



**DÜĞÜM TEORİSİ VE İSTATİSTİKSEL
MEKANİK**

Volkan KARAHAN

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Ana Bilim Dalı
Prof. Dr. Tamer UĞUR
2025**

(Her hakkı saklıdır.)

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

DÜĞÜM TEORİSİ VE İSTATİSTİKSEL MEKANİK
(Knot Theory and Statistical Mechanics)

Volkan KARAHAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman: Prof. Dr. Tamer UĞUR

Erzurum
Ağustos, 2025



FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Graduate School of Natural and
Applied Sciences

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü
TEZ KABUL VE ONAY TUTANAĞI

DÜĞÜM TEORİSİ VE İSTATİSTİKSEL MEKANİK

Prof. Dr. Tamer UĞUR danışmanlığında Volkan KARAHAN tarafından hazırlanan bu çalışma, 25/08/2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Topoloji Bilim Dalı'nda .Yüksek Lisaans tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı: Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU

Atatürk Üniversitesi

Aslı ıslak imzalıdır

Danışman: Prof. Dr. Tamer UĞUR

Atatürk Üniversitesi

Aslı ıslak imzalıdır

Jüri Üyesi: Prof. Dr. Ceren Sultan ELMALI

Erzurum Teknik Üniversitesi

Aslı ıslak imzalıdır

Enstitü Yönetim
Kurulunun/....../.... tarih
ve sayılı kararı.

Bu tezin Atatürk Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddelerinde belirtilen şartları yerine getirdiğini onaylarım.

Prof.Dr. Alper NUHOĞLU

Enstitü Müdürü

Aslı ıslak imzalıdır

ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU

Yüksek Lisans Tezi olarak Prof. Dr. Tamer UĞUR danışmanlığında sunulan “Düğüm Teorisi ve İstatistiksel Mekanik” başlıklı çalışmanın tarafımızdan bilimsel etik ilkelere uyularak yazıldığını, yararlanılan eserlerin kaynakçada gösterildiğini, Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından belirlenmiş olan Turnitin Programı benzerlik oranlarının aşılmadığını ve aşağıdaki oranlarda olduğunu beyan ederiz.

Tez Bölümleri	Tezin Benzerlik Oranı (%)	Maksimum Oran (%)
Giriş	0	30
Kuramsal Temeller	22	30
Materyal ve Yöntem	3	35
Bulgular	0	20
Tartışma ve Sonuç	0	20
Tezin Geneli	13	25

Not: Yedi kelimeye kadar benzerlikler ile Başlık, Kaynakça, İçindekiler, Teşekkür, Dizin ve Ekler kısımları tarama dışı bırakılabilir. Yukarıdaki azami benzerlik oranları yanında tek bir kaynaktan olan benzerlik oranlarının %5'den büyük olmaması gerekir.

Beyan edilen bilgilerin doğru olduğunu, aksi halde doğacak hukuki sorumlulukları kabul ve beyan ederiz.

Tez Yazarı (Öğrenci)	Tez Danışmanı
Volkan KARAHAN	Prof. Dr. Tamer UĞUR
25.08.2025	25.08.2025
İmza: Aslı Islak İmzalıdır	İmza: Aslı Islak İmzalıdır

* Tez ile ilgili YÖKTEZ'de yayınlamasına ilişkin bir engelleme var ise aşağıdaki alanı doldurunuz.

☐ Tezle ilgili patent başvurusu yapılması / patent alma sürecinin devam etmesi sebebiyle Enstitü Yönetim Kurulunun/.../.... tarih ve... sayılı kararı ile teze erişim 2 (iki) yıl süreyle engellenmiştir.

☐ Enstitü Yönetim Kurulunun/.../.... tarih ve sayılı kararı ile teze erişim 6 (altı) ay süreyle engellenmiştir.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde, değerli bilgilerini benimle paylaşan, bana kıymetli zamanını ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle bana faydalı olabilmek için elinden gelenden fazlasını sunan, güler yüzünü ve samimiyetini benden esirgemeyen kıymetli hocam Prof. Dr. Tamer UĞUR’a teşekkürü bir borç biliyor ve şükranlarımı sunuyorum. Yüksek lisansta kıymetli bilgilerini esirgemeyen Prof. Dr. Ahmet KÜÇÜK hocama ve daha birçok öğrenciye ışık olacağına inandığım kıymetli Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU hocama sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca benden desteklerini hiçbir zaman eksik etmeyen kıymetli eşim Vildan KARAHAN’a ve oğlum Hasan Yücel KARAHAN’a sonsuz teşekkürler.

Yüksek Lisans çalışmamda alan bilgisini ve desteklerini eksik etmeyen değerli arkadaşım Hülya DİRİ’ye sonsuz teşekkürler.

Bu çalışmayı Yüksek Lisans yapmamda en büyük destekçim olan ve bu konuda desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen ve şu an aramızda olmayan babam Yücel KARAHAN ve annem Fatma KARAHAN’a ithaf ediyorum.

Volkan KARAHAN

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DÜĞÜM TEORİSİ VE İSTATİSTİKSEL MEKANİK

Volkan KARAHAN

Danışman: Prof. Dr. Tamer UĞUR

Amaç: Bu tezde, düğüm teorisi ve istatistiksel mekanik arasındaki ilişki ele alınmış ve bu iki alanın birbiriyle nasıl etkileşim içinde olduğu detaylı bir şekilde incelenmiştir. Özellikle, Jones polinomunun düğümleri sınıflandırma gücü ve bu polinomun istatistiksel mekanik sistemleri üzerindeki etkileri araştırılmıştır.

Yöntem: Çalışmada öncelikle düğüm teorisinin kuramsal temelleri, Reidemeister hareketleri, skein bağıntıları ve düğüm invaryantları anlatılmıştır. Daha sonra kafes yapıları üzerinden istatistiksel mekanik ile Jones polinomunun nasıl ilişkilendirildiği tartışılmıştır.

Bulgular: İlk olarak Düğüm tanımlandı, Düğüm Denklikleri ve İnvaryantları tanımlandı. İstatistiksel Mekanikten bahsedildikten sonra bu sabitler ile İstatistiksel Mekanik ilişkileri tanımlandı.

Sonuç: Düğüm teorisinin yalnızca matematiksel bir alan olarak değil, aynı zamanda fiziksel sistemlerin analizinde de güçlü bir araç olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Düğüm Teorisi, Jones Polinomu, İstatistiksel Mekanik, kafes modelleri, Reidemeister hareketleri, denklikler

Ağustos 2025, 74 sayfa

ABSTRACT

MASTER THESIS

KNOT THEORY AND STATISTICAL MECHANICS

Volkan KARAHAN

Advisor: Prof. Dr. Tamer UĞUR

Purpose: This thesis examines the relationship between knot theory and statistical mechanics, providing a detailed analysis of how these two fields interact with each other. Specifically, the classification power of the Jones polynomial and its effects on statistical mechanical systems have been investigated.

Method: In this study, the theoretical foundations of knot theory, Reidemeister moves, skein relations, and knot invariants are first presented. Subsequently, the relationship between statistical mechanics and the Jones polynomial is discussed through lattice structures.

Findings: Initially, knots were defined, followed by the introduction of knot equivalences and invariants. After discussing statistical mechanics, the relationships between these invariants and statistical mechanics were established.

Results: It has been demonstrated that knot theory serves not only as a mathematical framework but also as a powerful tool for analyzing physical systems.

Keywords: Knot Theory, Jones Polynomial, Statistical Mechanics, lattice models, Reidemeister Movements, Equivalences

August 2025, 74 pages

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY TUTANAĞI.....	i
ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
SİMGELER DİZİNİ	x
GİRİŞ.....	1
KURAMSAL TEMELLER.....	4
Genel Kavramlar	4
Topolojik Kavramlar	4
Düğüm.....	7
Regüler Diyagram	8
Temel Düğüm Hareketleri.....	10
Düğümlerin Denkliği	11
Klasik Düğüm İnvaryantları.....	13
Reidemeister Hareketleri.....	14
Geçit noktalarının minimum sayısı	16
Köprü sayısı	16
Düğümlememe Sayısı	17
Halkalanma Sayısı.....	18
Kafes (Lattice).....	19
Spin	19
Köşe (Vertex).....	20
Hızlılık (Rapidity)	20
Bölüntü Fonksiyonu (Partition Function)	20
Yang–Baxter denklemi.....	20
MATERYAL VE YÖNTEM	21
1. Yönlendirilmemiş Düğümler İçin Reidemeister Hareketi	23
2. Yönlendirilmiş Düğümler İçin Reidemeister Hareketi	23
Skein Bağıntısı	26

Yönlendirilmiş Düğümler İçin Skein Bağıntısı	26
Yönlendirilmemiş Düğümler İçin Skein Bağıntısı.....	28
Diğer Skein Bağıntıları	28
Polinom İnvaryantları.....	29
1. Alexander-Conway polinomu	29
2. Jones polinomu	30
3. HOMFLY polinomu	30
4. Akutsu-Wadati polinomu	31
5. Kauffmann polinomu	31
Kafes Modelleri ve Düğüm İnvaryantları	33
Köşe Modelleri.....	34
Formülasyon.....	34
Yang-Baxter denklemi	36
Geliştirilmiş Köşe Modelleri.....	39
Yük Korumalı Modeller	41
Tümlemlenebilir Köşe Modelleri	43
1. Spin-muhafazalı model	43
2. N-durumlu köşe modeli	44
3. Kesişmeyen-şerit modeli.....	46
ARAŞTIRMA BULGULARI	48
Köşe Modellerinden Düğüm Sabitlerine.....	48
Yönlendirilmiş düğümler	48
Jones Polinomu	51
Yönlendirilmemiş Düğümler	52
Köşe Etkileşim Modellerinden Düğüm Sabitlerine	54
SONUÇ.....	60
KAYNAKÇA	61
ÖZGEÇMİŞ	62

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Düğüm.....	7
Şekil 2. Trefoil düğüm	7
Şekil 3. Listing düğümü	8
Şekil 4. Düğümün regüler diyagramı	8
Şekil 5. Katlı noktaların gösterimi	9
Şekil 6. Farklı iki düğümün izdüşümü	9
Şekil 7. Temel Düğüm Hareketleri (1).....	10
Şekil 8. Temel Düğüm Hareketleri (2).....	11
Şekil 9. Perko çifti.....	11
Şekil 10. Düğümlerin yönlendirilmesi	12
Şekil 11. Denk olan iki düğüm hareketi örneği.....	12
Şekil 12. Reidemeister hareketleri	14
Şekil 13. Regüler diyagram	14
Şekil 14. Reidemeister hareketleri örneği	14
Şekil 15. R hareketleri	15
Şekil 16. Aşkar düğümün farklı iki regüler diyagramlarına göre geçit noktaları sayısı	16
Şekil 17. Köprü örnekleri	16
Şekil 18. Geçit noktalarının Sol-el trefoil düğümünde alt-üst edilmesi	17
Şekil 19. Bir halkada yer alan geçit noktasının yönünü veya işaretini belirleme yöntemi	18
Şekil 20. Halkalanmasa sayısı için iki düğüm örneği	19
Şekil 21. Yönlendirilmiş düğümlerin düzlemsel temsilleri için örnekler: (a) ve (b) aşkar düğüm; (c) sağ el trefoil ve (d) Hopf halkası.	22
Şekil 22. İki tür doğru kesişimi: (a) yönlendirilmemiş düğümler, (b) yönlendirilmiş düğümler	22
Şekil 23. Yönlendirilmemiş düğümler için üç tür Reidemeister hareketi	23
Şekil 24. Yönlendirilmiş düğümler için I ve II nci tür Reidemeister hareketleri.	24
Şekil 25. Yönlendirilmiş düğümler için IIIA türü hareketler.	24
Şekil 26. Yönlendirilmiş düğümler için IIIB türü hareketler.	25
Şekil 27. IIIB türü bir hareket ve IIIA tipi altı hareketin birinden üretilen bir IIIB türü hareket	25
Şekil 28. Doğru hareketleri yoluyla açılmayacak/çözülemeyecek konfigürasyonlar	25
Şekil 29. Yönlendirilmiş düğümler için Skein bağıntısı kapsamında değerlendirilen üç doğru konfigürasyonu	26

Şekil 30. Skein bağıntısı yoluyla bağlanan düğüm örnekleri	27
Şekil 31. Yönlendirilmemiş düğümler için Skein bağıntısı kapsamında değerlendirilen dört doğru konfigürasyonu	28
Şekil 32. Genel Skein bağıntısı için doğru konfigürasyonları.....	28
Şekil 33. Denklem (18) te değerlendirilen üç doğru konfigürasyonu	32
Şekil 34. Koordinasyon sayısı 4 olan sonlu bir Kafes.....	35
Şekil 35. Yönlendirilmiş bir Kafes.....	35
Şekil 36. Köşe yönlendirmesi.....	36
Şekil 37. Köşe modelleri için Yang-Baxter denklemi.....	36
Şekil 38. u, v, w spektral parametrelerinin doğrularla ilişkilendirilmesi.....	37
Şekil 39. Köşe ağırlıkları için bütünlük koşulu.....	39
Şekil 40. Sonsuzluk-rapidite limitinde Yang-Baxter denklemi	41
Şekil 41. Yönlendirilmiş bir parçalı lineer Kafes.....	42
Şekil 42. Parçalı-lineer Kafeslerde köşeler	42
Şekil 43. Yönlendirilmiş bir yol	43
Şekil 44. Spin-korumalı köşe modelinin köşe ağırlıkları	46
Şekil 45. Kesişmeyen-şerit modelinin köşe ağırlıkları.....	46
Şekil 46. Bir düğümden kafes elde edilmesi	48
Şekil 47. Şekil 46 daki kafes kullanılarak üretilen parçalı-lineer kafes	49
Şekil 48. I nci tür Reidemeister hareketleri için etiketler.....	50
Şekil 49. IIA türü Reidemeister hareketleri için etiketler	50
Şekil 50. IIB türü Reidemeister hareketleri için etiketler.....	51
Şekil 51. IIIB türü Reidemeister hareketler için etiketler	51
Şekil 52. Yönlendirilmemiş düğümler için bir köşe etiketi.....	52
Şekil 53. Reidemeister hareketleri için etiketler	53
Şekil 54. İkili etkileşimlerin görüldüğü bir spin modeli için bir Kafes örneği. Kübik çemberler spinleri ve kesikli çizgiler ise Kafes kenarları ve etkileşimleri göstermektedir.....	54
Şekil 55. Spin modeline iki tür etkileşim. Bir köşeyi bir kenar boyunca terk ettikten sonra (bu bir üzerinden geçme durumudur) gölgeli alan solda (sağda) ise etkileşim + (-) türlü bir etkileşimdir.	55
Şekil 56. I inci tür Reidemeister hareketleri.....	56
Şekil 57. II ve III üncü tür Reidemeister hareketleri.....	57
Şekil 58. Reidemeister hareketlerinin eşdeğer tasvirleri.	57
Şekil 59. Sekin ilişkisi konfigürasyonları.	58

SİMGELER DİZİNİ

Δ	: İzdüşüm
(X, τ)	: Topolojik Uzay
$\Delta_K(t)$	: K Düğümünün Alexander Polinomu
$\nabla_K(t)$	: K Düğümünün Alexander-Conway Polinomu
$A^{(N)}(t)$	: Akutsu-Wadati Polinomu
$\bar{A}$	: Kapalı Küme
L^*	: Lineer kafes
$P_K(t, z)$	: K Düğümünün HOMFLY Polinomu
$V_K(t)$	: K Düğümünün Jones Polinomu
(X, d)	: Metrik Uzay
k_B	: Boltzman Sabiti
$\{\sigma\}$	: Tüm Spin Konfigürasyonları
τ_d	: Metrik Topoloji
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
R	: Reidemeister Hareketleri
D	: Herhangi Bir Düğümün Regüler Diyagramı
K	: Herhangi Bir Düğüm
L	: Kafes
$L(a, z)$	: Kauffman Polinomu
W	: Boltzman Faktörü
$br(K)$	: Köprü Sayısı
$c(K)$	: Geçit Noktalarının Minimum Sayısı
$lk(L)$	: Halkalanma Sayısı
$p(K)$	: Bir Düğümün Sabiti
$sign(c)$	: Bir Geçit Noktasının İşareti
$u(K)$	: Düğümlenme Sayısı
$w(K)$	: Burulma Sayısı
$\mathfrak{B}$	: Lokal Baz
β	: Ters Sıcaklık

GİRİŞ

Düğüm teorisi, matematiksel topolojinin önemli bir alt dalı olup, üç boyutlu uzayda kapalı eğrilerin topolojik yapısını incelemektedir. Bu teori, düğümlerin sınıflandırılması, topolojik invariantların belirlenmesi ve farklı matematiksel araçlarla analiz edilmesi üzerine yoğunlaşmaktadır. Düğüm teorisinin başlangıcı 19. yüzyıl başlarına kadar gitmekte olup, Carl Friedrich Gauss'un 1833'te yaptığı çalışmalar bu alanın temellenmesine katkı sağlamış fakat Gauss bu alanda herhangi bir çalışma yayımlamamıştır. Daha sonra, Peter Guthrie Tait ve James Clerk Maxwell, düğümleri sistematik bir şekilde sınıflandırmaya yönelik çalışmalar yapmış, 20. yüzyılın başlarında ise James Waddell Alexander düğüm sınıflandırmaları için Alexander polinomunu geliştirmiştir.

Düğüm teorisinin topoloji alanındaki gelişimi, yalnızca matematikle sınırlı kalmamış, zamanla fizik, kimya ve biyoloji gibi alanlarla da etkileşime girmiştir. İkinci Dünya Savaşı sonrasında, düğüm teorisi üzerine yapılan çalışmalar özellikle ABD ve Japonya'da büyük ilerlemeler kaydetmiş, 1970'lerde Smith tahmini gibi problemlerin çözülmesiyle düğüm teorisinin cebirsel sayı teorisi ile bağlantılı olabileceği ortaya çıkmıştır. 1980'lerin başında Vaughan Jones, düğüm teorisinin istatistiksel mekanik ile ilişkisini keşfetmiş ve bu bağlamda Jones polinomunu tanımlamıştır. Bu polinom, düğüm teorisinin yalnızca topolojik analizle sınırlı kalmayıp, fiziksel sistemlerin çözülebilir matematiksel modelleriyle de bağlantılı olduğunu göstermiştir.

Bu çalışma, düğüm teorisinin istatistiksel mekanikle olan ilişkisini incelemeyi amaçlamakta olup, özellikle Jones polinomları ve çözülebilir spin sistemleri gibi konulara değinecektir. İstatistiksel mekanik, düğüm teorisi ile doğrudan ilişkili olan faz geçişleri ve kuantum spin sistemleri gibi fiziksel süreçleri anlamada kritik bir rol oynamaktadır. Dolayısıyla, düğüm teorisi ve istatistiksel mekanik arasındaki etkileşimin detaylı bir analizi hem teorik matematik hem de uygulamalı fizik açısından önemli katkılar sağlayacaktır.

Düğüm teorisi, topolojik olarak farklı düğümleri sınıflandırmak ve analiz etmek için matematiksel invariantlar kullanır. Bu invariantlar arasında Alexander polinomu, Conway polinomu ve Jones polinomu gibi düğüm invariantları bulunmaktadır. Jones polinomu, 1984 yılında Vaughan Jones tarafından tanımlanmış olup, düğümleri ayırt etmek için kullanılan en güçlü invariantlardan biridir.

Jones polinomu, düğümlerin belirli bir matematiksel dönüşüm altındaki değişmezliğini inceleyen bir fonksiyon olarak tanımlanır ve özel olarak skein ilişkileri kullanılarak hesaplanır. Skein ilişkileri, farklı düğüm konfigürasyonları arasındaki cebirsel bağlantıları ortaya koyarak, belirli bir düğüm için polinom değerlerini belirlemeye yardımcı olur. Jones polinomu, düğümleri topolojik olarak sınıflandırmanın ötesinde, kuantum mekaniği ve istatistiksel mekanikte kullanılan bazı modellerle de doğrudan ilişkilidir.

Jones polinomunun önemli bir özelliği, düğümlerin çözülüp çözülemediğini belirlemeye yardımcı olmasıdır. Bu, özellikle çözülebilir istatistiksel modeller ve kuantum spin sistemleri ile bağlantılı olarak düğüm teorisinin fiziksel sistemlerde nasıl kullanılabileceğini göstermektedir.

İstatistiksel mekanik, çok sayıda parçacıktan oluşan fiziksel sistemlerin makroskobik özelliklerini inceleyen bir bilim dalıdır. Bu alanda çözülebilir modeller geliştirmek, fiziksel sistemlerin davranışlarını anlamada önemli bir adımdır. Düğüm teorisi, özellikle çözülebilir spin sistemleri, Potts modeli ve Ising modeli gibi istatistiksel mekanik modelleriyle güçlü bir ilişkiye sahiptir.

Jones polinomu, istatistiksel mekanikte kullanılan belirli çözülebilir spin sistemleri ile doğrudan bağlantılıdır. Örneğin, Potts modeli, faz geçişlerini ve spin etkileşimlerini anlamada kullanılan bir model olup, Jones polinomu ile ilişkili olduğu gösterilmiştir. Aynı şekilde, Ising modeli, düğümlerin manyetik sistemler içindeki davranışlarını analiz etmek için kullanılan bir başka çözülebilir modeldir.

Jones polinomu, istatistiksel mekanikteki transfer matrisleri ile bağlantılı olarak da analiz edilebilir. Transfer matrisleri, belirli bir fiziksel sistemin durumlarını bir önceki durumuna bağlı olarak hesaplayan matrislerdir ve düğüm teorisiyle ilişkili olarak kuantum spin sistemlerinin çözümünde kritik rol oynamaktadır.

Düğüm teorisi ile istatistiksel mekanik arasındaki ilişki, kuantum mekaniği ile daha da güçlenmektedir. Jones polinomu, belirli kuantum sistemlerinde kuantum düğüm invariantları olarak adlandırılan yeni bir sınıfın ortaya çıkmasını sağlamıştır. Bu invariantlar, kuantum alan teorisi içinde topolojik kuantum alan teorisi (TQFT) adı verilen özel bir alt dal ile ilişkilidir.

Topolojik kuantum alan teorisi, düğüm teorisini kullanarak belirli kuantum sistemlerinin dalga fonksiyonlarını ve gömülü uzay içindeki davranışlarını anlamaya yardımcı olmaktadır. Özellikle Chern-Simons teorisi, düğüm teorisi ile kuantum mekaniğini birleştiren en önemli teorik çerçevelerden biri olarak öne çıkmaktadır.

Jones polinomu, kuantum mekaniksel spin sistemleri içinde de yer almakta olup, kuantum hesaplama ve topolojik kuantum bilgisayarları gibi konularla doğrudan ilişkilidir. Anyonik sistemler, topolojik kuantum hesaplamada düğüm teorisinin nasıl kullanılabileceğini göstermekte ve gelecekte kuantum bilgisayar teknolojisinin gelişmesine katkıda bulunabileceği öngörülmektedir.

