T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FUZZY SAYI DİZİLERİNDE GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Murat TEMİZKAN

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN 2025

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

FUZZY SAYI DİZİLERİNDE GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Tez Yazarı
Murat TEMİZKAN

Danışman
Prof. Dr. Hıfsı ALTINOK

HAZİRAN 2025
ELAZIĞ

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Başlığı:	Fuzzy Sayı Dizilerinde Genelleştirilmiş İstatistiksel Yakınsaklık
Yazarı:	Murat TEMİZKAN
İlk Teslim Tarihi:	16.05.2025
Savunma Tarihi:	13.06.2025

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

		İmza
Danışman:	Prof. Dr. Hıfsı ALTINOK Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım
Başkan:	Prof. Dr. Mahmut IŞIK Harran Üniversitesi, Eğitim Fakültesi	Onayladım
Üye:	Prof. Dr. Yavuz ALTIN Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun ..../......../20....... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

İmza

Prof. Dr. Burhan ERGEN
Enstitü Müdürü

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım "Fuzzy Sayı Dizilerinde Genelleştirilmiş İstatistiksel Yakınsaklık" Başlıklı Yüksek Lisans Tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

13.06.2025

Murat TEMİZKAN

ÖNSÖZ

Reel sayı dizilerinde istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli Cesàro toplanabilme gibi temel kavramlar, fark dizilerinin de dahil edilmesiyle daha kapsamlı bir araştırma alanı haline gelmiştir. Son yıllarda fuzzy sayı dizilerinin tanımlanması ve dereceli istatistiksel yakınsaklık kavramının geliştirilmesi, bu alana olan ilgiyi artırmıştır. Fuzzy fark dizileri üzerine yapılan çalışmalarda, yüksek mertebeden fark işlemleri ile α-seviye kümelerine ait üyelik fonksiyonlarının belirlenmesi önemli bir analitik çaba gerektirmektedir. Bu tezde, fuzzy sayı dizileri için Δ^m-fark operatörü ve bir (λ_n) dizisi kullanılarak β-dereceden istatistiksel yakınsaklık ve β −dereceden kuvvetli $\Delta_{\lambda,p}^m$ −toplanabilme kavramları incelenmiş, buna ilaveten bir f modülüs fonksiyonu yardımıyla daha genel dizi kümeleri tanımlanmıştır. Konunun ve elde edilen sonuçların daha iyi anlaşılabilmesi amacıyla verilen örneklerde ikinci ve m'inci fark dizileri de ele alınmıştır.

Bu yüksek lisans tez çalışmamın hazırlanmasında yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen hocam Prof. Dr. Hıfsı ALTINOK' a teşekkür eder saygılar sunarım.

Murat TEMİZKAN
ELAZIĞ, 2025

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET

Fuzzy Sayı Dizilerinde Genelleştirilmiş İstatistiksel Yakınsaklık

Murat TEMİZKAN

Yüksek Lisans Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Haziran 2025, Sayfa: vii + 34

Beş bölümden oluşan çalışmanın ilk iki bölümünde konuyla ilgili kısa bir tarihçeden bahsedilmiş ve çalışmada kullanılan bazı temel kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde fuzzy sayı dizileri için $\Delta^m -$genelleştirilmiş fark operatörü kullanılarak $\beta -$dereceden $\Delta_\lambda^m -$istatistiksel yakınsaklık ve $\beta -$dereceden kuvvetli $\Delta_{\lambda,p}^m -$toplanabilme tanımları verilmiş ve bunlar arasındaki bazı kapsama bağıntıları ifade edilmiştir. Dördüncü bölümde bir f modülüs fonksiyonu yardımıyla $W_\lambda^\beta(\Delta^m, F, f, p)$ dizi kümesi tanımlanarak $S_\lambda^\beta(\Delta^m, F)$ dizi kümesiyle arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Son bölüm olan beşinci bölümde çalışmanın sonuçları kısaca özetlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: İstatistiksel yakınsaklık, Cesàro toplanabilme, Fark dizisi, Fuzzy sayı dizisi

ABSTRACT

Generalized Statistical Convergence in Sequences of Fuzzy Numbers

Murat TEMİZKAN

Master's Thesis

FIRAT UNIVERSITY
Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

June 2025, Pages: vii + 34

The first two sections of the five-chapter study provide a brief history of the subject and some basic concepts used in the study. In the third section, the definitions of Δ_{λ}^{m} −statistical convergence of order β and strong $\Delta_{\lambda,p}^{m}$ −summability of order β are given using the Δ^{m} −generalized difference operator for fuzzy number sequences and some coverage relations between them are stated. In the fourth section, the sequence set $W_{\lambda}^{\beta}(\Delta^{m}, F, f, p)$ is defined with the help of a modulus function *f* and its relations with the sequence set $S_{\lambda}^{\beta}(\Delta^{m}, F)$ are examined. In the fifth section, the final section, the results of the study are briefly summarized.

Keywords: Statistical convergence, Cesàro summability, Difference sequence, Fuzzy sequence

1. GİRİŞ

İlk defa Zygmund [1] tarafından ortaya atılan istatistiksel yakınsaklık düşüncesinin matematiksel tanımını 1951 yılında Steinhaus [2] ve Fast [3] birbirlerinden bağımsız olarak vermiş ve daha sonraki yıllarda yine bunlardan bağımsız olarak Schoenberg [4] yeniden tanımlamıştır. İlerleyen zamanlarda istatistiksel yakınsaklık kavramı farklı isimler altında Fourier analizi, Ergodik teori, Sayı teorisi, Ölçüm teorisi, Trigonometrik seriler, Turnpike teorisi ve Banach uzaylarının yapısında kullanılmış olup sonradan dizi uzaylarında incelenmiş ve toplanabilme teorisi ile ilişkilendirilmiştir (bkz. [5-8]). Daha sonraları Çakallı [9] tarafından topolojik gruplara ve Caserta [10] tarafından fonksiyon uzaylarına uygulanmıştır.

Fuzzy küme kavramının temeli Zadeh [11] 'in 1960 larda yaptığı çalışmalara dayanmaktadır. Klasik kümeler gerçek dünyadaki matematiksel metotlara tam olarak yetmemesi bu kavramın ortaya çıkmasında etkili olmuştur. Klasik kümelerde bir elemanın kümeye ait olup olmaması gibi sadece iki seçenek varken fuzzy kümelerde bu durum [0,1] aralığına genişletilerek sadece iki değerden oluşan sistem sonsuz değerli bir sisteme dönüşmüş ve klasik kümelerde bazı durumlarda oluşabilecek belirsizlik yeni sistemle formülleştirilmiştir. Klasik kümelerde herhangi bir eleman kümeye ya üyedir ya da değildir, fakat fuzzy kümelerde hassasiyet artırıldığından dolayı elemanın kümeye üyeliğinin derecesinden bahsedilmekte olup klasik kümelere nazaran daha uygun ve gerçekçi bir yaklaşım metodudur. Bu sebeple Zadeh [11] 'in 1965 de yaptığı çalışmadan itibaren gerek mühendislik alanlarında gerekse matematiğin tüm dallarında en çok çalışılan konulardan biri olmuştur. 1986 yılında Matloka [12] fuzzy sayı dizilerini ve bu dizilerin yakınsaklığını tanımlarken 1989 da Nanda [13] bu dizilerin sınırlılığından da bahsetmiş ve yakınsaklıkla aralarında bazı bağıntılar vermiştir. Nuray ve Savaş [14] istatistiksel yakınsaklık tanımını fuzzy sayı dizilerine uygulayarak bu alanda çalışan matematikçiler için çok önemli bir adım atmıştır. Daha sonra fuzzy sayı dizilerinin toplanabilme ile ilişkisi Kwon [15] tarafından çalışıldı. Fuzzy sayı dizilerine Çolak vd. [16], Altınok vd. [17], Altinok [18] ve Et vd. [19] gibi bir çok matematikçi tarafından çalışılmıştır.

1981 yılında Kızmaz [20] reel sayı dizileri için fark dizisini tanımlamış ve bazı fark dizi uzaylarını tanımlayarak bu uzayların BK uzayı olduklarını göstermiştir. Daha sonra Kızmaz [20] ın tanımladığı fark dizi uzayları Et ve Çolak [21] tarafından m-inci dereceden genelleştirilerek yeni genelleştirilmiş fark dizi uzayları elde edilmiş ve bunlar için de benzer özellikler verilmiştir.

Reel dizilerde tanımlanmış olan istatistiksel yakınsaklık kavramını daha hassas bir yakınsaklık türüne dönüştürmek amacıyla derecelendirme fikri ilk olarak Gadjiev ve Orhan [22] tarafından ortaya atılmış, zamanla bu fikir $\alpha\in(0,1]$ için Çolak [23] tarafından α-dereceden istatistiksel yakınsaklık ve bir pozitif p sayısı için α-dereceden kuvvetli p-Cesàro yakınsaklık kavramlarının verilmesiyle daha kullanışlı ve somut bir şekil almış olup toplanabilme alanında çalışan matematikçiler tarafından oldukça fazla çalışılan bir konu haline gelmiştir. Son zamanlarda $\alpha \in (0,1]$ için Çolak ve Bektaş [24], kompleks sayı dizileri için Mursaleen [25] tarafından yeni bir metod olarak verilmiş olan λ-istatistiksel yakınsaklık kavramını genelleştirerek α-dereceden λ-istatistiksel yakınsaklık ve α-dereceden güçlü (V, λ)-toplanabilirliği tanımladı.

Modülüs fonksiyonuyla ilgili çalışmaların temeli Nakano'nun 1953 yılında yapmış olduğu "Concave modulars" isimli makalesine dayanmaktadır [26]. O zamandan itibaren gerek istatistiksel yakınsaklıkla gerekse farklı alanlarda bu konuya rastlanmaktadır. Son zamanlarda Aizpuru [27], sınırsız bir f modülüs fonksiyonu yardımıyla f-istatistiksel yakınsaklığın tanımını vererek istatistiksel yakınsaklık konusuna yeni bir bakış açısı getirmiştir. Sonradan Bhardwaj ve Dhawan [28] bu kavramı bir $\alpha \in (0,1]$ reel sayısını kullanarak derecelendirmiş ve tanımlamış olduğu yeni uzaylar arasında kapsama bağıntılarını vermiştir. Diğer yandan Bhardwaj ve Dhawan [28] tarafından tanımlanmış olan kavramlar Altınok ve Deniz [29] in Δ^m-genelleştirilmiş fark operatörünü de uygulamasıyla genel bir hal durumunu alarak daha zengin sonuçlar elde edilmiştir.

Bu çalışmada, Karakaş vd. [30] tarafından tanımlanmış olan fuzzy sayı dizileri için genelleştirilmiş istatistiksel yakınsaklık kavramıyla ilgili temel sonuçlar ve aralarındaki ilişkiler incelenerek konunun daha iyi anlaşılabilmesi adına pek çok açıklayıcı örneklere yer verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tezin bu bölümünde ana bölümlerde kullanılacak konulardan olan istatistiksel yakınsaklık ve fuzzy sayı dizileriyle ilgili temel tanımlar yer almaktadır.

Tanım 2.1. $S \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere bir S kümesinin doğal (asimptotik) yoğunluğu

$$\delta(S) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in S\}|$$

veya aynı şey demek olan

$$\delta(S) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |S \cap \{1,2,3, \dots, n\}|$$

biçiminde tanımlanır. Tanımda $|\{k \leq n : k \in S\}|$ ifadesi S kümesinin n den büyük olmayan elemanlarının sayısını, $|S \cap \{1,2,3, \dots, n\}|$ ifadesi ise S kümesinin ilk n pozitif tam sayı içindeki eleman sayısını göstermektedir. Eğer bu limit 0 ise, kümenin "doğal yoğunluğu sıfırdır" denir, bu da sezgisel olarak kümenin pozitif tam sayılar içinde "çok seyrek" olduğu anlamına gelir. [31].

Örnek 2.2. $A = \{2,4,6, \dots ,2n, \dots\}$ şeklinde tanımlı bir A kümesinin doğal yoğunluğu $\delta(A) = 1/2$ dir. Çünkü doğal sayılar kümesi olan $\mathbb{N}$ nin eleman sayısının n olduğu kabul edilirse bu durumda çift sayıların (ve tek sayıların) toplam sayısı $n/2$ olacağından doğal yoğunluk

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n/2}{n} = \frac{1}{2}$$

biçiminde basit bir limit işlemiyle $1/2$ olarak bulunabilir.

