

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



4- BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA TZITZEİCA EĞRİLER

Enes ORUÇ
Yüksek Lisans Tezi
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEMMUZ 2025

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

4- BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA TZITZEİCA EĞRİLER

Tez Yazarı
Enes ORUÇ

Danışman
Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ

TEMMUZ 2025
ELAZIĞ

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Başlığı: 4- Boyutlu Lorentz Uzayında Tzitzeica Eğriler
Yazarı: Enes ORUÇ
İlk Teslim Tarihi: 13.06.2025
Savunma Tarihi: 07.07.2025

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

Danışman:	Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	<i>İmza</i> Onayladım
Başkan:	Doç. Dr. Mustafa YENEROĞLU Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım
Üye:	Doç. Dr. Fatma BULUT Bitlis Eren Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun/...../20..... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

İmza

Prof. Dr. Burhan ERGEN
Enstitü Müdürü

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım “4- Boyutlu Lorentz Uzayında Tzitzeica Eğriler ” Başlıklı Yüksek Lisans Tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

07.07.2025

Enes ORUÇ



ÖNSÖZ

Bu çalışmada, 4- boyutlu Öklid uzayında Tzitzeica eğrileri için elde edilen teoriler ve sonuçların karşılıkları 4- boyutlu Lorentz uzayında timelike, spacelike ve null eğriler için ifade ve ispat edildi.

Bu çalışmanın konusunun belirlenmesinden en son aşamasına kadar bana yol gösteren, bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım saygı değer hocam Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ' a teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

Enes ORUÇ
ELAZIĞ, 2025



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ.....	iv
İÇİNDEKİLER	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
SİMGELER	viii
1. GİRİŞ	1
2. LORENTZ UZAYININ TEMEL KAVRAMLARI.....	2
3. TZITZEİCA SPACELİKE VEYA TİMELİKE EĞRİLER	4
4. KÜRESEL SPACELİKE VEYA TİMELİKE TZITZEİCA EĞRİLER.....	9
5. NULL EĞRİLER İÇİN TZITZEİCA EĞRİLERİ	14
6. NULL EĞRİLER İÇİN KÜRESEL TZITZEİCA EĞRİLER.....	19
7. SONUÇ.....	22
KAYNAKLAR.....	23
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

4- Boyutlu Lorentz Uzayında Tzitzeica Eğriler

Enes ORUÇ

Yüksek Lisans Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz 2025, Sayfa: viii + 23

Bu çalışmada; 4- boyutlu Lorentz uzayında timelike, spacelike ve null eğriler için Tzitzeica eğriler tanımlanarak bunlar üzerine yeni teoriler elde edildi. Daha sonra timelike, spacelike ve null eğrilerin küresel olması durumunda Tzitzeica eğrilerinin özellikleri incelendi.

Anahtar Kelimeler: Timelike-Spacelike ve Null eğriler, Lorentz uzayı, Tzitzeica eğriler

ABSTRACT

Tzitzeica Curves in the 4- Dimensional Lorentzian Space

Enes ORUÇ

Master's Thesis

FIRAT UNIVERSITY
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

July 2025, Pages: viii + 23

In this study; Tzitzeica curves were defined for timelike, spacelike and null curves in 4-dimensional Lorentzian space and new theories were obtained on them. Then, the properties of Tzitzeica curves were investigated in the case of spherical timelike, spacelike and null curves.

Keywords: Timelike – Spacelike and Null Curves, Lorentzian Space, Tzitzeica Curves

SİMGELER

$\alpha = \alpha(s)$	: Birim hızlı eğri
L^4	: 4- boyutlu Lorentz uzayı
$\{V_1(s), V_2(s), V_3(s), V_4(s)\}$	: Frenet çatısı
$k_1(s), k_2(s), k_3(s)$	: Frenet eğrilikleri
$S_1^3(r)$	: Lorentz küresi (Sitter space)
$H_0^3(-r)$	: Lorentz hiperbolik uzayı (anti-de Sitter space)
d	: Uzaklık



1. GİRİŞ

Diferansiyel geometricilerin konusu olan Tzitzeica eğrileri uygulamalı matematik ve matematiksel fizik alanlarında da önemli bir yere sahiptir. Bu eğrilerin geometrik özellikleri çok çeşitli alanlarında kullanımına olanak sağlamaktadır. Geometrik açıdan Tzitzeica eğrileri, özel bir tür afin diferansiyel geometri eğrisi olması sebebiyle afin dönüşümler altında belirli invariant özellikler inceler. Ayrıca afin düzlemde belirli simetri ve dönüşüm özelliklerine sahiptir. Bunlara ilaveten diferansiyel geometriciler Tzitzeica eğrilerini yüzeylerin geometrik özelliklerini incelerken ve özel yüzeyler üzerinde eğrilerin davranışlarını tanımlamak için kullanırlar. Matematiksel fizikçiler Tzitzeica eğrilerini özellikle soliton teorisi ve integrable sistemler gibi matematiksel fizik problemlerin üzerinde incelerler ve bazı fiziksel sistemleri modellemek için bu tip eğrilerden yararlanırlar. Belirli dinamik sistemlerin davranışını modellemek veya geometrik problemleri çözmek için de Tzitzeica eğrilerinden yararlanılır. Bu bakış açısıyla Tzitzeica eğrilerinin geometriciler, matematiksel fizikçiler ve matematiksel modellemeciler tarafından önemli bir araç olarak benimsenip sıklıkla kullanıldığı söylenebilir.

Bu eğriler ilk kez Romen matematikçi George Tzitzeica (1873-1939) tarafından ele alındı. Yazar 1907 de Tzitzeica yüzeyleri diye isimlendirilen bir yüzey sınıfını [1], 1911 de ise Tzitzeica eğrileri diye isimlendirilen bir eğri sınıfını tanıttı [2]. Ardından Bila ve Crasmareanu 3-boyutlu Öklid uzayındaki eğriler ve yüzeylerin Tzitzeica eğri ve Tzitzeica yüzey olması için yeni teoriler inşa ettiler [3-5]. Özellikle 3- boyutlu Öklid uzayında eğriler için yapılan çalışmaların 3- boyutlu Lorentz uzayında karşılıklarını araştırmak geometricilerin çalışma alanlarının başında gelmektedir [6-8]. Fakat 3- boyutlu Lorentz uzayında eğri tanımı 3- boyutlu Öklid uzayındakinden farklı olarak spacelike, timelike ve null olarak sınıflandırılır. Bu durum yapılan çalışmaları çeşitlendirmektedir. Bu bakış açısı 3- boyutlu Lorentz uzayında Tzitzeica eğriler üzerine ilginç çalışmalar elde edilmesine imkân tanımıştır [9-11].

Tüm bu çalışmalara ek olarak [12].de. Emrah TUNÇ ve Bengü BAYRAM 4- boyutlu Öklid uzayında Tzitzeica eğriler için üç tip Tzitzeica eğri tanımlayarak diferansiyel geometriciler için çok önemli bir çalışma alanını açmışlardır. Söz konusu çalışmanın ışığında yapılan bu çalışmanın amacı 4- boyutlu Lorentz uzayında timelike ve spacelike eğriler için Tzitzeica eğriler üzerine yeni teorileri ifade ve ispat etmektir.

2. LORENTZ UZAYININ TEMEL KAVRAMLARI

Tanım 2.1. $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ ve $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ $\mathbb{R}^4$ de iki vektör olsun.

$$\langle X, Y \rangle = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

şeklinde tanımlanan iç çarpımı Lorentz (veya Minkowski) iç çarpımı denir.

Böylece $\{\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ ikilisine 4-boyutlu Lorentz (veya 4-boyutlu Minkowski) uzayı denir ve L^4 ile gösterilir [7].

Tanım 2.2. Bir $\vec{x} \in L^4$ vektörüne

$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$ ise space like vektör

$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle < 0$ ise time like vektör

$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$ ve $\vec{x} \neq 0$ ise light like ya da null vektör denir [7].

Tanım 2.3. 4-boyutlu Lorentz uzayı L^4 nin iki $\vec{x}, \vec{y}$ vektörü için $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ ise bu iki vektör Lorentz anlamında diktirler denir [13].

Tanım 2.4. $\vec{x} \in L^4$ için $\vec{x}$ vektörünün normu $\|\vec{x}\|_L = \sqrt{|\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle|}$ olarak tanımlanır [13].

Tanım 2.5. Bir α eğrisine

$\langle \alpha', \alpha' \rangle < 0$ ise time like eğri

$\langle \alpha', \alpha' \rangle > 0$ ise space like eğri

$\langle \alpha', \alpha' \rangle = 0$ ise null eğri adı verilir [13].

Tanım 2.6. $\alpha = \alpha(s)$, L^4 de tanımlı sıfırdan farklı birim hızlı bir eğri olsun. Kabul edelim ki bu eğrinin $\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s), \alpha^{iv}(s), \alpha^v(s)$ türevleri mevcut olsun. Bu durumda $s \in I$ için aşağıdaki bağıntıları sağlayan $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s), V_4(s)\}$ ortonormal çatısına Frenet çatısı ve bu çatının $k_1(s), k_2(s), k_3(s)$ ifadelerine Frenet eğrilikleri denir. Böylece Frenet çatısı

$$V_1'(s) = \varepsilon_2(s)k_1(s)V_2(s),$$

$$V_2'(s) = -\varepsilon_1(s)k_1(s)V_1(s) + \varepsilon_3(s)k_2(s)V_3(s), \quad (2.1)$$

$$V_3'(s) = -\varepsilon_2(s)k_2(s)V_2(s) + \varepsilon_1(s)\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_3(s)V_4(s),$$

$$V_4'(s) = -\varepsilon_3(s)k_3(s)V_3(s),$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $V_1(s), V_2(s), V_3(s)$ ve $V_4(s)$ ler için $\langle V_i(s), V_i(s) \rangle = \varepsilon_i(s)$, $1 \leq i \leq 4$, $\varepsilon_i(s) = \mp 1$ ve $\varepsilon_1(s)\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)\varepsilon_4(s) = -1$ dir [14,15].

