T.C. İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

ASİMETRİK METRİK UZAYLAR

DOKTORA TEZİ

Fikriye İNCE DAĞCI
1900005270

Anabilim Dalı : Matematik ve Bilgisayar Bilimleri
Programı : Matematik

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Remzi Tunç MISIRLIOĞLU

NİSAN 2025

T.C. İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

ASİMETRİK METRİK UZAYLAR

DOKTORA TEZİ

Fikriye İNCE DAĞCI
1900005270

Anabilim Dalı :	Matematik ve Bilgisayar Bilimleri
Programı :	Matematik

Tez Danışmanı :	Prof. Dr. Remzi Tunç MISIRLIOĞLU
Diğer Jüri Üyeleri :	Prof. Dr. Hüseyin ÇAKALLI
	Prof. Dr. Mert ÇAĞLAR
	Prof. Dr. Erhan ÇALIŞKAN
	Dr. Öğr. Üyesi Uğur GÖNÜLLÜ

NİSAN 2025

ÖNSÖZ

Bu çalışma boyunca bana yol gösteren ve destek olan danışman hocam sayın Prof. Dr. Remzi Tunç Mısırlıoğlu'na ve yüksek lisans ve doktora öğrenimim boyunca sabır ve özveriyle yanımda olan, bilgi birikimini benimle paylaşan Prof. Dr. Hüseyin Çakallı'ya teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca doktora öğrenimimin her aşamasında yardımlarını benden esirgemeyen Dr. Öğr. Üyesi Uğur Gönüllü'ye teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\overline{A^+}$	:	A kümesinin ileri kapanışı
$\overline{A^-}$	:	A kümesinin geri kapanışı
$\mathbf{Çap}(A)$	:	A kümesinin çapı
$\bar{\rho}$	:	Düzgün asimetrik metrik
$C_{ff}(X,Y)$	:	X uzayından Y uzayına ileri sürekli fonksiyonlar uzayı
$B^+(x,\varepsilon)$	:	x-merkezli ε-yarıçaplı ileri açık yuvar
$B^-(x,\varepsilon)$	:	x-merkezli ε-yarıçaplı geri açık yuvar
τ^+	:	İleri açık yuvarlar tarafından üretilen topoloji
τ^-	:	Geri açık yuvarlar tarafından üretilen topoloji
$x_n \to x$	:	(x_n) dizisi x elemanına yakınsak
$x_n \xrightarrow{f} x$	:	(x_n) dizisi x elemanına ileri yakınsak
$x_n \xrightarrow{b} x$	:	(x_n) dizisi x elemanına geri yakınsak

Enstitüsü : **Lisansüstü Eğitim Enstitüsü**

Anabilim Dalı : **Matematik ve Bilgisayar Bilimleri**

Programı : **Matematik**

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Remzi Tunç MISIRLIOĞLU**

Tez Türü ve Tarihi : **Doktora - Nisan 2025**

ÖZET

ASİMETRİK METRİK UZAYLAR

Fikriye İNCE DAĞCI

Bu tez çalışmasında, ilk olarak asimetrik metrik uzaylardaki temel kavramlardan yola çıkılarak bu uzaylar üzerinde tanımlı fonksiyon dizilerinde bazı sonuçlara ulaşılmış ve bu sonuçlardan yararlanılarak fonksiyon dizilerinin düzgün yakınsaklığı için bir Cauchy ölçütü verilmiştir. Sonrasında asimetrik metrik uzaylarda kuazi-Cauchy ve istatistiksel kuazi-Cauchy dizileri tanımlanmış, bu dizilerden faydalanılarak yukarı (aşağı) kompaktlık ve istatistiksel yukarı (aşağı) kompaktlık kavramları ele alınmış ve tam sınırlılık için gerek ve yeter bir koşul sunulmuştur. Ayrıca, asimetrik metrik uzaylarda yukarı (aşağı) sürekli fonksiyon tanımları verilerek bu fonksiyonlarla ileri (geri) sürekli fonksiyonların ilişkisi incelenmiştir. Sonrasında asimetrik metrik uzaylarda bir sabit nokta teoremi elde edilmiştir.

Son olarak, genel kompakt olmama ölçüsü kavramı asimetrik metrik uzaylarda ele alınmış olup, öncelikle bu uzaylarda Kuratowski ileri ve geri kompakt olmama ölçüleri tanımlanmış ve bu ölçülere ait elde edilen bazı temel sonuçlar yardımıyla asimetrik metrik uzaylarda Genelleştirilmiş Arzela-Ascoli Teoremi ifade ve ispat edilmiştir. Daha sonra, asimetrik metrik uzaylarda Hausdorff ileri ve geri kompakt olmama ölçüleri tanımlanmış ve bu ölçülere ait bazı temel sonuçlar elde edilerek, Kuratowski ve Hausdorff

ileri ve geri kompakt olmama ölçüleri için geçerli olan Genelleştirilmiş Cantor Kesişim Teoremi tipi bir teorem verilmiştir.

Anahtar Kelimeler : asimetrik metrik uzay, kuazi-Cauchy dizisi, istatistiksel kuazi-Cauchy dizisi, kompakt olmama ölçüsü, Genelleştirilmiş Arzela-Ascoli Teoremi.

University : İstanbul Kültür University

Institute : Institute of Graduate Studies

Department : Mathematics and Computer Science

Programme : Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Remzi Tunç MISIRLIOĞLU

Degree Awarded and Date : Ph.D. - April 2025

ABSTRACT

ASYMMETRIC METRIC SPACES

Fikriye İNCE DAĞCI

In this thesis, firstly, starting from the basic concepts in asymmetric metric spaces, some results have been obtained on function sequences defined on these spaces and by using these results, a Cauchy criterion has been given for the uniform convergence of function sequences. Then, quasi-Cauchy and statistical quasi-Cauchy sequences have been defined in asymmetric metric spaces, by using these sequences, the concepts of upward (downward) compactness and statistical upward (downward) compactness have been discussed and a necessary and sufficient condition for totally boundedness has been presented. In addition, upward (downward) continuous function definitions have been given in asymmetric metric spaces and the relationship between these functions and forward (backward) continuous functions has been investigated. Then, a fixed point theorem has been obtained in asymmetric metric spaces.

Finally, the concept of general measure of non-compactness is discussed in asymmetric metric spaces, firstly Kuratowski forward and backward measures of non-compactness are defined in these spaces and with the help of some basic results obtained from these measures, Generalized Arzela-Ascoli Theorem is stated and proved in asymmetric metric spaces. Then,

Hausdorff forward and backward measures of non-compactness are defined in asymmetric metric spaces and some basic results obtained from these measures, a theorem of the type Generalized Cantor Intersection Theorem is given which is valid for Kuratowski and Hausdorff forward and backward measures of non-compactness.

Keywords : asymmetric metric space, quasi-Cauchy sequence, statistically quasi-Cauchy sequence, measure of non-compactness, generalized Arzela-Ascoli theorem.

Bölüm 1

GİRİŞ

Metrik, analizde temel bir kavram olup, (metrik) uzaydaki her iki nokta arasındaki uzaklığı tanımlayan metrik fonksiyonlarla karakterize edilir. Geleneksel metrik uzaylarda, bu uzaklık fonksiyonu simetriktir, yani $d(x, y) = d(y, x)$ biçimindedir. Ancak bazı uygulamalarda veya problemlerde, uzaklığın simetri özelliğini sağlamadığı durumlarla karşılaşılabilmektedir. Bu tür durumları ele almak için geliştirilen ve simetri özelliğinin sağlanmadığı asimetrik metrik uzaylar, son yıllarda matematiksel modellemede ve uygulamalı disiplinlerde büyük ilgi görmektedir.

Asimetrik metrik uzaylar, özellikle optimizasyon problemleri, ulaşım modelleri, bilgisayar bilimleri ve yapay zeka gibi alanlarda kullanılan güçlü bir araç haline gelmiştir. Bu tür uzaylar, bir noktadan diğerine olan uzaklığın yöne bağlı olduğu durumları modellemek için kullanılmaktadır. Örneğin, iki nokta arasındaki seyahat süresi veya maliyeti, seyahat yönüne bağlı olarak değişiklik gösterir.

Asimetrik metrik kavramı ilk kez 1914 yılında F. Hausdorff tarafından tanımlanmıştır. Asimetrik metrik uzaylar ise ilk olarak 1931 yılında Wilson [28] tarafından kuazi-metrik uzaylar olarak çalışılmıştır. Asimetrik metrik uzaylar, Albert [2] ve Stoltenberg [27] tarafından kuazi-metrik uzaylar olarak çalışılırken, Ribeiro [26] bu uzayları zayıf metrikli uzaylar adı altında çalışmıştır. Reilly [25] ve Künzi [20] ise kuazi-pseudo metrik uzaylarda çalışmışlardır. Son zamanlarda ise bu konu bir çok matematikçi tarafından çalışılmaya devam etmektedir [3, 11, 12, 19, 15].

Uygulamalı matematik ve malzeme biliminde, asimetrik metrik uzayların plastisite için orandan bağımsız modeller, şekil hafızalı alaşımlar ve malzeme arızası modelleri gibi konularda uygulamalarını görmek mümkündür. Ayrıca asimetrik metrik uzayların soyut ve uygulamalı matamatikteki diğer uygulamalarından biri olarak Hamilton-

Jacobi denklemlerinin varlığı ve tekliği konusundaki çalışmalar görülmektedir [22].

Bu tez çalışması Giriş bölümüyle birlikte beş ana bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölümde, metrik uzayların bu çalışmaya temel sağlayacak bilinen kavramları verilmiştir.

Üçüncü bölümde asimetrik metrik uzay kavramı ele alınmış olup, ilk olarak bu uzaylara ait temel tanım ve teoremler sunulmuştur. Ardından bazı temel sonuçlara ulaşılmış ve fonksiyon dizilerinde düzgün ileri yakınsaklık için Cauchy ölçütü verilmiştir. Daha sonra asimetrik metrik uzaylarda kuazi-Cauchy ve istatistiksel kuazi-Cauchy dizileri tanımlanmış, bu dizilerden faydalanarak ileri bütünüyle sınırlılık için bir gerek ve yeter koşul sunulmuştur. Son olarak, asimetrik metrik uzaylarda bir sabit nokta teoremi elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde genel kompakt olmama ölçüsü kavramı asimetrik metrik uzaylarda ele alınmış olup, öncelikle bu uzaylarda Kuratowski ileri ve geri kompakt olmama ölçüleri tanımlanmış ve bu ölçülere ait elde edilen bazı temel sonuçlar yardımıyla asimetrik metrik uzaylarda Genelleştirilmiş Arzela-Ascoli Teoremi ifade ve ispat edilmiştir. Daha sonra, asimetrik metrik uzaylarda Hausdorff ileri ve geri kompakt olmama ölçüleri tanımlanmış ve bu ölçülere ait bazı temel sonuçlar elde edilerek, Kuratowski ve Hausdorff ileri ve geri kompakt olmama ölçüleri için geçerli olan Genelleştirilmiş Cantor Kesişim Teoremi tipi bir teorem verilmiştir.

Sonuç bölümünde ise bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar özetlenmiştir.

Bölüm 2

ÖN BİLGİLER

Metrik uzay kavramını ilk kez Fransız matematikçi Maurice Fréchet 1906 yılında doktora tezinde tanımlamıştır. Fréchet, bir kümedeki iki nokta arasındaki uzaklığı belirleyen bir fonksiyonun varlığına dayanan metrik kavramını vermiştir. Bu tanım, metrik uzayların modern anlamda kullanılmasının yolunu açmıştır. Metrik kavramı reel eksende iki noktanın birbirine olan uzaklığı, yani iki noktayı belirleyen reel sayının farkının mutlak değeri kavramının boş olmayan bir kümenin herhangi iki noktasına negatif olmayan bir sayıyı eşleme olduğu düşüncesinden ortaya çıkmıştır. 20. yüzyılın ortalarından itibaren, metrik uzaylar alanında büyük ilerlemeler kaydedilmiştir. Metrik uzaylar, diferansiyel geometri, karmaşık analiz, olasılık teorisi, fizik, bilgisayar bilimleri, ekonomi ve diğer pek çok bilim dalında temel bir araç olarak kullanılmaktadır.

2.1 Metrik Uzaylar

Bu kısımda metrik uzaylara ait temel kavramlar verilecek olup, ardından metrik uzaylarda Kuratowski ve Hausdorff kompakt olmama ölçülerinin tanımları ve temel özellikleri üzerinde durulacaktır. Ayrıntılar ve ispatlar için [1], [5], [6] ve [21] numaralı kaynaklara başvurulabilir.

2.1.1 Temel Kavramlar ve Tanımlar

Tanım 2.1.1. *X boş olmayan herhangi bir küme olmak üzere, aşağıdaki üç koşulu sağlayan reel değerli bir $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir metrik, (X, d) ikilisine de* *bir metrik uzay denir.*

(M1) $d(x,y) \geq 0$; $d(x,y) = 0$ *gerek ve yeter koşul* $x = y$.

(M2) Her $x, y \in X$ *için* $d(x,y) = d(y,x)$.

(M3) Her $x, y, z \in X$ *için* $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

$x \in X$ ve $r > 0$ bir reel sayı olmak üzere $B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ kümesine x merkezli r yarıçaplı açık yuvar adı verilir. Tüm açık yuvarların sınıfı X üzerindeki metrikten üretilen topoloji için bir taban oluşturur.

Tanım 2.1.2. (X,d) *bir metrik uzay,* $A \subseteq X$ *bir alt küme ve* $a \in A$ *olmak üzere* $B(a,r) \subset A$ *olacak şekilde bir* r *pozitif reel sayısı bulunabiliyorsa* A *kümesine* a *noktasının bir komşuluğu denir. Her noktasının komşuluğu olan kümeye açık küme adı verilir. Tümleyeni açık olan kümeye kapalı küme denir.*

Tanım 2.1.3. *Herhangi bir* $\varepsilon > 0$ *sayısına karşılık öyle bir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *sayısı vardır ki her* $n \geq n_0$ *için*

$$d(x, x_n) < \varepsilon$$

sağlanıyorsa (x_n) *dizisine* x *elemanına yakınsaktır denir.*

Tanım 2.1.4. *Herhangi bir* $\varepsilon > 0$ *sayısına karşılık öyle bir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *sayısı vardır ki her* $n, m \geq n_0$ *için*

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

sağlanıyorsa (x_n) *dizisine Cauchy dizisi denir.*

Metrik uzaylarda her yakınsak dizi Cauchy dizisidir, ancak karşıtı doğru değildir, yani Cauchy dizisi olup da yakınsak olmayan diziler vardır. Örneğin, $(0,1)$ kümesi reel sayılar kümesinin olağan metriğinden elde edilen alt uzay metriği ile gözönüne alındığında $(x_n) = (\frac{1}{n})$ dizisi bir Cauchy dizisidir ancak yakınsak değildir.

Tanım 2.1.5. *Her Cauchy dizisinin yakınsak olduğu metrik uzaya tam metrik uzay denir.*

Tanım 2.1.6. *Herhangi bir* $\varepsilon > 0$ *sayısına karşılık öyle bir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *sayısı vardır ki her* $n \geq n_0$ *için*

$$d(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon$$

sağlanıyorsa (x_n) *dizisine kuazi-Cauchy dizisi denir.*

Metrik uzaylarda her Cauchy dizisi kuazi-Cauchy dizisidir, ancak karşıtı doğru değildir, yani kuazi-Cauchy dizisi olup da Cauchy dizisi olmayan diziler vardır. Örneğin, reel sayılar kümesi olağan metriğiyle gözönüne alındığında $(x_n) = (\sqrt{n})$ dizisi kuazi-Cauchy dizidir ancak Cauchy dizisi değildir.

