



**ASİMETRİK METRİK UZAYLARDA FONKSİYON  
DİZİLERİNİN  $I^*$ -YAKINSAKLIĞI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**KADRIYE DİLAN KOLAÇ**

**MERSİN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK  
ANABİLİM DALI**

**MERSİN  
HAZİRAN - 2025**

**ASİMETRİK METRİK UZAYLARDA FONKSİYON  
DİZİLERİNİN I\* - YAKINSAKLIĞI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**KADRIYE DİLAN KOLAÇ  
ORCID ID:0009-0003-5868-293X**

**MERSİN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK  
ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN VE JÜRİ ÜYELERİ**

**DANIŞMAN : PROF. DR. MEHMET KÜÇÜKASLAN  
(ORCID: 0000-0002-3183-3123)**

**JÜRİ ÜYESİ : PROF. DR. MEHMET KÜÇÜKASLAN**

**JÜRİ ÜYESİ : PROF. DR. TUNCAY TUNÇ**

**JÜRİ ÜYESİ : DOÇ. DR. AHMET ALTÜRK**

**MERSİN  
OCAK - 2025**

## ÖZET

### ASİMETRİK METRİK UZAYLARDA FONKSİYON DİZİLERİNİN $I^*$ -YAKINSAKLIĞI

Bu çalışmada, doğal sayıların kuvvet kümesinin özel bir alt ailesi olan ideal kavramı göz önünde bulundurularak, asimetric metrik uzaylarda fonksiyon dizilerinin  $I^*$ -yakınsaklığı tanımlanmış ve bu kavramla ilgili bazı temel sonuçlar verilmiştir. Ayrıca sonuçların, klasik sonuçlardan farklılıklarını göstermek amacıyla örnekler inşa edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Asimetric Metrik Uzay, İdeal Yakınsaklık, İdeal  $\alpha$ - Yakınsaklık, İdeal Düzgün Yakınsaklık, İdeal Kapsamlılık.

**Danışman:** Prof. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN, Mersin Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Mersin.



## ABSTRACT

### I\*-CONVERGENCE OF FUNCTION SEQUENCES IN ASYMMETRIC METRIC SPACE

In this work, by considering ideal which is a special subfamily of power set of natural numbers  $I^*$ -convergence of sequences of function in asymmetric metric spaces is defined and some results about this concept are given. Obtained results is supported some examples to show differences by the classical ones.

**Keywords:** Asymmetric metric space, Ideal convergence, Ideal- $\alpha$  convergence, Ideal uniform convergence, Ideal exhaustiveness .

**Advisor:** Prof. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN, Department of Mathematics, Mersin University, Mersin.



## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim ve tez çalışmam süresince bilgi, tecrübe ve desteğini esirgemeyen, akademik rehberliğiyle her aşamada bana yol gösteren, sabır ve özveriyle katkıda bulunan danışmanım Sayın Prof. Dr. Mehmet Küçükbaşlan'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tez sürecinde değerlendirme, öneri ve katkılarıyla çalışmama değer katan değerli hocalarım Prof. Dr. Tuncay Tunç , Dr. Öğr. Üyesi Maya Altınok ve Doç. Dr. Ahmet Altürk' e teşekkür ederim. Ayrıca , lisans eğitimim boyunca matematiksel düşünme becerimi geliştirmemde ve akademik altyapımı oluşturmamda büyük katkıları olan tüm hocalarıma en derin şükranlarımı sunarım.

Gerek lisans gerekse yüksek lisans sürecinde bilgi paylaşımı, motivasyon ve moral destekleriyle yanımda olan yakın arkadaşlarım Meliha Tekin, Hassina Sabor Behmanush, Pelda Evirgen, Sevgi Barut, Yunus Özmen ve Büşra Kolaç'a içtenlikle teşekkür ederim.

Her zaman yanımda olan, sabırları ve sevgileriyle beni koşulsuz destekleyen aileme; özellikle eğitim hayatım boyunca her zaman arkamda duran anneme ve babama minnettarım. Bu başarı, onların özverisi sayesinde mümkün olmuştur.

Bu tez çalışması, 2210A numaralı proje kapsamında TÜBİTAK tarafından desteklenmiştir. Sağladığı maddi destekten dolayı TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER

	Sayfa
<b>İÇ KAPAK</b>	
<b>ONAY</b>	i
<b>ETİK BEYAN</b>	ii
<b>ÖZET</b>	iii
<b>ABSTRACT</b>	iv
<b>TEŞEKKÜR</b>	v
<b>İÇİNDEKİLER</b>	vi
<b>SİMGELER VE KISALTMALAR</b>	vii
<b>1. GİRİŞ</b>	1
<b>2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI</b>	3
<b>3. MATERYAL VE YÖNTEM</b>	5
3.1 Temel Kavramlar ve Asimetrik Metrik Uzay	5
3.3. İstatistiksel Yakınsaklık	8
3.4. İdeal ve Filtre Kavramları	11
3.5. $I$ -Yakınsaklık ve $I^*$ -Yakınsaklık	13
<b>4. BULGULAR ve TARTIŞMA</b>	23
4.1.1. İyi Koşullu İdeal Kavramı	23
4.1.2. Sol (Sağ) $I^*(\alpha)$ Yakınsaklık ve Sol (Sağ) $I^*$ - Kapsamlılık	25
4.1.3. Sol (Sağ) $I^*$ -Alexandroff Yakınsaklık	30
<b>5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER</b>	33
<b>KAYNAKLAR</b>	35
<b>ÖZGEÇMİŞ</b>	37

## SİMGELER VE KISALTMALAR

Kısaltma/Simge	Tanım
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^+$	Pozitif Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{P}$	Asal Sayılar Kümesi
$I$	İdeal
$I_{\text{Fin}}$	Sonlu kümelerin oluşturduğu ideal
$I_d$	Asimptotik yoğunluğu sıfır olan kümelerin oluşturduğu ideal
$\mathcal{F}$	Filtre
$\mathcal{F}(I)$	I ideali ile üretilen filtre
$\mathbb{B}^-(x, r)$	Sol açık toplar kümesi
$\mathbb{B}^+(x, r)$	Sağ açık toplar kümesi
$d(A)$	A kümesinin asimptotik yoğunluğu
$A^c$	A kümesinin tümleyeni
$2^X$	X kümesinin kuvvet kümesi
$A\Delta B$	A ve B kümesinin simetrik farkı
$e$	Öklid metriği

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim ve tez çalışmam süresince bilgi, tecrübe ve desteğini esirgemeyen, akademik rehberliğiyle her aşamada bana yol gösteren, sabır ve özveriyle katkıda bulunan danışmanım Sayın Prof. Dr. Mehmet Küçükbaşlan'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tez sürecinde değerlendirme, öneri ve katkılarıyla çalışmama değer katan değerli hocalarım Prof. Dr. Tuncay Tunç , Dr. Öğr. Üyesi Maya Altınok ve Doç. Dr. Ahmet Altürk' e teşekkür ederim. Ayrıca , lisans eğitimim boyunca matematiksel düşünme becerimi geliştirmemde ve akademik altyapımı oluşturmamda büyük katkıları olan tüm hocalarıma en derin şükranlarımı sunarım.

Gerek lisans gerekse yüksek lisans sürecinde bilgi paylaşımı, motivasyon ve moral destekleriyle yanımda olan yakın arkadaşlarım Meliha Tekin, Hassina Sabor Behmanush, Pelda Evirgen, Sevgi Barut, Yunus Özmen ve Büşra Kolaç'a içtenlikle teşekkür ederim.

Her zaman yanımda olan, sabırları ve sevgileriyle beni koşulsuz destekleyen aileme; özellikle eğitim hayatım boyunca her zaman arkamda duran anneme ve babama minnettarım. Bu başarı, onların özverisi sayesinde mümkün olmuştur.

Bu tez çalışması, 2210A numaralı proje kapsamında TÜBİTAK tarafından desteklenmiştir. Sağladığı maddi destekten dolayı TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

## 1. GİRİŞ

Yakınsaklık kavramı, matematiksel analizde temel bir yapı taşı olarak kabul edilir. Dizilerin ve fonksiyonların limitinin araştırılması, reel analiz başta olmak üzere birçok matematiksel disiplinde merkezi bir rol oynamaktadır. Klasik yakınsaklık yaklaşımı, bir dizinin ya da fonksiyon dizisinin, sabit bir limite doğru ilerlemesini temel alır. Ancak zamanla, bu klasik anlayışın sınırlarını aşmak ve daha geniş yapıdaki dizileri incelemek amacıyla farklı türde genelleştirilmiş yakınsaklık kavramları geliştirilmiştir. Bu çabaların sonucu olarak ortaya çıkan kavramlardan biri olan ideal yakınsaklık, özellikle 20. yüzyılın sonlarına doğru dikkat çekici bir şekilde gelişme göstermiştir.

İlk olarak ideal kavramı, topolojik bağlamda Kazimierz Kuratowski ve Czesław Ryll-Nardzewski (1965) tarafından ortaya atılmıştır. Bu kavram, daha sonra dizi yakınsaklığına uygulanmış ve Pavel Kostyrko, Tibor Šalát ve Władysław Wilczyński (2000) tarafından “ideal yakınsaklık” başlığı altında sistematik bir kuram haline getirilmiştir. Bu yeni yakınsaklık, klasik doğal sayı kümesinin belirli özelliğe sahip alt küme aileleri kullanılarak, yakınsaklık kavramı genişletilmiş ve limitin varlığı, bu ideal aileler çerçevesinde yeniden tanımlanmıştır. İdeal yakınsaklık, özellikle klasik anlamda yakınsak olmayan dizilerin davranışlarını incelemek için oldukça kullanışlı bir araç haline gelmiştir.

$I^*$ -yakınsaklık kavramı ise, ilk kez A. Kostyrko, M. Mačaj, T. Šalát, M. Sleziaç (2005) tarafından ortaya konmuştur.  $I^*$ -yakınsaklık, ideal yakınsaklıktan farklı olarak, belirli bir idealin dışındaki büyük bir kümede klasik yakınsaklık koşulunun sağlanması esasına dayanır. Bu yaklaşım sayesinde, dizilerin yalnızca “büyük bir çoğunluğunda” limit davranışı sergilemesi yeterli olmaktadır. Bu tür bir genelleme, klasik yakınsaklıktan farklı olarak, istatistiksel yakınsaklık gibi diğer alternatif yakınsaklık türleriyle de ilişkili bir yapı sunmaktadır.

Zamanla, ideal ve  $I^*$ -yakınsaklık kavramları, sadece reel sayı dizileri bağlamında değil, aynı zamanda daha genel yapılar olan fonksiyon dizileri, topolojik uzaylar, metrik ve yarı metrik uzaylar üzerinde de çalışılmıştır. Özellikle, Argha Ghosh (2022) tarafından yapılan çalışmalar, ideal ve  $I^*$ -yakınsaklık kavramlarının yarı metrik uzaylardaki uygulanabilirliğini ortaya koymuştur. Yarı metrik uzaylar, simetri şartının kaldırılmasıyla elde edilen yapılar olup, klasik metrik uzaylardan farklı olarak daha geniş analiz olanakları sunmaktadır.

Benzer şekilde, A.M. Aminpour (2012) tarafından yapılan çalışmalar, ideal yakınsaklık ve benzeri genelleştirilmiş limit kavramlarının, farklı topolojik yapılar ve filtre kuramı bağlamında nasıl yorumlanabileceğini ele almıştır. Ayrıca, Riya Dutta (2022),  $k$ -indeksli yarı metrik uzay kavramını tanımlamış ve burada çeşitli sabit nokta sonuçlarına yer vermiştir. Tüm bu çalışmalar, ideal tabanlı yakınsaklık kavramlarının yalnızca teorik değil, aynı zamanda fonksiyonel analiz, topoloji ve sayı dizileri gibi pek çok alt alanda uygulanabilirliğini gözler önüne sermektedir.

Bu tez çalışmasında, asimetrik metrik uzaylarda fonksiyon dizilerinin  $I^*$ -yakınsaklığı incelenecektir. Amaç, ideal ve  $I^*$ -yakınsaklık kavramlarının bu tür simetrik olmayan metrik yapılarda nasıl tanımlandığını, hangi koşullar altında klasik yakınsaklıkla uyduğunu ve ne tür yeni özellikler ortaya

çıkardığını araştırmaktır.

Çalışmada, tanımlar ve teoremlerle birlikte örneklere de yer verilerek, bu kavramların kavramsal temellerine yer verilecek ve yeni katkılar sunulacaktır. Ayrıca, ideal ve  $I^*$ -yakınsaklık türleri süreklilik ve limit ilişkileri çerçevesinde değerlendirilecektir.

Bu bağlamda, tez çalışması hem ideal kuramının daha geniş yapılara uygulanabilirliğini araştırmakta, hem de klasik analiz yaklaşımlarına alternatif yollar sunmaktadır.



## 2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

İstatistiksel yakınsaklık kavramı asimptotik yoğunluk yardımıyla, ilk kez Fast (1951) ve Steinhilber (1951) tarafından birbirinden bağımsız olarak verilmiştir. Klasik yakınsamanın doğrudan bir uzantısı izlenimi verse de, durum bir genellemeden farklıdır. Freedman vd. (1981), genelleştirilmiş bir yoğunluk tanımı sunmuş ve çeşitli toplanabilirlik tekniklerinin yoğunlukları ile kuvvetli yakınsama bölgeleri arasındaki bağlantıyı irdelemiştir. Bunlar, tüm negatif olmayan düzenli matris yöntemlerinin yanı sıra neredeyse yakınsama adı verilen ünlü matris dışı yöntemi de içerir.