$\alpha = \alpha(s)$, L^4 , 4- boyutlu Lorentz uzayında birim hızlı spacelike veya timelike eğri olsun. $\alpha = \alpha(s)$ konum vektörü

$$\alpha(s) = \sum_{i=1}^4 \beta_i(s)V_i(s) \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $1 \leq i \leq 4$, için

$$\beta_i(\mathbf{s}) = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{\varepsilon_i(s)} < \alpha(s), V_i(\mathbf{s}) >, \quad (2.3)$$

olup

$$< \alpha(s), V_1(\mathbf{s}) > = \varepsilon_1(s) \beta_1(\mathbf{s}), \quad (2.4)$$

$$< \alpha(s), V_2(\mathbf{s}) > = \varepsilon_2(s) \beta_2(\mathbf{s}), \quad (2.5)$$

$$< \alpha(s), V_3(\mathbf{s}) > = \varepsilon_3(s) \beta_3(\mathbf{s}), \quad (2.6)$$

ve

$$< \alpha(s), V_4(\mathbf{s}) > = \varepsilon_4(s) \beta_4(\mathbf{s}), \quad (2.7)$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.7. $\vec{x} \in L^4$ olmak üzere

$$S_1^3(r) = \{ x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in L^4 \mid < x, x > = r^2 \}$$

ve

$$H_0^3(-r) = \{ x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in L^4 \mid < x, x > = -r^2 \}$$

şeklinde tanımlanan $S_1^3(r)$ ve $H_0^3(-r)$ ye sırasıyla Lorentz küresi (De Sitter space) ve Lorentz hiperbolik uzayı (anti-de Sitter space) denir [14].

3. TZITZEİCA SPACELİKE VEYA TIMELİKE EĞRİLER

Tanım 3.1. (Birinci tip Tzitzeica spacelike veya timelike eğrisi) L^4 , 4- boyutlu Lorentz uzayında $\alpha = \alpha(s)$ bir spacelike veya timelike eğri ve $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin Frenet çatısı $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s), V_4(s)\}$ ve Frenet eğrilikleri $k_1(s), k_2(s), k_3(s)$ olsun. Eğer $\alpha = \alpha(s)$ birinci tip Tzitzeica spacelike veya timelike eğri ise

$$\frac{k_2(s)}{d_{\{V_1(s), V_2(s), V_4(s)\}}^2} = a_1 \quad (3.1)$$

eşitliği sağlanır.

Burada $d_{\{V_1(s), V_2(s), V_4(s)\}}^2$ keyfi bir $\alpha(s)$ noktasında orijinden $\{V_1(s), V_2(s), V_4(s)\}$ ile gerilen hiperdüzleme olan uzaklığın karesi olup

$$d_{\{V_1(s), V_2(s), V_4(s)\}}^2 = (\langle \alpha(s), V_3(s) \rangle)^2 \quad (3.2)$$

şeklde tanımlanır. Burada $a_1 \neq 0$ reel sabittir.

Tanım 3.2. (İkinci tip Tzitzeica spacelike veya timelike eğrisi) L^4 , 4- boyutlu Lorentz uzayında $\alpha = \alpha(s)$ bir spacelike veya timelike eğri ve $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin Frenet çatısı $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s), V_4(s)\}$ ve Frenet eğrilikleri $k_1(s), k_2(s), k_3(s)$ olsun. Eğer $\alpha = \alpha(s)$ ikinci tip Tzitzeica spacelike veya timelike eğrisi ise

$$\frac{k_1(s)}{d_{\{V_1(s), V_3(s), V_4(s)\}}^2} = a_2 \quad (3.3)$$

eşitliği sağlanır.

Burada $d_{\{V_1(s), V_3(s), V_4(s)\}}^2$ keyfi bir $\alpha(s)$ noktasında orijinden $\{V_1(s), V_3(s), V_4(s)\}$ ile gerilen hiperdüzleme olan uzaklığın karesi olup

$$d_{\{V_1(s), V_3(s), V_4(s)\}}^2 = (\langle \alpha(s), V_2(s) \rangle)^2 \quad (3.4)$$

şeklde tanımlanır. Burada $a_2 \neq 0$ reel sabittir.

Tanım 3.3. (Üçüncü tip Tzitzeica spacelike veya timelike eğrisi) L^4 , 4- boyutlu Lorentz uzayında $\alpha = \alpha(s)$ bir spacelike veya timelike eğri ve $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin Frenet çatısı $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s), V_4(s)\}$ ve Frenet eğrilikleri $k_1(s), k_2(s), k_3(s)$ olsun. Eğer $\alpha = \alpha(s)$ üçüncü tip Tzitzeica spacelike veya timelike eğri ise

$$\frac{k_3(s)}{d_{\{V_1(s), V_2(s), V_3(s)\}}^2} = a_3 \quad (3.5)$$

eşitliği sağlanır.

Burada $d_{\{V_1(s), V_2(s), V_3(s)\}}^2$ keyfi bir $\alpha(s)$ noktasında orijinden $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s)\}$ ile gerilen hiperdüzleme olan uzaklığın karesi olup

$$d_{\{V_1(s), V_2(s), V_3(s)\}}^2 = (\langle \alpha(s), V_4(s) \rangle)^2 \quad (3.6)$$

şeklde tanımlanır. Burada $\alpha_3 \neq 0$ reel sabittir.

Teorem 3.4. $\alpha = \alpha(s)$, 4- boyutlu Lorentz uzayı L^4 de bir spacelike veya timelike eğri, $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s), V_4(s)\}$ eğrinin Frenet çatısı ve $k_1(s), k_2(s), k_3(s)$ eğrinin Frenet eğrilikleri olsun. Eğer $\alpha = \alpha(s)$ spacelike veya timelike eğri birinci tip Tzitzeica spacelike veya timelike eğri ise

$$\varepsilon_3(s)k_2'(s)\beta_3(s) + 2k_2^2(s)\beta_2(s) - 2k_2(s)k_3(s)\beta_4(s) = 0 \quad (3.7)$$

diferensiyel denklemi sağlar.

İspat: Kabul edelim ki $\alpha = \alpha(s)$ birinci tip Tzitzeica spacelike veya timelike eğri olsun. O zaman (3.1) ve (3.2) eşitliklerinden

$$\frac{k_2(s)}{(\langle \alpha(s), V_3(s) \rangle)^2} = \alpha_1 \quad (3.8)$$

yazılabilir. (3.8) eşitliğinin türevi alınır

$$k_2'(s) (\langle \alpha(s), V_3(s) \rangle)^2 - 2k_2(s) \langle \alpha(s), V_3(s) \rangle \langle \alpha(s), V_3'(s) \rangle = 0 \quad (3.9)$$

elde edilir. (3.9) da (2.1) yazılsa

$$k_2'(s) (\langle \alpha(s), V_3(s) \rangle)^2 - 2k_2(s) \langle \alpha(s), V_3(s) \rangle \langle \alpha(s), -\varepsilon_2(s)k_2(s)V_2(s) + \varepsilon_1(s)\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_3(s)V_4(s) \rangle = 0$$

ve düzenlenirse

$$k_2'(s) (\langle \alpha(s), V_3(s) \rangle)^2 + 2\varepsilon_2(s)k_2^2(s) \langle \alpha(s), V_3(s) \rangle \langle \alpha(s), V_2(s) \rangle - 2\varepsilon_1(s)\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_2(s)k_3(s) \langle \alpha(s), V_3(s) \rangle \langle \alpha(s), V_4(s) \rangle = 0 \quad (3.10)$$

elde edilir. Bu son eşitlikte (2.3) kullanılırsa

$$\varepsilon_3^2(s)k_2'(s)\beta_3^2(s) + 2\varepsilon_2^2(s)\varepsilon_3(s)k_2^2(s)\beta_2(s)\beta_3(s) - 2\varepsilon_1(s)\varepsilon_2(s)\varepsilon_3^2(s)k_2(s)k_3(s)\beta_3(s)\beta_4(s) = 0$$

bulunur. Burada $\beta_3(s) \neq 0$ kabul edilirse

$$\varepsilon_3(s)k_2'(s)\beta_3(s) + 2k_2^2(s)\beta_2(s) - 2k_2(s)k_3(s)\beta_4(s) = 0$$

bulunur ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.5. $\alpha = \alpha(s)$, 4- boyutlu Lorentz uzayı L^4 de bir spacelike veya timelike eğri, $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s), V_4(s)\}$ eğrinin Frenet çatısı ve $k_1(s), k_2(s), k_3(s)$ eğrinin Frenet eğrilikleri olsun. Eğer $\alpha = \alpha(s)$ ikinci tip Tzitzeica spacelike veya timelike eğri ise

$$\varepsilon_2(s)k'_1(s)\beta_2(s) + 2k_1^2(s)\beta_1(s) - 2k_1(s)k_2(s)\beta_3(s) = 0 \quad (3.11)$$

diferensiyel denklemi sağlanır.