Tanım 2.1.7. *(X, d), (Y, ρ) metrik uzaylar ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. $x_0 \in X$ olmak üzere, herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık ε sayısı ve x_0 elemanına bağlı öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki her $x \in X$ için $d(x_0, x) < \delta$ oldukça $\rho(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$ sağlanıyorsa f fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir denir.*

Teorem 2.1.8. ***(Sürekliliğin dizisel tanımı)*** *(X, d) ve (Y, ρ) metrik uzaylar olmak üzere bir $f : X \to Y$ fonksiyonunun $x \in X$ noktasında sürekli olabilmesi için gerek ve yeter koşul (X, d) uzayında $x_n \to x$ iken (Y, ρ) uzayında $f(x_n) \to f(x)$ olmasıdır.*

Tanım 2.1.9. *(X, d), (Y, ρ) metrik uzaylar ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için $d(x, y) < \delta$ olduğunda $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$ olacak şekilde yalnız ε sayısına bağlı bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa f fonksiyonuna X üzerinde düzgün süreklidir denir.*

Düzgün sürekli her fonksiyon süreklidir ancak karşıtı doğru olmak zorunda değildir. Örneğin; reel sayılar kümesi olağan metriğiyle gözönüne alındığında,
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$ fonksiyonu her $x \in \mathbb{R}$ noktasında süreklidir ancak $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün sürekli değildir.

Tanım 2.1.10. *(X, d) bir metrik uzay, $A \subseteq X$ ve I herhangi bir indis kümesi olmak üzere X uzayının açık alt kümelerinin herhangi bir sınıfı $\{U_i : i \in I\}$ olsun. Eğer $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ oluyorsa $\{U_i : i \in I\}$ sınıfına A kümesinin bir açık örtüsü denir. Eğer bu sınıfın elemanlarının sayısı sonlu ise bu sınıfa A kümesinin bir sonlu örtüsü denir.*

Aşağıdaki Lemma, topolojik uzaylar arasında tanımlanan sürekli fonksiyonların karakterize edilmesi için önemli bir araçtır [23, Theorem 18.1].

Lemma 2.1.11. *X ve Y topolojik uzaylar; $f : X \to Y$ olsun. Aşağıdakiler eşdeğerdir.*

(a) f süreklidir

(b) B, Y uzayında açık $\Rightarrow f^{-1}(B)$, X uzayında açıktır

(c) $B \subseteq Y \Rightarrow f^{-1}(B^\circ) \subseteq (f^{-1}(B))^\circ$

(d) $A \subseteq B \Rightarrow f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

(e) B, Y *uzayında kapalı* $\Rightarrow f^{-1}(B)$, X *uzayında kapalıdır.*

Sonuç 2.1.12. *(X,τ_1) ve (X,τ_2) topolojik uzaylar olsun. $i:(X,\tau_1)\to(X,\tau_2)$ birim tasvirinin sürekli olması için gerek ve yeter koşulun $\tau_2 \subseteq \tau_1$ olmasıdır.*

Kanıt. $i:(X,\tau_1)\to(X,\tau_2)$ sürekli $\Leftrightarrow \forall B \in \tau_2$ için $i^{-1}(B) = B \in \tau_1 \Leftrightarrow \tau_2 \subseteq \tau_1$. □

Sonuç 2.1.13. *(X,τ_1) ve (X,τ_2) topolojik uzaylar olmak üzere bir (x_n) dizisinin τ_1 topolojosinde bir x noktasına yakınsamasının τ_2 topolojisinde yakaınsamasını gerektirmesi için gerek ve yeter koşulun $\tau_2 \subseteq \tau_1$ olmasıdır.*

Kanıt. $\tau_2 \subseteq \tau_1 \;\Leftrightarrow\; i:(X,\tau_1)\to(X,\tau_2)$ sürekli

$$\Leftrightarrow [x_n \xrightarrow{\tau_1} x \Rightarrow i(x_n) = x_n \xrightarrow{\tau_2} i(x) = x].$$ □

Tanım 2.1.14. *(X,d) bir metrik uzay olmak üzere eğer $A \subseteq X$ alt kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa A kümesine kompakt küme denir.*

Tanım 2.1.15. *(X,d) bir metrik uzay olmak üzere eğer $A \subseteq X$ alt kümesinin elemanlarından oluşan her dizinin A kümesinin bir elemanına yakınsayan bir alt dizisi bulunabiliyorsa A kümesine dizisel kompakt küme denir.*

Tanım 2.1.16. *(X,d) bir metrik uzay olmak üzere eğer her $\varepsilon > 0$ için*

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,\varepsilon)$$

olacak şekilde X kümesinin sonlu sayıda $x_1, x_2, ..., x_n$ elemanları bulunabiliyorsa X uzayına bütünüyle sınırlıdır denir.

Teorem 2.1.17. *Bir metrik uzayın kompakt olması için gerek ve yeter koşul tam ve bütünüyle sınırlı olmasıdır.*

Teorem 2.1.18. *(X,d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

(a) A *kompakttır;*

(b) A *dizisel kompakttır;*

(c) A kümesinin sonsuz her alt kümesinin en az bir yığılma noktası vardır.

Tanım 2.1.19. *(X,d) ve (Y,ρ) metrik uzaylar, f ve her bir f_n fonksiyonu X uzayından Y uzayına fonksiyonlar olsun. Her $x \in X$ ve herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır ki her $n \geq n_0$ için*

$$\rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

sağlanıyorsa (f_n) fonksiyon dizisine f fonksiyonuna X üzerinde noktasal yakınsaktır denir.

Tanım 2.1.20. *(X,d) ve (Y,ρ) metrik uzaylar, f ve her bir f_n, X uzayından Y uzayına fonksiyonlar olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır ki her $n \geq n_0$ ve her $x \in X$ için;*

$$\rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

sağlanıyorsa (f_n) fonksiyon dizisine f fonksiyonuna X üzerinde düzgün yakınsaktır denir.

2.1.2 Banach Sabit Nokta Teoremi

Metrik uzayların ilginç uygulalamalarından birisi de Banach daralma fonksiyonu prensibi olarak da adlandırılan Banach Sabit Nokta Teoremi'dir. Bu teorem, tamlığın çözümün varlığındaki önemini gösterirken varlığı garanti eden bir metot sağlaması açısından hem teorik hem de pratiktir.

Tanım 2.1.21. *X boş olmayan bir küme ve $T : X \to X$ bir fonksiyon olsun.*

$$Tx = x$$

eşitliğini sağlayan $x \in X$ elemanına T fonksiyonunun bir sabit noktası denir.

Tanım 2.1.22. *(X,d) bir metrik uzay ve $T : X \to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in X$ için*

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$$

olacak şekilde bir $0 < \alpha < 1$ sabiti varsa T fonksiyonuna bir daralma ya da büzülme fonksiyonu denir.

Teorem 2.1.23. *(Banach Sabit Nokta Teoremi) (X, d) bir tam metrik uzay olmak üzere $T : X \to X$ bir daralma fonksiyonu ise*

(a) T fonksiyonunun bir ve yalnız bir sabit $x \in X$ noktası vardır.

(b) Herhangi bir $x_0 \in X$ için $\{T^n x_0\}$ iterasyon dizisi, T fonksiyonunun bu sabit noktasına yakınsar (yani her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = T(x_{n-1})$ ile tanımlı $\{x_n\}$ iterasyon dizisi T fonksiyonunun bu sabit x noktasına yakınsar).

2.1.3 Arzela-Ascoli Teoremi

Belirli bazı metrik uzaylara şu ana kadar verilen kompaktlık kriterlerini uygulamak her zaman kolay olmayabilir. Böyle durumlarda, kompaktlığın araştırılmasında özel kriterler vermek daha uygundur. Bu bölümde bu özel kriterlerden önemli biri olan Arzela -Ascoli Teoremi verilecektir.

Tanım 2.1.24. *X bir topolojik uzay ve (Y, d) bir metrik uzay olsun. $B(X, Y) := \{f : X \to Y \mid f \text{ sürekli}\}$ olmak üzere $\mathcal{F} \subset B(X, Y)$ olsun. Eğer bir $x_0 \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için x_0 noktasının öyle bir U açık komşuluğu vardır öyle ki $\forall x \in U$ ve $\forall f \in \mathcal{F}$ için $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ oluyorsa $\mathcal{F}$ kümesi x_0 noktasında eş süreklidir denir. Eğer $\mathcal{F}$ kümesi X uzayının her noktasında eş sürekli ise, $\mathcal{F}$ kümesine X üzerinde eş süreklidir denir.*

Lemma 2.1.25. *X ve Y uzayları kompakt ve $\mathcal{F} \subset B(X, Y)$ olsun.*

$$\mathcal{F},\ X \text{ üzerinde eş süreklidir} \iff \mathcal{F} \text{ bütünüyle sınırlıdır}$$

Teorem 2.1.26. *(Ascoli Teoremi) X kompakt uzay ve $\mathcal{F} \subset B(X, \mathbb{R}^n)$ olsun.*

$$\mathcal{F} \text{ kompakt} \iff \mathcal{F} \text{ kapalı, sınırlı ve eş süreklidir}$$

Teorem 2.1.27. *(Arzela-Ascoli Teoremi) (X, d) bir kompakt metrik uzay ve K, $(C_{\mathbb{F}}(X), ||.||_\infty)$ Banach uzayının kapalı bir alt kümesi olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.*

(a) K kompakttır.

(b) K sınırlıdır ve X üzerinde eş süreklidir.

2.1.4 Kompakt Olmama Ölçüleri

Tanım 2.1.28. (X, d) *bir tam metrik uzay ve* $\mathbf{B}$*,* X *uzayının sınırlı alt kümelerinin bir ailesi olsun.*

$$\phi : \mathbf{B} \to [0, +\infty)$$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa ϕ *fonksiyonuna kompakt olmama ölçüsü denir.*

(i) (Regülerlik) $\phi(B) = 0 \Leftrightarrow B$ *göreceli kompakt kümedir* $(B \in \mathbf{B})$*,*

(ii) (Kapanış altında değişmezlik) $\phi(B) = \phi(\bar{B})$ $(\forall B \in \mathbf{B})$*,*

(iii) (Yarı toplamsallık) $\phi(B_1 \cup B_2) = \max\{\phi(B_1), \phi(B_2)\}$ $(\forall B_1, B_2 \in \mathbf{B})$*.*

Bir metrik uzayda A kümesinin çapı,

$$\text{Çap}(A) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca $\text{Çap}(A) = \text{Çap}(\bar{A})$ eşitliği sağlanır.

Tanım 2.1.29. X *bir metrik uzay ve* $Q \subseteq X$ *sınırlı bir alt küme olsun.* Q *kümesinin Kuratowski kompakt olmama ölçüsü*

$$\alpha(Q) = inf\,\{\varepsilon > 0 : \ Q \subset \textstyle\bigcup_{i=1}^{n} S_i, \ \ S_i \subset X, \ \ \text{\textit{Çap}}\,(S_i) < \varepsilon, \ (i = 1, 2, ..., n)\}$$

olarak tanımlanır.

Bu tanıma göre X kümesinin her sınırlı alt kümesi için $\alpha(Q) \leq \text{Çap}(Q)$ eşitsizliği sağlanır.

Lemma 2.1.30. Q*,* Q_1 *ve* Q_2*;* X *tam metrik uzayının sınırlı alt kümeleri olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler gerçeklenir.*

(a) (Regülerlik) $\alpha(Q) = 0 \Leftrightarrow Q$ *göreceli kompakt kümedir,*

(b) (Kapanış altında değişmezlik) $\alpha(Q) = \alpha(\bar{Q})$*,*

(c) (Yarı toplamsallık) $\alpha(Q_1 \cup Q_2) = \max\{\alpha(Q_1), \alpha(Q_2)\}$*,*

(d) *(Monotonluk)* $Q_1 \subset Q_2 \Rightarrow \alpha(Q_1) \leq \alpha(Q_2)$,

(e) $\alpha(Q_1 \cap Q_2) \leq \min\{\alpha(Q_1), \alpha(Q_2)\}$.

Tanım 2.1.31. *X bir metrik uzay ve $Q \subseteq X$ sınırlı bir alt küme olsun. Q kümesinin Hausdorff kompakt olmama ölçüsü*

$$\chi(Q) = \inf\left\{\varepsilon > 0 : \; Q \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i), \; x_i \in X \;, r_i < \varepsilon \quad (i = 1, 2, ..., n)\right\}$$

olarak tanımlanır.

Lemma 2.1.32. *Q, Q_1 ve Q_2; X tam metrik uzayının sınırlı alt kümeleri olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler gerçeklenir.*

(a) *(Regülerlik)* $\chi(Q) = 0 \Leftrightarrow Q$ *bütünüyle sınırlıdır* ,

(b) *(Kapanış altında değişmezlik)* $\chi(Q) = \chi(\bar{Q})$,

(c) *(Yarı toplamsallık)* $\chi(Q_1 \cup Q_2) = \max\{\chi(Q_1), \chi(Q_2)\}$,

(d) *(Monotonluk)* $Q_1 \subset Q_2 \Rightarrow \chi(Q_1) \leq \chi(Q_2)$,

(e) $\chi(Q_1 \cap Q_2) \leq \min\{\chi(Q_1), \chi(Q_2)\}$.

Teorem 2.1.33. ***(Genelleştirilmiş Cantor Kesişim Teoremi)*** *(X, d) bir tam metrik uzay olsun. ϕ, χ veya α olmak üzere, eğer $\{B_n\}$, X in boştan farklı, kapalı ve sınırlı alt kümelerinin azalan bir dizisi ve $\lim_{n\to\infty} \phi(B_n) = 0$ ise, $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ kümesi boştan farklı ve kompakttır.*

Bölüm 3

ASİMETRİK METRİK UZAYLAR

Bu bölümde asimetrik metrik uzaylarda temel tanım ve özelliklere yer verilerek bazı sonuçlar ifade edilecektir. Ayrıca asimetrik metrik uzaylarda kuazi-Cauchy dizileri ve istatistiksel kuazi-Cauchy dizileri tanımlanarak bu dizilerin özellikleri incelenecektir.

3.1 Tanımlar ve Temel Özellikler

Bu kısımda asimetrik metrik uzay kavramı, asimetrik metrik uzaylarda ileri ve geri topoloji kavramları ve bu topolojilerdeki temel kavramlar verilecektir. Bunlara ilişkin ayrıntılar için [3], [11], [12] numaralı kaynaklara başvurulabilir.

Tanım 3.1.1. *Bir X kümesi üzerinde aşağıdaki koşulları sağlayan $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir asimetrik metrik denir.*

(1) $\forall x, y \in X$ *için* $d(x, y) \geq 0$,

(2) $\forall x, y \in X$ *için* $d(x, y) = 0$ *ancak ve ancak* $x = y$,

(3) $\forall x, y, z \in X$ *için* $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Üzerinde bir asimetrik metrik tanımlanan X kümesine asimetrik metrik uzay denir.

Bu tanımda metrik uzayların simetri özelliğinin $(d(x, y) = d(y, x))$ sağlanmadığı görülmektedir. Her metriğin asimetrik metrik olduğu açıktır. Buna karşın, aşağıdaki örnekten de görüleceği üzere asimetrik metrik, metrik olmak zorunda değildir.