Bu çalışmada, düğüm teorisinin istatistiksel mekanikle olan bağlantısı incelenmiş ve Jones polinomlarının bu alandaki yerine değinilmiştir. Gelecekte, düğüm teorisinin topolojik kuantum alan teorisi ve topolojik kuantum hesaplama gibi yeni nesil fizik ve mühendislik alanlarında daha fazla uygulanabilir hale gelmesi beklenmektedir. Jones polinomlarının transfer matrisleri, kuantum spin sistemleri ve faz geçişleri üzerindeki etkileri araştırıldıkça, düğüm teorisinin modern bilime katkısının daha da artacağı öngörülmektedir.



KURAMSAL TEMELLER

Genel Kavramlar

Bu kısımda, çalışmanın ilerleyen bölümlerine yön veren ve araştırmanın temelini oluşturan, zaman zaman konunun anlaşılmasında ihtiyaç duyacağımız teorem ve tanımlara yer verilmiştir.

Topolojik Kavramlar

Tanım 1: X boş olmayan bir küme olmak üzere ve $\tau \subset P(X)$ olsun. Eğer τ aşağıda verilen şartları karşılıyorsa τ ya X üzerinde tanımlı bir topoloji ve (X, τ) ikilisi de topolojik uzay olarak adlandırılır.

1. $\emptyset, X \in \tau$
2. Her $i \in I$ için $U_i \in \tau$ ise $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$
3. Her $i = 1, 2, \dots, n$ için $U_i \in \tau$ ise $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n \in \tau$.

(X, τ) ikilisi topolojik uzay olmak üzere, $A \subset X$ alalım. Eğer $A \in \tau$ ise A kümesine açık küme denir. Eğer $A^c \in \tau$ ise A kümesine kapalı bir küme denir (Baran, 2024).

Tanım 2: X herhangi bir küme ve τ_1, τ_2 de X üzerinde topolojiler olsun. $\tau_1 \subseteq \tau_2$ oluyorsa τ_1 topolojisi τ_2 topolojisinden daha kaba (küçük) veya τ_2 topolojisi τ_1 topolojisinden daha ince (büyük) denir (Baran, 2024).

Tanım 3: (X, τ) topolojik uzayında, $\mathfrak{B} \subset P(X)$ ve $a \in X$ olmak üzere, eğer a noktasını içeren her U açığı için $a \in B \subset U$ şeklinde az bir $B \in \mathfrak{B}$ varsa $\mathfrak{B}$ sınıfına a noktasının lokal bazı denir (Baran, 2024).

Tanım 4: (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

$A^\circ = \bigcup \{U \subset A : U \in \tau\}$ Kümesine A nın içi

ve $\bar{A} = \bigcap \{K \subset X : K \text{ kapalı}, A \subset K\}$ kümesine A nın kapanışı denir (Baran, 2024).

Tanım 5: (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

1. Eğer $a \in X$ i içeren her U açığı $(U \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$ ise a noktasına A kümesinin yığılma noktası denir ve A nın tüm yığılma noktalarının kümesi de A' ile gösterilir.

2. $a \in A$ için eğer $a \in U \subset A$ olacak şekilde $U \in \tau$ varsa a elemanına A nın iç noktası

denir.

3. $s(A) = \bar{A} \setminus A^\circ$ kümesine A nın sınırı denir.

4. Eğer $\bar{A} = X$ ise A alt kümesine yoğun küme denir (Baran, 2024).

Tanım 6: (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzayları ve $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ bir fonksiyon olsun.

1. Eğer $f(x)$ noktasını içeren her $U_{f(x)}$ açığı için $f(U_x) \subset U_{f(x)}$ olacak şekilde x noktasını içeren en az bir U_x açık kümesi varsa f fonksiyonuna x noktasında süreklidir denir.

2. Eğer Y topolojik uzayındaki her açık kümenin ters görüntüsü X topolojik uzayında açık ise f fonksiyonuna süreklidir denir (Baran, 2024).

Tanım 7: (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzayları ve $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ bir fonksiyon olsun.

1. Eğer X de ki her açık kümenin görüntüsü Y de açık ise f fonksiyonuna açık fonksiyon denir.

2. Eğer X de ki her kapalı kümenin görüntüsü Y de kapalı oluyorsa f fonksiyonuna kapalı fonksiyon denir.

3. f fonksiyonu bire-bir, örten, sürekli ve f^{-1} sürekli ise f' ye homeomorfizm denir ve X ve Y uzaylarına da homeomorfik uzaylar denir (Baran, 2024).

Tanım 8: (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar ve $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ bir homeomorfizm olsun. Eğer (X, τ) uzayı P özelliğine sahipken (Y, σ) uzayı da aynı P özelliğine sahip oluyorsa bu P özelliğine topolojik özellik denir (Baran, 2024).

Tanım 9: (X, τ) topolojik uzay ve $\mathcal{U} = \{U_i \subset X: i \in I\}$ olsun. Eğer $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ ise $\mathcal{U}$ ailesine X in örtüsü denir. Eğer (X, τ) uzayının her açık örtüsü sonlu örtüye indirgeniyorsa, yani eğer her $U_i \in \tau$ ve $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ örtüsü için $X = \bigcup_{k=1}^n U_k$ oluyorsa (X, τ) uzayına kompakt uzay denir (Baran, 2024).

Teorem 1: (X, τ) kompakt uzay ve $A \subset X$ kapalı ise (A, τ_A) kompakttır (Baran, 2024).

Teorem 2: $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ sürekli olsun. Eğer (X, τ) uzayı kompakt ise $f(X)$ de kompakttır (Baran, 2024).

Tanım 10: Eğer (X, τ) topolojik uzayı boştan farklı ayrık ve açık iki kümenin birleşimi olarak yazılamaz ise (X, τ) ya bağlantılı uzay denir (Baran, 2024).

Tanım 11: (X, τ) topolojik uzay ve $a, b \in X$ olsun $a(0) = a$ ve $a(1) = b$ olacak şekilde sürekli $a: [0,1] \rightarrow X$ fonksiyonuna a dan b ye bir yol denir (Baran, 2024).

Tanım 12: (X, τ) bir topolojik uzay ve $a, b \in X$ olsun. a dan b ye bir yol varsa (X, τ) ya yol bağlantılı uzay denir (Baran, 2024).

Teorem 3: $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ sürekli ve (X, τ) yol bağlantılı ise $f(X)$ da yol bağlantılıdır.

1. Yol bağlantılılık topolojik özelliktir.

2. Her bağlantılı uzayın bölüm uzayı yol bağlantılıdır.

3. Her $i \in I$ için $X_i \neq \emptyset$ ve (X_i, τ_i) yol bağlantılıdır ancak ve ancak $(\prod_{i \in I} X_i, \tau_i)$ çarpım uzayı yol bağlantılıdır (Baran, 2024).

Teorem 4: Eğer (X, τ) yol bağlantı ise (X, τ) bağlantılıdır (Baran, 2024).

Tanım 13: X boştan farklı bir küme olmak üzere $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa d ye metrik ve (X, d) ikilisine metrik uzay denir.

$$\forall x, y \in X, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$\forall x, y, z \in X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \text{ (Üçgen eşitsizliği)},$$

$$\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x) \text{ (Simetri özelliği) (Baran, 2024).}$$

Tanım 14: (X, d) metrik uzayı olsun. $a \in X$ için $S(a, r) = \{x \in X: d(x, a) < r, r > 0\}$ kümesine a merkezli r yarıçaplı açık yuvar denir (Baran, 2024).

Tanım 15: $\mathfrak{B} = \{S(a, r): a \in X \text{ ve } r > 0\}$ bazı tarafından doğrulan topolojiye metrik topolojisi denir ve τ_d ile gösterilir (Baran, 2024).

Tanım 16: $(X, d), (Y, e)$ metrik uzayları ve $f: (X, d) \rightarrow (Y, e)$ fonksiyon olsun.

Eğer Y deki her U açığı için $f^{-1}(U)$ X de açık ise f fonksiyonuna sürekli fonksiyon denir.

Eğer X deki her U açığı için $f(U)$ Y de açık ise f fonksiyonuna açık fonksiyon denir.

Eğer X deki her A kapalı alt kümeleri için $f(A)$ Y de kapalı ise f fonksiyonuna kapalı fonksiyon denir.

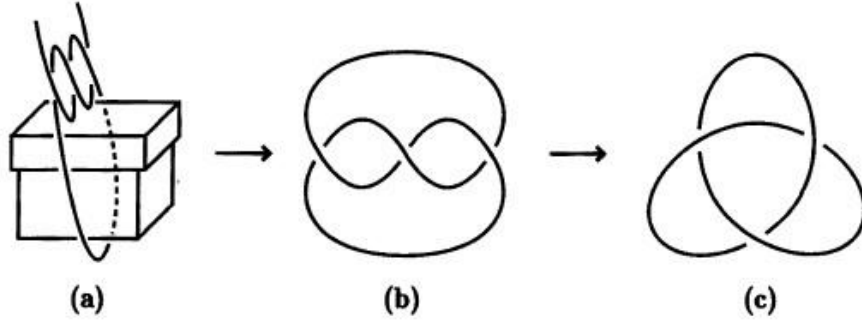
Eğer her $x, y \in X$ için $e(f(x), f(y)) = d(x, y)$ ise f fonksiyonuna uzaklığı korur denir.

Eğer f fonksiyonu 1-1, örten ve her $x, y \in X$ için $d(x, y) = e(f(x), f(y))$ ise f fonksiyonuna izometri denir (Baran, 2024).

Tanım 17: (X, τ) bir topolojik uzay ve $x \neq y$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için $\exists U_x \in N(x), \exists U_y \in N(y) \ni U_x \cap U_y = \emptyset$ ise (X, τ) topolojik uzayına Hausdorff uzayı denir.

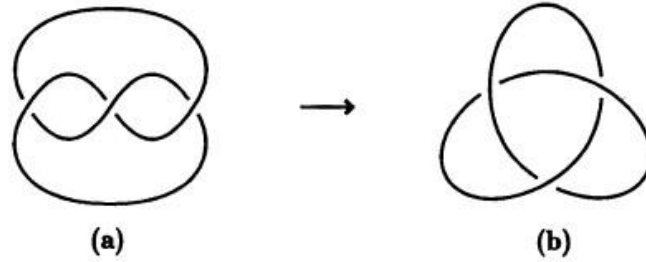
Düğüm

Yeterli uzunluktaki bir ip veya sicim, Şekil 1(a) da görüldüğü üzere serbestçe bir kutuya bağlanmıştır. Bu aşamada düğümün basit bir temsil formu elde edilmektedir. Daha sonra, ipin her iki ucu birleştirilip sabitlendikten ve sadece destek amacıyla kullanılan kutu kaldırıldıktan sonra, Şekil 1(b) de gösterilen düğümlenmiş halka oluşur. Matematiksel bağlamda, bu halka bir düğüm olarak tanımlanır.



Şekil 1. Düğüm

Düğüm, üç boyutlu uzayda tek bileşenli kapalı bir eğri olarak modellenebilir. Bu bağlamda, düğüm basit ve kapalı bir eğri olarak tanımlanır.



Şekil 2. Trefoil düğüm

İlk bakışta benzer yapılar sergilemelerine rağmen, ilgili iki düğüm arasında belirli topolojik farklılıklar bulunmaktadır. Her iki yapı da trefoil düğüm sınıfına ait olup, geometrik formlarının yonca yaprağına benzemesi nedeniyle literatürde zaman zaman "yonca yaprağı düğümü" terimiyle de anılmaktadır. Bununla birlikte, Şekil 1(c) ve Şekil 2(b) deki düğümler arasında gözlemlenen yönelim farklılıkları, bu yapıların ayırık biçimlerde tanımlanmasını gerektirmektedir. Bu doğrultuda, Şekil 1(c) de yer alan yapı genellikle sağ-el (right-handed) trefoil düğümü, Şekil 2(b) de yer alan yapı ise sol-el (left-handed) trefoil düğümü olarak adlandırılmaktadır (Murasugi, 1996).

Bir yapının düğüm olarak tanımlanabilmesi için, yalnızca yeterli uzunluktaki bir ipin bir kutuya ya da benzeri bir nesneye bağlanması yeterli bir kriter değildir. Zira, ip üzerinde

gerçekleştirilen farklı bağlama yöntemleri sonucunda topolojik olarak birbirinden ayrık ve bağımsız çeşitli düğüm tipleri ortaya çıkabilmektedir.

Düğüm teorisine ilk olarak kimin ve hangi tarihte ilgi gösterdiğini kesin olarak belirlemek güç olmakla birlikte, son dönem kaynaklarda Carl Friedrich Gauss'un bu alana yönelik ilgisinin bulunduğu bilinmektedir. Gauss'un öğrencisi olan Johann Benedict Listing ise düğüm teorisine dair bazı çalışmalar yapmıştır. Bununla birlikte, literatürde özellikle Şekil 3 te yer alan ve sekiz biçimli yapısıyla tanınan düğüm, Listing'in bu alandaki erken dönem katkılarına atfen "Listing düğümü" olarak adlandırılmaktadır (Murasugi, 1996).



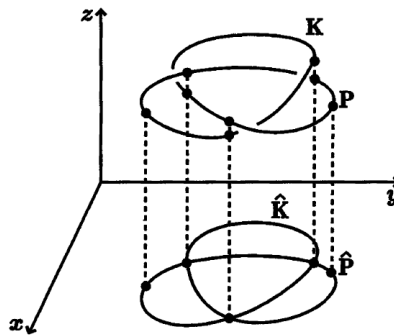
Şekil 3. Listing düğümü

Tanım 18: $S^1 = \{(x, y): x^2 + y^2 = 1; x, y \in \mathbb{R}\}$ şeklinde tanımlı birim çember olmak üzere. S^1 in $\mathbb{R}^3$ veya $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ içine gömülmesine düğüm denir (Burde ve Zieschang, 2002).

Tanım 19: Eğer bir X uzayına ait bir K altkümesi, bir S^p küresiyle homeomorf oluyorsa K bir düğüm olarak adlandırılır. Genel olarak ifade edilirse K , bir veya birden çok ayrık kürelerin $S^{p_1} \cup S^{p_2} \cup S^{p_3} \cup \dots \cup S^{p_r}$ birleşimiyle homeomorf oluyorsa K ya bir halka denir. Aksi belirtilmedikçe yukarıda verilen tanımda X uzayı $\mathbb{R}^n$ veya S^n olarak alınır (Rolfsen, 1976).

Regüler Diyagram

Şekil 4 de $\mathbb{R}^3$ deki $P(a, b, c)$ noktasını xy -düzlemindeki görüntüsünü $\hat{P}(a, b, 0)$ noktasına izdüştüren dönüşümü ile verilen fonksiyonu π ile gösterelim.



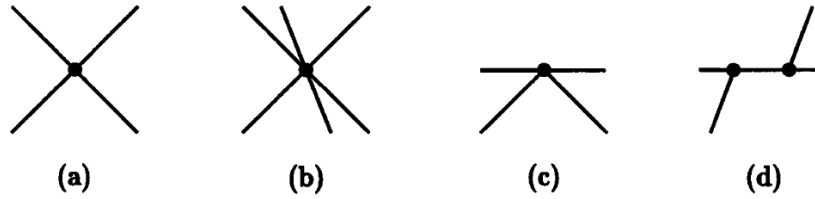
Şekil 4. Düğümün regüler diyagramı

Eğer K bir düğüm (veya halka) ise $\pi(K) = \widehat{K}$ ya K düğümünün izdüşümü denir. Dahası K bir yönlendirmeye sahipse $\widehat{K}$ da aynı yönlendirmeye sahiptir. Bununla birlikte $\widehat{K}$ birden fazla kesişim noktası olduğundan, söz konusu eğri, düzlemde yer alan kapalı basit bir eğri özelliği taşımaz. Birkaç basit düğüm hareketi K düğümüne uygulayarak aşağıdaki şartlar verilebilir.

1. $\widehat{K}$ izdüşümünün sonlu sayıda kesişim noktası vardır.

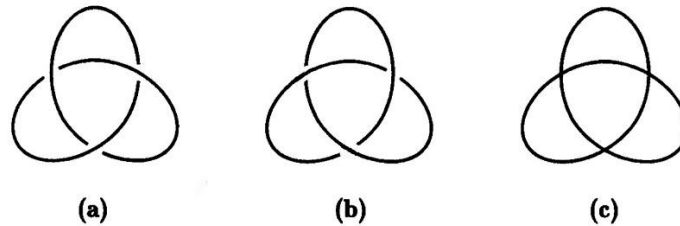
2. Eğer Q , $\widehat{K}$ izdüşümünün bir kesişim noktası ise Q nun ters görüntüsü K da iki farklı noktaya sahiptir. Yani Q , $\widehat{K}$ izdüşümünün bir katlı noktasıdır (Bakınız Şekil 5(a)). Şekil 5(b) de belirtildiği gibi ikiden fazla noktaya izin verilmez.

3. Poligonal bir yapı şeklinde ele alınan K düğümünün herhangi bir köşesi, $\widehat{K}$ izdüşümünün katlı noktalarına dönüşmez. Şekil 5(c) ve 5(d) de gösterilen örneklerde, poligonal doğru $\widehat{K}$ izdüşümünün bir köşesine izdüşmektedir; ancak bu tür durumlara izin verilmemektedir.



Şekil 5. Katlı noktaların gösterimi

Yukarıdaki şartları sağlayan $\widehat{K}$ düğümünün izdüşümü bir regüler izdüşümdür. Bu tez boyunca, hemen hemen işlemleri kolaylaştırmak için regüler izdüşümlerle çalışılacaktır. Aksi takdirde, bazı karışıklıklar ortaya çıksa bile bu farkı belirtilecektir. Ancak kendimizi izdüşümlerle kısıtlamış olsak bile katlı noktalarda önemli bir belirsizlik bulunmaktadır; çünkü izdüşümde düğümün yay parçasının üstten mi, alttan mı geçtiği belirlenemez. Bu belirsizliğin ortadan kaldırılması için, düğümün kesişim noktaları çizgisel olarak belirlenir ve katlı nokta çevresinde düğüm lokal olarak modifiye edilir. Böylece, orijinal topolojik yapıya birebir uyum sağlamasa da düğümün geçiş konumu netleştirilmiş olur. Bu tür modifiye edilmiş izdüşümler, regüler diyagram şeklinde isimlendirilir. Şekil 6 (a)-(b).



Şekil 6. Farklı iki düğümün izdüşümü

Regüler diyagram, bir düğümün üç boyutlu uzaydaki konumunu temsil eden iki boyutlu bir izdüşümüdür. Bu sayede düğümün uzaysal yapısını düzlem üzerinde görselleştirmemize olanak tanır. Ayrıca, izdüşüm sırasında kaybolan topolojik bilgileri geri kazanmak için regüler diyagramlar kullanılır. Buna örnek olarak Şekil 6(c), Şekil 6(a) ve 6(b) de birbirinden farklı olan iki düğümün izdüşümü gösterilmektedir. (Murasugi, 1996).

Tanım 20: Şekil 6 da gösterildiği üzere, geçiş noktalarının net olarak belirtildiği izdüşümlere regüler diyagram denir. Regüler diyagramlar, düğümün düzlem üzerinde uzaysal konumunu açık ve tutarlı bir şekilde temsil etmeye imkân sağlar.

Bir K düğümünün regüler diyagramı D üzerinde bir P noktası seçilsin ve P noktası D etrafında bir tam tur döndürülsün. Eğer D nin geçiş noktalarında P , ardışık olarak alt ve üst geçiş noktaları arasında yer değiştiriyorsa, bu durumda D regüler diyagramı alterne regüler diyagram olarak adlandırılır.

Tanım 21: En az bir alterne regüler diyagrama sahip düğümlere alterne düğüm denir.

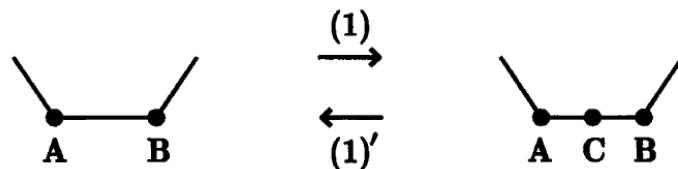
Temel Düğüm Hareketleri

Bir düğümün şeklinde basit hareketlerle değişiklikler yapılabilir. Örneğin Şekil 7 deki bir K düğümünün uzayda bir AB kenarını iki yeni AC ve CB kenarı ile değiştirmek mümkündür. Ayrıca bunun tersini de yapılabilir. Böyle değişimler basit düğüm hareketleri olarak ifade edilir. Bu değişim hareketleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Tanım 22: Verilen bir K düğümü üzerinde aşağıdaki dört işlem uygulanabilir.

(1) Şekil 7 de gösterildiği gibi verilen bir K düğümünün üzerinde alınan AB kenarını bir C kenarı referans seçilerek AC ile CB olacak şekilde iki ayrı kenara bölünebilir.

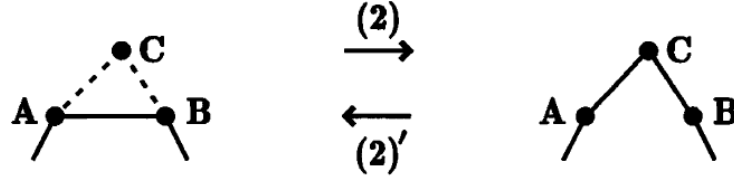
(1)' ((1) de verilenin tersi) Yine Şekil 7 de gösterildiği gibi verilen bir K düğümünün üzerinde alınan bitişik olan AC ile CB kenarlarının oluşturduğu bir doğru mevcutsa belirtilen C kenarı silinerek AB kenarını elde edilebilir.



Şekil 7. Temel Düğüm Hareketleri (1)

(2) K düğümü üzerinde yer almayan bir C noktasını düşünölsün. C ve AB ile biçimlendirilen ABC üçgeni AB kenarı dışında K düğümünü kesmez ise bu durumda AB kenarını ortadan kaldırabilir ve AC ile CB kenarlarını eklenebilir. (Şekil 8).

(2)'((2) nin tersi) K düğümünün üzerinde ve K nın AC ile CB bitişik iki kenarını üzerinde bulunduran bir ABC üçgeni varsa ve bu üçgen AC ile CB kenarları dışında K düğümünü kesmez ise Şekil 8 de gösterildiği gibi AC ile CB kenarları silinebilir ve AB kenarı eklenebilir.



Şekil 8. Temel Düğüm Hareketleri (2)

Bu dört işlem basit düğüm hareketleri olarak ifade edilir. (Murasugi, 1996).

Düğümlerin Denkliği

Yalnızca tek bir temel düğüm hareketi uygulanırsa bir düğümde algılanabilir bir değişiklik olmaz. Ancak, bu işlemi farklı yerlerde birkaç kez tekrarlanırsa, ortaya çıkan düğüm tamamen ilkinden farklı bir düğüm gibi görünebilir. Örneğin, Perko çifti ismiyle anılan Şekil 9 daki K_1 ile K_2 düğümleri ele alınsın.



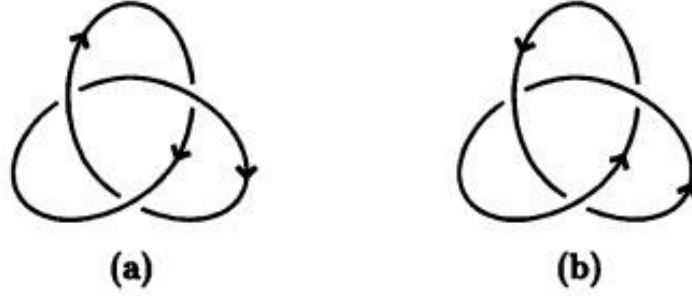
Şekil 9. Perko çifti

Perko'nun düğüm çifti görünüşte tamamen farklıdır. Aslında, yüz yıla yakın bir süre boyunca kimse aksini düşünmedi. Ancak, K_1 düğümünü K_2 düğümüne temel düğüm hareketlerini önemli sayıda uygulayarak dönüştürmek mümkün olmaktadır.