Tanım 2.3. A kümesi sıfır yoğunluklu herhangi bir küme olsun. Eğer kompleks terimli bir $x = (x_k)$ dizisinin terimleri herhangi bir S özelliğini A kümesinin haricinde tüm k indisleri için sağlıyorsa, verilen (x_k) kompleks terimli dizisi hemen hemen her k için S özelliğini sağlıyor denir ve bu durum kısaca $h.h.k$ biçiminde yazılır [32].

İstatistiksel yakınsaklıktaki "hemen hemen her k için" özelliği, bir dizi olay veya koşulun çok büyük bir k değerinden sonra (yani yeterince büyüklükte) neredeyse kesin olarak gerçekleştiği anlamına gelir. Bu ifade, olasılık teorisinde ve istatistiksel analizde önemli bir kavramdır. Daha açık bir şekilde ifade etmek gerekirse: Bir özellik "hemen hemen her k için" sağlanıyorsa, bu, yalnızca sonlu sayıda k değeri için bu özelliğin sağlanmayacağı anlamına gelir.

Başka bir deyişle, özelliğin sağlanmadığı k değerlerinin kümesi sonludur. Bu ifade genellikle bir dizi rastgele değişkenin veya olayların asimptotik davranışını tanımlarken kullanılır. Örneğin, büyük sayılar yasası gibi teoremlerde, örneklem ortalamasının gerçek ortalamaya "hemen hemen her n için" yakınsadığı ifade edilir. Burada n örneklem büyüklüğünü temsil eder. Bu, örneklem büyüklüğü yeterince büyük olduğunda, örneklem ortalamasının gerçek ortalamaya çok yakın olma olasılığının 1'e yaklaştığı anlamına gelir.

İstatistiksel yakınsaklık kavramının temeli doğal yoğunluk kavramına dayalı olduğundan tanım şu şekildedir.

Tanım 2.4. Terimleri kompleks sayılardan oluşan bir $x = (x_k)$ dizisini göz önüne alalım. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve $h.h.k$ için $|x_k - \gamma| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanacak biçimde bir γ sayısı varsa veya aynı anlama gelen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - \gamma| \geq \varepsilon \}| = 0$$

limiti mevcutsa bu durumda $x = (x_k)$ dizisi γ sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve bu yakınsama çeşidi kısaca $st - \lim x = \gamma$ şeklinde gösterilir. İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı genellikle S ile gösterilir.

Bu tanımda doğal yoğunluk, dizinin γ 'den ε veya daha fazla uzaklıkta bulunan terimlerinin indislerinin oluşturduğu kümenin "ne kadar büyük" olduğunu ölçmek için kullanılır. Eğer bu kümenin doğal yoğunluğu sıfır ise, bu, dizinin γ 'den keyfi olarak küçük bir pozitif ε değerinden daha uzak olan terimlerinin "çok seyrek" olduğu anlamına gelir. Başka bir deyişle, dizinin terimlerinin büyük bir çoğunluğu γ 'ye keyfi olarak yakınsar.

İstatistiksel yakınsaklık tanımındaki doğal yoğunluk, bir olayın (burada, dizinin bir teriminin limitten belirli bir uzaklıkta olması) ne sıklıkta gerçekleştiğini ölçmek için kullanılan bir olasılık benzeri bir kavramdır. Doğal yoğunluğun sıfır olması, bu olayın "uzun vadede neredeyse hiç gerçekleşmediği" anlamına gelir. Bu sayede istatistiksel yakınsaklık, klasik yakınsaklıktan daha zayıf bir yakınsaklık türü olarak, bazı "seyrek" istisnalara izin verir.

Teorem 2.5. Eğer $x = (x_k)$ dizisi yakınsak ise istatistiksel yakınsaktır. Yani $\lim x_k = \gamma$ ise $st - \lim x_k = \gamma$ dir [33].

Yukarıdaki teoremin tersi, yani "istatistiksel yakınsak bir dizinin klasik anlamda yakınsak olacağı" ifadesine her zaman doğru diyemeyiz. Gerçekten $x = (x_k)$ dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \ ise \quad (m = 1,2,\dots) \\ 0, & k \neq m^2 \ ise \end{cases}$$

Her $\varepsilon > 0$ için

$$|\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan gerekli limit işlemi yapıldığında eşitsizliğin solunda verilen kümenin doğal yoğunluğunun sıfır olduğu görülecektir. Buradan verilen dizinin sıfıra istatistiksel yakınsak yani $st - \lim x = 0$ olduğu anlaşılır. Diğer yandan $x = (x_k)$ dizisinin yakınsak olduğunu söyleyemeyiz. Çünkü dizinin yakınsayabileceği herhangi bir sayı yoktur. Eğer öyle bir s sayısı olsaydı s nin ε komşuluğunun dışında mutlaka diziye ait sonlu tane terim bulunması gerekirdi. Bununla birlikte yukarda tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi istatistiksel yakınsak bir dizi olduğu halde sınırlı da değildir.

Diğer taraftan, $x = (-1,1,-1,1,-1,1 \dots)$ dizisi sınırlı bir dizi olmasına rağmen istatistiksel yakınsak bir dizi değildir. Çünkü istatistiksel yakınsaklığın tanımı gereği bir sayının istatistiksel limit olabilmesi için tanımdaki limit hesaplamaları yapıldığında doğal yoğunluğun sıfır olması gerekir. Halbuki burada dizinin terimleri göz önüne alındığında ne 1 ne de -1 sayısının istatistiksel limit olamayacağı açıktır. Bu sayıların dışında bir sayının da istatistiksel limit olamayacağı kolayca görülebilir. Bu örnekten yola çıkarak sınırlı diziler uzayı l_∞ ile istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı olan S birbirlerini kapsamazlar, fakat bu iki dizi uzayının arakesiti boş değildir.

Teorem 2.6. Eğer bir $x = (x_k)$ dizisi istatistiksel yakınsak ise limiti sadece bir tanedir [33].

Teorem 2.7. $st - \lim x_k = \gamma_1$, $st - \lim y_k = \gamma_2$ ve c bir reel sayı olsun. Bu taktirde

(i) $st - \lim c x_k = c\gamma_1$

(ii) $st - \lim(x_k + y_k) = \gamma_1 + \gamma_2$ dir [33].

Yukarıda verilen teoremin bir sonucu olarak istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı olan S nin bir vektör uzay olduğu anlaşılır.

Tanım 2.8. Kompleks terimli bir $x = (x_k)$ dizisi verilsin ve $\varepsilon > 0$ sayısını alalım. Eğer $h.h.k$ için $|x_k - x_{k_0}| < \varepsilon$ olacak şekilde ε sayısına bağlı bir $k_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa yani;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k \leq n : |x_k - x_{k_0}| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

limiti mevcutsa $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir [33].

Bu dizi, klasik anlamdaki Cauchy dizisinin istatistiksel yakınsaklık fikriyle genelleştirilmiş halidir. Bir reel sayı dizisinin istatistiksel Cauchy dizisi olup olmadığını belirlemek için, dizinin terimlerinin "neredeyse tüm" indisler için birbirine keyfi olarak yakın olup olmadığına bakılır, yani dizinin terimleri arasındaki farkın belirli bir eşiği aşan indis çiftlerinin kümesinin seyrek olması istenir.

Örneğin, aşağıdaki diziyi göz önüne alalım:

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \ ise \quad (m = 1,2,\dots) \\ 0, & k \neq m^2 \ ise \end{cases}$$

Bu dizi klasik anlamda Cauchy dizisi değildir çünkü terimleri keyfi olarak birbirine yaklaşmaz. Fakat, herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $\left|x_k - x_{k_0}\right| < \varepsilon$ koşulu kare olmayan tüm k ve k_0 doğal sayıları için sağlanır. Kare sayıların kümesinin doğal yoğunluğu sıfır olduğundan, bu dizi bir istatistiksel Cauchy dizisidir. Bu dizi aynı zamanda 0'a istatistiksel olarak yakınsaktır.

İstatistiksel Cauchy dizileri, klasik analizde yakınsak olmayan ancak "çoğu zaman" Cauchy benzeri davranış gösteren dizileri incelemek için önemli bir araçtır. İstatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel Cauchy dizisi kavramları, sayı teorisi, ölçü teorisi ve fonksiyonel analiz gibi matematiğin çeşitli alanlarında uygulamalar bulmuştur.

Tanım 2.9. $p \in \mathbb{R}^+$ olsun. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x_k - \gamma|^p = 0$$

sağlanacak biçimde bir γ sayısı varsa, o zaman $x = (x_k)$ dizisi kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilirdir denir.

Bu şekildeki dizilerden oluşan uzay kısaca W_p ile gösterilecektir. Yani,

$$W_p = \left\{ x = (x_k) \colon \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x_k - \gamma|^p = 0, en\ az\ bir\ \gamma\ için \right\}$$

dir [5].

Kuvvetli p-Cesàro toplanabilme, analiz ve toplanabilme teorisinde önemli bir kavramdır ve dizilerin ortalama davranışını incelemek için güçlü bir araç sağlar. Dizi veya serilerin limitlerinin klasik anlamda var olmadığı durumlarda bile bir anlamda yakınsama sağlayan bir toplama yöntemidir. Ayrıca, klasik Cesàro toplanabilirliğin bir genelleştirilmesidir ve dizinin terimlerinin ortalama davranışını daha detaylı incelemeye olanak tanır. Teknik açıdan bakıldığında, bir sayı dizisinin Cesàro anlamında ortalamalarının p-inci kuvvetlerinin ortalamasının bir limite yakınsaması kavramıdır.

Buradaki $|x_k - \gamma|^p$ ifadesi, dizinin k-ıncı terimi ile γ arasındaki farkın mutlak değerinin p-inci kuvvetini temsil eder.

$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k - \gamma|^p$ ifadesi, bu p-inci kuvvetlerin ilk n terim için aritmetik ortalamasını alır.

Limitin 0 olması, bu ortalamanın n sonsuza giderken sıfıra yaklaştığı anlamına gelir. Bu da sezgisel olarak, dizinin terimlerinin "ortalama olarak" γ 'ye yaklaştığı anlamına gelir.

Kuvvetli p-Cesàro toplanabilme

- p = 1 için, bu tanım standart Cesàro toplanabilme tanımıyla denk olur.

- p > 1 için, daha hızlı yakınsama gerektirir ve bu yüzden Cesàro toplanabilmeye göre daha güçlü bir toplanma şeklidir.

- p = 2 için Kuvvetli 2-Cesàro toplanabilme, dizinin kare ortalamasının limitini kontrol eder ve istatistikte veya sinyal işlemede kullanılabilir.

Bu yöntem, özellikle düzensiz salınımlar yapan serilerde kullanışlıdır, çünkü klasik limit tanımıyla yakınsamayan dizilerin bile bir anlamda toplamını belirlemeye yardımcı olabilir. Ayrıca, normlu uzaylarda dizilerin yakınsaklık türlerini genişletmek amacıyla da kullanıldığı görülmektedir.

Bu toplanabilme yöntemi, özellikle düzensiz salınımlar yapan serilerde kullanışlıdır, çünkü klasik limit tanımıyla yakınsamayan dizilerin bile bir anlamda toplamını belirlemeye yardımcı olabilir.

Tanımın daha iyi anlaşılabilmesi açısından L=0 durumunda kuvvetli p-Cesàro toplanabilirlik ile ilgili aşağıdaki örneklere göz atalım. $(x_k) = (-1)^k$ dizisini göz önüne alalım. $n \to \infty$ için limit durumunda

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|(-1)^k - 0\right|^p \to 1 \neq 0$$

elde edilir ki bu limit sıfır olmadığı için $(x_k) = (-1)^k$ dizisi herhangi bir p > 0 sayısı için kuvvetli p-Cesàro toplanabilir değildir.