Örnek 3.1.2. ***(Sorgenfrey asimetrik metrik)***

$$d(x,y) = \begin{cases} y-x, & y \geq x \\ 1, & y < x \end{cases}$$

ile tanımlanan $d : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bir asimetrik metriktir ancak metrik değildir. Gerçekten;

(1) d fonksiyonunun tanımından $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x,y) \geq 0$ olduğu açıktır.

(2) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$ olduğu açıktır.

(3) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ için;

$z < y < x$ ise, $d(x,z) = 1$, $d(x,y) = 1$, $d(y,z) = 1$ ve $1 \leq 1+1 = 2$ olduğundan, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ bulunur.

$z = y < x$ ise, $d(x,z) = 1$, $d(x,y) = 1$, $d(y,z) = 0$ ve $1 \leq 1+0 = 1$ olduğundan, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ bulunur.

$z < y = x$ ise, $d(x,z) = 1$, $d(x,y) = 0$, $d(y,z) = 1$ ve $1 \leq 0+1 = 1$ olduğundan, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ bulunur.

$y < z < x$ ise, $d(x,z) = 1$, $d(x,y) = 1$, $d(y,z) = z-y$ ve $1 \leq 1+z-y$ olduğundan, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ bulunur.

$y < z = x$ ise, $d(x,z) = 0$, $d(x,y) = 1$, $d(y,z) = z-y$ ve $0 \leq 1+z-y$ olduğundan, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ bulunur.

$z < x < y$ ise, $d(x,z) = 1$, $d(x,y) = y-x$, $d(y,z) = 1$ ve $1 \leq y-x+1$ olduğundan, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ bulunur.

$z = x < y$ ise, $d(x,z) = 0$, $d(x,y) = y-x$, $d(y,z) = 1$ ve $0 \leq y-x+1$ olduğundan, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ bulunur.

$x < z < y$ ise, $d(x,z) = z-x$, $d(x,y) = y-x$, $d(y,z) = 1$ ve $z-x \leq y-x+1$ olduğundan, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ bulunur.

$x < z = y$ ise, $d(x,z) = z-x$, $d(x,y) = y-x$, $d(y,z) = 0$ ve $z-x \leq y-x+0$ olduğundan, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ bulunur.

$y < x < z$ ise, $d(x,z) = z-x$, $d(x,y) = 1$, $d(y,z) = z-y$ ve $z-x \leq 1+z-y$ olduğundan, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ bulunur.

$y = x < z$ ise, $d(x,z) = z-x$, $d(x,y) = 0$, $d(y,z) = z-y$ ve $z-x \leq 0+z-y$

olduğundan, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *bulunur.*

$x < y < z$ *ise,* $d(x,z) = z - x$*,* $d(x,y) = y - x$*,* $d(y,z) = z - y$ *ve* $z - x \leq y - x + z - y = z - x$ *olduğundan,* $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *bulunur.*

$x = y = z$ *ise,* $d(x,z) = d(x,y) = d(y,z) = 0$ *olduğundan,* $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *bulunur.*

Dolayısıyla, d fonksiyonu asimetrik metriktir. Buna karşın, örneğin

$$d(5,7) = 2 \neq 1 = d(7,5)$$

olduğundan d fonksiyonu metrik değildir.

Not 3.1.3. *(X,d) bir asimetrik metrik uzay olmak üzere,*

$$d^s(x,y) = \max\{d(x,y), d(y,x)\}$$

ile tanımlanan d^s, X üzerinde bir metriktir.

Asimetrik metrikte, metrik fonksiyonunda gerçeklenen simetriği özelliği sağlanmak zorunda olmadığından ileri ve geri yuvar kavramları karşımıza çıkar ve bu yuvarlar tarafından iki türlü topoloji üretilir. İleri ve geri yuvarlar aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$x \in X$, $\varepsilon > 0$ için,

$B^+(x,\varepsilon) = \{y \in X : \ d(x,y) < \varepsilon\}$ (ileri açık yuvar)

$B^+[x,\varepsilon] = \{y \in X : \ d(x,y) \leq \varepsilon\}$ (ileri kapalı yuvar)

$B^-(x,\varepsilon) = \{y \in X : \ d(y,x) < \varepsilon\}$ (geri açık yuvar)

$B^-[x,\varepsilon] = \{y \in X : \ d(y,x) \leq \varepsilon\}$ (geri kapalı yuvar)

$B_{d^s}(x,\varepsilon) = \{y \in X : \ d(x,y) < \varepsilon\}$ (açık yuvar)

$B_{d^s}[x,\varepsilon] = \{y \in X : \ d(x,y) \leq \varepsilon\}$ (kapalı yuvar)

Açıktır ki, $B_{d^s}(x,\varepsilon) = B^+(x,\varepsilon) \cap B^-(x,\varepsilon)$ şeklindedir.

Tanım 3.1.4. *Bir d asimetrik metriği tarafından elde edilen τ^+ ileri topolojisi her $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için $B^+(x,\varepsilon)$ ileri açık yuvarları tarafından üretilen topolojidir. Benzer şekilde, bir d asimetrik metriği tarafından elde edilen τ^- geri topolojisi, her $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için $B^-(x,\varepsilon)$ geri açık yuvarları tarafından üretilen topolojidir. Dahası, d^s metriği tarafından elde edilen τ_{d^s} topolojisi her $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için $B_{d^s}(x,\varepsilon)$ açık yuvarları tarafından üretilen topolojidir.*

Not 3.1.5. *Açıktır ki,* $B_{d^s}(x,\varepsilon) \subset B^+(x,\varepsilon)$ *ve* $B_{d^s}(x,\varepsilon) \subseteq B^-(x,\varepsilon)$ *olup,* $\tau^+ \subseteq \tau_{d^s}$ *ve* $\tau^- \subseteq \tau_{d^s}$ *kapsamaları sağlanır [11, Proposition 1.1.8]. Ayrıca,* τ_{d^s} *metrik topolojisi* τ^+ *ve* τ^- *topolojilerinden daha ince olan en küçük topoloji olduğundan,* $\tau^+ \subseteq \tau^-$ *ise* $\tau^+ \subseteq \tau^- = \tau_{d^s}$ *olur. Benzer şekilde,* $\tau^- \subseteq \tau^+$ *ise* $\tau^- \subseteq \tau^+ = \tau_{d^s}$ *olur [11, Proposition 1.1.13].*

Örnek 3.1.6. *Sorgenfrey asimetrik metriği ele alınırsa* τ^+*,* $\mathbb{R}$ *üzerindeki alt limit topolojisi ve* τ^-*,* $\mathbb{R}$ *üzerindeki üst limit topolojisidir.*

Asimetrik metrik uzaylarda iki türlü topoloji olduğundan dizilerin de ileri ve geri yakınsaklık adını alan iki türlü yakınsaklığı olacaktır.

Tanım 3.1.7. [12] (X,d) *bir asimetrik metrik uzay,* $(x_n) \subset X$ *bir dizi ve* $x \in X$ *olsun. Eğer* $\lim_{n\to\infty} d(x,x_n) = 0$ ($\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$) *ise* (x_n) *dizisi* x *noktasına ileri (geri) yakınsar denir ve* $x_n \xrightarrow{f} x$ ($x_n \xrightarrow{b} x$) *şeklinde ifade edilir.*

Teorem 3.1.8. *Bir* (X,d) *asimetrik metrik uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(a) τ^+ *Hausdorff uzayıdır.*

(b) X *uzayındaki her ileri yakınsak dizinin limiti tektir.*

Teorem 3.1.9. *İleri yakınsak bir dizinin her alt dizisi de ileri yakınsaktır.*

Teorem 3.1.10. [12] (X,d) *bir asimetrik metrik uzay ve* (x_n)*,* X *kümesinde bir dizi olsun. Eğer* (x_n)*,* $x_0 \in X$ *noktasına ileri yakınsak ve* $y_0 \in X$ *noktasına geri yakınsak ise o zaman* $x_0 = y_0$ *dır.*

Sonuç 3.1.11. *Bir asimetrik metrik uzayda ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektiriyorsa ileri limit tektir.*

Teorem 3.1.12. (X,d) *asimetrik metrik uzay olsun*

(a) X *üzerinde ileri yakınsaklığın geri yakınsaklığı gerektirmesi için gerek ve yeter koşulun* $\tau^- \subseteq \tau^+ = \tau_{d^s}$ *olmasıdır.*

(b) X *üzerinde geri yakınsaklığın ileri yakınsaklığı gerektirmesi için gerek ve yeter koşulun* $\tau^+ \subseteq \tau^- = \tau_{d^s}$ *olmasıdır.*

Kanıt. Sonuç 2.1.13 ve Not 3.1.5 kullanılarak istenen elde edilir. □

Metrik uzaylardaki sınırlılık tanımından yola çıkarak asimetrik metrik uzaylarda sınırlılık kavramını düşündüğümüzde iki türlü sınırlılık ile karşılaşırız.

Tanım 3.1.13. *Bir $S \subseteq X$ alt kümesine, eğer $S \subseteq B^+(x,\varepsilon)$ ($S \subseteq B^-(x,\varepsilon)$) olacak şekilde $x \in X$, $\varepsilon > 0$ varsa ileri (geri) sınırlıdır denir.*

Tanım 3.1.14. *Her n pozitif tamsayısı için $d(x,x_n) < M$ ($d(x_n,x) < M$) olacak şekilde bir $x \in X$ ve bir M pozitif tamsayısı varsa (x_n) dizisine ileri (geri) sınırlıdır denir.*

Buna göre (x_n) dizisinin ileri (geri) sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq B^+(x,M)$ ($\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq B^-(x,M)$) olacak şekilde bir $x \in X$ ve bir M pozitif tamsayısının var olmasıdır.

Teorem 3.1.15. *Bir asimetrik metrik uzayda ileri yakınsak olan her dizi ileri sınırlıdır.*

Önerme 3.1.16. [12] *$c : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, C yalnızca x elemanına bağlı bir fonksiyon olmak üzere,*

$$\forall x \in X \quad \exists \varepsilon > 0 \ni \ y \in B^+(x,\varepsilon) \Rightarrow c(x,y) \leq C(x)$$

koşulunu sağlasın. Eğer her $x, y \in X$ için $d(y,x) \leq c(x,y)d(x,y)$ ise ileri limitlerin varlığı geri limitlerin varlığını gerektirir ve böylece limitler tektir.

Örnek 3.1.17. [12] *$\alpha > 0$ olsun.*

$$d(x,y) = \begin{cases} y - x, & y \geq x \\ \alpha(x-y), & y < x \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ asimetrik metriği $C = max\left\{\alpha, \frac{1}{\alpha}\right\}$ olmak üzere her $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(y,x) \leq Cd(x,y)$ ifadesini sağlar. Dolayısıyla bu asimetrik metrik üstteki Önermedeki koşulu sağlar. Bu örnekte özel olarak $\alpha = 1$ alındığında $\mathbb{R}$ üzerindeki olağan metriğin elde edileceğini görüyoruz.

Örnek 3.1.18. *Sorgenfrey asimetrik metriğinde $(x_n) = (x + \frac{1}{n})$ şeklinde tanımlanan dizi ileri yakınsak olup geri yakınsak olmayan bir dizidir. Gerçekten $\forall x \in \mathbb{R}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için*

$$x + \frac{1}{n} > x$$

olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} d(x,x_n) = \lim_{n\to\infty} d(x, x+\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} (x+\frac{1}{n}-x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

bulunur. Bu durumda, $(x_n) = (x+\frac{1}{n})$ *dizisi* x *noktasına ileri yakınsaktır. Ancak,*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = \lim_{n\to\infty} d(x+\frac{1}{n}, x) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

olur. Şu halde, $(x_n) = (x+\frac{1}{n})$ *dizisi* x *noktasına geri yakınsak değildir. Dolayısıyla, Sorgenfrey asimetrik metrik uzayında ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirmez.*

Aşağıdaki örnekte görüldüğü gibi üstteki Önermenin karşıtı doğru değildir.

Örnek 3.1.19. [12] $x \neq 0$ *için* $d(x,0) = \frac{1}{||x||}$ *ve* $d(0,x) = \frac{1}{||x||^2}$ *olmak üzere,*

$$d(x,y) := \begin{cases} d(x,0)+d(0,y), & y \neq x \text{ ise}, \\ 0, & y = x \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlı $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *asimetrik metriği verilsin.*

$0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ *olsun. Bir* (x_n) *dizisi için eğer* $x_n \xrightarrow{f} x$ *ise, her* $n \geq N$ *için* $x_n = x$ *olacak şekilde* $N \in \mathbb{N}$ *vardır. Bu durumda,* $x_n \xrightarrow{b} x$ *bulunur. Benzer şekilde* $x = 0$ *olsun.* $||x_n|| \to \infty$ *ise* $x_n \xrightarrow{f} x$ *olur ki bu durumda* $x_n \xrightarrow{b} x$ *dir. Böylece her durumda ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirir. Öte yandan,* $x = 0$ *ve* $\varepsilon > 0$ *için*

$$B^+(0,\varepsilon) = \{0\} \cup \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid ||y|| > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \right\}$$

olduğundan $||y||$ *sınırlı değildir ve*

$$\frac{d(y,0)}{d(0,y)} = \frac{\frac{1}{||y||}}{\frac{1}{||y||^2}} = ||y||$$

olur. Dolayısıyla, her $x,y \in \mathbb{R}^n$ *için* $d(y,x) \leq c(x,y)d(x,y)$ *sağlayan bir* c *fonksiyonu sıfırın herhangi bir ileri açık yuvarında sınırsız olacaktır.*

Şimdi, asimetrik metrik uzaylarda karşımıza çıkan ileri Cauchy ve geri Cauchy dizisi tanımlarını verelim.

Tanım 3.1.20. (X,d) *bir asimetrik metrik uzay olsun. Herhangi bir* $\varepsilon > 0$ *sayısına karşılık öyle bir* $N \in \mathbb{N}$ *sayısı vardır ki her* $m \geq n \geq N$ *için* $d(x_n,x_m) < \varepsilon$ $(d(x_m,x_n) < \varepsilon)$ *sağlanıyorsa* (x_n) *dizisine ileri (geri) Cauchy dizisi denir.*

Aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi bir asimetrik metrik uzayda bir dizinin ileri yakınsak olması ileri Cauchy dizisi olmasını gerektirmez.

Örnek 3.1.21.

$$d(x,y) = \begin{cases} y-x, & y \geq x \\ 1, & y < x \end{cases}$$

ile tanımlı $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *Sorgenfrey asimetrik metriğinde, sabit herhangi bir* $x \in \mathbb{R}$ *için*

$$(x_n) = \left(x + \frac{1}{n}\right)$$

dizisi ileri yakınsak olmasına rağmen ileri Cauchy dizisi değildir.
Gerçekten, $m \geq n \geq N$ *için*

$$d(x_n, x_m) = d(x + \tfrac{1}{n}, x + \tfrac{1}{m}) = 1$$

olduğundan, $(x_n) = \left(x + \frac{1}{n}\right)$ *dizisi ileri Cauchy dizisi değildir.*

Teorem 3.1.22. *Bir asimetrik metrik uzayda, eğer bir ileri Cauchy dizisi ileri yakınsak bir alt diziye sahipse kendisi de ileri yakınsaktır.*

Şimdi asimetrik metrik uzaylarda süreklilik kavramını verelim. Diğer kavramlara benzer olarak, süreklilik kavramı için de birden fazla tanım karşımıza çıkmaktadır.