Tanım 23: Bir K düğümü, temel düğüm hareketlerini sonlu sayıda uygulayarak K' düğümünden elde edilebiliyorsa, K düğümünün elde edilen K' düğümüne denk (veya eşdeğer) olduğu söylenir.

Şayet K düğümü K' düğümüne denk oluyor ise, K' de K ya denk olacağı için, K ile K' düğümlerinin birbirine denk (eşit) düğümler olduğunu söylenebilir ve bu denklik $K \approx K'$ ile gösterilir. Düğüm teorisinde denk düğümler arasında ayırım yapılmadığı için, bu düğümler aynı düğümler olarak kabul edilir (Murasugi, 1996).

Bir düğümün başlangıç noktası veya bitiş noktası yoktur, yani basit bir kapalı eğridir (daha doğrusu kapalı bir çokgensel eğridir). Bu nedenle, eğriye bir yönlendirme atanabilir. Genel olarak, verilen bir düğümün yönlendirmesini eğri üzerinde bir okla gösterilir. Herhangi bir şekilde verilen düğümün, Şekil 10 da verildiği gibi, iki olası yönlendirmeye sahip olduğu açıktır. (Murasugi, 1996).



Şekil 10. Düğümlerin yönlendirilmesi

Yönlendirilmeye verilen K ile K' düğümleri, yönlendirilmeye beraber temel düğüm hareketleri aracılığıyla birbirlerine dönüştürülebiliyorsa, K ile K' düğümlerinin yönlendirmeli olarak denk oldukları söylenir ve bu $K \cong K'$ şeklinde gösterilir.



Şekil 11. Denk olan iki düğüm hareketi örneği

Yönlendirme yapılmamış iki düğüm, yönlendirme yapıldığında denk olmak zorunda değildir. Şekil 10 daki iki düğüm, yönlendirme yapılmadığında kesinlikle denktir; ancak, yönlendirmeye birlikte denk olup olmadıkları açık değildir.

Tanım 24: A ve B iki Hausdorff uzay ve $f: A \rightarrow f(A)$ bir homeomorfizm ise f dönüşümü gömülme (imbedding) olarak adlandırılır. (Rolfsen, 1976).

Tanım 25: A ve B iki Hausdorff uzay olsun, $a \in A, t \in I = [0, 1]$ için, $f(a, 0) = f_0(a)$ ve $f(a, 1) = f_1(a)$ ile $F(a, t) = (f(a, t), t)$ olacak şekilde bir, $F: A \times I \rightarrow B \times I$ gömülmesi varsa, $f_0, f_1: A \rightarrow B$ bu gömülmeleri izotoptur denir (Murasugi, 1996).

Tanım 26: $h_t: A \rightarrow A$ homotopisi verilsin. Eğer h_0 özdeşlik ve her $t \in I$ için her bir h_t bir homeomorfizm ise h_t ye kuşatan izotopi adı verilir. Kuşatan izotopi, $f(a, t) = (h_t f_0(a), t)$ vasıtasıyla f_0 ı f_1 e birleştiren bir izotopidir (Rolfsen, 1976).

Klasik Düğüm İnvaryantları

Daha önce de vurgulandığı üzere, bir düğümün düzlem üzerine projeksiyonu ve bu projeksiyonun regüler diyagramı üzerinden incelenmesi her zaman faydalı olmaktadır. Bu yaklaşımla ilerlerken, regüler diyagrama tek bir basit düğüm hareketi uygulandığında ne tür değişikliklerin ortaya çıkacağı ve diyagram üzerinde nasıl bir etki yaratacağı sorgulanmalıdır. Bu problem, 1920'lerde K. Reidemeister tarafından ele alınmış ve kapsamlı şekilde incelenmiştir. İlk dönem düğüm invaryantlarının pek çoğu, Reidemeister'ın bu çalışmasından ilham alınarak tanımlanmıştır.

İki düğümün topolojik olarak denkliğinin belirlenmesinde düğüm invaryantları kritik bir rol oynar. Günümüzde düğüm invaryantlarının sayısal çeşitliliği oldukça geniştir. Bu invaryantların tanımlanmasında ise genellikle grup ve halka gibi cebirsel yapıların kullanımı temel teşkil etmektedir.

Her bir K düğümünü, kendisine özgü bir $\rho(K)$ değeri ile işaretlediği kabul edilsin. Eğer birbirine denk olan iki düğüm için işaretlenen değer de daima denk oluyorsa, böyle belirtilen $\rho(K)$ değeri düğüm invaryantı olarak ifade edilir. İncelenen bazı nesneler için tanımlanan matematiksel değerler kavramı, matematiğin birçok alanında yaygın olmasına rağmen düğüm teorisi bağlamında henüz sınırlı bir ölçekte uygulanmaktadır. En basit ve yaygın analogilerden biri grup teorisinde görülür. Bir grubun mertebesi, yani grup elemanlarının sayısı, izomorfik gruplar arasında eşit olduğundan, bu bir grup invaryantı olarak kabul edilir.

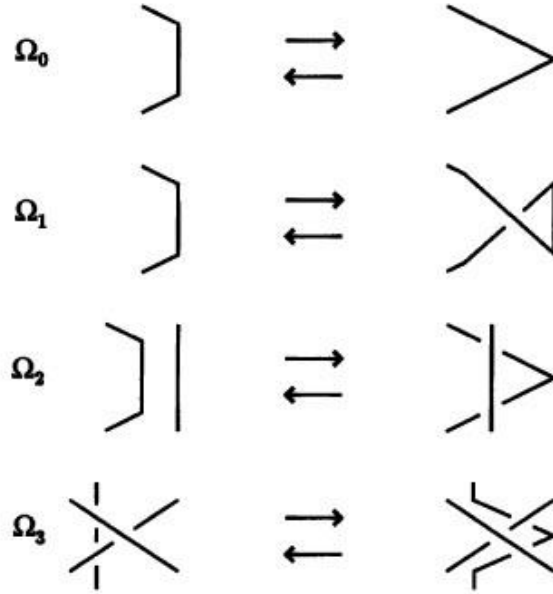
K ve K' düğümleri birbirine denkse, o zaman K düğümüne sonlu sayıda olacak şekilde basit düğüm hareketleri uygulanarak K düğümünden K' düğümü elde edebileceği bilinmektedir, bununla beraber, bir düğüm invaryantı olarak verilen $\rho(K)$ nın, K düğümüne uygulanacak olan sonlu sayıdaki basit düğüm hareketlerinden sonra da sabit kalması gerekir.

Genel olarak bir düğümün invaryantı tek yönlü çalışır. Yani; iki düğüm denk oluyorsa bunlarında invaryantlarıda denk olmaktadır.

Okun ters yönlü alınması durumunda bu özellik sağlanmayabilir. Eğer iki düğüm invaryantı farklı ise, ilgili düğümler topolojik olarak denk değildir. Bu nedenle, düğüm invaryantları, iki düğümün denkliğini belirlemede oldukça etkili bir yöntem sunar. Düğüm teorisinin tarihi, düğüm invaryantlarının keşfi ve bu invaryantların çeşitli problemlere uygulanması sürecini açıklamak açısından önemli bir perspektif sağlamaktadır. (Murasugi, 1996).

Reidemeister Hareketleri

Beklendiği üzere, basit düğüm hareketleri yalnızca regüler diyagramda çeşitli modifikasyonlara yol açmaktadır. Bununla birlikte, Şekil 12 de gösterilen dört temel hareket ve bunların tersine hareketler daha anlamlı olmaktadır.



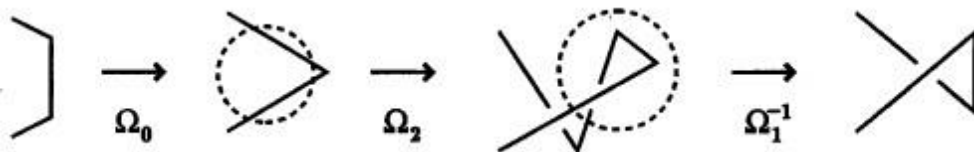
Şekil 12. Reidemeister hareketleri

Bu şekilde verilen hareketlerin aslında yapılabileceği hayli kolay anlaşılır. Örneğin Ω_1 Şekil 13 de belirtildiği gibi, $AC \cup CB$ ile AB yi bir regüler diyagram üzerindeki temel bir düğüm hareketine karşılık gelen bir hareket olarak düşünülebilmektedir. (Murasugi, 1996).

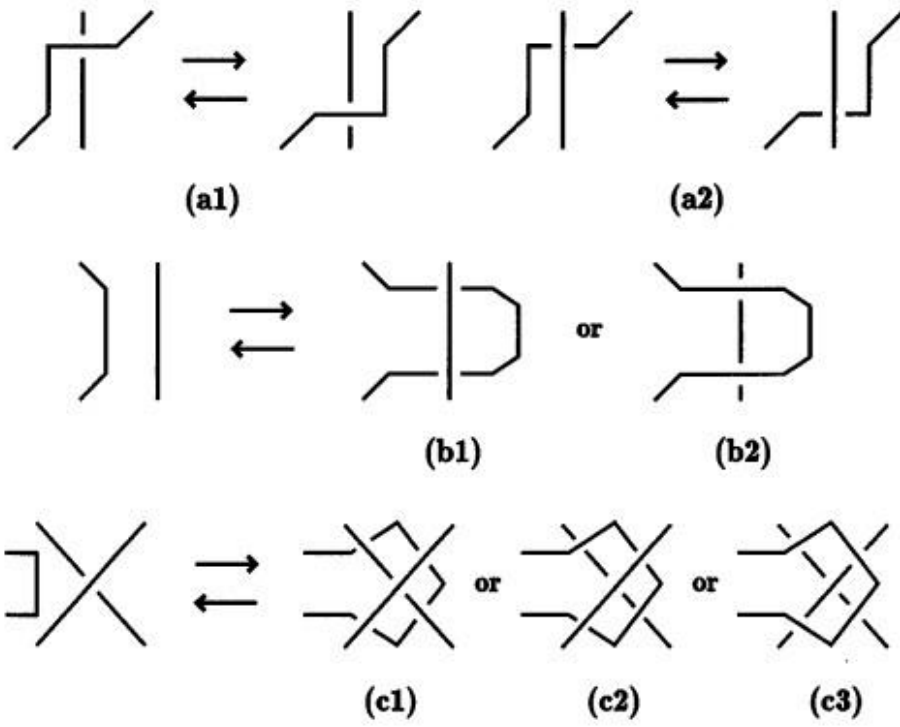


Şekil 13. Regüler diyagram

Örnek 1: Şekil 14 ve 15 te sunulan dizili diyagramlar, şekil deformasyonlarının Reidemeister hareketlerinden oluşan bir ardışık uygulama süreciyle ulaşılabileceğini göstermektedir.



Şekil 14. Reidemeister hareketleri örneği



Şekil 15. R hareketleri

Tanım 27: Bir D regüler diyagramına $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ hareketleri ve / veya bunların tersleri sonlu defa uygulandığında başka bir D' diyagramına ulaşırsa, bu durumda D ile D' diyagramları birbirine denktir denir ve elde edilen bu denkliği $D \cong D'$ şeklinde gösterilebilir (Murasugi, 1996).

Ω_1, Ω_2 , ve Ω_3 hareketleri ve bu hareketlerin tersleri Reidemeister hareketleri olarak adlandırılır. Bu bilgilerden yola çıkarak aşağıdaki teoremi ifade edilebilir.

Teorem 5: D ile D' nün sırasıyla K ile K' düğümlerine ait regüler diyagramlar oldukları varsayılınsın. O halde,

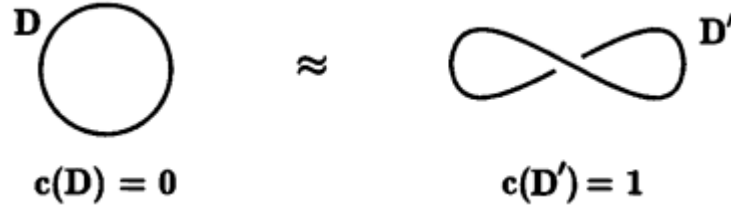
$$K \approx K' \Leftrightarrow D \approx D'$$

olmaktadır.

Yukarıda verilen teoremden anlaşılacağı üzere düğümlerin topolojik denkliği sorunu, ilgili düğümlerin regüler diyagramlarına ait denklik sorunu olarak formüle etmek mümkündür. Bu bağlamda, bir düğüm invaryantı, herhangi bir regüler diyagrama Reidemeister hareketlerinden herhangi biri uygulandığında değişmeyen bir topolojik invaryant olarak kabul edilir. Reidemeister hareketleri, diyagramların basitleştirilmesi veya dönüştürülmesi amacıyla sonlu sayıda lokal uygulanan işlemler olup, bu nedenle çalışmada bu hareketler R-hareketleri olarak da tanımlanabilir (Murasugi, 1996).

Geçit noktalarının minimum sayısı

K düğümüne veya halkasına ait D regüler diyagramı sonlu sayıda en fazla geçit sayısına sahiptir ve bu $c(D)$ ile gösterilir. Ancak bu bir düğüm invaryantı değildir. Çünkü; Şekil 16 daki gibi aşıkâr düğümün iki regüler diyagramında soldakininde $c(D) = 0$ iken sağdakinde $c(D) = 1$ dir.



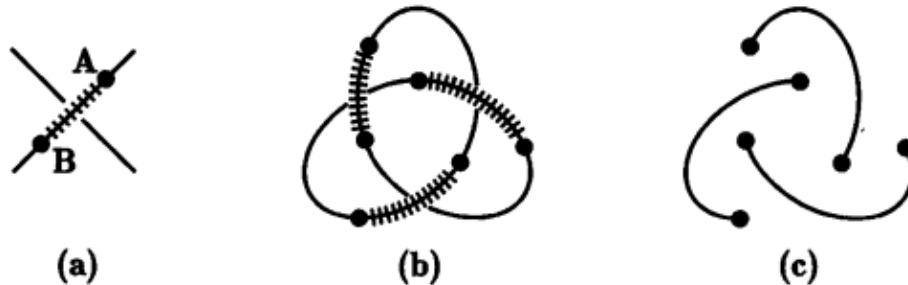
Şekil 16. Aşıkâr düğümün farklı iki regüler diyagramlarına göre geçit noktaları sayısı

K düğümüne ait elde edilebilecek farklı bütün regüler diyagramları ele alınıp incelediğimizde elde edilebilecek $c(K)$ lerin minimum sayısına K ya ait geçit noktalarının minimum sayısı adı verilir ve $c(K) = \min_D c(D)$ şeklinde gösterilir. Bu K için bir düğüm invaryantıdır. $c(K)$ nın elde edildiği K nın regüler diyagramına K nın minimum regüler diyagramı denir (Murasugi 1996).

Örneğin, K aşıkâr düğüm ise $c(K) = 0$ dır.

Köprü sayısı

Bir K düğümüne (veya halkasına) ait regüler diyagram D nin her geçit noktasında, bu noktadan üstten geçen AB gibi küçük bir parça diyagramdan çıkarılsın. Bu parçaların çıkarılması sonucunda, birbirinden ayırık (yani herhangi bir kesişim noktası içermeyen) çokgensel eğrilerden oluşan bir topluluk elde edilir (Bkz. Şekil 17 (a) ve (c)). Orijinal D regüler diyagramı düzlem üzerindeki bu ayırık çokgensel eğrilerin uç noktalarına, üstten geçen AB gibi parçaların yeniden eklenmesiyle oluşan diyagram olarak düşünebiliriz. Bu AB parçaları düzlem üzerindeki diğer parçalardan üstten geçtiği için, bu parçalara köprü (bridge) adı verilir. Verilen bir D diyagramı için bu tür köprülerin sayısına köprü sayısı (bridge number) denir.



Şekil 17. Köprü örnekleri

Bir K düğümünün regüler D diyagramı üzerindeki köprü sayısı $br(D)$ şeklinde gösterilir. Bu değer, doğrudan düğümün kendisine değil, seçilen diyagrama bağlıdır; dolayısıyla K nın bir invaryantı değildir. Ancak, K düğümüne ait tüm regüler diyagramlar dikkate alındığında, bu diyagramlar arasında köprü sayısının alabileceği en küçük değer, K için bir invaryant olur. Yani,

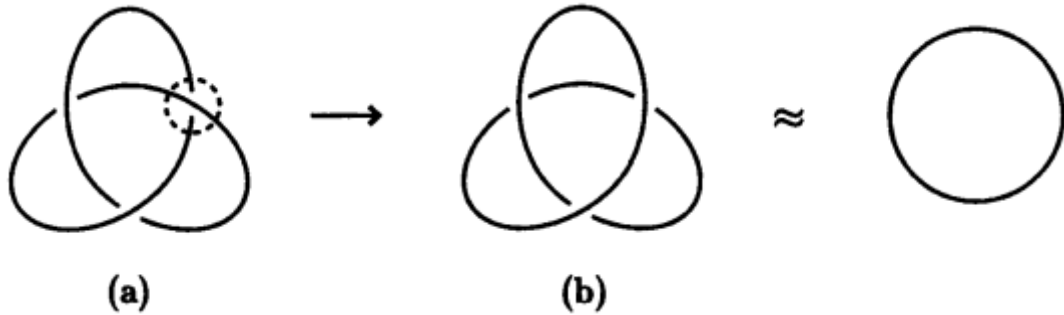
$$br(K) = \min\{br(D) : D \in D(K)\}$$

dır. Burada $D(K)$, K nın tüm regüler diyagramlarını temsil eder. Bu bağlamda $br(K)$, düğüm K nın köprü sayısı invaryantı olarak tanımlanır. Özellikle, eğer K düğümü aşikar düğüm ise, bu durumda $br(K) = 1$ olur . (Murasugi 1996).

Düğümlememe Sayısı

D regüler diyagramına sahip bir K düğümüne veya halkasına ait olan regüler diyagram üzerinde bir geçit noktası özel olarak değiştirildiğinde alt ve üst geçit kısımları değişir. Bu tür bir hareket basit (temel) bir düğüm hareketi olarak gerçekleşmediğinden genel olarak elde edilen şey farklı bir düğüme ait regüler diyagram olur (Murasugi 1996).

Örnek 2: Şekil 18(a) da verilen trefoil düğümünde küçük bir çember ile belirtilen kısmın içindeki alt geçit ve üst geçit değiştirilirse oluşan düğümün regüler diyagramının aşikâr düğümün regüler diyagramı olduğu sonucuna ulaşılır Şekil 18(b).



Şekil 18. Geçit noktalarının Sol-el trefoil düğümünde alt-üst edilmesi

Önerme 1: Herhangi bir K düğümünün (veya halkasının) bir D regüler diyagramında, D ye ait seçilen bazı geçit noktalarında alt geçit ve üst geçit bileşenlerini değiştirerek aşikar düğüme ait regüler diyagram elde edilebilir (Murasugi 1996).

Yukarıda sunulan önermeye göre, bir geçit noktasında alt ve üst yay parçalarının yer değiştirmesiyle yapılan işlem, düğümlememe (unknotting) operasyonu olarak adlandırılır. Bir regüler diyagram olan D nin düğümlememe sayısı (unknotting number), D yi aşikar düğümün regüler diyagramına dönüştürmek için gerekli olan en az sayıda düğümlememe işlemi olarak tanımlanır. Bu sayı $u(D)$ ile gösterilir. Ancak, beklendiği üzere, $u(D)$ yalnızca diyagrama

özgüdür ve düğümün kendisi olan K nın bir invaryantı değildir. Bununla birlikte, K düğümüne ait tüm regüler diyagramlar dikkate alındığında, bu diyagramlar üzerindeki minimum düğümlenmeme sayısı bir düğüm invaryantı haline gelir. Yani,

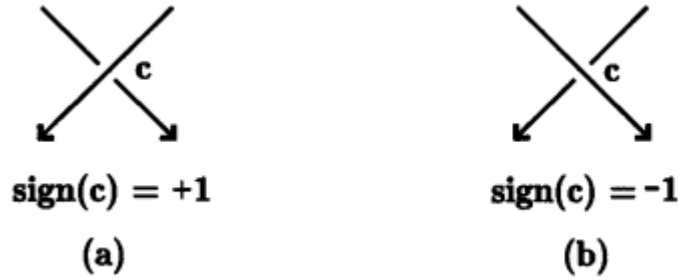
$$u(K) = \min\{u(D): D \in D(K)\}$$

dır. Eşitlikte $D(K)$, K düğümüne ait tüm regüler diyagramların kümesini ifade eder. Bu durumda $u(K)$, düğüm K nın düğümlenmeme sayısı olarak tanımlanır ve gerçekten de K ya ait bir invaryanttır.

Halkalanma Sayısı

Genel olarak ele alınan düğüm invaryantları tanımlanırken düğümün yönlendirilmesinden bağımsız olarak düşünülür. Bu tanımda ise, yönlendirilerek verilen halkalar için kritik bir topolojik invaryant olan halkalanma sayısı tanıtılacaktır. Başlangıç olarak, yönlendirmeye sahip bir düğüm veya halkanın regüler diyagramında, her bir geçiş noktası $+1$ veya -1 olarak işaretlenir.

Şekil 19 da görüleceği üzere yönlendirilmiş olan regüler diyagramın c geçit noktası için iki sınıflandırma belirtsin, $sign(C) = -1$ ile (b) durumu geçit noktası işaretlenirken, $sign(C) = +1$ ile (a) durumu işaretlenir, (a) ve (b) deki geçit noktaları sırasıyla pozitif ve negatif olarak adlandırılır.



Şekil 19. Bir halkada yer alan geçit noktasının yönünü veya işaretini belirleme yöntemi

$L(K_1, K_2)$ iki bileşenli halkasının yönlendirilmeye sahip regüler diyagramı D olsun.

Ayrıca K_1 ve K_2 düğümlerinin izdüşümlerinin arakesite sahip olduğu ve D regüler diyagramının geçit noktaları $c_1, c_2, \dots, c_n$ olduğunu kabul edilsin. O halde,

$$\frac{1}{2} [sign(c_1) + sign(c_2) + \dots + sign(c_n)]$$

ifadesi K_1 ve K_2 nin halkalanma sayısı olarak ifade edilir ve $lk(K_1, K_2)$ şeklinde gösterilir.

Teorem 6: $lk(K_1, K_2)$ halkalanma sayısı L halkasının bir invaryantıdır.

