T.C.

EGE ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

Zero Divisor Graflarda Vertex Cover Polinomu Üzerine

Yüksek Lisans Tezi

Toykan GÜLMEN

Matematik Anabilim Dalı

Bilgisayar Bilimleri Yüksek Lisans Programı

İzmir

2025

T.C.

EGE ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

Zero Divisor Graflarda Vertex Cover Polinomu Üzerine

Yüksek Lisans Tezi

Toykan GÜLMEN

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Arif GÜRSOY

Matematik Anabilim Dalı

Bilgisayar Bilimleri Yüksek Lisans Programı

İzmir

2025

Toykan Gülmen tarafından Yüksek Lisans tezi olarak sunulan “Zero Divisor Graflarda Vertex Cover Polinomu Üzerine” başlıklı bu çalışma EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile EÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve ....tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:		İmza
Jüri Başkanı	:	....
Raportör Üye	:	....
Üye	:	....

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Sıfır Bölen Graflarda Vertex Cover Polinomu Üzerine" başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

03 / 02 / 2025

Toykan Gülmen

İmzası

ÖZET

ZERO DIVISOR GRAFLARDA VERTEX COVER POLİNOMU ÜZERİNE

GÜLMEN, Toykan

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Arif GÜRSOY
Şubat 2025, 41 sayfa

Bu tez, zero divisor graflarının yapısal özelliklerini ve bu graflarda yer alan vertex cover polinomlarını matematiksel olarak incelemeyi amaçlamaktadır.

Zero divisor grafları, değişmeli bir halkadaki sıfır bölenleri temsil eder; bu graflarda tepeler halkanın elemanlarından oluşur ve ayrıtlar, bu elemanların çarpımlarının sıfır verdiği tepe çiftleriyle tanımlanır. Tezde ayrıca, vertex cover problemi üzerinde durulmaktadır. Vertex cover, bir graftaki her ayrıtın en az bir tepesini içeren kümeyi ifade eder ve bu kümelerin tümünün elde edilmesiyle oluşturulan polinoma vertex cover polinomu denir.

Minimum vertex cover problemi NP-hard bir problem olup, polinom zamanda kesin çözümü bulacak bir algoritma yazmak mümkün değildir. Bu tezde, sıfır bölen graflarındaki vertex cover polinomlarının analizi yapılmıştır ve bazı özel graflar için bu polinom formulüze edilmiştir. Çalışma, sıfır bölen graflarının ve vertex cover polinomlarının yapılarının daha derinlemesine anlaşılmasına katkı sağlamayı amaçlamaktadır.

Anahtar sözcükler: Graf teori, zero divisor graflar, vertex cover polinomu

ABSTRACT

ON THE VERTEX COVER POLYNOMIAL IN ZERO DIVISOR GRAPHS

GÜLMEN, Toykan

MSc in Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Arif GÜRSOY
February 2025, 41 pages

This thesis aims to mathematically examine the structural properties of zero divisor graphs and the vertex cover polynomials associated with these graphs.

Zero divisor graphs represent zero divisors in a commutative ring; in these graphs, the vertices consist of elements from the ring, and the edges are defined by pairs of vertices whose products are zero. The thesis also focuses on the vertex cover problem. A vertex cover refers to a set of vertices in a graph that includes at least one vertex of each edge, and the polynomial formed by all such sets is called the vertex cover polynomial.

The minimum vertex cover problem is NP-hard, meaning that there is no algorithm that can find the exact solution in polynomial time. This thesis analyzes the vertex cover polynomials of zero divisor graphs and attempts to formulate these polynomials for certain special graphs. The work aims to contribute to a deeper understanding of the structures of zero divisor graphs and vertex cover polynomials.

Keywords: Graph theory, zero divisor graphs, vertex cover polynomial

ÖNSÖZ

Bu tez, zero divisor grafları ve vertex cover polinomlarının matematiksel analizini yapmayı amaçlamaktadır. Zero divisor grafları, değişmeli halkalardaki sıfır bölenlerini temsil eder. Ayrıca, NP-hard bir problem olan vertex cover problemi üzerinde durularak, bu graflardaki vertex cover polinomlarının incelenmesi yapılmaktadır. Çalışma, hem teorik olarak bu yapıların daha iyi anlaşılmasını hem de pratik uygulamalara katkı sağlamayı hedeflemektedir.

İZMİR

03/02/2025

Toykan Gülmen

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

TABLOLAR DİZİNİ

1.GİRİŞ

Graf teorisi, matematik ve bilgisayar bilimleri alanında çok önemli yeri olan bir disiplindir. Grafların birden fazla çeşidi vardır ve esasen bir modelleme yöntemidir. Graf teori, ilişkiler ve bağlantılar üzerine analizler yapmaya olanak sağlar. Yapılan bu araştırmalar sadece teorik çıkarımlar ile sınırlı kalmaz, pratik uygulamalar için de kolaylık sağlar. Özellikle, kombinatorik optimizasyon problemlerinin modellenmesi ve analiz edilmesi için graf yapıları oldukça kullanışlıdırlar.

Bu tezde, özellikle "zero divisor" graflar üzerinde durulmaktadır. Zero divisor grafları, değişmeli bir halkadaki sıfır bölenleri temsil eder. Grafın tepeleri halkanın elemanlarından oluşur ve bu elemanların çarpımları sıfırı veren tepe ikililerinin arasındaki bağlantılar da grafın tepelerini temsil eder.

Bu çalışmanın odak noktalarından birisi de vertex cover (tepe örtüsü) polinomudur. Vertex cover, bir graftaki her ayrıtın en az bir tepesini içinde bulunduran tepeler kümesidir. Bu koşulu sağlayan olası tüm kümelerin elde edilmesiyle oluşturulan polinoma da vertex cover polinomu denir. Vertex cover problemi bir Np-hard problemdir yani polinom zamanda optimal sonucu verecek bir algoritma mevcut değildir. Bu yüzden üzerine birçok farklı araştırma yapılmış ve yaklaşım algoritmaları yazılmıştır.

Bu tez, zero divisor graflarının yapısal özelliklerini inceleyerek bu graflardaki vertex cover polinomlarının matematiksel analizini gerçekleştirmeyi amaçlamaktadır. Öncelikle zero divisor graflarının temel özellikleri açıklanacak ve ardından vertex cover polinomlarının bu özel graflar üzerindeki durumları incelenecektir.

Sonuç olarak, bu çalışma, hem teorik olarak bu konuların derinlemesine incelenmesine katkıda bulunmayı hem de pratik uygulamalarda kullanılabilecek yeni uygulamaların geliştirilmesine yardımcı olmayı hedeflemektedir. Sıfır bölen graflarının ve vertex cover polinomlarının analizi, cebirsel yapıların grafiksel olarak anlaşılmasına ve bu yapıların özelliklerinin daha iyi kavranmasına olanak sağlayacaktır.

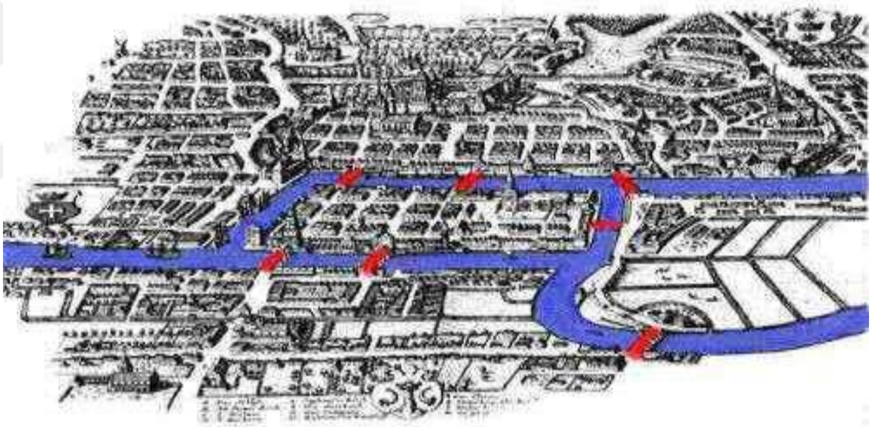
Bu tezde cebirsel yapılar üzerindeki zero divisor graflar ve vertex cover polinomları üzerinde durulmuştur. 2. bölümde graf teori ve halka teorisi hakkında genel bilgiler verilmiştir. 3. bölümde çalışılacak olan zero divisor grafları ve vertex cover problemi üzerinde durulmuş tanımları ve kullanım alanları hakkında bilgiler verilmiştir. 4. bölümde zero divisor grafların bazı çeşitleri üzerinde vertex cover polinomları elde edilmiş, elde edilen polinomlar matematiksel olarak analiz edilmiştir. 5. bölümde ise elde edilen sonuçlar ve bu sonuçların literatüre katkıları açıklanmıştır.

2.TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

2.1. Graf Teorisi

Euler (1707-1782) 1736 yılında yazdığı Königsberg'in Yedi Köprüsü isimli makale ile graf teori kavramının literatüre girmesini sağlamıştır. Euler, problemi çözerken somut bir olayı modelleyip soyut bir çizgeye çevirerek graf teorisinin temellerini atmıştır. Königsberg kentinde, eski ve yeni Pregel nehirleri bağlanarak Pregel (Pregolya) nehrini oluşturmaktadır. Bu nehirler şehri dört karaya ayırmaktadır ve nehir üzerinde bu karaları birleştiren yedi köprü bulunmaktadır. Bu konu ile ilgili ortaya çıkan problem aşağıda verilmiştir.

"Herhangi bir köprüden yola çıkarak ve her bir köprüden yalnız bir kez geçerek tüm şehri dolaşabilmenin mümkün olup olmadığıdır."



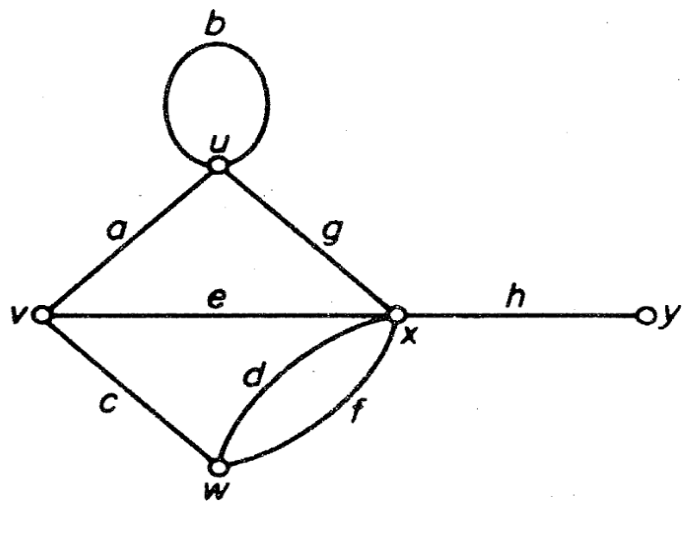
Şekil 1. Pregel nehri ve Königsberg'in yedi köprüsü

Euler bu sorunun çözümünü ararken graf teorisinin ilk temellerini atmıştır. Euler, problemi daha rahat incelemek için problemi bir şekil ile temsil etmiştir. Bu şekilde, şehirleri birer tepe, köprüleri ise ayrıtlar olarak göstermiştir. Euler bu şekil üzerinde incelemelerinden sonra böyle bir gezintinin mümkün olmadığını kanıtlamıştır (Gross and Yellen, 2004).