Tanım 3.1.23. (X, d_X) *ve* (Y, d_Y) *asimetrik metrik uzaylar ve* $f : X \to Y$ *bir fonksiyon olsun. Eğer, her* $\varepsilon > 0$ *için*

$$y \in B^+(x, \delta) \Rightarrow f(y) \in B^+(f(x), \varepsilon) \quad (f(y) \in B^-(f(x), \varepsilon))$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ *varsa* f *fonksiyonu* $x \in X$ *noktasında* ff*-süreklidir (* fb*-süreklidir) denir.*

Benzer şekilde, eğer, her $\varepsilon > 0$ *için*

$$y \in B^-(x, \delta) \Rightarrow f(y) \in B^-(f(x), \varepsilon) \quad (f(y) \in B^+(f(x), \varepsilon))$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ *varsa* f *fonksiyonu* $x \in X$ *noktasında bb-süreklidir (* bf*-süreklidir) denir.*

Bu çalışma boyunca aksi ifade edilmediği sürece, ff-süreklilik yerine ileri süreklilik, bb-süreklilik yerine de geri süreklilik terimleri kullanılacaktır.

Teorem 3.1.24. [12]***(Sürekliliğin dizisel tanımı)*** *Bir $f : X \to Y$ fonksiyonunun $x \in X$ noktasında ileri sürekli olabilmesi için gerek ve yeter koşul (X, d_X) uzayında $x_n \xrightarrow{f} x$ iken (Y, d_Y) uzayında $f(x_n) \xrightarrow{f} f(x)$ olmasıdır.*

Üstteki ifadenin benzeri diğer üç süreklilik tanımı için de geçerlidir.

Tanım 3.1.25. *$S \subseteq X$ olmak üzere terimleri S kümesinde olan her ileri (geri) Cauchy dizisi ileri (geri) yakınsak ise S kümesine ileri (geri) tamdır denir*

Sonuç 3.1.26. *Bir asimetrik metrik uzayda, eğer her ileri Cauchy dizisi ileri yakınsak bir alt diziye sahipse bu uzay ileri tamdır.*

Asimetrik metrik uzaylarda kompaktlık çeşitleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 3.1.27. *Bir $S \subseteq X$ kümesinin ileri topolojideki her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa S kümesine ileri kompakt denir. $\overline{S^+}$ ileri kompakt ise S kümesine göreceli ileri kompakt denir. Terimleri S kümesinde olan her dizinin, limiti S kümesinde olan ileri yakınsak bir alt dizisi varsa S kümesine ileri dizisel kompakt denir.*

Üstteki tanımda ileri yerine geri yazılarak geri kompaktlık çeşitleri elde edilir.

Örnek 3.1.28. [12] *$x \neq 0$ için $d(x, 0) = x$ ve $d(0, x) = \frac{1}{x}$ olmak üzere, $d : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ asimetrik metriği*

$$d(x, y) := \begin{cases} d(x, 0) + d(0, y), & y \neq x \text{ ise}, \\ 0, & y = x \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu asimetrik metrik için geri topoloji ayrık topolojidir ve Z^+ sonsuz olduğundan geri kompakt değildir. Ancak sıfırın herhangi bir ileri açık yuvarı sonlu sayıda nokta dışında tüm noktaları içerdiğinden Z^+ ileri topolojide kompakttır.

Lemma 3.1.29. [12] *$d : X \times X \to \mathbb{R}$ bir asimetrik metrik olsun. Eğer (X, d) ileri dizisel kompakt ve $x_n \xrightarrow{b} x$ ise $x_n \xrightarrow{f} x$ dir.*

Lemma 3.1.30. [12] *X kümesi ileri kompakt ise ileri dizisel kompakttır.*

Tanım 3.1.31. *Bir $S \subseteq X$ kümesi, eğer her $\varepsilon > 0$ için sonlu sayıda ε yarıçaplı ileri (geri) yuvar tarafından örtülebiliyorsa X üzerinde ileri (geri) bütünüyle sınırlıdır denir. Açıktır ki, her ileri (geri) bütünüyle sınırlı küme ileri (geri) sınırlıdır.*

Önerme 3.1.32. [12] (X, d) *asimetrik metrik uzayı ileri dizisel kompakt ve ileri bütünüyle sınırlı ise, X ileri kompakttır.*

Önerme 3.1.33. [12] *Eğer (X, d) asimetrik metrik uzayı ileri dizisel kompakt ve X üzerinde ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektiriyorsa, X ileri bütünüyle sınırlıdır.*

Teorem 3.1.34. (X, d) *asimetrik metrik uzayı ileri (geri) kompakt ve X üzerinde ileri (geri) yakınsaklık geri (ileri) yakınsaklığı gerektiriyor ise X geri (ileri) bütünüyle sınırlıdır.*

Kanıt. X ileri kompakt olsun. Varsayalım ki $\exists \delta > 0 \ni X$, sonlu sayıda $B^-(y, \delta)$ $(y \in X)$ geri yuvar tarafından örtülemesin. Bu durumda, $\exists y_1 \in X \ni X \nsubseteq B^-(y_1, \delta)$. Şu halde, $\exists y_2 \in X \setminus B^-(y_1, \delta)$. Böyle devam ederek, $\exists y_{n+1} \in X \setminus \bigcup_{i=1}^n B^-(y_i, \delta) \ni X \nsubseteq \bigcup_{i=1}^n B^-(y_i, \delta)$. Dolayısıyla, $(y_n) \subset X$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall 1 \leq i \leq n$ için $d(y_{n+1}, y_i) \geq \delta$ olur.

$$\begin{aligned}
X \text{ ileri kompakt} \quad &\Rightarrow \quad X \text{ ileri dizisel kompakt} \\
&\Rightarrow \quad \exists (y_{n_k}) \subset (y_n) \ni y_{n_k} \xrightarrow{f} y \in X \ (k \to \infty) \\
&\Rightarrow \quad y_{n_k} \xrightarrow{b} y \ (k \to \infty) \\
&\Rightarrow \quad \exists k_0 \in \mathbb{N} \ni \forall k \geq k_0,\ d(y, y_{n_k}) < \frac{\delta}{2} \text{ ve } d(y_{n_k}, y) < \frac{\delta}{2} \\
&\Rightarrow \quad \delta \leq d(y_{n_k+1}, y_{n_k}) \leq d(y_{n_k+1}, y) + d(y, y_{n_k}) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta
\end{aligned}$$

olur. Bu ise çelişkidir. Dolayısıyla X geri bütünüyle sınırlıdır. Diğer durum benzer şekilde kanıtlanır. □

Önerme 3.1.35. [12] (X, d) *asimetrik metrik uzayının ileri kompakt olması için gerek ve yeter koşul ileri tam ve ileri bütünüyle sınırlı olmasıdır.*

Tanım 3.1.36. (X, d_X) *ve* (Y, d_Y) *asimetrik metrik uzaylar ve $\mathcal{F}$, X uzayından Y uzayına fonksiyonların bir kümesi olmak üzere, her $y \in Y$ ve her $f \in \mathcal{F}$ için $d_X(x, y) < \delta$ olduğunda $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad (d_Y(f(y), f(x)) < \varepsilon)$ olacak şekilde her $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ bulunuyorsa, $\mathcal{F}$ kümesine ileri (geri) eşsürekli denir.*

Y^X, X uzayından Y uzayına tanımlı tüm fonksiyonların uzayını; $C_{ff}, (X,Y)$, X uzayından Y uzayına tanımlı tüm ileri sürekli fonksiyonların uzayını göstersin. d_Y, Y üzerindeki asimetrik metrik ve

$$\bar{d}(x,y) := \min\{d_Y(x,y), 1\}$$

olmak üzere, Y^X üzerindeki düzgün asimetrik metrik

$$\bar{\rho}(f,g) := \sup\left\{\bar{d}(f(x),g(x)) \mid x \in X\right\}$$

biçimindedir. Bu asimetrik metrik, Y^X üzerindeki düzgün topolojiyi üretir.

Tanım 3.1.37. *(X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetrik metrik uzaylar, f ve her bir f_n fonksiyonu X uzayından Y uzayına fonksiyonlar olsun. Her $x \in X$ ve herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır ki her $n \geq n_0$ için*

$$d_Y(f(x), f_n(x)) < \varepsilon \quad (d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon\ )$$

sağlanıyorsa (f_n) fonksiyon dizisine f fonksiyonuna X üzerinde noktasal ileri (geri) yakınsaktır denir. Burada n_0 sayısı hem ε sayısına hem de x noktasına bağlıdır.

Tanım 3.1.38. *(X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetrik metrik uzaylar , f ve her bir f_n fonksiyonu X uzayından Y uzayına fonksiyonlar olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır ki her $n \geq n_0$ için*

$$\bar{\rho}(f, f_n) < \varepsilon \quad (\bar{\rho}(f_n, f) < \varepsilon\ )$$

sağlanıyorsa (f_n) fonksiyon dizisine f fonksiyonuna X üzerinde düzgün ileri (geri) yakınsaktır denir.

Asimetrik metrik uzaylardaki düzgün yakınsaklık tanımı, metrik uzaylardaki tanıma benzer olarak aşağıdaki biçimde de ifade edilebilir.

Tanım 3.1.39. *(X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetrik metrik uzaylar, f ve her bir f_n fonksiyonu X uzayından Y uzayına fonksiyonlar olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır ki her $x \in X$ ve her $n \geq n_0$ için*

$$d_Y(f(x), f_n(x)) < \varepsilon \quad (d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon\ )$$

sağlanıyorsa (f_n) fonksiyon dizisine f fonksiyonuna X üzerinde düzgün ileri (geri) yakınsaktır denir. Burada n_0 sayısı sadece ε sayısına bağlıdır.

Not 3.1.40. *(f_n), X uzayından Y uzayına tanımlı ileri sürekli fonksiyonların bir dizisi ve f, X uzayından Y uzayına tanımlı bir fonksiyon olmak üzere (f_n) fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna düzgün ileri yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\sup_{x\in X} d_Y(f(x), f_n(x))$ dizisinin sıfıra yakınsamasıdır.*

Teorem 3.1.41. [12] *(X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetrik metrik uzaylar olmak üzere, (f_n), X uzayından Y uzayına düzgün ileri sürekli fonksiyonların $\bar{\rho}$ düzgün asimetrik metriğinde f fonksiyonuna düzgün geri yakınsayan bir dizisi olsun ve Y üzerinde ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirsin. Bu durumda f düzgün ileri süreklidir.*

Tanım 3.1.42. *(X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetrik metrik uzaylar ve (f_n), X uzayından Y uzayına fonksiyon dizisi olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır ki her $m \geq n \geq n_0$ için*

$$\bar{\rho}(f_n, f_m) < \varepsilon \quad (\bar{\rho}(f_m, f_n) < \varepsilon\ )$$

sağlanıyorsa (f_n) fonksiyon dizisine düzgün ileri (geri) Cauchy dizisi denir.

Yukarıdaki tanım aşağıdaki biçimde de ifade edilebilir.

Tanım 3.1.43. *(X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetrik metrik uzaylar ve (f_n), X uzayından Y uzayına fonksiyon dizisi olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır ki her $m \geq n \geq n_0$ ve her $x \in X$ için*

$$d_Y(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon \quad (d_Y(f_m(x), f_n(x)) < \varepsilon\ )$$

sağlanıyorsa (f_n) fonksiyon dizisine düzgün ileri (geri) Cauchy dizisi denir. Burada n_0 sayısı sadece ε sayısına bağlıdır.

Lemma 3.1.44. [12] *(Y, d) ileri kompakt olsun ve (Y, d) üzerinde ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirsin. Bu durumda,*

1. *Bir $\mathcal{F} \subseteq C_{ff}(X, Y)$ kümesi ileri eşsürekli ise, geri eşsüreklidir.*
2. *Eğer X uzayından Y uzayına bir fonksiyon dizisi düzgün geri yakınsak ise düzgün ileri yakınsaktır (ve karşıtı da doğrudur).*

Lemma 3.1.45. [12] *(X, d_X) ve (Y, d_Y) ileri kompakt asimetrik metrik uzaylar olsun ve (Y, d_Y) üzerinde ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirsin. Eğer $\mathcal{F} \subseteq C_{ff}(X, Y)$ alt kümesi ileri eşsürekli ise, $\mathcal{F}$, d_Y asimetrik metriğine karşılık gelen $\bar{\rho}$ düzgün asimetrik metriği altında ileri bütünüyle sınırlıdır.*

Lemma 3.1.46. [12] (Y, d) *asimetrik metrik uzayı ileri kompakt olsun ve bu asimetrik metrik uzayda ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirsin. Bu durumda* Y^X *uzayı,* $\bar{\rho}$ *düzgün asimetrik metriği ile ileri tamdır.*

Lemma 3.1.47. [12] (X, d_X) *ve* (Y, d_Y) *asimetrik metrik uzaylar olmak üzere* Y *üzerinde ileri yakınsaklık geri yakınsaklığa denk olsun. Eğer* X *uzayından* Y *uzayına ileri sürekli fonksiyonların bir* (f_n) *dizisi bir* f *fonksiyonuna düzgün ileri yakınsak ise* f *fonksiyonu ileri süreklidir.*

Yukarıdaki lemmada ileri ve geri yakınsaklıkların denkliği hipotezi gereklidir. Zira aşağıdaki Örnek 3.1.48, bunun ileri yakınsaklığın geri yakınsaklığı gerektirmediği metrikler için ileri limitlerin tek olmamasına dayanan ters bir örneğidir. Aşağıdaki Örnek 3.1.49 ise, bu hipotez kaldırılırsa sürekli fonksiyonlar dizisinin düzgün limitinin tek olsa bile süreksiz olabileceğini göstermektedir.

Örnek 3.1.48. [12] $X = [0, 1]$ *Euclid metriği ile donatılmış ve* $Y \subset \mathbb{R}^2$ *kümesi*

$Y := \{(y_1, y_2) : y_1 = 0 \text{ ve } y_2 \in (0, 1]\} \cup \{(-1, 0)\} \cup \{(1, 0)\}$ *olsun.* Y *üzerindeki asimetrik metrik,* $y_2 > 0$ *olmak üzere* $(y_1, y_2) \in Y$ *için*

$d((y_1, y_2), (\pm 1, 0)) = d((\pm 1, 0), (\mp 1, 0)) = 1, d((\pm 1, 0), (y_1, y_2)) = y_2.$

olarak genişletilen Sorgenfrey asimetrik metriği seçilsin.

Y *bir Hausdorff asimetrik metrik uzaydır.* $f : X \to Y$,

$$f(x) = \begin{cases} (-1, 0)\,, & x = 0 \text{ ise,} \\ (1, 0)\,, & x > 0 \text{ ise.} \end{cases}$$

olsun.

$f_n(x) = (0, \frac{1}{n})$ *ile tanımlı* $f_n : X \to Y$ *fonksiyon dizisi* f *süreksiz limitine düzgün ileri yakınsaktır. Asimetrik metrik uzaylarda, limitlerin tek olması gerekmediğinden, bu örnekte sonsuz sayıda düzgün limit vardır.Örneğin,*
$\tilde{f} : X \to Y$ $\tilde{f}(x) = (1, 0)$ *olmak üzere* f_n, $\tilde{f}$ *e düzgün ileri yakınsaktır ve* $\tilde{f}$ *süreklidir.*

Örnek 3.1.49. [12] $X := [0, 1]$, *Euclid metriğiyle donatılmış ve*

$$Y := \{(y_1, y_2) \mid 0 \leq y_1 \leq 1,\ 0 \leq y_2 \leq 1\}$$

olsun. $|.|$, $\mathbb{R}^2$ *deki Öklid metriği olmak üzere,* Y *kümesi, Sorgenfrey metriğinin*

$$d(y,\tilde{y}) := \begin{cases} 0 & , y = \tilde{y} \; ise, \\ |y-\tilde{y}| & , y_1 \leq \tilde{y}_1 \; ve \; \tilde{y}_1 \neq 0 \; ise, \\ 1 & , d.d. \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan varyantı ile donatıldığında, (Y,d) asimetrik metrik uzay olur.