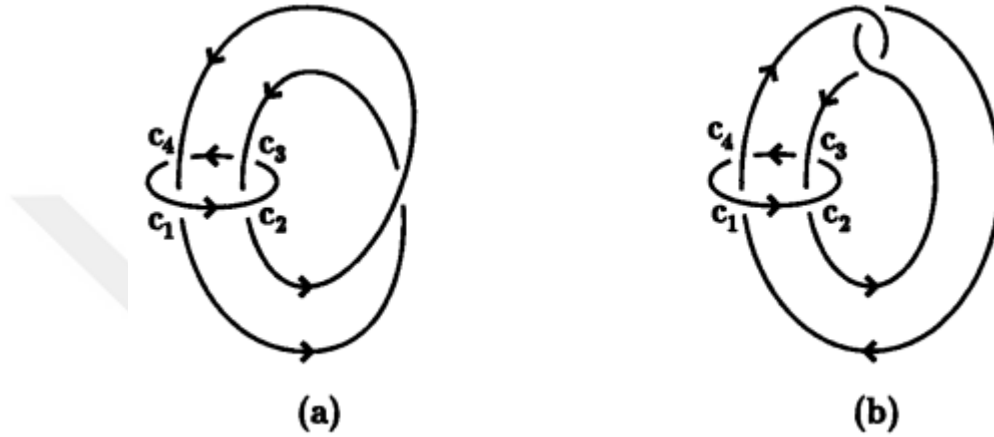
Burada ifade edilen, L halkasının farklı bir yönlendirilmiş D' regüler diyagramı göz

önüne alındığında, halkalanma sayısı değeri D diyagramı ile eşit olacaktır. Bu nedenle, bu değer L düğümünün halkalanma sayısının değeridir ve $lk(L)$ şeklinde gösterilir. Bununla beraber halkalanma sayısının K_1 ve K_2 düğümlerinden bağımsız olduğu görülür. Yani,

$$lk(K_1, K_2) = lk(K_2, K_1)$$

dir.

Örnek 3: Aşağıda Şekil 20 de verilen (a) ve (b) düğümleri sırasıyla L ve L' olmak üzere bunların halkalanma sayılarını hesaplayalım.



Şekil 20. Halkalanma sayısı için iki düğüm örneği

a-) Sadece belirtilen c_1, c_2, c_3, c_4 geçit noktalarında elde edilen işaretleri hesaplamak yeterlidir. Bütün geçit noktalarının işaretleri -1 olacağından $lk(K_1, K_2) = -2$ eşitliğine ulaşılır.

b-) Aynı şekilde $sign(c_2) = sign(c_3) = -1$ iken $sign(c_1) = sign(c_4) = +1$ eşitliğini ifade etmek kolaydır ve bununla beraber $lk(K_1, K_2) = 0$ olur. O halde L düğümünün halkalanma sayısı, seçilen yönlendirmeye göre değişmekle birlikte, sabit bir topolojik invariant olarak kabul edilir (Murasugi 1996).

Kafes (Lattice)

Kafes, genellikle düzlemde veya üç boyutlu uzayda sonsuz tekrar eden, düzenli bir geometriye sahip nokta kümesidir. Fizikte ise bu yapılar kristal örgüleri veya spin sistemlerinin yerleşimini modellemek için kullanılır. Baxter, R. J. (1982)

Spin

Spin, parçacıkların içsel açısal momentumu olup, kuantum mekaniğinde temel bir durum parametresi olarak ele alınır. Kafes modellerinde ise spin, her düğüm noktasının veya kenarın alabileceği ayrık durumları simgeler. Spin- $\frac{1}{2}$ modellerinde bu durumlar genellikle “ $\uparrow$ ”

ve “↓” ile temsil edilir. Huang, K. (1987)

Köşe (Vertex)

Köşe (vertex), bir kafesin düğüm noktasıdır. Vertex modellerinde her köşeye bağlı kenarlardaki spin durumları dikkate alınarak köşe konfigürasyonları tanımlanır. Her köşe konfigürasyonuna belirli bir ağırlık atanır; bu ağırlıklar modelin bölüntü fonksiyonunun hesaplanmasında kullanılır. Lieb, E. H. (1967)

Hızlılık (Rapidity)

Hızlılık (rapidity), özellikle tümlemlenebilir (integrable) modellerde kullanılan parametrik bir değişkendir. Yang-Baxter denkleminde yer alan R-matrislerinin bağımlı olduğu parametrik yapının temelini oluşturur. Fiziksel sistemlerde parçacıkların göreceli hareketlerini ifade etmede kullanılmakla birlikte, modellerin dönüşümsel simetrilerini analiz etmekte önemli bir rol oynar.

Bölüntü Fonksiyonu (Partition Function)

Bölüntü fonksiyonu, bir sistemin tüm olası mikro durumlarının istatistiksel toplamını temsil eder. Kafes modellerinde, her spin konfigürasyonuna karşılık gelen enerji düzeyi üzerinden Boltzmann faktörü ile ağırlıklandırılarak tanımlanır:

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta H(\{\sigma\})}$$

Bu denklemde $\{\sigma\}$ tüm spin konfigürasyonlarını, $\beta = \frac{1}{k_B T}$ ters sıcaklığı ve H sistemin Hamiltoniyeni ni ifade etmektedir. Wu, F. Y. (1992)

Yang–Baxter denklemi

Yang–Baxter denklemi, tümlemlenebilir (integrable) kafes modellerinin temel cebirsel koşuludur. Bu denklem, sistemin mikroskobik yapı taşları olan spin veya kenar durumları arasındaki yerel etkileşimlerin, makroskobik sistem davranışını değiştirmeyecek biçimde yeniden düzenlenebilmesini garanti eder. Baxter, R. J. (1982)

$$R_{12}(\lambda)R_{13}(\lambda + \mu)R_{23}(\mu) = R_{23}(\mu)R_{13}(\lambda + \mu)R_{12}(\lambda)$$

Burada $R_{ij}(v)$: i ve j numaralı spin konumları (uzayları) arasında tanımlı R-matrisidir. λ ve μ etkileşim parametreleridir. Bu denklem, düğüm teorisinde Reidemeister III hareketine doğrudan karşılık gelir.

MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde istatistiksel mekanikte kullanılacak düğüm polinomlar için öncelikle yönlendirilmiş ve yönlendirilmemiş düğümlerden ve bunların skein bağıntısından bahsedilecek jones polinomu tanımlanacaktır ve bununla ilişkili diğer düğüm polinomlarından söz edilecektir.

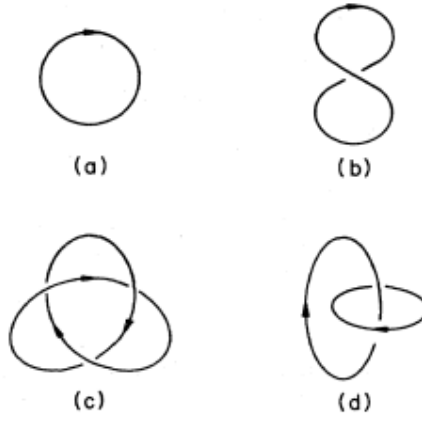
Düğüm, bir düzleme yansıtılabilir ve böylece düzlemsel diyagramlarla gösterilebilir. Düğümlerden bahsedilirken hep regüler diyagramlar veya projeksiyonlar göz önüne alınmalıdır. Bazı basit düğümlerin diyagramları Şekil 21 de sunulmuştur. Düğümleri temsil etmek için düzlemsel diyagramları kullanırken, bir kesişme noktasında karşılaşan iki doğrunun alt üst yapılması gerekir. Böylece, bu iki doğrunun üç boyutlu uzaydaki göreceli pozisyonları görülmüş olur. Yönlendirilmiş düğümlerde, bu durum iki tür doğru kesişmesine işaret eder. Bu kesişmeler, Şekil 22 de de görüldüğü gibi “+” ve “-” işaretleri ile ifade edilir. Bu iki kesişme, 90° lik bir dönüşle ilişkilendirilir.

Bir K düğümünün temel özelliklerinden biri olan burulma $w(K)$, ilk önce düğümü yönlendirerek ve daha sonra (1) denklemi çözülerek tanımlanır:

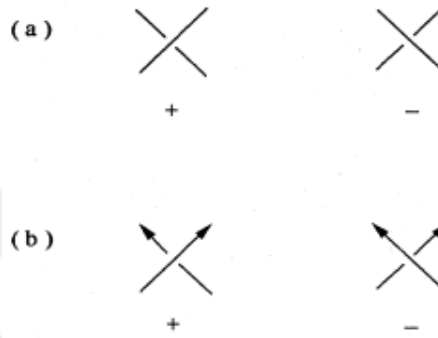
$$w(K) = n_+ - n_- \quad (1)$$

Burada, n_+ ve n_- sırasıyla düğümdeki + ve - geçişlerinin sayılarını ifade eder. Tek bileşenli halka için, burulma $w(K)$, (seçilen doğru yönlendirmesinden bağımsız olarak) tek bir değer olarak tanımlanır. Örneğin, Şekil 21(c) de sağ el trefoil düğümünün kıvrılma sayısı, yönlendirme ters çevrildiğinde de 3 olarak kalır. İki veya daha fazla bileşenli düğümlerde, burulma genellikle bileşenlerin nispi yönlendirmesine bağlı olacaktır.

Aşikâr düğüm, bir çemberle temsil edilen bir düğümdür. Doğruların sürekli deformasyonu yoluyla birbirlerine dönüştürülebilen iki düğüm denktir. Böylece, Şekil 21(b) deki düğüm bir aşikâr düğüme denktir. Aslında, bir veya iki kesişmeli tüm tek bileşenli halkalar bir aşikâr düğüme denktir. Çözümü aşikâr olmayan en yalın düğüm üç geçişli/kesişmeli trefoil düğümüdür.



Şekil 21. Yönlendirilmiş düğümlerin düzlemsel temsilleri için örnekler: (a) ve (b) aşiar düğüm; (c) sağ el trefoil ve (d) Hopf halkası.



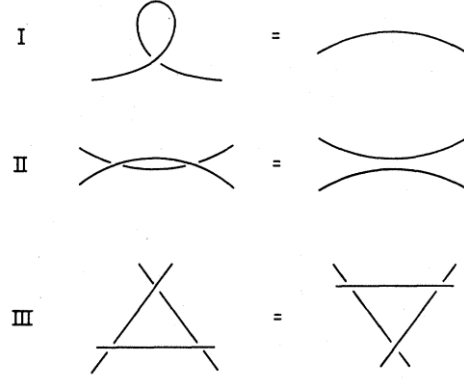
Şekil 22. İki tür doğru kesişimi: (a) yönlendirilmemiş düğümler, (b) yönlendirilmiş düğümler

Şekil 21(a) ve 21(b) deki iki düğümün aslında denk olduğunu basitçe inceleyerek doğrulamak görece kolay bir yöntem olsa da, düğümlerin denkliğini bazı yorucu sağlama işlemleri yapmadan tespit etmek genellikle zordur. Bunun nedeni, iki denk düğümün oldukça farklı düzlemsel projeksiyonlarının olabilmesidir. Bu durum, düğümleri cebirsel olarak nitelendirme ihtiyacını doğurur. Bunu yapabilmenin yöntemlerinden biri de, cebirsel polinomlar ile düğümleri (denk düğümler, aynı belirleyici özelliklere sahip olacak şekilde) ilişkilendirmek olduğu düşünülmektedir. Burada bahsedilen cebirsel polinomlar, düğümlerin topolojik invariantları veya basitçe ifade edecek olursak “düğüm invariantlarıdır”.

Düğüm invariantlarını oluşturmanın ilk adımı olarak, düğümleri deforme etme sürecini anlamak gerekir. Bu amaçla, Reidemeister (1948) tarafından, (üç boyutlu uzaydaki) tüm düğüm deformasyonlarının, (iki boyutlu izdüşümdeki) üç temel çizgi hareketi türünün (Reidemeister hareketleri) dizilerine ayrılabilceği gösterilmiştir. Dolayısıyla, üç Reidemeister hareketinin her birini ayrı ayrı ele almak yeterlidir. Bu hareketleri yönlendirilmiş ve yönlendirilmemiş düğümler için ayrı ayrı açıklanacaktır.

1. Yönlendirilmemiş Düğümler İçin Reidemeister Hareketi

Yönlendirilmemiş düğümler için üç tür Reidemeister hareketi Şekil 23 de sunulmuştur. Diğer tüm hareketler, şekildeki hareketlere bir rotasyon ve/veya refleksiyon işlemi uygulanarak elde edilebilir. Bir düğümle ilişkilendirilmiş bir cebirsel fonksiyon; I, II ve III'üncü hareket kapsamında sabitse ortamsal izotop sabitidir. Ancak, II ve III'üncü hareket türü kapsamında sabitse, düzenli izotopi sabitidir.

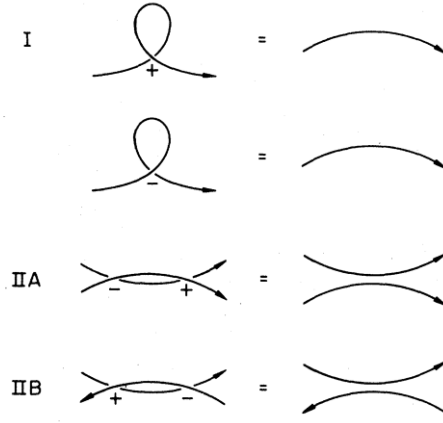


Şekil 23. Yönlendirilmemiş düğümler için üç tür Reidemeister hareketi

2. Yönlendirilmiş Düğümler İçin Reidemeister Hareketi

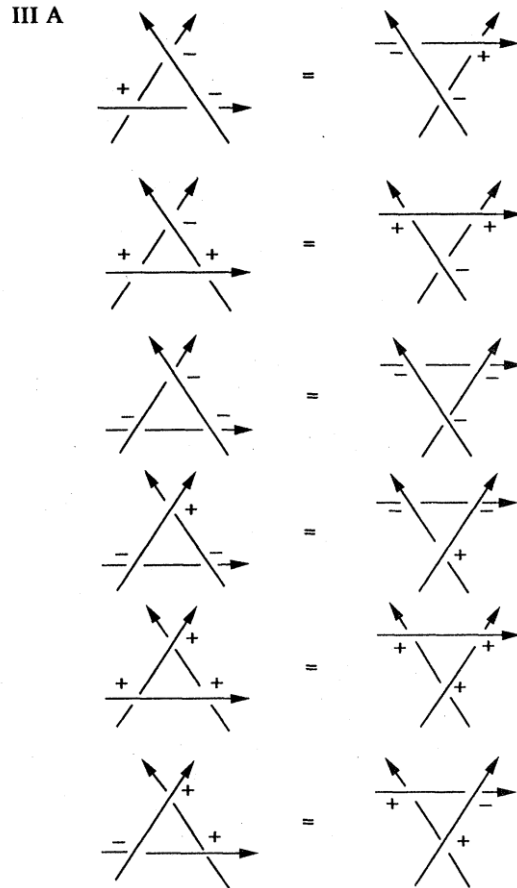
Reidemeister hareketleri daha çok yönlendirilmiş düğümlerle ilgilidir. Çünkü doğrular yönlendirilmiştir ve bir şekilde simetriyi bozmaktadır. Ancak, hareketlerin temel topografisi değişmez. I ve II nci tür hareketler için, bu iki hareket türünün her biri için iki bağımsız hareketin var olduğu söylenebilir. Bu hareketler Şekil 24 te gösterilmiştir. Diğer tüm I ve II nci tür hareketler, şekildeki hareketlere rotasyon ve/veya projeksiyon işlemi uygulanarak elde edilebilir. Örneğin, bir yatay eksene ilişkin IIA hareketinin refleksiyonu, aynı şekilde verilen ancak + ve – kesişmeleri birbiriyle yer değiştirebilen bir hareket üretir.

Yönlendirilmiş düğümler için III üncü tür hareketler, daha büyük bir dikkat gerektirir. Temelde, iki farklı tür doğru yönlendirmesi mevcuttur: Şekil 25 ve 26 da gösterilen IIIA ve IIIB hareketleri. Farkları, üç doğrunun yönlendirilme şeklidir. Her bir doğru yönlendirmesi türünde, altı ayrı olası hareket vardır ve diğer tüm III üncü tür hareketler rotasyon ve/veya refleksiyonla gösterilen hareketlerle ilişkilidir. Gösterilen Reidemeister hareketlerinin, (üç boyutlu uzayda) geçerli doğru hareketleri tarafından belirlenen hareketler olduğu ve bu nedenle de hepsinin bağımsız olmasının zorunlu olmadığı unutulmamalıdır.



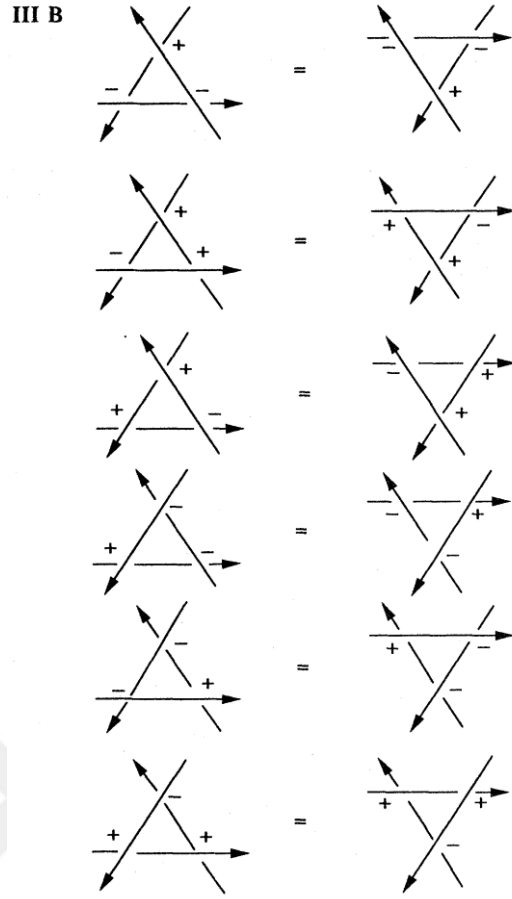
Şekil 24. Yönlendirilmiş düğümler için I ve II nci tür Reidemeister hareketleri.

Hareket IIA daki iki doğru, aynı yarı düzlemi işaret etmektedir ve hareket IIB daki doğrular farklı yönleri işaret etmektedir.



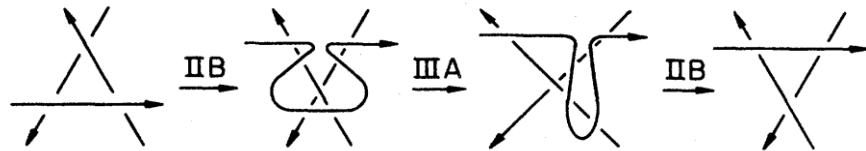
Şekil 25. Yönlendirilmiş düğümler için IIIA türü hareketler.

Üç doğru, aynı yarı düzlemi işaret edecek şekilde yönlendirilmiştir.

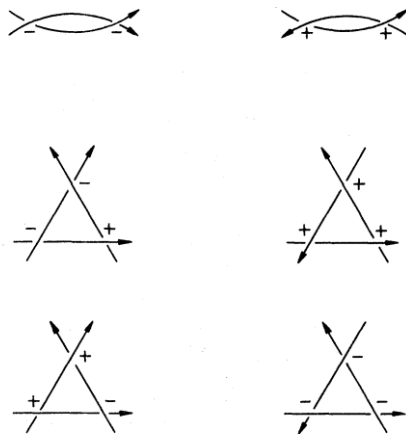


Şekil 26. Yönlendirilmiş düğümler için IIIB türü hareketler.

Üç doğru, bir ağ çevrimi oluşturacak şekilde yönlendirilmiştir.



Şekil 27. IIIB türü bir hareket ve IIIA tipi altı hareketin birinden üretilen bir IIIB türü hareket



Şekil 28. Doğru hareketleri yoluyla açılmayacak/çözümeyecek konfigürasyonlar

Aslında, Şekil 24 te gösterilen I ve II nci tür hareketler ile altı IIIA hareketinden herhangi birini düşünmek yeterlidir. Altı tane IIIB türü hareket de dahil olmak üzere diğer tüm hareketler, bir sonuç olarak ortaya çıkacaktır. Şekil 27 de, Şekil 26 nın ikinci sırasında gösterilen IIIB türü hareketin, IIB ve IIIA hareketlerinden biri kullanılarak nasıl elde edilebileceğini gösteren bir örneğe yer verilmektedir. Karşılaştırma amacıyla, Şekil 28 de doğru hareketleri yoluyla açılmayacak/çözümlemeyecek konfigürasyonlar sunulmaktadır. Şekil 28 deki konfigürasyonların Şekil 24 ve 26 dakileri tamamladığını ve bunların hepsinin birlikte iki ve üç doğrunun oluşturabileceği olası tüm kesişim türlerini verdiği unutulmamalıdır. Yönlendirilmemiş düğümlerde olduğu gibi, ortamsal izotopi terimi her türlü hareket (I, II ve III) kapsamında sabiti ve düzenli izotopi ise sadece II ve III üncü tür hareketler kapsamında sabiti ifade eder.

$w(K) = n_+ - n_-$ denkleminde belirtilen düğümün kıvrımı $w(K)$ düzenli izotopi sabitidir ve I inci tür hareketler kapsamında 1 ile değiştirilir.

Skein Bağıntısı

Skein bağıntıları, diyagramları birbirinin aynı olan düğümlerin sabitlerini ilişkilendiren özyineleme bağıntılarıdır. İstisnası ise şudur: düğüme gömülü küçük bir bölgedeki doğruların bağlantısı farklıdır. En bilinen Skein ilişkileri aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 29. Yönlendirilmiş düğümler için Skein bağıntısı kapsamında değerlendirilen üç doğru konfigürasyonu

Yönlendirilmiş Düğümler İçin Skein Bağıntısı

Yönlendirilmiş düğümler için, Şekil 22 ve Şekil 29 da + ve - işaretleri atanan iki tür doğru kesişmesi söz konusudur. Belirli bir düğümde kesişen artı (+) türü bir doğru eksi (-) türüne dönüştürülürse, elbette farklı bir düğüm elde ederiz. Dahası, kesişim birleştirilirse, Şekil 29 da 0 ile ifade edilen yeni konfigürasyon elde edilir. Bu durumda da, bir üçüncü düğüm elde edilir. Üç düğümü sırasıyla L_+ , L_- ve L_0 ve bunların sabitlerini P_{L_+} , P_{L_-} ve P_{L_0} ile ifade ederiz. Böylece en basit Skein bağıntısı, bu üç P fonksiyonunu bağlayan bir yineleme ilişkisi olur.

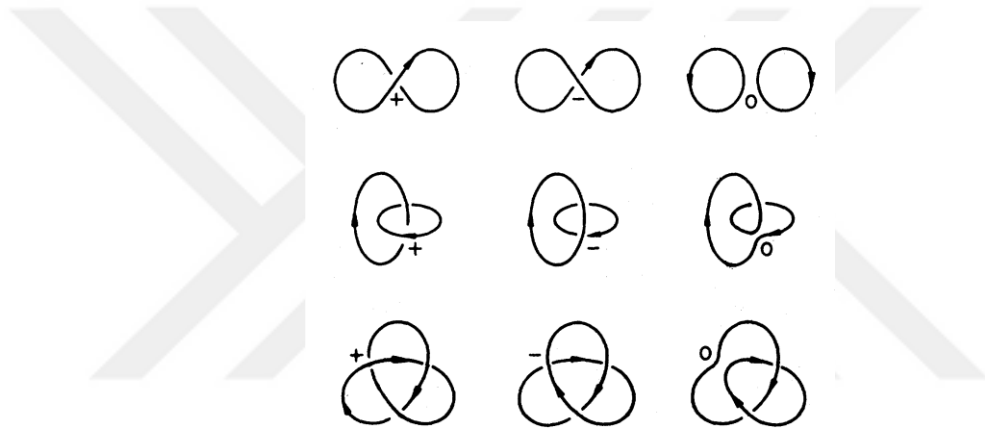
$$xP_{L_+}(x, y, z) + yP_{L_-}(x, y, z) = zP_{L_0}(x, y, z), \quad (2)$$

Burada, x , y ve z sabitin değişkenleridir.