İspat: Kabul edelim ki $\alpha = \alpha(s)$, ikinci tip Tzitzeica spacelike veya timelike eğri olsun. O zaman (3.3) ve (3.4) eşitliklerinden

$$\frac{k_1(s)}{(\langle \alpha(s), V_2(s) \rangle)^2} = a_2 \quad (3.12)$$

yazılabilir. (3.12) eşitliğinin türevi alınır

$$k'_1(s)(\langle \alpha(s), V_2(s) \rangle)^2 - 2k_1(s) \langle \alpha(s), V_2(s) \rangle \langle \alpha(s), V'_2(s) \rangle = 0 \quad (3.13)$$

ve . (3.13) da (2.1) yazılıp düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned} k'_1(s)(\langle \alpha(s), V_2(s) \rangle)^2 - 2k_1(s) \langle \alpha(s), V_2(s) \rangle \\ \langle \alpha(s), -\varepsilon_1(s)k_1(s)V_1(s) + \varepsilon_3(s)k_2(s)V_3(s) \rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

veya

$$\begin{aligned} k'_1(s) (\langle \alpha(s), V_2(s) \rangle)^2 + 2\varepsilon_1(s)k_1^2(s) \langle \alpha(s), V_2(s) \rangle \langle \alpha(s), V_1(s) \rangle \\ - 2\varepsilon_3(s)k_1(s)k_2(s) \langle \alpha(s), V_2(s) \rangle \langle \alpha(s), V_3(s) \rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

elde edilir. Bu son eşitlikte (2.3) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \varepsilon_2^2(s)k'_1(s)\beta_2^2(s) + 2\varepsilon_1^2(s)\varepsilon_2(s)k_1^2(s)\beta_1(s)\beta_2(s) \\ - 2\varepsilon_2(s)\varepsilon_3^2(s)k_2(s)k_3(s)\beta_2(s)\beta_3(s) = 0 \end{aligned}$$

bulunur. $\beta_2(s) \neq 0$ kabul edilirse

$$\varepsilon_2(s)k'_1(s)\beta_2(s) + 2k_1^2(s)\beta_1(s) - 2k_1(s)k_2(s)\beta_3(s) = 0$$

bulunur ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.6. $\alpha = \alpha(s)$, 4- boyutlu Lorentz uzayı L^4 de bir spacelike veya timelike eğri, $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s), V_4(s)\}$ eğrinin Frenet çatısı ve $k_1(s), k_2(s), k_3(s)$ eğrinin Frenet eğrilikleri olsun. Eğer $\alpha = \alpha(s)$ spacelike veya timelike eğri üçüncü tip Tzitzeica spacelike veya timelike eğri ise

$$\varepsilon_4(s)k'_3(s)\beta_4(s) + 2k_3^2(s)\beta_3(s) = 0 \quad (3.15)$$

diferensiyel denklemi sağlanır.

İspat: Kabul edelim ki $\alpha = \alpha(s)$ üçüncü tip Tzitzeica spacelike veya timelike eğri olsun. O zaman (3.5) ve (3.6) eşitliklerinden

$$\frac{k_3(s)}{(\langle \alpha(s), V_4(s) \rangle)^2} = a_3 \quad (3.16)$$

yazılabilir. (3.16) eşitliğinin türevi alınır

$$k'_3(s) (\langle \alpha(s), V_4(s) \rangle)^2 - 2k_3(s) \langle \alpha(s), V_4(s) \rangle \langle \alpha(s), V'_4(s) \rangle = 0 \quad (3.17)$$

elde edilir. (3.17) da (2.1) yazılıp düzenleme yapılırsa

$$k'_3(s) (\langle \alpha(s), V_4(s) \rangle)^2 + 2\varepsilon_3(s)k_3^2(s) \langle \alpha(s), V_3(s) \rangle \langle \alpha(s), V_4(s) \rangle = 0 \quad (3.18)$$

elde edilir. Bu son eşitlikte (2.3) kullanılırsa

$$\varepsilon_4^2(s)k'_3(s)\beta_4^2(s) + 2\varepsilon_3^2(s)\varepsilon_4(s)k_3^2(s)\beta_3(s)\beta_4(s) = 0$$

veya gerekli kısaltmalar sonucu

$$\varepsilon_4(s)k'_3(s)\beta_4(s) + 2k_3^2(s)\beta_3(s) = 0$$

bulunur ki bu da ispatı tamamlar.

Örnek 3.7 $\alpha = \alpha(s) = (\sqrt{2}\text{shs}, \sqrt{2}\text{chs}, \text{sins}, \text{coss})$ eğrisini göz önüne alalım. $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin türevi:

$$\alpha'(s) = (\sqrt{2}\text{chs}, \sqrt{2}\text{shs}, \text{coss}, -\text{sins})$$

ve

$$\begin{aligned} \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle &= \langle (\sqrt{2}\text{chs}, \sqrt{2}\text{shs}, \text{coss}, -\text{sins}), (\sqrt{2}\text{chs}, \sqrt{2}\text{shs}, \text{coss}, -\text{sins}) \rangle \\ &= -2\text{ch}^2s + 2\text{sh}^2s + \text{cos}^2s + \text{sin}^2s = -1 \end{aligned}$$

olduğundan $\alpha = \alpha(s)$ eğrisi timelike bir eğridir. Buradan

$$\|\alpha'(s)\| = \sqrt{|\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle|} = 1$$

ve

$$V_1(s) = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|}$$

den

$$V_1(s) = (\sqrt{2}\text{chs}, \sqrt{2}\text{shs}, \text{coss}, -\text{sins})$$

bulunur. Buradan hareketle

$$V_2(s) = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{shs}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{chs}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{sins}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{coss} \right),$$

$$V_3(s) = (-\text{chs}, -\text{shs}, -\sqrt{2}\text{coss}, \sqrt{2}\text{sins})$$

ve

$$V_4(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \text{shs}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{chs}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{sins}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{coss} \right)$$

elde edilir. Ayrıca eğrilikleri

$$k_1(s) = \sqrt{3}, \quad k_2(s) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{ ve } k_3(s) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

olur ki o halde eğri sabit eğrilikli bir timelike eğridir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \langle \alpha(s), V_2(s) \rangle &= \langle (\sqrt{2}\text{shs}, \sqrt{2}\text{chs}, \text{sins}, \text{coss}), \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{shs}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{chs}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{sins}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{coss} \right) \rangle \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \text{sh}^2 s + \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ch}^2 s - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin^2 s - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos^2 s \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} (-\text{sh}^2 s + \text{ch}^2 s) - \frac{1}{\sqrt{3}} (\sin^2 s + \cos^2 s) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ (\langle \alpha(s), V_2(s) \rangle)^2 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \langle \alpha(s), V_3(s) \rangle &= \langle (\sqrt{2}\text{shs}, \sqrt{2}\text{chs}, \text{sins}, \text{coss}), (-\text{chs}, -\text{shs}, -\sqrt{2}\text{coss}, \sqrt{2}\text{sins}) \rangle \\ &= \sqrt{2}\text{shschs} - \sqrt{2}\text{shschs} - \sqrt{2}\text{coss sins} + \sqrt{2}\text{coss sins} = 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \langle \alpha(s), V_4(s) \rangle &= \\ \langle (\sqrt{2}\text{shs}, \sqrt{2}\text{chs}, \text{sins}, \text{coss}), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \text{shs}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{chs}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{sins}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{coss} \right) \rangle &= \\ = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{sh}^2 s - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{ch}^2 s - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin^2 s - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cos^2 s &= \\ = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} (\text{ch}^2 s - \text{sh}^2 s) - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} (\sin^2 s + \cos^2 s) &= \\ = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$(\langle \alpha(s), V_4(s) \rangle)^2 = \frac{8}{3}$$

bulunur. O halde (3.8) eşitliğinden $a_2 = 3\sqrt{3}$ olacağı için eğri ikinci tip Tzitzeica timelike eğri v
(3.16) eşitliğinden $a_3 = \frac{-3}{8\sqrt{3}}$ olacağı için eğri üçüncü tip Tzitzeica timelike eğridir.

4. KÜRESEL SPACELİKE VEYA TİMELİKE TZITZEİCA EĞRİLER

Teorem 4.1. $\alpha = \alpha(s)$, 4- boyutlu Lorentz uzayı L^4 de bir spacelike veya timelike eğri, $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s), V_4(s)\}$ eğrinin Frenet çatısı ve $k_1(s), k_2(s), k_3(s)$ eğrinin Frenet eğrilikleri olsun. Kabul edelim ki $\alpha(s)$ küresel eğri olsun o zaman

$$\beta_1(s) = 0, \quad (4.1)$$

$$\beta_2(s) = - \frac{\varepsilon_1(s)}{\varepsilon_2(s)k_1(s)} \quad (4.2)$$

$$\beta_3(s) = \frac{\varepsilon_1(s)k'_1(s)}{\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_1^2(s)k_2(s)}, \quad (4.3)$$

ve

$$\beta_4(s) = \frac{1}{k_3(s)} \left[\frac{k''_1(s)}{k_1^2(s)k_2(s)} - \frac{2(k'_1(s))^2}{k_1^3(s)k_2(s)} - \frac{k'_1(s)k'_2(s)}{k_1^2(s)k_2^2(s)} \right] - \frac{k_2(s)}{\varepsilon_1(s)\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_1(s)k_3(s)} \quad (4.4)$$