$f_n(x) = (\frac{1}{n}, x)$ ile tanımlı $f_n : X \to Y$ fonksiyon dizisi, $f(x) = (0,x)$ ile tanımlı tek bir $f : X \to Y$ fonksiyonuna ileri düzgün yakınsar. Buna karşın, f_n fonksiyon dizisi f fonksiyonuna geri düzgün yakınsamaz. Ayrıca, her $n \in \mathbb{N}$ için f_n fonksiyonu ileri sürekli olurken f fonksiyonu ileri sürekli değildir. Gerçekten,

$$d(f(x), f_n(x)) = d((0,x),(\frac{1}{n},x)) =| (0,x) - (\frac{1}{n},x) |=| (\frac{1}{n},0) |= \frac{1}{n}$$

olduğundan, $N = [| \frac{1}{\varepsilon} |] + 1$ alınırsa, (f_n) fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna ileri düzgün yakınsadığı görülür. Ayrıca, bu yakınsama tektir. Gerçekten, $g(x) = (x_1, x_2)$ olmak üzere f_n fonksiyon dizisi $g \neq f$ fonksiyonuna ileri düzgün yakınsak olsun.

$x_1 \leq \frac{1}{n}$ ise,

$$\begin{aligned} d(g(x),(\frac{1}{n},x)) \to 0 \;\; &\Rightarrow \;\; | g(x) - (\frac{1}{n},x) |\to 0 \\ &\Rightarrow \;\; ((\frac{1}{n} - x_1)^2 + (x-x_2)^2) \to 0 \\ &\Rightarrow \;\; x = x_2 \; , \; (\frac{1}{n} - x_1) \to 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ &\Rightarrow \;\; g(x) = (0,x) = f(x) \end{aligned}$$

olur. Bu ise $g \neq f$ koşulu ile çelişir.

$x_1 > \frac{1}{n}$ ise, $d(g(x),(\frac{1}{n},x)) = 1$ olacağından f_n fonksiyon dizisi g fonksiyonuna ileri düzgün yakınsamaz.

Sonuçta, f_n fonksiyon dizisinin tek bir f fonksiyonuna ileri düzgün yakınsadığı görülür.

Bununla birlikte,

$$d(f_n(x), f(x)) = d((\frac{1}{n},x),(0,x)) = 1$$

olduğundan, (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna geri düzgün yakınsamaz.

Her $n \in \mathbb{N}$ için f_n fonksiyonunun ileri sürekli olması için her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ sayısı bulunmalıdır ki $y \in B^+(x,\delta)$ iken $f(y) \in B^+(f(x),\varepsilon)$ koşulunun *sağlanması gerekir. Gerçekten, her $\varepsilon > 0$ için*

$$
\begin{aligned}
y \in B^+(x,\delta) &\Rightarrow d(x,y) < \delta \\
&\Rightarrow |x-y| < \delta \\
&\Rightarrow |(\frac{1}{n},x) - (\frac{1}{n},y)| = |(0,x-y)| = |x-y| < \delta = \varepsilon \\
&\Rightarrow d((\frac{1}{n},x),(\frac{1}{n},y)) < \varepsilon \\
&\Rightarrow d(f(x),f(y)) < \varepsilon \\
&\Rightarrow f(y) \in B^+(f(x),\varepsilon)
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için f_n fonksiyonunun ileri sürekli olduğu görülür. Buna karşın, f fonksiyonu ileri sürekli değildir. Bunu göstermek için f fonksiyonunun ileri dizisel sürekli olmadığını göstermemiz yeterli olacaktır. $(x_n) = (\frac{1}{n})$ dizisini alalım. $x_n \xrightarrow{f} 0$ olduğu açıkça görülmektedir. Ancak,

$$d(f(0), f(x_n)) = d((0,0),(0,\frac{1}{n})) = 1$$

olduğundan, $f(x_n) \xrightarrow{f} f(0)$ gerçeklenmediği görülür.

Önerme 3.1.50. [12] *(X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetrik metrik uzaylar olmak üzere Y ileri kompakt olsun ve Y üzerinde ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirsin. Bu durumda $C_{ff}(X,Y)$ kümesi $\bar{\rho}$ düzgün asimetrik metriğinde ileri tamdır.*

Tanım 3.1.51. *(X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetrik metrik uzaylar olmak üzere, eğer her bir $b \in X$ için $\mathcal{S}_b = \{f(b) : f \in \mathcal{S}\}$ kümesi d_Y asimetrik metriğine göre ileri sınırlı ise $S \subset C_{ff}(X,Y)$ kümesine d_Y altında ileri noktasal sınırlıdır denir.*

Teorem 3.1.52. [12]***(Asimetrik Metrik Uzaylarda Arzela-Ascoli Teoremi)*** *(X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetrik metrik uzaylar olmak üzere, X ileri kompakt olsun ve Y üzerinde kapalı ve sınırlı kümeler ileri kompakt olsun. Ayrıca Y üzerinde ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirsin. $C_{ff}(X,Y)$, d_Y asimetrik metriğine karşılık gelen $\bar{\rho}$ düzgün asimetrik metriği ile donatılsın. Bu durumda, eğer bir $\mathcal{F} \subseteq C_{ff}(X,Y)$ alt kümesi ileri eşsürekli ve d_Y altında ileri noktasal sınırlı ise $\mathcal{F}$ ileri göreceli kompakttır.*

Aşağıda bir asimetrik metrik uzayda ileri yakınsaklığın geri yakınsaklığı gerektirmediği durumda yukarıdaki Arzela-Ascoli Teoreminin gerçeklenmediği gösterilmektedir.

Not 3.1.53. *Örnek 3.1.45'te, söz konusu asimetrik metrikte ileri yakınsaklığın geri yakınsaklığı gerektirmediği görülmüştü. Dahası,* $\mathcal{F} := \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *kümesi ileri eşsürekli ve ileri noktasal sınırlıdır. Buna karşın,* $\mathcal{F}$ *kümesi ileri göreceli kompakt değildir. Bu durum ileri yakınsaklığın geri yakınsaklığı gerektirmemesi nedeniyle, Arzela-Ascoli Teoreminin varsayımıyla çelişir.*

3.2 Asimetrik Metrik Uzaylarda Bazı Sonuçlar

Bu kısımda, asimetrik metrik uzaylarda temel kavramlardan yola çıkılarak elde edilen bazı sonuçlar sunulmuştur [15].

Tanım 3.2.1. (X, d) *bir asimetrik metrik uzay ve* $A \subseteq X$ *alt küme olsun. Eğer her* $\varepsilon > 0$ *için* $B^+(x, \varepsilon) \cap (A \setminus x) \neq \varnothing$ *oluyorsa yani* x *noktasını içeren her ileri açık küme,* A *kümesinin* x *noktasından başka en az bir elemanını içeriyorsa* X *kümesinin bu* x *noktasına* A *kümesinin bir ileri yığılma noktası denir.*

Teorem 3.2.2. *Bir asimetrik metrik uzayın ileri dizisel kompakt olması için gerek ve yeter koşul sonsuz her alt kümesinin en az bir ileri yığılma noktasının var olmasıdır.*

Kanıt. (X, d) bir asimetrik metrik uzay olmak üzere X ileri dizisel kompakt olsun ve X in sonsuz bir A alt kümesi verilsin. Terimleri A kümesinde olan, farklı noktalardan oluşan bir (x_n) dizisi oluşturabiliriz. X ileri dizisel kompakt olduğundan, (x_n) dizisinin ileri yakınsak bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır. Bu alt dizinin ileri yakınsadığı noktaya x diyelim. Burada, x noktasının A kümesinin ileri yığılma noktası olduğunu göstereceğiz. Bir $\varepsilon > 0$ verilsin. $x_{n_k} \xrightarrow{f} x$ olduğundan $\forall k \geq N$ için $x_{n_k} \in B^+(x, \varepsilon)$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Burada (x_n) dizisinin terimleri birbirinden farklı olduğundan $k \geq N$ için $x_{n_k} \neq x$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla $k \geq N$ için $B^+(x, \varepsilon)$, A kümesinin x noktasından farklı en az bir x_{n_k} elemanını içerir. Bu da x noktasının, A kümesinin bir ileri yığılma noktası olduğunu gösterir. Böylece X kümesinin her sonsuz alt kümesi, X kümesinde bir ileri yığılma noktasına sahiptir.

X kümesinin her sonsuz alt kümesi, X kümesinde bir ileri yığılma noktasına sahip olsun. (x_n), X kümesinde herhangi bir dizi olsun. A, (x_n) dizisinin farklı terimlerinin oluşturduğu küme olmak üzere, A kümesi ya sonlu kümedir ya da sonsuz kümedir. A sonlu küme ise (x_n) dizisinin bir tane elemanı sonsuz kere tekrar edeceğinden terimleri bu elemandan oluşan sabit alt dizi ileri yakınsak olur. A sonsuz küme olsun. Kabulden A kümesinin en az bir ileri yığılma noktası vardır. Bu ileri yığılma noktası x olsun. Şimdi $B^+(x,1)$ ileri açık yuvarını alalım. Bu ileri açık yuvar A nın x noktasından farklı bir x_{n_1} elemanını içerir. $B^+(x,\frac{1}{2})$ ileri açık yuvarı A kümesinin x noktasından ve x_{n_1} elemanından farklı bir x_{n_2} elemanını içerir. Benzer şekilde $n_3 > n_2$ olmak üzere bir x_{n_3} vardır. Bu şekilde devam ederek (x_n) dizisinin

$$\forall k \in \mathbb{N} \text{ için } x_{n_k} \in B^+(x,\tfrac{1}{k})$$

$$d(x,x_{n_k}) < \tfrac{1}{k} \to 0$$

$$x_{n_k} \xrightarrow{f} x$$

gerçekleyen bir (x_{n_k}) alt dizisi bulunmuş olur. Bu durumda X kümesindeki her dizinin ileri yakınsak bir alt dizisi bulunduğundan X ileri dizisel kompakttır. □

Teorem 3.2.3. *Bir (X,d) asimetrik metrik uzayında ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirsin. X uzayının ileri bütünüyle sınırlı olması için gerek ve yeter koşul terimleri X kümesinde olan her dizinin bir ileri Cauchy alt dizisinin olmasıdır.*

Kanıt. (X,d) asimetrik metrik uzayı ileri bütünüyle sınırlı olsun. Keyfi bir $(a_n) \subset X$ dizisi alalım. Bu durumda, verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ elemanları vardır ki $\{B^+(x_i,\varepsilon) : i = 1,2,...,n\}$ açık yuvarlar ailesi X kümesini örter. Buna göre, $\varepsilon_1 = 1$ için, X kümesini örten sonlu bir $\{B^+(x_i,\varepsilon_1) : i = 1,2,...,n\}$ açık yuvarlar ailesi vardır. Bu durumda, öyle bir $1 \leq i_0 \leq n$ vardır ki $B^+(x_{i_0},\varepsilon_1) =: B_1^+$ açık yuvarı (a_n) dizisinin sonsuz sayıda elemanını içerir. Böylece öyle bir $k_1 \in \mathbb{N}$ bulabiliriz ki $a_{k_1} \in B_1^+$ olur. İleri bütünüyle sınırlı bir kümenin her alt kümesi de ileri bütünüyle sınırlı olduğundan B_1^+ açık yuvarı da ileri bütünüyle sınırlıdır. Buna göre, $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ sayısına karşılık öyle $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_{n_1}^{(1)} \in X$ elemanları vardır ki $\left\{B^+(x_i^{(1)},\varepsilon_2) : i = 1,2,...,n_1\right\}$ açık yuvarlar ailesi B_1^+ açık yuvarını örter. Bu durumda, öyle bir $1 \leq i_1 \leq n_1$ vardır ki $B_1^+ \cap B^+(x_{i_1}^{(1)},\varepsilon_2) =: B_2^+$ açık kümesi (a_n) dizisinin sonsuz sayıda elemanını içerir. Böylece $k_2 > k_1$ olacak şekilde öyle bir $k_2 \in \mathbb{N}$ bulabiliriz ki $a_{k_2} \in B_2^+$ olur. Ayrıca $B_2^+ \subset B_1^+$ dır. Benzer şekilde, ileri bütünüyle sınırlı bir kümenin her alt kümesi de ileri bütünüyle sınırlı olduğundan B_2^+ açık kümesi de ileri bütünüyle sınırlıdır. Buna göre, $\varepsilon_3 = \frac{1}{3}$ sayısına karşılık öyle $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, ..., x_{n_2}^{(2)} \in X$

elemanları vardır ki $\left\{B^+(x_i^{(2)}, \varepsilon_3) : i = 1, 2, ..., n_2\right\}$ açık yuvarlar ailesi B_2^+ açık kümesini örter. Bu durumda, öyle bir $1 \leq i_2 \leq n_2$ vardır ki $B_2^+ \cap B^+(x_{i_2}^{(2)}, \varepsilon_3) =: B_3^+$ açık kümesi (a_n) dizisinin sonsuz sayıda elemanını içerir. Böylece $k_3 > k_2 > k_1$ olacak şekilde öyle bir $k_3 \in \mathbb{N}$ bulabiliriz ki $a_{k_3} \in B_3^+$ olur. Ayrıca $B_3^+ \subset B_2^+ \subset B_1^+$ dır. Böyle devam ederek, $B_1^+ \supset B_2^+ \supset ...$ ve Çap$(B_n^+) < \frac{1}{n}$ olacak şekilde B_n^+ iç içe açık kümeler dizisi ve böylece $a_{k_n} \in B_n^+$ olmak üzere (a_n) dizisinin bir (a_{k_n}) alt dizisini elde ederiz. (a_{k_n}) dizisi bir ileri Cauchy dizisidir. Gerçekten, $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu durumda $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ ve böylece Çap$(B_{n_0}^+) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu ise, $k_m \geq k_n \geq k_{n_0}$ oldukça $a_{k_n}, a_{k_m} \in B_{n_0}^+$ olmasını ve bu da $d(a_{k_n}, a_{k_m}) < \varepsilon$ olmasını gerektirir ki buradan (a_{k_n}) dizisinin bir ileri Cauchy dizisi olduğu görülür.

