEVFİK KALAN
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI:PROF DR. MUSTAFA AŞÇI)

DENİZLİ, HAZİRAN - 2025

Bu tez çalışması, dört ana bölümde yapılandırılmıştır. İlk bölümde, Fibonacci ve Lucas sayı dizileri ele alınmış; bu dizilere ilişkin Binet formülleri, üreteç fonksiyonları ve temel özellikler kapsamlı biçimde incelenmiştir. Ayrıca söz konusu sayıların polinomsal ifadeleri ile bu ifadelere ait belirli özellikler bu bölümde değerlendirilmektedir.

Ikinci bölümde, Gauss Fibonacci ve Gauss Lucas dizilerinin tanımları sunulmuş bu sayıların üreteç fonksiyonları, ilk terimlerinin toplamları ve cassini özdeşlikleri gibi yapısal özelliklerine odaklanılmıştır. Ek olarak, bu sayı dizilerinin polinomları ve bunların öne çıkan özellikleri de ayrıntılı biçimde ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde, Hiper-Fibonacci ve Hiper-Lucas dizileri üzerinde durulmuştur. Bu sayıların rekürans bağıntıları açıklanmış, klasik Fibonacci ve Lucas dizileri ile olan ilişkileri analiz edilmiştir. Ayrıca bu sayıların üreteç fonksiyonları incelenmiş ve ilgili polinomların temel karakteristik yapıları aktarılmıştır.

Son bölümde Gauss Hiper-Fibonacci ve Gauss Hiper-Lucas sayıları tanımlanmıştır. Bu sayıların üreteç fonksiyonları, bu sayıların birbirleri ile olan toplamları,farkları ile ilgili özellikler ve rekürans bağıntıları tanımlanmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Fibonacci Sayıları, Lucas Sayıları, Gauss Fibonacci Sayıları, Gauss Lucas Sayıları**,** Hiper Fibonacci Sayıları, Hiper Lucas Sayıları

ABSTRACT

ON THE GAUSS HYPER-FIBONACCI AND GAUSS HYPER-LUCAS NUMBERS
MSC THESIS
TEVFİK KALAN
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS

(SUPERVISOR:PROF. DR. MUSTAFA AŞÇI)

DENİZLİ, JUNE 2025

This thesis is structured in four main chapters. In the first chapter, Fibonacci and Lucas number sequences are discussed and Binet formulas, generator functions and basic properties of these sequences are analyzed comprehensively. In addition, polynomial expressions of these numbers and certain properties of these expressions are evaluated in this section.

In the second part, the definitions of Gauss Fibonacci and Gauss Lucas sequences are presented, focusing on structural properties of these numbers such as generating functions, sums of their first terms and Cassini identities. In addition, the polynomials of these sequences of numbers and their prominent properties are discussed in detail.

In the third chapter, we focus on the Hyper-Fibonacci and Hyper-Lucas sequences. The recurrence relations of these numbers are explained and their relations with the classical Fibonacci and Lucas sequences are analyzed. Moreover, the generating functions of these numbers are analyzed and the basic characteristic structures of the related polynomials are presented.

In the last section, Gauss Hyper-Fibonacci and Gauss Hyper-Lucas numbers are defined. The generating functions of these numbers, the properties of the sums and differences of these numbers with each other and the recurrence relations are defined.

KEYWORDS: Fibonacci Numbers, Lucas Numbers, Gauss Fibonacci Numbers, Gauss Lucas Numbers, Hyper Fibonacci Numbers, Hyper Lucas Numbers

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TABLO LİSTESİ

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\boldsymbol{F_n}$	:	n. Fibonacci dizisi
$\boldsymbol{L_n}$	:	n. Lucas dizisi
$\boldsymbol{F_n(x)}$	:	n. Fibonacci dizisi polinomu
$\boldsymbol{L_n(x)}$	:	n. Lucas dizisi polinomu
$\boldsymbol{GF_n}$	:	n. Gauss Fibonacci sayısı
$\boldsymbol{GL_n}$	:	n. Gauss Lucas sayısı
$\boldsymbol{GF_n(x)}$	:	n. Gauss Fibonacci sayısı polinomu
$\boldsymbol{GL_n(x)}$	:	n. Gauss Lucas sayısı polinomu
$\boldsymbol{F_n^{(r)}}$	:	Hiper-Fibonacci sayısı
$\boldsymbol{L_n^{(r)}}$	:	Hiper-Lucas sayısı
$\boldsymbol{F_n^{(r)}(x)}$	:	Hiper-Fibonacci sayısı polinomu
$\boldsymbol{L_n^{(r)}(x)}$	:	Hiper-Lucas sayısı polinomu
$\boldsymbol{GF_n^{(r)}}$	:	Gauss Hiper-Fibonacci sayısı
$\boldsymbol{GL_n^{(r)}}$	:	Gauss Hiper-Lucas sayısı

ÖNSÖZ

Tez çalışmam süresince bilgi birikimi ve değerli yönlendirmeleriyle bana rehberlik eden, samimi yaklaşımı ve akademik desteğiyle yanımda olan kıymetli danışmanım Prof. Dr. Mustafa AŞÇI'ya en içten şükranlarımı sunarım.

Ayrıca, araştırmalarım sırasında gösterdiği yardımseverlik ve özellikle literatür tarama sürecinde sağladığı katkılarla tez çalışmama destek olan değerli arkadaşım Melisa ÖZÇELİK'e teşekkür ederim.

Manevi desteğini esirgemeyen sevgili kardeşim Buğra KALAN'a ve eğitim hayatım boyunca her daim yanımda olan, maddi manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen sevgili annem Sevinç KALAN'a ve babam Mehmet KALAN'a minnettarım.

1. GİRİŞ

Fibonacci ve Lucas dizileri, matematiksel anlamda en önemli sayı dizilerinden ikisi olup, pek çok farklı özelliğe ve bu özelliklerin bir sonucu olarak çeşitli genelleştirmelere sahiptir. Bu genelleştirmelerden biride kompleks sayılar kümesine yönelik olarak geliştirilmiştir. Söz konusu genellemeler yeni problemlerin ortaya konmasında ve bazı özel yapıların keşfedilmesinde matematik dünyasına önemli katkılar sağlamıştır.

Fibonacci dizisinde ardışık iki terimin oranı, altın oran olarak bilinen özel bir sayıya karşılık gelir. Bu oran ve Fibonacci dizisi yalnızca günümüzde değil, antik dönemlerden bu yana mimari, biyoloji, güzel sanatlar ve fizik gibi birçok alanda uygulama alanı bulmuştur.

Fibonacci ve Lucas dizileri arasındaki ilişki, bu dizilere ait pek çok özdeşliğin keşfedilmesini sağlamıştır. A.F. Horadam, Fibonacci sayılarını kompleks sayılar düzlemine taşıyarak, bu dizilerle ilgili çeşitli özellik ve özdeşlikleri Gauss Fibonacci sayılar için yeniden tanımlamıştır.

Hiper-Fibonacci ve Hiper-Lucas dizileri ise Dil ve Mezö (2008) tarafından tanıtılmış ve literatüre kazandırılmıştır.

Bu tez çalışmasında ise Gauss Fibonacci ve Gauss Lucas dizileri temel alınarak, Gauss Hiper-Fibonacci ve Gauss Hiper-Lucas sayı dizileri tanımlanmış; bu dizilere ait çeşitli özellikler detaylı biçimde ele alınmıştır.