Connor (1988) çalışmasında yer alan bir sonuç,  $0 < p < \infty$  aralığında kuvvetli  $p$ -Cesàro toplanabilir veya  $\omega_p$ -yakınsak olan bir dizinin aynı zamanda istatistiksel yakınsak olması gerektiğini ortaya koymakta ve sınırlı her istatistiksel yakınsak dizinin,  $0 < p < \infty$  için  $\omega_p$ -yakınsaklık özelliği taşıdığı kanıtlanmaktadır. Bunun yanı sıra istatistiksel yakınsak dizilerin yerel olarak dışbükey bir FK uzayı oluşturmadığı da gösterilmiştir. Sınırlı istatistiksel olarak yakınsak dizileri yakınsak dizilere dönüştüren konservatif matrislerin bir karakterizasyonu verilmiş ve Norlund ve Norlund tipi ortalamalara uygulanmıştır.

Di Maio vd. (2008), topolojik ve uniform uzaylarda istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlayarak bu yakınsamanın seçim aksiyomları teorisi, fonksiyon uzayları ve hiperuzaylar bağlamındaki uygulanabilirliğini incelemiştir. İlkhan vd. (2019), yarı-metrik uzaylarda istatistiksel Cauchy dizileri aracılığıyla tamlık, kompaktlık ve ön-kompaktlık üzerine önemli sonuçlar elde etmişlerdir. Amaç, asimptotik yoğunluk kavramını kullanarak yarı metrik bir uzayda yakınsama ve Cauchy koşullarını genişletmektir.

Kostyrko vd. (2000), metrik uzaylardaki dizilerin  $I$ -yakınsaklığı kavramını tanıyıp incelediler. Bu kavramı, bir metrik uzayda tanımlanan reel fonksiyonlar dizisinin  $I$ -yakınsaklığına genişletip, bu kavramların bazı temel özelliklerini kanıtladılar.

Filipow vd. (2010) çalışmalarında, Bolzano-Weierstrass teoremi ideal yakınsaklık kullanılarak genelleştirilmiştir. Bu makalenin yazarları, Bolzano-Weierstrass özelliğine sahip olan ve olmayan ideal örnekleri sunmuş, bu özelliği altölçülerle ilişkili olarak incelemiş ve maksimal bir  $P$ -ideale genişletilebilirliğini ele almışlardır. Ayrıca ideallerin Rudin-Keisler ve Rudin-Blass sıralamalarına ve Boole bölüm cebirlerine uygulamalar gösterdiler. Özellikle, bir idealin ancak ve ancak Boole bölüm cebiri sayılabilir bir bölünen aileye sahipse BW özelliğine sahip olmadığını gösterdiler.

Bunların yanı sıra, Şahiner vd. (2011) çalışmalarında, uniform sürekli  $n$ -norm kavramı tanıyılarak ideal yakınsaklık açısından doğrusal  $n$ -normlu bir uzayın tamamlanması incelenmiştir.

Lahiri vd. (2005), dizilerin  $I$ -yakınsaklığı ve  $I^*$ -yakınsaklığı fikrini topolojik uzaya genişlettiler ve bu kavramların topolojik uzaydaki birkaç temel özelliğini türetme üzerine çalışmalar yapmış ve önemli sonuçlar elde etmişlerdir.

Ghosh (2022), metrik uzaylarda fonksiyon dizilerinin  $I^*(\alpha)$ -yakınsaklığı ve  $I^*$ -kapsamlılığı kavramlarını ele almış ve bu iki kavram arasındaki ilişkiyi açıklamıştır. Ayrıca kavramlarının metrik fonksi-

yon dizilerinin  $I(\alpha)$  yakınsaklığı ve  $I$ -kapsamlılığı gibi köklü kavramlarla bir ilişkisi olduğunu da tespit edip göstermişlerdir.

Otafudu (2021), sol (sağ) K-Cauchy dizilerini koruyan ve sol (sağ) K-Cauchy dizisel regüler dönüşümler olarak adlandırılan bir dönüşüm sınıfını inceledi. Ayrıca, yarı-psödometrik bir uzayda tamamen sınırlı kümeleri, sol K-Cauchy ve sağ K-Cauchy dizilerini koruyan dönüşümler ve uniform yerel yarı-Lipschitz dönüşümleri açısından karakterize etti.

Reilly vd. (1982), yarı-psödometrik uzaylarda Cauchy dizisi ve tamlık tanımlama problemini ele almaktadır. Doitchinov (1988) çalışmasında, yarı metrik uzaylarda genel bir Cauchy dizisi kavramı tanıtmış ve özel bir uzay sınıfı için standart bir tamlama tanımlamak amacıyla kullanmıştır.

Dutta vd. (2022) tarafından quasi metrik uzayların bazı özellikleri sunulmuş; dizi ve fonksiyon dizilerinin yakınsaklığı ile sabit nokta sonuçları verilmiştir. Daha sonra, Ghosh (2023) çalışmasında, asimetrik metrik uzaylarda fonksiyon dizilerinin yakınsaklığını idealler aracılığıyla incelemiştir.

Bu çalışmada amacımız, asimetrik metrik uzayda fonksiyon dizileri için sol (sağ)  $I^*(\alpha)$ -yakınsaklık, sol (sağ)  $I^*$ -Alexandroff yakınsaklığı ve sol (sağ)  $I^*$ -uniform yakınsaklık kavramlarına ilişkin yeni tanımlar vermek ve bunlar arasındaki bazı ilişkileri incelemektir.

### 3. MATERYAL VE YÖNTEM

#### 3.1. Temel Kavramlar ve Asimetrik Metrik Uzay

Bu bölümde, çalışmada kullanılacak temel kavram ve yapıların tanımları ve gerekirse ispatları verilecektir.

**Tanım 3.1.1.**  $X \neq \emptyset$  bir küme olmak üzere,  $q : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  fonksiyonunu ele alalım. Eğer  $q$  fonksiyonu koşulları sağlıyorsa, bu fonksiyona  $X$  kümesi üzerinde bir *asimetrik metrik* denir.

$$(i) \quad \forall x, y \in X \text{ için, } q(x, y) \geq 0,$$

$$(ii) \quad \forall x, y \in X \text{ için, } q(x, y) = 0 \text{ ancak ve ancak } x = y,$$

$$(iii) \quad \forall x, y, z \in X \text{ için } q(x, z) \leq q(x, y) + q(y, z).$$

koşulları sağlıyorsa, bu fonksiyona  $X$  kümesi üzerinde bir *asimetrik metrik* denir.

Bu durumda,  $(X, q)$  ikilisi *asimetrik metrik uzay* olarak adlandırılır. Burada,  $q$  fonksiyonu (i), (ii) ve (iii) koşullarına ek olarak ayrıca her  $x, y \in X$  için  $q(x, y) = q(y, x)$  koşulunu da sağlarsa  $q$  fonksiyonuna  $X$  üzerinde bir metriktir denir ve  $(X, q)$  ikilisi bir metrik uzay olarak adlandırılır.

**Örnek 3.1.2.**  $q : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  olmak üzere,

$$q(x, y) := \begin{cases} 1, & x > y \\ y - x, & x \leq y \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan  $q$  dönüşümü  $\mathbb{R}$  üzerinde bir asimetrik metriktir. Bu asimetrik metrik Sorgenfrey asimetrik metrik olarak adlandırılır.

**Örnek 3.1.3.**  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  fonksiyonu

$$d(x, y) = \begin{cases} y - x, & y \geq x \\ \alpha(x - y), & y < x \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan dönüşüm bir asimetrik metriktir. Burada  $\alpha > 0$  bir reel sayıdır.

**Örnek 3.1.4.**  $\mathbb{R}$  kümesi üzerinde  $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x < y \\ 2, & x > y \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan  $\rho$  fonksiyonu  $\mathbb{R}$  üzerinde bir asimetrik metriktir.

**Örnek 3.1.5.** (Çember Üzerinde Yönlü Uzaklık)

$\mathbb{C}$  ile birim çemberi göz önüne alalım.  $A$  ve  $B$ ,  $\mathbb{C}$  üzerinde iki nokta olsun.

$$\rho(A, B) = \text{"A ile B noktasını saatin dönme yönünde birleştiren yayın uzunluğu"}$$

biçiminde tanımlanırsa  $\rho$  bir asimetrik metriktir.

**Tanım 3.1.6.**  $(X, d)$  bir metrik uzay,  $(x_n) \subset X$  bir dizi ve  $x \in X$  olsun. Her  $\varepsilon > 0$  için bir  $n_0$  doğal sayısı vardır öyle ki her  $n \geq n_0$  için  $d(x_n, x) < \varepsilon$  sağlanıyorsa  $(x_n)$  dizisi  $x \in X$  noktasına yakınsaktır denir ve  $x_n \rightarrow x$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$  sembollerinden birisiyle gösterilir.

**Tanım 3.1.7.**  $(X, d)$  bir asimetrik uzay,  $(x_n) \subset X$  ve  $x \in X$  olsun. Her  $\varepsilon > 0$  için bir  $n_\varepsilon$  doğal sayısı vardır öyle ki her  $n \geq n_\varepsilon$  için  $d(x_n, x) < \varepsilon$  ( $d(x, x_n) < \varepsilon$ ) sağlanıyorsa  $(x_n)$  dizisi  $x \in X$  noktasına sol (sağ) yakınsaktır denir.

**Not 3.1.8.** Bir dizi aynı noktaya hem sol hem de sağ yakınsak ise yakınsaktır. Fakat yalnızca sol yakınsaklık veya yalnızca sağ yakınsaklığın olması yakınsak olmasını gerektirmez.

**Örnek 3.1.9.**  $(\mathbb{R}, d)$  üzerinde,

$$d(x, y) = \begin{cases} y - x, & y \geq x \\ 1, & y < x \end{cases}$$

Sorgenfrey asimetrik metriğini göz önüne alalım.  $(x_n) = (1 - \frac{1}{n})$  olarak alınırsa  $(x_n)$  dizisi  $x = 1$  noktasına sol yakınsaktır fakat sağ yakınsak değildir.

Simetri özelliğinin eksikliğinden kaynaklanan önemli problemlerden biri, genel olarak bir dizinin sol (sağ) limitinin tek olmamasıdır.

Bu durumu göstermek için aşağıdaki örneği verelim:

**Örnek 3.1.10.** Aşağıdaki gibi tanımlı bir  $\tilde{x} = (x_n)$  reel değerli dizisi ve  $q : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  asimetrik metriğini ele alalım:

$$(x_n) := \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{3^n}, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

,

$$q(a, b) := \begin{cases} 0, & a \leq b \\ 1, & a > b \end{cases}$$

Dolayısıyla,  $(-\infty, 0)$  aralığındaki her noktanın söz konusu dizinin bir sol limit noktası olduğu açıktır.

**Tanım 3.1.11.**  $(X, q)$  bir asimetrik metrik uzay olsun.  $q$  fonksiyonu tarafından üretilen sol (sağ) topoloji  $\tau^-$  ( $\tau^+$ ), her  $x \in X$  ve  $r > 0$  için tanımlanan

$$\mathbb{B}^-(x, r) := \{y \in X : q(y, x) < r\}, \quad (\mathbb{B}^+(x, r) := \{y \in X : q(x, y) < r\})$$

sol (sağ) açık toplar kümesini taban kabul eden aile tarafından oluşturulur.

**Tanım 3.1.12.**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $(x_n) \subset X$  bir dizi olsun. Her  $U \in \tau$  açık kümesi için,  $x \in U$  olmak üzere, bir  $N \in \mathbb{N}$  vardır ki  $n \geq N$  için  $x_n \in U$  ise  $(x_n)$  dizisi  $x \in X$  noktasına yakınsaktır denir.

**Tanım 3.1.13.**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay,  $(x_n) \subset X$  bir dizi ve  $x \in X$  olsun. Her  $\varepsilon > 0$  için bir  $n_* = n_*(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  sayısı var ve  $n > n_*$  olmak üzere  $x_n \in \mathbb{B}^-(x^*, \varepsilon)$  ( $x_n \in \mathbb{B}^+(x^*, \varepsilon)$ ) koşulunu sağlıyorsa,  $(x_n)$  dizisi  $x$  noktasına sol (sağ) yakınsak denir.

**Tanım 3.1.14.**  $f_n : X \rightarrow Y$  bir fonksiyonlar dizisi,  $f : X \rightarrow Y$  bir fonksiyon ve  $(Y, d)$  bir metrik uzay olsun. Eğer

(i)  $\forall x \in X$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n(x), f(x)) = 0$$

sağlanır ise  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  fonksiyon dizisi  $f$  fonksiyonuna noktasal yakınsaktır denir.

(ii)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(f_n(x), f(x)) = 0.$$

sağlanır ise  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  fonksiyon dizisi  $f$  fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir.

**Tanım 3.1.15.**  $(X, d_X), (Y, d_Y)$  metrik uzaylar,  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  bir fonksiyon ve  $x_0 \in X$  olsun.

(i) Her  $\varepsilon > 0$  sayısı için bir  $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$  vardır öyle ki  $d_X(x, x_0) < \delta$  koşulunu sağlayan her  $x$  için  $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$  sağlanıyorsa  $f$  fonksiyonuna  $x_0 \in X$  noktasında süreklidir denir.

(ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_X(x_n, x_0) = 0$  koşulunu sağlayan her  $(x_n) \subseteq X$  dizisi için,  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_Y(f(x_n), f(x_0)) = 0$  sağlanıyorsa  $f$  fonksiyonu  $x_0 \in X$  noktasında dizisel süreklidir denir.

**Not 3.1.16.** Metrik uzaylarda süreklilik ile dizisel süreklilik denktir, ancak bu durum topolojik uzaylarda genelde tek taraflı sağlanır.

*Kanıt.*  $(X, d_1)$  ve  $(Y, d_2)$  bir metrik uzay,  $f : X \rightarrow Y$  bir fonksiyon ve  $x_0 \in X$  olsun. Öncelikle  $f$  fonksiyonu  $x_0 \in X$  noktasında sürekli ve  $(x_n) \subset X$  dizisi  $x_0$  noktasına yakınsak olsun.  $\varepsilon > 0$  keyfi alalım. O halde bir  $n_\varepsilon = n_\varepsilon(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  vardır öyle ki her  $n \geq n_\varepsilon$  için  $d_1(x_n, x_0) < \varepsilon$  sağlanır. Burada  $\varepsilon = \delta$  seçilirse

$d_1(x_n, x_0) < \delta$  olacaktır.  $f$  fonksiyonunun sürekliliğinden  $d_1(x_n, x_0) < \delta$  iken  $d_2(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$  koşulu sağlanır. Buradan  $f$  fonksiyonu dizisel süreklidir.

Tersine  $f$  fonksiyonu  $x_0 \in X$  noktasında dizisel sürekli olsun fakat sürekli olmasın. O halde bir  $\varepsilon > 0$  vardır öyle ki  $d_1(x_1, x_0) < \delta$  iken  $d_2(f(x_1), f(x_0)) > \varepsilon_0$  olur.

$\delta = \frac{1}{n}$  seçilirse,  $d_1(x_1, x_0) < \frac{1}{n}$  iken  $d_2(f(x_1), f(x_0)) > \varepsilon_0$  kalır. Bu ise  $f$  fonksiyonunun dizisel sürekli olması ile çelişir. O halde  $f$  fonksiyonu  $x_0 \in X$  noktasında süreklidir.  $\square$

**Tanım 3.1.17.**  $(X, d_X), (Y, d_Y)$  metrik uzaylar,  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  bir fonksiyon ve  $x_0 \in X$  olsun. Her  $\varepsilon > 0$  için bir  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  vardır öyle ki  $d_X(x, x_0) < \delta$  koşulunu sağlayan her  $x, x_0 \in X$  noktası için  $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$  sağlanıyor ise  $f$  fonksiyonu düzgün süreklidir denir.

### 3.2. İstatistiksel Yakınsaklık

**Tanım 3.2.1.** (Frıdy, 1985)  $A \subseteq \mathbb{N}$  bir küme ve  $d : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, 1]$  aşağıdaki biçimde tanımlanan bir fonksiyon olmak üzere,

$$d(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in A\}|$$

limiti mevcut ise  $d(A)$  sayısına  $A$  kümesinin doğal (veya asimptotik) yoğunluğu denir. Ayrıca; daima mevcut olan

$$\underline{d}(A) := \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in A\}|$$

ve

$$\bar{d}(A) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in A\}|$$

limit değerlerine sırasıyla  $A$  kümesinin alt asimptotik yoğunluğu ve üst asimptotik yoğunluğu denir. Burada

$$\underline{d}(A) = \bar{d}(A) = a$$

ise  $A$  kümesinin asimptotik yoğunluğu mevcuttur ve bu ortak değere eşittir. O halde bir kümenin asimptotik yoğunluğa sahip olması için gerek ve yeter koşul alt asimptotik yoğunluk ve üst asimptotik yoğunluğun birbirine eşit olmasıdır.

Şimdi asimptotik yoğunluğu olmayan bir küme örneği verelim :

**Örnek 3.2.2.**  $B$  kümesi  $B := \{n \in \mathbb{Z} : 2^m \leq n < 2^m + 2^{m-1}, m \in \mathbb{Z}^+\}$  şeklinde tanımlansın.  $B$  kümesi  $B_i = \{2^i, 2^i + 1, \dots, 2^i + 2^{i-1} - 1\}, (i = 1, 2, \dots)$  kümelerinin sayılabilir birleşimi olarak yazılabilir.  $B_m$  kümesinin ilk elemanı olan  $2^m$  göz önüne alınırsa her  $B_i$  kümesinde  $2^{i-1}$  eleman bulunduğundan  $i < m$

olmak üzere

$$|B(2^m)| = 1 + \sum_{i=1}^{m-1} 2^{i-1} = 1 + (2^{m-1} - 1) = 2^{m-1}$$

eşitsizliğinden

$$\frac{|B(2^m)|}{2^m} = \frac{1}{2}$$

olduğu görülür. Böylece sonsuz sayıda  $n$  için  $\frac{|B(n)|}{n} = \frac{1}{2}$  sağlanır. O halde

$$\underline{d}(B) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|B(n)|}{n} = \frac{1}{2}$$

dir. Şimdi  $B_m$  kümesinin son elemanı olan  $2^m + 2^{m-1} - 1$  elemanını göz önüne alalım.

$$|B(2^m + 2^{m-1} - 1)| = 2^m - 1$$

olur. Buradan

$$\frac{|B(2^m + 2^{m-1} - 1)|}{2^m + 2^{m-1} - 1} = \frac{2^m - 1}{3 \cdot 2^{m-1} - 1} > \frac{2^m - 1}{3 \cdot 2^{m-1}} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3 \cdot 2^{m-1}}$$

elde edilir. O halde her  $\varepsilon > 0$  için  $\frac{|B(n)|}{n} > \frac{2}{3} - \varepsilon$  olacak şekilde  $n$  için sonsuz sayıda değer vardır. Böylece  $B$  kümesinin üst asimptotik yoğunluğu

$$\bar{d}(B) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|B(n)|}{n} = \frac{2}{3}$$

olarak hesaplanır. O halde  $\underline{d}(B) \neq \bar{d}(B)$  olduğundan  $B$  kümesi asimptotik yoğunluğa sahip olmayan bir kümedir.

**Örnek 3.2.3.**  $A = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$  kümesi alınırsa  $d(A) = 0$  dır.

**Örnek 3.2.4.**  $a, b \in \mathbb{N}$  olmak üzere  $A = \{an + b : n \in \mathbb{N}\}$  kümesi alınırsa  $d(A) = \frac{1}{a}$  olur.

Tanım 3.2.1 de verilen asimptotik yoğunluk tanımından kolayca aşağıda verilen ifadeler ispat edilebilir :

$A, B \subseteq \mathbb{N}$  asimptotik yoğunluğa sahip iki küme olsun.

- $d(\mathbb{N}) = 1$ ,
- $d(\emptyset) = 0$ ;
- $d(\mathbb{N} \setminus A) = 1 - d(A)$ ;

- $A \subset B$  ise  $d(A) \leq d(B)$  ;
- $A \cap B = \emptyset$  ise  $d(A) + d(B) = d(A \cup B)$ ;
- $d(A) + d(B) \leq 1 + d(A \cap B)$ ;
- $\max \{d(A), d(B)\} \leq d(A \cup B) \leq \min \{d(A) + d(B), 1\}$ ;
- $A$  sonlu ise  $d(A) = 0$ ;

**Tanım 3.2.5.** (Šalát, 1980)  $(x_n)$  bir reel sayı dizisi ve  $L \in \mathbb{R}$  olsun. Eğer, her  $\varepsilon > 0$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|}{n} = 0$$

ise  $(x_n)$  dizisi  $L$  noktasına istatistiksel yakınsaktır denir ve  $x_n \xrightarrow{st} L$  şeklinde gösterilir.

**Önerme 3.2.6.**  $(\mathbb{R}, e)$  bir metrik uzay,  $(x_n) \subset \mathbb{R}$  ve  $L \in \mathbb{R}$  olsun. O halde  $(x_n)$  dizisi  $L$  sayısına yakınsak ise  $L$  sayısına istatistiksel yakınsaktır fakat tersi doğru değildir.

*Kanıt.*  $(x_n)$  dizisinin  $L \in \mathbb{R}$  sayısına yakınsadığını kabul edelim. Yani,

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists N \in \mathbb{N} \text{ vardır öyle ki } \forall n \geq N \text{ için } |x_n - L| < \varepsilon$$

sağlanır. O halde

$$\{n \in \mathbb{N} : |x_n - L| \geq \varepsilon\} \subseteq \{1, 2, \dots, N-1\},$$

içermesi sağlanır. Yani  $\{n \in \mathbb{N} : |x_n - L| \geq \varepsilon\}$  kümesi sonlu bir kümedir. O halde,

$$d(\{n \in \mathbb{N} : |x_n - L| \geq \varepsilon\}) = 0,$$

dır. Böylece  $(x_n)$  dizisi istatistiksel olarak  $L$ 'ye yakınsar.

□

Şimdi bu ifadenin tersinin doğru olmadığını görelim.

**Örnek 3.2.7.**  $(\mathbb{R}, e)$  öklid uzayında aşağıda verilen

$$(x_n) = \begin{cases} 0, & n \notin \mathbb{P} \\ 1, & n \in \mathbb{P} \end{cases}$$

dizisini göz önüne alınırsa açık olarak klasik anlamda yakınsak olmayan bir dizi 0 noktasına istatistiksel yakınsaktır.

Gerçekten, her  $\varepsilon > 0$  için

$$d(\{k \leq n : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}) \leq d(\mathbb{P}) = 0.$$

### 3.3. İdeal ve Filtre

**Tanım 3.3.1.** (Kuratowski, 1966)  $X$  boştan farklı bir küme olmak üzere,  $I \subset 2^X$  ailesine aşağıdaki koşulları sağlıyorsa  $X$  üzerinde bir ideal denir:

$$(i) \quad \forall U, V \in I \text{ için } U \cup V \in I,$$

$$(ii) \quad U \in I \text{ ve } V \subset U \text{ ise } V \in I.$$

Bir  $I$  ideali,  $I \neq \emptyset$  ve  $X \notin I$  ise, *trivial olmayan* ideal olarak adlandırılır. Trivial olmayan bir ideal, her  $x \in X$  için  $\{x\}$  tek nokta kümelerini içeriyorsa, bu ideale uygun ideal denir.

**Uyarı 3.3.2.**  $I$  ideali,  $X$  kümesi üzerinde bir uygun ideal ise her  $A \subset X$  sonlu kümesi için  $A \in I$  dır.

**Örnek 3.3.3.**  $X = \{a, b, c\}$  ve

$$I = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

kümesini göz önüne alalım.

- $I$  ailesi birleşim işlemine kapalıdır,
- $I \neq \emptyset$  ve  $X \notin I$ , yani  $I$  trivial olmayan idealdir.
- Ancak tek nokta kümelerinden  $\{c\}$  kümesi  $I$  kümesinde olmadığından,  $I$  uygun ideal değildir.

**Örnek 3.3.4.**  $X = \mathbb{N}$  ve

$$I_{Fin} := \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ sonlu}\},$$

ailesini göz önüne alalım.  $I \neq \emptyset$  ve  $X \notin I$  olduğundan  $I$  trivial olmayan, uygun bir idealdir.

**Örnek 3.3.5.** (Kostyrko, vd, 2000)  $\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Delta_j$  doğal sayıların ayrık bir parçalanışı olsun öyle ki her  $j$  için  $\Delta_j$  sonsuz bir küme ve her  $i \neq j$  için  $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$  olsun.  $I$  ideali olarak en fazla sonlu sayıda  $\Delta_j$  ile kesişimi boştan farklı olan tüm  $A \subset \mathbb{N}$  alt kümelerinin ailesi gösterilsin. O halde  $I$  trivial olmayan bir idealdir.

$\Delta_j$  ailesine örnek olarak

$$\Delta_j := \{n \in \mathbb{N} : n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}, p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{P}, \text{ ve } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}\}$$

ailesi verilebilir. Burada  $n$  doğal sayısının asal çarpanlarına açılımı  $k$  tane asal çarpana sahip olanlar bu aileye aittir.

**Tanım 3.3.6.** (Kuratowski , 1966)  $X \neq \emptyset$  olmak üzere,  $\mathcal{F} \subset 2^X$  ailesi

$$(i) \forall U, V \in \mathcal{F} \text{ için } U \cap V \in \mathcal{F},$$

$$(ii) U \in \mathcal{F} \text{ ve } U \subset V \text{ ise } V \in \mathcal{F}.$$

koşullarını sağlıyorsa,  $\mathcal{F}$  ailesine  $X$  üzerinde tanımlı bir filtre denir:

Her trivial olmayan  $I \subset 2^X$  ideali için açık olarak

$$\mathcal{F}(I) := \{U \subset X : U^c \in I\},$$

ailesi bir filtredir ve bu filtreye,  $I$  ile üretilen filtre denir.

**Örnek 3.3.7.**  $X = \mathbb{N}$  ve

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus A \text{ sonlu}\}.$$

kümesini göz önüne alalım.

- $A, B \in \mathcal{F}$  keyfi alınırsa

$$\mathbb{N} \setminus A \text{ ve } \mathbb{N} \setminus B \text{ kümeleri sonlu ve}$$

$$\mathbb{N} \setminus (A \cap B) = (\mathbb{N} \setminus A) \cup (\mathbb{N} \setminus B)$$

sonlu kümelerin sonlu sayıda birleşimi sonlu olduğundan,

$$A \cap B \in \mathcal{F},$$

dir.