Şimdi X içindeki her dizinin bir ileri Cauchy alt dizisi var olsun. X ileri bütünüyle sınırlı olmasın. Bu durumda yeterince küçük bir $\varepsilon > 0$ sayısı için, sonlu bir ε-örtüsü yoktur. Herhangi bir $a_1 \in X$ seçelim. $B^+(a_1, \frac{\varepsilon}{3}) = B_1^+$ açık yuvarını düşünelim. Kabülden B_1^+ yuvarı X kümesini örtemeyeceğinden $a_2 \in X \setminus B_1^+$ seçilebilir. $B^+(a_2, \frac{\varepsilon}{3}) = B_2^+$ açık yuvarını ele alalım. $B_1^+ \cup B_2^+$, X kümesini örtemeyeceğinden bir $a_3 \in X \setminus (B_1^+ \cup B_2^+)$ seçilebilir. Bu şekilde devam ederek $m > n$ için $d(a_n, a_m) \geq \frac{\varepsilon}{3}$ olacak şekilde bir (a_k) dizisi elde edilebilir. Bu dizinin bir ileri Cauchy alt dizisi var olamayacağından X ileri bütünüyle sınırlı bulunur. □

Teorem 3.2.4. *(X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetrik metrik uzaylar olmak üzere Y ileri kompakt olsun ve Y üzerinde ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirsin. X uzayından Y uzayına tanımlı fonksiyonların bir (f_n) dizisinin düzgün ileri yakınsak olması için gerek ve yeter koşul düzgün ileri Cauchy olmasıdır.*

Kanıt. (f_n), X kümesinden Y kümesine tanımlı düzgün ileri yakınsak bir dizi ve ileri limit fonksiyonu f olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq N_\varepsilon$ ve $\forall x \in X$ için $d(f(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$ olur. (f_n), f fonksiyonuna düzgün ileri yakınsadığından düzgün geri de yakınsar ve buradan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists M_\varepsilon \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq M_\varepsilon$ ve $\forall x \in X$ için $d(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$ olur. $N = \max\{N_\varepsilon, M_\varepsilon\}$ alalım. $\forall m \geq n \geq N$ ve $\forall x \in X$ için $d(f_n(x), f_m(x)) \leq d(f_n(x), f(x)) + d(f(x), f_m(x)) < \varepsilon$ bulunur. Yani (f_n) düzgün ileri Cauchy dizisidir.

Şimdi (f_n), X uzayından Y uzayına tanımlı bir düzgün ileri Cauchy dizisi olsun. Her bir sabit $x \in X$ için $(f_n(x))$ dizisi bir ileri Cauchy dizisidir. (Y, d_Y) ileri tam olduğundan $(f_n(x))$ dizisi bir ileri limite sahiptir. Ayrıca ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirdiğinden bir geri limite sahiptir. Bu geri limiti $f(x)$ ile gösterirsek, bu şekilde $f : X \to Y$ geri limit fonksiyonu tanımlarız ve $f_n \xrightarrow{b} f$ (noktasal) olur. Böylece verilen $\varepsilon > 0$ ve her bir $x \in X$ için $\exists N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N} \ni \forall m \geq N_{\varepsilon,x}$ için $d(f_m(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$ olur. (f_n) bir düzgün ileri Cauchy dizisi olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists M_\varepsilon \in \mathbb{N} \ni \forall m \geq n \geq M_\varepsilon$ ve $\forall x \in X$ için $d(f_n(x), f_m(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$ gerçeklenir. Şimdi $n \geq M_\varepsilon$ olmak üzere $m > \max\{M_\varepsilon, N_{\varepsilon,x}\}$ alınırsa $m \geq n \geq M_\varepsilon$ olduğunda $d(f_n(x), f(x)) \leq d(f_n(x), f_m(x)) + d(f_m(x), f(x)) < \varepsilon$ bulunur ki bu (f_n) dizisinin f fonksiyonuna düzgün geri yakınsamasıdır. O halde (f_n) dizisi ileri düzgün yakınsaktır. □

Teorem 3.2.5. *(X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetrik metrik uzaylar olmak üzere Y ileri kompakt olsun ve Y üzerinde ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirsin. (f_n), X uzayından Y uzayına tanımlı ileri sınırlı fonksiyonların bir dizisi ve f, X uzayından Y uzayına tanımlı bir fonksiyon olmak üzere (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna düzgün ileri yakınsak ise f fonksiyonu X üzerinde ileri sınırlıdır.*

Kanıt. Lemma 3.1.40'tan (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna düzgün ileri yakınsak olduğundan düzgün geri yakınsaktır. Buradan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq N_\varepsilon$ ve $\forall x \in X$ için $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ olur. Özel olarak $\varepsilon = 1$ için $\exists N_1 \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq N_1$ ve $\forall x \in X$ için $d(f_n(x), f(x)) < 1$ sağlanır. Öte yandan (f_n), ileri sınırlı fonksiyonların bir dizisi olduğundan $\forall x \in X$ için $d(y, f_n(x)) < M$ olacak şekilde bir $y \in Y$ ve $M > 0$ vardır. Bu durumda $d(y, f(x)) \leq d(y, f_n(x)) + d(f_n(x), f(x)) < 1 + M$ elde edilir. Yani f fonksiyonu ileri sınırlıdır. □

3.3 Asimetrik Metrik Uzaylarda Kuazi-Cauchy Dizileri

Bu kısımda asimetrik uzaylarda ileri (geri) kuazi-Cauchy dizisi kavramı tanımlanmış ve bu dizilerden yararlanılarak asimetrik metrik uzaylarda yeni tipte kompaktlıklar ve süreklilikler tanımlanmış ve araştırılmıştır [16].

Tanım 3.3.1. *Bir asimetrik metrik uzayda*

$$\Delta^+ x_n = d(x_n, x_{n+1}) \, (\Delta^- x_n = d(x_{n+1}, x_n))$$

olmak üzere $(\Delta^+ x_n)$ $((\Delta^- x_n))$ *dizisi sıfıra yakınsıyorsa* (x_n) *dizisine ileri (geri) kuazi-Cauchy dizisi denir.*

Cao ve Kanıbir tarafından ileri (geri) kuazi-Cauchy yerine sol (sağ) kuazi-K-Cauchy terimi kullanılmıştır.

Bu tanıma göre bir ileri Cauchy dizisinin ileri kuazi-Cauchy dizisi olduğu açıktır, ancak aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi karşıtı doğru değildir.

Örnek 3.3.2. $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *için*

$$d(x,y) = \begin{cases} y - x, & y \geq x \\ 1, & y < x \end{cases}$$

olarak tanımlanan Sorgenfrey asimetrik metriğinde $(x_n) = (\sqrt{n})$ *dizisi ileri kuazi-Cauchy dizisidir, ancak ileri Cauchy dizisi değildir.*

Bir ileri Cauchy dizisinin herhangi bir alt dizisi de ileri Cauchy dizisi iken bu özelliğin ileri kuazi-Cauchy dizilerinde sağlanmadığı, üstteki örnekte $(x_n) = (\sqrt{n})$ dizisinin $(x_{n^2}) = (n)$ alt dizisinin ileri kuazi-Cauchy dizisi olmamasından görülmektedir.

Burada açıkça görülmektedir ki bir ileri Cauchy dizisinin herhangi bir alt dizisi ileri kuazi-Cauchy dizisidir.

Şimdi bir X asimetrik metrik uzayının bir alt kümesinin yukarı (aşağı) kompaktlık kavramını tanımlayalım.

Tanım 3.3.3. *Terimleri bir* X *asimetrik metrik uzayının bir* E *alt kümesinde olan her* (x_n) *dizisinin bir ileri (geri) kuazi-Cauchy alt dizisi varsa* $E \subseteq X$ *alt kümesine yukarı (aşağı) kompakttır denir.*

Bu tanıma göre X kümesinin sonlu her alt kümesi yukarı ve aşağı kompakttır.

Lemma 3.3.4. *Yukarı kompakt bir kümenin her alt kümesi de yukarı kompakttır.*

Kanıt. E yukarı kompakt bir küme olsun. Herhangi bir $A \subseteq E$ alalım. Terimleri A kümesinde olan herhangi bir (x_n) dizisini alalım. $A \subseteq E$ olduğundan (x_n) dizisinin terimleri E kümesinde bulunur. E yukarı kompakt bir küme olduğundan (x_n) dizisinin bir (x_{n_k}) ileri kuazi-Cauchy alt dizisi vardır. O halde A kümesi yukarı kompakttır. $\square$

Sonuç 3.3.5. *Bir asimetrik metrik uzayın yukarı kompakt alt kümelerinin keyfi kesişimi yukarı kompakttır.*

Lemma 3.3.6. *Bir asimetrik metrik uzayın yukarı kompakt iki alt kümesinin birleşimi yukarı kompakttır.*

Kanıt. A ve B, X asimetrik uzayının yukarı kompakt iki alt kümesi olsun. $A \cup B$ kümesinin yukarı kompakt olduğunu göstermek için terimleri $A \cup B$ kümesinde olan herhangi bir (x_n) dizisini alalım. Bu dizinin sonsuz çoklukta indislere karşılık gelen terimleri A kümesinde veya B kümesinde olmak zorundadır. A kümesinde olduğunu kabul edelim. (x_n) dizisinin sonsuz çoklukta indislere karşılık gelen terimleri için oluşturulan alt diziyi (x_{n_k}) ile gösterelim. A kümesi yukarı kompakt olduğundan (x_{n_k}) dizisinin bir $(x_{n_{k_j}})$ ileri kuazi-Cauchy alt dizisi vardır. $(x_{n_{k_j}})$, (x_n) dizisinin bir alt dizisi olduğundan $A \cup B$ kümesi yukarı kompakt bulunur. □

Bir asimetrik metrik uzayın sonlu adette yukarı kompakt alt kümesinin birleşiminin yukarı kompakt olduğu tümevarım yöntemi kullanılarak gösterilebilinir.

Aşağıdaki teorem, asimetrik metrik uzaylarda ileri tam sınırlılık ile yukarı kompaktlığın denk olduğunu göstermektedir.

Teorem 3.3.7. (X, d) *asimetrik metrik uzay olmak üzere bir* $E \subseteq X$ *alt kümesinin ileri bütünüyle sınırlı olması için gerek ve yeter koşul yukarı kompakt olmasıdır.*

Kanıt. E kümesi ileri bütünüyle sınırlı ise yukarı kompakt olduğu açıktır.

Karşıt olarak, elemanları E kümesinden alınan her dizinin bir ileri kuazi-Cauchy alt dizisinin var olduğunu ve E kümesinin ileri tam sınırlı olmadığını kabul edelim. Bu durumda E kümesinin sonlu bir ε-ağı olmayacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ vardır. $B^+(x_1, \varepsilon) = S_\varepsilon(x_1)$ olmak üzere E kümesinin herhangi bir x_1 elemanını alalım. E ileri tam sınırlı olmadığından $S_\varepsilon(x_1) \neq E$ olur, aksi takdirde $\{x_1\}$, E kümesinin sonlu bir ε-ağı olurdu. Buradan $x_2 \notin S_\varepsilon(x_1)$, yani $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon$ olacak şekilde $x_2 \in E$ vardır. O halde, $S_\varepsilon(x_1) \cup S_\varepsilon(x_2) \neq E$ gerçeklenir, aksi takdirde $\{x_1, x_2\}$ sonlu bir ε-ağı olurdu. $x_3 \notin S_\varepsilon(x_1) \cup S_\varepsilon(x_2)$ olsun, yani;

$$d(x_1, x_3) \geq \varepsilon \text{ ve } d(x_2, x_3) \geq \varepsilon$$

gerçeklenir. Bu şekilde devam ederek;

$$x_n \notin \bigcup_{i=1}^{n-1} S_\varepsilon(x_i) \quad (n = 2, 3, ...)$$

yani

$$d(x_i, x_n) \geq \varepsilon, \quad (i = 1, 2, ..., n-1 \; ve \; n = 2, 3, ...) \quad (i < n)$$

olacak şekilde, elemanları E kümesinden alınan bir (x_n) dizisi oluşturabiliriz.

Sonuç olarak $n < m$ gerçekleyen her n, m için $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ olduğundan bu (x_n) dizisinin hiç bir ileri kuazi-Cauchy alt dizisi yoktur. Bu çelişkiden dolayı E ileri tam sınırlıdır. □

Asimetrik metrik uzaylarda bir dizinin ileri yakınsak olmasının ileri Cauchy olmasını gerektirmediği Bölüm 3.1 de örneklenerek gösterilmişti.Aşağıdaki lemma ile ileri yakınsak bir dizinin hangi şart altında ileri Cauchy olacağı ifade edilmiştir.

Lemma 3.3.8. (X, d) *asimetrik metrik uzayında ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektiriyorsa ileri yakınsak her dizi ileri Cauchy dizisidir.*

Kanıt. (x_n) dizisi x noktasına ileri yakınsasın. X üzerinde ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirdiğinden bu dizi x noktasına geri yakınsar.Bir $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu durumda $m \geq n \geq N$ olduğunda $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. O halde $m \geq n \geq N$ için

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon$$

olup (x_n) dizisi bir ileri Cauchy dizisidir. □

Tanım 3.3.9. X *bir asimetrik metrik uzay olmak üzere bir* $E \subseteq X$ *alt kümesinden* Y *asimetrik uzayına tanımlı bir* f *fonksiyonu eğer ileri (geri) kuazi-Cauchy dizilerini ileri (geri) kuazi Cauchy dizilerine dönüştürüyorsa, yani terimleri* E *kümesinde olan her* (x_n) *ileri (geri) kuazi-Cauchy dizisi için* $(f(x_n))$ *dizisi ileri (geri) kuazi-Cauchy dizisi oluyorsa* f *fonksiyonuna yukarı (aşağı) süreklidir denir.*

Teorem 3.3.10. X *bir asimetrik metrik uzay olmak üzere* f*, bir* $E \subseteq X$ *alt kümesinden* Y *uzayına tanımlı yukarı sürekli bir fonksiyon olsun ve* X *üzerinde ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirsin. Bu durumda* f *ileri süreklidir.*

Kanıt. f, E üzerinde yukarı sürekli bir fonksiyon olmak üzere (x_n), E de ileri limiti l olan ileri yakınsak bir dizi olsun.Bu durumda

$$(x_1, l, x_2, l, ..., x_n, l, ...)$$

dizisi de l ye ileri yakınsar. Ayrıca

$$(x_1, l, x_2, l, ..., x_n, l, ...)$$

dizisi ileri kuazi-Cauchy dizisidir. f yukarı sürekli olduğundan

$$(f(x_1), f(l), f(x_2), f(l), ..., f(x_n), f(l), ...)$$

dizisi de Y uzayında ileri kuazi-Cauchy dizisidir. Buradan $(f(x_n))$ dizisinin $f(l)$ noktasına ileri yakınsadığı görülür. O halde f fonksiyonu E üzerinde ileri süreklidir. □

Teorem 3.3.11. *f, X asimetrik metrik uzayından Y asimetrik metrik uzayına tanımlı yukarı sürekli bir fonksiyon olsun.Bu durumda, X uzayının yukarı kompakt her bir alt kümesinin f fonksiyonu altındaki görüntüsü de yukarı kompakttır.*

Kanıt. f, X asimetrik metrik uzayından Y asimetrik metrik uzayına tanımlı yukarı sürekli bir fonksiyon ve E, X uzayının yukarı kompakt bir altkümesi olsun. Terimleri $f(E)$ kümesinden alınan herhangi bir (y_n) dizisini alalım. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $y_n = f(x_n)$ olacak şekilde E kümesinin x_n elemanları vardır. E kümesi yukarı kompakt olduğundan (x_n) dizisinin bir $(t_k) = (x_{n_k})$ ileri kuazi-Cauchy alt dizisi vardır. f yukarı sürekli olduğundan $(f(t_k)) = (f(x_{n_k}))$ ileri kuazi-Cauchy dizisi olur. Böylece $(f(t_k))$, $(f(x_n))$ dizisinin bir ileri kuazi-Cauchy alt dizisi olarak bulunmuş olur. □

Aşağıdaki teorem, düzgün ileri sürekli bir fonksiyonun ileri kuazi-Cauchy dizilerini ileri kuazi-Cauchy dizilerine dönüştürdüğünü ifade eder. Bu önemli sonuç, Cao ve Kanibir tarafından kuazi-pseudo metrik uzaylarda ispatlanmıştır [10].