L_0 konfigürasyonunu içeren düğüm, diğer iki düğüme göre daha basit bir düğümdür. Çünkü, doğru kesişim sayısı diğer iki düğümünkinden bir eksiktir. Skein bağıntısı Denklem (2) yi ve Reidemeister hareketlerini tekrar tekrar uygulanarak, herhangi bir düğümün P fonksiyonunu iki faktörün bir ürünü ile denkleştirilir bu faktörlerden biri x , y ve z değişkenlerinde sıfır derece homojen bir Laurent polinomudur ve diğeri ise $P_{\text{çözük}}(x, y, z)$ (bir çözüğün P fonksiyonudur ve genelleme bozulmasın diye “ $P_{\text{çözük}}(x, y, z) = 1$ ” olarak alınabilir. Böylece, P fonksiyonu x, y ve z de sıfır derece bir Laurent polinomudur.

Örneğin, Şekil 30 un ilk sırasındaki üç düğüme Denklem (2) uygulandığında, (3) denklemi elde edilir:

$$x \cdot 1 + y \cdot 1 = z P_{2l}(x, y, z), \quad (3)$$



Şekil 30. Skein bağıntısı yoluyla bağlanan düğüm örnekleri

Böylece, iki bağlantısız ilmik için P fonksiyonu “ $P_{2l}(x, y, z) = (x+y)/z$ ” olur. Skein bağıntısı, Şekil 30 un ikinci satırındaki üç düğüme uygulandığında ise, (4) denklemi elde edilir:

$$x P_{\text{Hopf}}(x, y, z) + y \cdot \frac{1}{z}(x + y) = z \cdot 1 \quad (4)$$

Böylece, Hopf halkası için P fonksiyonu “ $P_{\text{Hopf}} = (z^2 - xy - y^2)/xz$ ” olur. Şekil 30 un üçüncü satırından (5) denklemi elde edilir:

$$x P_{\text{RT}}(x, y, z) + y \cdot 1 = z \cdot \frac{1}{xz}(z^2 - xy - y^2), \quad (5)$$

Bu ise, sağa el trefoil için P fonksiyonu “ $P_{\text{RT}}(x, y, z) = (z^2 - 2xy - y^2)/x^2$ ” yi üretir. Aynı zamanda, Skein bağıntısının doğru kesişme noktalarına uygulanma sırasından bağımsız olarak, aynı sonuçlara daima ulaşıldığı da doğrulanabilir.

P fonksiyonunun doğru bir düğüm sabiti olması için, varlığını ve diğerlerinden farklı

olduğunu ispat etmek gerekmektedir. Yani, bu şekilde elde edilen P fonksiyonu, Skein bağıntısının, rastlantısal düğümler için doğru kesişmelerine uygulanma sırasından bağımsızdır. Bu yaklaşımın püf noktası da budur. Aslında, genel x, y ve z ile birlikte Skein bağıntısı Denklem (2) fiili olarak bir düğüm invaryantı tanımlar.

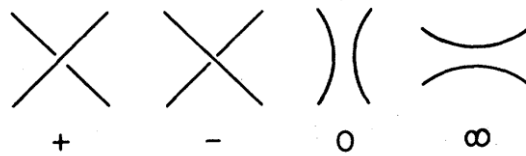
Bir düğümün ayna görüntüsünün P fonksiyonu, x ve y yi birbirleriyle değiştirerek elde edilir. Çünkü, refleksiyonlar $+$ ve $-$ kesişmelerini birbirleri arasında değiştirir. Örneğin; sağ el trefoilin (Şekil 21(c)) ayna görüntüsü " $P_{LT}(x, y, z)$ " sabitine sahip olan ve sol el trefoil dir. Tüm okların tersiniminin, $+/ -$ tür kesişmeleri değiştirmedeği ve bu nedenle de P fonksiyonunun değişmeden kalmasına izin verdiği de açıktır. Ancak, bir bağlantının bir bileşenindeki okların tersinimi beraberinde, genellikle farklı bir P fonksiyonu getirir.

Yönlendirilmemiş Düğümler İçin Skein Bağıntısı

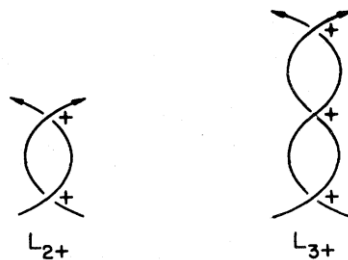
Skein ilişkileri, yönlendirilmemiş düğümler için de benzer şekilde yazılabilir. Ancak, bir kesişme noktasındaki dört doğru artık (Şekil 31 de de gösterildiği gibi $+$, $-$, 0 ve ∞ ile gösterilen) dört farklı şekilde birbirleriyle bağlanabileceği için, yönlendirilmemiş düğümler için Skein bağıntısı dört fonksiyonu (P_{D+} , P_{D-} , P_{D0} ve $P_{D\infty}$) ilişkilendirir. Burada $D+$, $+$ konfigürasyona sahip bir düğümdür.

Diğer Skein Bağıntıları

Daha genel olarak Skein bağıntıları, diğer konfigürasyon türlerini (Şekil 32 de L_{2+} , L_{3+} ile ifade edilenler gibi) içeren küçük bir diskte (dairede) farklılık gösteren düğümleri ilişkilendiren bir bağıntı olarak da tanımlanabilir. Akutsu-Wadati polinomu, bu konfigürasyonları kesin olarak ilişkilendiren Skein bağıntılarını karşılar.



Şekil 31. Yönlendirilmemiş düğümler için Skein bağıntısı kapsamında değerlendirilen dört doğru konfigürasyonu



Şekil 32. Genel Skein bağıntısı için doğru konfigürasyonları

Polinom İnvaryantları

Bu kısımda Skein bağıntısını kullanarak birkaç bilinen düğüm invaryantının geleneksel tanımını sunulacaktır. Bu düğüm teorisi ile istatistiksel mekanik arasında kurulan en önemli köprü olan jones polinomu için önemli. Ayrıca düğüm polinomları farklı yöntemlerle elde edilebilmektedir bu çalışmada istatistiksel mekanik ve düğüm teorisi arasındaki ilişki incelendiğinden bu polinomları skein ilişkileri ile elde edilecektir.

1. Alexander-Conway polinomu

Alexander-Conway polinomu, düğüm teorisinde en temel düğüm invaryantlarından biri olarak kabul edilir. Bu polinom, düğümün topolojik yapısına bağlı olarak cebirsel bir şekilde hesaplanan ve izotopi altında değişmeyen bir fonksiyondur. Conway polinomu, aşağıdaki skein bağıntısı yardımıyla tanımlanır:

$$\nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) = z\nabla_{L_0}(z) \quad (6)$$

Ancak bunun için $\nabla(z)$ nin ortam izotopi sabiti olması ve

$$\nabla_{unknot}(z) = 1 \quad (7)$$

olması koşullarının karşılanması gerekmektedir.

Conway aynı zamanda, $\nabla(z)$ nin aşağıdaki ilişki yoluyla Alexander polinomu $\Delta(t)$ ile ilişkili olduğunu da göstermiştir:

$$\nabla(z) = \Delta(t), \quad z = \frac{1}{\sqrt{t}} - \sqrt{t} \quad (8)$$

Açıkça görülmektedir ki denklem (6) da ki Skein bağıntısının, Denklem (2) nin ($x = 1$ ve $y = -1$) özel bir durumudur. Tek bileşenli düğümlerin Alexander polinomları, z^2 nin polinomlarıdır ve bu nedenle de t ve $1/t$ de simetriktirler. Aynı zamanda, Denklem (6) dan hareketle, bağlantısız bileşenler içeren bir düğümün Alexander-Conway polinomunun aynı şekilde sıfırlandığı da görülmektedir. Jones polinomunun 1984'te keşfine kadar, Alexander-Conway polinomu on yıllar boyunca bilinen tek faydalı polinom invaryantı olmuştur. Conway polinomu, düğüm teorisinde geliştirilen ilk polinom invaryantlarından biri olarak, sonraki daha karmaşık ve güçlü invaryantların temelini oluşturur. Özellikle Jones polinomu, tarihsel ve yapısal olarak Conway polinomunun skein yaklaşımını temel alarak geliştirilmiştir. Her iki invaryant da skein bağıntıları aracılığıyla tanımlanmakta olup, düğümün çaprazlama yapısına duyarlı formüller üzerinden hesaplanır. Bu benzerlik, yalnızca matematiksel tanım düzeyinde değil, aynı zamanda istatistiksel mekanik ile kurulan bağlamlarda da kendini gösterir. Özellikle

spin sistemleri, Potts modeli ve bölüntü fonksiyonları gibi fiziksel yapılarda, Jones polinomu gibi invaryantların belirli limitlerde Conway polinomu ile ilişkili olduğu gözlemlenmiştir. Bu durum, düğüm invaryantları ile fiziksel modeller arasındaki derin yapısal benzerlikleri ortaya koymakta ve düğüm teorisinin istatistiksel fizik uygulamalarında neden bu denli etkili olduğunu açıklamaktadır. Bu bağlamda Conway polinomu, hem tarihsel bir öncü hem de topolojik-fiziksel modelleme açısından önemli bir araç konumundadır.

2. Jones polinomu

Jones polinomu, düğüm teorisinde önemli bir polinom invaryantıdır. 1984 yılında Vaughan Jones tarafından keşfedilmiş ve bu buluşu ona Fields Madalyası kazandırmıştır. Jones polinomu, bir düğümün veya bağlantının (link) topolojik yapısını ayırt etmeye yarayan cebirsel bir fonksiyondur ve skein bağıntısı yoluyla tanımlanır. Jones, Neumann cebirlerini kullanarak düğümlerin bant grubu temsillerini analiz etmek suretiyle $V(t)$ yi elde etmiştir.

$$\frac{1}{t}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)V_{L_0}(t) \quad (9)$$

Ve $V(t)$ nin, ortam izotopi sabitini ve

$$V_{unknot}(t) = 1 \quad (10)$$

kabulünü de kullanarak bu temelde belirlenebileceğini de ortaya koymuştur. Jones polinomu, yalnızca düğüm teorisinde değil, aynı zamanda istatistiksel mekanik, kuantum alan teorisi ve modüler tensör kategorileri gibi alanlarda da derin yapısal bağlantılar sunan merkezi bir invaryant haline gelmiştir.

3. HOMFLY polinomu

Jones ve Alexander polinomları arasında Skein bağıntısı açısından oldukça belirgin benzerlikler söz konusudur. Jones'un sonuçlarının açıklanmasından sonra, dört araştırmacı grubu birbirlerinden bağımsız olarak Jones'un sonuçlarını genişleterek yeni bir invaryant elde etmişlerdir. Genel x , y ve z 'ye sahip Skein bağıntısı (2) nin aslında iki değişkenli bir invaryant olan HOMFLY polinomunu tanımadıklarını göstermişlerdir. Bu invaryant, Skein bağıntısı (2) nin eşdeğer formda yeniden yazılması yoluyla tanımlanabilir:

$$\frac{1}{t}P_{L_+}(t, z) - tP_{L_-}(t, z) = zP_{L_0}(t, z) \quad (11)$$

Böylece HOMFLY polinomu $P(t, z)$: tamamen ortamsal izotopi koşulu ve aşağıdaki koşul kullanılarak belirlenir:

$$P_{\text{unknot}}(t, z) = 1 \quad (12)$$

Bu üç polinomun tanımına göre aşağıda verilen eşitlikler elde edilir.

$$\nabla(z) = P(1, z), V(t) = P(t, \sqrt{t} - 1/\sqrt{t}) \quad (13)$$

HOMFLY polinomu, düğüm teorisinde invaryantların kapsamını genişleterek daha karmaşık topolojik yapıları ayırt etmede önemli bir araçtır. Ayrıca, istatistiksel mekanik ve kuantum topolojisi alanlarında da geniş uygulama alanları bulmaktadır.

4. Akutsu-Wadati polinomu

Akutsu-Wadati polinomu, kuantum gruplar ve integrable modeller üzerinden tanımlanan bir düğüm invaryantıdır. Özellikle spin zinciri modelleri ve kuantum alan teorisi ile ilişkili düğümlerin incelenmesinde ortaya çıkar. Bu polinom, Jones polinomuna benzer şekilde bir skein bağıntısı veya R-matris yaklaşımları kullanılarak elde edilir. Akutsu-Wadati polinomu, istatistiksel mekaniğin tamamen çözülebilir modellerinden elde edilen bir düğüm invaryantı örneğidir. Her bir $N=2, 3, \dots$ için, Akutsu-Wadati polinomu $A^{(N)}(t)$, t nin ortamsal izotopi sabitini karşılama durumunda bir Laurent polinomudur. $N=2$ için, Akutsu-Wadati polinomu Jones polinomu ile çakışır. Böylece (14) de verilen eşitlik elde edilir.

$$A^{(2)}(t) = V(t) \quad (14)$$

Bu denklem, Skein bağıntısı (9) a eşittir. Genel N için ise, “ $n = 1, 2, \dots, N - 1$ ” olduğunda Akutsu-Wadati polinomu; L_0, L_- ve L_{n+} konfigürasyonlarını içeren küçük bir diskte (dairede) farklılık gösteren düğümleri ilişkilendiren bir Skein bağıntısını karşılar. Örneğin $N=3$ için Skein bağıntısı şöyledir:

$$A_{L_{2+}}^{(3)}(t) = t(1 - t^2 + t^3)A_{L_{1+}}^{(3)}(t) + t^2(t^2 - t^3 + t^5) \times A_{L_0}^{(3)}(t) - t^8 A_{L_-}^{(3)}(t) \quad (15)$$

5. Kauffman polinomu

Kauffman polinomu, düğüm teorisinde kullanılan önemli bir polinom invaryantıdır. Louis Kauffman tarafından geliştirilmiş olup, özellikle düğüm ve bağlantıların topolojik sınıflandırılmasında kullanılır. Bu polinom, skein bağıntıları kullanılarak tanımlanır ve Jones polinomu ile HOMFLY polinomuna alternatif veya tamamlayıcı bir yapı sunar. Kauffman polinomu, yönlendirilmemiş düğümler için düzenli izotopinin iki değişkenli invaryantıdır. Yani, sadece II ve III üncü tür Reidemeister hareketleri kapsamında sabittir. Kauffman polinomu $L(a, z)$ Skein bağıntısı tarafından şöyle tanımlandır:

$$L_{D_+}(\alpha, z) + L_{D_-}(\alpha, z) = z[L_{D_0}(\alpha, z) + L_{D_\infty}(\alpha, z)], \quad (16)$$

Burada, $+$, $-$ ve ∞ , Şekil 11 de verilen konfigürasyonlardır ve L_{D_+} , L_{D_-} , L_{D_∞} ise (tek bir doğru kesişmesini içeren küçük bir diskin, sırasıyla $+$, $-$, o ve ∞ konfigürasyonları ile yer değiştirmesi durumu hariç) birbirlerinin aynı olan D_+ , D_- , D_0 ve D_∞ düğümlerinin Kauffmann polinomlarıdır. Ayrıca Kauffmann polinomu; düzenli izotopi ve aşağıdaki koşulların karşılanması için de gereklidir:

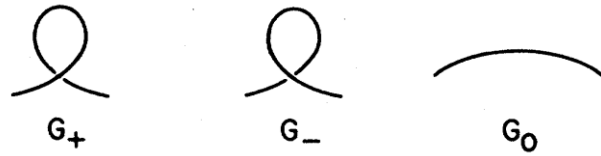
$$L_{\text{unknot}}(\alpha, z) = 1 \quad (17)$$

$$L_{G_\pm}(\alpha, z) = \alpha^{\mp 1} L_{G_0}(\alpha, z) \quad (18)$$

Burada, G_0 , G_+ ve G_- Şekil 13 te verilen konfigürasyonlardır ve $L_{G_0}(\alpha, z)$, $L_{G_+}(\alpha, z)$ ve $L_{G_-}(\alpha, z)$ ise, (rastgele iki doğru içeren bir diskin sırasıyla G_0 , G_+ ve G_- ile yer değiştirmesi durumu hariç) birbirinin aynı olan üç noktanın Kauffmann polinomlarıdır.

Bu inceleme kapsamında düşünüldüğünde, Kauffmann polinomunun Dubrovnik versiyonunu dikkate almak daha uygun olmaktadır. Kauffmann polinomunun Dubrovnik versiyonu $Q(\alpha, z)$, Skein bağıntısı tarafından şöyle tanımlanmaktadır:

$$Q_{D_+}(\alpha, z) - Q_{D_-}(\alpha, z) = z[Q_{D_0}(\alpha, z) - Q_{D_\infty}(\alpha, z)] \quad (19)$$



Şekil 33. Denklem (18) te değerlendirilen üç doğru konfigürasyonu

Ve bu versiyon şu koşullara tabidir:

$$Q_{\text{unknot}}(\alpha, z) = 1 \quad (20)$$

$$Q_{G_\pm}(\alpha, z) = \alpha^{\mp 1} Q_{G_0}(\alpha, z) \quad (21)$$

Şu ilişki kullanılarak $L(\alpha, z)$ ile ilişkilendirilir:

$$Q(\alpha, z) = -(-1)^{c(K)} i^{-w(K)} L(i\alpha, -iz), \quad (22)$$

Burada, $i = \sqrt{-1}$, $c(K)$ K düğümünün bileşen sayısıdır ve $w(K)$ burulması Denklem (1) ile elde edilir. Bir bağlantının bir bileşeninin yönlendirmesinin tersine çevrilmesi, $\Delta w(K) = 4n$

(n bir tamsayıdır) kıvrılmasında bir değişikliğe neden olacağı için; Denklem (22), seçilen yönlendirmeden bağımsızdır.

Kafes Modelleri ve Düğüm İnvaryantları

Kafes modelleri, fiziksel sistemlerinin kafesler üzerinde tanımlanan matematiksel modelleridir. Gerçek dünyada, sonsuz büyüklükteki düzenli kafesler üzerinde çalışılırken, bu çalışmaların birçoğu rastlantısal sonlu kafesler için de geçerli olan kafes modelleri üretir. Düğüm teorisinde kullanılacak olan ikinci tür kafes sonuçlarıdır.

Kafes modellerinde genel olarak bölüntü fonksiyonunun nasıl hesaplanacağı üzerinde durulur.

$$Z = \sum W \quad (23)$$

Burada, toplam bulurken tüm spin (veya kenar) durumları dikkate alınarak hesap yapılır. W , her bir spin (veya kenar) durumunun konfigürasyonu için tanımlanan Boltzmann faktörüdür. Boltzmann faktörleri, genellikle yereldir; yani, faktör ürünlerine ayrıştırılabilirler. Bu ürünlerin her biri, yakın çevrede yerleşik birkaç spinin (veya kenarın) durumlarına bağlıdır. İstatistiksel mekanikte, sonsuz Kafesler için bölüntü fonksiyonu türevleri alınarak termodinamik özellikler daha ayrıntılı şekilde hesaplanabilir. Düğüm teorisinde ise, çoğunlukla bölüntü fonksiyonu üzerinde durulur.

İstatistiksel mekanik kullanarak düğüm sabitleri üretme stratejisi şu şekildedir: her bir düğüm için, iki boyutlu bir kafes üretilir. Daha sonra, kafes üzerinde (bölüntü fonksiyonunun, eşdeğer düğümlerden üretilen kafesler için aynı olmasını sağlayacak şekilde) kafes modelleri geliştirilmeye çalışılır. Daha sonra, tanım itibarıyla, bölüntü fonksiyonu bir düğüm invaryantı olur.

Genellikle iki farklı tür Kafes modeli vardır. Birinci kafes modeli; spinleri Kafes bölgelerine yerleştiriyorsa ve kafesin temel hücrelerinden birinin etrafında spinler arasında etkileşimler yaratıyorsa, spin modellerine ulaşılır. Bu, sadece ikili etkileşimlerinin söz konusu olduğu özel kenar-etkileşim modellerini kapsar. Çoklu bölge ve/veya yoğun etkileşimler söz konusuysa, spin modelleri de etkileşim-yüz-çevresi (interaction-round-a-face, IRF) modelleri olarak bilinir. Buna alternatif olarak, spinlerin kafes kenarlarına yerleştirilmesi ve ağırlığın (rastgele kenarların spin durumlarına göre) köşe noktaları ile ilişkilendirilmesi durumunda, köşe modelleri elde edilir. Köşe ve IRF modelleri yakından ilişkilidir ve her zaman birbirlerine dönüştürülebilirler. Ancak, düğüm teorisi kapsamındaki uygulamalar için, köşe modelleri ile başlamak daha uygundur. (Perk ve Wu, 1986a)

Düğüm teorisi ile istatistiksel mekanik arasındaki ilişki ilk olarak Vaughan Jones tarafından ortaya konmuştur. Jones, polinomunu geliştirirken kullandığı von Neumann cebirinin, Potts modelinin Temperley-Lieb formülasyonunda kullanılan cebre büyük ölçüde benzediğini fark etmiştir. Başlangıçta birbirinden bağımsız görülen bu iki alan arasındaki doğrudan bağlantı, Louis Kauffman'ın 1986 yılında braket polinomunu kullanarak Jones polinomunun basit bir türevini üretmesiyle ortaya çıkmıştır. Kısa bir süre sonra Jones, köşe modeli yaklaşımı ile HOMFLY polinomunun bir türevini geliştirmiştir. Her ne kadar bu çalışma zamanında yayımlanmamış olsa da, daha sonra Turaev tarafından Kauffman polinomuna genellenmiştir. Bu gelişmeler, düğüm teorisinin istatistiksel mekanikle olan ilişkisini resmileştirmiş ve spin modellerini de kapsayacak şekilde genişletmiştir. Özellikle Jones, lokal ağırlıkların tanımladığı köşe modellerine açılı bağımlılığı unsurunu kazandırmıştır.

Bu çalışmada, Jones'un yaklaşımına paralel olarak parçalı doğrusal kafesler kullanılarak, lokal ağırlıklara sıkı şekilde bağlı köşe modelleri incelenmiştir. Ayrıca, düğüm invariantlarına yönelik IRF-modeli yaklaşımının köşe modeli formülasyonunun özel bir durumu olduğu ve bu sayede türetme işleminin kolaylaştığı sonucuna varılmıştır.

İstatistiksel mekanik yaklaşımının temelinde, düğüm invariantlarının hesaplanmasının, kafes modellerinin tümlevlenebilirliğine bağlı olduğu yer almaktadır. Bölüntü fonksiyonlarının Reidemeister hareketleri altında sabit kaldığı kafes modellerinin incelenmesi sonucunda, temel fikir olarak, tümlevlenebilir modellerin bölüntü fonksiyonlarının (sonsuz hızlilik limitinde) IIIA türü Reidemeister hareketlerinin koşullarını sağladığı ortaya çıkmıştır. Bu durum, bant grubu yaklaşımında görülmemiştir. Ayrıca IIA türü Reidemeister hareketi, bütünlük koşulunun bir sonucu olarak sağlanmaktadır. Böylece yalnızca I ve IIB türü Reidemeister hareketleri kapsamında bölüntü fonksiyonunun sabit kalması kolaylıkla elde edilebilmektedir.