İspat: Kabul edelim ki $\alpha(s)$ spacelike veya timelike eğrisi küresel eğri olsun. O zaman

$$\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle = r^2 \quad (4.5)$$

eşitliği vardır. Bu ifadenin her iki yanının türevi alınır

$$\langle \alpha(s), V_1(s) \rangle = 0 \quad (4.6)$$

ve (2.4) ile birlikte düşünülürse

$$\langle \alpha(s), V_1(s) \rangle = 0 = \beta_1(s) \quad (4.7)$$

elde edilir. (4.7) nin türevi alınır

$$\langle V_1(s), V_1(s) \rangle + \langle \alpha(s), V'_1(s) \rangle = 0 \quad (4.8)$$

ve (2.1) kullanılıp gerekli düzenleme yapılırsa

$$\langle \alpha(s), V_2(s) \rangle = - \frac{\varepsilon_1(s)}{\varepsilon_2(s)k_1(s)} \quad (4.9)$$

ve (2.5) ile birlikte düşünülürse

$$\beta_2(s) = - \frac{\varepsilon_1(s)}{\varepsilon_2(s)k_1(s)}$$

bulunur. (4.9) nin türevi alınır

$$< V_1(s), V_2(s) > + < \alpha(s), V_2'(s) > = \frac{\varepsilon_1(s)k_1'(s)}{\varepsilon_2(s)k_1^2(s)} \quad (4.10)$$

ve (2.1) kullanılıp gerekli düzenleme yapılırsa

$$< \alpha(s), -\varepsilon_1(s)k_1(s)V_1(s) + \varepsilon_3(s)k_2(s)V_3(s) > = \frac{\varepsilon_1(s)k_1'(s)}{\varepsilon_2(s)k_1^2(s)}$$

veya

$$-\varepsilon_1(s)k_1(s) < \alpha(s), V_1(s) > + \varepsilon_3(s)k_2(s) < \alpha(s), V_3(s) > = \frac{\varepsilon_1(s)k_1'(s)}{\varepsilon_2(s)k_1^2(s)}$$

bulunur. Bu son ifadede (4.7) eşitliği yerine yazılırsa

$$< \alpha(s), V_3(s) > = \frac{\varepsilon_1(s)k_1'(s)}{\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_1^2(s)k_2(s)} \quad (4.11)$$

elde edilir. (4.11) ve (2.6) ile birlikte düşünülürse

$$\beta_3(s) = \frac{\varepsilon_1(s)k_1'(s)}{\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_1^2(s)k_2(s)}$$

bulunur. Son olarak (4.11) in her iki tarafının türevi alınır

$$< \alpha(s), V_3'(s) > = \frac{\varepsilon_1(s)\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_1''(s)k_1^2(s)k_2(s) - 2\varepsilon_1(s)\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)(k_1'(s))^2 k_1(s)k_2(s) - \varepsilon_1(s)\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_1'(s)k_1^2(s)k_2'(s)}{(\varepsilon_2(s))^2(\varepsilon_3(s))^2 k_1^4(s)k_2^2(s)}$$

ve gerekli sadeleştirmelerle

$$< \alpha(s), V_3'(s) > = \frac{\varepsilon_1(s)k_1''(s)k_1^2(s)k_2(s) - 2\varepsilon_1(s)(k_1'(s))^2 k_1(s)k_2(s) - \varepsilon_1(s)k_1'(s)k_1^2(s)k_2'(s)}{\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_1^4(s)k_2^2(s)}$$

bulunur. Bu ifade daha sade bir formda

$$< \alpha(s), V_3'(s) > = \frac{\varepsilon_1(s)k_1''(s)}{\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_1^2(s)k_2(s)} - 2 \frac{\varepsilon_1(s)(k_1'(s))^2}{\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_1^3(s)k_2(s)} - \frac{\varepsilon_1(s)k_1'(s)k_2'(s)}{\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_1^2(s)k_2^2(s)}$$

veya

$$< \alpha(s), V_3'(s) > = \frac{\varepsilon_1(s)}{\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)} \left[\frac{k_1''(s)}{k_1^2(s)k_2(s)} - \frac{2(k_1'(s))^2}{k_1^3(s)k_2(s)} - \frac{k_1'(s)k_2'(s)}{k_1^2(s)k_2^2(s)} \right]$$

yazılır. Bu son eşitlikte (2.1) kullanılırsa

$$\begin{aligned} & -\varepsilon_2(s)k_2(s) < \alpha(s), V_2(s) > + \varepsilon_1(s)\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_3(s) < \alpha(s), V_4(s) > \\ & = \frac{\varepsilon_1(s)}{\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)} \left[\frac{k_1''(s)}{k_1^2(s)k_2(s)} - \frac{2(k_1'(s))^2}{k_1^3(s)k_2(s)} - \frac{k_1'(s)k_2'(s)}{k_1^2(s)k_2^2(s)} \right] \end{aligned} \quad (4.12)$$

elde edilir. (4.12) de (4.9) göz önüne alınır

$$-\varepsilon_2(s)k_2(s) \left(-\frac{\varepsilon_1(s)}{\varepsilon_2(s)k_1(s)} \right) + \varepsilon_1(s)\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_3(s) < \alpha(s), V_4(s) >$$

$$= \frac{\varepsilon_1(s)}{\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)} \left[\frac{k_1''(s)}{k_1^2(s)k_2(s)} - \frac{2(k_1'(s))^2}{k_1^3(s)k_2(s)} - \frac{k_1'(s)k_2'(s)}{k_1^2(s)k_2^2(s)} \right]$$

sonucuna varılır. Gerekli sadeleştirme sonucu (yani $\varepsilon_1(s)$ ler sadeleştirilirse)

$$\left(\frac{\varepsilon_2(s)k_2(s)}{\varepsilon_2(s)k_1(s)} \right) + \varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_3(s) < \alpha(s), V_4(s) >$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)} \left[\frac{k_1''(s)}{k_1^2(s)k_2(s)} - \frac{2(k_1'(s))^2}{k_1^3(s)k_2(s)} - \frac{k_1'(s)k_2'(s)}{k_1^2(s)k_2^2(s)} \right]$$

ve eşitlik düzenlenirse

$$< \alpha(s), V_4(s) >$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_2^2(s)\varepsilon_3^2(s)k_3(s)\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)} \left[\frac{k_1''(s)}{k_1^2(s)k_2(s)} - \frac{2(k_1'(s))^2}{k_1^3(s)k_2(s)} - \frac{k_1'(s)k_2'(s)}{k_1^2(s)k_2^2(s)} \right] - \left(\frac{k_2(s)}{\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_3(s)k_1(s)} \right)$$

$$\varepsilon_2^2(s) = 1, \varepsilon_3^2(s) = 1$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$< \alpha(s), V_4(s) > = \frac{1}{k_3(s)} \left[\frac{k_1''(s)}{k_1^2(s)k_2(s)} - \frac{2(k_1'(s))^2}{k_1^3(s)k_2(s)} - \frac{k_1'(s)k_2'(s)}{k_1^2(s)k_2^2(s)} \right]$$

$$- \frac{k_2(s)}{\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_1(s)k_3(s)}$$

bulunur ve nihayet (2.7) ile birlikte düşünülürse

$$\beta_4(s) = \frac{1}{k_3(s)} \left[\frac{k_1''(s)}{k_1^2(s)k_2(s)} - \frac{2(k_1'(s))^2}{k_1^3(s)k_2(s)} - \frac{k_1'(s)k_2'(s)}{k_1^2(s)k_2^2(s)} \right]$$

$$- \frac{k_2(s)}{\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_1(s)k_3(s)}$$

bulunur ki bu da ispatı tamamlar.

(4.2), (4.3) ve (4.4) eşitlikleri (3.7) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\varepsilon_3(s)k_2'(s)\beta_3(s) + 2k_2^2(s)\beta_2(s) - 2k_2(s)k_3(s)\beta_4(s) = 0$$

$$\varepsilon_3(s)k_2'(s) \left(\frac{\varepsilon_1(s)k_1'(s)}{\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_1^2(s)k_2(s)} \right) + 2k_2^2(s) \left(- \frac{\varepsilon_1(s)}{\varepsilon_2(s)k_1(s)} \right)$$

$$- 2k_2(s)k_3(s) \left(\frac{1}{k_3(s)} \left[\frac{k_1''(s)}{k_1^2(s)k_2(s)} - \frac{2(k_1'(s))^2}{k_1^3(s)k_2(s)} - \frac{k_1'(s)k_2'(s)}{k_1^2(s)k_2^2(s)} \right] - \frac{k_2(s)}{\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_1(s)k_3(s)} \right) = 0$$

veya

$$\left(\frac{\varepsilon_1(s)k_1'(s)k_2'(s)}{\varepsilon_2(s)k_1^2(s)k_2(s)} \right) - \left(\frac{2\varepsilon_1(s)k_2^2(s)}{\varepsilon_2(s)k_1(s)} \right)$$

$$- \left(\frac{2k_2(s)k_3(s)}{k_3(s)} \left[\frac{k_1''(s)}{k_1^2(s)k_2(s)} - \frac{2(k_1'(s))^2}{k_1^3(s)k_2(s)} - \frac{k_1'(s)k_2'(s)}{k_1^2(s)k_2^2(s)} \right] - \frac{2k_2(s)k_3(s)k_2(s)}{\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_1(s)k_3(s)} \right) = 0$$

olur. Buradan

$$\left(\frac{\varepsilon_1(s)k_1'(s)k_2'(s)}{\varepsilon_2(s)k_1^2(s)k_2(s)} \right) - \left(\frac{2\varepsilon_1(s)k_2^2(s)}{\varepsilon_2(s)k_1(s)} \right) - \left(2k_2(s) \left[\frac{k_1''(s)}{k_1^2(s)k_2(s)} - \frac{2(k_1'(s))^2}{k_1^3(s)k_2(s)} - \frac{k_1'(s)k_2'(s)}{k_1^2(s)k_2^2(s)} \right] - \frac{2k_2^2(s)}{\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_1(s)} \right) = 0$$