Birçok gerçek dünya problemi, birden fazla tepenin ve bu tepelerin bazı ikilileri arasında çizilmiş ayrıtların oluşturduğu bir diyagram aracılığıyla rahatça açıklanabilir. Örnek vermek gerekirse bu tepelere insanlar diyebiliriz ve bu insanlar arasındaki arkadaşlık durumunu da bir ayrıtla birbirlerine bağlayarak temsil edebiliriz. Farklı bir örnek vermek gerekirse tepeler iletişim merkezlerini temsil edebilir ve ayrıtlar da iletişim merkezlerinin birbirleri ile olan ilişkisini temsil edebilir. Bu tarz diyagramlarda, genellikle ilgilendiğimiz ilk durum, iki belirli tepe arasında bir ayrıt olup olmadığıdır. Bu noktaların nasıl bağlandığı önem teşkil etmez. Bu tür durumların matematiksel bir soyutlaması, graflar kavramını gündeme getirir. Bir G grafı $V(G)$ boştan farklı tepeler kümesi, $E(G)$ ayrıtları ve φ_G isimli bir ilişki fonksiyonundan oluşan bir sıralı üçlüden oluşur. Burada $V(G)$ grafın tepelerini (veya düğümlerini), $E(G)$ ise bu tepeler arasındaki ayrıtları temsil eder. φ_G fonksiyonu ise her bir ayrıta, G grafının tepeler kümesinden bir çift atar. Eğer bir e ayrıtı ve ayrıca u ile v tepeleri varsa ve $\varphi_G(e) = uv$ ise, o zaman e ayrıtı u ve v tepelerini bağlar deriz. Ayrıca u ve v, e ayrıtının uçları olarak adlandırılırlar (Bondy and Murty, 1976). Anlatılanların daha iyi anlaşılması için bir graf örneği verelim;

$G = (V(G), E(G), \varphi_G)$ grafı, $V(G) = \{u, v, w, x, y\}$ ve $E(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ kümeleri ile tanımlansın. Burada φ_G fonksiyonunu da şu şekilde tanımlanır;

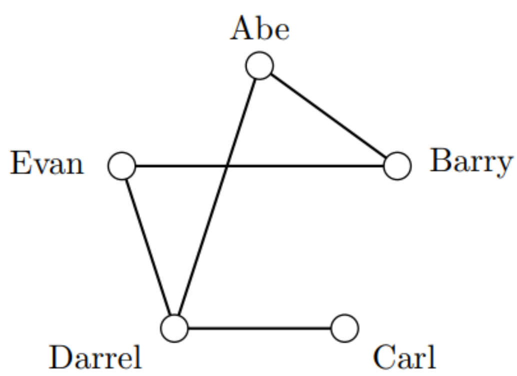
$\varphi_G(a) = uv$, $\varphi_G(b) = uu$, $\varphi_G(c) = vw$, $\varphi_G(d) = wx$, $\varphi_G(e) = vx$, $\varphi_G(f) = wx$, $\varphi_G(g) = ux$, $\varphi_G(a) = xy$.



Şekil 2. Bir G grafı örneği

Sosyal ağlar, günümüz yaşamında git gide daha fazla önem arz etmektedirler. İnternet üzerinde bir sosyal ağ, birçok insanın bu ağa üye olmasıyla oluşur. Bu bireyler, bazı diğer bireylerle arkadaşken, diğerleriyle arkadaş olmayabilir. Bu durum, gerçek hayattaki arkadaşlıkların sanal bir yansıması olarak açıklanabilir. Arkadaşlık dışında, insanlar arasındaki ilişki tanıdıklık veya biyolojik birer bağ olarak farklı şekillerde de kurulabilir. Farklı alanlarda ise daha özel birçok ilişki türünden bahsedilebilir. Örneğin, eğlence sektöründe iki kişinin daha önce birlikte çalışıp çalışmadığı sorusu farklı bir ilişki türü olarak verilebilir. Akademik dünyada ise, iki kişi arasında daha doğal bir ilişki türü olarak, birlikte herhangi bir makale yazıp yazmadıkları sorusu da bir ilişki türünü meydana çıkartabilir. Sosyal ağlar ile birlikte birçok soru ortaya çıkabilir. Örneğin, kimin en çok arkadaşı vardır? Hepsi birbiriyle arkadaş olan en bürük grup kaç kişiden oluşur? Birbirinden bağımsız iki kişi arasında bir ilişki kurmak için en az kaç kişiye ihtiyaç vardır?

Bu tür sorunları farklı bağlamlarda tek tek çözmek yerine, her durumu genel olarak tanımlayabilecek bir matematiksel model kullanabilmek hepimizin hem fikir olacağı şekilde çok daha etkin çözümler üretecektir. Böylece bir kez soyut bir düzeyde çözüm elde edebiliriz ve bu çözümleri farklı gerçek dünyadaki sorunlara da kolayca uygulayabiliriz. Bir sosyal ağı modellemek için, her bireyi bir tepe ile temsil edebilir ve iki kişi arkadaş olduğunda bu noktalar arasına bir ayrıt yerleştirebiliriz. Örneğin Abe, Barry ve Darrel ile arkadaştır. Barry, Abe ve Evan ile arkadaştır. Carl, Darrel ile arkadaştır. Darrel, Abe, Carl, ve Evan ile arkadaştır. Evan ise Barry ve Darrel ile arkadaştır. Bu arkadaşlıklar aşağıdaki şekilde görselleştirilebilirler;

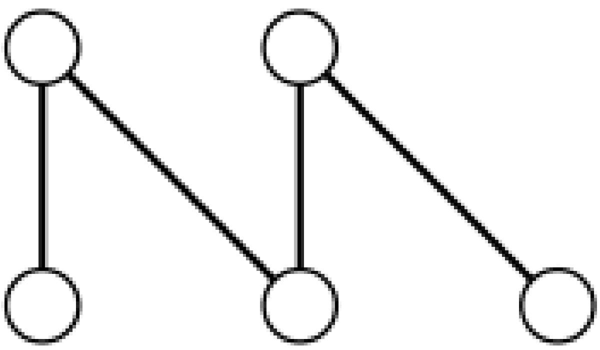


Şekil 3. Arkadaşlık bağlarını gösteren graf örneği

Yaptığımız bu modelleme farklı insanlar ya da olaylar arasındaki birçok ilişkiyi tanımlarken de kullanılabilir. Ayrıca gerçek dünyadaki birçok farklı problemin modellemesi yapılırken de bu tarz graflar sıkça kullanılmaktadırlar (Bickle,2020).

Tanım: n tepeli ve bağlantılı bir G grafı için eğer iki tepesinin derecesi 1 ve kalan tüm tepelerinin derecesi 2 ise bu grafa yol graf denir. P_n ile gösterilir.

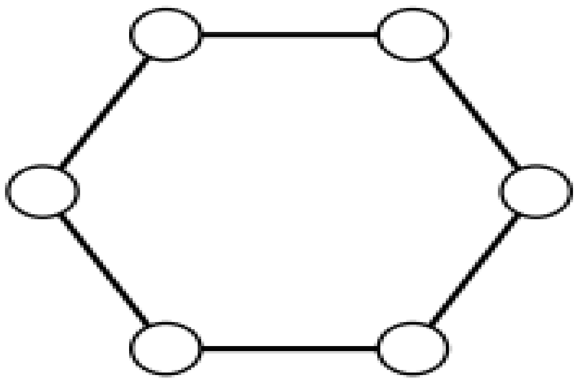
Örnek vermek gerekirse, n'e 5 değeri verilebilir ve P_5 grafı elde edilir.



Şekil 4. P_5 yol grafı

Tanım: n tepeli ve bağlantılı bir G grafı için eğer tüm tepelerinin derecesi 2 ise bu grafa çevre graf denir ve C_n ile gösterilir.

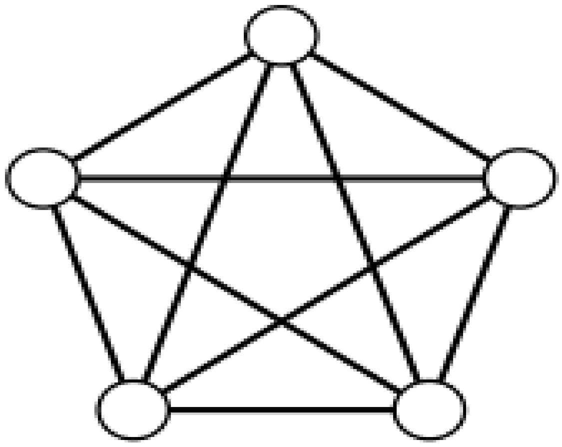
Örnek vermek gerekirse, n'e 6 değeri verilebilir ve C_6 grafı elde edilir.



Şekil 5. C_6 çevre grafı

Tanım: n tepeli ve bağlantılı bir G grafı için eğer tüm tepelerinin derecesi n-1 ise o zaman bu grafa bir tam graf denir ve K_n ile gösterilir.

Örnek vermek gerekirse, n'e 5 değeri verilebilir ve K_5 grafı elde edilir.



Şekil 6. K_5 tam grafı

2.2. Halka Teorisi

Halka teorisi, matematiksel bir dal olan soyut cebir içinde yer alan ve "halka" adı verilen bir yapıyı inceleyen bir teoridir. Halka teorisi, çeşitli cebirsel yapılar arasında olan ilişkileri ve bu yapıları inceleyerek, birçok matematiksel kavramın derinlemesine anlaşılmasına olanak tanır. Halka, belirli aksiyomlara dayalı olarak tanımlanır ve genellikle iki temel işlem olan toplama ve çarpma içerir. Halka teorisi, matematiksel yapılarla ilgili birçok alanda ve özellikle modern cebirsel geometri, sayılar teorisi, şifreleme teorisi gibi uygulamalarda önemlidir. Ayrıca, sayıların ve polinomların incelemesinde, algoritmaların geliştirilmesinde ve şifreleme sistemlerinde temel kavramlar sağlar (Dummett,1993).

Özetle, halka teorisi, cebirsel yapıları inceleyen bir alan olup, matematiksel soyutlamaları anlamamıza ve çeşitli matematiksel problemleri çözmemize yardımcı olur.

Tanım: Boştan farklı bir R kümesi için çarpma (.) ve toplama (+) olarak adlandırılan iki adet ikili işlem tanımlanmış olsun. $(R,+,.)$ cebirsel yapısını bir halka diyebilmemiz için aşağıdaki şartları sağlaması gerekmektedir;

- $(R,+)$ değişmeli bir gruptur.
- R kümesi çarpma işlemine göre kapalıdır. Yani $\forall a$,b ∈ R için ab ∈ R dir.
- R kümesi çarpma işlemine göre birleşme özelliğine sahiptir. Yani $\forall a$,b,c ∈ R için a(bc)=(ab)c dir.
- Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır. $\forall a$,b,c ∈ R için
  $a(b+c)=ab+ac$

  $a(b+c)=ab+ac$

  dir.

Tanım: $(R,+,.)$ halkası çarpma işlemine göre değişmeli ise, yani $\forall a$,b ∈ R için $ab=ba$ ise o zaman $(R,+,.)$ halkasına değişmeli halka denir.

Tanım $(R,+,.)$ halkasının birim elemanı varsa, yani $\forall a$ ∈ R için ;

$$a1_R=1_Ra=a$$

olacak şekilde bir 1_R ∈ R varsa o zaman $(R,+,.)$ halkasına birimli halka denir.

Tanım: $(R,+,.)$ halkası çarpma işlemine göre birleşmeli ise, yani $\forall a,b,c$ ∈ R için $(ab)c=a(bc)$ ise $(R,+,.)$ halkasına bileşmeli halka denir.

Tanım: Eğer bir $(R,+,.)$ halkası içinde barındırdığı her iki işlem için de birleşimliyse bu halkaya birleşimli halka denir.

Tanım: Sıfırdan farklı bir R halkasının sağ veya sol sıfır bölücüsü yoksa, yani herhangi bir a,b ∈ R için $ab\neq 0$ ise domain(alan) denir. Eğer R değişmeli domain(alan) ise o zaman integral domain(integral bölgesi) olarak adlandırılır.