1.1 Temel Tanım ve Teoremler

Bölümde, diğer bölümlerde kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 1.1.1 $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots a_n, \dots$ sonsuz bir dizi olarak verilsin. $k \in \mathbb{N}$ ve $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}^{\boldsymbol{k}}$ bir fonksiyon tanımlansın. Başlangıç değerleri $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots a_{k-1}$ ve $\forall\, n \geq k$ için;

$$a_n = f(n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, a_{n-4}, a_{n-5}, \dots, a_{n-k})$$

fonksiyonuna k. dereceden rekürans bağıntısı denir (Koshy 2001).

Tanım 1.1.2 a_n bir sonsuz dizi, $k \in \mathbb{N}$ sabit katsayı, $f_0, f_1, f_2, f_3, \dots, f_k$ ℕ' den ℝ' ye tanımlı bir fonksiyon olsun ve $f_k(n) \neq 0$ olmak üzere $\forall\, n \geq k$ için;

$$a_n = f_1(n)a_{n-1} + f_2(n)a_{n-2} + f_3(n)a_{n-3} + \cdots + f_k(n)a_{n-k} + f_0(n)a_n$$

şeklindeki rekürans bağıntısına k. mertebeden lineer indirgeme bağıntısı denir (Koshy 2001).

Eğer $f_1, f_2, f_3, \dots, f_k$ fonksiyonları $f_i(n) = b_i$; $(1 \leq i < k)$ şeklinde sabit fonksiyonlar ise bağıntı şu hale gelir:

$$a_n = b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} + b_3 a_{n-3} + \cdots b_k a_{n-k} + f_0(n)$$

ve bu tür bağıntıya sabit katsayılı rekürans bağıntısı denir.

Eğer $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_0(n) = 0$ ise

$$a_n = f_1(n)a_{n-1} + f_2(n)a_{n-2} + f_3(n)a_{n-3} + \cdots + f_k(n)a_{n-k}$$

rekürans bağıntısına homojen rekürans bağıntısı denir.

Teorem 1.1.1 $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ rekürans bağıntısı olsun. Bu şekildeki rekürans bağıntısının karakteristik denklemi;

$$r^2 = c_1 r + c_2 = 0$$

kökleri α ve β olmak üzere bu denklemin genel çözümü

$$a_n = c\alpha^n + d\beta^n \text{ dir (Koshy 2001).}$$

1.2 Fibonacci Ve Lucas Sayıları

Tanım 1.2.1 $F_0 = 0, F_1 = 1$ ve $n \geq 0$ için geçerli olmak üzere Fibonacci dizisi;

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$$

bağıntısı ile tanımlanır (Koshy 2001).

Tablo 1.2.1 Fibonacci Sayılarının Bazı Terimleri

n	0	1	2	3	4	5	6	7	...
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	...

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$$

Rekürans bağıntısını kullanarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$$

Bu eşitlikten yararlanılarak negatif indisli Fibonacci sayı dizisi oluşturabilir.

Örneğin :

$$F_{-1} = F_1 - F_0 = 1$$
$$F_{-2} = F_0 - F_{-1} = -1$$
$$F_{-3} = F_{-1} - F_{-2} = 2$$

Tanım 1.2.2 Negatif inidisli Fibonacci sayılarını ifade eden genel formül şu şekildedir:

$F_{\mathbf{0}} = 0$, $F_1 = 1$ başlangıç koşullarıyla ve $n \geq 0$ için geçerli olmak üzere;

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$$

olarak verilir (Koshy 2001).

Tanım 1.2.3 $L_0 = 2, L_1 = 1$ ve $n \geq 2$ olmak üzere Lucas dizisi;

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

bağıntısı ile tanımlanır (Koshy 2001).

Tablo 1.2.2 Lucas Sayılarının Bazı Terimleri

n	0	1	2	3	4	5	6	7	...
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	...

$$L_{n+2} = L_n + L_{n+1}$$

Rekürans bağıntısını kullanarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$L_n = L_{n+2} - L_{n+1}$$

Bu eşitlikten yararlanılarak negatif indisli Lucas sayı dizisi oluşturabilir.

Örneğin:

$$L_{-1} = L_1 - L_0 = -1$$
$$L_{-2} = L_0 - L_{-1} = 3$$
$$L_{-3} = L_{-1} - L_{-2} = -4$$

Tanım 1.2.4 Negatif inidisli Lucas sayılarını ifade eden genel formül şu şekildedir:

$L_0 = 2$, $L_1 = 1$ başlangıç koşullarıyla ve $n \geq 0$ için geçerli olmak üzere;

$$L_{-n} = (-1)^n L_n$$

olarak verilir (Koshy 2001).

Teorem 1.2.1 Fibonacci Ve Lucas Sayıları İçin Binet Formülleri

F_n Fibonacci dizisi

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

rekürans bağıntısına sahiptir. Bu bağıntıya ait karakteristik denklem:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

şeklindedir. Bu denklemin kökleri:

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

olarak bulunur. Burada α altın oran ve β gümüş oran olarak ifade edilir.

i) Fibonacci sayısının binet formülü :

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

ii) Lucas sayısının binet formülü :

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

böyledir (Koshy 2001).

İspat

i) $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ bu bağıntının karakteristik denklemi,

$$x^2 - x - 1 = 0$$

dir.

Denklemin kökleri

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

şeklindedir. Denklemin genel çözümü;

$$F_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

şeklinde olacaktır. Ve buradan $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ve $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ bulunur. Buradan hareketle Fibonacci dizisi için Binet formülü:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

dir.

O halde

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \; ve \; \alpha - \beta = \sqrt{5}$$

olduğundan

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

elde edilir.

ii) $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ bu bağıntının karakteristik denklemi,

$$x^2 - x - 1 = 0$$

dir.

Denklemin kökleri

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

şeklindedir. Denklemin genel çözümü:

$$L_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

şeklinde olacaktır.Ve buradan $c_1 = 1$ ve $c_2 = 1$ bulunur. O halde bu dizi için Binet formülü

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

şeklinde olacaktır. Buradan

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

elde edilir.

Teorem 1.2.2 Fibonacci Sayı Dizisi İçin Üreteç Fonksiyonu

$F_0 = 0, F_1 = 1$ başlangıç koşulları ve $n \geq 2$ olmak üzere;

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Fibonacci sayısının elemanlarını üreten üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

şeklindedir (Koshy 2001).

İspat Fibonacci sayı dizisinin üreteç fonksiyonu

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n \\
&= F_1 x + F_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} F_n x^n \\
&= F_1 x + F_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (F_{n-1} + F_{n-2}) x^n \\
&= F_1 x + F_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} F_{n-1} x^n + \sum_{n=3}^{\infty} F_{n-2} x^n \\
&= x + x^2 + x \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n + x^2 \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n \\
&= x + x^2 + x\left(\sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n - x\right) + x^2 \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n \\
&= x + x^2 + x(g(x) - x) + x^2 g(x) \\
&= x + x^2 + xg(x) - x^2 + x^2 g(x)
\end{aligned}
$$

Bu eşitlik için düzenleme yapılırsa

$$g(x)(1 - x - x^2) = x$$

olur ve

$$g(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

elde ederiz.

Teorem 1.2.3 Lucas Sayı Dizisi İçin Üreteç Fonksiyonu

Lucas dizisi $L_0 = 2, L_1 = 1$ başlangıç koşullarıyla ve $n \geq 2$ olmak üzere;

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

Lucas sayısının elemanlarını üreten üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \frac{2 - x}{1 - x - x^2}$$

(Koshy 2001).

Teorem 1.2.4 $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda

$$Q = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix} \text{ ve } Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} \text{ dir (Koshy 2001).}$$

Teorem 1.2.5

i) Fibonacci dizisinin Cassini özdeşliği :

$$F_{n+1}F_{n-1} - (F_n)^2 = (-1)^n$$

ii) Lucas dizisinin Cassini özdeşliği :

$$L_{n+1}L_{n-1} - (F_n)^2 = 5(-1)^{n+1}$$

(Koshy 2001).