Şimdi de Tanım 2.8 deki (x_k) dizisini alalım. Basit cebirsel işlemler yapılırsa

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k - 0|^p = \frac{1}{n}(1^p + 0^p + 0^p + 1^p + 0^p + \cdots) \approx \frac{\sqrt{n}}{n}$$

yazılabilir. Buradan yine $n \to \infty$ üzerinden limit alınırsa sıfır bulunacağından verilen (x_k) dizisi sıfıra kuvvetli p-Cesàro toplanabilir olur. Diğer yandan bu dizi klasik anlamda yakınsak bir dizi değildir.

Teorem 2.10. Kompleks terimli bir $x = (x_k)$ dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir ancak ve ancak $x = (x_k)$ istatistiksel yakınsaktır [33].

Tanım 2.11. Kompleks terimli bir (x_k) dizisi verilsin. $\Delta -$fark operatörü $\Delta x = x_k - x_{k+1}$ şeklinde tanımlanmak üzere

$$l_\infty(\Delta) = \{(x_k) : \Delta x \in l_\infty\}$$

$$c(\Delta) = \{(x_k) : \Delta x \in c\}$$

dizi uzayları $\|x\|_1 = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty$ normu ile birer BK uzayıdır [20]. $m \in N$ ve $\Delta^m x = \Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1}$ olmak üzere $l_\infty(\Delta^m)$ ve $c(\Delta^m)$ uzayları birer BK uzayıdır [21].

Fark dizi uzayları, dizi uzaylarının bir alt kümesi olup, fark operatörleri kullanılarak tanımlanan özel uzaylardır. Bu uzaylar, özellikle analizde ve fonksiyonel analizde, sayısal analiz ve yakınsaklık teorisinde önemli bir rol oynar. Örneğin, diferansiyel denklemlerin sayısal çözümündeki sonlu farklar yönteminde; zaman serilerinde trend analizi için; bir serinin durağan olup olmadığının tespit edilmesinde; elektronikte sistemlerde sinyal değişim oranının ölçümünde fark dizileri kullanılmaktadır.

Aşağıda Zadeh [11] tarafından tanımlanan bazı tanımları verelim:

Tanım 2.12. Herhangi bir X kümesi ve bu kümenin bir A alt kümesi verilsin. Bu taktirde eğer bir $f_A : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \ ise \\ 0, & x \notin A \ ise \end{cases}$$

biçiminde tanımlanmışsa bu fonksiyona A nın karakteristik fonksiyonu denir. Bu tanımdan hareketle karakteristik fonksiyon yardımıyla bir $A \subset X$ alt kümesi

$$A = \{x \in X : f_A(x) = 1\}$$

biçiminde tanımlanabilir. Bu tanıma göre herhangi bir $x \in X$ elemanı verildiğinde $x \in A$ olup olmadığı karakteristik fonksiyonu yardımıyla kolaylıkla anlaşılabilmektedir.

Tanım 2.13. χ herhangi bir küme olarak verilsin. χ kümesindeki bir A kümesinin bir fuzzy küme olabilmesi için, $X_A : \chi \to [0,1]$ şeklinde bir karakteristik fonksiyonun mevcut olması gerekir. Bu fonksiyon, x ler A kümesinin elemanı olduğunda $X_A(x) \in (0,1]$ ve A kümesinin elemanı olmadığında $X_A(x) = 0$ biçiminde tanımlanır. Eğer bir karakteristik fonksiyon burada olduğu gibi tanımlanmışsa bu fonksiyona üyelik fonksiyonu denir.
Bir A fuzzy kümesi yukarıda verilen X_A üyelik fonksiyonunun tanımından faydalanılarak

$$A = \{x \in \chi : X_A(x) \in (0,1]\}$$

şeklinde de tanımlanabilir.

Şimdi de fuzzy sayının tanımında kullanılacak olan bazı tanımları vermeye başlayalım:

Tanım 2.14. Eğer $X(x_0) = 1$ olacak şekilde bir $x_0 \in \chi$ sayısı varsa A fuzzy kümesine normal fuzzy küme denir.

Tanım 2.15. A bir fuzzy küme olsun ve $\alpha \in (0,1]$ verilsin. A fuzzy kümesinin α −kesimi A^α ile gösterilir ve

$$A^\alpha = \{x \in \chi : X_A(x) \geq \alpha\}$$

şeklinde tanımlanır. Özel olarak 0 −kesim kümesi $cl\{x \in \mathbb{R} : X_A(x) > 0\}$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.16. Bir A fuzzy kümesi verilsin.

$$supp(A) = \{x \in \chi : X_A(x) > 0\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye A fuzzy kümesinin support'u yada desteği denir. Bu küme üyelik derecesi sıfır olmayan bütün noktalardan oluşan bir kümedir.

Tanım 2.17. Bir A fuzzy kümesi verilsin. Eğer her $\alpha \in (0,1]$ için A^α kümesi konveks ise A fuzzy kümesi konvekstir.

Şimdi de bu tanıma denk olan farklı bir konvekslik tanımını verelim:

Tanım 2.18. Bir A fuzzy kümesi verilsin. Eğer her $\lambda \in [0,1]$ ve her $x_1, x_2 \in \chi$ için

$$X_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{X_A(x_1), X_A(x_2)\}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa A ya konveks fuzzy kümedir denir.

Tanım 2.19. Eğer bir $X : \mathbb{R} \to [0,1]$ fonksiyonu aşağıda verilen dört şartı sağlarsa X fonksiyonuna bir fuzzy sayı denir.

i) X normaldir,

ii) X fuzzy konvekstir,

iii) $X^0 = \{x \in \mathbb{R} : X(x) > 0\}$ kümesinin kapanışı olan $cl\{x \in \mathbb{R} : X_A(x) > 0\}$ kümesi kompakttır,

iv) X üst-yarı süreklidir [34].

Bütün reel fuzzy sayılar kümesi kısaca $L(\mathbb{R})$ sembolüyle gösterilecektir.

Geleneksel matematik, kesin ve net değerlerle çalışır. Ancak gerçek dünya çoğu zaman belirsizlikler ve muğlaklıklar içerir. Fuzzy sayılar, bu tür durumları modellemek ve üzerinde işlem yapmak için daha uygun bir araç sağlar. Özellikle insan dilindeki belirsizlikleri, ölçüm hatalarını veya kesin sınırların olmadığı durumları ifade etmek için kullanılırlar.
Fuzzy sayılar, fuzzy mantık, kontrol sistemleri, karar verme süreçleri, yapay zeka ve veri analizi gibi birçok alanda uygulama alanı bulmaktadır.

Fuzzy sayı dizileriyle ilgili temel işlemlerde (yakınsaklık ve sınırlılık vs.) en yaygın olarak kullanılan metriklerden birisi Hausdorff metriğidir:
X ve Y gibi iki fuzzy sayısı arasındaki uzaklığı hesaplamak için

$$\overline{d} : L(\mathbb{R}) \times L(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$\overline{d}\,(X,Y) = \sup_{0 \le \alpha \le 1} d_H(X^\alpha, Y^\alpha)$$

metriği kullanılacaktır. Burada d_H Hausdorff metriğidir ve

$$d_H(X^\alpha, Y^\alpha) = \max\left(\left|\underline{X}^\alpha - \underline{Y}^\alpha\right|, \left|\overline{X}^\alpha - \overline{Y}^\alpha\right|\right)$$

şeklinde tanımlanır. $L(\mathbb{R})$ uzayı yukarıda verilen $\overline{d}$ metriğine göre tamdır [35].

Tanım 2.20. Bir $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi, doğal sayılar kümesini fuzzy sayılar kümesine dönüştüren bir fonksiyondur. Buna göre bir $X = (X_k)$ fuzzy dizisinin her bir terimi aslında birer fuzzy sayıdır [12].

Tanım 2.21. $L(\mathbb{R})$ fuzzy sayılar kümesinde herhangi bir X_0 fuzzy sayısını göz önüne alalım ve $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. X_0 ın $\varepsilon -$komşuluğu $d(X, X_0) < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanacak biçimdeki X sayılarından oluşan bir kümedir. Buna göre $K(X_0, \varepsilon)$ kümesi ile herhangi bir X_0 fuzzy sayısının $\varepsilon -$komşuluğundan bahsedilecektir [12].

Tanım 2.22. $L(\mathbb{R})$ fuzzy sayılar kümesinde herhangi bir $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisini göz önüne alalım. Her $\varepsilon > 0$ sayısı ve $k > k_0$ doğal sayıları için $d(X_k, X_0) < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanacak biçimde bir k_0 sayısı bulunabiliyorsa bu taktirde (X_k) fuzzy dizisine yakınsak bir dizi denir ve bu dizinin yakınsadığı sayı yani limiti de X_0 fuzzy sayısıdır denir [12].

Bütün yakınsak fuzzy sayı dizilerinin kümesini $c(F)$ ile göstereceğiz.

Örnek 2.23. $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi

$$X_k(x) = \begin{cases} \frac{k}{k+2}x + \frac{2-2k}{k+2}, & x \in \left[\frac{2k-2}{k}, 3\right] ise \\ -\frac{k}{k+2}x + \frac{4k+2}{k+2}, & x \in \left[3, \frac{4k+2}{k}\right] ise \\ 0, & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

biçiminde tanımlanmış bir dizi olarak verilsin. $X = (X_k)$ dizisinin limitinin gerekli aritmetik işlemlerden sonra aşağıdaki gibi üçgensel bir fuzzy sayı olduğu kolayca görülebilir.

$$X_0(x) = \begin{cases} x-2, & x \in [2,3]\ ise \\ -x+4, & x \in [3,4]\ ise \\ 0, & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

Tanım 2.24. Her $\varepsilon > 0$ için $N < k, m$ sağlandığında $d(X_k, X_m) < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanacak biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Yakınsak her fuzzy sayı dizisi tıpkı reel sayı dizilerinde olduğu gibi bir fuzzy Cauchy dizisidir [12].

Tanım 2.25. $L(\mathbb{R})$ fuzzy sayılar kümesinde verilen bir $X = (X_k)$ fuzzy sayısı dizisini alalım. Eğer $X = (X_k)$ fuzzy sayısı dizisinin tüm terimleri alttan ve üstten en az birer tane fuzzy sayı tarafından sınırlandırılmış ise $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisine sınırlı bir dizi denir. Bu şekilde verilen tüm $X = (X_k)$ dizilerinin kümesi kısaca $l_\infty(F)$ ile sembolize edilecektir [36].

Tanım 2.26. $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi olsun. Eğer $\{\Delta^m X_k : k \in \mathbb{N}\}$ biçiminde tanımlanmış bir fuzzy sayı kümesi sınırlı bir kümeyse (X_k) fuzzy sayı dizisine Δ^m −sınırlıdır denir. Bu durumda $(\Delta^m X_k)$ fark dizisinin her terimi için $K \leq \Delta^m X_k \leq M$ eşitsizliği sağlanacak biçimde alttan ve üstten sınırlayan birer K ve M fuzzy sayıları vardır [16].

Eğer $(\Delta^m X_k)$ fark dizisinin sonlu sayıda terimi hariç $\varepsilon > 0$ olmak üzere $d(\Delta^m X_k, X_0) < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanıyorsa (X_k) fuzzy sayı dizisi, (X_0) fuzzy sayısına Δ^m −yakınsaktır denir.

Burada $l_\infty(\Delta^m, F)$ ile tüm Δ^m −sınırlı, $c(\Delta^m, F)$ ile tüm Δ^m −yakınsak ve $c_0(\Delta^m, F)$ ile tüm sıfıra Δ^m −yakınsak fuzzy sayı dizilerinin sınıfları sembolize edilecektir.

$l_\infty(\Delta^m, F)$ fuzzy dizi sınıfı yapısı gereği sınırlı fark dizilerinden oluşmasına rağmen sınırsız (X_k) dizilerini de içinde barındırır. Benzer durum $c(\Delta^m, F)$ ve $c_0(\Delta^m, F)$ fuzzy dizi sınıfları için de geçerlidir. Örneğin $c(\Delta^m, F)$ fuzzy dizi sınıfı yapısı gereği yakınsak fark dizilerinden oluşmasına rağmen yakınsak olmayan (X_k) dizilerini de içine alır. Bu durumu aşağıdaki örnek üzerinde daha iyi anlayabiliriz.