- $A \in \mathcal{F}$  ve  $A \subseteq C$  olsun. Buradan  $\mathbb{N} \setminus C \subseteq \mathbb{N} \setminus A$  ve  $\mathbb{N} \setminus A$  sonlu bir küme olduğundan  $\mathbb{N} \setminus C$  kümesi de sonlu olur. Bu durumda  $C \in \mathcal{F}$ . Sonuç olarak,  $\mathcal{F}$  kümesi  $\mathbb{N}$  üzerinde bir filtredir.

### 3.4. I-Yakınsaklık

**Tanım 3.4.1.** (Kostyrko , vd , 2000)  $(X, d)$  bir metrik uzay,  $(x_n) \subset X$  bir dizi ve  $x_* \in X$  olsun. Her  $\varepsilon > 0$  için

$$\{n \in \mathbb{N} : d(x_n, x_*) \geq \varepsilon\} \in I$$

sağlanıyorsa  $(x_n)$  dizisine  $x_* \in X$  noktasına  $I$ -yakınsaktır denir ve bu durum  $I - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_*$  şeklinde gösterilir.

**Örnek 3.4.2.**  $(\mathbb{R}, e)$  öklid uzayı,  $I_d = \{A \subseteq \mathbb{R} : d(A) = 0\}$  ve  $(x_n)$  dizisi,

$$(x_n) := \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \notin \mathbb{P} \\ 1, & n \in \mathbb{P} \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın.

Her  $\varepsilon > 0$  için,

$$\{n \in \mathbb{N} : |x_n - 0| \geq \varepsilon\} \in I_d$$

dir. Bu nedenle,  $(x_n)$  dizisi 0 noktasına  $I_d$ -yakınsaktır.

**Not 3.4.3.** (Ghosh , 2023) Eğer,  $I$  bir uygun ideal ise  $X$  uzayında klasik anlamda yakınsak her dizi ideal anlamda da yakınsaktır.

**Tanım 3.4.4.** (Kostyrko, vd, 2000)  $(X, d)$  bir metrik uzay,  $(x_n) \subset X$  ve  $x \in X$  olsun. Bir

$M = \{m_1 < m_2 < \dots < m_k < \dots\} \in \mathcal{F}(I)$  kümesi vardır öyle ki

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{m_k}, x) = 0$$

sağlanıyorsa  $(x_n)$  dizisi  $x \in X$  noktasına  $I^*$ -yakınsaktır denir ve  $I^* - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  sembolüyle gösterilir.

**Örnek 3.4.5.**  $X = \mathbb{R}$ ,

$$I_d = \{A \subseteq \mathbb{N} : d(A) = 0\},$$

ve  $(x_n)$  dizisini aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$(x_n) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } n = k^2 \\ \frac{2}{n}, & \text{eğer } n \neq k^2 \end{cases}$$

$A = \{n : n = k^2, k \in \mathbb{N}\} \in I_d$  ve  $M = \mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{F}(I_d)$  seçilirse  $(x_n)$  dizisi 0 noktasına  $I_d^*$ -yakınsaktır.

**Teorem 3.4.6.** (Kostyrko, vd, 2000)  $(X, \rho)$  bir metrik uzay,  $(x_n) \subset X$ ,  $x_0 \in X$  ve  $I$  bir uygun ideal olsun. Eğer  $I^*$ - $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  ise, o hâlde  $I$ - $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  olur.

*Kanıt.* Teoremin kabulünden dolayı  $H \in I$  vardır öyle ki

$$M = \mathbb{N} \setminus H = \{m_1 < m_2 < \dots < m_k < \dots\}$$

kümesi için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{m_k} = x_0 \quad (3)$$

eşitliği sağlanır. Her  $\varepsilon > 0$  için, (3) numaralı eşitlik gereği  $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  vardır öyle ki her  $k > k_0$  için

$$\rho(x_{m_k}, x_0) < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Bu durumda her  $\varepsilon > 0$  için

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, x_0) \geq \varepsilon\} \subseteq H \cup \{m_1, m_2, \dots, m_{k_0}\} \quad (4)$$

içermesinin sağlandığı açıktır.  $I$  uygun ideal olduğundan, (4) numaralı eşitsizliğin sağ tarafında yer alan küme  $I$  idealine aittir. Dolayısıyla  $I$ - $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  sağlanır. □

**Not 3.4.7.** Teorem 3.4.6'nın tersi her zaman doğru değildir. Bunun için aşağıdaki örneği inceleyelim:

**Örnek 3.4.8.**  $\mathbb{N}$  üzerinde

$$I = \left\{ A \subset \mathbb{N} : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} [k^2, k^2 + k] \right\}$$

idealini göz önüne alalım.

$$(x_n) = \begin{cases} 1, & n \in \bigcup_{k=1}^{\infty} [k^2, k^2 + k] \\ 0, & \text{diğer durum} \end{cases}$$

dizisi için

$$A = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - 0| \geq \varepsilon\} = \{n : x_n = 1\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} [k^2, k^2 + k] \in I$$

olduğundan  $(x_n)$  dizisi 0 noktasına  $I$ -yakınsaktır, fakat  $I^*$ -yakınsak değildir.

**Teorem 3.4.9.** (Kostyrko,2000)  $(X, \rho)$  bir metrik uzay olsun. Eğer,

- (i)  $X$  kümesi hiçbir yığılma noktasına sahip değilse, o hâlde  $I$ -yakınsaklık ile  $I^*$ -yakınsaklık çakışır.
- (ii)  $X$  kümesinin en az bir yığılma noktası varsa, bir  $I \subset 2^{\mathbb{N}}$  uygun ideali ve  $(y_n) \subset X$  dizisi vardır öyle ki,

$$I\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \xi \text{ olduğu hâlde } I^*\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \text{ mevcut değildir.}$$

*Kant.* (i)  $\xi \in X$  ve  $I\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$  olduğunu kabul edelim. Şimdi  $I^*\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$  olduğunu göstermek yeterlidir.  $X$  kümesi hiçbir yığılma noktasına sahip olmadığından,  $\delta > 0$  vardır öyle ki

$$B(\xi, \delta) = \{x \in X : \rho(x, \xi) < \delta\} = \{\xi\}$$

elde edilir. Ayrıca  $I\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$  olduğundan

$$\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) \geq \delta\} \in I.$$

dır. Dolayısıyla

$$\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) < \delta\} = \{n \in \mathbb{N} : x_n = \xi\} \in \mathcal{F}(I)$$

olur. Bu nedenle, açıkça  $I^*\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$  olduğu görülür.

- (ii)  $\xi$  noktası,  $X$ 'in bir yığılma noktası ise,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$  dizisi vardır öyle ki  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$  dir ve  $(\rho(x_n, \xi))_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin sıfıra azalarak yakınsadığı kabul edilebilir. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\varepsilon_n := \rho(x_n, \xi)$  olarak tanımlayalım.

$I$  ideali olarak, Örnek 3.3.5 de tanımlanan  $I$  idealini göz önüne alalım.  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisini ise

$$n \in \Delta_j \text{ ise } y_n := x_j$$

olacak şekilde tanımlayalım. Şimdi  $\eta > 0$  olsun.  $\varepsilon_n$ 'nin tanımından öyle bir  $v \in \mathbb{N}$  vardır ki  $\varepsilon_v < \eta$ .

Bu durumda

$$A(\eta) = \{n \in \mathbb{N} : \rho(y_n, \xi) \geq \eta\} \subseteq \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_v$$

dir. Böylece  $A(\eta) \in I$  ve dolayısıyla  $I\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \xi$  olur.

Şimdi,  $I^*\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \xi$  olduğunu kabul edelim. O hâlde,  $H \in I$  olmak üzere

$$M = \mathbb{N} \setminus H = \{m_1 < m_2 < \dots < m_k < \dots\}$$

için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(y_{m_k}, \xi) = 0$$

sağlanmaktadır.  $I$  idealinin tanımına göre, öyle bir  $l \in \mathbb{N}$  vardır ki  $H \subseteq \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_l$ . Bu durumda  $\Delta_{l+1} \subseteq \mathbb{N} \setminus H = M$  olur. Her bir  $\Delta_i$  sonsuz olduğundan, sonsuz sayıda  $k$ 'lar için  $y_{m_k} = x_{l+1}$  ve dolayısıyla

$$\rho(y_{m_k}, \xi) = \varepsilon_{l+1} > 0$$

sağlanır. Bu ise,  $y_{m_k} \rightarrow \xi$  kabulü ile çelişir. □

**Tanım 3.4.10.** (Kostyrko ,vd, 2000)  $I \subset 2^{\mathbb{N}}$  bir uygun ideal olsun.  $I$ 'da bulunan ikişer ikişer ayrık her sayılabilir  $\{A_1, A_2, \dots\}$  küme ailesi için bir  $\{B_1, B_2, \dots\}$  sayılabilir ailesi vardır öyle ki her  $j \in \mathbb{N}$  için  $A_j \triangle B_j$  kümesi sonlu ve  $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in I$  sağlanıyorsa  $I$  idealine **AP** koşulunu sağlıyor denir

**Örnek 3.4.11.**

$$I_{Fin} = \{A \subset \mathbb{N} : A \text{ sonludur}\}.$$

ideali göz önüne alınırsa  $\{A_1, A_2, \dots\} \in I_{Fin}$  için  $B_n := A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$  olarak seçilirse  $I_{Fin}$  ideali AP koşulunu sağlar.

**Örnek 3.4.12.**  $I_d = \{A \subset \mathbb{N} : d(A) = 0\}$  ideali AP koşulunu sağlar.

**Teorem 3.4.13.** (Kostyrko,2000-2001)  $I \subset 2^{\mathbb{N}}$  uygun ideal olsun. Eğer,

- (i)  $(X, \rho)$  herhangi bir metrik uzay ve  $I$  ideali (AP) özelliğine sahipse, o hâlde  $(x_n) \subset X$  ve  $\xi \in X$  olmak üzere

$$I\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi \quad \Rightarrow \quad I^*\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$$

sağlanır.

- (ii)  $(X, \rho)$  en az bir yığılma noktasına sahip bir metrik uzay,  $(x_n) \subset X$  bir dizi ve  $\xi \in X$  için

$$I\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi \quad \Rightarrow \quad I^*\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$$

şartı sağlanıyorsa,  $I$  ideali, (AP) özelliğine sahiptir.

*Kant.* (i)  $I$  idealinin (AP) koşulunu sağladığını kabul edelim.  $I\text{-}\lim x_n = \xi$  olduğunu biliyoruz. O hâlde her  $\varepsilon > 0$  için

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) \geq \varepsilon\} \in I$$

dir. Ayrıca,  $A_1 = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) \geq 1\}$  olmak üzere

$$A_n = \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \leq \rho(x_n, \xi) < \frac{1}{n-1} \right\}, \quad n \geq 2$$

şeklinde tanımlayalım. Açık ki her  $i \neq j$  için  $A_i \cap A_j = \emptyset$ . AP koşuluna göre, her  $j \in \mathbb{N}$  için  $A_j \Delta B_j$  sonlu olacak şekilde bir  $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  küme ailesi vardır ve

$$B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in I$$

dir.  $M = \mathbb{N} \setminus B$  kümesi için  $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in M} x_n = \xi$  olduğunu göstermek yeterlidir.  $\eta > 0$  olsun. Bir  $k \in \mathbb{N}$  vardır ki  $\frac{1}{k+1} < \eta$ . O hâlde

$$\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) \geq \eta\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{k+1} A_j.$$

$A_j \Delta B_j$  sonlu olduğundan, bir  $n_0 \in \mathbb{N}$  vardır öyle ki

$$\left( \bigcup_{j=1}^{k+1} B_j \right) \cap \{n \in \mathbb{N} : n > n_0\} = \left( \bigcup_{j=1}^{k+1} A_j \right) \cap \{n \in \mathbb{N} : n > n_0\}.$$

$n > n_0$  ve  $n \notin B$  ise,  $n \notin \bigcup_{j=1}^{k+1} B_j$  ve dolayısıyla  $n \notin \bigcup_{j=1}^{k+1} A_j$  olur fakat  $\rho(x_n, \xi) < \frac{1}{n+1} < \eta$  olduğundan  $x_n \rightarrow \xi$  olur.

(ii)  $\xi \in X$  yığılma noktası olsun. O hâlde  $\lim x_n = \xi$  olacak şekilde bir  $(x_n)$  dizisi ve monoton azalan bir  $(\rho(x_n, \xi))$  dizisi vardır.  $n \in \mathbb{N}$  için  $\varepsilon_n := \rho(x_n, \xi)$  diyelim.

$I$  idealine ait birbirinden ayrık  $\{A_n\}$  kümeleri ailesi alalım.  $(y_n)$  dizisini,  $n \in A_j$  için  $y_n := x_j$  olacak şekilde tanımlayalım.

$\eta > 0$  olsun. Bir  $m \in \mathbb{N}$  seçebiliriz öyle ki  $\varepsilon_m < \eta$  dir.. Bu durumda

$$A(\eta) = \{n \in \mathbb{N} : \rho(y_n, \xi) \geq \eta\} \subseteq \bigcup_{j=1}^m A_j \in I,$$

yani  $I$ -lim  $y_n = \xi$  olur. Varsayıma göre ayrıca  $I^*$ -lim  $y_n = \xi$  dir.