Köşe Modelleri

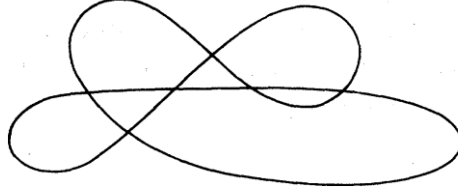
Formülasyon

N tane köşe ve E tane kenardan oluşan sonlu ve rastgele bir şekle sahip $\mathcal{L}$ Kafesi ele alınsın. Aynı koordinasyon sayısına sahip olan ve serbest kenarları olmayan (bir başka deyişle, her bir kenar, iki köşe noktasında son bulur) Kafeslerle sınırlı kalarak. Şekil 34 te bu tür Kafeslere bir örnek verilmiştir.

Köşe modellerinde, Denklem (23) deki Boltzmann faktörü bağımsız köşe ağırlıklarının bir ürünü olarak değerlendirilir ve bölüntü fonksiyonu şu şekilde oluşur:

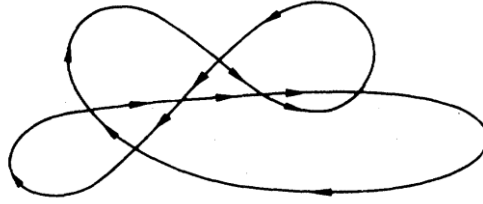
$$Z_{\text{vertex}}(\omega) = \sum_{\{\text{edge states}\}} \prod_{i=1}^N \omega_i \quad (24)$$

Burada, i 'nci köşenin köşe ağırlığı olan ω_i , dörtkenarının spin durumlarının bir fonksiyonudur.



Şekil 34. Koordinasyon sayısı 4 olan sonlu bir Kafes.

Kafes, 6 köşe noktası ve 12 kenar içerir.



Şekil 35. Yönlendirilmiş bir Kafes

Ele alınan Kafesler rastlantısal olduğu için (bu Kafeslerde, köşe noktaları rastlantısal yönlendirmeler üstlenebilir), ağırlıkları doğru şekilde tanımlayabilmek yerel çerçeveleri referans almayı gerektirir. Bu ise, Kafes kenarlarını (her bir köşenin, iki yönlendirilmiş doğrunun kesişmesi yoluyla elde edileceği şekilde) yönlendirerek yapılabilir. Örneğin, Şekil 34 teki Kafes Şekil 35 te gösterildiği şekilde yönlendirilebilir. Köşe ağırlıkları aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$\omega_i = \omega_i(a, b \mid x, y) = \omega_i \begin{pmatrix} y & b \\ a & x \end{pmatrix}, \quad (25)$$

Burada, a, b, x, y ; Şekil 36 daki gibi oluşturulan bir köşenin dörtkenarının spin durumlarını ifade eden sayısal değerleri almışlardır. $\{a, b, x, y\} \in \mathcal{I}$ dizinlerinde $\mathcal{I}$ nin sıfır civarında simetrik olarak dağılan q sayısal değerleri dizisi olduğu düşünülün.

En yaygın durumda, Denklem (25) birbirinden farklı q^4 köşe ağırlıklarını ve bir q^4 köşe modelini üretir. Örneğin, $q = 2$ için, bu durum 16-köşe modeli halini alır. $q = 2$ probleminin birçok özel durumu, geçmişte incelenmiştir. Bunlar altı-köşe ve sekiz-köşe modelleridir.

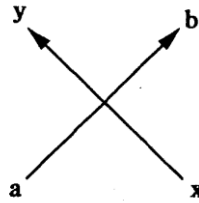
Yang-Baxter denklemi

q^4 köşe ağırlıklarının, Yang-Baxter denklemi olarak bilinen bir koşulu sağlaması durumunda, q^4 -köşe modeli tümlevlenebilir. Uygulamada, Kafes modellerinin tümlevlenebilirliği, genellikle bölüntü fonksiyonunun ve korelasyon fonksiyonları gibi diğer fiziksel niceliklerin kapalı-form çözümlerini sunar. Ancak inceleme kapsamında, sadece Yang-Baxter denkleminin çözümlerini (bunların, doğal olarak IIIA türü Reidemeister hareketlerinin gerçekleşmesini sağladığını göreceğiz) dikkate almak yeterlidir. Daha önce de belirtildiği gibi, bu, düğüm sabitlerinin istatistiksel mekanik yoluyla üretimini sağlayan kilit koşuldur.

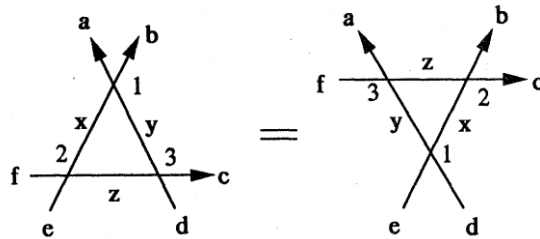
Şekil 37 de verilen ve yukarıyı ve aşağıyı gösteren üçgenlerle temsil edilen üçer kafes sahasını kapsayan iki kafes kenar kümesi ele alınsın. Yang-Baxter denklemi, bu iki küçük kafesin bölüntü fonksiyonunun herhangi bir $\{a, b, c, d, e, f\}$ durumu için aynı olmasını gerektiren bir köşe ağırlığı koşuludur. Bu, bir kafesin parçası olan ve yukarıyı gösteren bir üçgenin (bölüntü fonksiyonu üzerinde herhangi bir etki yaratmaksızın) aşağıyı gösteren bir üçgenle değiştirebileceği ve bunun tam tersinin de yapılabileceği anlamına gelir. Cebirsel olarak, bu koşul şöyle ifade edilir:

Tüm $a, b, c, d, e, f \in \mathcal{I}$ için

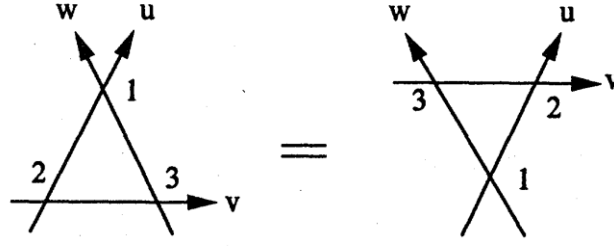
$$\begin{aligned} & \sum_{x,y,z \in \mathcal{I}} \omega_1(x, b \mid y, a) \omega_2(f, z \mid e, x) \omega_3(z, c \mid d, y) \\ &= \sum_{x,y,z \in \mathcal{I}} \omega_1(e, x \mid d, y) \omega_2(z, c \mid x, b) \omega_3(f, z \mid y, a) \end{aligned} \quad (26)$$



Şekil 36. Köşe yönlendirmesi



Şekil 37. Köşe modelleri için Yang-Baxter denklemi



Şekil 38. u , v , w spektral parametrelerinin doğrularla ilişkilendirilmesi

Denklem 26 da, üç sahada farklı köşe ağırlıklarına izin verilmiştir.

Yang-Baxter denklemi $q=2$ durumu için, tek boyutlu delta-fonksiyon gazına yönelik Bethe-ansatz yaklaşımı kapsamında “çarpanlara ayrılabilirlik koşulu” olarak ve çözülebilir iki-boyutlu istatistiksel mekanik modelleri kapsamında “yıldız-üçgen” ilişkisi olarak ortaya çıkmıştır. Faddeev ekolü tarafından geliştirilen bir terim olan “Yang-Baxter denklemi” aynı zamanda, kuantum alanı teorisi dahilinde çarpanlarına ayrılmış S matrisi teorisi kapsamında ortaya çıkmıştır. Bu teori kapsamında köşe ağırlığı w , R matrisi olarak bilinmektedir.

Yang-Baxter denkleminin en genel çözümü henüz bilinmemektedir. Ancak, kabaca yapılan denemeler sonucunda, özel çözümleri de kapsayan bir dizi çözüme (kuantum grupları ile ilişkili olan basit Lie cebirlerinin sonlu-boyutlu temsillerini kullanarak) ulaşılabilir. Bu çözümler, (Şekil 38 de gösterildiği gibi) üç doğruya, doğru değişkenleri veya u , v , w spektral parametrelerini atamak suretiyle parametrelerle ifade edilir. Böylece elde edilen denklemler şunlardır:

$$\begin{aligned}\omega_1(a, b | x, y) &= \omega(a, b | x, y | u - w) \\ &= \omega \begin{pmatrix} y & b \\ a & x \end{pmatrix} (u - w), \\ \omega_2(a, b | x, y) &= \omega(a, b | x, y | v - u), \\ \omega_3(a, b | x, y) &= \omega(a, b | x, y | v - w).\end{aligned}\tag{27}$$

Köşe ağırlıkları, her bir köşeden geçen iki doğrunun iki spektral parametresinin farkı şeklinde ifade edilebilecek bir parametreye dayanır. Dahası, bağlaşım (başlangıç) koşulu,

$$\omega(a, b | x, y | 0) = \delta_{ay} \delta_{bx}\tag{28}$$

genellikle Yang-Baxter denklemi tarafından karşılanmaktadır ve bütünlük koşulunu ortaya çıkarır:

$$\sum_{b, y \in J} \omega(a, b | x, y | v - u) \omega(y, z | b, c | u - v) = \delta_{ac} \delta_{xz}\tag{29}$$

Bu, Şekil 39 da gösterilen durumdur. Burada, Kronecker deltası, sadece iki doğrunun aynı dizilere sahip olması durumunda bir katkının söz konusu olabileceğini gösterir. Yang-Baxter denkleminin düğüm invariantlarını geliştirmede faydalı olan çözümleri, trigonometrik parametrizasyona izin veren çözümleridir. Bu çözümler genellikle, eliptik fonksiyon parametrizasyonlarına sahip (daha genel) çözülebilir grupların kritik manifoldlarını dejenere eder. Bu ise, Lieb tarafından q durumu genellemek için çözülen iki durumlu köşe modellerinin çeşitli şekillerde genelleştirilmesine imkân tanır.

Sonsuz rapidite limiti: Köşe modelleri olarak düğümlerin gerçekleştirilmesi sürecini izlerken, $+$ ve $-$ tür kesişmeler için iki tür köşe ağırlığına ihtiyaç olacaktır. Bu ihtiyaç, sonsuzluk-rapidite limiti $u \rightarrow \infty, v \rightarrow \infty, w \rightarrow \infty$ yı alarak ve şu denklemi yazarak karşılanabilir:

$$\omega_{\pm} \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \equiv \lim_{u \rightarrow \pm \infty} \omega \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} (u) \quad (30)$$

Burada, Denklem (30) un sağ tarafının; $\sinh u$ veya $e^{\beta|u|}$ gibi bir ıraksak faktör tarafından, sadece başlıca ağırlıkların katkı yapacağı şekilde bölündüğü (burada β 'nin sabit olduğunu) anlaşılır. Varsa, daha az ıraksak olan ağırlıklar bu limit dahilinde kaybolur.

u, v, w nin görece büyüklüklerine bağlı olarak, Yang-baxter denklemi (26) Şekil 40 da şematik olarak verilen altı farklı denkleme indirger. Bunlar, Denklem (26) da şu dizinlerle birlikte verilmektedir:

$$\{1,2,3\} = \{--+, \{-++\}, \{---\}, \{+- -\}, \{+++ \}, \{+-+ \} \} . \quad (31)$$

Denklem (31) de belirtilen altı konfigürasyonun, altı olası IIIA türü Reidemeister hareketini temsil eden Şekil 25 tekilerle tamamen aynı olması dikkat çekicidir. Benzer şekilde, bütünlük ilişkisi Denklem (29) şuna indirgenir:

$$\sum_{b,y \in J} \omega_{\pm}(a, b \mid x, y) \omega_{\mp}(y, z \mid b, c) = \delta_{ac} \delta_{xz} \quad (32)$$

Bu, Şekil 24 te belirtilen IIA türü Reidemeister hareketi ile örtüşen konfigürasyonlarla temsil edilmektedir. Tersten, örneğin bir bant-grubu analizinden elde edilen bir $\omega_{\pm} \equiv \omega(\pm \infty)$ ile başlayacak olursak, $w(u)$ yu yeniden geliştirmesi gerekir. Tersten başlayan bu süreç, Baxterizasyon adı verilir.

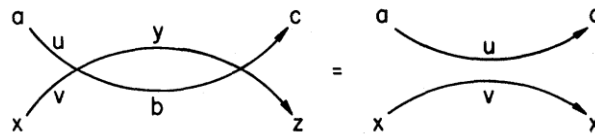
Geliştirilmiş Köşe Modelleri

Köşe modellerinde yer alan köşe ağırlıklarının, çoğu zaman doğrudan kafesin köşesine gelen kenarlar arasındaki açılara bağlı çarpanlar içerdiği görülür. Bu açılar, yerel bir parametre olup köşeden köşeye değişiklik gösterebilir. Ayrıca, bu tür yerel çarpanların genellikle küresel döngülere göre yeniden gruplanabileceği anlaşılmıştır. Bu teknik ilk olarak Baxter ve arkadaşları (1976) tarafından iki boyutlu rastgele kafesler için Potts modelinin analizinde kullanılmıştır. Eğri kenarları (Şekil 35 te belirtilenler gibi), zikzak doğrular kullanarak değiştirmek uygun bir hareket olacaktır. Böylece, parçalı-lineer Kafesler L^* değerlendirilmeye başlanabilir. Örneğin, Şekil 35 teki yönlendirilmiş Kafesin, parçalı-lineer Kafese nasıl dönüştürüldüğü Şekil 41 de verilmiştir. Dönüştürme işleminin, 2'nci dereceden köşe noktaları ürettiğine dikkate ediniz.

Bu aşamada, ilgili açıya-bağımlılık durumları ve köşe ağırlıkları yoluyla L üzerindeki köşe modelinden elde edilen L^* üzerindeki genişletilmiş köşe modeli değerlendirilmelidir. İkinci derece köşe noktaları için (Şekil 42(a) ve 42(b) de gösterilmektedir), köşe ağırlıkları şu şekilde ilişkilendirilmektedir:

$$\begin{aligned} \text{Doğru, } \theta \text{ açısıyla sola dönerse } \omega^*(a) &= \lambda^{a\theta/2\pi} \\ \text{Doğru, } \theta \text{ açısıyla sağa dönerse } &= \lambda^{-a\theta/2\pi} \end{aligned} \quad (33)$$

Burada, a durum değişkenidir ve λ henüz belirlenmemiş bir değişkendir.



Şekil 39. Köşe ağırlıkları için bütünlük koşulu

Şekil 43 te verilen zikzak şeklindeki yol ile birlikte köşe ağırlıkları ürünleri $w^*(a)$ şu şekilde elde edilir:

$$\prod_{\text{path}} \omega^*(a) = \lambda^{a(-\theta_1 + \theta_2 + \dots)} = \lambda^{a\theta/2\pi}, \quad (34)$$

Burada θ , yolun ilk ve son yönleri arasındaki açıdır. Böylece, kıvrılmış kenarların linearize edilme yolundan bağımsız olarak, daima aynı ürün elde edilir. Ayrıca, ikinci dereceden köşe noktalarının elde edilmesi, halka şeklinde Kafeslerin düşünülmesine neden olur. Bir halka boyunca köşe ağırlıklarının ürünü şu şekilde olduğu için $\prod \omega^*(a) = \lambda^a$ Saatin tersi

yönünde oklar, Kapalı yol = λ^{-a} Saat yönünde oklar (35),

Bir halkanın bölüntü fonksiyonu:

$$Z_{\text{ring}}(\omega^*) = \sum_{\alpha \in J} \lambda^\alpha, \quad (36)$$

sıfıra yakın J simetriği için ok yönünden bağımsızdır.

Aynı mantıktan hareketle, diğer tüm köşe ağırlıklarını da bir faktörle çarparak açığa-bağlı ağırlıklar:

$$\begin{aligned} \omega^*(a, d|b, c|u) &\equiv \omega^* \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} (u) \\ &= \lambda^{(a+c-b-d)\theta/4\pi} \omega(a, d|b, c|u) \end{aligned} \quad (37)$$

ve sonsuzluk-rapidite limitleri:

$$\omega_\pm^*(a, d | b, c) = \lambda^{(a+c-b-d)\theta/4\pi} \omega_\pm(a, d | b, c) \quad (38)$$

elde edilir.

Burada; a, b, c, d Şekil 42(c) de gösterildiği şekilde düzenlenmiştir ve θ iki giren (veya çıkan) ok arasındaki açıdır. Açıkça görülmektedir ki, genişletilmiş köşe modelinin bölüntü fonksiyonu:

$$Z_{\text{vertex}}(\omega^*) = \sum_{\{\text{edge states}\}} \Pi \omega^*(a, b|x, y|u) \Pi \omega^*(a) \quad (39)$$

ve sınırsızlık-rapidite limitinde

$$Z_{\text{vertex}}(\omega_\pm^*) = \sum_{\{\text{edge states}\}} \Pi \omega_\pm^*(a, b | x, y) \Pi \omega^*(a) \quad (40)$$

dir.

Burada, iki 4 ve 2'nci dereceden köşe noktaları üzerinden alınan iki ürün söz konusudur.

Düğüm teorisinde kullanılacak genişletilmiş köşe modeli için, genişletilmiş Yang-Baxter denkleminde ihtiyaç vardır.

$$\sum_{x, y, z \in J} \omega^*(x, b|y, a|u-w) \omega^*(f, z|e, x|v-u) \omega^*(z, c|d, y|v-w) \quad (41)$$

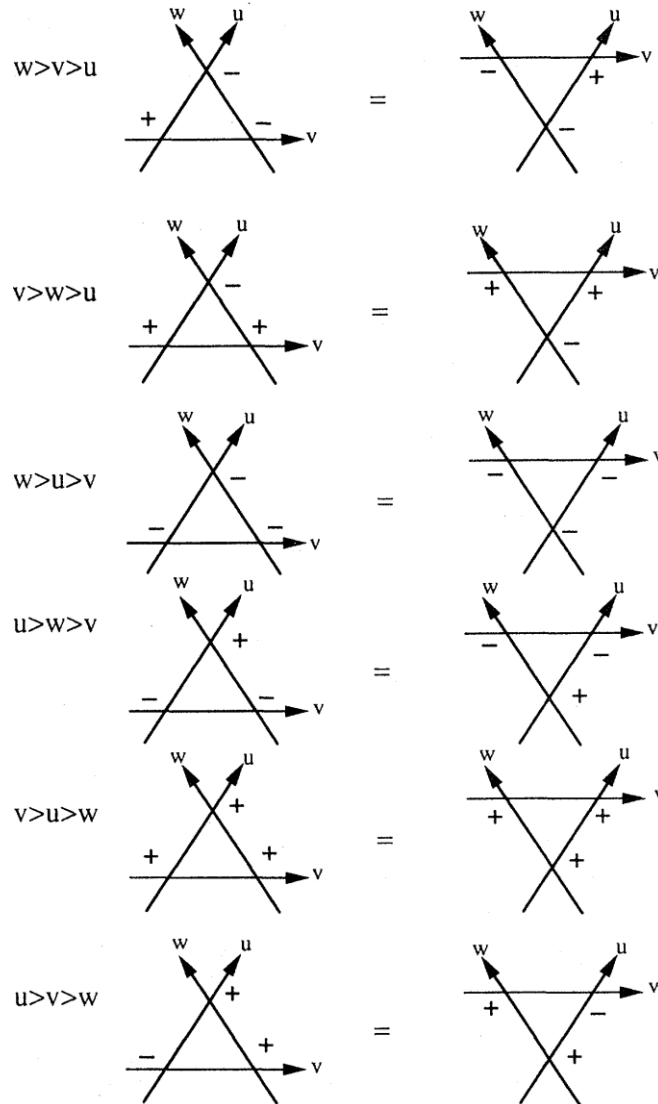
$$= \sum_{x,v,z \in I} \omega^*(e, x|d, y|u-w) \omega^*(z, c|x, b|v-u) \omega^*(f, z|y, a|v-w)$$

Bu denklemden yük korumalı modellere geçilebilir.

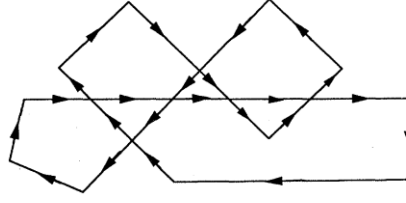
Yük Korumalı Modeller

Uygulamaların çoğunda, şunu elde ederiz:

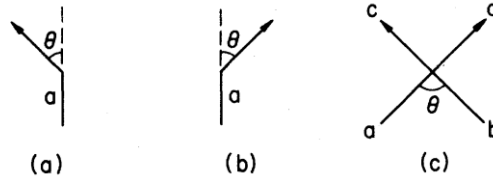
$$a + b = c + d \text{ olmadıkça } \omega \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} (u) = 0 \quad (42)$$



Şekil 40. Sonsuzluk-rapidite limitinde Yang-Baxter denklemi



Şekil 41. Yönlendirilmiş bir parçalı lineer Kafes



Şekil 42. Parçalı-lineer Kafeslerde köşeler

a, b, c, d fonksiyonlarını, kenarları olan yükler şeklinde tanımlarsak; gelen/giden okların toplam yük korunur. Bu durumda, yük muhafaza koşulu olarak Denklem (42) dikkate alınır. Yük-korunmalı modellerde, Denklem (37) ve (38), açıya bağlı ağırlıklar sırasıyla şöyledir:

$$\omega^*(a, d|b, c|u) = \omega^*\left(\begin{smallmatrix} c & d \\ a & b \end{smallmatrix}\right)(u) = \lambda^{(a-d)\theta/2\pi} \omega(a, d|b, c|u) \quad (43)$$

$$\omega_{\pm}^*(a, d|b, c) = \omega_{\pm}^*\left(\begin{smallmatrix} c & d \\ a & b \end{smallmatrix}\right) = \lambda^{(a-d)\theta/2\pi} \omega_{\pm}\left(\begin{smallmatrix} c & d \\ a & b \end{smallmatrix}\right) \quad (44)$$

θ_i in Şekil 38 deki i noktasına karşılık gelen gelen iki ok arasındaki açıyı ifade ettiği durumda, $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$ özdeşliği kullanarak; köşe ağırlığı Denklem (43) ün genişletilmiş Yang-Baxter denkleminin bir çözümü olduğu kolaylıkla ispatlanabilir. Ancak bunun için, $\omega(a, d, |b, c|u)$ nin Yang-Baxter denklemi (26) nın bir çözümü olması gerekmektedir. Böylece, Denklem (44) Denklem (41) in sonsuzluk-rapidite limitinde çözümüdür. Aynı doğrular boyunca, (rapidite farklılıkları $u_3 = u_1 + u_2$ koşulunu karşıladığı için), u nun i sahasında iki rapidite arasındaki fark olması durumunda denklem (45) elde edilir:

$$\tilde{\omega}(a, d, |b, c|u) \equiv e^{\beta(a-d)u} \omega(a, d, |b, c|u), \quad (45)$$

Burada, β rastlantısaldır ve aynı zamanda Yang-Baxter denkleminin bir çözümüdür. Burada “simetriyi bozan” bir dönüşüm söz konusudur ve daha sonraki uygulamalarda faydalı olacaktır. Bu simetri bozulmasını kullanma ihtimalini de düşünerek ω yi w veya $\tilde{\omega}$ yi (uygulamada hangisine ihtiyaç duyulursa) tanımlamada kullanılsın.