Örnek 2.27. Üyelik fonksiyonu

$$X_k(x) = \begin{cases} \mathrm{x - k + 1}, & x \in [k-1, k]\ ise \\ \mathrm{-x + k + 1}, & x \in [k, k+1]\ ise \\ 0, & x \notin [k-1, k+1]\ \mathrm{ise} \end{cases}$$

biçiminde verilen fuzzy sayı dizisini göz önüne alalım. Verilen bu dizinin Δ^m −yakınsak ve Δ^m −sınırlı olduğunu kolaylıkla söyleyebiliriz. Yani burada (X_k) dizisinin fark işlemlerinden oluşan $(\Delta^m X_k)$ dizisi yakınsak ve sınırlıdır. Halbuki (X_k) dizisinin kendisi yakınsak değildir. Diğer taraftan rutin işlemler sonucunda bu dizinin sınırlı olmadığı da açıkça görülür.
Gerçekten, $\alpha \in (0,1]$ için α −kesim kümesi işlemleri sonucunda

$$[X_k]^\alpha = [k - 1 + \alpha, k + 1 - \alpha]$$

elde edilir, bundan faydalanarak fark işlemleri yapıldığında

$$[\Delta X_k]^\alpha = [2\alpha - 2, 2 - 2\alpha]$$

elde edilir. Bu taktirde $[X_0]^\alpha = [-2(1-\alpha), 2(1-\alpha)]$ olmak üzere (ΔX_k) fuzzy sayı dizisi X_0 fuzzy sayısına yakınsaktır. Ayrıca bu dizinin sınırlılık tanımı göz önüne alındığında alttan ve üstten sınırlı olması sebebiyle sınırlı olacağı da açıkça görülür.

Benzer şekilde ikinci dereceden fark dizisinin α −seviye kümesi

$$[\Delta^2 X_k]^\alpha = [4\alpha - 4, 4 - 4\alpha]$$

ve m −inci dereceden fark dizilerinin α −seviye kümesi ve üyelik fonksiyonu sırasıyla

$$[\Delta^{\mathrm{m}} X_k]^\alpha = [2^m(\alpha - 1), 2^m(1 - \alpha)]$$

ve

$$\Delta^{\mathrm{m}} X_k(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{x}}{2^m}+1, & x\in[-2^m,0]\ ise\\ -\dfrac{\mathrm{x}}{2^m}+1, & x\in[0,2^m]\ ise\\ 0, & diğer\ durumlarda\end{cases}$$

bulunur. Bu taktirde $[X_0']^\alpha=[2^m(\alpha-1),2^m(1-\alpha)]$ olmak üzere $(\Delta^{\mathrm{m}} X_k)$ fuzzy sayı dizisi X_0' fuzzy sayısına yakınsaktır. Ayrıca $(\Delta^{\mathrm{m}} X_k)$ dizisi sınırlıdır.

Diğer yandan $c_0(\Delta^m,F)\subset c(\Delta^m,F)\subset l_\infty(\Delta^m,F)$ olup bu kapsama kesindir. Yani seçilecek bir $(\Delta^{\mathrm{m}} X_k)$ fuzzy sayı dizisi sınırlı olmasına rağmen yakınsak olmayabilir. Bu durum aşağıdaki örnekte ayrıntılı bir biçimde gösterilmiştir.

Örnek 2.28. Üyelik fonksiyonu

$$X_k(x)=\begin{cases}\left.\begin{array}{ll} x-2, & x\in[2{,}3]\ ise\\ -x+4, & x\in[3{,}4]\ ise\\ 0, & diğer\ durumlarda\end{array}\right\} & k\ tek\ ise\\ \left.\begin{array}{ll} x-5, & x\in[5{,}6]\ ise\\ -x+7, & x\in[6{,}7]\ ise\\ 0, & diğer\ durumlarda\end{array}\right\} & k\ çift\ ise\end{cases}$$

biçiminde verilen (X_k) fuzzy sayı dizisini ele alalım. Bu dizinin fark dizisi olan (ΔX_k) fuzzy dizisinin sınırlı olması nedeniyle (X_k) dizisinin kendisi $\Delta-$sınırlıdır. Halbuki (ΔX_k) fuzzy dizisi yakınsak olmadığı için (X_k) dizisi $\Delta-$yakınsak olamaz. Şimdi bu durumlarla ilgili işlemlerimizi yapmak için ilk olarak $\alpha\in(0{,}1]$ için (X_k) fuzzy sayı dizisinin $\alpha-$kesim kümesini bulalım. Gerekli işlemler sonucunda $\alpha-$kesim kümesi

$$[X_k]^\alpha=\begin{cases}[2+\alpha,4-\alpha], & k\ tek\ ise\\ [5+\alpha,7-\alpha], & k\ çift\ ise\end{cases}$$

olarak bulunur. (X_k) dizisinin $\alpha-$kesim kümesinden faydalanılarak (ΔX_k) fuzzy fark dizisinin $\alpha-$kesim kümesi de

$$[\Delta X_k]^\alpha=\begin{cases}[-(5-2\alpha),-(1+2\alpha)], & k\ tek\ ise\\ [1+2\alpha,5-2\alpha], & k\ çift\ ise\end{cases}$$

biçiminde bulunur. Sınırlılık ile ilgili işlemler sonucunda hem alt sınır hem de üst sınır bulunabileceğinden dolayı (ΔX_k) dizisi sınırlı olur. Diğer yandan yakınsaklık tanımını sağlamaması sebebiyle (ΔX_k) dizisinin yakınsak olduğunu söyleyemeyiz.

Benzer şekilde ikinci dereceden fark dizisinin $\alpha-$seviye kümesi

$$[\Delta^2 X_k]^\alpha=[4\alpha-10,-2-4\alpha]$$

$$[\Delta^2 X_k]^\alpha = \begin{cases} [4\alpha - 10, -2 - 4\alpha], & k\ tek\ ise \\ [2 + 4\alpha, 10\ - 4\alpha], & k\ çift\ ise \end{cases}$$

ve m −inci dereceden fark dizisinin α −seviye kümesi ve üyelik fonksiyonu sırasıyla

$$[\Delta^{\mathrm{m}} X_k]^\alpha = \begin{cases} [2^{m-1}(2\alpha - 5), 2^{m-1}(-2\alpha - 1)], & k\ tek\ ise \\ [2^{m-1}(1 + 2\alpha), 2^{m-1}(5 - 2\alpha)], & k\ çift\ ise \end{cases}$$

ve

$$\Delta^{\mathrm{m}} X_k(x) = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} \frac{x}{2^m} + \frac{5}{2}, & x \in [5.\,2^{m-1}, -3.\,2^{m-1}]\ ise \\ -\frac{x}{2^m} - \frac{1}{2}, & x \in [-3.\,2^{m-1}, -2^{m-1}]\ ise \\ 0, & diğer\ durumlarda \end{array}\right\} & k\ tek\ ise \\ \left.\begin{array}{ll} \frac{x}{2^m} - \frac{1}{2}, & x \in [2^{m-1}, 3^{m-1}]\ ise \\ -\frac{x}{2^m} + \frac{5}{2}, & x \in [3^{m-1}, 5.\,2^{m-1}]\ ise \\ 0, & diğer\ durumlarda \end{array}\right\} & k\ çift\ ise \end{cases}$$

şeklinde bulunur. Burada elde edilen $(\Delta^{\mathrm{m}} X_k)$ dizisi sınırlı olduğu halde yakınsak değildir. Bu taktirde bunun sonucu olarak $c(\Delta^m, F) \subset l_\infty(\Delta^m, F)$ kapsamasının doğruluğu gösterilmiş olur.

Tanım 2.29. $L(\mathbb{R}^n)$ fuzzy sayılar kümesinde herhangi bir $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\ \}| = 0$$

limiti sağlanacak biçimde bir X_0 fuzzy sayısı varsa $X = (X_k)$ fuzzy dizisi X_0 sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve bu yakınsama kısaca $S(F) - \lim X_k = X_0$ veya $X_k \to X_0\big(S(F)\big)$ şeklinde yazılır [14].

Tanım 2.30. Aşağıdaki şartları sağlayan bir $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonuna modülüs fonksiyonu denir:

i. $f(x) = 0$ ancak ve ancak $x = 0$,
ii. $x, y \geq 0$ için $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$,
iii. f artandır,
iv. f fonksiyonu $x = 0$ noktasında sağdan süreklidir.

Sınırlılık kavramı modülüs fonksiyonlarında sıklıkla yer almakta olup en çok kullanılan sınırlı ve sınırsız modülüs fonksiyonlarından ikisi sırasıyla $f(x) = \frac{x}{1+x}$ ve $f(x) = x^p,\ p \in (0,1]$

fonksiyonlarıdır. Bunlara ilaveten $f(x) = \ln(1 + x)$ fonksiyonu da bir modülüs fonksiyonudur. [26].

Modülüs fonksiyonu, özellikle fonksiyonel analizde ve dizi uzaylarının teorisinde önemli bir araçtır. Bu fonksiyon kullanılarak yeni ve daha genel dizi uzayları tanımlanabilir ve bu uzayların topolojik ve yapısal özellikleri incelenebilir. Modülüs fonksiyonları, özellikle dizi uzayları, fuzzy sayı dizileri, istatistiksel yakınsaklık ve Orlicz fonksiyonlarıyla ilişkilendirilerek daha genel uzayların tanımlanmasına olanak vermektedir.

Tanım 2.31. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir A alt kümesinin β −yoğunluğu

$$d_\beta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\beta} |\{k \le n : k \in A\}| \qquad (1)$$

şeklindeki limitle tanımlanır. Burada β sayısı $(0,1]$ aralığının herhangi bir elemanıdır. (1) ifadesinde β sayısının özel olarak 1 olması halinde β −yoğunluk, doğal yoğunlukla denk olur [27].

Tanım 2.31. β yukarıdaki gibi bir reel sayı ve f fonksiyonu da sınırsız bir modülüs olmak üzere $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir A alt kümesinin f_β −yoğunluğu

$$d_\beta^f(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{f(n^\beta)} f(|\{k \le n : k \in A\}|) \qquad (2)$$

biçiminde tanımlanır [27].

Uyarı 2.32. Eğer (2) ifadesinde $\beta = 1$ ve $f(x) = x$ alınırsa bu durumda bir kümenin f_β −yoğunluğu doğal yoğunluğa indirgenir. Sadece $\beta = 1$ alınırsa f −yoğunluğa ve yine sadece $f(x) = x$ alınması durumunda da β −yoğunluğa indirgenmiş olur [27].

Tanım 2.33. $0 < \beta \le 1$ sayısı ve sınırsız bir f modülüs fonksiyonu verilsin. Eğer her bir $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{f(n^\beta)} f(|\{k \le n : d(\Delta^m X_k, X_0) \ge \varepsilon\}|) = 0$$

limiti mevcut ise $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına β −dereceden (Δ^m, f) −istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda (X_k) dizisi X_0' a $S^\beta(\Delta^m, F, f)$ −yakınsak olur. Bu yakınsama aynı zamanda $S^\beta(\Delta^m, F, f) - \lim X_k = X_0$ şeklinde de yazılabilir. Bu şekildeki bütün bulanık sayı dizilerin kümesi $S^\beta(\Delta^m, F, f)$ ile gösterilecektir. Eğer dizi özel olarak 0 sayısına β −dereceden (Δ^m, f) −istatistiksel yakınsak ise bu durumda böyle dizilerin kümesi de $S^{\beta,0}(\Delta^m, F, f)$ ile gösterilecektir. Ayrıca tanımladığımız bu iki dizi kümesi arasında bir $S^{\beta,0}(\Delta^m, F, f) \subset S^{\beta}(\Delta^m, F, f)$ şeklinde bir kapsama bağıntısının olduğunu da belirtelim. [29]

Uyarı 2.34. β' nın 1' den büyük değerleri için β −dereceden (Δ^m, f) −istatistiksel yakınsaklık iyi tanımlı değildir.