veya

$$\left(\frac{\varepsilon_1(s)k_1'(s)k_2'(s)}{\varepsilon_2(s)k_1^2(s)k_2(s)} \right) - \left(\frac{2\varepsilon_1(s)k_2^2(s)}{\varepsilon_2(s)k_1(s)} \right) - \left(\left[-\frac{2k_1''(s)}{k_1^2(s)} + \frac{2(k_1'(s))^2}{k_1^3(s)} + \frac{2k_1'(s)k_2'(s)}{k_1^2(s)k_2(s)} \right] + \frac{2k_2^2(s)}{\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_1(s)} \right) = 0$$

ya da

$$\frac{\varepsilon_1(s)k_1'(s)k_2'(s)}{\varepsilon_2(s)k_1^2(s)k_2(s)} - \frac{2\varepsilon_1(s)k_2^2(s)}{\varepsilon_2(s)k_1(s)} - \frac{2k_1''(s)}{k_1^2(s)} + \frac{2(k_1'(s))^2}{k_1^3(s)} + \frac{2k_1'(s)k_2'(s)}{k_1^2(s)k_2(s)} + \frac{2k_2^2(s)}{\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_1(s)} = 0$$

ve gerekli işlemler sonucunda

$$-\frac{2k_1''(s)}{\varepsilon_1(s)k_1^2(s)} + \frac{2(k_1'(s))^2}{k_1^3(s)} + \frac{(\varepsilon_1(s) + 1)k_1'(s)k_2'(s)}{\varepsilon_2(s)k_1^2(s)k_2(s)} + \frac{2(-\varepsilon_1(s) + 1)k_2^2(s)}{\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_1(s)} = 0$$

elde edilir. Paydalar eşitlenirse

$$-\frac{2\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_1(s)k_2(s)k_1''(s)}{\varepsilon_1(s)\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_1^3(s)k_2(s)} + \frac{2\varepsilon_1(s)\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_2(s)(k_1'(s))^2}{\varepsilon_1(s)\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_2(s)} + \frac{(\varepsilon_1(s) + 1)\varepsilon_1(s)\varepsilon_3(s)k_1(s)k_1'(s)k_2'(s)}{\varepsilon_1(s)\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_2(s)} + \frac{2(-\varepsilon_1(s) + 1)\varepsilon_1(s)k_1^2(s)k_2(s)k_2^2(s)}{\varepsilon_1(s)\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_2(s)} = 0$$

bulunur. Böylece

$$-2\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_1(s)k_2(s)k_1''(s) + 2\varepsilon_1(s)\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_2(s)(k_1'(s))^2 + (\varepsilon_1(s) + 1)\varepsilon_1(s)\varepsilon_3(s)k_1(s)k_1'(s)k_2'(s) + 2(-\varepsilon_1(s) + 1)\varepsilon_1(s)k_1^2(s)k_2^3(s) = 0$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.2. $\alpha = \alpha(s)$, 4- boyutlu Lorentz uzayı L^4 de bir spacelike veya timelike eğri, $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s), V_4(s)\}$ eğrinin Frenet çatısı ve $k_1(s), k_2(s), k_3(s)$ eğrinin Frenet eğrilikleri olsun. Eğer $\alpha = \alpha(s)$ küresel birinci tip Tzitzeica spacelike veya timelike eğri ise

$$-2\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_1(s)k_2(s)k_1''(s) + 2\varepsilon_1(s)\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_2(s)(k_1'(s))^2 + (\varepsilon_1(s) + 1)\varepsilon_1(s)\varepsilon_3(s)k_1(s)k_1'(s)k_2'(s) + 2(-\varepsilon_1(s) + 1)\varepsilon_1(s)k_1^2(s)k_2^3(s) = 0$$

diferensiyel denklemi sağlar.

Sonuç.4.3. Teorem 4.2 de özel olarak $k_1(s)$ sabitse $k_2(s) = 0$ dır

(4.1), (4.2) ve (4.3) eşitlikleri (3.11) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\varepsilon_2(s)k_1'(s)\beta_2(s) + 2k_1^2(s)\beta_1(s) - 2k_1(s)k_2(s)\beta_3(s) = 0$$

$$\varepsilon_2(s)k_1'(s)\left(-\frac{\varepsilon_1(s)}{\varepsilon_2(s)k_1(s)}\right) + 2k_1^2(s)0 - 2k_1(s)k_2(s)\left(\frac{\varepsilon_1(s)k_1'(s)}{\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_1^2(s)k_2(s)}\right) = 0$$

veya

$$\left(-\frac{k_1'(s)}{k_1(s)}\right) - \left(\frac{2k_1'(s)}{\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_1(s)}\right) = 0$$

$\varepsilon_2(s) = \varepsilon_3(s)$ olduğu göz önüne alınırsa $3k_1'(s) = 0$ ve $k_1(s) = \text{sabit}$ elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.4. $\alpha = \alpha(s)$, 4- boyutlu Lorentz uzayı L^4 de bir spacelike veya timelike eğri, $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s), V_4(s)\}$ eğrinin Frenet çatısı ve $k_1(s), k_2(s), k_3(s)$ eğrinin Frenet eğrilikleri olsun. Eğer $\alpha = \alpha(s)$ küresel ikinci tip Tzitzeica spacelike veya timelike eğri ve $\varepsilon_2(s) = \varepsilon_3(s)$ ise $k_1(s) = \text{sabit}$ olur.

(4.3) ve (4.4) eşitlikleri (3.15) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\varepsilon_4(s)k_3'(s)\beta_4(s) + 2k_3^2(s)\beta_3(s) = 0$$

$$\varepsilon_4(s)k_3'(s)\left[\frac{1}{k_3(s)}\left[\frac{k_1''(s)}{k_1^2(s)k_2(s)} - \frac{2(k_1'(s))^2}{k_1^3(s)k_2(s)} - \frac{k_1'(s)k_2'(s)}{k_1^2(s)k_2^2(s)}\right] - \frac{k_2(s)}{\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_1(s)k_3(s)}\right] + 2k_3^2(s)\left[\frac{\varepsilon_1(s)k_1'(s)}{\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_1^2(s)k_2(s)}\right] = 0$$

veya

$$\left[\frac{\varepsilon_4(s)k_3'(s)}{k_3(s)}\left[\frac{k_1''(s)}{k_1^2(s)k_2(s)} - \frac{2(k_1'(s))^2}{k_1^3(s)k_2(s)} - \frac{k_1'(s)k_2'(s)}{k_1^2(s)k_2^2(s)}\right] - \frac{\varepsilon_4(s)k_3'(s)k_2(s)}{\varepsilon_1(s)\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_1(s)k_3(s)}\right] + \left[\frac{2\varepsilon_1(s)k_3^2(s)k_1'(s)}{\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_1^2(s)k_2(s)}\right] = 0$$

diferensiyel denklemi sağlanır. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.5. $\alpha = \alpha(s)$, 4- boyutlu Lorentz uzayı L^4 de bir spacelike veya timelike eğri, $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s), V_4(s)\}$ eğrinin Frenet çatısı ve $k_1(s), k_2(s), k_3(s)$ eğrinin Frenet eğrilikleri olsun. Eğer $\alpha = \alpha(s)$ küresel üçüncü tip Tzitzeica spacelike veya timelike eğri ise

$$\left[\frac{\varepsilon_4(s)k_3'(s)}{k_3(s)}\left[\frac{k_1''(s)}{k_1^2(s)k_2(s)} - \frac{2(k_1'(s))^2}{k_1^3(s)k_2(s)} - \frac{k_1'(s)k_2'(s)}{k_1^2(s)k_2^2(s)}\right] - \frac{\varepsilon_4(s)k_3'(s)k_2(s)}{\varepsilon_1(s)\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_1(s)k_3(s)}\right] + \left[\frac{2\varepsilon_1(s)k_3^2(s)k_1'(s)}{\varepsilon_2(s)\varepsilon_3(s)k_1^2(s)k_2(s)}\right] = 0$$

diferensiyel denklemi sağlanır.

5. NULL EĞRİLER İÇİN TZITZEİCA EĞRİLERİ

Eğriler, Öklid uzayından farklı olarak Lorentz uzayında üç farklı tip olarak spacelike timelike eğri veya null eğriler olarak tanımlanır. Spacelike ve timelike eğriler üzerine inşaa edilen teoriler Öklid uzayında incelenenlerle benzer sonuçlar vermesine rağmen null eğriler çok daha ilginç sonuçlar vermektedir. Bu sebepten ötürü null eğriler teorisine çalışmak birtakım sıkıntıları da beraberinde getirmektedir.

Çalışmanın bu bölümünde 3.bölümde elde edilen teoriler null eğriler için yapılmaya çalışılacaktır.