Halka teorisi günümüzde birçok farklı alana hizmet etmektedir. Bunlardan birkaç tanesini inceleyelim;

- Kriptografi

Kriptografi, sadece bilgiyi görmesi gereken ve kodu kıracak anahtara sahip olan kişinin okuyabilmesini sağlamak için verileri gizleme veya kodlama tekniğidir. Modern kriptografik algoritmaların temelinde ise halka teorisi vardır. Halka teorisi RSA, açık anahtar ve özel anahtar gibi şifreleme yöntemlerinin alıştırılması ve geliştirilmesi için gerekli matematiksel altyapıyı sağlar (Stinson, 2006).

- Sayılar Teorisi

Sayılar teorisi temelinde doğal sayılar ve onların görece özellikleri ile alakalıdır. Sayılar teorisinin görece birçok alanının önemli bir temeli halka teorisidir. Modüler hesaplamalar, sayılar teorisinin en önemli bölümünü oluştururlar ve halkalar bu hesaplamaların düzenlenmesinde oldukça kullanışlıdırlar. Halka teorisi içerisinde birçok önemli matematiksel teori bulundurur. Bu teoriler asal çarpanlar, asal sayılar gibi matematiksel kavramlarla ilişkilidirler (Stinson, 2006).

- Kodlama Teorisi

Kodlama Teorisi, verilerin verimli ve güvenilir bir şekilde nasıl iletileceğini anlamaya adanmış, matematik ve bilgisayar biliminin büyüleyici bir alanıdır. Verimli kodlama yapmak veya hata düzeltmek için genellikle halka yapılarına yani halka teorisine başvurulur. Örneğin lineer kodlarda, kodlar çoğunlukla bir vektör uzayında halka yapıları olarak temsil edilirler (Huffman and Pless, 2003).

- Cebirsel Geometri

Cebirsel geometri alanı, geometrik şekillerin ve nesnelerin cebirsel denklemler yardımıyla incelendiği bir matematik dalıdır. Halka teorisi bu alanda özellikle polinom halkalarında kullanılır. Polinom katsayılarının oluşturduğu halkalar, cebirsel geometriyi modellemek ve analiz etmek için kullanılırlar. Halka teorisi ayrıca bu cebirsel yapıların çözüm kümelerinin incelenmesi için oldukça gereklidir (Huffman and Pless, 2003).

- Bilgisayar Bilimleri ve Yapay Zeka

Halka teorisi, algoritma tasarlarken bu algoritmanın doğruluğunu ve etkinliğini arttırmak için kullanılır. Özellikle bu algoritmaların optimizasyonları yapılırken oldukça etkilidir. Halka yapıları veri tabanlarındaki çeşitli sorgulamalarda, ilişki yönetimlerinde ve benzeri sorunların giderilmesinde önemli rol alır (Cormen et al., 2006).

- Ekonomi ve Oyun Teorisi

Halka teorisi, paylaşım ve kaynak dağılımı problemlerinde erkin rol alır. Stratejik oyunların ve kaynak paylaşımının analizinde matematiksel model olarak kullanılır. Verilecek olan ekonomik kararlar ve stratejiler, halkalar ve gruplar üzerindeki analizlerle modellenir (Osborne and Rubinstein, 1994).

3. ZERO DIVISOR GRAFLAR VE VERTEX COVER PROBLEMİ

3.1. Zero Divisor Graflar

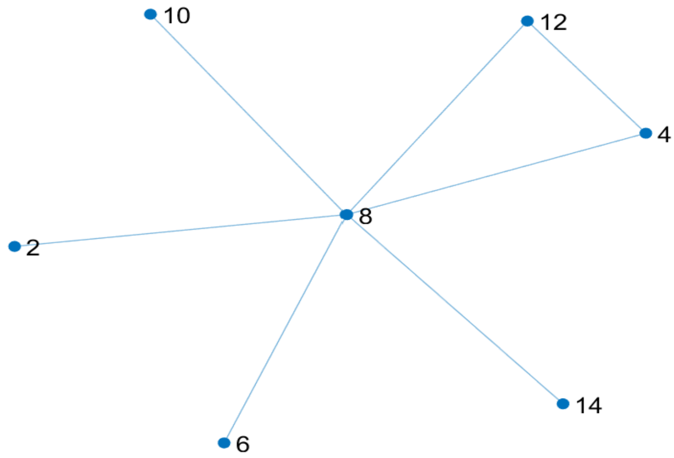
Son yıllarda cebirsel yapıların özelliklerini incelemek amacıyla graf teorisi ile yapılan çalışmalar ilgi çekici bir araştırma alanı halini almıştır. Dolayısıyla sıklıkla kullanılan cebirsel yapılardan grup veya halkanın farklı elemanları üzerinden graf tanımlanıp tanımlanamayacağını, eğer bir graf tanımlanabilirse bu grafın hangi graf ailesine ait olacağını ve bu grafın parametrelerinin veya matrislerinin hesaplanıp hesaplanamayacağı araştırılmaktadır. Cebirsel olarak halka veya grupların alt grup, alt halka yapıları oluşurken grafların da benzer alt yapılarının oluşturulup oluşturulamayacağı önemli sorular halini almıştır. Sıfır bölen graflar da bu özel cebirsel yapıların içinde olup son dönemde birçok araştırmaya ilham olmuşlardır (Anderson and Livingston,1999; Anderson and Naseer, 1991).

Sıfır bölen grafları, Irwin Beck(1988) ilk kez yaptığı çalışmada değişmeli halkalar üzerinde gösterdi. $\Gamma(R)$ Notasyonunu da ilk defa bu çalışmasında kullandı.

Tanım: R birimli ve değişmeli bir halka olsun. R' nin sıfır bölenlerinin kümesi de $Z(R)$ olsun**.** R'nin sıfır bölen grafı $\Gamma(R), Z(R)^* = Z(R) - \{0\}$ tepe kümesi ile bir graf temsil eder. Öyle ki $x \neq y$ ve $x, y \in Z(R)^*$ için x ve y arasında bir ayrıt vardır ancak ve ancak $xy = 0$.

Eğer R integral bölgesi ise $\Gamma(R)$' nin boş graf olacağı açıktır. Çünkü integral bölgeleri sıfır-bölen elemana sahip değildir.

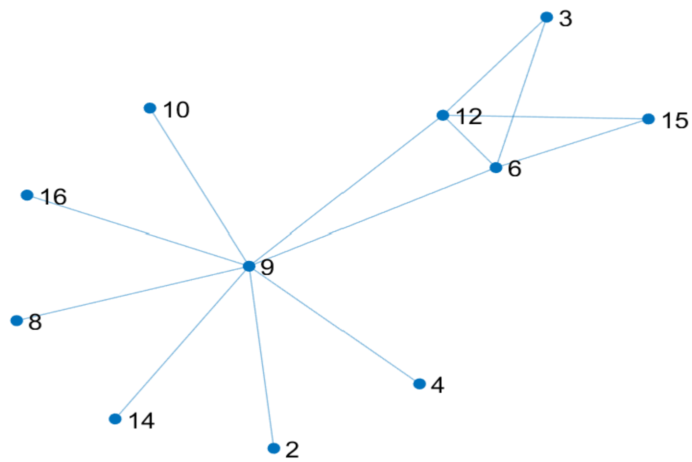
Birkaç örnek ile görseller üzerinde bu grafları inceleyelim. Bunun için öncelikle $\mathbb{Z}_{16}$ grafını inceleyelim;



Şekil 7. $\mathbb{Z}_{16}$ Zero divisor grafi

Görselde de rahatlıkla görebileceğimiz üzere $\mathbb{Z}_{16}$ grafının tepeler kümesi $V(\mathbb{Z}_{16}) = \{2,4,6,8,10,12,14\}$ noktalarından oluşur. Mod 16 ya göre çarpımları 0'a denk gelen tepeler arasına ayrıtlar çizilmiştir.

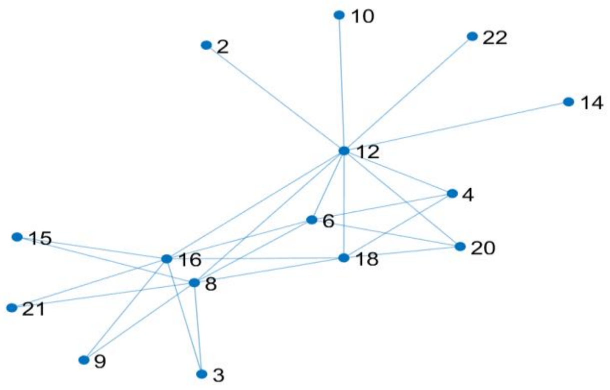
Şimdi de $\mathbb{Z}_{18}$ grafını görsel üzerinde inceleyelim;



Şekil 8. $\mathbb{Z}_{18}$ Zero divisor grafi

Görselde de rahatlıkla görebileceğimiz üzere $\mathbb{Z}_{18}$ grafının tepeler kümesi $V(\mathbb{Z}_{18}) = \{2,3,4,6,8,9,10,12,14,15,16\}$ noktalarından oluşur. Mod 18e göre çarpımları 0'ı veren tepeler arasına ayrıtlar çizilmiştir.

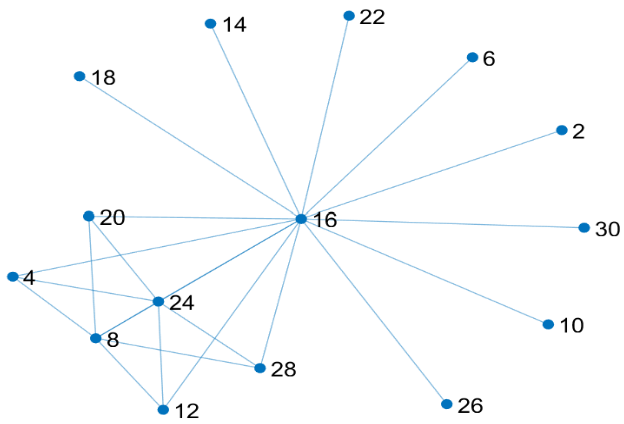
Şimdi de $\mathbb{Z}_{24}$ grafını görsel üzerinde inceleyelim;



Şekil 9. $\mathbb{Z}_{24}$ Zero divisor grafi

Görselde de rahatlıkla görebileceğimiz üzere $\mathbb{Z}_{24}$ grafının tepeler kümesi $V(\mathbb{Z}_{24}) = \{2,4,6,8,9,10,12,14,15,16,18,20,21,22\}$ noktalarından oluşur. Mod 24 ya göre çarpımları 0'ı veren tepeler arasına ayrıtlar çizilmiştir.

Şimdi de $\mathbb{Z}_{32}$ grafını görsel üzerinde inceleyelim;



Şekil 10. $\mathbb{Z}_{32}$ Zero divisor grafi

Görselde de rahatlıkla görebileceğimiz üzere $\mathbb{Z}_{32}$ grafının tepeler kümesi $V(\mathbb{Z}_{32}) = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30\}$ noktalarından oluşur. Mod 32 ye göre çarpımları 0'ı veren tepeler arasına ayrıtlar çizilmiştir.