Tanım 2.35. $n \to \infty$ için $\lambda_n \to \infty$ şeklinde tanımlı azalmayan bir $\lambda = (\lambda_n)$ dizisi $\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1$ koşullarına sahip olsun. Λ sembolü ile bu şekildeki dizilerin kümesi gösterilir. (λ_n) dizilerinin kullanılmasıyla genelleştirilmiş de la Vallee-Pousin ortalaması

$$b_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} x_k$$

şeklinde tanımlanır. Burada k değerlerinin ait olduğu I_n aralıkları $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ biçiminde olup n nin değerlerine göre farklı aralıklar elde edilir.

Eğer yukarıda tanımlı $b_n(x)$ dizisinin limiti L sayısı ise (x_k) dizisi L sayısına (V, λ) −toplanabilirdir denir [37].

$\lambda_n = n$ olması durumunda bu toplanabilme türü, $(C, 1)$ −toplanabilme ile aynı anlamda olur.

Özellikle polinomlar kullanarak fonksiyonları yaklaştırma bağlamında, de la Vallée Poussin ortalamaları, fonksiyonun bir seri gösteriminin (örneğin, Fourier serisi, polinom serisi) kısmi toplamlarının belirli doğrusal kombinasyonlarıdır ve Fourier serilerinin düzgün yakınsaklığını iyileştirmek için kullanılır. Bu ortalamalar genellikle sürekli fonksiyonlar için düzgün yakınsama gibi iyi yaklaşım özelliklerine sahiptir.

Tanım 2.36. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

şartı sağlanıyorsa $x = (x_n)$ dizisi L' ye λ −istatistiksel yakınsaktır denir [25]. Bu durumda $S_\lambda - \lim x = L$ veya $x_k \to L(S_\lambda)$ yazılır.

$\lambda_n = n$ özel halinde S_λ ile S uzayları birbirine denk olur.

Teorem 2.37. $S \subseteq S_\lambda$ olması için gerek ve yeterli şart $\lim_{n\to\infty} \inf \frac{\lambda_n}{n} > 0$ olmasıdır [25].

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Kuvvetli toplanabilme ve istatistiksel yakınsaklık kavramları, klasik yakınsaklıktan daha farklı yakınsaklık türleri olup reel sayı dizilerinden daha genel olan fuzzy sayı dizileri gibi geniş bir çerçevede bunların davranışlarını öğrenmek amacıyla bu alanda çalışan araştırmacıların dikkatini çekmiştir. Kuvvetli Cesàro toplanabilme, istatistiksel yakınsaklıktan daha güçlü bir yakınsaklık kavramıdır. Kuvvetli Cesàro yakınsaklık istatistiksel yakınsaklığı gerektirirken, tersi genel olarak doğru değildir. Ancak, dizinin sınırlı olması durumunda, bu iki kavram eşdeğer hale gelir. Bu ilişkiler, fonksiyonel analiz, dizi teorisi ve summabilite teorisi gibi alanlarda önemli rol oynar. Bu kısımda, hangi durumlarda bu yeni kavramların daha genel veya daha güçlü olduğunu incelenmesi amacıyla Karakaş v.d [30] tarafından tanımlanmış olan β −dereceden Δ_λ^m −istatistiksel yakınsaklık ve β −dereceden kuvvetli $\Delta_{\lambda,p}^m$ −toplanabilme tanımları ile bu tanımların klasik yakınsaklık ile olan ilişkilerine yer verilmiştir.

Tanım 3.1. (X_k) bir fuzzy sayı dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n^\beta} |\{k \in I_n : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir X_0 fuzzy sayısı varsa (X_k) fuzzy sayı dizisi, X_0 fuzzy sayısına β −dereceden Δ_λ^m −istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda, $S_\lambda^\beta(\Delta^m, F) - \lim X_k = X_0$ yazılır. $S_\lambda^\beta(\Delta^m, F)$ ile bu şekildeki tüm fuzzy sayı dizilerin kümesini göstereceğiz.

β −dereceden Δ_λ^m −istatistiksel yakınsaklık, $\beta = 1$ için Δ_λ^m −istatistiksel yakınsaklık ile aynıdır. $\beta \in (0,1]$ için β −dereceden Δ_λ^m −istatistiksel yakınsaklık iyi tanımlı olmasına rağmen $\beta > 1$ için iyi tanımlı değildir. (Bkz. Örnek.3.2)

Örnek 3.2.

$$X_k(x) = \begin{cases} \left.\begin{matrix} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ -x+2, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & d.d \end{matrix}\right\}, & k \text{ tek ise} \\ \left.\begin{matrix} x+2, & -2 \leq x \leq -1 \\ -x, & -1 \leq x \leq 0 \\ 0, & d.d \end{matrix}\right\}, & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

fuzzy sayı dizisini göz önüne alalım. Bu taktirde (X_k) ve $(\Delta^m X_k)$ dizilerinin α −seviye kümeleri $m \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$[X_k]^\alpha = \begin{cases} [\alpha, 2-\alpha], & k \text{ tek ise} \\ [\alpha-2, -\alpha], & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

ve

$$[\Delta X_k]^\alpha = \begin{cases}[2\alpha, 4-2\alpha], & k\ tek\ ise\\ [2\alpha-4, -2\alpha], & k\ çift\ ise\end{cases}$$

dır. $[\Delta^2 X_k]^\alpha$ ifadesi

$$[\Delta^2 X_k]^\alpha = \begin{cases}[4\alpha, 8-4\alpha], & k\ tek\ ise\\ [4\alpha-8, -4\alpha], & k\ çift\ ise\end{cases}$$

şeklinde olup (ΔX_k) ve $(\Delta^2 X_k)$ fuzzy fark dizilerinin üyelik fonksiyonları

$$\Delta X_k(x) = \begin{cases}\left.\begin{matrix}\frac{x}{2}, & 0 \le x \le 2\\ \frac{4-x}{2}, & 2 \le \mathrm{x} \le 4\\ 0, & d.d\end{matrix}\right\}, & k\ tek\ ise\\ \left.\begin{matrix}\frac{x+4}{2}, & -4 \le x \le -2\\ -\frac{x}{2}, & -2 \le x \le 0\\ 0, & d.d\end{matrix}\right\}, & k\ çift\ ise\end{cases}$$

ve

$$\Delta^2 X_k(x) = \begin{cases}\left.\begin{matrix}\frac{x}{4}, & 0 \le x \le 4\\ \frac{8-x}{4}, & 4 \le \mathrm{x} \le 8\\ 0, & d.d\end{matrix}\right\}, & k\ tek\ ise\\ \left.\begin{matrix}\frac{x+8}{4}, & -8 \le x \le -4\\ -\frac{x}{4}, & -4 \le x \le 0\\ 0, & d.d\end{matrix}\right\}, & k\ çift\ ise\end{cases}$$

şeklindedir. Burada m defa fark işlemi sonucunda $[\Delta^m X_k]^\alpha$ α −seviye kümesi

$$[\Delta^m X_k]^\alpha = \begin{cases}[2^m.\alpha, 2^m.(2-\alpha)], & k\ tek\ ise\\ [2^m.(\alpha-2), -2^m.\alpha], & k\ çift\ ise\end{cases}$$

olarak bulunur. $(\Delta^m X_k)$ dizisinin üyelik fonksiyonu da

$$(\Delta^m X_k) = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} \dfrac{x}{2^m}, & 0 \le x \le 2^m \\ 2 - \dfrac{x}{2^m}, & 2^m \le x \le 2^{m+1} \\ 0, & d.d. \end{array}\right\} & k \ tek \ ise \\ \left.\begin{array}{ll} \dfrac{x}{2^m} + 2, & -2^{m+1} \le x \le -2^m \\ -\dfrac{x}{2^m}, & -2^m \le x \le 0 \\ 0, & d.d. \end{array}\right\} & k \ çift \ ise \end{cases}$$

şeklindedir. Buradan $\beta > 1$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda^\beta} |\{k \in I_n : d([\Delta^m X_k]^\alpha, [l_1]^\alpha) \ge \varepsilon\}| \le \lim_{n\to\infty} \frac{[\lambda_n] + 1}{2\lambda_n^\beta} = 0$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda^\beta} |\{k \in I_n : d([\Delta^m X_k]^\alpha, [l_2]^\alpha) \ge \varepsilon\}| \le \lim_{n\to\infty} \frac{[\lambda_n] + 1}{2\lambda_n^\beta} = 0$$

elde edilir. Burada

$$[l_1]^\alpha = [2^m.\alpha, 2^m.(2-\alpha)]$$

ve

$$[l_2]^\alpha = [2^m.(\alpha - 2), -2^m.\alpha]$$

dır.

Böylece (X_k) dizisi l_1 ve l_2 fuzzy sayılarına β −dereceden Δ_λ^m −istatistiksel yakınsak olur. Bu ise istatistiksel limitin tekliğinden dolayı imkansızdır.

Tanım 3.3. (X_k) bir fuzzy sayı dizisi olsun. $\beta \in (0,1]$ için $p > 0$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n^\beta} \sum [d(\Delta^m X_k, X_0)]^p = 0$$

olacak şekilde bir X_0 fuzzy sayı varsa (X_k) dizisi X_0 fuzzy sayısına β −dereceden kuvvetli $\Delta_{\lambda,p}^m$ −toplanabilirdir denir. Eğer $\beta = 1$ ise β −dereceden $\Delta_{\lambda,p}^m$ −toplanabilme, $\Delta_{\lambda,p}^m$ −toplanabilmeye indirgenir.

Fuzzy sayı dizileri için tüm β −dereceden kuvvetli $\Delta_{\lambda,p}^{m}$ −toplanabilen dizilerin kümesini $W_{\lambda}^{\beta}(\Delta^m, F, p)$ ile göstereceğiz.

Teorem 3.4. $\beta \in (0,1]$ ve (X_k) ile (Y_k) iki fuzzy sayı dizisi olsun. Bu taktirde

i. Eğer $S_{\lambda}^{\beta}(\Delta^m, F) - \lim X_k = X_0$ ve $c \in \mathbb{R}$ ise $S_{\lambda}^{\beta}(\Delta^m, F) - \lim cX_k = cX_0$ dır.

ii. Eğer $S_{\lambda}^{\beta}(\Delta^m, F) - \lim X_k = X_0$ ve $S_{\lambda}^{\beta}(\Delta^m, F) - \lim Y_k = Y_0$ ise $S_{\lambda}^{\beta}(\Delta^m, F) - \lim(X_k + Y_k) = X_0 + Y_0$ dır.

İspat. (i) Aşikardır.

(ii) İspat aşağıdaki eşitsizlikten çıkar:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_n^{\beta}}|\{k \in I_n: d(\Delta^m X_k + \Delta^m Y_k, X_0 + Y_0) \geq \varepsilon\}| &\leq \frac{1}{\lambda_n^{\beta}}|\{k \in I_n: d(\Delta^m X_k, X_0) + d(\Delta^m Y_k, Y_0) \geq \varepsilon\}| \\ &\leq \frac{1}{\lambda_n^{\beta}}\left|\left\{k \in I_n: d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| + \frac{1}{\lambda_n^{\beta}}\left|\left\{k \in I_n: d(\Delta^m Y_k, Y_0) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|\end{aligned}$$

$\lambda_n = n$, $\beta = 1$ ve $m = 0$ durumunda istatistiksel yakınsaklık, λ −istatistiksel yakınsaklık ve β −dereceden Δ_{λ}^{m} −istatistiksel yakınsaklık birbirine denktir. Ayrıca, [10] ’da tanımlanan $S_{\lambda}(\Delta^m, F)$ ile $S_{\lambda}^{\beta}(\Delta^m, F)$ kümeleri birbirinden farklıdır.

Eğer $0 < \beta < 1$ için $\lambda_n = n^{\beta}$ alınırsa

$$S^{\beta}(\Delta^m, F) \subseteq S_{\lambda}(\Delta^m, F)$$

olur.

$\beta = 1$ ve $m = 0$ için $\lambda_n = n$ alınırsa

$$S^{\beta}(\Delta^m, F) = S_{\lambda}(\Delta^m, F) = S(F)$$

elde edilir.