Tanım 5.1. $\alpha = \alpha(s)$, L^4 de birim hızlı bir null eğri olsun. Bu durumda

$\alpha = \alpha(s)$ nin teğet vektör alanı $V_1(s) = \alpha'(s)$ bir null vektör alanı,

$\alpha = \alpha(s)$ nin normal vektör alanı $V_2(s) = V_1'(s)$ bir spacelike vektör alanı,

$\alpha = \alpha(s)$ nin birinci binormal vektör alanı $V_3(s)$ bir null vektör alanı,

ve $\alpha = \alpha(s)$ nin ikinci binormal vektör alanı $V_4(s)$ bir spacelike vektör alanı olmak üzere ayrıca $\alpha = \alpha(s)$ nul eğrisinin birinci eğrilik, ikinci eğrilik ve üçüncü eğrilikleri, sırasıyla, $k_1(s), k_2(s)$ ve $k_3(s)$ olmak üzere Frenet formülü,

$$V_1'(s) = k_1(s)V_2(s),$$

$$V_2'(s) = k_2(s)V_1(s) - k_1(s)V_3(s), \quad (5.1)$$

$$V_3'(s) = -k_2(s)V_2(s) + k_3(s)V_4(s),$$

$$V_4'(s) = -k_3(s)V_1(s),$$

şeklinde tanımlanır [16]. Burada $V_1(s), V_2(s), V_3(s)$ ve $V_4(s)$ ler için

$$\langle V_1(s), V_1(s) \rangle = 0, \langle V_1(s), V_2(s) \rangle = 0, \langle V_1(s), V_3(s) \rangle = 1, \langle V_1(s), V_4(s) \rangle = 0,$$

$$\langle V_2(s), V_1(s) \rangle = 0, \langle V_2(s), V_2(s) \rangle = 1, \langle V_2(s), V_3(s) \rangle = 0, \langle V_2(s), V_4(s) \rangle = 0,$$

$$\langle V_3(s), V_1(s) \rangle = 1, \langle V_3(s), V_2(s) \rangle = 0, \langle V_3(s), V_3(s) \rangle = 0, \langle V_3(s), V_4(s) \rangle = 0 \quad (5.2)$$

ve

$$\langle V_4(s), V_1(s) \rangle = 0, \langle V_4(s), V_2(s) \rangle = 0, \langle V_4(s), V_3(s) \rangle = 0, \langle V_4(s), V_4(s) \rangle = 1$$

bağıntıları sağlanır.

$\alpha = \alpha(s)$, L^4 , 4- boyutlu Lorentz uzayında birim hızlı null eğri olsun. $\alpha = \alpha(s)$ konum vektörü

$$\alpha(s) = \sigma_1(s)V_1(s) + \sigma_2(s)V_2(s) + \sigma_3(s)V_3(s) + \sigma_4(s)V_4(s) \quad (5.3)$$

şeklinde tanımlanır. Eğer (5.3) ifadesi sırasıyla, $V_1(s)$, $V_2(s)$, $V_3(s)$ ve $V_4(s)$ ile iç çarpıma tabi tutulup (5.2) eşitlikleri gözönüne alınırsa

$$\langle \alpha(s), V_1(s) \rangle = \sigma_3(s), \quad (5.4)$$

$$\langle \alpha(s), V_2(s) \rangle = \sigma_2(s), \quad (5.5)$$

$$\langle \alpha(s), V_3(s) \rangle = \sigma_1(s), \quad (5.6)$$

ve

$$\langle \alpha(s), V_4(s) \rangle = \sigma_4(s), \quad (5.7)$$

şeklinde ifade edilir. Son olarak (5.4), (5.5), (5.6) ve (5.7) eşitlikleri (5.3) de yazılırsa

$$\begin{aligned} \alpha(s) = & \langle \alpha(s), V_3(s) \rangle V_1(s) + \langle \alpha(s), V_2(s) \rangle V_2(s) + \langle \alpha(s), V_3(s) \rangle V_3(s) \\ & + \langle \alpha(s), V_4(s) \rangle V_4(s) \end{aligned} \quad (5.8)$$

olarak yeni bir formda yazılır.

Tanım 5.2. (Birinci tip Tzitzeica null eğrisi) L^4 , 4- boyutlu Lorentz uzayında $\alpha = \alpha(s)$ bir null eğri ve $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin Frenet çatısı $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s), V_4(s)\}$ ve Frenet eğrilikleri $k_1(s), k_2(s), k_3(s)$ olsun. Eğer $\alpha = \alpha(s)$ birinci tip Tzitzeica null eğrisi ise

$$\frac{k_2(s)}{d_{\{V_1(s), V_2(s), V_4(s)\}}^2} = a_1 \quad (5.9)$$

eşitliği sağlanır.

Burada $d_{\{V_1(s), V_2(s), V_4(s)\}}^2$ keyfi bir $\alpha(s)$ noktasında orijinden $\{V_1(s), V_2(s), V_4(s)\}$ ile gerilen hiperdüzleme olan uzaklığın karesi olup

$$d_{\{V_1(s), V_2(s), V_4(s)\}}^2 = (\langle \alpha(s), V_3(s) \rangle)^2 \quad (5.10)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $a_1 \neq 0$ reel sabittir.

Tanım 5.3. (İkinci tip Tzitzeica null eğrisi) L^4 , 4- boyutlu Lorentz uzayında $\alpha = \alpha(s)$ bir null eğri ve $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin Frenet çatısı $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s), V_4(s)\}$ ve Frenet eğrilikleri $k_1(s), k_2(s), k_3(s)$ olsun. Eğer $\alpha = \alpha(s)$ ikinci tip Tzitzeica null eğrisi ise

$$\frac{k_1(s)}{d_{\{V_1(s), V_3(s), V_4(s)\}}^2} = a_2 \quad (5.11)$$

eşitliği sağlanır.

Burada $d_{\{V_1(s), V_3(s), V_4(s)\}}^2$ keyfi bir $\alpha(s)$ noktasında orijinden $\{V_1(s), V_3(s), V_4(s)\}$ ile gerilen hiperdüzleme olan uzaklığın karesi olup

$$d_{\{V_1(s), V_3(s), V_4(s)\}}^2 = (\langle \alpha(s), V_2(s) \rangle)^2 \quad (5.12)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $a_2 \neq 0$ reel sabittir.

Tanım 5.4. (Üçüncü tip Tzitzeica null eğrisi) L^4 , 4- boyutlu Lorentz uzayında $\alpha = \alpha(s)$ bir null eğri ve $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin Frenet çatısı $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s), V_4(s)\}$ ve Frenet eğrilikleri $k_1(s), k_2(s), k_3(s)$ olsun. Eğer $\alpha = \alpha(s)$ üçüncü tip Tzitzeica null eğrisi ise

$$\frac{k_3(s)}{d_{\{V_1(s), V_2(s), V_3(s)\}}^2} = a_3 \quad (5.13)$$

eşitliği sağlanır.

Burada $d_{\{V_1(s), V_2(s), V_3(s)\}}^2$ keyfi bir $\alpha(s)$ noktasında orijinden $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s)\}$ ile gerilen hiperdüzleme olan uzaklığın karesi olup

$$d_{\{V_1(s), V_2(s), V_3(s)\}}^2 = (\langle \alpha(s), V_4(s) \rangle)^2 \quad (5.14)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $a_3 \neq 0$ reel sabittir.

$\alpha = \alpha(s)$, L^4 de birim hızlı $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s)\}$ Frenet çatı ve $\{k_1(s), k_2(s), k_3(s)\}$ Frenet eğrilikli bir null eğri olsun. O zaman $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin birinci eğriliği $k_1(s) = 1$ veya $k_1(s) = 0$ dır [16]. Bu çalışma boyunca $k_1(s) = 1$ olduğu gözönüne alınacaktır. Böylece (5.1) denklemleri:

$$V_1'(s) = V_2(s),$$

$$V_2'(s) = k_2(s)V_1(s) - V_3(s), \quad (5.15)$$

$$V_3'(s) = -k_2(s)V_2(s) + k_3(s)V_4(s),$$

$$V_4'(s) = -k_3(s)V_1(s),$$

Teorem 5.5. $\alpha = \alpha(s)$, 4- boyutlu Lorentz uzayı L^4 de bir null eğri, $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s), V_4(s)\}$ eğrinin Frenet çatısı ve $k_1(s) = 1, k_2(s), k_3(s)$ eğrinin Frenet eğrilikleri olsun. Eğer $\alpha = \alpha(s)$ birinci tip Tzitzeica null eğri ise aşağıdaki durumlar vardır.

$$\sigma_1(s) \neq 0 \text{ ve } k_2'(s)\sigma_1(s) + 2k_2^2(s)\sigma_2(s) - 2k_2(s)k_3(s)\sigma_4(s) = 0$$

$$\sigma_1(s) = 0 \text{ ve } 2k_2^2(s)\sigma_2(s) - 2k_2(s)k_3(s)\sigma_4(s) \neq 0$$

$$\sigma_1(s) = 0 \text{ ve}$$

$$2k_2^2(s)\sigma_2(s) - 2k_2(s)k_3(s)\sigma_4(s) = 0 \quad (5.16)$$

İspat: Kabul edelim ki $\alpha = \alpha(s)$ null eğri birinci tip Tzitzeica null eğri olsun. O zaman (5.9) ve (5.10) eşitliklerinden

$$\frac{k_2(s)}{(\langle \alpha(s), V_3(s) \rangle)^2} = a_1 \quad (5.17)$$

yazılabilir. (5.17) eşitliğinin türevi alınır

$$k'_2(s)(\langle \alpha(s), V_3(s) \rangle)^2 - 2k_2(s) \langle \alpha(s), V_3(s) \rangle \langle \alpha(s), V'_3(s) \rangle = 0 \quad (5.18)$$

elde edilir. (5.18) da (5.15) yazılıp düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned} k'_2(s)(\langle \alpha(s), V_3(s) \rangle)^2 - 2k_2^2(s) \langle \alpha(s), V_3(s) \rangle \langle \alpha(s), V_2(s) \rangle \\ + 2k_2(s)k_3(s) \langle \alpha(s), V_3(s) \rangle \langle \alpha(s), V_4(s) \rangle = 0 \end{aligned} \quad (5.19)$$

elde edilir. (5.19) da (5.5), (5.6) ve (5.7) eşitlikleri kullanılırsa

$$k'_2(s)\sigma_1^2(s) + 2k_2^2(s)\sigma_2(s)\sigma_1(s) - 2k_2(s)k_3(s)\sigma_1(s)\sigma_4(s) = 0$$

bulunur. Bu son eşitlik yorumlanırsa

$$\sigma_1(s) \neq 0 \text{ ve } k'_2(s)\sigma_1(s) + 2k_2^2(s)\sigma_2(s) - 2k_2(s)k_3(s)\sigma_4(s) = 0$$

$$\sigma_1(s) = 0 \text{ ve } 2k_2^2(s)\sigma_2(s) - 2k_2(s)k_3(s)\sigma_4(s) \neq 0$$

$$\sigma_1(s) = 0 \text{ ve } 2k_2^2(s)\sigma_2(s) - 2k_2(s)k_3(s)\sigma_4(s) = 0$$

bulunur ki buda ispatı tamamlar.