Bu durumda  $M = \mathbb{N} \setminus B$  için  $\lim_{n \in M} y_n = \xi$  olacak şekilde  $B \in I$  vardır. Her  $j$  için  $B_j := A_j \cap B \in I$  tanımlayalım. O hâlde

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = B \cap \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) \subseteq B \in I.$$

Sabit bir  $j$  seçelim.  $\lim_{n \in M} y_n = \xi$  olduğundan,  $A_j$  kümesinin  $M$  ile kesişimi sonludur. Dolayı-

şıyla  $A_j \triangle B_j$  sonludur. Bu,  $I$  idealinin (AP) koşulunu sağladığını gösterir.

□

**Tanım 3.4.14.** (Ghosh, 2023)  $(X, d)$  bir asimetrik metrik uzay olsun. Eğer bir  $c : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  fonksiyonu bulunabilir öyle ki her  $z, y \in X$  için

$$d(y, z) \leq c(z, y)d(z, y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa  $X$  uzayına yaklaşık metrik aksiyomunu sağlar denir.

Burada  $c$  fonksiyonu aşağıdaki koşulu sağlar :

$\forall z$  için  $\exists \delta_z > 0$  vardır öyle ki  $y \in B^+(z, \delta_z)$  için

$$c(z, y) \leq C(z),$$

burada  $C(z) > 0$  bir reel sayıdır.

**Not 3.4.15.** (Ghosh, 2023) Her metrik uzay yaklaşık metrik aksiyomunu sağlar.

Ancak metrik uzay olmadan yaklaşık metrik aksiyomunu karşılayan bir asimetrik metrik uzay vardır. Örneğin ,

$\mathbb{R}$  üzerinde  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  ve  $\alpha > 0$  olmak üzere

$$d(x, y) = \begin{cases} y - x, & y \geq x \\ \alpha(x - y), & y < x \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın.  $d$  bir asimetrik metriktir.  $C(x) = \max\{\alpha, \frac{1}{\alpha}\}$  alınırsa her  $x, y \in \mathbb{R}$  için  $d(y, x) \leq C(x)d(x, y)$  koşulu sağlanır.

**Tanım 3.4.16.**  $(X, d)$  asimetrik metrik uzay,  $(x_n) \subset X$  bir dizi ve  $x_0 \in X$  olsun. Her  $\varepsilon > 0$  için

$$\{n \in \mathbb{N} : d(x_n, x) \geq \varepsilon\} \in I \quad (\{n \in \mathbb{N} : d(x, x_n) \geq \varepsilon\} \in I)$$

sağlanıyorsa  $(x_n)$  dizisi  $x_0$  noktasına sol (sağ)  $I$ -yakınsaktır denir ve  $x_n \xrightarrow{I^-} x_0$  ile gösterilir.

**Not 3.4.17.** (i)  $I$  ideali olarak  $I_{Fin}$  alınırsa sol (sağ)  $I$ -yakınsaklık asimetrik metrik uzaylarda sol(sağ) yakınsaklık ile çıkarılır.

(ii)  $I$  ideali olarak  $I_d$  alınırsa sol(sağ)  $I$ -yakınsaklık, asimetrik metrik uzaylarda istatistiksel sol(sağ) yakınsama ile çıkarılır.

Sol (sağ)  $I$ -yakınsaklık tanımları aşağıdaki şekilde de verilebilir:

**Tanım 3.4.18.**  $(X, d)$  asimetrik metrik uzay,  $(x_n) \subset X$  bir dizi ve  $x_0 \in X$  olsun. Her  $\varepsilon > 0$  için

$$\{n \in \mathbb{N} : d(x_n, x) < \varepsilon\} \in \mathcal{F}(I) \quad (\{n \in \mathbb{N} : d(x, x_n) < \varepsilon\} \in \mathcal{F}(I))$$

sağlanıyorsa  $(x_n)$  dizisi  $x_0$  noktasına sol (sağ)  $I$ -yakınsaktır denir

**Önerme 3.4.19.** (Ghosh ,2023)  $(X, d)$  asimetrik metrik uzayı yaklaşık metrik aksiyomunu sağlayan bir asimetrik metrik uzay olsun. O halde bir dizi sağ  $I$ -yakınsak ise sol  $I$ -yakınsaktır ve limitler aynıdır.

Çalışmamızda bu kısımdan itibaren  $(X, q)$  asimetrik metrik uzayından  $(Y, p)$  asimetrik metrik uzayına giden tüm fonksiyonların kümesini göstermek üzere  $Y^X$  notasyonunu kullanacağız.

**Tanım 3.4.20.**  $f \in Y^X$  bir fonksiyon ve  $\xi_0 \in X$  olsun. Her  $\varepsilon > 0$  için bir  $\delta > 0$  vardır öyle ki her  $y \in \mathbb{B}^-(\xi_0, \delta)$  için

$$p(f(y), f(\xi_0)) < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanıyorsa  $f$  fonksiyonuna  $\xi_0 \in X$  noktasında sol süreklidir ( $f^-$ -süreklili) denir.

Benzer şekilde, her  $\varepsilon > 0$  için bir  $\delta > 0$  vardır öyle ki her  $y \in \mathbb{B}^+(\xi_0, \delta)$  için

$$p(f(\xi_0), f(y)) < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanıyorsa  $f$  fonksiyonu  $\xi_0 \in X$  noktasında sağ süreklidir ( $f^+$ -süreklili) denir.

**Tanım 3.4.21. (Dizisel Süreklilik)**  $f \in Y^X$  bir fonksiyon ve  $x_0 \in X$  olsun.

(i)  $X$  uzayında  $x_0$  noktasına sol yakınsak olan her  $(x_n)$  dizisi için  $(f(x_n)) \subset Y$  dizisi  $f(x_0)$  noktasına sol yakınsak ise  $f$  fonksiyonuna sol süreklidir ( $f^-$ -süreklili) denir.

(ii)  $X$  uzayında  $x_0$  noktasına sağ yakınsak olan her  $(x_n)$  dizisi için  $(f(x_n)) \subset Y$  dizisi  $f(x_0)$  noktasına sağ yakınsak ise  $f$  fonksiyonuna sağ süreklidir ( $f^+$ -süreklili) denir.

**Tanım 3.4.22.**  $(X, q)$  asimetrik metrik uzay ve  $K \subset X$  bir küme olsun. Sol(sağ) topolojide  $K$  kümesinin her açık örtüsü sonlu bir alt örtüye sahipse  $K$  kümesine sol (sağ) kompakttır denir.

**Tanım 3.4.23.**  $(f_n) \subset Y^X$  bir fonksiyon dizisi,  $f \in Y^X$  bir fonksiyon ve  $x_0 \in X$  olsun.  $X$  uzayında  $x_0 \in X$  noktasına sol  $I$ -yakınsayan her  $(x_n) \subset X$  dizisi için  $(f_n(x_n)) \subset Y$  fonksiyon dizisi de  $f(x_0)$  noktasına sol  $I$ -yakınsak ise  $(f_n)$  fonksiyon dizisi  $f$  fonksiyonuna sol  $I(\alpha)$ -yakınsaktır denir.

Benzer şekilde  $X$  uzayında  $x_0 \in X$  noktasına sağ  $I$ -yakınsayan her  $(x_n) \subset X$  dizisi için  $(f_n(x_n)) \subset Y$  fonksiyon dizisi de  $f(x_0)$  noktasına sağ  $I$ -yakınsak ise  $(f_n)$  fonksiyon dizisi  $f$  fonksiyonuna sağ  $I(\alpha)$ -yakınsaktır denir.

**Not 3.4.24.** (i)  $I$  ideali olarak  $I_{Fin}$  alınırsa sol (sağ)  $I(\alpha)$ -yakınsaklık sol (sağ)  $\alpha$ -yakınsaklık ile çıkarılır.

(ii)  $I$  ideali olarak  $I_d$  ideali alınırsa sol (sağ)  $I(\alpha)$ -yakınsaklık sol (sağ) istatistiksel  $\alpha$ -yakınsaklık ile çakışır.

**Uyarı 3.4.25.** (Ghosh ,2023) Sol  $I(\alpha)$ -yakınsaklık ve sağ  $I(\alpha)$ -yakınsaklık kavramları denk değildir. Bunu görmek için aşağıdaki örneği inceleyelim .

**Örnek 3.4.26.** (Ghosh ,2023)  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$

$$d(x, y) = \begin{cases} y - x, & y \geq x \\ 1, & y < x \end{cases}$$

olmak üzere  $(\mathbb{R}, d)$  Sorgenfrey asimetrik metrik uzayı verilsin. Burada ,  $\delta \leq 1$  için

$$B^+(x, \delta) = [x, x + \delta) \quad \text{ve} \quad B^-(x, \delta) = (x - \delta, x]$$

şeklinindedir.  $I$  bir uygun ideal olsun. Her bir  $k \in \mathbb{N}$  için  $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , aşağıdaki biçimde

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 & , x \geq 0 \\ k & , x < 0 \end{cases}$$

tanımlansın. Ayrıca  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  , her  $x \in \mathbb{R}$  için  $f(x) = 0$  biçiminde tanımlansın.  $(x_k)$  dizisi sıfır noktasına sağ  $I$ -yakınsak olsun.  $A = \{k \in \mathbb{N} : x_k < 0\} \in I$  olduğunu göstermeliyiz. Kabul edelim ki  $A \notin I$  olsun. O halde  $\{k \in \mathbb{N} : d(0, x_k) \geq \frac{1}{2}\}$  kümesi  $A$  kümesini içerir ve buradan  $\{k \in \mathbb{N} : d(0, x_k) \geq \frac{1}{2}\} \notin I$  olur ki bu ise  $(x_k)$  dizisinin sıfır noktasına sağ  $I$ -yakınsak olmasıyla çelişir. Dolayısıyla,  $A = \{k \in \mathbb{N} : x_k < 0\} \in I$  sağlanır.

Şimdi ,  $\varepsilon > 0$  için  $\{k \in \mathbb{N} : d(f(0), f_k(x_k)) \geq \varepsilon\} \subset A$  olsun.  $A \in I$  olduğundan

$$\{k \in \mathbb{N} : d(f(0), f_k(x_k)) \geq \varepsilon\} \in I$$

sağlanır. O halde  $(f_k(x_k))$  dizisi  $f(0)$  noktasına sağ  $I$ -yakınsaktır. Buradan  $(f_k)$  fonksiyon dizisi  $x = 0$  noktasında  $f$  fonksiyonuna sağ  $I(\alpha)$ -yakınsaktır. Şimdi ,  $(\frac{-1}{k})_{k \in \mathbb{N}}$  dizisi sıfır noktasına sol  $I$ -yakınsak olsun. Ancak ,  $\{k \in \mathbb{N} : d(f_k(\frac{-1}{k}), f(0)) \geq \frac{1}{2}\} = \mathbb{N} \notin I$ . Dolayısıyla  $(f_k)$  fonksiyon dizisi  $x = 0$  noktasında  $f$  fonksiyonuna sol  $I(\alpha)$ -yakınsak değildir.

**Tanım 3.4.27.**  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y^X$  bir fonksiyon dizisi ve  $x_0 \in X$  olsun. Her  $\varepsilon > 0$  için bir  $\delta > 0$  ve bir  $A \in \mathcal{F}(I)$  vardır öyle ki her bir  $y \in B^-(x, \delta)$  ve her  $n \in A$  için  $p(f_n(y), f_n(x)) < \varepsilon$  sağlanıyorsa  $(f_n)$  fonksiyon dizisi  $x_0 \in X$  noktasında sol  $I$ -kapsamlıdır denir.

Benzer şekilde , her  $\varepsilon > 0$  için bir  $\delta > 0$  ve bir  $A \in \mathcal{F}(I)$  vardır öyle ki her bir  $y \in B^+(x, \delta)$  ve her  $n \in A$  için  $\mathfrak{p}(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon$  sağlanıyorsa  $(f_n)$  fonksiyon dizisi  $x_0 \in X$  noktasında sağ  $I$ -kapsamlıdır denir.

**Not 3.4.28.** (i)  $I$  ideali olarak  $I_{Fin}$  alınırsa sol (sağ)  $I$ -kapsamlılık sol (sağ)- kapsamlılıkla çakışır.

(ii)  $I$  ideali olarak  $I_d$  alınırsa sol (sağ)  $I$ -kapsamlılık, sol (sağ) istatistiksel kapsamlılıkla çakışır.

**Tanım 3.4.29.** Bir  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y^X$  fonksiyon dizisi olsun. Her  $x \in X$  için

$$f_n(x) \xrightarrow{I^-} f(x) \quad \left( f_n(x) \xrightarrow{I^+} f(x) \right)$$

koşulunu sağlanıyorsa,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y^X$  fonksiyon dizisi  $f \in Y^X$  fonksiyonuna sol(sağ) noktasal  $I$ -yakınsak olarak adlandırılır.

**Not 3.4.30.** (i)  $I$  ideali olarak  $I_{Fin}$  alınırsa sol (sağ) noktasal  $I$ -yakınsaklık, sol (sağ) noktasal yakınsaklıkla çakışır.

(ii)  $I$  ideali olarak  $I_d$  alınırsa sol (sağ) noktasal  $I$ -yakınsaklık, sol (sağ) istatistiksel noktasal yakınsaklıkla çakışır.