İspat

i) İspatını tümevarım ile gösterelim. $n = 1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} F_2F_0 - (F_1)^2 &= (-1)^1 \\ &= 1.0 - 1 = -1 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Şimdi de $n = k$ için $F_{n+1}F_{n-1} - (F_n)^2 = (-1)^n$doğru kabul edip

$n = k + 1$ olduğunda eşitliğe bakalım.

$F_{k+2}F_k - (F_{k+1})^2 = (-1)^{k+1}$doğruluğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} &= (F_{k+1} - F_{k-1})(F_k + F_{k+1}) - (F_{k+1})^2 \\ &= F_{k+1}F_k + (F_{k+1})^2 - F_{k-1}F_k - F_{k-1}F_{k+1} - (F_{k+1})^2 \\ &= F_{k+1}F_k - F_{k-1}F_k - (F_k)^2 - (-1)^{k+1} \\ &= F_{k+1}F_k - F_k(F_{k-1} + F_k) + (-1)^{k+1} \\ &= F_{k+1}F_k - F_{k+1}F_k + (-1)^{k+1} \\ &= (-1)^{k+1} \end{aligned}$$

olduğu görülür.

ii) İspatını tümevarım ile gösterelim. $n = 1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} L_2L_0 - (L_1)^2 &= 5(-1)^2 \\ &= 3.2 - 1 = 5 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Şimdi de $n = k$ için $L_{k+1}L_{k-1} - (L_k)^2 = 5(-1)^{k+1}$doğru kabul edip

$n = k + 1$ için

$L_{k+2}L_k - (L_{k+1})^2 = (-1)^{k+2}$ doğruluğunu gösterelim.

$$= (L_{k+1}-L_{k-1})(L_k + L_{k+1}) - (L_{k+1})^2$$

$$= L_{k+1}L_k + (L_{k+1})^2 - L_{k-1}L_k - L_{k-1}L_{k+1} - (L_{k+1})^2$$

$$= L_{k+1}L_k - L_{k-1}L_k - (L_k)^2 - 5(-1)^{k+2}$$

$$= L_{k+1}L_k - L_k(L_{k-1} + L_k) + 5(-1)^{k+2}$$

$$= L_{k+1}L_k - L_{k+1}L_k + 5(-1)^{k+2}$$

$$= 5(-1)^{k+2}$$

olduğu görülür.

Teorem 1.2.6 Fibonacci ve Lucas dizileri için bazı özellikler aşağıda verilmiştir.

i) $n \geq 1$ için $F_{n-1} + F_{n+1} = L_n$

ii) $L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$

iii) $F_{2n} = F_nL_n$

iv) $(F_n)^2 + (F_{n-1})^2 = F_{2n-1}$

v) $(L_n)^2 + (L_{n-1})^2 = 5F_{2n-1}$

1.3 Fibonacci Ve Lucas Polinomları

Tanım 1.3.1 : $F_n(x)$ Fibonacci polinomu için

$n \geq 0$ ve başlangıç koşulları $F_0(x) = 0$ ve $F_1(x) = 1$ olmak üzere,

$$F_{n+2}(x) = xF_{n+1}(x) + F_n(x)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır (Koshy 2001).

Tablo 1.3.1 Fibonacci Polinomlarının Bazı Terimleri

n	0	1	2	3	4	5
$F_n(x)$	0	1	x	x^2+1	x^3+2x	...

Tanım 1.3.2 $L_n(x)$ Lucas polinomu için

$n \geq 0$ olmak üzere $L_0(x) = 2$ ve $L_1(x) = x$ başlangıç koşulları için

$$L_{n+2}(x) = xL_{n+1}(x) + L_n(x)$$

bağıntısı ile tanımlanır (Koshy 2001).

Tablo 1.3.2 Lucas Polinomlarının Bazı Terimleri

n	0	1	2	3	4	5
$L_n(x)$	2	x	x^2+2	x^3+3x	x^4+4x^2 $+2$	...

Tanım 1.3.3 $n \geq 0$ ve başlangıç koşulları $F_0(x) = 0$ ve $F_1(x) = 1$ olmak üzere,

Fibonacci polinomunun üreteç fonksiyonu aşağıdaki şekildedir (Koshy 2001).

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)t^n = \frac{1}{1 - xt - t^2}$$

Tanım 1.3.4 $n \geq 0$ ve $L_0(x) = 2$, $L_1(x) = x$ için,

Lucas polinomunun üreteç fonksiyonu aşağıdaki şekildedir (Koshy 2001).

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n = \frac{2 - xt}{1 - xt - t^2}$$

Tanım 1.3.5 $F_n(x)$ Fibonacci polinomu için Binet formülü aşağıdaki gibidir.

Fibonacci polinomunun karakteristik denkleminin kökleri

$$\alpha(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

ve

$$\beta(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

dir.

Bu durumda Fibonacci polinomunun Binet formülü

$$F_n(x) = \frac{\alpha(x)^n - \beta(x)^n}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

dir (Koshy 2001).

Tanım 1.3.6 $L_n(x)$ Lucas polinomu için Binet formülü aşağıdaki gibidir:

$$\alpha(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

ve

$$\beta(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

$L_n(x)$ Lucas polinomu için karakteristik denkleminin kökleridir. $L_n(x)$ Lucas polinomunun Binet formülü

$$L_n(x) = \alpha(x)^n + \beta(x)^n$$

dir (Koshy 2001).

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

2.1 Gauss Sayıları

Gauss sayısı karmaşık (kompleks) bir sayıdır. $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere $z = a + ib$ şeklinde tanımlanan sayı karmaşık sayıdır (Koshy 2001).

Bu bölümde Gauss Fibonacci ve Gauss Lucas sayıları için bazı tanımlar ve bazı özellikler incelenmiştir.

Tanım 2.1.1 Gauss Fibonacci Sayıları $GF_0 = i, GF_1 = 1$ ve $n \geq 1$ olmak üzere**;**

$$GF_n = F_n + F_{n-1}i$$

ve $n \geq 0$ için

$$GF_{n+2} = GF_n + GF_{n+1}$$

Gauss Fibonacci dizisi bu bağıntı ile tanımlanır (Koshy 2001).

Tablo 2.1.1 Gauss Fibonacci Sayılarının Bazı Terimleri

n	0	1	2	3	4	5	...
GF_n	i	1	$1+i$	$2+i$	$3+2i$	$5+3i$	...

Tanım 2.1.2 Gauss Lucas Sayıları $GL_0 = 2 - i$, $GL_1 = 1 + 2i$ ve $n \geq 1$ için

$$GL_n = L_n + L_{n-1}i$$

ve $n \geq 0$ için

$$GL_{n+2} = GL_n + GL_{n+1}$$

Gauss Lucas dizisi bu bağıntı ile tanımlanır (Koshy 2001).

Tablo 2.1.2 Gauss Lucas Sayılarının Bazı Terimleri

n	0	1	2	3	4	5	...

GL_n	$2-i$	$1+2i$	$3+i$	$4+3i$	$7+4i$	$11+7i$	...