Teorem 5.6. $\alpha = \alpha(s)$, 4- boyutlu Lorentz uzayı L^4 de bir null eğri, $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s), V_4(s)\}$ eğrinin Frenet çatısı ve $k_1(s) = 1, k_2(s), k_3(s)$ eğrinin Frenet eğrilikleri olsun. Eğer $\alpha = \alpha(s)$ ikinci tip Tzitzeica null eğri ise

$$k_2(s) = \frac{\sigma_1(s)}{\sigma_3(s)} \quad (5.20)$$

dir..

İspat: Kabul edelim ki $\alpha = \alpha(s)$ null eğri ikinci tip Tzitzeica null eğri olsun. O zaman (5.11), (5.12) eşitlikleri ve $k_1(s) = 1$ ifadelerinden

$$\frac{1}{(\langle \alpha(s), V_2(s) \rangle)^2} = a_2 \quad (5.21)$$

yazılabilir. (5.21) eşitliğinin türevi alınır

$$-2 \langle \alpha(s), V_2(s) \rangle \langle \alpha(s), V'_2(s) \rangle = 0$$

veya

$$\langle \alpha(s), V_2(s) \rangle \langle \alpha(s), V'_2(s) \rangle = 0 \quad (5.22)$$

elde edilir.(5.22) da (5.15) yazılıp düzenleme yapılırsa

$$\langle \alpha(s), V_2(s) \rangle (\langle \alpha(s), k_2(s)V_1(s) - V_3(s) \rangle) = 0$$

veya

$$k_2(s) \langle \alpha(s), V_2(s) \rangle \langle \alpha(s), V_1(s) \rangle - \langle \alpha(s), V_2(s) \rangle \langle \alpha(s), V_3(s) \rangle = 0$$

olur. Burada ister $\langle \alpha(s), V_2(s) \rangle = 0$ isterse $\langle \alpha(s), V_2(s) \rangle \neq 0$ olsun, her iki durumda da

$$k_2(s) \langle \alpha(s), V_1(s) \rangle - \langle \alpha(s), V_3(s) \rangle = 0 \quad (5.23)$$

yazılabilir. Bu son eşitlikte (5.4) ve (5.6) göz önüne alınırsa

$$k_2(s) = \frac{\sigma_1(s)}{\sigma_3(s)}$$

bulunur ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 5.7. $\alpha = \alpha(s)$, 4- boyutlu Lorentz uzayı L^4 de bir null eğri, $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s), V_4(s)\}$ eğrinin Frenet çatısı ve $k_1(s) = 1, k_2(s), k_3(s)$ eğrinin Frenet eğrilikleri olsun. Eğer $\alpha = \alpha(s)$ null eğri üçüncü tip Tzitzeica null eğri ise

$$k'_3(s)\sigma_4(s) + 2k_3^2(s)\sigma_3(s) = 0 \quad (5.24)$$

diferensiyel denklemini sağlar Burada $\sigma_4(s) \neq 0$ dir.

İspat: Kabul edelim ki $\alpha = \alpha(s)$ null eğri üçüncü tip Tzitzeica null eğri olsun. O zaman (5.13) ve (5.14) eşitliklerinden

$$\frac{k_3(s)}{(\langle \alpha(s), V_4(s) \rangle)^2} = a_3 \quad (5.25)$$

yazılabilir. (5.25) eşitliğinin türevi alınırsa

$$k'_3(s) (\langle \alpha(s), V_4(s) \rangle)^2 - 2k_3(s) \langle \alpha(s), V_4(s) \rangle \langle \alpha(s), V'_4(s) \rangle = 0 \quad (5.26)$$

elde edilir.(5.26) da (5.15) yazılıp düzenleme yapılırsa

$$k'_3(s) (\langle \alpha(s), V_4(s) \rangle)^2 - 2k_3^2(s) \langle \alpha(s), V_3(s) \rangle \langle \alpha(s), V_4(s) \rangle = 0. \quad (5.27)$$

elde edilir. Bu son eşitlikte (5.6) ve (5.7) kullanılırsa

$$k'_3(s)\sigma_4^2(s) + 2k_3^2(s)\sigma_3(s)\sigma_4(s) = 0$$

olup ya $\sigma_4(s) \neq 0$ kabul edilirse

$$k'_3(s)\sigma_4(s) + 2k_3^2(s)\sigma_3(s) = 0$$

bulunur ki bu da ispatı tamamlar.

6. NULL EĞRİLER İÇİN KÜRESEL TZITZEİCA EĞRİLER

Teorem 6.1. $\alpha = \alpha(s)$, 4- boyutlu Lorentz uzayı L^4 de bir null eğri, $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s), V_4(s)\}$ eğrinin Frenet çatısı ve $k_1(s) = 1, k_2(s), k_3(s)$ eğrinin Frenet eğrilikleri olsun. Kabul edelim ki $\alpha(s)$ küresel eğri olmak üzere

$$\alpha(s) = \sigma_1(s)V_1(s) + \sigma_2(s)V_2(s) + \sigma_3(s)V_3(s) + \sigma_4(s)V_4(s)$$

konum vektörünün katsayıları arasında

$$2 \sigma_1(s) \sigma_3(s) + \sigma_2^2(s) + \sigma_4^2(s) = r^2 \quad (6.0)$$

bağıntısı vardır.

İspat: $\alpha = \alpha(s)$, 4- boyutlu Lorentz uzayı L^4 de bir null eğri, $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s), V_4(s)\}$ eğrinin Frenet çatısı olmak üzere $\alpha(s)$ eğrisinin konum vektörünün (5.3) den:

$$\alpha(s) = \sigma_1(s)V_1(s) + \sigma_2(s)V_2(s) + \sigma_3(s)V_3(s) + \sigma_4(s)V_4(s)$$

olarak yazıldığını biliyoruz. $\alpha(s)$ küresel eğri olduğundan

$$\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle = r^2$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} \langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle &= \langle \sigma_1(s)V_1(s) + \sigma_2(s)V_2(s) + \sigma_4(s)V_4(s), \\ &\quad \sigma_1(s)V_1(s) + \sigma_2(s)V_2(s) + \sigma_4(s)V_4(s) \rangle \\ &= \sigma_1^2(s) \langle V_1(s), V_1(s) \rangle + \sigma_1(s) \sigma_2(s) \langle V_1(s), V_2(s) \rangle + \sigma_1(s) \sigma_3(s) \langle V_1(s), V_3(s) \rangle \\ &\quad + \sigma_1(s) \sigma_4(s) \langle V_1(s), V_4(s) \rangle + \sigma_2(s) \sigma_1(s) \langle V_2(s), V_1(s) \rangle + \sigma_2^2(s) \langle V_2(s), V_2(s) \rangle \\ &\quad + \sigma_1(s) \sigma_3(s) \langle V_1(s), V_3(s) \rangle + \sigma_2(s) \sigma_4(s) \langle V_2(s), V_4(s) \rangle + \sigma_3(s) \sigma_1(s) \langle V_3(s), V_1(s) \rangle \\ &\quad + \sigma_3(s) \sigma_2(s) \langle V_3(s), V_2(s) \rangle + \sigma_3^2(s) \langle V_3(s), V_3(s) \rangle + \sigma_3(s) \sigma_4(s) \langle V_3(s), V_4(s) \rangle \\ &\quad + \sigma_4(s) \sigma_1(s) \langle V_4(s), V_1(s) \rangle + \sigma_4(s) \sigma_2(s) \langle V_4(s), V_2(s) \rangle + \sigma_4(s) \sigma_3(s) \langle V_4(s), V_3(s) \rangle \\ &\quad + \sigma_4^2(s) \langle V_4(s), V_4(s) \rangle = r^2 \end{aligned}$$

elde edilir. (5.2) eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$2 \sigma_1(s) \sigma_3(s) + \sigma_2^2(s) + \sigma_4^2(s) = r^2$$

bulunur.