3.2. Vertex Cover

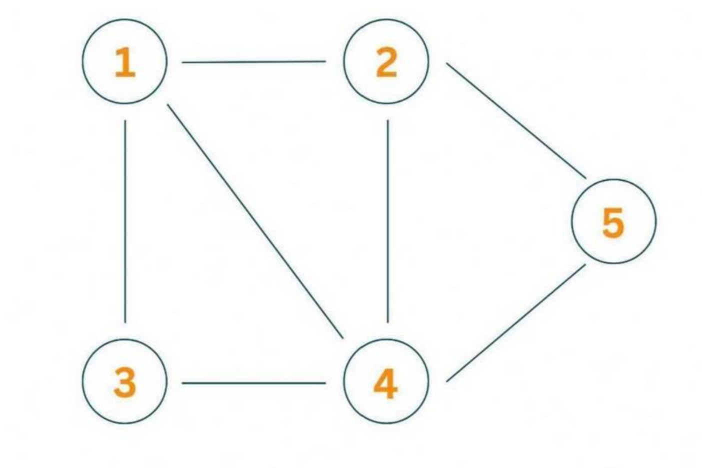
Vertex cover, bir graf teorisi terimidir ve bir grafın her ayrıtını en az bir tepe ile kapsayan tepeler kümesidir. Yani, grafın her ayrıtının tepelerinden en az birinin, bu kümede yer alması gerekmektedir. Bu problem, optimizasyon teorisi açısından önemlidir ve genellikle ağ güvenliği, veri akışı ve kaynak yönetimi gibi alanlarda kullanılır. Bu tür problemler, özellikle algoritmaların tasarımı ve çözüm stratejilerinin geliştirilmesi bakımından önemli bir araştırma konusu oluşturur (West, 2001).

3.2.1. Minimum Vertex Cover

Vertex cover kümesi, yakınsama algoritmaları ve graf teorisi konularında üzerinde çokça çalışılan bir problemdir. Vertex cover problemi, E ayrıtlar kümesi, V düğüm kümesi olmak üzere $G(V, E)$ ile ifade edilen bir graf üzerinde seçilen bir $C \subseteq V$ kümesinin grafda bulunan tüm $e \in E$ ayrıtlarını kapsamayı amaçlar. Vertex cover kümsenin matematiksel tanımını, $C \subseteq V \mid (u, v) \in E\ u \in C \lor v \in V$ olarak vermek mümkündür. Bu küme içerisinde en az elemana sahip olana minimum vertex cover denir. Minimum vertex cover problemi NP-hard sınıfındadır ve polinom zamanda kesin çözüm sunan bir algoritma bulunmamaktadır. Ancak açgözlü algoritmalar ve yakınsama algoritmaları kullanılarak en iyiye yakın sonuçları, polinom zamanda elde etmek mümkündür (Karp,1972; Kiraly and Abonyi, 2011).

Bu problemin günlük yaşamda da birçok alanda karşılığı vardır. Bu yüzden üzerine pek çok araştırma yapılmıştır. Problemin temeli bir optimizasyon problemidir. Problem bir NP-Hard problem olduğu için tam sonucu polinom zamanda verecek bir algoritma yazmak mümkün fakat bu algoritmanın kümeler büyüdükçe kabul edilebilir bir sürede çalışması olanaksızdır. Şu ana kadar bir çok araştırmacı bu problem üzerine farklı algoritmalar yazmıştır. Bu algoritmalar yakınsama algoritmaları olup tam sonucu vermeseler de kabul edilebilir bir sürede çalışırlar. Minimum vertex cover problemi bir optimizasyon problemi olduğu için amaç kümeyi minimize edip maliyetten yada zamandan kazanmak ile alakalıdır (Vazirani,2001).

Konuyu pekiştirmek için küçük bir örnek verip kombinatoryal yöntemlerle bir graf üzerinde problemi inceleyelim;



Şekil 11. G_1 Grafı

Elimizde 5 tepeli ve 7 ayrıtlı bir G_1 grafı var. Problemin tanımı gereği öyle tepeler seçilmeli ki tüm ayrıtların en az bir ucu bu seçilen küme içerisinde olsun. Tam sonucu bulmak ve problemi anlamak için bu örnek üzerinde çalışıyoruz, bunun için kombinasyonel olarak tüm kümeler incelenmeli. Amaç bu kümeyi minimize etmek olduğu için önce tek elemanlı kümelerle başlayıp arttırarak bu kümelerin tüm ayrıtları örtüp örtmediğini konrol edilir. Bunu bir tablo üzerinde çalıştıralım;

Tablo 1. Minimum vertex cover örneği

Kümenin Eleman Sayısı	Seçilen Tepeler	Örtülen Ayrıt Sayısı
1	{1}	3
	{2}	3
	{3}	2
	{4}	3
	{5}	2
2	{1,2}	5
	{1,3}	4
	{1,4}	6
	{1,5}	5
	{2,3}	5
	{2,4}	6
	{2,5}	4
	{3,4}	5
	{3,5}	4

	{4,5}	5
3	{1,2,3}	6
	{1,3,5}	6
	{1,3,4}	6
	{1,2,4}	7

Elimizdeki 7 ayrıtın tümü seçilen 3 elemanlı küme ile örtülebildiği için daha fazla işlem yapılmasına gerek yok. Bu durumda {1,2,4} numaralı tepeler seçilerek grafın tüm ayrıtları örtüldü ve artık bu küme G_1 grafının minimum vertex cover kümesidir. Ancak unutmamak lazım ki minimum vertex cover kümesi grafta yalnız bir tane olmak zorunda değildir. Fakat işlemin daha fazla uzamaması için bulunan ilk minimum vertex cover kümesinde algoritma tamamlandı.

Minimum vertex cover problemi günlük hayatta karşımıza nerelerde çıkıyor ve kullanım alanları neler bunları inceleyelim;

- Ağ Güvenliği ve Yönetimi

Günümüzde hepimizin çokça kullandığı iletişim cihazlarımızın birbiriyle olan iletişimi belirli ağlar üzerinde yapılır ve bilgi transferleri de bu ağlar aracılığla gerçekleştirilir. Eğer bu ağların güvenliğini sağlamak amacıyla güvenlik noktaları seçilmek istenirse hem maliyet açısından hem de yönetilebilirliği ve maliyeti açısından bu güvenlik noktalarının en az sayıda olanı seçilmek istenir. Bu güvenlik noktalarının mümkün olan en az sayıda olanını seçmek için Minimum Vertex Cover kümesini bulmak sorunumuzun çözümü olarak karşımıza çıkar (Kleinberg and Tardos, 2006).

- Biyoinformatik ve Genetik Ağlar

Tıp alanında çokça çalışılan, genetik ve protein etkileşim ağları üzerine yapılan araştırmalarda genetik etkileşimleri modellemek için Minimum Vertex Cover problemi etkili bir biçimde kullanılabilir. Ayrıca protein moleküllerinin birbiriyle olan durumlarını ve bağlantılarını modellemek amacıyla da etkin bir şekilde kullanılırlar. Etkileşimleri etkili bir şekilde analiz edebilmek ve genetik veriler üzerinde çalışırken mümkün olan en küçük kümeyi elde edebilmek için kullanılırlar (Barabási and Albert, 1999).

- Sosyal Ağlar

Sosyal ağlar, bireylerin veya kuruluşların bağlantılarını örnek olarak Facebook'u verebiliriz ve bu bağlantılar veri tabanında depolanırlar. Bir sosyal ağda önemli olan merkezleri veya etkileşimleri belirlemek için olabilecek en küçük kümeyi seçmek için Minimum Vertex Cover problemi kullanılabilir. Minimum Vertex Cover kümesi, ağ yapılarının analizinde kritik olan etkileşim noktaları belirlenirken sıkça kullanılırlar (Barabási and Albert, 1999).

- Çeşitli yerleşim yeri problemleri

Yerleşim yerlerinde çeşitli görevleri gerçekleştirmek amacıyla belirli merkezlerin veya araçların yerleştirilmesi için lokasyon aranırken kullanılırlar. Seçilecek olan lokasyonların etkin bir biçimde kullanılabilmesi ve mümkün olan en az kaynağı harcayarak bunları yerleştirebilmek amacıyla Minimum Vertex Cover problemi kullanılabilir. Örnek olarak itfaiiye noktaları seçilirken şehrin her yerine müdahele kolaylığı ve etkinliği için uygun lokasyonları bulmakta kullanılır (Daskin, 1995).

- İlişkisel veritabanları ve veri kümesi sıkıştırma

İlişkisel veritabanlarında eldeki veriler minimum sayıda anahtar noktada toplanmak istendiğinde Minimum Vertex Cover problemi etkin şekilde kullanılabilir. Bu yöntem , veri iletişimlerini optimize etmek ve bu veritabanında yapılacak olan sorgulamaları hızlandırmak amacıyla kullanılır. Bu şekilde hem maliyetten kaçınılır hem de optimizasyonu çok daha kolay olur (Abiteboul et al., 1995).

3.2.2. Vertex Cover Polinomu

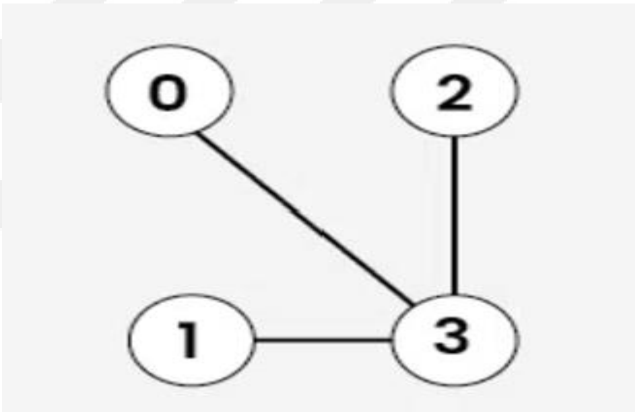
Bir G grafı için, $V\,(G)$ tepeler kümesi , $E\,(G)$ ayrıtlar kümesi olsun. $v\,(G)$ ve $e\,(G)$ ise bu kümelerin boyutları olsun. Boş graf G, $v\,(G)$=0 ile tanımlanır. Bir G grafı için, $V' \subseteq V(G)$ kümesi G grafının r-vertex cover'ı denir. Eğer, $\forall\, xy \in E(g)$ için $|V'| = r$ ve $V' \cap \{x, y\} \neq \emptyset$. $VC(G, r), G$ grafının bir r-vertex cover kümesi kabul edelim ve vc(G,r)=$|VC(G, r)|$ olsun. Eğer $r < 0$ yada $r > v(G)$ ise vc(G,r)=0 olarak gözlemleriz (Chung and Graham, 1995). Vertex cover polinomunun genel fonksiyonu;

$$\psi\ (G,x) = \sum_{r=0}^{v(g)} \mathrm{vc(G,r)} x^r\ ,$$

olarak tanımlanır.

Vertex cover polinomu bir G grafı üzerindeki tüm vertex cover kümelerinin bulunmasıyla elde edilir. Vertex cover problemi kombinatorik bir problemdir. Vertex cover polinomu ise bu problemin daha iyi anlaşılmasına ve üzerinde matematiksek çıkarımlar yapılmasına olanak sağlar. Aslında bu polinom grafın vertex cover kümelerinin sayılarını modeller. Vertex cover polinomu verimli hesaplama yaparken ve teorik analiz yapılması gereken durumlarda etkili olarak kullanılabilir (Berge, 1985).

Küçük bir örnek verip bu polinomun nasıl hesaplandığını daha iyi kavramaya çalışalım;



Şekil 12. G_2 *Grafı*

$\mathrm{G_2}$ grafının tepeleri {0,1,2,3} tepelerinden oluşmaktadır ve grafta 4 adet tepe, 3 adet ayrıt bulunmaktadır.