Teorem 2.1.1 Gauss Fibonacci sayı dizisinin n terim toplamı aşağıdaki şekilde tanımlanır (Koshy 2001).

$$\sum_{j=0}^{n} GF_j = GF_{n+2} - 1$$

İspat $n = 0$ için kanıtlayalım.

$$GF_0 = GF_2 - 1 = i$$

$n = k$ için sağladığını kabul edip $n = k + 1$ için sağlandığını gösterelim

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k+1} GF_{j+1} &= \sum_{j=0}^{k} GF_j + GF_{k+1} \\ &= GF_{k+2} - 1 + GF_{k+1} \\ &= GF_{k+3} - 1\end{aligned}$$

Teorem 2.1.2 Gauss Lucas sayı dizisinin n terim toplamı aşağıdaki şekilde tanımlanır (Koshy 2001).

$$\sum_{j=0}^{n} GL_j = GL_{n+2} - (1+2i)$$

İspat $n = 0$ için kanıtlayalım.

$$GL_0 = GL_2 - (1+2i) = 2 - i$$

$n = k$ için sağladığını kabul edip $n = k + 1$ için sağlandığını gösterelim

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k+1} GL_{j+1} &= \sum_{j=0}^{k} GL_j + GL_{k+1} \\ &= GL_{k+2} - (1+2i) + GL_{k+1} \\ &= GL_{k+3} - (1+2i)\end{aligned}$$

Tanım 2.1.3 Gauss Fibonacci dizisi $GF_0 = i$, $GF_1 = 1$ bu koşullar altında ve $n \geq 0$ olmak üzere negatif indisli Gauss Fibonacci sayı dizisinin $n.$ terimi aşağıdaki şekilde ifade edilir (Koshy 2001).

$$GF_{-n} = (-1)^{n-1}(F_n - F_{n+1}i)$$

Tanım 2.1.4 Gauss Lucas dizisi, $GL_0 = 2 - i$, $GL_1 = 1 + 2i$ başlangıç koşullarıyla ve $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{0}$ için negatif indisli Gauss Lucas sayı dizisinin $n.$ terimi aşağıdaki gibidir (Kosyh 2001).

$$GL_{-n} = (-1)^n(L_n - L_{n+1}i)$$

Teorem 2.1.3 Gauss Fibonacci ve Gasuss Lucas sayı dizileri için üreteç fonksiyonları bu şekildedir:

i) $GF_0 = i$, $GF_1 = 1$ başlangıç koşulları ve $n \geq 2$ olmak üzere;

$$GF_n = GF_{n-1} + GF_{n-2}$$

Gauss Fibonacci sayısının elemanlarını üreten üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \frac{i + (1 - i)x}{(1 - x - x^2)}$$

ii) $GL_0 = 2 - i$, $GL_1 = 1 + 2i$ başlangıç koşulları ve $n \geq 2$ olmak üzere;

$$GL_n = GL_{n-1} + GL_{n-2}$$

Gauss Lucas sayısının üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \frac{2 - i + (3i - 1)t}{(1 - t - t^2)}$$

şeklindedir (Koshy 2001).

İspat

i)

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} GF_n x^n \\
&= GF_1 x + GF_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} GF_n x^n \\
&= GF_1 x + GF_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (GF_{n-1} + GF_{n-2}) x^n \\
&= GF_1 x + GF_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} GF_{n-1} x^n + \sum_{n=3}^{\infty} GF_{n-2} x^n \\
&= x + (1+i)x^2 + x \sum_{n=2}^{\infty} GF_n x^n + x^2 \sum_{n=1}^{\infty} GF_n x^n \\
&= x + (1+i)x^2 + x\left(\sum_{n=1}^{\infty} GF_n x^n - x\right) + x^2 \sum_{n=1}^{\infty} GF_n x^n \\
&= x + (1+i)x^2 + x(g(x) - x) + x^2 g(x) \\
&= x + (1+i)x^2 + x g(x) - x^2 + x^2 g(x)
\end{aligned}
$$

eşitlik düzenlenirse Gauss Fibonaccci dizisinin üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \frac{i + (1-i)x}{(1 - x - x^2)}$$

şeklindedir.

ii) İspat (i) deki ispata benzer şekildedir.

Teorem 2.1.4 Gauss Fibonacci ve Gasuss Lucas sayı dizilerinin cassini özdeşlikleri aşağıda verilmiştir (Kosyh 2001).

i) $n \geq 1$ için $GF_{n+1} GF_{n-1} - (GF_n)^2 = (-1)^n (2 - i)$

ii) $n \geq 1$ için $GL_{n+1} GL_{n-1} - (GL_n)^2 = 5(-1)^{n+1} (2 - i)$

İspat

i) $n = 1$ için doğru olduğunu görelim

$$GF_2 GF_0 - (GF_1)^2 = (-1)(2 - i) = -2 + i$$

$n = k$ olduğunda sağladığını kabul edip $n = k + 1$ için sağlandığını gösterelim.

$$GF_{n+2} GF_n - (GF_{n+1})^2 = (GF_{n+1} + GF_n)(GF_{n+1} - GF_{n-1})$$

dir.

$$-(GF_{n+1})^2$$

$$= GF_{n+1}GF_{n+1} - GF_{n+1}GF_{n-1} + GF_nGF_{n+1}$$

$$-GF_nGF_{n-1} - (GF_{n+1})^2$$

$$= GF_nGF_{n+1} - GF_nGF_{n-1}$$

$$+((-1)^n(2-i) - (GF_n)^2)$$

$$= GF_n(GF_{n+1} - GF_{n-1})$$

$$+((-1)^n(2-i) - (GF_n)^2)$$

$$= (GF_n)^2 + ((-1)^n(2-i) - (GF_n)^2)$$

$$= (-1)^n(2-i)$$

ii) $n = 1$ için doğru olduğunu görelim

$$GL_2GL_0 - (GL_1)^2 = (3+i)(2-i) - (1+2i)^2 = (-5)(2-i)$$

$n = k$ için sağladığını kabul edelim ve $n = k+1$ için doğruluğunu gösterelim.

$$GL_{n+2}GL_n - (GL_{n+1})^2 = (GL_{n+1} + GL_n)(GL_{n+1} - GL_{n-1})$$

$$-(GL_{n+1})^2$$

$$= GL_{n+1}GL_{n+1} - GL_{n+1}GL_{n-1} + GL_nGL_{n+1}$$

$$-GL_nGL_{n-1} - (GL_{n+1})^2$$

$$= GL_nGL_{n+1} - GL_nGL_{n-1}$$

$$+(5(-1)^{n+1}(2-i) - (GL_n)^2)$$

$$= GF_n(GF_{n+1} - GF_{n-1})$$

$$+(5(-1)^{n+1}(2-i) - (GL_n)^2)$$

$$= (GL_n)^2 + (5(-1)^n(2-i) - (GL_n)^2)$$

$$= 5(-1)^{n+1}(2-i)$$

dir.

2.2 Gauss Fibonacci Ve Gauss Lucas Sayılarının Polinomları

Tanım 2.2.1 $GF_n(x)$ Gauss Fibonacci polinomu için

$n \geq 1$ olsun. $GF_1(x) = 1$ ve $GF_2(x) = x + i$ başlangıç koşullarıyla birlikte,

$$GF_{n+1}(x) = xGF_n(x) + GF_{n-1}(x)$$

bağıntısı ile tanımlanır (Özkan ve Taştan 2020).

Teorem 2.2.1 $GF_n(x)$ Gauss Fibonacci polinomu ve $F_n(x)$ Fibonacci polinomu için $n \geq 2$ olmak üzere

$$GF_{n+1}(x) = F_{n+1}(x) + iF_{n-1}(x)$$

dir (Özkan ve Taştan 2020).

Tanım 2.2.2 $GF_n(x)$ Gauss Fibonacci polinomu için Binet formülü aşağıdaki gibidir.

$$\alpha(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

ve

$$\beta(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

$F_n(x)$ polinomunun karakteristik denkleminin kökleridir. $F_n(x)$ polinomunun Binet formülü

$$GF_n(x) = \frac{\alpha^{n-1}(x)(\alpha(x) + i) - \beta(x)^{n-1}(\beta(x) + i)}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

dir (Özkan ve Taştan 2020).