**Tanım 3.4.31.**  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y^X$  bir fonksiyon dizisi ,  $f \in Y^X$  bir fonksiyon olsun. Her  $\varepsilon > 0$  için,  $A \in \mathcal{F}(I)$  olacak şekilde bir  $A$  kümesi vardır öyle ki her  $k \in A$  ve  $x \in X$  için

$$\mathfrak{p}(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \quad (\mathfrak{p}(f(x), f_n(x)) < \varepsilon)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y^X$  fonksiyon dizisi  $f \in Y^X$  fonksiyonuna sol(sağ)  $I$ -düzgün yakınsak olarak adlandırılır.



## 4. BULGULAR VE TARTIŞMA

### 4.0.1. İyi koşullu İdeal Kavramı

**Tanım 4.0.1.** (Papachristodoulos , 2010)  $I$  bir uygun ideal olsun. Eğer  $A_n \notin I$  olacak şekilde seçilen her  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  küme dizisi için,  $B_n \subset A_n$ ,  $B_n \in I$  ve  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  kümeleri ikişer ikişer ayrık kümeler olmak üzere  $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \notin I$  koşulunu sağlayan bir  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  küme dizisi varsa,  $I$  idealine İyi koşullu ideal denir.

Bu tanıma eşdeğer bir koşul aşağıdaki lemmada verilmiştir:

**Lemma 4.0.2.** Bir  $I$  ideali iyi koşullu ideal ise  $D_n \notin \mathcal{F}(I)$  olacak şekilde tanımlı her  $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  küme dizisi için,  $P_n \supset D_n$ ,  $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  kümeleri ikişer ikişer ayrık ve  $\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n \notin \mathcal{F}(I)$  koşulunu sağlayan  $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}(I)$  kümeleri vardır.

*Kanıt.*  $I$  bir iyi koşullu ideal ve  $D_n \notin \mathcal{F}(I)$  olacak şekilde  $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  küme dizisini ele alalım. Bu durumda,  $\mathbb{N} \setminus D_n \notin I$  olur.  $I$  bir iyi koşullu ideal olduğundan, her  $n$  için bir  $A_n \subset \mathbb{N} \setminus D_n$  vardır öyle ki  $A_n \in I$  ve  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \notin I$  sağlanır.

Eğer  $P_n$  kümesi

$$P_n := \mathbb{N} \setminus A_n$$

şeklinde tanımlanırsa,  $P_n \in \mathcal{F}(I)$  olur. Bu durumda

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathbb{N} \setminus A_n) = \mathbb{N} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \notin \mathcal{F}(I)$$

eşitliği sağlanır. □

**Örnek 4.0.3.**  $I_{Fin}$  ideali iyi koşullu idealdir.

**Örnek 4.0.4.**  $I$  ideali olarak Örnek 3.3.5 de verilen ideal alınırsa , bu ideal iyi koşullu idealdir.

**Örnek 4.0.5.** (Papachristodoulos, 2010)  $I$  ideali olarak  $I_d$  alınırsa, bu ideal iyi koşullu ideal değildir. Gerçekten,

$\bar{d}(P_k) = 2^{-k}$  (burada  $\bar{d}$  üst yoğunluk anlamındadır ) olmak üzere  $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  doğal sayıların ikişer ikişer ayrık alt kümelerinin bir dizisi olsun ve her bir  $n, k \in \mathbb{N}$  için

$$\frac{\text{card}(P_k \cap \{1, 2, \dots, n\})}{n} < 2^{-k}.$$

dir. Şimdi  $A_k \subset P_k$  öyle ki  $d(A_k) = 0$  ise  $d(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = 0$  olduğunu gösterelim.  $\varepsilon > 0$  alalım. Bir  $k_0 \in \mathbb{N}$  vardır öyle ki  $\sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k} < \frac{\varepsilon}{2}$ .  $k \in \{1, 2, \dots, k_0\}$  için bir  $n_k$  sayısı seçersek  $n \geq n_k$  için

$$\frac{\text{card}(A_k \cap \{1, 2, \dots, n\})}{n} < \frac{\varepsilon}{2k_0}$$

sağlanır.  $n_0 = \max\{n_1, \dots, n_{k_0}\}$  olsun. O halde  $n \geq n_0$  için

$$\begin{aligned} \frac{\text{card}(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \cap \{1, \dots, n\})}{n} &= \frac{\text{card}\left(\left(\bigcup_{k=1}^{k_0} A_k \cap \{1, \dots, n\}\right) \cup \left(\bigcup_{k=k_0+1}^{\infty} A_k \cap \{1, \dots, n\}\right)\right)}{n} \\ &\leq \frac{\text{card}\left(\bigcup_{k=1}^{k_0} A_k \cap \{1, \dots, n\}\right)}{n} + \frac{\text{card}\left(\bigcup_{k=k_0+1}^{\infty} A_k \cap \{1, \dots, n\}\right)}{n} \\ &\leq \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\text{card}(A_k \cap \{1, \dots, n\})}{n} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{\text{card}(A_k \cap \{1, \dots, n\})}{n} \\ &\leq \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\varepsilon}{2k_0} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece  $d(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = 0$  olduğu görülür.

**Tanım 4.0.6.**  $(X, d)$  bir asimetrik metrik uzay,  $(x_n) \subset X$  ve  $x \in X$  olsun. Bir  $M = \{m_1 < m_2 < \dots < m_k < \dots\} \in \mathcal{F}(I)$  kümesi vardır öyle ki

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{m_k}, x) = 0 \quad (\lim_{k \rightarrow \infty} d(x, x_{m_k}) = 0)$$

sağlanıyorsa  $(x_n)$  dizisi  $x \in X$  noktasına sol (sağ)  $I^*$ -yakınsaktır denir.

**Not 4.0.7.** Sağ  $I^*$ -yakınsaklık sol  $I^*$ -yakınsaklık kavramları birbirlerini gerektirmek zorunda değildir. Bunun için aşağıdaki örneği inceleyelim .

**Örnek 4.0.8.**  $(\mathbb{R}, q)$  asimetrik metrik uzay ,  $I$  ideali olarak  $I_d$  alınırsa  $M := \mathbb{N} \setminus I_d \in \mathcal{F}(I)$  sağlanır.  $(x_n)$  dizisini ve  $q$  asimetrik metriğini aşağıdaki gibi tanımlayalım :

$$q(x, y) = \begin{cases} y - x, & y \geq x \\ 1, & y < x \end{cases}$$

ve

$$(x_n) = \begin{cases} 1, & n \in \mathbb{P} \\ 1 + \frac{1}{n}, & n \notin \mathbb{P} \end{cases}$$

olsun.  $(x_n)$  dizisi  $x = 1$  noktasına sağ  $I^*$  -yakınsak fakat sol  $I^*$  -yakınsak değildir.

Gerçekten,

$$q(1, x_n) = \begin{cases} 0, & n \in \mathbb{P} \\ \frac{1}{n}, & n \notin \mathbb{P} \end{cases}$$

ve

$$q(x_n, 1) = \begin{cases} 0, & n \in \mathbb{P} \\ 1, & n \notin \mathbb{P} \end{cases}$$

olduğundan sağ  $I^*$ -yakınsaktır fakat sol  $I^*$ -yakınsak değildir.

#### 4.0.2. Sol (Sağ) $I^*(\alpha)$ Yakınsaklık ve Sol (Sağ) $I^*$ - Kapsamlılık

**Tanım 4.0.9.**  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y^X$  bir fonksiyon dizisi ve  $f \in Y^X$  bir fonksiyon olsun.  $X$  kümesinde bir  $x$  noktasına sol (sağ)  $I^*$ -yakınsak olan her  $(x_n)$  dizisi için,  $f_n(x_n)$  dizisi de  $f(x)$ 'e sol(sağ)  $I^*$ -yakınsak oluyorsa  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y^X$  fonksiyonlar dizisi,  $f$  fonksiyonuna sol (sağ)  $I^*(\alpha)$ -yakınsaktır denir.

**Tanım 4.0.10.**  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y^X$  bir fonksiyon dizisi ve  $a \in X$  olsun.  $A = A(a) \in I$  olmak üzere her  $\varepsilon > 0$  için bir  $\delta = \delta(\varepsilon, a) > 0$  ve  $n_0 = n_0(\varepsilon, a) \in \mathbb{N}$  sayıları vardır öyle ki her  $n \in \mathbb{N} \setminus A$  ve  $n \geq n_0$  için  $q(a, x) < \delta$  ( $q(x, a) < \delta$ ) sağlandığında  $p(f_n(a), f_n(x)) < \varepsilon$  ( $p(f_n(x), f_n(a)) < \varepsilon$ ) koşulu sağlanıyorsa  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y^X$  fonksiyon dizisine,  $a \in X$  noktasında sol (sağ)  $I^*$ -kapsamlı denir.

**Not 4.0.11.** Sağ  $I^*$ -kapsamlılık ve sol  $I^*$ -kapsamlılık kavramları her zaman birbirini gerektirmeyebilir.

**Örnek 4.0.12.**  $f_n : (\mathbb{R}^+, q) \rightarrow (\mathbb{R}^+, q)$  olmak üzere  $k \in \mathbb{N}$  için ,

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2n} & , x = k^2 \\ 1 & , x \neq k^2 \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım.

$$q(x, y) = \begin{cases} 0 & , y \geq x \\ 1 & , y < x \end{cases}$$

asimetrik metriğini ve  $I_d$  idealini göz önüne alırsak  $x = 1$  noktasında  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  fonksiyon dizisi sağ  $I^*$ -kapsamlıdır fakat sol  $I^*$ -kapsamlı değildir.

**Tanım 4.0.13.**  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y^X$  bir fonksiyon dizisi ve  $f \in Y^X$  bir fonksiyon olsun. Her  $x \in X$  için  $f_n(x) \xrightarrow{I^*-} f(x)$  ( $f_n(x) \xrightarrow{I^{*+}} f(x)$ ) sağlanıyorsa,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y^X$  fonksiyonlar dizisine,  $f \in Y^X$  fonksiyonuna sol (sağ) noktasal  $I^*$ -yakınsak denir.

**Teorem 4.0.14.**  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y^X$  bir fonksiyon dizisi olmak üzere,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y^X$ ,  $x \in X$  noktasında  $f$  fonksiyonuna sol noktasal  $I^*$ -yakınsak olsun. Eğer  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi,  $z \in X \setminus \{x\}$  olan her noktada  $f$  fonksiyonuna sağ noktasal  $I^*$ -yakınsak ve ayrıca  $x \in X$  noktasında sol  $I^*$ -kapsamlı ise, o hâlde  $f$  fonksiyonu  $f^{-, -}$ -süreklidir.

*Kanıt.*  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $x \in X$  noktasında sol  $I^*$ -kapsamlı olduğundan,  $A = A(x) \in I$  olmak üzere her  $\varepsilon > 0$  için bir  $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$  ve  $n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$  vardır öyle ki her  $n \geq n_0$  ve  $n \in \mathbb{N} \setminus A$  için  $q(y, x) < \delta$  olduğunda  $p(f_n(y), f_n(x)) < \varepsilon$  sağlanır.

$y \in B^-(x, \delta) \setminus \{x\}$  olsun.  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $f$  fonksiyonuna sağ noktasal  $I^*$ -yakınsak olduğundan, her  $y \in X$  için  $f_k(y) \xrightarrow{I^{*+}} f(y)$  elde edilir. Bu nedenle  $K = \{k_1 < k_2 < \dots\} \in \mathcal{F}(I)$  olacak şekilde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(f(y), f_{k_n}(y)) = 0$$

sağlanır.

Bu durumda, her  $\varepsilon > 0$  için bir  $n_1 \in \mathbb{N}$  vardır ki, her  $k_n \geq n_1$  için  $p(f(y), f_{k_n}(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$  eşitsizliği sağlanır.

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq Y^X$  dizisi  $x \in X$  noktasında  $f$ 'ye sol noktasal  $I^*$ -yakınsak olduğundan bir  $K_2 \in \mathcal{F}(I)$  vardır öyle ki  $\lim_{m \rightarrow \infty} p(f_{k_m}(x), f(x)) = 0$  eşitsizliği sağlanır.

Şimdi,  $K \cap K_2 \cap (\mathbb{N} \setminus A) \in \mathcal{F}(I)$  ve bu da  $K \cap K_2 \cap (\mathbb{N} \setminus A) \neq \emptyset$  olduğunu gösterir.

Bu nedenle,  $j \in K \cap K_2 \cap (\mathbb{N} \setminus A)$  olacak şekilde bir  $j$  seçebiliriz. Böylece, tüm  $y \in B^-(x, \delta) \setminus \{x\}$  için

$$p(f(y), f(x)) \leq p(f(y), f_j(y)) + p(f_j(y), f_j(x)) + p(f_j(x), f(x)) < \varepsilon$$

elde edilir.

Dolayısıyla,  $f$  fonksiyonu sol süreklidir. □

**Teorem 4.0.15.**  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq Y^X$  dizisi,  $x \in X$  noktasında  $f$  fonksiyonuna sol noktasal  $I^*$ -yakınsak ve aynı zamanda  $x \in X$  noktasında sol  $I^*$ -kapsamlı ise, o hâlde  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  dizisi  $x \in X$  noktasında  $f \in Y^X$  fonksiyonuna sol  $I^*(\alpha)$ -yakınsaktır.

*Kanıt.*  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq Y^X$  fonksiyon dizisi  $x \in X$  noktasında  $f$  fonksiyonuna sol noktasal  $I^*$ -yakınsak olduğundan,  $f_k(x) \xrightarrow{I^{*-}} f(x)$  olur. Bu nedenle  $K = \{k_1 < k_2 < \dots\} \in \mathcal{F}(I)$  olacak şekilde

$$\lim_{m \rightarrow \infty} p(f_{k_m}(x), f(x)) = 0$$

eşitliği sağlanır. Dolayısıyla, her  $\varepsilon > 0$  için öyle bir  $n_0$  doğal sayısı vardır ki  $p(f_{k_m}(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$  eşitsizliği tüm  $k_m \geq n_0$  için geçerlidir.