Tablo 2. Vertex cover polinomu örneği

Kümenin Eleman Sayısı	Seçilen Tepeler	Örtülen Ayrıt Sayısı
1	{0}	1
	{1}	1
	{2}	1
	{3}	3
2	{0,1}	2
	{0,2}	1

	{0,3}	3
	{1,2}	2
	{1,3}	3
	{2,3}	3
3	{0,1,2}	3
	{1,2,3}	3
	{0,1,3}	3
	{0,2,3}	3
4	{0,1,2,3}	3

Grafta 3 adet ayrıt bulunduğu için 3 ayrıtın 3'ünü de örten tüm kümeler bu graf için vertex cover kümeleri olur. Olası tüm kombinasyonları incelediğimiz için tablodaki kümelerin dışında başka bir vertex cover kümesi yoktur. Bu durumda olası tüm vertex cover kümeleri elde edilmiş olur. Elde edilen tüm vertex cover kümeleri;

{{3},{1,3},{2,3},{0,3},{0,1,2},{1,2,3},{0,1,3},{0,2,3},{0,1,2,3}}

Elde edilen tüm vertex cover kümeleri yukarıda listelenmiştir. Bu durumda elimizde 1 elamanlı 1 adet, 2 elemanlı 3 adet, 3 elemanlı 4 adet ve 4 elemanlı 1 adet vertex cover kümesi vardır. Vertex cover polinomunun tanımı, elde edilen kümelere uygulanırsa;

$\psi\ (\mathrm{G}_2, x) = x^1 + 3x^2 + 4x^3 + x^4$,

polinomu verilen graf için vertex cover polinomudur.

4.ZERO DİVİSOR GRAFLARDA VERTEX COVER POLİNOMU

Öncelikle sıfır bölen grafların asal çarpanlar şeklinde düzenlediğimizde birden fazla çeşit zero divisor graf türünün olduğunu görürüz. Biz araştırmamızda bunlardan yaygın olanlarını inceleyeceğiz. Zero divisor grafların asal çarpanlarına ayrılmış hallerinin yaygın olanlarını tanımlayalım; p,q ve r asal sayılar olmak üzere ”$\mathbb{Z}_{2p}, \mathbb{Z}_{p^2}, \mathbb{Z}_{pq}$” formantında olanlar zero divisor grafların en yaygın olanlarıdır (Gürsoy vd., 2022).

4.1. $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})$ Zero Divisor Grafı

Burada p asal sayı olmak üzere “$2p$” şeklinde bir asal sayının iki katı şeklinde yazılabilen graflardır. Aslında “$\mathbb{Z}_{2p}$” grafları iki parçalı grafların özel hali olan yıldız graflara izomorfturlar, yani $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p}) \cong \mathrm{K}_{1,\mathrm{p}-1}$ dur. Bu graflara örnek vermek istenirse p’ye asal değerler verilmesi yeterli olacaktır. “p=5” değeri verilirse ”$\mathbb{Z}_{10}$” grafı elde edilir. Bu grafın tepeleri “2,4,5,6,8” noktalarından oluşur. “$\mathbb{Z}_{2p}$” grafı iki parçalı tam graflara izomorf olduğu için tepeler kümesi iki farklı gruba ayrılabilir. Bu kümelerin tanımı;

$$V_1 = \{px \mid x = 1\},$$

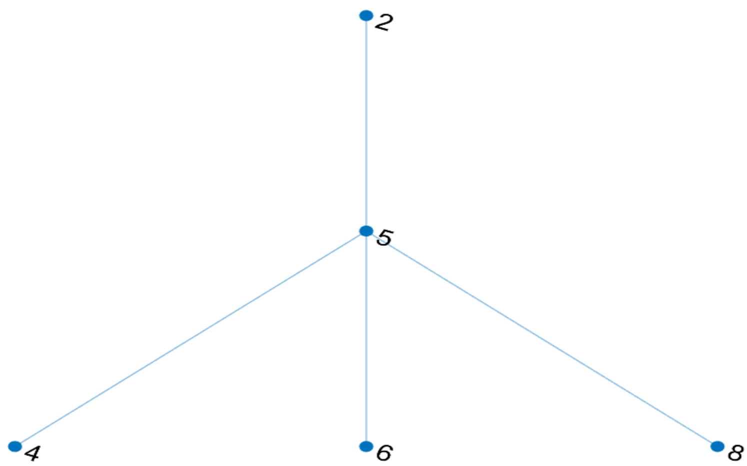
$$V_2 = \{2x \mid x = 1, \dots, p-1\},$$

olarak verilebilir. Öyle ki burada $|V_1| = 1\ ve\ |V_2| = p - 1$ olacaktır. Bu tanımlara uygun şekilde “$\mathbb{Z}_{10}$” grafının tepeler kümesini iki farklı tepe kümesi şeklinde ayrılırsa;

$$V_1 = \{5\},$$

$$V_2 = \{2,4,6,8\},$$

kümeleri elde edilir.



Şekil 13. $\mathbb{Z}_{10}$ Zero divisor grafi

Grafın kendisine bakıldığı zaman açıktır ki V_1 kümesi $\Gamma(\mathbb{Z}_{10})$ grafının minumum vertex cover kümesidir. Ancak vertex cover polinomunu elde etmek için olası tüm vertex cover kümelerinin elde edilmesi gereklidir. Bunun için olası tüm kümeleri inceleyen bir matlab kodu kullanılabilir. Aşağıdaki tabloda her k adımda yani k elemanlı vertex cover kümeleri listelenmiştir. Burada $k = \{1, \dots, p\}$

Tablo 3. $\mathbb{Z}_{10}$ Zero divisor grafi için vertex cover polinomu algoritma çıktısı

k değerleri	**Vertex cover kümeleri**	**Kümelerin elemanları**
k=1	1. vertex cover	{5}
k=2	1. vertex cover	{2,5}
	2. vertex cover	{4,5}
	3. vertex cover	{5,6}
	4. vertex cover	{5,8}
k=3	1. vertex cover	{2,4,5}
	2. vertex cover	{2,5,6}
	3. vertex cover	{2,5,8}
	4. vertex cover	{4,5,6}
	5. vertex cover	{4,5,8}
	6. vertex cover	{5,6,8}
k=4	1. vertex cover	{2,4,5,6}
	2. vertex cover	{2,4,5,8}

	3. vertex cover	{2,4,6,8}
	4. vertex cover	{2,5,6,8}
	5. vertex cover	{4,5,6,8}
k=5	1. vertex cover	{2,4,5,6,8}

Tabloda elde edilen tüm vertex cover kümeleri, vertex cover polinomunun tanımı kullanılarak düzenlenirse, $\Gamma(\mathbb{Z}_{10})$ grafının vertex cover polinomunu;

$$Vc\big(\Gamma(\mathbb{Z}_{10})\big) = x^1 + 4x^2 + 6x^3 + 5x^4 + x^5,$$

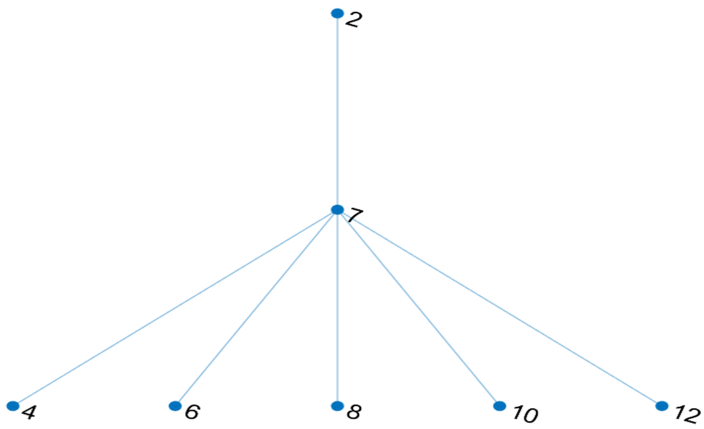
olarak elde edilir.

Bu polinomun katsayıları kombinatoryal yöntemlerle incelendiğinde;

$$\binom{4}{0}x^1 + \binom{4}{1}x^2 + \binom{4}{2}x^3 + (\binom{4}{3} + 1)x^4 + \binom{4}{4}x^5$$

formunda düzenlenebilir.

Şimdi de "p=7" değeri için oluşacak olan graf incelenirse, yani $\Gamma(\mathbb{Z}_{14})$ grafını çizdirilirse, bu grafın tepe noktaları "2,4,6,7,8,10,12" sayılarından oluşur.



Şekil 14. $\mathbb{Z}_{14}$ *Zero divisor grafı*

Yine elimizdeki tanım ile bu grafın vertex cover polinomu elde edilmek istenirse;

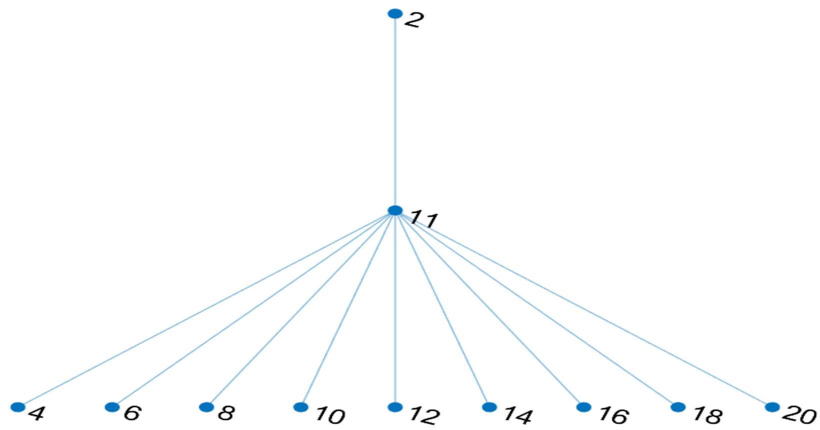
$$Vc\big(\Gamma(\mathbb{Z}_{14})\big) = x^1 + 6x^2 + 15x^3 + 20x^4 + 15x^5 + 7x^6 + x^7,$$

polinomu $\Gamma(\mathbb{Z}_{14})$ grafının vertex cover polinomu olur. Bu polinomun katsayıları kombinatoryal yöntemlerle incelendiğinde;

$$\binom{6}{0}x^1 + \binom{6}{1}x^2 + \binom{6}{2}x^3 + \binom{6}{3}x^4 + \binom{6}{4}x^5 + (\binom{6}{5} + 1)x^6 + \binom{6}{6}x^7$$

formunda düzenlenebilir.

Şimdi de "p=11" değeri için oluşacak olan graf incelenmek istenirse, yani $\Gamma(\mathbb{Z}_{22})$ grafı çizdirilmek istenirse, bu grafın tepe noktaları {2,4,6,8,10,11,12,14,16,18,20} sayılarından oluşur.



Şekil 15. $\mathbb{Z}_{22}$ Zero divisor grafı

Yine elimizdeki tanım ile bu grafın vertex cover polinomu elde edilmek istenirse;

$$Vc(\Gamma(\mathbb{Z}_{22})) = x^1 + 10x^2 + 45x^3 + 120x^4 + 210x^5 + 252x^6 + 210x^7 + 120x^8 + 45x^9 + 11x^{10} + x^{11}\ ,$$

polinomu $\Gamma(\mathbb{Z}_{22})$ grafının vertex cover polinomudur. Bu polinomun katsayıları kombinatoryal yöntemlerle incelendiğinde;

$$\binom{10}{0}x^1 + \binom{10}{1}x^2 + \binom{10}{2}x^3 + \binom{10}{3}x^4 + \binom{10}{4}x^5 + \binom{10}{5}x^6 + \binom{10}{6}x^7 + \binom{10}{7}x^8 + \binom{10}{8}x^9 + (\binom{10}{9} + 1)x^{10} + \binom{10}{10}x^{11}$$

formunda düzenlenebilir. İlk örnekten bu yana kombinatoryal yöntemlerle incelenen tüm formüller genelleştirildiğinde;

$$Vc(\mathbb{Z}_{2p}) = \left(\sum_{i=0}^{|V_2|-2} \binom{|V_2|}{i} x^{i+1} \right) + \left(\binom{|V_2|}{|V_2|-1} + 1 \right) x^{|V_2|} + x^{|V_2|+1}$$

formülünü elde ederiz.