Teorem 3.5. $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ olsun ve (X_k) bir fuzzy sayı dizisi olsun. Eğer bir (X_k) fuzzy sayı dizisi, X_0 fuzzy sayısına β −dereceden Δ_{λ}^{m} −istatistiksel yakınsak ise aynı X_0 fuzzy sayısına γ −dereceden Δ_{λ}^{m} −istatistiksel yakınsak olup

$$S_{\lambda}^{\beta}(\Delta^m, F) \subset S_{\lambda}^{\gamma}(\Delta^m, F)$$

kapsama bağıntısı vardır. Buradaki bağıntı $\gamma > \beta$ olması şartıyla bazı β ve γ’ lar için kesindir.

İspat. $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ olsun. Bu taktirde her $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{\lambda_n^{\gamma}}|\{k \in I_n: d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{\lambda_n^{\beta}}|\{k \in I_n: d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}|$$

elde edilir ve böylece

$$S_\lambda^\beta(\Delta^m, F) \subset S_\lambda^\gamma(\Delta^m, F)$$

olur.

Aşağıda verilen örnek bu kapsama bağıntısının kesinliği içindir.

Örnek 3.6.

$$X_k(x) = \begin{cases} \left.\begin{matrix} x-k+1, & x \in [k-1,k] \\ -x+k+1, & x \in [k,k+1] \\ 0, & d.d \end{matrix}\right\}, & k = n^3 \; ise \; (n = 1,2,3,\dots) \\ \left.\begin{matrix} x+2, & x \in [-2,-1] \\ -x, & x \in [-1,0] \\ 0, & d.d \end{matrix}\right\} = X_0, & d.d \end{cases}$$

Bu taktirde (X_k) ve (ΔX_k)' nın α −seviye kümeleri

$$[X_k]^\alpha = \begin{cases} [\alpha + k - 1, -\alpha + k + 1], & k = n^3 \; ise \\ [\alpha - 2, -\alpha], & d.d \end{cases}$$

ve

$$[\Delta X_k]^\alpha = \begin{cases} [2\alpha + k - 1, -2\alpha + k + 3], & k = n^3 \\ [2\alpha - k - 4, -2\alpha - k], & k + 1 = n^3 \\ [2\alpha - 2, -2\alpha + 2], & d.d \end{cases}$$

dır. $[\Delta^2 X_k]^\alpha$ ifadesi

$$[\Delta^2 X_k]^\alpha = \begin{cases} [4\alpha + k - 3, -4\alpha + k + 5], & k = n^3 \\ [4\alpha - 2k - 8, -4\alpha - 2k], & k + 1 = n^3 \\ [4\alpha + k - 1, -4\alpha + k + 7], & k + 2 = n^3 \\ [4\alpha - 4, -4\alpha + 4], & d.d \end{cases}$$

şeklinde olup (ΔX_k) ve $(\Delta^2 X_k)$ fuzzy fark dizilerinin üyelik fonksiyonları

$$\Delta X_k(x)=\begin{cases}\left.\begin{array}{ll}\dfrac{-\mathrm{k}+1+\mathrm{x}}{2}, & \mathrm{k}-1\leq \mathrm{x}\leq \mathrm{k}+1\\ \dfrac{\mathrm{k}+3-\mathrm{x}}{2}, & \mathrm{k}+1\leq \mathrm{x}\leq \mathrm{k}+3\\ 0, & \mathrm{d.d}\end{array}\right\}, & k=n^3\\ \left.\begin{array}{ll}\dfrac{x+\mathrm{k}+4}{2}, & -\mathrm{k}-4\leq \mathrm{x}\leq -\mathrm{k}-2\\ -\dfrac{\mathrm{k}+\mathrm{x}}{2}, & -\mathrm{k}-2\leq \mathrm{x}\leq -\mathrm{k}\\ 0, & \mathrm{d.d}\end{array}\right\}, & k+1=n^3\\ \left.\begin{array}{ll}\dfrac{2+\mathrm{x}}{2}, & -2\leq \mathrm{x}\leq 0\\ \dfrac{2-\mathrm{x}}{2}, & 0\leq \mathrm{x}\leq 2\\ 0, & \mathrm{d.d}\end{array}\right\}, & \mathrm{d.d}\end{cases}$$

ve

$$\Delta^2 X_k(x)=\begin{cases}\left.\begin{array}{ll}\dfrac{-\mathrm{k}+3+\mathrm{x}}{4}, & \mathrm{k}-3\leq \mathrm{x}\leq \mathrm{k}+1\\ \dfrac{\mathrm{k}+5-\mathrm{x}}{4}, & \mathrm{k}+1\leq \mathrm{x}\leq \mathrm{k}+5\\ 0, & \mathrm{d.d}\end{array}\right\}, & k=n^3\\ \left.\begin{array}{ll}\dfrac{2\mathrm{k}+8+\mathrm{x}}{4}, & -2\mathrm{k}-8\leq \mathrm{x}\leq -2\mathrm{k}-4\\ -\dfrac{2\mathrm{k}+\mathrm{x}}{4}, & -2\mathrm{k}-4\leq \mathrm{x}\leq -2\mathrm{k}\\ 0, & \mathrm{d.d}\end{array}\right\}, & k+1=n^3\\ \left.\begin{array}{ll}\dfrac{-\mathrm{k}+1+\mathrm{x}}{4}, & \mathrm{k}-1\leq \mathrm{x}\leq \mathrm{k}+3\\ \dfrac{\mathrm{k}+7-\mathrm{x}}{4}, & \mathrm{k}+3\leq \mathrm{x}\leq \mathrm{k}+7\\ 0, & \mathrm{d.d}\end{array}\right\}, & k+2=n^3\\ \left.\begin{array}{ll}\dfrac{4+\mathrm{x}}{4}, & -4\leq \mathrm{x}\leq 0\\ \dfrac{4-\mathrm{x}}{4}, & 0\leq \mathrm{x}\leq 4\\ 0, & \mathrm{d.d}\end{array}\right\}, & \mathrm{d.d}\end{cases}$$

şeklinde bulunur. Burada m defa fark işlemi sonucunda $[\Delta^m X_k]^\alpha$ α −seviye kümesi

$$[\Delta^m X_k]^\alpha=\begin{cases}[\mathrm{U}_1]^\alpha, & k=n^3\\ [\mathrm{U}_2]^\alpha, & k+1=n^3\\ [\mathrm{U}_3]^\alpha, & k+2=n^3\\ . & \\ . & \\ . & \\ [2^{\mathrm{m}}(\alpha-1),2^{\mathrm{m}}(1-\alpha)]^\alpha, & d.d.\end{cases}$$

şeklinde bulunur. Burada $[U_1]^\alpha$, $[U_2]^\alpha$, $[U_3]^\alpha$, ... α −seviye kümelerine karşılık gelen üçgen fuzzy sayılar U_1, U_2, U_3, . . . olmak üzere $(\Delta^m X_k)$ dizisinin üyelik fonksiyonu

$$(\Delta^m X_k) = \begin{cases} U_1, & k = n^3 \\ U_2, & k+1 = n^3 \\ U_3, & k+2 = n^3 \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ \left.\begin{array}{ll} \frac{x}{2^m}+1, & -2^m \leq x \leq 0 \\ \frac{-x}{2^m}+1, & 0 \leq x \leq 2^m \\ 0, & d.d. \end{array}\right\} := X_0 & d.d. \end{cases},$$

şeklinde hesaplanır. $\lambda_n = n$ durumunda m defa fark işlemi sonucunda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n^\gamma} |\{k \in I_n : d([\Delta^m X_k]^\alpha, [X_0]^\alpha) \geq \varepsilon\}| \quad \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{3}}}{n^\gamma}$$

yazılabilir.

Böylece, $\gamma \in \left(\frac{1}{3}, 1\right]$ için (X_k) dizisini X_0 fuzzy sayısına γ −dereceden Δ_λ^m −istatistiksel yakınsak olduğu görülür. Burada

$$[X_0]^\alpha = [2^m.(\alpha - 1), 2^m.(1 - \alpha)]$$

dır. (X_k) dizisi $\beta \in \left(0, \frac{1}{3}\right]$ için β −dereceden Δ_λ^m −istatistiksel yakınsak değildir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.7. (X_k) bir fuzzy sayı dizisi olsun. Eğer her bir $\beta \in (0,1]$ için (X_k) fuzzy sayı dizisi, X_0 fuzzy sayıya β −dereceden Δ_λ^m −istatistiksel yakınsaktır. Yani

$$S_\lambda^\beta(\Delta^m, F) \subset S_\lambda(\Delta^m, F)$$

dir ve kapsama kesindir.

Teorem 3.8. $S(\Delta^m, F) \subset S_\lambda^\beta(\Delta^m, F)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n\to\infty} \inf \frac{\lambda_n^\beta}{n} > 0$$

olmasıdır.

İspat. ($\Leftarrow$): Öncelikle ispatın tersini yapalım. Bunun için $\lim_{n\to\infty} \inf \frac{\lambda_n^\beta}{n} > 0$ olduğunu kabul edelim. $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu taktirde

$$\{k \leq \mathrm{n}: d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\} \supset \{k \in I_n: d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}$$

ve böylece

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\{k \leq \mathrm{n}: d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\} &\geq \frac{1}{n}|\{k \in I_n: d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \\ &= \frac{\lambda_n^\beta}{n} \cdot \frac{1}{\lambda_n^\beta}|\{k \in I_n: d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

yazılabilir.

$n \to \infty$ durumunda eşitsizliğin sol tarafı sıfıra giderceğinden istatistiksel yakınsaklık β −dereceden Δ_λ^m −istatistiksel yakınsaklığı gerektirir.

($\Rightarrow$): Şimdi de ispatın diğer yönü için $\lim_{n\to\infty} \inf \frac{\lambda_n^\beta}{n} = 0$ olduğunu kabul edelim.

Bunun için aşağıdaki örneği verebiliriz.

Örnek 3.9. $\lim_{n\to\infty} \inf \frac{\lambda_n^\beta}{n} = 0$ olduğu için $(j = 1,2,3, \dots)$ olmak üzere öyle bir (n_j) alt dizisi vardır ki $\frac{\lambda_{n_j}^\beta}{n_j} < \frac{1}{j}$ dir.

Şimdi (X_k) fuzzy sayı dizisini

$$X_k(x) = \begin{cases} \left.\begin{matrix} x-6, & 6 \leq x \leq 7 \\ 8-x, & 7 \leq x \leq 8 \\ 0, & d.d \end{matrix}\right\}, & k \in I_{n_j} \\ \left.\begin{matrix} x-4, & 4 \leq x \leq 5 \\ 6-x, & 5 \leq x \leq 6 \\ 0, & d.d \end{matrix}\right\}, & d.d \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım.

Bu taktirde, (X_k) dizisinin α −seviye kümesini

$$[X_k]^\alpha = \begin{cases} [6+\alpha, 8-\alpha], & k \in I_{n_j} \\ [4+\alpha, 6-\alpha], & d.d \end{cases}$$

şeklinde bulabiliriz. Buna göre (X_k) dizisinin istatistiksel yakınsak fakat Δ_λ^m $-$istatistiksel yakınsak olmadığını görmek kolaydır. Sonuç.3.7' den dolayı $S_\lambda^\beta(\Delta^m, F) \subset S(\Delta^m, F)$ olduğundan (X_k) dizisi β $-$dereceden istatistiksel yakınsak olamaz. Bu bir çelişki olup $\lim_{n\to\infty} \inf \frac{\lambda_n^\beta}{n} > 0$ dır.

Teorem 3.10. $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ ve $p > 0$ olsun. Eğer bir (X_k) fuzzy sayı dizisi, bir X_0 fuzzy sayıya β $-$dereceden kuvvetli Δ_λ^m $-$toplanabilir ise aynı X_0 fuzzy sayıya γ $-$dereceden kuvvetli $\Delta_{\lambda,p}^m$ $-$toplanabilirdir. Yani

$$W_\lambda^\beta(\Delta^m, \mathrm{F}, p) \subset W_\lambda^\gamma(\Delta^m, F, p)$$

olup kapsama $\beta < \gamma$ olacak şekilde β ve γ' lar için kesindir.