Tümlemlenebilir Köşe Modelleri

Bu aşamada, istatistiksel mekanikte bilinen tümlemlenebilir köşe modellerini tanıtılacaktır.

1. Spin-muhafazalı model

Schultz (1981) ve Perk ve Schults (1981, 83), bazı özel durumlarda Yang-Baxter denkleminin çözümleri üzerine sistematik çalışmalar yapmıştır. Bu özel durumlardan biri, ($q=2$) altı-köşeli buz-tipi modelleri genelleştiren $q(2q-1)$ köşe modelidir. Bu köşe modelinde, Şekil 44 te gösterilen $q(2q-1)$ konfigürasyonları ile ilişkili olan ağırlıklar dışındaki tüm ağırlıklar ortadan kalkar. Köşe değişkenleri “spinler” olarak ifade edilirse, giren/çıkan spinler korunur. Yani,

$$\{a = c, b = d\} \text{ ye ya da } \{a = d, b = c\} \text{ ye ulaşırız} \quad (46)$$

Böylece, spin-korumalı model yük koruması koşulunu ($a + b = c + d$) karşılar. $q=2$ için, (46) koşulu buz kuralına eşittir. Bu ise bizi, Lieb tarafından çözülen altı köşeli modellere götürür.

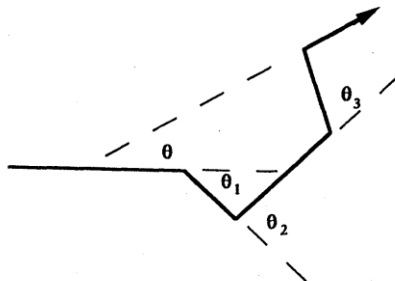
W_{aa}, S_{ab} ve $T_{ab}, a \neq b$ Şekil 44 te gösterilen köşe ağırlıkları olsun. Bu durumda;

$$\omega \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} (u) = W_{aa}(u)\delta_{abcd} + S_{ab}(u)(\delta_{ad}\delta_{bc} - \delta_{abcd}) + T_{ab}(u)(\delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{abcd}), \quad (47)$$

Burada, δ_{ah} Kronecker delta fonksiyonudur ve

Eğer $a = b = c = d$ $\delta_{abcd} = 1$

Diğer durumlarda $\delta_{abcd} = 0$ (48)



Şekil 43. Yönlendirilmiş bir yol

Perk ve Schultz, Denklem (47) kapsamında Yang-Baxter denkleminin çözümünün (genel normalleştirme hariç) şu olduğunu göstermiştir:

$$\begin{aligned}
W_{aa}(u) &= \sinh(\eta + \epsilon_a u), \\
S_{ab}(u) &= \sinh u, \\
T_{ab}(u) &= e^{-u[\operatorname{sgn}(a-b)]} \sinh \eta,
\end{aligned} \tag{49}$$

Burada, $\epsilon_a = 1$ veya -1 ve η rastlantısaldır. Sonsuzluk-rapidite limitinde, Denklem (47) ve (49) şu şekli alır:

$$\begin{aligned}
\omega_{\pm} \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} &= A_{\pm} (\epsilon_a e^{\pm \epsilon_a \eta} \delta_{abcd} + (\delta_{aa} \delta_{bc} - \delta_{abcd}) \\
&\quad \pm (e^{\eta} - e^{-\eta}) \theta[\pm(b-a)] \delta_{ac} \delta_{bd})
\end{aligned} \tag{50}$$

Burada, ağırlığı (Denklem (47)) $\sinh u$ ya bölündü ve normalizasyon faktörü $A_{\pm}$ ve aşağıdaki adım fonksiyonu bulundu

$$\begin{aligned}
b > a \text{ ise } \theta(b-a) &= 1 \\
b \leq a \text{ ise } \theta(b-a) &= 0
\end{aligned} \tag{51}$$

Denklem (50) yi açarak yazmak oldukça açıklayıcı olmaktadır. Normalizasyon faktörü $A_{\pm}$ hariç, aşağıdaki eşitlikleri elde edilir:

$$\begin{aligned}
\omega_{\pm} \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} &= \epsilon_a e^{\pm \epsilon_a \eta} \\
\omega_{\pm} \begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix} &= 1, \quad a \neq b \\
\omega_{+} \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} &= e^{\eta} - e^{-\eta}, \quad a < b \\
\omega_{-} \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} &= -(e^{\eta} - e^{-\eta}), \quad a > b \\
\omega_{\pm} \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} &= 0, \quad \text{diğer durumlarda}
\end{aligned} \tag{52}$$

Bu spin-korumalı model Homfly polinomunu getirir.

2. N-durumlu köşe modeli

Diğer bir tümlemlenebilir yük-korumalı modeller grubu ise N -durumlu köşe modelidir. Köşe değişkenlerinin Sabit $N=2, 3, \dots$ için, aşağıda verilen N tane farklı değer aldığı düşünülerek:

$$\mathcal{J} = \left\{ -\left(\frac{N-1}{2}\right), -\left(\frac{N-3}{2}\right), \dots, \left(\frac{N-3}{2}\right), \left(\frac{N-1}{2}\right) \right\}, \quad (53)$$

Bu durumda, N -durumlu köşe modeli şu şekilde tanımlanır:

$$a + b = c + d = l, |l| \leq N - 1, \quad (54)$$

Yani, toplam değişimi $l \leq N - 1$ olan yük-korumalı ağırlıklar tarafından ifade edilir. Bu, toplam $^2 \sum_{l=0,1,2,\dots}^{N-1} l^2 + N^2 = N(2N^2 + 1)/3$ köşe konfigürasyonlarını doğurur ve $N=2$ için 6-köşeli (buz tipi) köşe konfigürasyonlarını ve $N=3$ için 19-köşeli modeli yaratır. Örneğin, $N=2$ çözümü şöyledir:

$$\begin{aligned} \omega \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} (u) &= \omega \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} (u) = \sinh(\eta - u), \\ \omega \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} (u) &= \omega \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} (u) = \sinh u, \\ \omega \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} (u) &= e^{-u} \sinh \eta \\ \omega \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} (u) &= e^u \sinh \eta \end{aligned} \quad (55)$$

Burada, köşe ağırlıkları Denklem (45) deki simetri bozucu faktör ile $\beta = 1$ 'i de kapsar. Bu çözümün, $q=2$ ve $\epsilon_a = 1$ 'li Denklem (47) ve (49) da verilen spin-korumalı modelinkiyle aynı olduğunu görüyoruz. Ancak, genel N -durumlu köşe modeli spin- korumalı modelden farklıdır.

Jones (1989); $\omega_{\pm}$ köşe ağırlıkları, $w(u)$ sonsuzluk-rapidite limiti ve genel N 'yi açıklamıştır. Bu açıklama, $\beta = 1$ 'li Denklem (45) deki simetri-bozucu faktörü de içerir ve $\epsilon_a = 1$ çözümümüzü $N=2$ durumunda şuna indirger:

$$\omega_+ \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} (\eta) = e^{\eta(ab+cd)+k(k-1)/2} \times \Gamma_{b,k}^N(\eta) [\theta(a-b) + \delta_{ab}] \quad (56)$$

Burada, $k = a - d$ dir:

$$\Gamma_{b,k}^N(\eta) = \prod_{n=0}^{k-1} \left[\frac{2 \sinh \left[\left(b + n + \frac{1}{2}N + \frac{1}{2} \right) \eta \right] \sinh \left[\left(b + n - \frac{1}{2}N - \frac{1}{2} \right) \eta \right]}{-\sinh[(n+1)\eta]} \right], \quad (57)$$

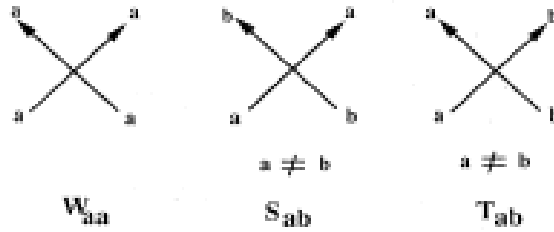
Yüksüz ürün 1 dir ve

$$\omega_- \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} (\eta) = \omega_+ \begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix} (-\eta) \quad (58)$$

Bu köşe modelinden Akutsu-Wadati polinomu elde edilir.

3. Kesişmeyen-şerit modeli

Perk ve Schultz tarafından düşünülen diğer bir çözümler kümesi ise $q(2q-1)$ -köşeli modeldir. Bu modelin köşe ağırlıkları Şekil 45 te verilmiştir.



Şekil 44. Spin-korumalı köşe modelinin köşe ağırlıkları

Bu köşe ağırlıkları şu iki şekilden biriyle ifade edilir:

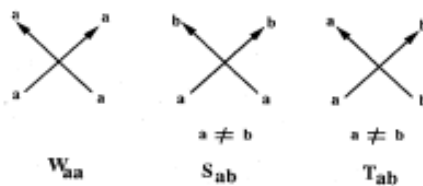
$$\{a = c, b = d\} \text{ veya } \{a = b, c = d\} \quad (59)$$

Böylece, köşe ağırlığı:

$$\omega \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} (u) = W_{aa}(u) \delta_{abcd} + S_{ab}(u) (\delta_{ab} \delta_{cd} - \delta_{abcd}) + T_{ab}(u) (\delta_{ac} \delta_{bd} - \delta_{abcd}) \quad (60)$$

halini alır.

Her köşede, kenarları aynı durumlarda bağlanırsa, bölüntü fonksiyonu (24) L üzerinde birbirleriyle kesişmeyen çokgenler üretir.



Şekil 45. Kesişmeyen-şerit modelinin köşe ağırlıkları

Bu durumda, bu model bir kesişmeyen şeritler modeli olur. $a=2$ için, Lieb ve Wu (1972) tarafından tartışılan altı-köşeli modele indirgenir. $q=3$ için, Stroganov (1979) tarafından iki model düşünülmüştür. Kesişmeyen-şerit modelinin, yük-koruması koşuluna ve Denklem (42) ye uymadığı açıktır. Bu nedenle, $\lambda = 1$ alınır. Böylece, L^* de ikinci dereceden tüm köşeler şu ağırlığı alır:

$$\text{Tüm } a \text{ lar için } \omega(a) = 1, \quad (61)$$

Perk ve Shultz (1981, 83), Denklem (60) şeklinde $q+1$ tane farklı tümlemlenebilir model olduğunu ortaya çıkarmıştır. Tümlemlenebilir durumlardan biri (Perk ve Wu tarafından “ayrılabilir model” olarak adlandırılmıştır) şudur:

$$\begin{aligned} W_{aa}(u) &= \sinh u + \sinh(\eta - u) \\ S_{ab}(u) &= \sinh u \\ T_{aA}(u) &= \sinh(n - u) \end{aligned} \quad (62)$$

Sonsuzlu-rapidite limitinde, Denklem (60) dan şu elde edilir.

$$\omega_{\pm} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} = A_{\pm} [\delta_{ab} \delta_{cd} - e^{\mp \eta} \delta_{ac} \delta_{bd}] \quad (63)$$

Burada, Denklem (60) ı tekrar $\sinh u$ ya bölerek ve bir normalizasyon faktörü $A_{\pm}$ eklendi. Normalizasyon faktörü $A_{\pm}$ çıkarıldığında aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{aligned} \omega_{\pm} \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} &= 1 - e^{\pm \eta} \\ \omega_{\pm} \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} &= -e^{\pm \eta}, \quad a \neq b \\ \omega_{\pm} \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} &= 1, \quad a \neq b \\ \omega_{\pm} \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} &= 0, \quad \text{diğer durumlarda.} \end{aligned} \quad (64)$$

Görüleceği üzere, bu köşe modelinden Jones polinomu elde edilir. (Lipson, 1992; Wu, 1992).

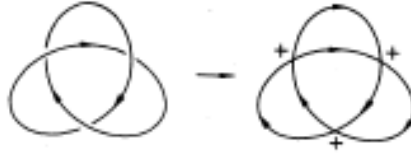
ARAŞTIRMA BULGULARI

Köşe Modellerinden Düğüm Sabitlerine

Yönlendirilmiş düğümler

1. Formülasyon

Belirli bir yönlendirilmiş düğümden başlayarak, (düğüm doğrularını kafes kenarları ve doğruların kesişme noktalarını kafes köşe noktaları olarak kabul edilirse) yönlendirilmiş bir L kafesi ve onunla ilişkili parçalı-lineer kafes L^* elde edilir. Bu, iki tür köşe kenarı oluşturur (+ ve -).



Şekil 46. Bir düğümden kafes elde edilmesi

Bunlar da iki tür doğru kesişmesine karşılık gelir (+ ve -). Örneğin, bir trefoil kullanarak Şekil 46 daki yönlendirilmiş kafes ve Şekil 47 deki parçalı-lineer kafes elde edilebilir. Bu kafeslerin her ikisinin de üç tane + kesişmesi vardır.

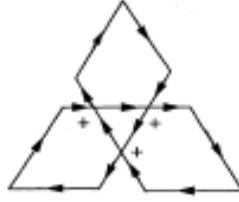
Bir sonraki adımda, L^* üzerinde iki farklı tür köşe ağırlığına sahip olacak geliştirilmiş bir köşe modeli geliştirilecektir. Bu modelde, bölüntü fonksiyonu $Z(\omega_{\pm}^*)$ bir düğüm invariantı olacaktır. Yani, $Z(\omega_{\pm}^*)$ in kafes kenarlarının Reidemeister hareketleri kapsamında sabit kalmasını beklenir. Bunu gerçekleştirebilmek için, geliştirilmiş Yang-Baxter denklemi (41) den elde edilen köşe ağırlıkları $\omega_{\pm}^*$ yi kullanılır. Aslında, Denklem (31) den sonra belirtildiği gibi, Yang-Baxter denkleminin sonsuzluk-rapidite limitlerindeki konfigürasyonları, IIIA türü Reidemeister hareketlerinininkilerle birebir örtüşmektedir. Sonuç olarak, $Z(\omega_{\pm}^*)$ bölüntü fonksiyonu (tanım itibarıyla) IIIA türü Reidemeister hareketleri kapsamında sabittir. Bu nedenle, sadece I ve II nci tür Reidemeister hareketleri (bunlar IIIB tür hareketleri getirir) kapsamındaki sabitlik durumunun incelemesi gerekmektedir. Sonsuzluk-rapidite limitinin, Denklem (30) un kullanımı IIIA türü Reidemeister hareketleri kapsamında sabitliği sağlayabilmek için doğal bir koşul olarak elde edilir:

$$\sum_{a \in J} \lambda^{a(2\pi-\theta)/2\pi} \omega_{\pm}^*(a, b | x, a) = \lambda^{-b\theta/2} \delta_{bx} \quad (I), \quad (65)$$

Burada, $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 2\pi - \theta$ eşitliği kullanıldı. Benzer şekilde, $Z(\omega_{\pm}^*)$ sabitinin IIA ve IIB türü Reidemeister hareketleri kapsamında değerlendirilmesi (Şekil 49 ve 50 de gösterilmektedir) aşağıdaki koşullara neden olmaktadır,

$$\sum_{b, y \in J} \lambda^{(b-y)\theta/2\pi} \omega_{\pm}^*(a, b | x, y) \omega_{\mp}^*(y, z | b, c) = \lambda^{(a-x)\theta/2\pi} \delta_{ac} \delta_{xz} \quad (IIA) \quad (66)$$

$$\sum_{b, y \in J} \lambda^{\frac{(y+b)(\pi-\theta)}{2\pi}} \omega_{\pm}^*(y, x | a, b) \omega_{\mp}^*(b, c | z, y) = \lambda^{\frac{(a+x)(\pi-\theta)}{2\pi}} \delta_{xz} \delta_{ac} \quad (IIB) \quad (67)$$



Şekil 47. Şekil 46 daki kafes kullanılarak üretilen parçalı-lineer kafes

Bu denklemlerde eksik bir nokta kalmasını önlemek için, gereksiz gözüксе de, IIIB türü Reidemeister hareketlerinin gerektirdiği koşul aşağıdaki şekilde yazılabilir,

$$\begin{aligned} \sum_{x, y, z \in J} \omega_1^*(y, a | b, x) \omega_2^*(x, c | f, z) \omega_3^*(z, c | d, y) \\ = \sum_{x, y, z \in J} \omega_1^*(d, y | x, e) \omega_2^*(b, c | z, c) \omega_3^*(f, z | y, a) \quad (IIIB) \end{aligned} \quad (68)$$

$$\{1, 2, 3\} = \{+ - -, \{+ - +\}, \{+ + -\}, \{- + -\}, \{- - +\}, \{- + +\} \} \quad (69)$$

Yük-korumalı modeller için, Denklem (43) ve (44) kullanır ve Denklem (65)-(67) den aşağıdaki eşdeğer koşullar elde edilir,

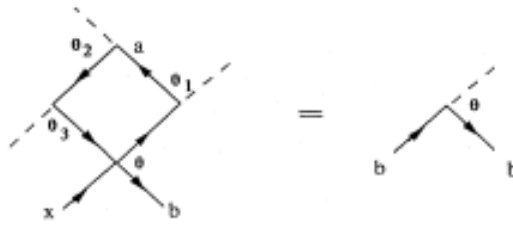
$$\sum_{a \in J} \lambda^a \omega_{\pm}(a, b | x, a) = \delta_{bx}, \quad (I), \quad (70)$$

$$\sum_{b, y \in J} \omega_{\pm}(a, b | x, y) \omega_{\mp}(y, z | b, c) = \delta_{ac} \delta_{xz} \quad (IIA), \quad (71)$$

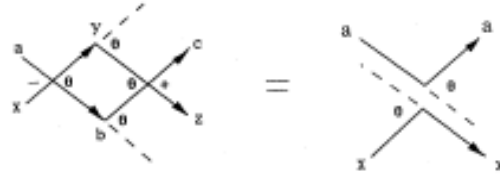
$$\sum_{b, y \in y} \lambda^{b-a} \omega_{\pm}(y, x | a, b) \omega_{\mp}(b, c | z, y) = \delta_{xz} \delta_{ac} \quad (IIB), \quad (72)$$

Burada $\omega_{\pm}(a, b, |c, d)$, Denklem (30) ve (27) tarafından tanımlanır ve Yang-Baxter denkleminin (26) çözümünden çıkarılır. Bunlar temel koşullardır ve genişletilmiş ağırlıkları ifade etmezler. θ açısına bağlı olmadıklarını ve (71) koşulunun Denklem (32) bütünlük ilişkisi ile örtüştüğün görülmektedir.

Teorem 7. Her bir yönlendirilmiş düğüm için, yönlendirilmiş bir L kafesi ve ilgili parçalı-linear L^* kafesi oluşturulsun. Köşe ağırlıkları $w^*(a)$ Denklem (33) den üretilen ve köşe ağırlıkları $\omega_{\pm}^*$ olan genişletilmiş Yang-Baxter denklemi (41) in çözümünün sonsuzluk-rapidite limiti tarafından üretilen bölüntü fonksiyonu (40) bir düğüm invaryantıdır. Ancak bunun için Denklem (65)-(67) nin koşullarının karşılanması gerekmektedir.



Şekil 48. I nci tür Reidemeister hareketleri için etiketler



Şekil 49. IIA türü Reidemeister hareketleri için etiketler

Yük korumalı modeller için $\omega_{\pm}^*$, Denklem (44) tarafından üretilir ve Denklem (65)-(67) temel koşullara indirgenir.

Skein bağıntısı. Bölüntü fonksiyonları olarak formüle edilen düğüm invaryantları durumunda, düğüm invaryantlarını ilişkilendiren Skein bağıntısı köşe ağırlıkları olarak formüle edilebilir. Öreğin, Homfly polinomu için Skein bağıntısı (11) in, genişletilmiş köşe ağırlıkları arasındaki şu ilişkiye eşdeğer olduğu doğrulanmıştır.

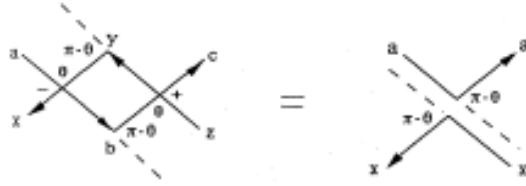
$$t^{-1}\omega_+^*\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} - t\omega_-^*\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = z\lambda^{(a-d)\theta/2\pi}\delta_{ac}\delta_{bd} \quad (73)$$

Yük korumalı modeller için, Denklem (73) şuna indirgenir,

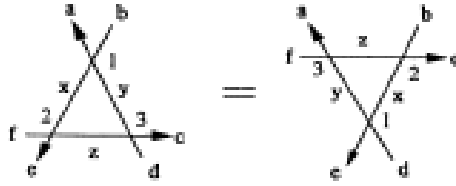
$$t^{-1}\omega_+\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} - t\omega_-\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = z\delta_{ac}\delta_{bd} \quad (74)$$

Diğer Skein ilişkileri için de benzer ilişkiler kurulabilir.

Şimdi de formülasyon düğüm invaryantları elde etmek için uygulanacaktır.



Şekil 50. IIB türü Reidemeister hareketleri için etiketler



Şekil 51. IIIB türü Reidemeister hareketler için etiketler

Jones Polinomu

Jones polinomu $V(t)$ nin, $(z = \sqrt{t} - 1/\sqrt{t})$ olarak Homfloy polinomu $P(t, z)$ den üretildiği belirtilmişti. Bu durum, Jones polinomunun $q = 2$ spin-korumalı köşe modelinden üretildiğini göstermektedir. Jones polinomunun temel önemi dikkate alındığında, bu polinomu kesişmeyen-şerit modelini kullanarak da geliştirebileceği gösterilecektir. Bu işlem doğrudan bir işlemdir çünkü parçalı-lineer kafesleri veya kıvrılmayı kullanmaya gerek yoktur. Ayrıca bu işlem, Jones polinomunu bir Potts modeli bölüntü fonksiyonu olarak doğrudan ifade eder.