Tanım 2.2.3 $GL_n(x)$ Gauss Lucas polinomu için

$n \geq 2$ olsun. $GL_1(x) = x + 2i$, $GL_2(x) = x^2 + 2 + xi$ başlangıç koşullarıyla

$$GL_{n+1}(x) = xGL_n(x) + GL_{n-1}(x)$$

bağıntısı ile tanımlanır (Özkan ve Taştan 2020).

Teorem 2.2.2 $GL_n(x)$ Gauss Lucas polinomu aynı zamanda $L_n(x)$ Lucas polinomu için $n \geq 2$ olsun.

$$GL_{n+1}(x) = L_{n+1}(x) + iL_{n-1}(x)$$

Gauss Lucas polinomunun rekürans bağıntısıdır (Özkan Ve Taştan 2020).

Tanım 2.2.4 $GL_n(x)$ Gauss Lucas polinomu için Binet formülü aşağıdaki gibidir.

$$\alpha(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

ve

$$\beta(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

$L_n(x)$ polinomunun karakteristik denkleminin kökleridir. $L_n(x)$ Lucas polinomunun Binet formülü

$$GL_n(x) = \alpha^{n-1}(x)(\alpha(x) + i) - \beta(x)^{n-1}(\beta(x) + i)$$

dir (Özkan ve Taştan 2020).

3. HiPER-FİBONACCİ VE HiPER-LUCAS SAYILARI

Hiper-Fibonacci ve Hiper-Lucas sayıları klasik Fibonacci ve Lucas sayılarının genelleştirilmiş bir versiyonudur.

İlk olarak Dil ve Mezö tarafından tanımlanmıştır. Bu tanımlama yapılırken Euler Seidel matrisin rekürans bağıntısından yararlanılmıştır.

3.1 Hiper-Fibonacci Ve Hiper-Lucas Sayıları

Tanım 3.1.1 Bir a_n dizisi için bu diziye karşılık gelen Euler Seidel matrisi aşağıdaki şekilde rekürans bağıntısına sahiptir (Dil ve Mezö 2008).

$$a_n^0 = a_n \ (n \geq 0)$$

ve

$$a_n^k = a_n^{k-1} + a_{n+1}^{k-1} \ (n \geq 0, k \geq 1)$$

Tanım 3.1.2 Hiper-Fibonacci sayıları aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$F_n^{(0)} = F_n, F_0^{(r)} = 0, F_1^{(r)} = 1$$

olmak üzere

$$F_n^{(r)} = \sum_{k=0}^{n} F_k^{(r-1)}$$

dir **(**Dil ve Mezö 2008).

Tanım 3.1.3 Hiper-Lucas sayıları aşağıdaki gibi tanımlanır (Dil ve Mezö 2008).

$$L_n^{(0)} = L_n, L_0^{(r)} = 2, L_1^{(r)} = 2r + 1$$

olmak üzere

$$L_n^{(r)} = \sum_{k=0}^{n} L_k^{(r-1)}$$

Teorem 3.1.1 Hiper-Fibonacci sayısının üreteç fonksiyonu aşağıdaki gibidir (Dil ve Mezö 2008).

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(r)} t^n = \frac{1}{(1-t-t^2)(1-t)^r}$$

İspat Tümeravım yöntemini kullanalım. $r = 0$ için doğruluğunu gösterelim.

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(0)} t^n = \frac{1}{(1-t-t^2)(1-t)^0} = \frac{1}{(1-t-t^2)}$$

$r = k$ için sağlandığını kabul edelim ve $r = k + 1$ için doğruluğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(k+1)} t^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} F_i^{(k)}\right) t^i \\ &= \left(\sum_{s=0}^{\infty} F_s^{(k)} t^s\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} t^j\right) \\ &= \frac{1}{(1-t-t^2)(1-t)^{k+1}}\end{aligned}$$

Teorem 3.1.2 Hiper-Lucas sayısının üreteç fonksiyonu aşağıdaki gibidir (Dil ve Mezö 2008).

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(r)} t^n = \frac{2-t}{(1-t-t^2)(1-t)^r}$$

İspat Tümeravım yöntemini kullanalım. $r = 0$ için doğruluğunu gösterelim.

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(0)} t^n = \frac{2-t}{(1-t-t^2)(1-t)^0} = \frac{2-t}{(1-t-t^2)}$$

Şimdi de $r = k$ için sağlandığını kabul edelim ve $r = k + 1$ için doğruluğunu gösterelim.

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(k+1)} t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} L_i^{(k)}\right) t^i$$

$$= \left(\sum_{s=0}^{\infty} L_s^{(k)} t^s\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} t^j\right)$$

$$= \frac{2-t}{(1-t-t^2)(1-t)^{k+1}}$$

Teorem 3.1.3 Hiper-Fibonacci ve Fibonacci sayıları arasında aşağıdaki ilişki vardır (Dil ve Mezö 2008).

$$F_n^{(r)} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n+r-s-1}{r-1} F_s$$

İspat Euler-Seidel algoritmasına göre a_n dizisi aşağıdaki rekürans bağıntısına sahiptir:

$$a_n^0 = a_n, a_0^n = a^n \;\; (n \geq 0)$$

için

$$a_n^r = a_n^{r-1} + a_{n-1}^r (n \geq 1, r \geq 1)$$

burada a_n^r aşağıdaki ilişkiye sahiptir:

$$a_n^{(r)} = \sum_{i=0}^{r} \binom{n+r-i-1}{n-1} a_0^i + \sum_{s=0}^{n} \binom{n+r-s-1}{r-1} a_s^0$$

buradaki eşitlik yukarıdaki denklemi sağlar. $a_n^{(0)} = F_{n+1}^{(0)} = F_{n+1}$, $a_0^r = F_1^r$ olmak üzere

$$a_n^{(r)} = \sum_{i=0}^{r} \binom{n+r-i-1}{n-1} a_0^i + \sum_{s=0}^{n} \binom{n+r-s-1}{r-1} a_s^0$$

Buradan hareketle

$$a_{n+1}^{(r+1)} = \sum_{i=0}^{r} \binom{n+r-i}{n} + \sum_{s=0}^{n} \binom{n+r-s}{r} F_{s+2}$$
$$= \sum_{k=0}^{r} \binom{n+k}{n} a_0^i + \sum_{b=0}^{n} \binom{r+b}{r} F_{n-b+2}$$

eşitlikte $k = r - i$ ve $b = n - s$ dir. Kombinasyonların bu özelliğinden

$$\sum_{t=a}^{c}\binom{t}{a}=\binom{c+1}{a+1}$$

aşağıdaki eşitliği oluşturabiliriz:

$$a_{n+1}^{(r+1)}=\binom{n+r+1}{n+1}+\sum_{b=0}^{n}\binom{r+b}{r}F_{n-b+2}$$

$$=\sum_{b=0}^{n+1}\binom{r+b}{r}F_{n-b+2}$$

ve

$$a_{n-1}^{r}=F_n^r=\sum_{b=0}^{n-1}\binom{r+b-1}{r-1}F_{n-b}=\sum_{s=0}^{n}\binom{n+r-s-1}{r-1}F_s$$

olacaktır.