Teorem 3.3.12. *f, bir $E \subseteq X$ alt kümesi üzerinde düzgün ileri sürekli ise E üzerinde yukarı süreklidir.*

Metrik uzaylarda bir sürekli fonksiyonlar dizisinin düzgün limitinin sürekli olduğu bilinmektedir. Bu ifade, Y kümesinin ileri dizisel kompakt olması halinde yukarı süreklilik durumu için de doğrudur. Yani Y ileri dizisel kompakt ise, bir yukarı sürekli fonksiyonlar dizisinin düzgün ileri limiti yukarı süreklidir.

Teorem 3.3.13. *Y ileri kompakt olsun ve Y üzerinde ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirsin.. (f_n), bir $E \subseteq X$ alt kümesinden Y uzayına tanımlı yukarı sürekli fonksiyonların bir dizisi olmak üzere, (f_n) bir f fonksiyonuna düzgün geri yakınsak ise f yukarı süreklidir.*

Kanıt. (x_n), terimleri E kümesinde olan bir ileri kuazi-Cauchy dizisi olmak üzere $\varepsilon > 0$ olsun. (f_n), f fonksiyonuna düzgün geri yakınsak olduğundan $n \geq N_1$ olduğunda her $x \in E$ için $d_Y(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ olacak şekilde $N_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Y ileri dizisel kompakt olduğundan her $x \in E$ için $(f_n(x))$, $f(x)$ noktasına ileri yakınsaktır. Buradan, $n \geq N_2$ olduğunda her $x \in E$ için $d_Y(f(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ olacak şekilde $N_2 \in \mathbb{N}$ vardır. $N = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. f_N yukarı sürekli olduğundan $n \geq N_0$ için $d(f_N(x_n), f_N(x_{n+1})) < \frac{\varepsilon}{3}$ olacak şekilde N den büyük ve ε sayısına bağlı bir $N_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda, $n \geq N_0$ için

$$\begin{aligned} d(f(x_n), f(x_{n+1})) &\leq d(f(x_n), f_N(x_n)) + d(f_N(x_n), f_N(x_{n+1})) + d(f_N(x_{n+1}), f(x_{n+1})) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur, yani $(f(x_n))$ ileri kuazi-Cauchy dizisidir. □

Teorem 3.3.14. *Y ileri kompakt olsun ve Y üzerinde ileri yakınsaklık geri yakınsaklığa denk olsun. (f_n), bir $E \subseteq X$ alt kümesinden Y uzayına tanımlı yukarı sürekli fonksiyonların bir dizisi olmak üzere, (f_n) bir f fonksiyonuna düzgün ileri yakınsak ise f fonksiyonu yukarı süreklidir.*

Kanıt. (x_n), terimleri E kümesinde olan bir ileri kuazi-Cauchy dizisi olmak üzere $\varepsilon > 0$ olsun. (f_n), f fonksiyonuna düzgün ileri yakınsak olduğundan $n \geq N_1$ olduğunda her $x \in E$ için $d_Y(f(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ olacak şekilde $N_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Y üzerinde ileri yakınsaklık geri yakınsaklığa denk olduğundan her $x \in E$ için $(f_n(x))$, $f(x)$ noktasına geri yakınsaktır. Buradan, $n \geq N_2$ olduğunda her $x \in E$ için $d_Y(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ olacak şekilde $N_2 \in \mathbb{N}$ vardır. $N = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. f_N yukarı sürekli olduğundan $n \geq N_0$ için $d(f_N(x_n), f_N(x_{n+1})) < \frac{\varepsilon}{3}$ olacak şekilde N sayısından büyük ve ε sayısına bağlı bir $N_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda, $n \geq N_0$ için

$$\begin{aligned} d(f(x_n), f(x_{n+1})) &\leq d(f(x_n), f_N(x_n)) + d(f_N(x_n), f_N(x_{n+1})) + d(f_N(x_{n+1}), f(x_{n+1})) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur, yani $(f(x_n))$ ileri kuazi-Cauchy dizisidir. □

Teorem 3.3.15. (Y, d_Y) *ileri kompakt olsun ve* Y *üzerinde ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirsin.* X *kümesinden* Y *kümesine tanımlı tüm yukarı sürekli fonksiyonların kümesi* $\bar{\rho}$ *asimetrik metriğinde* Y^X *uzayının ileri kapalı bir alt kümesidir.*

Kanıt. X kümesinden Y kümesine tanımlı tüm yukarı sürekli fonksiyonların kümesi $\Delta^+C(X)$ ile gösterilsin ve f, $\Delta^+C(X)$ in ileri kapanışından bir eleman olsun. Bu durumda terimleri $\Delta^+C(X)$ kümesinde olan ve f fonksiyonuna düzgün ileri yakınsayan bir (f_n) dizisi vardır. f fonksiyonunun yukarı sürekli olduğunu göstermek için bir (x_n) ileri kuazi-Cauchy dizisi ve $\varepsilon > 0$ alınsın. (f_n), f fonksiyonuna düzgün ileri yakınsadığından $n \geq N_1$ olduğunda her $x \in X$ için $d_Y(f(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ olacak şekilde $N_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Y üzerinde ileri yakınsaklık geri yakınsaklığa denk olduğundan her $x \in X$ için $(f_n(x))$, $f(x)$ noktasına geri yakınsaktır. Buradan, $n \geq N_2$ olduğunda her $x \in X$ için $d_Y(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ olacak şekilde $N_2 \in \mathbb{N}$ vardır. $N = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. f_N yukarı sürekli olduğundan $n \geq N_0$ için $d(f_N(x_n), f_N(x_{n+1})) < \frac{\varepsilon}{3}$ olacak şekilde N sayısından büyük ve ε sayısına bağlı bir $N_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda, $n \geq N_0$ için

$$\begin{aligned} d(f(x_n), f(x_{n+1})) &\leq d(f(x_n), f_N(x_n)) + d(f_N(x_n), f_N(x_{n+1})) + d(f_N(x_{n+1}), f(x_{n+1})) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur, yani $(f(x_n))$ ileri kuazi-Cauchy dizisidir. Böylece f fonksiyonu yukarı sürekli bulunmuş olur. □

Sonuç 3.3.16. (Y, d_Y) *ileri kompakt olsun ve* Y *üzerinde ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirsin.* X *kümesinden* Y *kümesine tanımlı tüm yukarı sürekli fonksiyonların kümesi* $\bar{\rho}$ *asimetrik metriğinde ileri tamdır.*

3.4 Asimetrik Metrik Uzaylarda İstatistiksel Kuazi-Cauchy Dizileri

Bu kısımda asimetrik metrik uzaylarda istatistiksel ileri (geri) kuazi Cauchy dizileri tanımlanarak istatistiksel yukarı (aşağı) kompaktlık kavramı incelenmiştir. Ayrıca istatistiksel yukarı (aşağı) süreklilik ile istatistiksel ileri (geri) süreklilik arasındaki ilişki araştırılmıştır.

Tanım 3.4.1. *$K \subseteq \mathbb{N}$ kümesini alalım.*

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \mid \{k \leq n :\ k \in K\} \mid$$

limiti mevcut ise bu limite K kümesinin asimptotik yoğunluğu denir.

Burada $\mathbb{N}$ sayılar kümesi olmak üzere $A \subseteq \mathbb{N}$ için $|A|$ ile A kümesinin kardinali gösterilir.

Tanım 3.4.2. *(X, d) bir asimetrik metrik uzay ve (x_k), X uzayında bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,*

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \mid \{k \leq n :\ d(L, x_k) \geq \varepsilon\} \mid = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, yani $\delta(\{k :\ d(L, x_k) \geq \varepsilon\}) = 0$ ise, (x_k) dizisi L noktasına istatistiksel ileri yakınsaktır denir.

Benzer şekilde, her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \mid \{k \leq n :\ d(x_k, L) \geq \varepsilon\} \mid = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, yani $\delta(\{k :\ d(x_k, L) \geq \varepsilon\}) = 0$ ise, (x_k) dizisi L noktasına istatistiksel geri yakınsaktır denir.

Teorem 3.4.3. *Bir (X, d) asimetrik metrik uzayında ileri yakınsak her dizi istatistiksel ileri yakınsaktır.*

Kanıt. (x_k), ileri limiti L olan ileri yakınsak bir dizi olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. (x_k) dizisi L ye ileri yakınsak olduğundan $k > k_0$ olduğunda

$$d(L, x_k) < \varepsilon$$

olacak şekilde ε a bağlı bir k_0 pozitif tamsayısı vardır. Buradan $n \geq k_0$ için

$$\{k \leq n : \ d(L, x_k) \geq \varepsilon\} \subseteq \{1, 2, 3, ..., k_0 - 1, k_0\}$$

elde ederiz. Dolayısıyla

$$| \ \{k \leq n : \ d(L, x_k) \geq \varepsilon\} \ | \leq k_0$$

yazabiliriz. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \ | \ \{k \leq n : \ d(L, x_k) \geq \varepsilon\} \ | \leq \lim_{n\to\infty} \tfrac{k_0}{n} = 0$$

elde edilir. O halde (x_k) dizisi L noktasına ileri istatistiksel yakınsaktır. □

Teorem 3.4.3. ün karşıtı doğru değildir.İstatistiksel ileri yakınsak bir dizi ileri yakınsak olmayabilir.

Örnek 3.4.4. $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *için*

$$d(x, y) = \begin{cases} y - x, & y \geq x \\ 1, & y < x \end{cases}$$

ile tanımlanan asimetrik metrik uzayda

$$x_k = \begin{cases} 2 & , \ k = m^2, (m \in \mathbb{N}) \\ 0 & , \ d.d. \end{cases}$$

olarak tanımlanan (x_k) dizisi sıfıra istatistiksel ileri yakınsaktır ancak ileri yakınsak değildir. Gerçekten her $\varepsilon > 0$ için

$$|\{k \leq n : \ d(0, x_k) \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : \ x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : \ x_k \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : \ x_k \neq 0\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt{n} = 0$$

elde edilir ki bu da (x_k) dizisinin sıfıra istatistiksel ileri yakınsak olması demektir. Ancak,

$$\lim_{k\to\infty} d(0, x_k) = \lim_{k\to\infty} x_k \neq 0$$

olduğundan (x_k) dizisi sıfıra ileri yakınsak değildir.

Teorem 3.4.5. *(X, d) bir asimetrik metrik uzay olmak üzere X üzerinde ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektiriyorsa, istatistiksel ileri yakınsaklık istatistiksel geri yakınsaklığı gerektirir.*

Kanıt. X üzerinde ileri istatistiksel yakınsaklık geri istatistiksel yakınsaklığı gerektirmesin ve (x_k), terimleri X de olan, L noktasına ileri yakınsayan bir dizi olsun. (x_k), L noktasına istatistiksel ileri yakınsaktır. (x_k) dizisi L noktasına geri istatistiksel yakınsamadığından, $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \mid \{k \leq n : \ d(x_k, L) \geq \varepsilon\} \mid > 0$$

dır. Yani (x_k) dizisinin sonsuz çoklukta indisi için $d(x_k, L) \geq \varepsilon$ olur. Bu ise (x_k) dizisinin L noktasına geri yakınsamadığını ifade eder. O halde, X üzerinde ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirmez. Bu ise ispatı tamamlar. □

Teorem 3.4.6. *(X, d) bir asimetrik metrik uzay olmak üzere X üzerinde ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektiriyorsa, istatistiksel ileri yakınsak bir dizinin limiti tektir.*

Kanıt. (x_k) dizisi istatistiksel ileri yakınsak bir dizi olsun ve L_1 ve L_2 gibi birbirinden farklı ileri istatistiksel limitleri olsun. $d(L_1, L_2) \neq 0$ dır.
$d(L_1, L_2) = \alpha$ olsun. $\varepsilon = \frac{\alpha}{3}$ alalım. (x_k), L_1 noktasına istatistiksel ileri yakınsadığından

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \mid \left\{k \leq n : \ d(L_1, x_k) \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\right\} \mid = 0$$

olur.(x_k), L_2 noktasına istatistiksel ileri yakınsadığından istatistiksel geri yakınsar. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \mid \left\{k \leq n : \ d(x_k, L_2) \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\right\} \mid = 0$$

elde edilir. Buradan,

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : \ d(L_1, L_2) \geq \varepsilon\}|$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : \ d(L_1, x_k) \geq \frac{\varepsilon}{2}\}| + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mid \left\{k \leq n : \ d(x_k, L_2) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \mid = 0 + 0 = 0$$

bulunur. Bu çelişki ispatı tamamlar. □

Tanım 3.4.7. (X,d) *bir asimetrik metrik uzay ve* (x_k)*, X kümesinde bir dizi olsun. Eğer her* $\varepsilon > 0$ *için,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mid \{k \leq n : \ d(x_N, x_k) \geq \varepsilon\} \mid = 0$$

olacak şekilde bir N sayısı varsa (x_k) *dizisine istatistiksel ileri Cauchy dizisi denir. Benzer şekilde, her* $\varepsilon > 0$ *için,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mid \{k \leq n : \ d(x_k, x_N) \geq \varepsilon\} \mid = 0$$

olacak şekilde bir N sayısı varsa (x_k) *dizisine istatistiksel geri Cauchy dizisi denir.*

Tanım 3.4.8. (X,d) *bir asimetrik metrik uzay ve* $E \subseteq X$ *olsun. Eğer terimleri E kümesinden alınan her dizinin E kümesinin bir elemanına istatistiksel ileri (geri) yakınsayan bir alt dizisi varsa E kümesine istatistiksel ileri (geri) kompakt denir.*

Tanım 3.4.9. *(X,d) bir asimetrik metrik uzay ve* (x_k) *terimleri X kümesinde olan bir dizi olsun. Her bir k pozitif tamsayısı için* $\Delta^+ x_k = d(x_k, x_{k+1})$ $(\Delta^- x_k = d(x_{k+1}, x_k))$ *olmak üzere, her* $\varepsilon > 0$ *için*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : \ \Delta^+ x_k \geq \varepsilon\}| = 0$$

$$(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : \ \Delta^- x_k \geq \varepsilon\}| = 0)$$

oluyorsa (x_k) *dizisine istatistiksel ileri (geri) kuazi-Cauchy dizisi denir.*

Her istatistiksel ileri Cauchy dizisi istatistiksel ileri kuazi-Cauchy dizisidir ancak aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi karşıtı doğru değildir

Örnek 3.4.10. $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *için*

$$d(x,y) = \begin{cases} y - x, & y \geq x \\ 1, & y < x \end{cases}$$

ile tanımlanan asimetrik metrik uzayda

$$x_k = \begin{cases} 1 & , \ k = m^2, (m \in \mathbb{N}) \\ \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} & , \ d.d. \end{cases}$$

olarak tanımlanan (x_k) dizisi bir istatistiksel ileri kuazi-Cauchy dizisidir ancak istatistiksel ileri Cauchy dizisi değildir. Gerçekten herhangi bir $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu takdirde $k \geq k_0$ olduğunda $\frac{1}{k+1} < \varepsilon$ olacak şekilde bir k_0 sayısı vardır.