İspat. Kabul edelim ki (X_k) fuzzy sayı dizisi bir X_0 fuzzy sayıya β $-$dereceden kuvvetli $\Delta_{\lambda,p}^m$ $-$toplanabilir olsun. Bu taktirde $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ şeklindeki β ve γ reel sayıları ve bir $p > 0$ reel sayısı için

$$\frac{1}{\lambda_n^\gamma} \sum_{k \in I_n} [d(\Delta^m X_k, X_0)]^p \quad \leq \frac{1}{\lambda_n^\beta} \sum [d(\Delta^m X_k, X_0)]^p$$

yazılabilir. Bu nedenle (X_k) dizisi X_0 fuzzy sayıya γ $-$dereceden kuvvetli $\Delta_{\lambda,p}^m$ $-$toplanabilirdir. Kapsamanın kesinliğini görmek için aşağıdaki örneği göz önüne alalım.

Örnek 3.11. (X_k) fuzzy sayı dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$X_k(x) = \begin{cases} \left.\begin{matrix} x-6, & 6 \leq x \leq 7 \\ 8-x, & 7 \leq x \leq 8 \\ 0, & d.d \end{matrix}\right\}, & k = n^4 \\ \left.\begin{matrix} x-4, & 4 \leq x \leq 5 \\ 6-x, & 5 \leq x \leq 6 \\ 0, & d.d \end{matrix}\right\}, & d.d \end{cases}$$

Bu durumda (X_k) ve (ΔX_k) dizilerinin α $-$seviye kümeleri

$$[X_k]^\alpha = \begin{cases} [6+\alpha, 8-\alpha], & k = n^4 \\ [4+\alpha, 6-\alpha], & d.d \end{cases}$$

ve

$$[\Delta X_k]^\alpha = \begin{cases} [2\alpha, 4-2\alpha], & k = n^4 \\ [-4+2\alpha, -2\alpha], & k+1 = n^4 \\ [-2+2\alpha, 2-2\alpha], & d.d \end{cases}$$

dır. $[\Delta^2 X_k]^\alpha$ ifadesi

$$[\Delta^2 X_k]^\alpha = \begin{cases} [4\alpha - 2{,}6 - 4\alpha], & k = n^4 \\ [4\alpha - 8, -4\alpha], & k+1 = n^4 \\ [4\alpha - 2, -4\alpha + 6], & k+2 = n^4 \\ [4\alpha - 4, -4\alpha + 4], & d.d \end{cases}$$

şeklinde olup (ΔX_k) ve $(\Delta^2 X_k)$ fuzzy fark dizilerinin üyelik fonksiyonları

$$\Delta X_k(x) = \begin{cases} \left.\begin{matrix} \frac{x}{2}, & 0 \le \mathrm{x} \le 2 \\ 2 - \frac{x}{2}, & 2 \le \mathrm{x} \le 4 \\ 0, & \mathrm{d.d} \end{matrix}\right\}, & k = n^4 \\ \left.\begin{matrix} \frac{x}{2} + 2, & -4 \le \mathrm{x} \le -2 \\ \frac{-x}{2}, & -2 \le \mathrm{x} \le 0 \\ 0, & \mathrm{d.d} \end{matrix}\right\}, & k+1 = n^4 \\ \left.\begin{matrix} \frac{x}{2} + 1, & -2 \le \mathrm{x} \le 0 \\ 1 - \frac{x}{2}, & 0 \le \mathrm{x} \le 2 \\ 0, & \mathrm{d.d} \end{matrix}\right\}, & \mathrm{d.d} \end{cases}$$

ve

$$\Delta^2 X_k(x) = \begin{cases} \left.\begin{matrix} \frac{x}{4} + \frac{1}{2}, & -2 \le \mathrm{x} \le 2 \\ \frac{3}{2} - \frac{x}{4}, & 2 \le \mathrm{x} \le 6 \\ 0, & \mathrm{d.d} \end{matrix}\right\}, & k = n^4 \\ \left.\begin{matrix} \frac{x}{4} + 2, & -8 \le \mathrm{x} \le -4 \\ -\frac{x}{4}, & -4 \le \mathrm{x} \le 0 \\ 0, & \mathrm{d.d} \end{matrix}\right\}, & k+1 = n^4 \\ \left.\begin{matrix} \frac{x}{4} + \frac{1}{2}, & -2 \le \mathrm{x} \le 2 \\ \frac{3}{2} - \frac{x}{4}, & 2 \le \mathrm{x} \le 6 \\ 0, & \mathrm{d.d} \end{matrix}\right\}, & k+2 = n^4 \\ \left.\begin{matrix} \frac{x}{4} + 1, & -4 \le \mathrm{x} \le 0 \\ 1 - \frac{x}{4}, & 0 \le \mathrm{x} \le 4 \\ 0, & \mathrm{d.d} \end{matrix}\right\}, & \mathrm{d.d} \end{cases}$$

şeklindedir. Burada m defa fark işlemi sonucunda $[\Delta^m X_k]^\alpha$ α −seviye kümesi

$$[\Delta^m X_k]^\alpha = \begin{cases} [\mathrm{U}_1]^\alpha, & k = n^3 \\ [\mathrm{U}_2]^\alpha, & k+1 = n^3 \\ [\mathrm{U}_3]^\alpha, & k+2 = n^3 \\ . & \\ . & \\ . & \\ [2^{\mathrm{m}}(\alpha-1), 2^{\mathrm{m}}(1-\alpha)], & d.d. \end{cases}$$

şeklinde bulunur. Burada $[\mathrm{U}_1]^\alpha$, $[\mathrm{U}_2]^\alpha$, $[\mathrm{U}_3]^\alpha$, ... α −seviye kümelerine karşılık gelen üçgen fuzzy sayılar U_1, U_2, U_3, . . . olmak üzere $(\Delta^m X_k)$ dizisinin üyelik fonksiyonu

$$(\Delta^m X_k) = \begin{cases} \mathrm{U}_1, & k = n^3 \\ \mathrm{U}_2, & k+1 = n^3 \\ \mathrm{U}_3, & k+2 = n^3 \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ \left.\begin{matrix} \dfrac{x}{2^{\mathrm{m}}}+1, & -2^m \le x \le 0 \\ \dfrac{-x}{2^{\mathrm{m}}}+1, & 0 \le x \le 2^m \\ 0, & d.d. \end{matrix}\right\} := X_0 & d.d. \end{cases}$$

şeklinde hesaplanır.

Örneğin $\lambda_n = n$ alınırsa ve $m \in \mathbb{N}$ için m defa fark işlemi yapılırsa $m \geq 1$ için

$$\frac{1}{\lambda_n^\gamma}\sum[d([\Delta^m X_k]^\alpha, [X_0]^\alpha)]^p \quad \leq \frac{2(m+1)[\sqrt[4]{n}]}{n^\gamma} \tag{1}$$

bulunur. (1) eşitsizliğinin sağ tarafı $n \to \infty$ için sıfıra gittiğinden (X_k) dizisi X_0 fuzzy sayısına γ −dereceden kuvvetli $\Delta_{\lambda,p}^m$ −toplanabilirdir.

Burada $\gamma \in \left(\frac{1}{4}, 1\right]$ ve $p = 1$ için

$$[X_0]^\alpha = [2^m.(\alpha-1), 2^m.(1-\alpha)]$$

dır. Diğer yandan

$$\frac{2m[\sqrt[4]{n}-1]}{n^\beta} \leq \frac{1}{\lambda_n^\beta}\sum_{k\in I_n}[d([\Delta^m X_k]^\alpha, [X_0]^\alpha)]^p \tag{2}$$

yazılabilir. (2) eşitsizliğinin sol tarafı $n \to \infty$ durumunda $\beta \in \left(0, \frac{1}{4}\right]$ ve $p = 1$ için sıfıra gittiğinden dolayı (X_k) dizisi X_0 fuzzy sayısına β −dereceden kuvvetli $\Delta_{\lambda,p}^m$ −toplanabilir değildir. Bu ispatı tamamlar.

Sonuç 3.12. $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ ve $p > 0$ olsun. Bu taktirde

i. $W_\lambda^\beta(\Delta^m, F, p) = W_\lambda^\gamma(\Delta^m, F, p) \Leftrightarrow \beta = \gamma$

ii. $W_\lambda^\beta(\Delta^m, F, p) \subseteq W_\lambda(\Delta^m, F, p)$ (her bir $\beta \in (0,1]$ ve $p > 0$ için)

Teorem 3.13. $0 < p < q < \infty$ ve $\beta \in (0,1]$ olsun. Eğer bir (X_k) fuzzy sayı dizisi, X_0 fuzzy sayıya β −dereceden kuvvetli $\Delta_{\lambda,q}^m$ −toplanabilir ise bu taktirde X_0' a β −dereceden kuvvetli $\Delta_{\lambda,p}^m$ −toplanabilirdir. Yani

$$W_\lambda^\beta(\Delta^m, \mathrm{F}, q) \subset W_\lambda^\beta(\Delta^m, F, p)$$

dır.

İspat. İspat aşikardır.

Teorem 3.14. $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ ve $p > 0$ bir reel sayı olsun. Eğer (X_k) fuzzy sayı dizisi, X_0 fuzzy sayıya β −dereceden kuvvetli $\Delta_{\lambda,p}^m$ −toplanabilir ise bu durumda aynı X_0 fuzzy sayısına γ −dereceden Δ_λ^m −istatistiksel yakınsaktır. Yani

$$W_\lambda^\beta(\Delta^m, \mathrm{F}, p) \subset S_\lambda^\gamma(\Delta^m, F)$$

dir.

İspat. $\varepsilon > 0$ verilsin ve herhangi bir (X_k) fuzzy sayı dizisi göz önüne alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in I_n} [d(\Delta^m X_k, X_0)]^p &= \sum_{\substack{k \in I_n \\ d(\Delta^m X_k, X_0) < \varepsilon}} [d(\Delta^m X_k, X_0)]^p + \sum_{\substack{k \in I_n \\ d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon}} [d(\Delta^m X_k, X_0)]^p \\
&\geq \sum_{\substack{k \in I_n \\ d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon}} [d(\Delta^m X_k, X_0)]^p \\
&\geq |\{k \in I_n : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| . \varepsilon^p
\end{aligned}$$

ve böylece

$$\frac{1}{\lambda_n^{\beta}}\sum_{k\in I_n}[d(\Delta^m X_k,X_0)]^p \geq \frac{1}{\lambda_n^{\beta}}|\{k\in I_n: d(\Delta^m X_k,X_0)\geq\varepsilon\}|.\varepsilon^p$$
$$\geq \frac{1}{\lambda_n^{\gamma}}|\{k\in I_n: d(\Delta^m X_k,X_0)\geq\varepsilon\}|.\varepsilon^p$$

yazılabilir. Buradan gerekli limit işlemleri sonucunda

$$W_\lambda^{\beta}(\Delta^m,\mathrm{F},p)\subset S_\lambda^{\gamma}(\Delta^m,F)$$

olduğu kolayca görülebilir.

Sonuç 3.15. p bir pozitif reel sayı ve $\beta\in(0,1]$ olsun. Bu durumda

$$W_\lambda^{\beta}(\Delta^m,F,p)\subset S_\lambda^{\beta}(\Delta^m,F)$$

dir ve limitler korunur.

Sonuç 3.16. $p>0$ ve $\beta\in(0,1]$ olsun. Bu durumda

$$W_\lambda^{\beta}(\Delta^m,F,p)\subset S_\lambda(\Delta^m,F)$$

olup $\beta\in(0,1)$ olması durumunda kapsama kesindir ve limitler korunur.