Teorem 4.1 P bir asal sayı olsun ve $2 < p$ olsun. O zaman $\mathbb{Z}_{2p}$ zero divisor grafının vertex cover polinomu;

$$Vc(\mathbb{Z}_{2p}) = \left(\sum_{i=0}^{p-3} \binom{p-1}{i} x^{i+1} \right) + \left(\binom{p-1}{p-2} + 1 \right) x^{p-1} + x^{p}$$

dur.

İspat $\mathbb{Z}_{2p}$ zero divisor grafları $\mathrm{K}_{1,\mathrm{p}-1}$ iki parçalı tam graflara izomorfturlar. Yani $\Gamma(\mathbb{Z}_{2p}) \cong \mathrm{K}_{1,\mathrm{p}-1}$ dur. Bu durumda $\mathbb{Z}_{2p}$ grafının tepeler kümesini iki farklı kümede tanımlayabiliriz;

$V_1 = \{px \mid x = 1\}$,

$V_2 = \{2x \mid x = 1, \dots, p-1\}$,

$|V_1| = 1$,

$|V_2| = p - 1$

dur. $\mathbb{Z}_{2p}$ zero divisor grafının vertex cover polinomunu elde etmek için incelenmesi gereken 3 farklı durum vardır.

Durum 1. $\mathbb{Z}_{2p}$ grafının iki parçalı tam grafların özel hali olan yıldız graflara izomorf olmasından dolayı, V_1 kümesindeki bir elemanın V_2 kümesindeki tüm elemanlar ile arasında bir ayrıt vardır. Bu durumda eğer V_1 kümesini tek başına seçersek graftaki her ayrıtın en az bir tepesi bu kümenin içinde olur. O zaman V_1 kümesi $\mathbb{Z}_{2p}$ zero divisor grafı için bir vertex cover'dır.

Durum 2. V_1 kümesi, $\mathbb{Z}_{2p}$ grafı için bir vertex cover dır. Bu nedenle V_2 kümesindeki tüm tepelerin (n=1,…,p-1), n'li kombinasyonlarının oluşturduğu tüm kümelerin, V_1 kümesi ile birleşimi $\mathbb{Z}_{2p}$ grafı için bir vertex cover'dır.

Durum 3. $\mathbb{Z}_{2p}$ grafının iki parçalı tam grafların özel hali olan yıldız graflara izomorf olmasından dolayı, V_2 kümesindeki tüm elemanların, V_1 kümesindeki eleman ile arasında bir ayrıt vardır. Bu durumda eğer V_2 kümesini tek başına seçersek graftaki her ayrıtın en az bir tepesi bu kümenin içinde olur. O zaman V_2 kümesi $\mathbb{Z}_{2p}$ zero divisor grafı için bir vertex cover'dır.

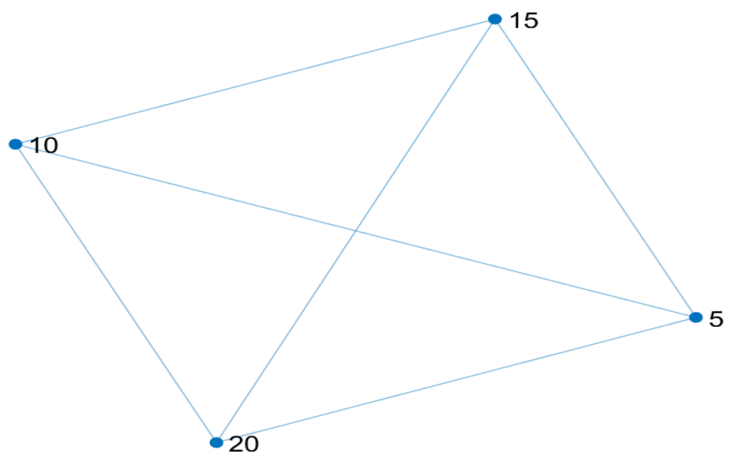
Yukarıda incelenen üç durumun sonucunda, $\mathbb{Z}_{2p}$ zero divisor grafının vertex cover polinomu;

$$Vc(\mathbb{Z}_{2p}) = \left(\sum_{i=0}^{p-3} \binom{p-1}{i} x^{i+1}\right) + \left(\binom{p-1}{p-2} + 1\right) x^{p-1} + x^p$$

dur.

4.2. $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})$ Zero Divisor Grafı

Burada p asal sayı olmak üzere "p^2" şeklinde bir asal sayının karesi şeklinde yazılabilen graflardır. $\mathbb{Z}_{p^2}$ zero divisor grafları tam graflara izomorfturlar, yani $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2}) \cong K_{p-1}$ dur. Bu graflara örnek olması için p'ye asal değerler verilir. "p=5" değerini verilirse "$\mathbb{Z}_{25}$" grafı elde edilir. Bu grafın tepeleri "5,10,15,20" noktalarından oluşur.



Şekil 16. $\mathbb{Z}_{25}$ Zero divisor grafı

Vertex cover polinomunu elde etmek için olası tüm vertex cover kümeleri elde edilmelidir. Bunun için olası tüm kümeleri inceleyen bir matlab kodu kullanılabilir. Aşağıdaki tabloda her k adımda yani k elemanlı vertex cover kümeleri listelenmiştir. Burada $k = \{1, \dots, p-1\}$

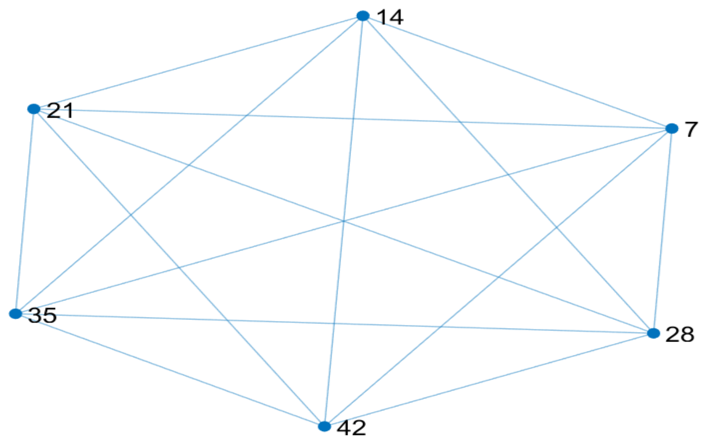
Tablo 4. $\mathbb{Z}_{25}$ Zero divisor grafı için vertex cover polinomu algoritma çıktısı

k değerleri	**Vertex cover kümeleri**	**Kümelerin elemanları**
k=1	Vertex cover yok	∅
k=2	Vertex cover yok	∅
k=3	1. vertex cover	{5,10,15}
	2. vertex cover	{5,10,20}
	3. vertex cover	{5,15,20}
	4. vertex cover	{10,15,20}
k=4	1. vertex cover	{5,10,15,20}

Tabloda elde edilen vertex cover kümeleri, vertex cover polinomunun tanımını kullanılarak düzenlenirse, $\Gamma(\mathbb{Z}_{25})$ grafının vertex cover polinomunu;

$Vc(\Gamma(\mathbb{Z}_{25})) = 4x^3 + x^4$, olarak elde edilir.

Şimdi de "p=7" değeri için oluşacak olan graf incelenirse, yani $\Gamma(\mathbb{Z}_{49})$ grafı incelenirse. Bu grafın tepe noktaları "7,14,21,28,35,42" sayılarından oluşur.



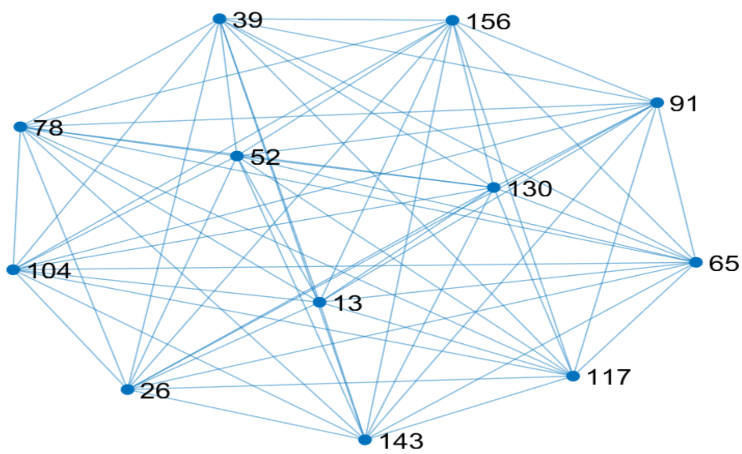
Şekil 17. $\mathbb{Z}_{49}$ Zero divisor grafı

Yine vertex cover polinom tanımı ile bu grafın vertex cover polinomu elde edilirse;

$Vc(\Gamma(\mathbb{Z}_{49})) = 6x^5 + x^6$,

polinomu $\Gamma(\mathbb{Z}_{49})$ grafının vertex cover polinomudur.

Şimdi de “p=13” değeri için oluşacak olan graf incelendi, yani $\Gamma(\mathbb{Z}_{169})$ grafı çizdirildi. Bu grafın tepe noktaları $\{13,26,39,52,65,78,91,104,117,130,143,156\}$ sayılarından oluşur.



Şekil 18. $\mathbb{Z}_{169}$ Zero divisor grafı

Yine bilinen vertex cover polinomu tanımı ile bu grafın vertex cover polinomunu elde edilmek istenirse;

$Vc(\Gamma(\mathbb{Z}_{169})) = 12x^{11} + x^{12}$,

polinomu $\Gamma(\mathbb{Z}_{169})$ grafının vertex cover polinomudur.

İncelenen tüm graf polinomlarında da görüldüğü üzere $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})$ bir tam graftır. K_n tam grafının vertex cover polinomu $x^n + nx^{n-1}$ dur.

Teorem 4.2 P bir asal sayı ve $2 < p$ olmak üzere, $\mathbb{Z}_{p^2}$ sıfır bölen grafının vertex cover polinomu;

$$Vc\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})\right) = x^{p-1} + (p-1)x^{p-2}$$

dur.

İspat $\mathbb{Z}_{p^2}$ zero divisor grafları K_{p-1} tam graflara izomorfturlar. Yani $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2}) \cong K_{p-1}$ dur. Bu durumda $\mathbb{Z}_{p^2}$ grafının tepeler kümesi şu şekilde tanımlanır;

$V_1 = \{px \mid x = 1, \dots, p-1\}$,

$|V_1| = p - 1,$

olur. $\mathbb{Z}_{p^2}$ zero divisor grafının vertex cover polinomunu elde etmek için incelenmesi gereken 2 farklı durum vardır.

Durum 1. $\mathbb{Z}_{p^2}$ zero divisor grafları tam graflara izomorfturlar. Yani grafın her tepesinin geriye kalan tüm tepeler ile arasında bir ayrıt vardır. Bu durumda eğer grafın tüm tepelerini bir küme içerisinde seçersek, vertex cover tanımı gereği bu küme $\mathbb{Z}_{p^2}$ zero divisor grafı için bir vertex cover'dır.

Durum 2. $\mathbb{Z}_{p^2}$ zero divisor grafları tam graflara izomorfturlar. Yani grafın her tepesinin geriye kalan tüm tepeler ile arasında bir ayrıt vardır. Eğer grafın tüm tepelerinden herhangi bir tepe çıkartılıp bir küme seçilirse. Seçilen bu küme graftaki tüm ayrıtların en az bir tepesini içerisinde barındırır. O zaman $p - 1$ tepeli $\mathbb{Z}_{p^2}$ zero divisor grafının $\binom{p-1}{p-2} = p - 1$ adet $p - 2$ elemanlı vertex cover kümeleri vardır.