Teorem 3.1.4 Hiper-Lucas ve Lucas sayıları arasında aşağıdaki ilişki vardır (Dil ve Mezö 2008).

$$L_n^{(r)}=\sum_{s=0}^{n}\binom{n+r-s-1}{r-1}L_s$$

İspat Euler-Seidel algoritmasına göre a_n dizisi aşağıdaki reküerans bağıntısına sahiptir:

$$a_n^0=a_n, a_0^n=a^n \ \ (n\geq 0)$$

için

$$a_n^r=a_n^{r-1}+a_{n-1}^r(n\geq 1, r\geq 1)$$

Burada a_n^r aşağıdaki ilişkiye sahiptir :

$$a_n^{(r)}=\sum_{i=0}^{r}\binom{n+r-i-1}{n-1}a_0^i+\sum_{s=0}^{n}\binom{n+r-s-1}{r-1}a_s^0$$

Buradaki eşitlik yukarıdaki denklemi sağlar. $a_n^{(0)}=L_{n+1}^{(0)}=L_{n+1}$ ve $a_0^n=L_1^r$ için

$$a_n^{(r)}=\sum_{i=0}^{r}\binom{n+r-i-1}{n-1}a_0^i+\sum_{s=0}^{n}\binom{n+r-s-1}{r-1}a_s^0$$

buradan

$$a_{n+1}^{(r+1)} = \sum_{i=0}^{r} \binom{n+r-i}{n} + \sum_{s=0}^{n} \binom{n+r-s}{r} L_{s+2}$$

$$= \sum_{k=0}^{r} \binom{n+k}{n} a_0^i + \sum_{b=0}^{n} \binom{r+b}{r} L_{n-b+2}$$

bu eşitlikte $k = r - i$ ve $b = n - s$ dir. Kombinasyonların aşağıdaki özelliğinden

$$\sum_{t=a}^{c} \binom{t}{a} = \binom{c+1}{a+1}$$

Aşağıdaki eşitliği oluşturabiliriz:

$$a_{n+1}^{(r+1)} = \binom{n+r+1}{n+1} + \sum_{b=0}^{n} \binom{r+b}{r} L_{n-b+2}$$

$$= \sum_{b=0}^{n+1} \binom{r+b}{r} L_{n-b+2}$$

Buradan

$$a_{n-1}^{r} = L_n^r = \sum_{b=0}^{n-1} \binom{r+b-1}{r-1} L_{n-b} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n+r-s-1}{r-1} L_s$$

elde edildiği görülür.

3.2 Hiper-Fibonacci Ve Hiper-Lucas Polinomları

Tanım 3.2.1 Hiper-Fibonacci polinomları aşağıdaki gibi tanımlanır (Mersin 2023).

$$F_n^{(0)}(x) = F_n(x), F_0^{(r)}(x) = 0, F_1^{(r)}(x) = 1$$

olmak üzere

$$F_n^{(r)}(x) = \sum_{k=0}^{n} F_k^{(r-1)}(x)$$

dir.

Tanım 3.2.2 Hiper-Lucas polinomları aşağıdaki gibi tanımlanır (Mersin 2023).

$$L_n^{(0)}(x) = L_n(x), L_0^{(r)}(x) = 2, L_1^{(r)}(x) = x + 2r$$

olmak üzere

$$L_n^{(r)}(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k^{(r-1)}(x)$$

Teorem 3.2.1 Hiper-Fibonacci polinomunun üreteç fonksiyonu aşağıdaki gibidir (Mersin 2023).

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(r)}(x) t^n = \frac{t}{(1 - xt - t^2)(1 - t)^r}$$

Teorem 3.2.2 Hiper-Lucas polinomunun üreteç fonksiyonu aşağıdaki gibidir (Mersin 2023).

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(r)}(x) t^n = \frac{2 - t}{(1 - xt - t^2)(1 - t)^r}$$

Teorem 3.2.3 Hiper-Fibonacci polinomları ile Fibonacci polinomları arasında aşağıdaki ilişki vardır (Mersin 2023).

$$F_n^{(r)}(x) = \sum_{s=0}^{n} \binom{n + r - s - 1}{r - 1} F_s(x)$$

Teorem 3.2.4 Hiper-Lucas polinomu ve Lucas polinomu arasında aşağıdaki ilişki vardır (Mersin 2023).

$$L_n^{(r)}(x) = \sum_{s=0}^{n} \binom{n + r - s - 1}{r - 1} L_s(x)$$

4. GAUSS HİPER-FİBONACCİ VE GAUSS HİPER-LUCAS SAYILARI

Bu bölümde geçmiş bölümlerde üzerinde çalışılmış Hiper-Fibonacci ve Hiper-Lucas sayı dizilerinin özelliklerinden yararlanılarak Gauss Hiper-Fibonacci ve Gauss Hiper-Lucas sayıları tanımları ve çeşitli özellikleri verilmiştir.

4.1 Gauss Hiper-Fibonacci Ve Gauss Hiper-Lucas Sayıları

Gauss Hiper-Fibonacci ve Gauss Hiper-Lucas sayılarına ait tanımlama ve teoremler yapılmış olup bu tanımlamalar ve teoremlerle bu sayıların bazı değerleri tablolaştırılarak gösterilmiştir.

Tanım 4.1.1 Gauss Hiper-Fibonacci ve Gauss Hiper-Lucas sayıları sırası ile aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$n \geq 1 \; ve \; r \geq 1$ olsun.

$$GF_n^{(0)} = GF_n, \quad GF_0^{(r)} = i, \quad GF_1^{(r)} = ri + 1$$

koşulları altında

$$GF_n^{(r)} = \sum_{k=0}^{n} GF_k^{(r-1)}$$

ve

$$GL_n^{(0)} = GL_n, \quad GL_0^{(r)} = 2 - i, \quad GL_1^{(r)} = 2r + 1 + (2 - r)i$$

bu koşullarda

$$GL_n^{(r)} = \sum_{k=0}^{n} GL_k^{(r-1)}$$

bu şekilde tanımlanır.

Tablo 4.1.1 Gauss Hiper-Fibonacci Sayılarının Bazı Terimleri

n \ r	0	1	2	3	4	5
0	i	i	i	i	i	i
1	1	$1+i$	$1+2i$	$1+3i$	$1+4i$	$1+5i$
2	$1+i$	$2+2i$	$3+4i$	$4+7i$	$5+11i$	$6+16i$
3	$2+i$	$4+3i$	$7+7i$	$11+14i$	$16+25i$	$22+41i$
4	$3+2i$	$7+5i$	$14+12i$	$25+26i$	$41+51i$	$63+92i$
5	$5+3i$	$12+8i$	$26+20i$	$51+46i$	$92+97i$	$155+189i$

Tablo 4.1.2 Gauss Hiper-Lucas Sayılarının Bazı Terimleri

n \ r	0	1	2	3	4	5
0	$2-i$	$2-i$	$2-i$	$2-i$	$2-i$	$2-i$
1	$1+2i$	$3+i$	5	$7-i$	$9-2i$	$11-3i$
2	$3+i$	$6+2i$	$11+2i$	$18+i$	$27-i$	$38-4i$
3	$4+3i$	$10+5i$	$21+7i$	$39+8i$	$66+7i$	$104+3i$
4	$7+4i$	$17+9i$	$38+16i$	$77+24i$	$143+31i$	$247+34i$
5	$11+7i$	$28+16i$	$66+32i$	$143+56i$	$286+87i$	$533+121i$

Tanım 4.1.2 Gauss Hiper-Fibonacci ve Gauss Hiper-Lucas rekürans bağıntıları sırası ile aşağıdaki gibidir:

$$GF_n^{(r)} = GF_{n-1}^{(r)} + GF_n^{(r-1)}$$
$$GL_n^{(r)} = GL_{n-1}^{(r)} + GL_n^{(r-1)}$$

Teorem 4.1.1 Gauss Hiper-Fibonacci sayısının üreteç fonksiyonu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} GF_n^{(r)} t^n = \frac{GF_0 + t(GF_1 - GF_0)}{(1-t-t^2)(1-t)^r} = \frac{i+(1-i)t}{(1-t-t^2)(1-t)^r}$$

dir.