Teorem 6.2. $\alpha = \alpha(s)$, 4- boyutlu Lorentz uzayı L^4 de bir null eğri, $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s), V_4(s)\}$ eğrinin Frenet çatısı ve $k_1(s), k_2(s), k_3(s)$ eğrinin Frenet eğrilikleri olsun. Kabul edelim ki $\alpha(s)$ küresel null eğri olsun. O zaman

$$\sigma_1(s) = 0, \quad (6.1)$$

$$\sigma_2(s) = 0, \quad (6.2)$$

$$\sigma_3(s) = 0, \quad (6.3)$$

ve

$$\sigma_4(s) = \frac{1}{k_3(s)} \quad (6.4)$$

İspat: Kabul edelim ki $\alpha(s)$ bir küresel null eğri küresel eğri olsun. O zaman

$$\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle = r^2 \quad (6.5)$$

eşitliği vardır. Bu ifadenin her iki tarafının türevi alınır

$$\langle \alpha(s), V_1(s) \rangle = 0 \quad (6.6)$$

olacağından (5.4) ve (6.6) birlikte gözönüne alınır

$$\sigma_3(s) = 0 \quad (6.7)$$

elde edilir. (6.6) nin türevi alınır

$$\langle V_1(s), V_1(s) \rangle + \langle \alpha(s), V_1'(s) \rangle = 0 \quad (6.8)$$

olur. (5.2) ve (5.15) kullanılıp gerekli düzenleme yapılırsa

$$\langle \alpha(s), V_2(s) \rangle = 0 \quad (6.9)$$

ve (5.5) ile birlikte düşünülürse

$$\sigma_2(s) = 0,$$

bulunur. (6.9) nin türevi alınır

$$\langle V_1(s), V_2(s) \rangle + \langle \alpha(s), V_2'(s) \rangle \geq 0 \quad (6.10)$$

ve (5.15) yazılırsa

$$k_2(s) < \alpha(s), \quad V_1(s) > -\langle \alpha(s), V_3(s) \rangle = 0$$

olup (6.6) ile beraber değerlendirilirse

$$\langle \alpha(s), V_3(s) \rangle = 0 \quad (6.11)$$

olur ki (5.11) ve (5.6) birlikte göz önüne alınır

$$\sigma_1(s) = 0$$

bulunur. Son olarak (5.11) in türevi alınır

$$\langle V_1(s), V_3(s) \rangle + \langle \alpha(s), V_3'(s) \rangle = 0$$

(5.2) ve (5.15) kullanılırsa

$$1 - k_2(s) < \alpha(s), \quad V_2(s) > +k_3(s) < \alpha(s), \quad V_4(s) \geq 0$$

elde edilir. (6.9) göz önüne alınıp düzenlenirse

$$1 - k_3(s) < \alpha(s), V_4(s) \geq 0$$

veya

$$< \alpha(s), V_4(s) \geq \frac{1}{k_3(s)} \quad (6.12)$$

bulunur. (6.12) ile (5.7) birleştirilirse

$$\sigma_4(s) = \frac{1}{k_3(s)}$$

olarak yazılır.

(6.1), (6.2), (6.3) ve (6.4) eşitlikleri sırasıyla (5.16), (5.20) ve (5.24) eşitliklerinde yazılırsa aşağıdaki teoremler elde edilir.

(6.1), (6.2) ve (6.4) ifadeleri ile (5.16) eşitliği ile birlikte düşünülürse aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 6.3. $\alpha = \alpha(s)$, 4- boyutlu Lorentz uzayı L^4 de bir null eğri, $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s), V_4(s)\}$ eğrinin Frenet çatısı ve $k_1(s) = 1, k_2(s), k_3(s)$ eğrinin Frenet eğrilikleri olsun. Eğer $\alpha = \alpha(s)$ birinci tip Tzitzeica null eğri ise $k_2(s) = 0$ dır

(6.1) ve (6.3) ifadeleri ile (5.20) eşitliği ile birlikte düşünülürse aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 6.4. $\alpha = \alpha(s)$, 4- boyutlu Lorentz uzayı L^4 de bir null eğri, $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s), V_4(s)\}$ eğrinin Frenet çatısı ve $k_1(s) = 1, k_2(s), k_3(s)$ eğrinin Frenet eğrilikleri olsun. Eğer $\alpha = \alpha(s)$ ikinci tip Tzitzeica null eğri ise $k_2(s)$ tanımsızdır.

(6.3) ve (6.4) ifadeleri ile (5.24) eşitliği ile birlikte düşünülürse aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 6.5. $\alpha = \alpha(s)$, 4- boyutlu Lorentz uzayı L^4 de bir null eğri, $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s), V_4(s)\}$ eğrinin Frenet çatısı ve $k_1(s) = 1, k_2(s), k_3(s)$ eğrinin Frenet eğrilikleri olsun. Eğer $\alpha = \alpha(s)$ üçüncü tip Tzitzeica null eğri ise $k_3(s)$ sabittir.

(6.1), (6.2), (6.3) ve (6.4) eşitliklerini (6.0) eşitliğinde yazılırsa aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 6.6. $\alpha = \alpha(s)$, 4- boyutlu Lorentz uzayı L^4 de bir null eğri, $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s), V_4(s)\}$ eğrinin Frenet çatısı ve $k_1(s) = 1, k_2(s), k_3(s)$ eğrinin Frenet eğrilikleri olsun. Eğer $\alpha = \alpha(s)$ null eğrisi küresel ise $\sigma_4(s) = r = \text{sabittir}$.

7. SONUÇ

Bu çalışmada 4-boyutlu Lorentz uzayında üç farklı tip Tzitzeica eğrisi tanımlanmıştır. Daha sonra tanımlanan bu üç farklı tip Tzitzeica eğrisi timelike, spacelike ve null eğriler ve küresel timelike, spacelike ve null eğriler için tanımlanarak yeni teoriler ifade edilmiş ve bazı karakterizasyonlar bulunmuştur.

4-boyutlu Öklid uzayında da üç farklı tip Tzitzeica eğriler tanımlanmış ve teoriler inşa edilmiştir. Bu uzaydaki çalışmalar timelike ve spacelike eğriler için yapılan teorilere benzer yapılar oluştururken null eğriler için yapılan karakterizasyonlar çok daha farklı olup ilginç sonuçlar bulundurmaktadır. Böylece null eğriler için oluşturulan teoriler literatürde önemli bir kaynak oluşturmasının yanı sıra bundan sonra yapılacak çalışmalar için yol gösterici olma niteliği taşımaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] Tzitzeica, G. (1907). “Sur une nouvelle classe de surfaces”, *Comptes Rendus des S’éances de l’Acad’emie des Sciences Paris*, vol. 144, no 1, p. 1257-1259.
- [2] Tzitzeica, G. (1911). “Sur certaines courbes gauches”, *Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure*, vol. 28, no 3, p. 9-32.
- [3] Bila N., (2012), “Symmetry reductions for the Tzitzeica curve equation”, *Math and Computer Science Working Papers*, vol. 16, 2012.
- [4] Agnew, A.F., Bobe A.F., Boskoff W.G and Suceava, B.D., (2010) Tzitzeica curves and surfaces, *The Mathematica Journal*, 12, 1-18.
- [5] Crasmareanu (2002). Cylindrical Tzitzeica curves implies forced harmonic oscillators, *Balkan J. Geom. Appl.*, 7, 1, 37-42.
- [6] Balgetir H., Bektas M. and Ergut M. (2016) Bertrand curves for non-null curves in 3- dimensional Lorentzian space, *Hadronic Journal*, 229-236.
- [7] Bulut F. and Bektaş M. (2020). Special helices on equiform differential geometry of spacelike curves in Minkowski space-time, *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 69(2), 1045-1056.
- [8] Bektas M., Ergut M. and Soylu D. (1998).The characterization of the spherical timelike curves in 3-dimensional Lorentzian space. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 21(2)
- [9] Aydın M. E and Ergüt M. E., (2014) Non-null curves of Tzitzeica type in Minkowski 3- space, *Romanian Journal of Mathematics and Computer Science*, 81-90.
- [10] Karacan M. K. and Bükcü, B., (2009) On the hyperbolic cylindrical Tzitzeica curves in Mikowski 3-space, *BAÜ FBE Dergisi*, vol. 10, no 1, p. 46-51.
- [11] Karacan M. K. and Bükcü B., (2009). On the elliptic cylindrical Tzitzeica curves in Mikowski 3-space *Scientia Magna*, vol. 5, no 3, p. 44-48.
- [12] Tunç E. and Bayram B., (2023) A New Characterization of Tzitzeica Curves in Euclidean 4-Space. *Fundamentals of Contemporary Mathematical Sciences*, 4(2), 77-86.
- [13] Çetin E.Ç., Bektaş M. and Yılmaz M.Y., (2022). On the Associated Curves of a Frenet Curve in R_4^1 *Cumhuriyet Science Journal*, 43(2), 273-276.
- [14] Walrave J., (1995). Curves and Surfaces in Minkowski Space, Doctoral Thesis, K.U. Leuven, Fac. of Science, Leuven .
- [15] Ilarslan, K.; Nešović, E. (2009). The first kind and the second kind osculating curves in Minkowski space-time. *Compt. rend. Acad. bulg. Sci.*, 62.6: 677-686.
- [16] Ilarslan, K. Nesovic, E.. (2012). Some characterizations of null osculating curves in the Minkowski space-time. *Proceedings of the Estonian Academy of Sciences*, 61.1: 1.

ÖZGEÇMİŞ

Enes ORUÇ

KİŞİSEL BİLGİLER

ARAŞTIRMACI BİLGİLERİ

Öğrenci Orcid ID : 0009-0006-4176-0307
Danışman Orcid ID : 0000-0002-5797-4944

EĞİTİM BİLGİLERİ

AKADEMİK FAALİYETLER

Makaleler:

- Oruç E. ve Bektaş M. (2024), 4- Boyutlu Lorentz Uzayında Tzitzeica Eğriler, Matematik Alanında Uluslararası Araştırma ve Değerlendirmeler, Serüven Yayınevi, Aralık 2024.
-