4. MODÜLÜS FONKSİYONU VE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Tanım 4.1. f bir modülüs fonksiyonu $p = (p_k)$ kesin pozitif reel sayı dizisi, $\beta \in (0,1]$ ve (X_k) bir fuzzy sayı dizisi olsun. Bu taktirde $W_\lambda^\beta(\Delta^m, F, f, p)$ dizi kümesi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$W_\lambda^\beta(\Delta^m, F, f, p) \quad = \left\{ x = (X_k) \colon \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n^\beta} \sum_{k\in I_n} \left[f\left(d(\Delta^m X_k, X_0) \right) \right]^{p_k} = 0 \right\}$$

Teorem 4.2. $\beta, \alpha \in (0,1]$ sayıları, $\beta \leq \alpha$ olacak şekilde herhangi reel sayılar ve f bir modülüs fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$W_\lambda^\beta(\Delta^m, F, f, p) \subset S_\lambda^\beta(\Delta^m, F).$$

İspat. $\varepsilon > 0$ verilsin ve kabul edelim ki $x \in W_\lambda^\beta(\Delta^m, F, f, p)$ olsun ve Her bir n için $\lambda_n^\beta \leq \lambda_n^\alpha$ olduğundan dolayı

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n^\beta} \sum \left[f\left(d(\Delta^m X_k, X_0) \right) \right]^{p_k} \quad &= \frac{1}{\lambda_n^\beta} \sum_{\substack{k\in I_n \\ d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon}} \left[f\left(d(\Delta^m X_k, X_0) \right) \right]^{p_k} + \frac{1}{\lambda_n^\beta} \sum_{\substack{k\in I_n \\ d(\Delta^m X_k, X_0) < \varepsilon}} \left[f\left(d(\Delta^m X_k, X_0) \right) \right]^{p_k} \\
&\geq \frac{1}{\lambda_n^\alpha} \sum_{\substack{k\in I_n \\ d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon}} \left[f\left(d(\Delta^m X_k, X_0) \right) \right]^{p_k} + \frac{1}{\lambda_n^\beta} \sum_{\substack{k\in I_n \\ d(\Delta^m X_k, X_0) < \varepsilon}} \left[f\left(d(\Delta^m X_k, X_0) \right) \right]^{p_k} \\
&\geq \frac{1}{\lambda_n^\alpha} \sum_{\substack{k\in I_n \\ d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon}} [f(\varepsilon)]^{p_k} \\
&\geq \frac{1}{\lambda_n^\alpha} \sum_{\substack{k\in I_n \\ d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon}} \min\left([f(\varepsilon)]^{\mathrm{h}}, [f(\varepsilon)]^{\mathrm{H}} \right) \\
&\geq \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n \colon d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \times \min\left([f(\varepsilon)]^{\mathrm{h}}, [f(\varepsilon)]^{\mathrm{H}} \right)
\end{aligned}$$

yazılabilir. $x \in W_\lambda^\beta(\Delta^m, F, f, p)$ olduğundan yukarıdaki eşitsizliğin sol tarafı $n \to \infty$ için sıfıra gider. $\min\left([f(\varepsilon)]^h, [f(\varepsilon)]^H\right) > 0$ olduğundan sağ taraf da sıfıra gider. Bu da

$$W_\lambda^\beta(\Delta^m, F, f, p) \subset S_\lambda^\beta(\Delta^m, F)$$

olmasını gerektirir.

Teorem 4.3. $\beta, \alpha \in (0,1]$ sayıları $\beta \leq \alpha$ olacak şekilde herhangi reel sayılar olsun. Eğer f modülüsü sınırlı ise

$$S_{\lambda}^{\beta}(\Delta^m, F) \subset W_{\lambda}^{\beta}(\Delta^m, F, f, p)$$

dir.

İspat. $x \in S_{\lambda}^{\beta}(\Delta^m, F)$ olsun ve f' nin sınırlı olduğunu kabul edelim. $\varepsilon > 0$ verilsin. ε_1 ve ε_2 sırasıyla $k \in I_n, d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon$ ve $k \in I_n, d(\Delta^m X_k, X_0) < \varepsilon$ üzerindeki toplamları göstersin. f sınırlı olduğundan her $x \geq 0$ için $f(x) \leq K$ olacak şekilde bir K tamsayısı mevcuttur.

Her bir n için $\lambda_n^{\alpha} \leq \lambda_n^{\beta}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda_n^{\beta}} \sum_{k \in I_n} \left[f\left(d(\Delta^m X_k, X_0)\right)\right]^{p_k} &\leq \frac{1}{\lambda_n^{\alpha}} \sum_{k \in I_n} \left[f\left(d(\Delta^m X_k, X_0)\right)\right]^{p_k} \\
&= \frac{1}{\lambda_n^{\alpha}} \left(\sum_1 \left[f\left(d(\Delta^m X_k, X_0)\right)\right]^{p_k} + \sum_2 \left[f\left(d(\Delta^m X_k, X_0)\right)\right]^{p_k} \right) \\
&\leq \frac{1}{\lambda_n^{\beta}} \left(\sum_1 \max(K^h, K^H) + \sum_2 [f(\varepsilon)]^{p_k} \right) \\
&\leq \max(K^h, K^H) \times \frac{1}{\lambda_n^{\alpha}} \left|\{k \in I_n : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}\right| + \max\left(f(\varepsilon)^{\mathrm{h}}, f(\varepsilon)^{\mathrm{H}}\right)
\end{aligned}$$

yazılabilir. $x \in S_{\lambda}^{\beta}(\Delta^m, F)$ olduğundan dolayı $n \to \infty$ iken yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafının ilk terimi sıfıra gider ve ikinci terim istenildiği kadar küçük yapılabilir. Bu nedenle yukarıdaki eşitsizliğin sol tarafı sıfıra gider. Bu nedenle

$$x \in W_{\lambda}^{\beta}(\Delta^m, F, f, p)$$

olur.

Teorem 4.4. $\beta \in (0,1]$ herhangi bir reel sayı olsun. Bu taktirde

$$S_{\lambda}^{\beta}(\Delta^m, F) = W_{\lambda}^{\beta}(\Delta^m, F, f, p)$$

olması için gerek yeter şart f' nin sınırlı olmasıdır.

İspat. f sınırlı olsun. Bu durumda Teorem 4.2. ve Teorem 4.3.' ten

$$S_{\lambda}^{\beta}(\Delta^m, F) = W_{\lambda}^{\beta}(\Delta^m, F, f, p)$$

elde edilir.

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada, $\beta \in (0, 1]$ olmak üzere fuzzy sayı dizileri için Δ^m −istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli Δ_p^m −Cesàro toplanabilme kavramları genelleştirilerek $S_\lambda^\beta(\Delta^m, F)$ ve $W_\lambda^\beta(\Delta^m, F, p)$ dizi kümeleri tanımlanmış ve bunlar arasındaki kapsama bağıntılarına yer verilmiştir. Ayrıca bir f modülüs fonksiyonu yardımıyla $W_\lambda^\beta(\Delta^m, F, f, p)$ dizi kümesi tanımlanarak $S_\lambda^\beta(\Delta^m, F)$ dizi kümesiyle arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Konunun daha iyi anlaşılabilmesi amacıyla üçgensel fuzzy sayı dizisi kullanılarak pek çok örnek verilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] A. Zygmund, Trigonometric Series, Cambridge University Press, Cambridge, UK. 1979.

[2] H. Steinhaus, Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, Colloquium Mathematicum. 2 (1951) 73-74.

[3] H. Fast, Sur la convergence statistique, Colloq. Math. 2 (1951) 241-244.

[4] I. J. Schoenberg, The integrability of certain functions and related summability methods, Amer. Math. Monthly. 66 (1959) 361-375.

[5] J. S. Connor, The statistical and strong p-Cesàro convergence of sequences, Analysis. 8 (1988) 47-63.

[6] M. Et, Strongly almost summable difference sequences of order m defined by a modulus, Studia Sci. Math. Hungar. 40(4) (2003) 463-476.

[7] J.A. Fridy, On the statistical convergence, Analysis. 5 (1985) 301-313.

[8] M. Mursaleen, λ-statistical convergence, Math. Slovaca. 50(1) (2000) 111-115.

[9] H. Çakallı, On statistical convergence in topological groups, Pure Appl Math Sci. 43 (1996) 27-31.

[10] A. Caserta, G.D. Maio, L.D.R. Kocina, Statistical convergence in function spaces, Abstr Appl Anal. 11 (2011) Article ID:420419.

[11] L.A. Zadeh, Fuzzy sets, Inform Control. 8 (1965) 338-353.

[12] M. Matloka, Sequences of fuzzy numbers, BUSEFAL. 28 (1986) 28-37.

[13] S. Nanda, On sequence of fuzzy numbers, Fuzzy Sets Syst. 33 (1989) 123-126.

[14] F. Nuray, E. Savaş, Statistical convergence of sequences of fuzzy real numbers, Math Slovaca. 45(3) (1995) 269-273.

[15] J.S. Kwon, On statistical and p-Cesàro convergence of fuzzy numbers, Korean J. Comput. Appl. Math. 7(1) (2000) 195-203.

[16] R. Çolak, H. Altınok, M. Et, Generalized difference sequences of fuzzy numbers, Chaos, Solitons&Fractals. 40 (2009) 1106-1117.

[17] H. Altınok, Y. Altın, M. Işık, Statistical Convergence and Strong p-Cesàro Summability of Order β in Sequences of Fuzzy Numbers, Iranian J. of Fuzzy System. 9(2) (2012) 63-73.

[18] H. Altinok, Statistical convergence of order β for generalized difference sequences of fuzzy numbers, J Intell Fuzzy Syst. 26 (2014) 847-856.

[19] M. Et, H. Altınok, R. Çolak, On λ-statistical convergence of difference sequences of fuzzy numbers, Inform. Sci. 176(15) (2006) 2268-2278.

[20] H. Kizmaz, On certain sequence spaces, Canad Math Bull. 24(2) (1981) 169-176.

[21] M. Et, R. Çolak, On some generalized difference sequence spaces, Soochow J. Math. 21(4) (1995) 377-386.

[22] A.D. Gadjiev, C. Orhan, Some approximation theorems via statistical convergence, Rocky Mountain J. Math. 32(1) (2002) 129-138.

[23] R. Çolak, Statistical convergence of order α, Modern Methods in Analysis and Its Applications, New Delhi, India: Anamaya Pub. (2010) 121-129.

[24] R. Çolak, C.A. Bektaş, λ–Statistical Convergence of Order β, Acta Math Sci Ser B Engl Ed 31(3) (2011), 953–959.

[25] M. Mursaleen, $\lambda -$Statistical convergence, Math. Slovaca, 50 (1) (2000) 111-115.

[26] H. Nakano, Concave modulars, J. Math. Soc. Japan, 5, (1953) 29-49.

[27] A. Aizpuru, M.C. Listan-Garcia, F. Rambla-Barreno, Density by moduli and statistical convergence. Quaest. Math. 37 (2014) 525-530.

[28] V.K. Bhardwaj, S. Dhawan, f-statistical convergence of order α and strong Cesàro summability of order α with respect to a modulus, J. Inequal. Appl. (2015) 2015:332 DOI 10.1186/s13660-015-0850-x.

[29] H. Altinok, D. Deniz, (Δ^{m},f)-Statistical convergence for sequences of fuzzy numbers, J Intell Fuzzy Syst. 36, (2019) 3525-3533.

[30] A. Karakaş, Y. Altın, H. Altınok, On generalized statistical convergence of order β of sequences of fuzzy numbers, Journal of Intelligent & Fuzzy Systems 26 (2014) 1909–1917.

[31] I. Niven, H.S. Zuckerman, An Introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, New York. (1960).

[32] J. Fridy, On statistical convergence, Analysis, 5 (1985) 301-313.

[33] K.K. Tabib, The Topology Of Statistical Convergence, Master Of Sciences, Department of Mathematical Sciences, The University of Texas at El Paso, USA. (2012).

[34] S.S.L. Chang, L.A. Zadeh, On fuzzy mapping and Control, IEEE Trans. Systems Man Cybernet, 2 (1972) 30-34.

[35] P. Diamond and P. Kloeden, Metric spaces of fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems. 35(2) (1990) 241-249.

[36] S. Nanda, On sequence of fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems. 33 (1989) 123-126.

[37] L. Leindler, Über die verallgemeinerte de la Vallee-Poussinsche Summierbarkeit allgemeiner Orthogonalreihen, (German) Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 16 (1965) 375-387.

ÖZGEÇMİŞ

Murat TEMİZKAN

KİŞİSEL BİLGİLER

[redacted]

ARAŞTIRMACI BİLGİLERİ

Öğrenci Orcid ID : 0009-0000-3471-4616

Danışman Orcid ID : 0000-0001-7836-8946

EĞİTİM BİLGİLERİ

[redacted]

İŞ DENEYİMİ

[redacted]

AKADEMİK FAALİYETLER

Bildiriler:

1. Temizkan, M.; Altınok, H. (2024), On differences Of Bounded Variation Fuzzy Sequences. CMES-2024, 17-19 May 2024, Şanlıurfa-Türkiye