$(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  dizisi  $x \in X$  noktasında sol  $I^*$ -kapsamlı olduğundan,  $K' = K'(x) \in I$  olacak şekilde bir  $K'$  kümesi ve her  $\varepsilon > 0$  için bir  $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$  ve  $n_1 = n_1(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$  vardır öyle ki  $q(y, x) < \delta$  olan her  $y$  için  $p(f_n(y), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$  eşitsizliği, tüm  $n \in \mathbb{N} \setminus K'$  ve  $n \geq n_1$  için sağlanır.

$(x_n) \xrightarrow{I^*} x$ ,  $n \rightarrow \infty$  varsayalım. Gösterilmesi gereken,  $f_n(x_n) \xrightarrow{I^*} f(x)$  olduğudur.  $(x_n) \xrightarrow{I^*} x$ ,  $n \rightarrow \infty$  olduğundan,  $K'' = \{m_1 < m_2 < \dots\} \in \mathcal{F}(I)$  olacak şekilde bir  $K''$  kümesi vardır öyle ki  $\lim_{k \rightarrow \infty} q(x_{m_k}, x) = 0$  elde edilir. Dolayısıyla, her  $\delta > 0$  için öyle bir  $n_1(\delta) \in \mathbb{N}$  vardır ki her  $m_k \geq n_1$  için  $q(x_{m_k}, x) < \delta$  sağlanır. Şimdi  $K^* := K' \cap K'' \in \mathcal{F}(I)$  ve  $n^* := \max\{n_0, n_1\} \in \mathbb{N}$  alalım. Bu durumda tüm  $n \geq n^*$  ve  $n \in K^*$  için

$$p(f_n(x_n), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca, her  $j \in K^*$  için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$p(f_j(x_j), f(x)) < p(f_j(x_j), f_j(x)) + p(f_j(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Bu durum  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  dizisinin  $f$  fonksiyonuna sol noktasal  $I^*(\alpha)$ -yakınsaklığını gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

**Teorem 4.0.16.**  $(X, q)$  ve  $(Y, p)$  asimetrik metrik uzaylar olmak üzere  $(Y, p)$  uzayında sol  $I^*$ -yakınsaklığın sağ  $I^*$ -yakınsaklığı verdiğini varsayalım. Eğer  $I$  bir iyi koşullu ideal ve  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  dizisi  $x \in X$  noktasında  $f \in Y^X$  fonksiyonuna sol  $I^*(\alpha)$ -yakınsak ise,  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset Y^X$  dizisi  $x \in X$  noktasında  $f$  fonksiyonuna sol noktasal  $I^*$ -yakınsaktır ve ayrıca  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  dizisi  $x \in X$  noktasında sol  $I^*$ -kapsamlıdır.

*Kanıt.* Açıktır ki,  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset Y^X$  fonksiyon dizisi  $x \in X$  noktasında  $f$  fonksiyonuna sol noktasal  $I^*$ -yakınsaktır.

Kabul edelim ki,  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  dizisi bir  $x$  noktasında sol  $I^*$ -kapsamlı olmasın. O halde her  $A = A(x) \in \mathcal{F}(I)$  için, bir  $\varepsilon_0 > 0$  vardır öyle ki, her  $\delta = \delta(\varepsilon_0; x) > 0$  ve  $n_0 = n_0(\varepsilon_0; x) \in \mathbb{N}$  için,  $k \in A$  (ve  $k \geq n_0$ ) olacak şekilde öyle bir  $k$  vardır ki,  $q(z, x) < \delta$  olduğunda,

$$p(f_k(z), f_k(x)) \geq \varepsilon_0$$

sağlanır.

Özellikle,  $A = \mathbb{N}$  ve  $\delta = \frac{1}{k}$  olarak seçelim. Bu durumda, öyle bir  $n_k$  doğal sayısı vardır ki, bazı  $x_k \in B^-(x; \frac{1}{k})$  için,

$$p(f_{n_k}(x_k), f_{n_k}(x)) \geq \varepsilon_0$$

sağlanır.

Her  $n_k$  için sadece bir  $x_k$  ele alalım.  $A_k$ , yukarıdaki eşitsizliği sağlayan tüm  $n_k$  doğal sayılarının kümesini,  $B_k$  ise bunlara karşılık gelen tek türlü  $x_k$ 'lerin kümesini belirtsin. İddiamız,

$$\mathbb{N} \setminus \{A_k\} \notin \mathcal{F}(I)$$

şeklindedir. Kabul edelim ki  $\mathbb{N} \setminus \{A_k\} \in \mathcal{F}(I)$  olsun. O zaman,

$$\{A_k\} \in I$$

olur ve dolayısıyla, öyle bir  $n_{k_0} \in A_{k_0}$  vardır öyle ki, bazı  $x_{k_0} \in B^-(x; \frac{1}{k_0})$  için,

$$p(f_{n_{k_0}}(x_{k_0}), f_{n_{k_0}}(x)) \geq \varepsilon_0$$

sağlanır ki bu durum  $A_k$ 'nin tanımı ile çelişmektedir.

Böylece,  $\mathbb{N} \setminus \{A_k\} \notin \mathcal{F}(I)$  olur.  $I$  idealinin iyi koşullu ideal olduğu varsayımından, Lemma 4.0.2'ye göre,  $\mathbb{N} \setminus \{A_k\} \notin \mathcal{F}(I)$  ise,  $P_k \supseteq \mathbb{N} \setminus \{A_k\}$  olmak üzere, her  $k \in \mathbb{N}$  için  $P_k$  ikili olarak ayrık ve

$$\mathbb{N} \setminus P_k \in \mathcal{F}(I)$$

sağlanır ve ayrıca,

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} (\mathbb{N} \setminus P_k) \notin \mathcal{F}(I)$$

olur.

Şimdi,  $P_k = \{p_{k_1} < p_{k_2} < \dots\}$  şeklinde olsun. Aşağıdaki diziyi inceleyelim:

$$(z_n) := \begin{cases} x, & n \notin \bigcap_{k=1}^{\infty} (\mathbb{N} \setminus P_k) \\ x_{k_j}, & n = p_{k_j} \in P_k, \quad x_{k_j} \in B_k \text{ ve } p_{k_j} \in A_k \end{cases}$$

$\varepsilon > 0$  verilsin. O halde bir  $k_0 \in \mathbb{N}$  vardır ki,

$$\frac{1}{k_0} < \varepsilon.$$

Buradan,

$$\{n \in \mathbb{N} : q(z_n, x) \geq \varepsilon\} \subseteq \bigcup_{k=1}^{k_0-1} \mathbb{N} \setminus P_k \in I$$

Yani  $z_n \xrightarrow{I^*} x$ ,  $n \rightarrow \infty$  olarak sağlanır.

Öte yandan,

$$\{n \in \mathbb{N} : p(f_n(z_n), f_n(x)) \geq \varepsilon_0\} = \mathbb{N} \setminus P_k \in \mathcal{F}(I)$$

durumu vardır ki bu bir çelişkidir. Sonuç olarak,  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  dizisi  $x \in X$  noktasında sol  $I^*$ -kapsamlıdır. □

**Tanım 4.0.17.**  $(X, q)$  ve  $(Y, p)$  asimetric metrik uzaylar ve  $(f_n) \subset Y^X$  bir fonksiyon dizisi olsun. Her  $\varepsilon > 0$  ve her  $x \in X$  için, bir  $K \notin I$  ve  $n_0 = n_0(\varepsilon) \in K$  vardır öyle ki, her  $n \geq n_0$  ve  $n \in K$  için

$$p(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \quad (p(f(x), f_n(x)) < \varepsilon)$$

eşitliği sağlamıyorsa  $(f_n) \subset Y^X$  fonksiyon dizisi,  $f$  fonksiyonuna sol (sağ) düzgün  $I^*$ -yakınsaktır denir.

**Teorem 4.0.18.**  $(X, q)$  ve  $(Y, p)$  asimetric metrik uzaylar olmak üzere  $(Y, p)$  uzayında sol  $I^*$ -yakınsaklığın sağ  $I^*$ -yakınsaklığı verdiğini varsayalım ve  $x \in X$  olsun. Her  $\varepsilon > 0$  için bir  $\delta > 0$  ve  $K = \{k_1 < k_2 < \dots\} \in \mathcal{F}(I)$  vardır öyle ki  $y \in \mathbb{B}^-(x, \delta)$  olduğunda

$$p(f_{k_n}(y), f_{k_n}(x)) < \varepsilon$$

sağlansın. O halde her  $y \in \mathbb{B}^-(x, \delta)$  için  $p(f_{k_n}(x), f_{k_n}(y)) < \varepsilon$  eşitsizliği sağlanır.

*Kanıt.* İspat açıktır. □

**Teorem 4.0.19.**  $(X, q)$  ve  $(Y, p)$  asimetric metrik uzaylar olmak üzere  $(Y, p)$  uzayında sol  $I^*$ -yakınsaklığın sağ  $I^*$ -yakınsaklığı verdiğini varsayalım.  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset Y^X$  fonksiyon dizisi  $f$  fonksiyonuna sol noktasal  $I^*$ -yakınsak ve  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  fonksiyon dizisi  $X$  üzerinde sol  $I^*$ -kapsamlı ise,  $f$  fonksiyonu  $X$  üzerinde sol süreklidir ve  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  fonksiyon dizisi  $X$  in her sol kompakt alt kümesinde  $f$  fonksiyonuna sol düzgün  $I^*$ -yakınsaktır.

*Kanıt.* İlk olarak  $f$  fonksiyonunun  $X$  üzerinde sol sürekli olduğu göstereceğiz.  $x \in X$  keyfi alalım.  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  fonksiyon dizisi  $x \in X$  noktasında sol  $I^*$ -kapsamlı olduğundan  $A = A(x) \in \mathcal{F}(I)$  olmak üzere her  $\varepsilon > 0$  için bir  $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$  ve bir  $n' = n'(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$  vardır öyle ki  $q(y, x) < \delta$  olduğunda her  $n \in A$  ve  $n \geq n'$  için  $p(f_k(y), f_k(x)) < \varepsilon$  sağlanır.

Kabul edelim ki  $f$  sol sürekli olmasın. O halde  $(x_k)$  dizisi  $x$  noktasına sol  $I^*$ -yakınsak olduğunda  $(f(x_k))$  dizisi  $f(x)$  noktasına sol  $I^*$  yakınsak değildir. Dolayısıyla bir  $K = \{k_1 < k_2 < \dots\} \in \mathcal{F}(I)$  vardır öyle ki  $\lim_{n \rightarrow \infty} q(x_{k_n}, x) = 0$  sağlanırken  $\lim_{n \rightarrow \infty} p(f(x_{k_n}), f(x)) \neq 0$  dır.

O hâlde, her  $\varepsilon > 0$  için,  $q(x_{k_n}, x) < \varepsilon$  eşitsizliğini sağlayan bir  $n_0 \in \mathbb{N}$  vardır ve bu, tüm  $n \geq n_0$  için geçerlidir; ancak,  $p(f(x_{k_n}), f(x)) \geq \varepsilon$  eşitsizliğini sağlayan bir  $n_1 \in \mathbb{N}$  de vardır ve bu da tüm  $n \geq n_1$  için sağlanır. Bu durum,  $f$  fonksiyonunun sol  $I^*$ -kapsamlılığının tanımıyla çelişir; dolayısıyla,  $f$  sol sürekli değildir.

$K \subseteq X$  sol kompakt bir küme,  $\varepsilon > 0$  ve  $x \in K$  olmak üzere,  $f$  fonksiyonu  $x$  noktasında sol süreklidir. Bu nedenle,  $y \in B^-(x, \delta)$  için  $p(f(y), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$  olacak şekilde bir  $\delta > 0$  vardır. Sol  $I^*$ -yakınsaklık,  $Y$  uzayında sağ  $I^*$ -yakınsaklığı verdiği için,  $p(f(y), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$  elde edilir.  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  fonksiyon dizisi sol  $I^*$ -kapsamlılığa sahip olduğundan, her  $\varepsilon > 0$  için  $q(y, x) < \delta$  koşulunu sağlayan bir  $\delta = \delta(\varepsilon; x) > 0$  ve  $p(f_k(y), f_k(x)) < \varepsilon$  eşitsizliğini sağlayan bir  $n_0 = n_0(\varepsilon; x) \in \mathbb{N}$  ile birlikte  $A = A(x) \in \mathcal{F}(I)$  kümesi vardır ve bu, tüm  $n \in A$ ,  $n \geq n_0$  için geçerlidir.

$K \subseteq \bigcup_{x \in K} B^-(x, \delta_x)$  ve  $K$  sol kompakt olduğundan,  $K \subseteq \bigcup_{i=1}^m B^-(x_i, \delta_{x_i})$  olacak şekilde sonlu sayıda  $x_1, x_2, \dots, x_m \in K$  noktası vardır.  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ailesi  $f$ 'e sol noktasal  $I^*$ -yakınsak olduğundan, her  $i$  için  $p(f_k(x_i), f(x_i)) < \frac{\varepsilon}{3}$  eşitsizliğini sağlayan  $A_i \in \mathcal{F}(I)$  kümesi mevcuttur.