Kesişmeyen-şerit modelinde, $\lambda = 1$ durumu söz konusudur. Bu durumda, köşe ağırlıklarında herhangi bir açıya-bağımlılık söz konusu değildir. Daha önce olduğu gibi, IIA türü Reidemeister hareketleri koşulu otomatik olarak köşe ağırlığı denklem (63) tarafından sağlanır. Denklem (70) deki bu ağırlığı, $\lambda = 1$ ile değiştirildiğinde,

$$A_{\pm} = -e^{\pm 2\eta}, q = e^{\eta} + e^{-\eta}. \quad (75)$$

Elde edilir. Bununla beraber köşe ağırlığı Denklem (63) şu şekilde elde edilir:

$$\omega_{\pm} \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = -e^{\pm 2\eta} \delta_{ab} \delta_{cd} + e^{\pm \eta} \delta_{ac} \delta_{bd}. \quad (76)$$

Denklem (71) ve (72) nin de denklem (76) tarafından karşılanıp karşılanmadığını kontrol edilebilir. Böylece, köşe ağırlığı denklem (76) olan kesişmeyen-şerit modelinin bölüntü fonksiyonu $Z(q, e^p)$ bir düğüm invaryantı oluşturur. Bu düğüm invaryantını, Jones polinomu

olarak ifade etmek için, Denklem (76) dan şunu elde ederiz:

$$e^{-2\eta}\omega_+^*\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} - e^{2\eta}\omega_-^*\begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} = (-e^\eta + e^{-\eta})e^{(a-d)\theta/2\pi}\delta_{ac}\delta_{bd} , \quad (77)$$

Bu bizi, $e^\eta = -\sqrt{t}$ nin tanımlanmasını müteakip $V(t)$ için Skein bağıntısı Denklem (9) a götürür. Dahası, $Z(q, e^\eta), Z_{\text{ring}}(q, e^\eta) = q$ ye oranlıdır. Bu bizi, “Luarent polinomu:

$$V(t) = q^{-1}Z_{\text{vertex}}(q, e^\eta) \quad (78)$$

şu koşulda:

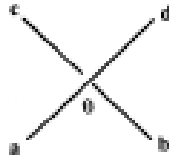
$$q = -(\sqrt{t} + 1/\sqrt{t}), e^\eta = -\sqrt{t} \quad (79)$$

Bir Jones polinomudur” sonucuna getirir.

Yönlendirilmemiş Dügümler

1. Formülasyon

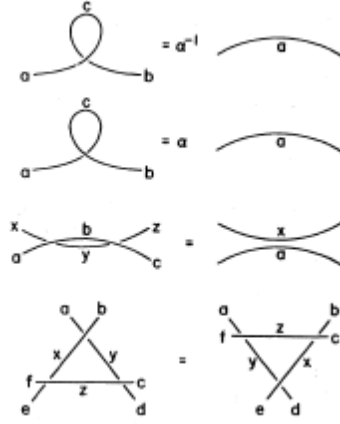
Yönlendirilmemiş düğümler için polinom invariantları, yönlendirilmiş düğümlerde aynı sonuç için takip edilen yol izlenerek elde edilebilir. Her bir düğüm için, yönlendirilmemiş bir L Kafesi üretilir. L üzerinde bir köşe modeli ele alınsın. Bölüntü fonksiyonunun, kafes kenarlarının her türlü Reidemeister hareketi kapsamında sabit kalmasını şart koşulduğunda. bölüntü fonksiyonu bir düğüm invariantı olur.



Şekil 52. Yönlendirilmemiş düğümler için bir köşe etiketi

Ancak, yönlendirilmemiş düğümler için, sadece bir tür doğru kesişmesi vardır. Bu nedenle de, bölüntü fonksiyonu tek bir köşe ağırlığı alır. Köşe kenarlarını, Şekil 52 de gösterildiği şekilde etiketlenir ve köşe ağırlığı aşağıdaki şekilde yazılır,

$$\omega(a, d \mid b, c) = \omega\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = \omega\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} \quad (80)$$



Şekil 53. Reidemeister hareketleri için etiketler

Reidemeister hareketlerini Şekil 53 te gösterildiği gibi etiketlersek, Reidemeister hareketleri tarafından öngörülen koşullar aşağıdaki eşitlikleri getirir,

$$\sum_{c \in J} \omega(a, c \mid b, c) = \alpha^{-1} \delta_{bx} \quad (81)$$

$$\sum_{c \in J} \omega(c, b \mid a, c) = \alpha \delta_{ab} \quad (82)$$

$$\sum_{b, y \in J} \omega(a, b \mid x, y) \omega(b, c \mid y, z) = \delta_{ac} \delta_{xz} \quad (83)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{xyz \in J} \omega(x, b \mid y, a) \omega(f, z \mid e, x) \omega(z, c \mid d, y) \\ &= \sum_{xyz \in J} \omega(e, x \mid d, y) \omega(z, c \mid x, b) \omega(f, z \mid y, a) \end{aligned} \quad (84)$$

Burada, daha önce de olduğu gibi, q tamsayıları dizisidir. Şimdi, temel sonuç bir teorem olarak belirtilebilir.

Teorem 8. Belirli bir düğüm için, yönlendirilmemiş bir L Kafesi üretilsin. Köşe ağırlıkları denklem (80) de verilen ve I inci tür Reidemeister hareketleri kapsamında Denklem (18) i karşılayan, L üzerinde bir köşe modelinin bölüntü fonksiyonu $Z(\omega)$ [Denklem (24)], yönlendirilmemiş düğümler için düzenli izotopi sabitidir. Ancak bunun için, Denklem (81)-(84) ün geçerli olması gerekmektedir.

$\alpha^{-w(K)} Z(\omega)$ fonksiyonu, yönlendirilmiş düğümler için bir yarı-yönlendirilmiş invarianttır.

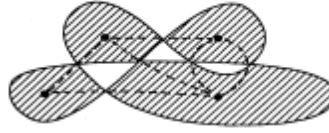
Teorem 8 e göre $V(t) = \left(-t^{-3/4}\right)^{-u} f\left(t^{-1/4}\right)$ yönlendirilmiş düğümler için ortamsal izotop sabitidir. Aşağıdaki denklem sağlandığı takdirde skein bağıntısı (9) un doğrulandığını ve $V(t)$ nin jones polinomu olduğu görülür.

$$\frac{1}{t} \left[\alpha^{-1} \omega \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} \right] - t \left[\alpha \omega \begin{bmatrix} d & b \\ c & a \end{bmatrix} \right] = \left[\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right] \delta_{ac} \delta_{bd} \quad (84a)$$

Köşe Etkileşim Modellerinden Düğüm Sabitlerine

A. Formülasyon

N tane doğru kesişmesinden oluşan belirli bir düğümle başlayarak, N tane sahanın yönlendirilmemiş bir Kafesini (I) oluşturur ve doğru yönlendirmelerini göz ardı edilir. En basit şekilde, L^* , Kafesi oluşturan L nin iki parçalı-yüzeylerinin bir dizisinde yer alan spinlerden oluşan bir spin modeli düşünülür. Bunu daha kolay görselleştirebilmek için, L nin spinli yüzeylerini gölgelendirmek faydalı olmaktadır. Bu, Baxter tarafından rastlantısal düzlemsel kafesler için geliştirilen Potts modelinin analizinde kullanılmış bir araçtır. Gölgelendirilmiş yüzlere sahip bir Kafes L örneği için: Şekil 54. L Kafesi, L^* Kafesini çevrelemekte veya kaplamaktadır.



Şekil 54. İki spinli etkileşimlerin görüldüğü bir spin modeli için bir Kafes örneği. Kübik çemberler spinleri ve kesikli çizgiler ise Kafes kenarları ve etkileşimleri göstermektedir.

Spinlerin etkileşmesine izin verilsin. Şekil 54 de gösterildiği gibi, L nin Kafes alanları boyunca (ve L nin Kafes kenarları boyunca) düzenlenen iki-spinli etkileşimleri kullanılsın. Gölgelendirilmiş yüzeylerin doğru kesişmelerine göre göreceli konumlarına bağlı olarak, Şekil 55 de de gösterildiği gibi, iki tür (+ ve -) etkileşim belirlensin.

Boltzmann faktörlerinin $W_{\pm}(a, b)$ olmasına ve (basit bir anlatım için) simetrik etkileşimlerin şu şekilde gerçekleşmesine izin verilsin,

$$W_{\pm}(a, b) = W_{\pm}(b, a) \quad (85)$$

IRF modelinde, $a, b, \dots$ spin değişkenlerinin J dizisinde q tamsayı değerlerini aldığını düşünölsün. Bölüntü fonksiyonu (23) artık şu şekilde okunur,

$$Z(W_{\pm}) = q^{-N/2} \sum_{\min v \text{ trates}} \Pi^{W_{\pm}(a,b)} \quad (86)$$

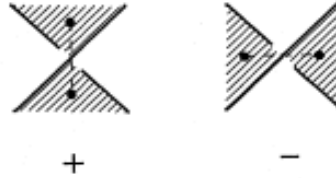
Burada, ürün L deki etkileşen tüm spin çiftleridir ve her bir spin toplamına $q^{-1/2}$ faktörü dahil edilir. Bir aşıkâr düğüme karşılık gelen tek bir spinin bölüntü fonksiyonu şöyle olur:

$$Z_{\text{single spin}} = q^{-1/2} \sum_{a \in J} 1 = \sqrt{q} \quad (87)$$

$Z(W_{\pm})$ bölüntü fonksiyonun, Kafes kenarlarının Reidemeister hareketleri kapsamında düzenli izotop sabiti olması gerektiğini şart koşulsun. Tüm olası yüzey gölgelendirmelerini dikkate alındığında, bu koşul Şekil 56 ve 57 deki dört bağımsız harekete götürür. Şekil 56; Şekil 33 ve Denklem (8) de gösterilen iki tane I inci tür hareketin yüzlerini gölgelendirerek elde edilen dört bağımsız I inci tür Reidemeister hareketini göstermektedir. Benzer şekilde Şekil 57 ise, Şekil 23 teki ilgili hareketlerin yüzlerini gölgelendirerek elde edilen II ve III ncü tür bağımsız Reidemeister hareketlerini sunmaktadır. Bu koşullar açık bir şekilde ifade edilecek olursa,

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{b \in J} W_{\pm}(a, b) = \alpha^{\mp 1} \quad (88)$$

elde edilir.



Şekil 55. Spin modeline iki tür etkileşim. Bir köşeyi bir kenar boyunca terk ettikten sonra (bu bir üzerinden geçme durumudur) gölgeli alan solda (sağda) ise etkileşim + (-) türü bir etkileşimdir.

I inci tür Reidemeister hareketleri için

$$W_{\pm}(a, a) = \alpha^{\pm 1} \quad (89)$$

ve II ve III üncü tür Reidemeister hareketleri için

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{b \in J} W_{-}(a, b) W_{+}(b, c) = \sqrt{q} \delta_{ac} \quad (90)$$

$$W_{+}(a, b) W_{-}(a, b) = 1 \quad (91)$$

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{d \in J} W_{\pm}(a, d) W_{\mp}(b, d) W_{\pm}(c, d) = W_{\mp}(a, b) W_{\mp}(b, c) W_{\pm}(c, a) \quad (92)$$

koşulları, L üzerindeki lineer grafiklerle daha kolay bir şekilde de ifade edilebilir. (Şekil 58 de de gösterildiği gibi).

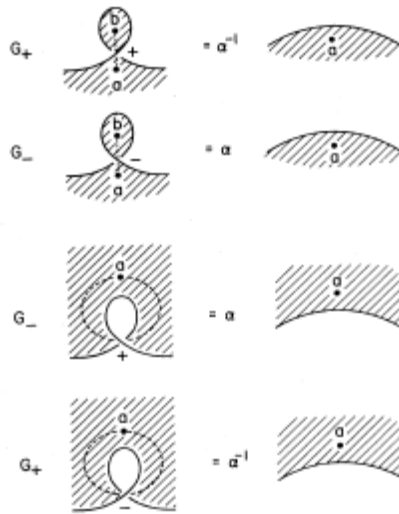
Denklem (86) ye göre, gölgelendirilen her bir alan için bir $q^{-1/2}$ faktörü olduğunu unutulmamalıdır. Bu durum, Denklem (88), (90) ve (92) nin sol tarafında telafi faktörlerinin oluşmasına neden olur. Dahası, (88)-(92) koşullarının hepsi bağımsız değildir. Örneğin, Denklem (92) de $b = c$ olarak kabul edildiğinde, Denklem (89) ve (91) i kullandıktan sonra Denklem (88) elde edilir. Denklem (92) koşulu bir Yang-Baxter denklemidir. Bu denklem, Ising modeli için yıldız-üçgen denkleminin bir genellemesidir.

Şimdi temel sonucu bir teorem olarak ifade edilebilir,

Teorem 9: Her bir düğüm için, yönlendirilmemiş bir L Kafesi ve spinleri L 'nin diğer her bir yüzeyini kaplayan ve $Z(W_{\pm})$ bölüntü fonksiyonu Denklem (86) tarafından üretilen bir q -durumlu spin modeli üretilsin. Bu durumda $q^{-1/2} Z(W_{\pm})$, Denklem (17) ve (18) i karşılayan yönlendirilmemiş düğümler için düzenli izotopi sabitidir. Ancak bunun sağlanabilmesi için, Denklem (88)-(92) nin gerçekleşmesi gerekmektedir.

$\alpha^{-w(K)} Z(W_{\pm}) / \sqrt{q}$ fonksiyonu, yönlendirilmiş düğümler için ortamsal izotopi sabitidir.

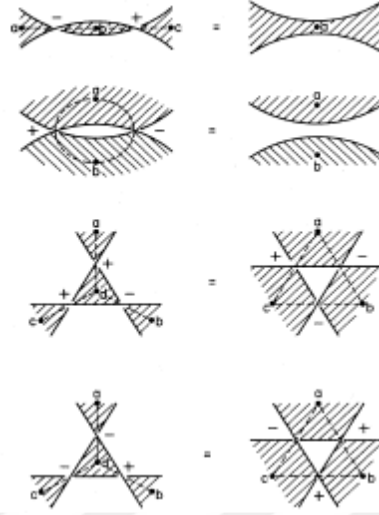
Son olarak, L nin veya L' Kafesinin yüzeyleri iki parçalı olduğu için, yüzeylerin gölgelendirilmesinde ve buna bağlı olarak da spin modelinin oluşturulmasında iki seçenek mevcuttur. Ancak, bu iki seçenek de aynı sabite götürür.



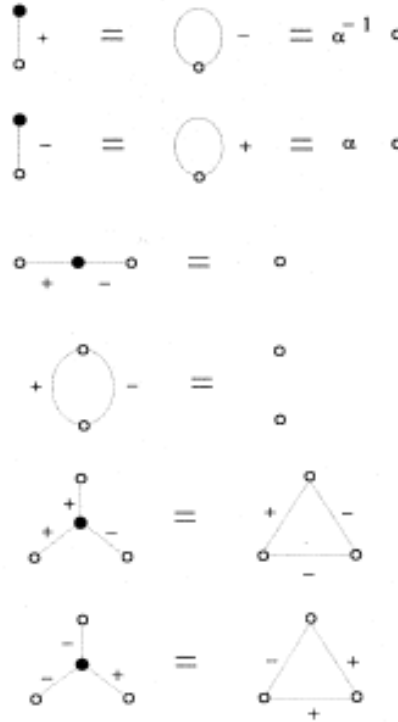
Şekil 56. I inci tür Reidemeister hareketleri

Örnek 4

Formülasyona bir örnek olarak, Potts modelinin Jones polinomunu verdiğini gösterebiliriz.



Şekil 57. II ve III üncü tür Reidemeister hareketleri



Şekil 58. Reidemeister hareketlerinin eşdeğer tasvirleri.

Açık çemberler, sabit spin durumlarını temsil edecek şekilde çözülmüştür ve kesintisiz çemberler ise toplamalar altındaki spin durumlarını ifade eder.

Potts modeli, aşağıda sunulan iki-spinli Boltzmann faktörü ile nitelendirilir:

$$\begin{aligned}
W_{\pm}(a, b) &= A_{\pm} e^{K_{\pm} \delta_{ab}} \\
&= A_{\pm} (1 + v_{\pm} \delta_{ab})
\end{aligned} \tag{93}$$

Burada,

$$v_{\pm} = e^{K_{\pm}} - 1 \tag{94}$$

şöyledir.

Denklem (93) ün (91) e dönüştürülmesi yoluyla:

$$A_+ A_- = 1, v_+ + v_- + v_+ v_- = 0. \tag{95}$$

elde edilir.

Denklem (95) in ikinci ilişkisi, $K_+ = -K_-$ ye karşılık gelir. Denklem (95) kullanıldıktan sonra, Denklem (90) şu sonucu verir:

$$q = v_+ v_- \tag{96}$$

ve Denklem (92) şuna karşılık gelir:

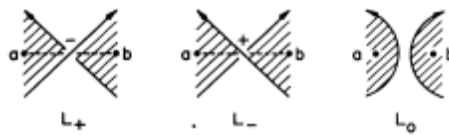
$$A_{\pm}^2 = \sqrt{q}/v_{\pm} \tag{97}$$

Son olarak, hem Denklem (88) in hem de (89) un şu koşul temelinde karşılanıp karşılanmadığı kontrol edilebilir:

$$\alpha = A_+(1 + v_+) = [A_-(1 + v_-)]^{-1}. \tag{98}$$

Denklem (95)-(98) in karşılandığı, şu denklemler yazılarak ispatlanabilir:

$$\begin{aligned}
t &\equiv -e^{-K_+} = -e^{K_-}, \\
v_{\pm} &= -(1 + t^{\mp 1}), \\
A_{\pm} &= t^{\pm 1/4}, \\
q &= t + 2 + 1/t, \\
\alpha &= -t^{-3/4}
\end{aligned} \tag{99}$$



Şekil 59. Sekin ilişkisi konfigürasyonları.

$W_+(W_-)$ etkileşimi, $L_-(L_+)$ kesişmesine karşılık gelmektedir.

Böylece, Teorem 9, $Z(W_{\pm})$ nin yönlendirilmemiş düğümler için bir invaryant olduğunu gösterir. bu ise, $P(t) = (-t^{-3/4})^{-w(K)} Z(W_{\pm})$ nin yönlendirilmiş düğümler için bir invaryant olduğunu ortaya koyar. $P(t)$ yi (normalizasyon faktörü dışında) Jones polinomu olarak tanımlamak için, Şekil 59 daki üç konfigürasyon dikkate alınır.

$$\frac{1}{t}[\alpha^{-1}W_-(a, b)] - t[\alpha W_+(a, b)] = \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (100)$$

Aslında, Denklem (100) ün bir kimlik olduğu Denklem (99) u kullanılarak anlaşılabilir. Artık, $P(t)$ bir faktör olarak $P_{\text{unknot}}(t) = \sqrt{q}$ e sahiptir. Böylece şu sonuca ulaşabilir,

$$V(t) = q^{-1/2}(-t^{-3/4})^{w(K)} Z(W_{\pm}) \quad (101)$$

Bu, $V_{\text{unknot}}(t) = 1$ e normallenen bir Laurent polinomu ve böylece de bir Jones polinomudur.

SONUÇ

Bu çalışmada, düğüm invaryantlarının istatistiksel mekanik bağlamda nasıl elde edilebileceği ele alınmış ve bu amaçla iki boyutlu kafes modelleri temelinde geliştirilen köşe modelleri ve spin modelleri incelenmiştir. Ana yaklaşım, düğümlerin düzlemsel projeksiyonlarından elde edilen kafesler üzerinde tanımlanan modellerin bölüntü fonksiyonlarının, Reidemeister hareketlerine karşı değişmez olacak şekilde kurgulanmasıdır. Böylece, bölüntü fonksiyonu doğrudan bir düğüm değişmezi olarak yorumlanabilir.

Reidemeister hareketlerine karşı değişmezliği sağlamak, bizi doğal olarak integrallenebilir (tam çözülebilir) sistemlere yönlendirmektedir. Özellikle Yang-Baxter denklemini sağlayan R-matrislerinin varlığı, tip IIIA ve IIA türündeki Reidemeister hareketlerine karşı değişmezliği garantilemekte, kalan hareketler (I ve IIB) ise modelin yapısına uygun olarak ek koşullar aracılığıyla sağlanabilmektedir. Bu bağlamda, farklı model türlerine ilişkin temel sonuçlar sunulmuş ve her biri düğüm teorisinde geçerli invaryantlara karşılık gelmiştir.

Ayrıca, kullanılan modellerin Boltzmann ağırlıkları yalnızca yerel etkileşimlere dayandırılmıştır. Bu durum, istatistiksel mekanik açısından geleneksel yaklaşıma uygunluk arz etmekte ve sistemin fiziksel temelini pekiştirmektedir. Özellikle sonsuz hızlilik sınırında (infinite-rapidity limit) ortaya çıkan yapıların, Reidemeister IIIA hareketleriyle birebir örtüşmesi, bu yaklaşıma özgü güçlü bir cebirsel temeli göstermektedir.

Sonuç olarak, bu tezde sunulan yaklaşım, düğüm teorisi ile istatistiksel mekanik arasında köprü kuran ve düğüm invaryantlarını fiziksel modellerin bölüntü fonksiyonları aracılığıyla tanımlayan bir derleme sunmaktadır. Sadece topolojik anlamda değil, aynı zamanda fiziksel yorumlarla da desteklenen bu yöntem, gelecekte hem matematiksel fizikteki düğüm sınıflandırma problemlerinde hem de kuantum bilgi kuramı gibi alanlarda yeni uygulamalara olanak sağlayabilecek niteliktedir.

KAYNAKÇA

- Altendorfer, R. Knot Theory and Statistical Mechanics. Dept. of Physics and Astronomy
Bloomberg Center 3400 N. Charles Street Baltimore, MD 21218.
- Baran, M. 2025. *Topoloji*. Nobel Akademik Yayıncılık.
- Baxter, R.J. 1982. Exactly Solved Models in Statistical Mechanics. Academic Press.
- Burde, G. & Zieschang, H. 2002. *Knots* (2nd ed.). De Gruyter.
- Jones, V. F. R. 1985. A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 12(1), 103–111.
- Jones, V.F.R. 1990. Knot Theory and Statistical Mechanics. Scientific American, a division of Nature America, Inc. 263(5), 98-105.
- Kauffman, L.H. 1977. On Knots. Princeton University Press.
- Kauffman, L.H. 1989. Knots and physics. (Vol.IX.- Suppl, 17-32). *Note di Matematica*
- Lipson, S. G. 1992. Knot invariants and statistical mechanics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 190(1–2), 1–18.
- Murasugi, K. 1970. On the signature of links. *Topology*, 9(3), 283-298.
- Murasugi, K. 1996. Knot Theory and Its Applications. Birkhauser.
- Perk, J. H. H. & Wu, F. Y. 1986. Graphical approach to the partition function in integrable lattice models. In
- Reidemeister, K. 1948. *Knotentheorie*. Julius Springer.
- Reshetikhin, N. & Turaev, V. G. 1990. Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups. *Communications in Mathematical Physics*, 127(1), 1–26.
- Rolfsen, D. 1976. Knots and links. Publish or Perish.
- Turaev, V. G. 1988. The Yang–Baxter equation and invariants of links. *Inventiones Mathematicae*, 92(3), 527–553.
- Wu, F. Y. 1993. *Rev. Mod. Phys.* 64, 1099 Published 1 October 1992; Erratum *Rev. Mod. Phys.* 65, 577.
- Wu, F. Y., (1992). Knot theory and statistical mechanics. *Reviews of Modern Physics*, 64(4), 1099–1131.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı:	Volkan KARAHAN
Doğum tarihi:	
Doğum Yeri:	
Uyruğu:	
Adres:	
Tel:	
E-mail:	
Eğitim	
Lise:	Kırşehir Lisesi
Lisans:	Dumlupınar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Yüksek lisans:	Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Topoloji Anabilim Dalı
Yabancı Dil Bilgisi	
İngilizce:	Orta
Üye Olunan Mesleki Kuruluşlar	
Tezden Üretilmiş Yayınlar	
Knots and statistical mechanics Volkan Karahan-Tamer Uğur 21st International Geometry Symposium 17 - 19 July 2025, Erzurum Technical University, TURKİYE (Özet Bildiri)	