Eğer grafın tüm tepelerinden 2 tepe çıkartıp bir küme oluşturulursa, $\mathbb{Z}_{p^2}$ grafı tam graflara izomorf olduğu için çıkartılan bu iki tepe arasında da bir ayrıt vardır ve bu ayrıtın herhangi bir tepesi seçilen bu küme içerisinde olamayacağı için, seçilen bu küme $\mathbb{Z}_{p^2}$ zero divisor grafı için vertex cover değildir. O zaman $\mathbb{Z}_{p^2}$ zero divisor grafının $p - 2$ elemandan daha az elamanlı bir vetex cover'ı yoktur.

Yukarıda incelenen iki durumun sonucunda, $\mathbb{Z}_{p^2}$ zero divisor grafının vertex cover polinomu;

$$Vc\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})\right) = x^{p-1} + (p-1)x^{p-2}$$

dur.

4.3. $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbb{Z}_{pq})$ Zero Divisor Grafı

$\mathbb{Z}_{pq}$ zero divisor grafları p ve q asal sayı olmak üzere "pq" şeklinde iki asal sayının çarpımı şeklinde yazılabilen graflardır. Bu graflara örnek vermek istenirse p'ye ve q'ya asal değerler verilmesi yeterli olacaktır. Örneğin "p=3, q=5" değerlerini aldığında, "$\mathbb{Z}_{15}$" grafı elde edilir. Bu grafın tepeleri {3,6,9,12,5,10} noktalarından oluşur. Aslında "$\mathbb{Z}_{pq}$" grafları iki parçalı tam graflara izomorfturlar.

Yani, $\Gamma(\mathbb{Z}_{pq}) \cong K_{p-1,q-1}$'dur. Bu yüzden grafın tepeler kümeleri iki farklı gruba ayrılabilir. Bu kümelerin tanımı;

$V_1 = \{px \mid x = 1, \dots, q-1\}$,

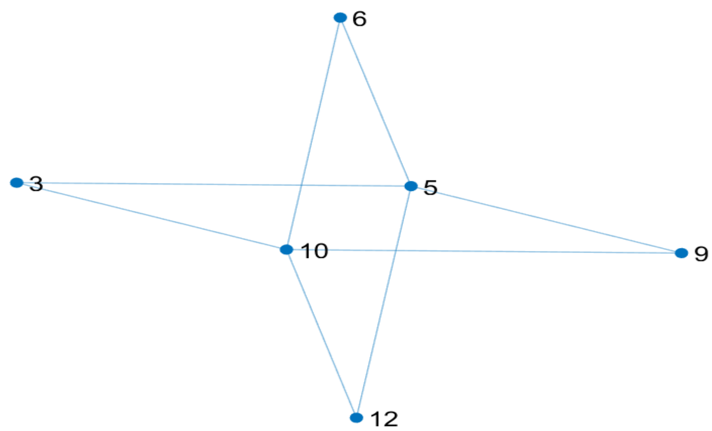
$V_2 = \{qx \mid x = 1, \dots, p-1\}$,

olarak verilebilir. Öyle ki burada $|V_1| = q-1$ ve $|V_2| = p-1$ $olacaktır$. Bu tanımlara uygun şekilde "$\mathbb{Z}_{15}$" grafının tepeler kümesi iki farklı tepe kümesi şeklinde ayrılırsa;

$V_1 = \{3,6,9,12\}$,

$V_2 = \{5,10\}$,

kümeleri elde edilir.



Şekil 19. $\mathbb{Z}_{15}$ Zero divisor grafi

Grafın kendisine bakıldığında açıktır ki V_2 kümesi $\Gamma(\mathbb{Z}_{15})$ grafının minumum vertex cover kümesidir. Ancak vertex cover polinomunu elde etmek için olası tüm vertex cover kümeleri elde edilmelidir. Bunun için olası tüm kümeleri inceleyen bir matlab kodu kullanılabilir. Bu kombinasyonel algoritmalar bilindiği üzere çalışma zamanı olarak etkili algoritmalar değildir. Fakat bu örnekteki gibi küçük veri grupları üzerinde makul bir zamanda tam sonuçları elde etmek için yeterlidir. Aşağıdaki tabloda her k adımda yani k elemanlı vertex cover kümeleri listelenmiştir. Burada $k = \{1, \dots, p+q-2\}$ dur.

Tablo 5. $\mathbb{Z}_{15}$ Zero divisor grafı için vertex cover polinomu algoritma çıktısı

k değerleri	**Vertex cover kümeleri**	**Kümelerin Elemanları**
k=1	Vertex cover yok	$\emptyset$
k=2	1. vertex cover	{5,10}
k=3	1. vertex cover	{3,5,10}
	2. vertex cover	{5,6,10}
	3. vertex cover	{5,9,10}
	4. vertex cover	{5,10,12}
k=4	1. vertex cover	{3,5,6,10}
	2. vertex cover	{3,5,9,10}
	3. vertex cover	{3,5,10,12}
	4. vertex cover	{3,6,9,12}
	5. vertex cover	{5,6,9,10}
	6. vertex cover	{5,6,10,12}
	7. vertex cover	{5,9,10,12}
k=5	1. vertex cover	{3,5,6,9,10}
	2. vertex cover	{3,5,6,9,12}
	3. vertex cover	{3,5,6,10,12}
	4. vertex cover	{3,5,9,10,12}
	5. vertex cover	{3,6,9,10,12}
	6. vertex cover	{5,6,9,10,12}
k=6	1. vertex cover	{3,5,6,9,10,12}

Tabloda elde edilen vertex cover kümeleri, vertex cover polinomunun tanımı kullanılarak düzenlenirse, $\Gamma(\mathbb{Z}_{15})$ grafının vertex cover polinomu;

$Vc\big(\Gamma(\mathbb{Z}_{15})\big) = x^2 + 4x^3 + 7x^4 + 6x^5 + x^6,$

olarak elde edilir.

Bu polinomun katsayıları kombinatoryal yöntemlerle incelendiğinde;

$$\binom{4}{0}x^2 + \binom{4}{1}x^3 + \binom{4}{2}x^4 + \binom{2}{2}x^4 + \binom{4}{3}x^5 + \binom{2}{1}x^5 + \binom{6}{6}x^6$$

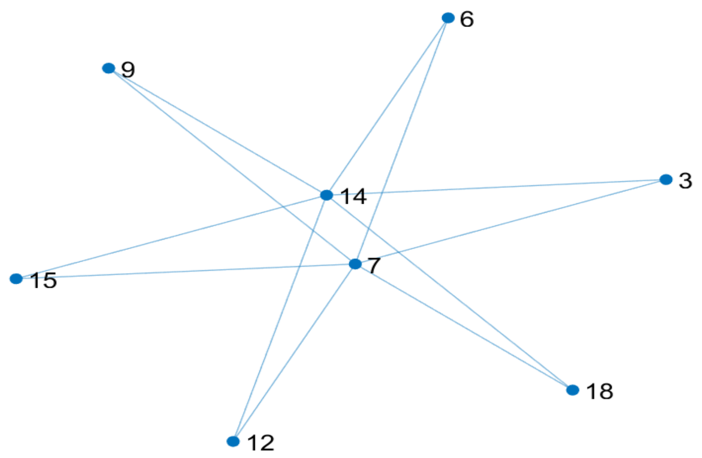
formunda düzenlenebilir.

Şimdi de “p=3 ve q=7” değerleri için oluşacak olan grafı incelenmek istenirse, yani $\Gamma(\mathbb{Z}_{21})$ grafı çizdirilmek istendiğinde, bu grafın tepe noktaları “3,6,7,9,12,14,15,18” sayılarından oluşur. Bu grafın da tepeleri iki farklı kümeye ayrılırsa;

$V_1 = \{3,6,9,12,15,18\}$,

$V_2 = \{7,14\}$,

olarak elde edilir.



Şekil 20. $\mathbb{Z}_{21}$ Zero divisor grafı

Graf incelendiğinde yine açıktır ki $V_2 = \{7,14\}$ kümesi $\Gamma(\mathbb{Z}_{21})$ grafı için minumum vertex coverdır. Yine elimizdeki tanım ile bu grafın vertex cover polinomu elde edilmek istenirse;

$$Vc(\Gamma(\mathbb{Z}_{21})) = x^2 + 6x^3 + 15x^4 + 20x^5 + 16x^6 + 8x^7 + x^8 \;,$$

polinomu $\Gamma(\mathbb{Z}_{21})$ grafının vertex cover polinomudur. Bu polinomun katsayıları kombinatoryal yöntemlerle incelendiğinde;

$$\binom{6}{0}x^2 + \binom{6}{1}x^3 + \binom{6}{2}x^4 + \binom{6}{3}x^5 + \binom{6}{4}x^6 + \binom{2}{2}x^6 + \binom{6}{5}x^7 + \binom{2}{1}x^7 + \binom{8}{8}x^8$$

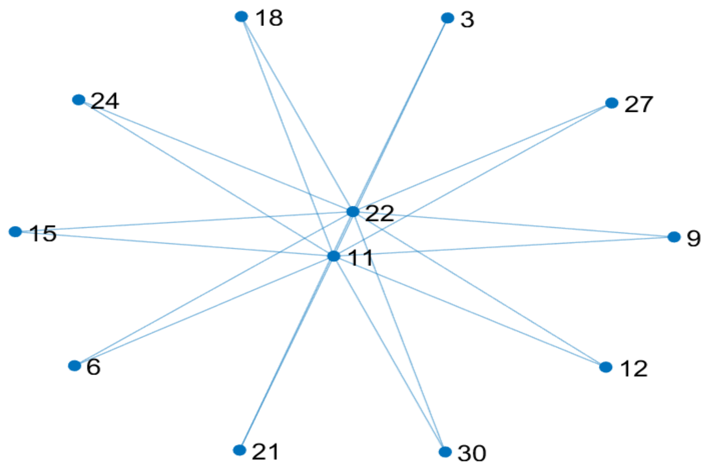
formunda düzenlenebilir.

Şimdi de “p=3 ve q=11” değerleri için oluşacak olan grafı incelenirse. Yani $\Gamma(\mathbb{Z}_{33})$ grafı çizdirilirse, bu grafın tepe noktaları {3,6,9,11,12,15,18,21,22,24,27,30} sayılarından oluşacak. Bu grafın da tepeler kümesi iki farklı kümeye ayrılırsa;

$$V_1 = \{3,6,9,12,15,18,21,24,27,30\},$$

$$V_2 = \{11,22\},$$

olarak elde edilir.



Şekil 21. $\mathbb{Z}_{33}$ *Zero divisor grafı*

Graf incelendiğinde, yine açıktır ki $V_2 = \{11,22\}$ kümesi $\Gamma(\mathbb{Z}_{33})$ grafı için minumum vertex coverdır. Yine kombinasyonel bir algoritma ile bu grafın vertex cover polinomu elde edilmek istenirse;

$$Vc(\Gamma(\mathbb{Z}_{33})) = x^2 + 10x^3 + 45x^4 + 120x^5 + 210x^6 + 252x^7 + 210x^8 + 120x^9 + 46x^{10} + 12x^{11} + x^{12} \quad ,$$

polinomu $\Gamma(\mathbb{Z}_{33})$ grafının vertex cover polinomudur. Bu polinomun katsayıları kombinatoryal yöntemlerle incelendiğinde;

$$\binom{10}{0}x^2+\binom{10}{1}x^3+\binom{10}{2}x^4+\binom{10}{3}x^5+\binom{10}{4}x^6+\binom{10}{5}x^7+\binom{10}{6}x^8$$
$$+\binom{10}{7}x^9+\binom{10}{8}x^{10}+\binom{2}{2}x^{10}+\binom{10}{9}x^{11}+\binom{2}{1}x^{11}$$
$$+\binom{12}{12}x^{12}$$

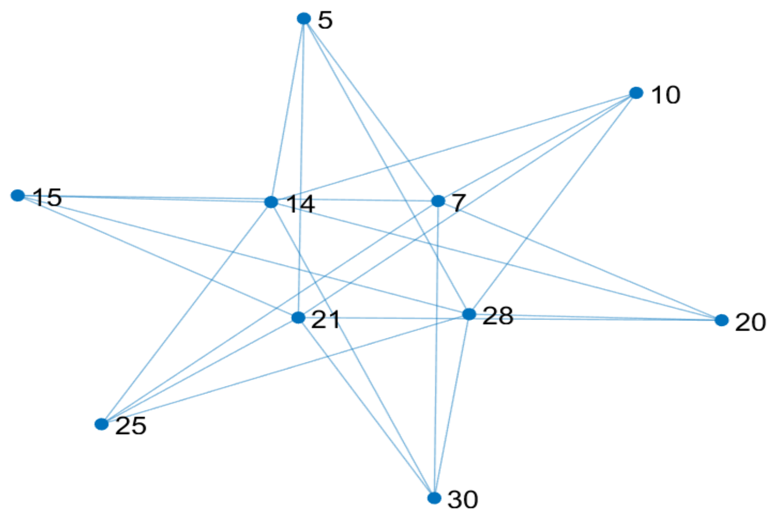
formunda düzenlenebilir.