İspat Tümeravım yöntemini kullanalım. $r = 0$ için doğruluğunu gösterelim.

$$\sum_{n=0}^{\infty} GF_n^{(0)} t^n = \frac{GF_0 + t(GF_1 - GF_0)}{(1-t-t^2)(1-t)^0} = \frac{i+(1-i)t}{(1-t-t^2)}$$

Şimdi de $r = k$ için doğruluğunu kabul edelim. Ayrıca $r = k + 1$ için sağlandığını gösterelim.

$$\sum_{n=0}^{\infty} GF_n^{(k+1)} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} GF_i^{(k)} \right) t^i$$

$$= \left(\sum_{s=0}^{\infty} GF_s^{(k)} t^s \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} t^j \right)$$

$$= \frac{i + (1 - i)t}{(1 - t - t^2)(1 - t)^{k+1}}$$

Teorem 4.1.2 Gauss Hiper-Lucas sayısının üreteç fonksiyonu aşağıdaki şekildedir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} GL_n^{(r)} t^n = \frac{GL_0 + t(GL_1 - GL_0)}{(1 - t - t^2)(1 - t)^r} = \frac{2 - i + (3i - 1)t}{(1 - t - t^2)(1 - t)^r}$$

İspat Tümeravım yöntemini kullanalım. $r = 0$ için doğruluğunu kanıtlayalım.

$$\sum_{n=0}^{\infty} GL_n^{(0)} t^n = \frac{GL_0 + t(GL_1 - GL_0)}{(1 - t - t^2)(1 - t)^0} = \frac{2 - i + (3i - 1)t}{(1 - t - t^2)}$$

Şimdi de $r = k$ için doğruluğunu kabul edip $r = k + 1$ için sağlandığını kanıtlayalım.

$$\sum_{n=0}^{\infty} GL_n^{(k+1)} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} GL_i^{(k)} \right) t^i$$

$$= \left(\sum_{s=0}^{\infty} GL_s^{(k)} t^s \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} t^j \right)$$

$$= \frac{2 - i + (3i - 1)t}{(1 - t - t^2)(1 - t)^{k+1}}$$

Teorem 4.1.3 Gauss Hiper-Fibonacci ve Gauss Fibonacci sayıları arasında aşağıdaki eşitlik vardır. Benzer şekilde bu ilişki Gauss Hiper-Lucas ve Gauss Lucas sayıları arasında da geçerlidir.

$n \geq 0$, $r \geq 1$ olacak şekilde

i)

$$GF_n^{(r)} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n+r-s-1}{r-1} GF_s$$

ii)

$$GL_n^{(r)} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n+r-s-1}{r-1} GL_s$$

dir.

İspat

i) Euler-Seidel algoritmasına göre a_n dizisi aşağıdaki rekürans bağıntısına sahiptir.

$$a_n^0 = a_n, a_0^n = a^n \ \ (n \geq 0)$$

için

$$a_n^r = a_n^{r-1} + a_{n-1}^r (n \geq 1, r \geq 1)$$

burada a_n^r aşağıdaki ilişkiye sahiptir :

$$a_n^{(r)} = \sum_{i=0}^{r} \binom{n+r-i-1}{n-1} a_0^i + \sum_{s=0}^{n} \binom{n+r-s-1}{r-1} a_s^0$$

buradaki eşitlik yukarıdaki denklemi sağlar. $a_n^{(0)} = GF_{n+1}^{(0)} = GF_{n+1}$, $a_0^n = GF_1^r$ koşulları altında

$$a_n^{(r)} = \sum_{i=0}^{r} \binom{n+r-i-1}{n-1} a_0^i + \sum_{s=0}^{n} \binom{n+r-s-1}{r-1} a_s^0$$

buradan hareketle

$$\begin{aligned} a_{n+1}^{(r+1)} &= \sum_{i=0}^{r} \binom{n+r-i}{n} + \sum_{s=0}^{n} \binom{n+r-s}{r} GF_{s+2} \\ &= \sum_{k=0}^{r} \binom{n+k}{n} a_0^i + \sum_{b=0}^{n} \binom{r+b}{r} GF_{n-b+2} \end{aligned}$$

eşitlikte $k = r - i$ ve $b = n - s$ dir. Kombinasyonların aşağıdaki özelliğinden;

$$\sum_{t=a}^{c}\binom{t}{a}=\binom{c+1}{a+1}$$

aşağıdaki eşitliği oluşturabiliriz:

$$a_{n+1}^{(r+1)}=\binom{n+r+1}{n+1}+\sum_{b=0}^{n}\binom{r+b}{r}GF_{n-b+2}$$

$$=\sum_{b=0}^{n+1}\binom{r+b}{r}GF_{n-b+2}$$

dolayısıyla

$$a_{n-1}^{r}=GF_n^r=\sum_{b=0}^{n-1}\binom{r+b-1}{r-1}GF_{n-b}=\sum_{s=0}^{n}\binom{n+r-s-1}{r-1}GF_s$$

elde edilir.

(ii) ispatı (i) ispatına benzer.

Teorem 4.1.4 Gauss Hiper-Fibonacci ve Gauss Hiper-Lucas sayılarının aşağıdaki rekürans bağıntıları vardır.

$n\geq 2$ ve $r\geq 1$ olacak şekilde

i) $GF_n^{(r)}=GF_{n-1}^{(r)}+GF_{n-2}^{(r)}+i\binom{n+r-1}{r-1}+(1-i)\binom{n+r-2}{r-1}$

ii) $GF_n^{(r)}=GF_{n-1}^{(r)}+GF_{n-2}^{(r)}+(2-i)\binom{n+r-1}{r-1}+(-1+3i)\binom{n+r-2}{r-1}$

İspat

ii)

$$GL_n^{(r)}=\sum_{s=0}^{n}\binom{n+r-s-1}{r-1}GL_s$$

$$=\sum_{s=0}^{n}\binom{n+r-s-1}{r-1}(GL_{s-1}+GL_{s-2})$$

$$= \sum_{s=0}^{n} \binom{n+r-s-1}{r-1} GL_{s-1} + \sum_{s=0}^{n} \binom{n+r-s-1}{r-1} GL_{s-2}$$

$$= \sum_{s=-1}^{n-1} \binom{n+r-(s+1)-1}{r-1} GL_s + \sum_{s=-2}^{n-2} \binom{n+r-(s+2)-1}{r-1} GL_s$$

$$= \sum_{s=0}^{n-1} \binom{(n-1)+r-s-1}{r-1} GL_s + \binom{n+r-1}{r-1} GL_{-1}$$

$$+ \sum_{s=0}^{n-2} \binom{(n-2)+r-s-1}{r-1} GL_s + \binom{n+r-2}{r-1} GL_{-1}$$

$$+ \binom{n+r-1}{r-1} GL_{-2}$$

$$= GL_{n-1}^{(r)} + \binom{n+r-1}{r-1}(-1+3i) + GL_{n-2}^{(r)} \binom{n+r-2}{r-1}(-1+3i)$$

$$+ \binom{n+r-1}{r-1}(3-4i) + GL_{n-2}^{(r)} \binom{n+r-2}{r-1}(-1+3i)$$

$$+ \binom{n+r-1}{r-1}(3-4i) + GL_{n-2}^{(r)} \binom{n+r-2}{r-1}(-1+3i)$$

$$+ \binom{n+r-1}{r-1}(3-4i)$$

$$= GL_{n-1}^{(r)} + GL_{n-2}^{(r)} + (2-i)\binom{n+r-1}{r-1} + (-1+3i)\binom{n+r-2}{r-1}$$

Bu ispat (i) ispatına benzer.