Şimdi  $B := \bigcap_{i=1}^m A_i \cap A_{x_i}$  kümesini ele alalım. O hâlde  $B \in \mathcal{F}(I)$  olur. Eğer  $z \in K$  ise,  $\{1, 2, \dots, m\}$  kümesinden bir  $i$  için  $q(z, x_i) < \delta_{x_i} < \delta$  sağlanır ve bu durumda  $z \in B^-(x_i, \delta_{x_i})$  için  $p(f(x_i), f(z)) < \frac{\varepsilon}{3}$  ve  $p(f_k(z), f_k(x_i)) < \frac{\varepsilon}{3}$  eşitsizlikleri, her  $k \in B$  için sağlanır. Dolayısıyla şu sonucu elde ederiz:

$$p(f_k(z), f(z)) < p(f_k(z), f_k(x_i)) + p(f_k(x_i), f(x_i)) + p(f(x_i), f(z)) < \varepsilon.$$

Böylece ispat tamamlanmış olur. □

#### 4.0.3. Sol (Sağ) $I^*$ -Alexandroff Yakınsaklık

**Tanım 4.0.20.**  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset Y^X$  sol (sağ) sürekli fonksiyonlar dizisi olmak üzere,  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  fonksiyon dizisi  $f$  fonksiyonuna sol (sağ) noktasal  $I^*$ -yakınsak olsun. Her  $\varepsilon > 0$  ve  $A \in \mathcal{F}(I)$  için bir  $M_A = \{m_1 < m_2 < \dots\} \subset A$  ve sol (sağ) topolojide tanımlı bir  $\mathcal{U} = \{U_k : k \in A\}$  açık örtüsü vardır öyle ki, her  $x \in U_k$  için  $p(f_{m_k}(x), f(x)) < \varepsilon$  ( $p(f(x), f_{m_k}(x)) < \varepsilon$ ) eşitsizliği sağlanıyorsa,  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  fonksiyon dizisi  $f$  fonksiyonuna sol (sağ)  $I^*$ -Alexandroff yakınsaktır denir.

**Teorem 4.0.21.**  $(X, q)$  ve  $(Y, p)$  asimetric metrik uzaylar olsun. Eğer  $(Y, p)$  uzayı yaklaşık metrik aksiyonu özelliğini sağlıyor ve buna karşılık gelen  $C$  fonksiyonu sınırlı,  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  fonksiyon dizisi  $f$  fonksiyonuna sol  $I^*$ -Alexandroff yakınsak ise, o hâlde  $f$  fonksiyonu sol süreklidir.

*Kanıt.*  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  dizisinin  $f$  fonksiyonuna sol  $I^*$ -Alexandroff yakınsak olduğunu varsayalım. O hâlde, her  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  fonksiyonu sol süreklidir,  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  dizisi  $f$ 'ye sol noktasal  $I^*$ -yakınsaktır ve her  $\varepsilon > 0$ ,  $A \in \mathcal{F}(I)$  için  $M_A = \{m_1 < m_2 < \dots\} \subset A$  ve  $X$ 'in sol topolojisinde tanımlı bir açık örtü  $V = \{V_k : k \in A\}$  vardır öyle ki, her  $x \in V_k$  için

$$p(f_{m_k}(x), f(x)) < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır.

Şimdi  $x \in X$  olsun ve  $(x_n)$  dizisi  $x$  noktasına sol  $I^*$ -yakınsak olsun.  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  dizisi  $f$  fonksiyonuna sol noktasal  $I^*$ -yakınsak olduğundan,

$$K = \{m_1 < m_2 < \dots\} \in \mathcal{F}(I)$$

ve  $n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$  vardır öyle ki, her  $m_k \in K$  ve  $n \geq n_0$  için

$$p(f_{m_k}(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3r}$$

eşitsizliği sağlanır.

$C$  fonksiyonu sınırlı olduğundan, her  $z \in X$  için  $C(z) < r$  olacak şekilde bir  $r > 0$  vardır.

$K \in \mathcal{F}(I)$  olsun.

$$M_k = \{m_1 < m_2 < \dots\} \in \mathcal{F}(I)$$

ve  $X$ 'in sol topolojisinde bir açık örtü  $V = \{V_k : k \in A\}$  mevcuttur; öyle ki her  $x \in V_k$  için

$$p(f_{m_k}(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

eşitsizliği sağlanır.

$V = \{V_k : k \in A\}$  açık örtü olduğundan,  $x \in V_k$  olacak şekilde bir  $k \in \mathbb{N}$  seçilebilir.  $(f_{m_k})$  fonksiyonu  $X$  üzerinde sol sürekli ve  $(x_n)$  dizisi  $x$ 'e sol  $I^*$ -yakınsak olduğundan,  $n_1 \in \mathbb{N}$  vardır öyle ki,  $x_n \in V_k$  ve  $n \geq n_1$  için

$$p(f_{m_k}(x_n), f_{m_k}(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

eşitsizliği sağlanır.

$(Y, p)$  uzayı yaklaşık metrik aksiyomunu sağladığından, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}(f(x_n), f(x)) &< \mathfrak{p}(f(x_n), f_{m_k}(x_n)) + \mathfrak{p}(f_{m_k}(x_n), f_{m_k}(x)) + \mathfrak{p}(f_{m_k}(x), f(x)) \\ &< C(f_{m_k}(x_n)) \cdot \mathfrak{p}(f_{m_k}(x_n), f(x_n)) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon. \end{aligned}$$

□



## 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, öncelikle analiz kuramında önemli yer tutan ideal ve filtre kavramları ile bu kavramlarla yakından ilişkili olan doğal yoğunluk yaklaşımı ayrıntılı biçimde ele alınmıştır. Söz konusu yapıların tanımları yapıldıktan sonra, soyut düzeydeki teorik çerçevenin somutlaştırılabilmesi amacıyla çeşitli örnekler verilerek bu kavramların matematiksel işleyişi ortaya konmuştur.

Devamında, metrik uzaylardan farklı olarak simetrik uzaklık koşulunun sağlanmadığı asimetric metrik uzaylarda fonksiyon dizilerinin yakınsaklık davranışları incelenmiştir. Bu bağlamda,  $I$ -yakınsaklık ve  $I^*$ -yakınsaklık kavramları asimetric yapılar bağlamında yeniden ele alınmış, aralarındaki farklılıklar ve benzerlikler teorik ve örneklerle desteklenerek analiz edilmiştir.

Tezde ayrıca süreklilik kavramı da klasik yaklaşımdan farklı bir şekilde, sağ ve sol süreklilik biçiminde ayrıştırılarak incelenmiştir. Bu doğrultuda, sağdan ve soldan sürekliliğe göre tanımlanan fonksiyonların özellikleri, ilgili teoremler ışığında değerlendirilmiş ve asimetric yapının süreklilik üzerindeki etkileri vurgulanmıştır.

Çalışmanın bir diğer önemli aşamasında ise, ideal kuramı içerisinde özel bir yere sahip olan *good ideal* tanımı yapılmış ve bu özel ideal sınıfına bağlı olarak geliştirilen bazı karakterizasyon teoremlerine yer verilmiştir. Bu teoremler sayesinde, ideal yapılar ile fonksiyon dizilerinin yakınsaklık özellikleri arasındaki derin ilişki daha açık hale getirilmiştir.

Bunlara ek olarak, sağ (veya sol)  $I^*(\alpha)$ -yakınsaklık ve sağ (veya sol)  $I^*$ -Alexandroff yakınsaklığı gibi daha özgül yakınsaklık türleri tanımlanmış, bu tanımlar çerçevesinde çeşitli teoremler sunulmuştur.

Son olarak, çalışmada sol (veya sağ) noktasal  $I^*$ -yakınsaklık ile sol (veya sağ)  $I^*$ -kapsamlılık tanımları da verilmiş ve bu kavramların, fonksiyonların belirli alt kümeler üzerinde gösterdiği davranışları modellemedeki işlevi ayrıntılı şekilde değerlendirilmiştir.

Bu bağlamda tez, hem klasik analiz kuramına hem de asimetric metrik yapıların sunduğu yeni olanaklara dair önemli katkılar sunmakta; ideal kuramı, filtre yapısı ve yakınsaklık türleri açısından zengin bir teorik zemin inşa etmektedir.

$S$  sonlu olmayan herhangi bir küme,  $X$  bir topolojik uzay,  $I$  ve  $K$  ise  $S$  kümesi üzerinde tanımlı iki ideal olsun.  $f : S \rightarrow X$  fonksiyonu, bir  $x \in X$  noktasına  $I^K$ -yakınsak (ya da  $I^K$ -limitli) olarak adlandırılır; eğer  $\mathcal{F}(I)$  filtresine ait bir  $M \subseteq S$  kümesi için aşağıdaki şekilde tanımlanan fonksiyon  $g : S \rightarrow X$ ,

$$g(s) = \begin{cases} f(s), & \text{eğer } s \in M, \\ x, & \text{eğer } s \notin M, \end{cases}$$

$K$ -yakınsak ise. Bu durumda  $f$  fonksiyonu  $x$  noktasına  $I^K$ -yakınsaktır ve

$$I^K\text{-}\lim f = x$$

şeklinde gösterilir.

Eğer  $S = \mathbb{N}$  alınırsa, bu tanım klasik reel sayı dizileri için geçerli olan  $I^K$ -yakınsaklık kavramına indirgenir. Özel olarak  $K = \text{Fin}$  (sonlu altkümeler ideali) seçilirse,  $I^K$ -yakınsaklık,  $I^*$ -yakınsaklık tanımına karşılık gelir.

$I^K$ -yakınsaklık kavramı, yalnızca reel diziler değil, aynı zamanda çift indisli diziler, fonksiyon dizileri ve ağlar (nets) gibi daha genel yapıların yakınsaklık analizinde de kullanılabilir. Bu yönüyle geniş bir uygulama alanı sunmaktadır. Dolayısıyla çalışma boyunca incelenen tüm özellikler  $I^K$ -yakınsaklık için de incelenebilir.



## KAYNAKLAR

Aminpour, A.M.,(2012) ,"Some Results in Asymmetric Metric Spaces" , *Mathematica Aeterna*, Vol.2, pp.533 - 540.

Connor,J.S.,(1988) ,"The Statistical and Strong  $p$ -Cesaro Convergence of Sequences", *Analysis*, Vol. 12, pp.47-63.

Di Maio,G., Kocinac,L.D.R. ,(2008) , "Statistical convergence in topology ", *Topology and its Applications*, Vol. 156, pp.28-45.

Doitchinov, D., (1988) ,"On Completeness in Quasi Metric Spaces", *Topology and its Applications*, Vol.30, pp.127-148.

Dutta,R.,Nayak,P.K.,Mondal,H.S.,(2022) ,"On Quasi  $b$ -Metric Space with index  $k$  and fixed point results", *The Journal of Analysis*, Vol. 30, pp.919-940.

Fast,H.,(1951) ,"Sur la convergence statistique", *Communications*, Vol. 2., pp.241-244.

Filipow,R., Mrozek,N., Reclaw,I., Szuca,P., (2010) ,"Ideal Convergence of Bounded Sequences", *The Journal of Symbolic Logic*, Vol.72, pp.501-512.

Freedman,A.R., Sember,J.J.,(1981) ,"Densities and Summability", *Journal of Mathematics*, Vol.95, pp.293-305.

Fridy,J.A., (1985) ,"On statistical convergence", *Analysis*, Vol.5,pp.1187-1192.

Ghosh,A., (2022), " $I^*(\alpha)$  Convergence and  $I^*$ -Exhaustiveness of Sequences of Metric Functions", *Matematicki Vesnik Matematiqvesk*, Vol.74(2),pp.110-118.

Ghosh,A.,(2023) , "A study on convergence of sequences of functions in asymmetric metric spaces using ideals",*Novi Sad J. Math*, Vol. 53,pp.97-116 .

İlkhani,M., Kara,E.E., (2019) , "On statistical convergence in quasi-metric spaces", *Demonstratio Mathematica* ,Vol.1 ,pp.225-236 .

Kostyrko,P., Sal´at,T., Wilczy ´nki,W., (2000/2001) ," $I$ -convergence", *Real Analysis Exchange*,Vol.26

(2), pp.669-686.

Kuratowski,K., (1966) , *Topology*, Academic Press.

Lahiri,B.K., Das,P., (2005) , ” $I$  and  $I^*$ -convergence in topological spaces”, *Mathematica Bohemica*, Vol. 130,pp.153-160.

Otafudu,O.O., (2021) , ”Maps that preserve left (right)  $K$ -Cauchy sequences”, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, Vol. 50 (5), pp.1466-1476.

Papachristodoulos, C., Papanastassiou, N., Wilczynski, W.,(2010),  $I$ -exhaustive sequences of functions. Selected papers of the *ICTA*.

Reilly,I.L., Subrahmanyam,P.V., Vamanamurthy, M.K., (1982) ,”Cauchy Sequences in Quasi-Pseudo-Metric Spaces”, *Monatshefte für Mathematik*, Vol.93,pp.127-140.

Steinhaus,H., (1951) ,”Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique”, *Colloquium Mathematicum*, Vol.2, pp.73-74.

Şahiner, A., Gürdal,M., Yiğit,T., (2011) ,”Ideal convergence characterization of the completion of linear  $n$ -normed spaces”, *Computers and Mathematics with Applications*, Vol.61, pp.683-689.

## ÖZGEÇMİŞ