Şimdi de "p=5 ve q=7" değerleri için oluşacak olan graf incelenirse. Yani $\Gamma(\mathbb{Z}_{35})$ grafı çizdirilmek istenirse, bu grafın tepe noktaları $\{5,7,10,14,15,20,21,25,28,30\}$ sayılarından oluşur. Bu grafın da tepeler kümesi iki farklı kümeye ayrılırsa;

$V_1=\{5,10,15,20,25,30\}$,

$V_2=\{7,14,21,28\}$,

olarak elde edilir.



Şekil 22. $\mathbb{Z}_{35}$ Zero divisor grafı

Graf incelendiğinde, yine açıktır ki $V_2=\{7,14,21,28\}$ kümesi, $\Gamma(\mathbb{Z}_{35})$ grafı için minumum vertex coverdır. Yine elimizdeki tanım ile bu grafın vertex cover polinomu elde edilmek istenirse;

$$Vc\big(\Gamma(\mathbb{Z}_{35})\big)=x^4+6x^5+16x^6+24x^7+21x^8+10x^9+x^{10}\ ,$$

polinomu $\Gamma(\mathbb{Z}_{33})$ grafının vertex cover polinomudur. Bu polinomun katsayıları kombinatoryal yöntemlerle incelendiğinde;

$$\binom{6}{0}x^4+\binom{6}{1}x^5+\binom{6}{2}x^6+\binom{4}{4}x^6+\binom{6}{3}x^7+\binom{4}{3}x^7+\binom{6}{4}x^8+\binom{4}{2}x^8 \\ +\binom{6}{5}x^9+\binom{4}{1}x^9+\binom{10}{10}x^{10}$$

formunda düzenlenebilirler. İlk örnekten bu yana kombinatoryal yöntemlerle incelenen tüm formüller genelleştirilirse;

$$Vc(\mathbb{Z}_{pq})=\left(\sum_{i=0}^{|V_1|-|V_2|-1}\binom{|V_1|}{i}x^{(|V_2|+i)}\right) \\ +\left(\sum_{i=|V_1|-|V_2|}^{|V_1|-1}\binom{|V_1|}{i}x^{(i+|V_2|)}+\binom{|V_2|}{|V_1|-i}x^{(i+|V_2|)}\right) \\ +\ x^{(|V_1|+|V_2|)}$$

olur.

Teorem 4.3 P ve q birbirinden farklı 2 asal sayı ve $2<p<q$ olmak üzere, $\mathbb{Z}_{pq}$ sıfır bölen grafının vertex cover polinomu;

$$Vc(\mathbb{Z}_{pq})=\left(\sum_{i=0}^{q-p-1}\binom{q-1}{i}x^{(p-1+i)}\right) \\ +\left(\sum_{i=q-p}^{q-2}\binom{q-1}{i}x^{(p-1+i)}+\binom{p-1}{q-1-i}x^{(p-1+i)}\right) \\ +\ x^{(p+q-2)}$$

dur.

İspat $\mathbb{Z}_{pq}$ zero divisor grafları $K_{p-1,q-1}$ iki parçalı tam graflara izomorfturlar. Yani $\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})\cong K_{p-1,q-1}$ dur. Bu durumda $\mathbb{Z}_{pq}$ grafının tepeler kümeleri iki farklı kümeye ayrılabilir;

$$V_1=\{px \mid x=1,\dots,q-1\},$$

$$V_2=\{qx \mid x=1,\dots,p-1\},$$

$|V_1| = q - 1,$

$|V_2| = p - 1,$

ve $2 < p < q.$

$\mathbb{Z}_{pq}$ zero divisor grafının vertex cover polinomunu elde etmek için incelenmesi gereken 4 farklı durum vardır.

Durum 1. $\mathbb{Z}_{pq}$ grafının iki parçalı tam graflara izomorf olmasından dolayı, V_1 kümesindeki her elemanın V_2 tüm elemanlar ile arasında bir ayrıt vardır. Bu durumda eğer V_1 kümesini tek başına seçersek graftaki her ayrıtın en az bir tepesi bu kümenin içinde olur. O zaman V_1 kümesi $\mathbb{Z}_{pq}$ zero divisor grafı için bir vertex cover'dır.

Durum 2. V_1 kümesi, $\mathbb{Z}_{pq}$ grafı için bir vertex cover'dır. Bu nedenle V_2 kümesindeki tüm tepelerin (n=1,…,p-1), n'li kombinasyonlarının oluşturduğu tüm kümelerin, V_1 kümesi ile birleşimi $\mathbb{Z}_{pq}$ grafı için bir vertex cover'dır.

Durum 3. $\mathbb{Z}_{pq}$ grafının iki parçalı tam graflara izomorf olmasından dolayı, V_2 kümesindeki tüm elemanların, V_1 kümesindeki tüm elemanlar ile arasında bir ayrıt vardır. Bu durumda eğer V_2 kümesini tek başına seçersek graftaki her ayrıtın en az bir tepesi bu kümenin içinde olur. O zaman V_2 kümesi $\mathbb{Z}_{pq}$ zero divisor grafı için bir vertex cover'dır.

Durum 4. V_2 kümesi, $\mathbb{Z}_{pq}$ grafı için bir vertex cover'dır. Bu nedenle V_1 kümesindeki tüm tepelerin (n=1,…,q-1), n'li kombinasyonlarının oluşturduğu tüm kümelerin, V_1 kümesi ile birleşimi $\mathbb{Z}_{pq}$ grafı için bir vertex cover'dır.

Yukarıda incelenen 4 durumun sonucunda, $\mathbb{Z}_{pq}$ zero divisor grafının vertex cover polinomu;

$$Vc(\mathbb{Z}_{pq}) = \left(\sum_{i=0}^{q-p-1} \binom{q-1}{i} x^{(p-1+i)} \right)$$
$$+ \left(\sum_{i=q-p}^{q-2} \binom{q-1}{i} x^{(p-1+i)} + \binom{p-1}{q-1-i} x^{(p-1+i)} \right)$$
$$+ \ x^{(p+q-2)}$$

dur.

5.SONUÇ

Bu tezde, graf teori alanında halkaların sıfır bölenleri kullanılarak elde edilen zero divisor grafları üzerinde çalışılmıştır. Bir NP-Hard problem olan vertex cover kümeleri kombinatorik bir algoritma ile elde edilerek vertex cover polinomları bulunmuştur. Elde edilen polinomların katsayıları, grafların tepe sayıları kullanılarak toplam sembolü altında formüle edilmiştir.

Bu çalışma, cebirsel yapılar üzerine inşa edilen zero divisor grafların vertex cover polinomlarının matematiksel olarak analiz edilmesine katkı sağlamıştır. Cebirsel yapılar üzerinde graf teori uygulamaları kullanılarak, vertex cover polinomlarının çeşitli durumları daha iyi anlaşılmıştır. Ayrıca, elde edilen toplam sembolü altındaki formülasyonlar sonradan yapılacak olan daha derin araştırmalar ve incelemeler için kolaylık sağlayacaktır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Abiteboul, S., Hull, R., Vianu, V., 1995, Foundations of Databases, Addison-Wesley, Reading, 1011 p.

Anderson, D.D., Naseer, M., 1991, Beck's coloring of commutative ring, Journal of Algebra, 159: 500-514 p.

Anderson, D.F., Livingston, P. S., 1999, The zero-divisor graph of commutative ring, Journal of Algebra, 217: 434-447 p.

Barabási, A.L., Albert, R., 1999, Emergence of scaling in random networks, Science, 286(5439): 509-512 p.

Beck, I., 1988, Coloring of Commutative Rings, Journal of Algebra, 116:208-226 p.

Berge, C., 1985, Graph Theory, North-Holland, Amsterdam, 303p.

Bickle, A., 2020, Fundamentals of Graph Theory, American Mathematical Society, Rhode Island, 336 p.

Bondy, J.A. and Murty, U.S.R., 1976, Graph Theory with Applications, The Mcmillan Press Ltd., New York, 654 p.

Chung, F.R.K., Graham, R.L., 1995, On the cover polynomial of a digraph, Journal of Combinatorial Theory, 65: 273-290 p.

Cormen, T.H., Leiserson, C.E., Rivest R.L., Stein, C., 2009, Introduction to Algortihms (3rd edition), MIT Press, Cambridge, 1312p.

Daskin, M.S., 1995, Network and Discrete Location: Models, Algorithms and Applications, Wiley, New York, 464p.

Dummett, M., 1993, The Logical Basis of Metaphysics, Harvard University Press, Cambridge, 366 p.

Gross, J.L. and Yellen, J., 2004, Handbook of Graph Theory, CRC Press, New York, 1630 p.

Gürsoy, N.K., Ülker, A., Gürsoy, A., 2022, Independent domination polynomial of zero-divisor graphs of commutative rings, Soft Compute, 26(15): 6989-6997 p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Huffman, W.C., Pless V., 2003, Fundamentals of Error-Correcting Codes, Cambridge University Press, Cambridge, 512 p.

Karp, R.M., 1972, Reducibility among Combinatorial Problems, Plenum Press, 220: 85-103 p.

Kleinberg, J., Tardos, É., 2006, Algorithm Desing, Pearson Education, Boston, 864 p.

Kiraly, A., Abonyi, J., 2011, Optimization of Multiple Traveling Problem by a Novel Representation based Genetic Algorithm, International Symposium of Hungarian Researchers on Computational Intelligence and Informatics, 366: 241-269 p.

Osborne, M.J., Rubinstein, A., 1994, A Course in Game Theory, MIT Press, Cambridge, 608 p.

Stinson, D.R., 2006, Cryptography: Theory and Practice (3rd edition), CRC Press, Boca Raton, 688 p.

Vazirani, V.V., 2001, Approximation Algorithms, Springer, Atlanta, 399p.

West, D.B., 2001, Introduction to Graph Theory (2nd Edition), Prentice Hall, Londra, 610p.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın araştırılması, yürütülmesi, planlanması ve oluşturulmasında hiçbir zaman yardımını ve desteğini esirgemeyen tez danışmanım Doç. Dr. Arif GÜRSOY'a, her zaman desteklerini sırtımda hissettiğim canım aileme her zaman yanımda oldukları için minnettarım.

ÖZGEÇMİŞ

Toykan Gülmen, üniversiteye kadar olan eğitim hayatını Manisa'da tamamladıktan sonra 2021 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Bilgisayar Bilimleri Ağırlıklı Matematik Lisans programından mezun oldu. 1 sene Amerika'da yabancı dil eğitimi aldı. 8. Uluslararası Haliç Kongresinde Zero Divisor graflarda Vertex Cover polinomu üzerinde yaptığı araştırmayı sundu.