Teorem 4.1.5 Gauss Hiper-Fibonacci ve Gauss Hiper-Lucas sayılarının toplam formülleri aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$n \geq 1$ ve $r \geq 1$ için

i)

$$\sum_{s=0}^{r} GF_n^{(s)} = GF_{n+1}^{(r)} - GF_{n-1}$$

ii)

$$\sum_{s=0}^{r} GL_n^{(s)} = GL_{n+1}^{(r)} - GL_{n-1}$$

dir.

İspat

i)

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{r} GF_n^{(s)} &= \sum_{s=1}^{r}\left(\sum_{t=0}^{n}\binom{n+s-t-1}{s-1}GF_t\right)\\
&= \sum_{t=0}^{n}\left(GF_t\sum_{s=0}^{r}\binom{n+s-t-1}{s-1}\right)\\
&= \sum_{t=0}^{n}\binom{n+r-t-1}{r-1}GF_t\\
&= \sum_{t=0}^{n+1}\binom{(n+1)+r-t-1}{r-1}GF_t - GF_{n+1}\\
&= GF_{n+1}^{(r)} - GF_{n+1}
\end{aligned}$$

buradan

$$\begin{aligned}
\sum_{s=0}^{r} GF_n^{(s)} &= GF_n^{(0)} + \sum_{s=1}^{r} GF_n^{(s)}\\
&= GF_n^{(0)} + GF_{n+1}^{(r)} - GF_{n+1}\\
&= GF_n + GF_n^{(r)} - GF_n - GF_{n-1}\\
&= GF_n^{(r)} - GF_{n-1}
\end{aligned}$$

buradaki ispat (ii) ispatına benzer.

Teorem 4.1.6 Gauss Hiper-Fibonacci ve Gauss Hiper-Lucas sayıları arasında aşağıdaki ilişki vardır.

$n \geq 1,\ r \geq 1$ olsun.

$$GF_n^{(r)} + GL_n^{(r)} = 2GF_{n+1}^{(r)} - i\binom{n+r}{r-1}$$

dir.

İspat :

$$GF_n^{(r)} + GL_n^{(r)} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n+r-s-1}{r-1} GF_s + \sum_{s=0}^{n} \binom{n+r-s-1}{r-1} GL_s$$
$$= \sum_{s=0}^{n} \binom{n+r-s-1}{r-1} (GF_s + GL_s)$$
$$= \sum_{s=0}^{n} \binom{n+r-s-1}{r-1} 2GF_{s+1}$$
$$= 2\sum_{s=1}^{n+1} \binom{n+r-(s-1)-1}{r-1} 2GF_{s+1}$$
$$= 2\left(\sum_{s=0}^{n+1} \binom{(n+1)+r-s-1}{r-1} GF_s + \binom{n+r}{r-1} GF_0\right)$$
$$= 2GF_{n+1}^{(r)} - i\binom{n+r}{r-1}$$

Teorem 4.1.7 Gauss Hiper-Fibonacci ve Gauss Hiper-Lucas sayıları arasında aşağıdaki ilişki vardı.

$n \geq 1, r \geq 1$ olmak üzere

$$GF_n^{(r)} - GL_n^{(r)} = -2\left(GF_{n-1}^{(r)} + (1-i)\binom{n+r-1}{r-1}\right)$$

şeklindedir.

İspat

$$GF_n^{(r)} - GL_n^{(r)} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n+r-s-1}{r-1} GF_s - \sum_{s=0}^{n} \binom{n+r-s-1}{r-1} GL_s$$
$$= \sum_{s=0}^{n} \binom{n+r-s-1}{r-1} (GF_s - GL_s)$$
$$= \sum_{s=0}^{n} \binom{n+r-s-1}{r-1} -2GF_{s-1}$$
$$= -2\sum_{s=-1}^{n-1} \binom{n+r-(s+1)-1}{r-1} GF_s$$
$$= -2\left(\sum_{s=0}^{n-1} \binom{(n-1)+r-s-1}{r-1} GF_s + \binom{n+r-1}{r-1} GF_{-1}\right)$$

$$= -2\left(GF_{n-1}^{(r)} + \binom{n+r-1}{r-1} + (1-i)\binom{n+r-1}{r-1}\right)$$

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, Fibonacci ve Lucas sayılarına ilişkin temel tanımlar, Binet formülleri, üreteç fonksiyonları ve bu sayıların polinomları incelenmiş; ayrıca bu sayıların karakteristik özelliklerine yer verilmiştir. İkinci bölümde ise Gauss Fibonacci ve Gauss Lucas sayılarına dair temel tanımlar sunulmuş, bu sayıların polinomları ve yapısal özellikleri detaylandırılmıştır. Üçüncü bölümde, Hiper-Fibonacci ve Hiper-Lucas sayılarının tanımları yapılmış, bu sayıların birbirleriyle olan ilişkileri ortaya konulmuş ve üreteç fonksiyonları verilmiştir. Bu sayıların bazı özellikleri de örneklerle desteklenerek açıklanmıştır. Son bölümde, önceki bölümlerde tanımlanan Gauss Fibonaci ve Gauss Lucas sayılarına dayalı olarak Gauss Hiper-Fibonacci ve Gauss Hiper-Lucas sayıları tanımlanmış bu yeni sayı dizileriyle ilgili çok sayıda teorem ve özellik elde edilerek literatüre katkı sağlanmıştır.

Öneri olarak Gauss Fibonacci sayıları, Gauss Fibonacci Polinomları ve Gauss Hiper-Fibonacci sayıları temel alınarak Gauss Hiper-Fibonacci polinomları tanımlanabilir. Bu doğrultuda yapılacak çalışmaların teorisi ve kombinatorik alanında yeni açılımlar sağlayacağı ön görülmektedir.

6. KAYNAKLAR

Bahşi, M., Mezö, I., Solak, S., "A symmetric algorithm for hiper-Fibonacci and hiper-Lucas numbers" *Annales Mathematicae et Informaticae*, 43, 19-27, (2014).

Berzsenyi, G., "Gaussian Fibonacci numbers" *The Fibonacci Quarterly*, 15(3), 233-236, (1977).

Cao, N. N., Zhao, F.Z., "Some properties of hiperfibonacci and hiperlucas numbers" *J. Integer Seq*, 13(8), 21, (2010).

Dil, A,. Mező, I,. "Hiperharmonik ve Fibonacci sayıları için simetrik bir algoritma" *Uygulamalı Matematik ve Hesaplama*, 206(2), 942-951, (2008).

Harman, C. J., "Complex fibonacci numbers" *The Fibonacci Quarterly*, 19(1), 82-86, (1981).

Horadam, Ae. F., "Complex Fibonacci numbers and Fibonacci quaternions" *The American Mathematical Monthly*, 70(3), 289-291, (1963).

Koshy, T., *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, Hoboken N.J: A Wiley İnterscience Publication, (2001).

Özkan, E., Taştan, M., "On Gauss Fibonacci polynomials, on Gauss Lucas polynomials and their applications" *Communications in Algebra*, 48(3), 952-960, (2020).

Lee, G., Aşçı, M., "On the generalized gaussian fibonacci numbers" *Ars Combinatoria*, 132, 147-157, (2017).

Jordan, J. H., "Gaussian Fibonacci and Lucas numbers" *The Fibonacci Quarterly*, 3(4), 315-318, (1965).

Özkan, M.E., "Hiper-Fibonacci and hiper-Lucas polynomials" *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, 15(1), 63-70, (2023).

Pethe, S., Horadam, A.F., "Generalised Gaussian Fibonacci numbers" *Bulletin of the Australian Mathematical Society* 33(1), 37-48, (1986).

Yılmaz, F., Özkan M., "On the generalized Gaussian fibonacci numbers and Horadam hybrid numbers: A unified approach" *Axioms*, 11(6), 255, (2022).