$|\{k \leq n : \ d(x_k, x_{k+1}) \geq \varepsilon\}| \leq k_0 + |\{k \leq n, \ k = m^2 - 1 : \ 1 \geq \varepsilon\}| +$
$|\{k \leq n, k = m^2 : \ \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} - 1 \geq \varepsilon\}| \, |\leq k_0 + \sqrt{n} + \sqrt{n}$
olduğundan

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \, | \, \{k \leq n : \ d(x_k, x_{k+1}) \geq \varepsilon\} \, | \leq \lim_{n\to\infty}(\frac{n_0}{n} + \frac{1}{n}\sqrt{n} + \frac{1}{n}\sqrt{n}) = 0$

elde edilir. Fakat istatistiksel ileri Cauchy dizisi değildir, bunun için özel olarak $\varepsilon = \frac{1}{2}$ için istatistiksel ileri Cauchy olma tanımının sağlanmadığını gösterelim. Bunun için N sayısının bir sayının karesi olma ve olmama durumlarını ayrı ayrı inceleyelim. Bir m sayısı için $N \neq m^2$, yani N tam kare olmayan herhangi bir pozitif tamsayı ise, sonlu adetteki, diyelim ki n_0 tane indisler hariç $d(x_N, x_k) \geq \frac{1}{2}$ bulunacağından,

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \leq n : \ d(x_N, x_k) \geq \frac{1}{2}\}|$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{n_0 < k \leq n : \ d(x_N, x_k) \geq \frac{1}{2}\}|$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{n_0 + 1, n_0 + 2, n_0 + 3, ..., n - 1, n\}| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(n - n_0) = 1 \neq 0$

elde edilir.

(x_k) dizisinin N sayısının tam kare olmaması durumunda istatiksel ileri Cauchy dizisi koşulunu sağlamadığını görmüş olduk. Şimdi de N sayısının tam kare olması durumunda istatistiksel ileri Cauchy olma koşulunu sağlamadığını gösterelim.

$\varepsilon = \frac{1}{2}$ *için*

$\{k \leq n : \ d(1, x_k) \geq \frac{1}{2}\} = \{k \leq n, \ k = j^2\} \bigcup \{k \leq n, k \neq j^2 : \ \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} - 1 \geq \frac{1}{2}\}$

olduğundan, yani

$\{k \leq n : \ d(1, x_k) \geq \frac{1}{2}\}$

$= \{k \leq n, \ k = j^2 : d(1,1) = 0 \geq \frac{1}{2})\} \bigcup \{k \leq n, \ k \neq j^2 : \ \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} - 1 \geq \frac{1}{2}\}$

$= \emptyset \bigcup \{k \leq n, \ k \neq j^2\} = \{k \leq n, k \neq j^2\}$

olduğundan

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \leq n : \ d(1, x_k) \geq \frac{1}{2}\}| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \leq n, \ k \neq j^2\}| = 1 \neq 0$

olur ki bu da (x_k) dizisinin istatistiksel ileri Cauchy olmadığını gösterir.

Lemma 3.4.11. *X üzerinde ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektiriyorsa istatistiksel ileri yakınsak her dizi istatistiksel ileri kuazi-Cauchy dizisidir.*

Kanıt. (x_k) dizisi l noktasına istatistiksel ileri yakınsak bir dizi olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin.

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \mid \left\{k \leq n :\ d(l, x_k) \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\right\} \mid= 0$$

dır. X üzerinde ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirdiğinden istatistiksel ileri yakınsaklık istatistiksel geri yakınsaklığı gerektirir. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \mid \left\{k \leq n :\ d(x_k, l) \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\right\} \mid= 0$$

olur.

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \mid \left\{k \leq n :\ d(l, x_{k+1}) \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\right\} \mid= 0$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \mid \{k \leq n :\ d(x_k, x_{k+1}) \geq \varepsilon\} \mid\leq \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \mid \left\{k \leq n :\ d(x_k, l) \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\right\} \mid$$
$$+ \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \mid \left\{k \leq n :\ d(l, x_{k+1}) \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\right\} \mid= 0 + 0 = 0$$

bulunur. O halde (x_k) dizisi istatistiksel ileri kuazi Cauchy dizisidir. □

Tanım 3.4.12. (X, d) *asimetrik metrik uzayında eğer terimleri E kümesinde olan her dizinin bir istatistiksel ileri (geri) kuazi-Cauchy alt dizisi varsa $E \subseteq X$ alt kümesine istatistiksel yukarı (aşağı) kompakt denir.*

Bu tanıma göre, X kümesininin sonlu her alt kümesi istatistiksel yukarı ve aşağı kompakttır. İstatistiksel yukarı kompakt bir kümenin her alt kümesi de istatistiksel yukarı kompakttır, sonlu sayıda istatistiksel yukarı kompakt kümenin birleşimi istatistiksel yukarı kompakt ve X kümesinin istatistiksel yukarı kompakt alt kümelerinin keyfi kesişimi istatistiksel yukarı kompakttır.

Teorem 3.4.13. (X, d) *asimetrik metrik uzay olmak üzere bir $E \subseteq X$ in ileri bütünüyle sınırlı olması için gerek ve yeter koşul istatistiksel yukarı kompakt olmasıdır.*

Kanıt. E kümesinin ileri bütünüyle sınırlı ise istatistiksel yukarı kompakt olduğu açıktır.

Karşıt olarak, elemanları E kümesinden alınan her dizinin bir istatistiksel ileri kuazi-Cauchy dizisinin var olduğunu ve E kümesinin ileri bütünüyle sınırlı olmadığını kabul edelim. Bu durumda E kümesinin sonlu bir ε-ağı olmayacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ vardır. $B^+(x,\varepsilon) = S_\varepsilon(x)$ olmak üzere E nin herhangi bir x_1 elemanını alalım. E ileri bütünüyle sınırlı olmadığından $S_\varepsilon(x_1) \neq E$ olur, aksi takdirde $\{x_1\}$, E nin sonlu bir ε-ağı olurdu. Buradan $x_2 \notin S_\varepsilon(x_1)$, yani $d(x_1,x_2) \geq \varepsilon$ olacak şekilde $x_2 \in E$ vardır. O halde, $S_\varepsilon(x_1) \cup S_\varepsilon(x_2) \neq E$ dir, aksi takdirde $\{x_1, x_2\}$ sonlu bir ε-ağı olurdu. $x_3 \notin S_\varepsilon(x_1) \cup S_\varepsilon(x_2)$ olsun, yani;

$$d(x_1,x_3) \geq \varepsilon \text{ ve } d(x_2,x_3) \geq \varepsilon \text{ gerçeklenir.}$$

Bu şekilde devam ederek;

$$x_n \notin \textstyle\bigcup_{i=1}^{n-1} S_\varepsilon(x_i) \quad (n = 2,3,...)$$

yani

$$d(x_i,x_n) \geq \varepsilon, \quad (i = 1,2,...,n-1 \; ve \; n = 2,3,...) \quad (i < n)$$

olacak şekilde, elemanları E den alınan bir (x_n) dizisi oluşturabiliriz.

Sonuç olarak $n < m$ gerçekleyen her n, m için $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ olduğundan bu (x_n) dizisinin hiç bir istatistiksel ileri kuazi-Cauchy alt dizisi yoktur. Bu çelişkiden dolayı E kümesi ileri bütünüyle sınırlıdır. □

Tanım 3.4.14. (X,d) *asimetrik metrik uzayının bir E alt kümesi üzerinde tanımlı bir f fonksiyonuna eğer istatistiksel ileri yakınsak dizileri koruyorsa, yani (x_n) dizisi l noktasına istatistiksel ileri yakınsak iken $(f(x_n))$ dizisi $f(l)$ noktasına istatistiksel ileri yakınsak oluyorsa istatistiksel ileri süreklidir denir.*

Tanım 3.4.15. (X,d) *asimetrik metrik uzayının bir E alt kümesi üzerinde tanımlı bir f fonksiyonuna eğer istatistiksel ileri kuazi-Cauchy dizilerini koruyorsa, yani (x_n) dizisi istatistiksel ileri kuazi-Cauchy iken $(f(x_n))$ dizisi istatistiksel ileri kuazi-Cauchy oluyorsa istatistiksel yukarı süreklidir denir.*

Teorem 3.4.16. *X ve Y asimetrik metrik uzaylar olmak üzere f, X kümesinden Y kümesine tanımlı bir fonksiyon olsun ve X üzerinde ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirsin. f fonksiyonu istatistiksel yukarı sürekli ise istatistiksel ileri süreklidir.*

Kanıt. f yukarı istatistiksel sürekli bir fonksiyon ve (x_n) istatistiksel ileri limiti l olan istatistiksel ileri yakınsak bir dizi olsun. Buradan

$$(x_1, l, x_2, l, ..., x_n, l, ...)$$

dizisi de l noktasına istatistiksel ileri yakınsaktır. X üzerinde ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirdiğinden bu dizi istatistiksel ileri kuazi-Cauchy dir. f istatistiksel yukarı sürekli olduğundan

$$(f(x_1), f(l), f(x_2), f(l), ..., f(x_n), f(l), ...)$$

dizisi de istatistiksel ileri kuazi-Cauchy dizisidir. Buradan $(f(x_n))$ dizisinin $f(l)$ noktasına istatistiksel ileri yakınsadığı görülür. O halde f fonksiyonu istatistiksel ileri süreklidir. □

Teorem 3.4.17. *f, bir X asimetrik metrik uzayından bir Y asimetrik metrik uzayına tanımlı istatistiksel yukarı sürekli bir fonksiyon olsun.Bu durumda, X kümesinin istatistiksel yukarı kompakt her alt kümesinin f fonksiyonu altındaki görüntüsü de istatistiksel yukarı kompakttır.*

Kanıt. f, X kümesinden Y kümesine tanımlı istatistiksel yukarı sürekli bir fonksiyon ve E, X kümesininin yukarı kompakt bir alt kümesi olsun. Terimleri $f(E)$ kümesindenden alınan herhangi bir (y_n) dizisini alalım. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $y_n = f(x_n)$ olacak şekilde E kümesinin x_n elemanları vardır. E kümesi istatistiksel yukarı kompakt olduğundan (x_n) dizisinin bir $(t_k) = (x_{n_k})$ istatistiksel ileri kuazi-Cauchy alt dizisi vardır. f istatistiksel yukarı sürekli olduğundan $(f(t_k)) = (f(x_{n_k}))$ istatistiksel ileri kuazi-Cauchy dizisi olur. Böylece $(f(t_k))$, $(f(x_n))$ dizisinin bir istatistiksel ileri kuazi-Cauchy alt dizisi olarak bulunmuş olur. □

Sonuç 3.4.18. *f, bir X asimetrik metrik uzayından bir Y asimetrik metrik uzayına tanımlı istatistiksel yukarı sürekli bir fonksiyon olsun.Bu durumda, X kümesinin ileri bütünüyle sınırlı her alt kümesinin f fonksiyonu altındaki görüntüsü de ileri bütünüyle sınırlıdır.*

Teorem 3.4.19. *(f_n), X asimetrik metrik uzayından Y asimetrik metrik uzayına tanımlı istatistiksel yukarı sürekli fonksiyonlar dizisi olsun ve Y üzerinde ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirsin. (f_n), f fonksiyonuna düzgün ileri yakınsıyorsa, f fonksiyonu istatistiksel yukarı süreklidir.*

Kanıt. (x_k) terimleri X kümesinde olan bir istatistiksel ileri kuazi-Cauchy dizisi ve $\varepsilon > 0$ olsun. (f_n) dizisinin düzgün ileri yakınsaklığından ve Y üzerinde ileri yakınsaklığın geri yakınsaklığı gerektirmesinden, $n \geq N$ olduğunda her $x \in X$ için

$d(f(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ ve $d(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$

olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. f_N istatistiksel yukarı sürekli olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mid \left\{k \leq n : \ d(f_N(x_k), f_N(x_{k+1})) \geq \frac{\varepsilon}{3}\right\} \mid = 0$$

gerçeklenir. Diğer taraftan,

$\{k \leq n : \ d(f(x_k), f(x_{k+1})) \geq \varepsilon\} \subseteq \left\{k \leq n : \ d(f(x_k), f_N(x_k)) \geq \frac{\varepsilon}{3}\right\}$

$\cup \left\{k \leq n : \ d(f_N(x_k), f_N(x_{k+1})) \geq \frac{\varepsilon}{3}\right\} \cup \left\{k \leq n : \ d(f_N(x_{k+1}), f(x_{k+1})) \geq \frac{\varepsilon}{3}\right\}$

gerçeklenir. Buradan

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mid \{k \leq n : \ d(f(x_k), f(x_{k+1})) \geq \varepsilon\} \mid$

$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : \ d(f(x_k), f_N(x_k)) \geq \frac{\varepsilon}{3}\}|$

$+ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : \ d(f_N(x_k), f_N(x_{k+1})) \geq \frac{\varepsilon}{3}\}|$

$+ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mid \left\{k \leq n : \ d(f_N(x_{k+1}), f(x_{k+1})) \geq \frac{\varepsilon}{3}\right\} \mid = 0 + 0 + 0 = 0$

elde edilir. Yani f fonksiyonu istatistiksel yukarı süreklidir. □

Teorem 3.4.20. *Y üzerinde ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektiriyorsa, X uzayından Y uzayına tanımlı istatistiksel yukarı sürekli fonksiyonların kümesi, X uzayından Y uzayına tanımlı fonksiyonlar kümesinin ileri kapalı bir alt kümesidir.*

Kanıt. X uzayından Y uzayına istatistiksel yukarı sürekli fonksiyonların kümesini A ile gösterelim. $f \in \overline{A}^{+}$ olsun. Bu durumda ileri limiti f olacak şekilde, terimleri A kümesinde olan bir (f_n) dizisi vardır. $f \in A$ olduğunu göstermek için terimleri X kümesinde olan (x_k) istatistiksel ileri kuazi-Cauchy dizisini alalım. $\varepsilon > 0$ olsun. (f_n) dizisi f fonksiyonuna ileri yakınsadığından her $x \in X$ ve $n \geq N$ için $d(f(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ vardır. f_N istatistiksel yukarı sürekli olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mid \left\{k \leq n : \ d(f_N(x_k), f_N(x_{k+1})) \geq \frac{\varepsilon}{3}\right\} \mid = 0$$

gerçeklenir. Diğer taraftan,

$\{k \leq n : \ d(f(x_k), f(x_{k+1})) \geq \varepsilon\} \subseteq \left\{k \leq n : \ d(f(x_k), f_N(x_k)) \geq \frac{\varepsilon}{3}\right\}$

$\cup \left\{ k \leq n : \; d(f_N(x_k), f_N(x_{k+1})) \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\} \cup \left\{ k \leq n : \; d(f_N(x_{k+1}), f(x_{k+1})) \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\}$

gerçeklenir. Buradan

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mid \{k \leq n : \; d(f(x_k), f(x_{k+1})) \geq \varepsilon\} \mid$

$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mid \left\{ k \leq n : \; d(f(x_k), f_N(x_k)) \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\} \mid$

$+ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : \; d(f_N(x_k), f_N(x_{k+1})) \geq \frac{\varepsilon}{3}\}|$

$+ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mid \left\{ k \leq n : \; d(f_N(x_{k+1}), f(x_{k+1})) \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\} \mid = 0 + 0 + 0 = 0$

elde edilir. Yani f fonksiyonu istatistiksel yukarı süreklidir.

$\square$

3.5 Asimetrik Metrik Uzaylarda Bir Sabit Nokta Teoremi

Bu kısımda asimetrik metrik uzaylarda bazı sabit nokta teoremleri verilmiştir.

Tanım 3.5.1. (X, d) *asimetrik metrik uzay ve* $T : X \to X$ *ileri (geri) sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her* $x, y \in X$ *için*

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) \quad (d(Tx, Ty) \leq \alpha d(y, x))$$

olacak şekilde bir $0 < \alpha < 1$ *sayısı varsa* T *fonksiyonuna bir ileri (geri) büzülme dönüşümü denir.*

Aşağıda, Banach büzülme dönüşümü prensibinin [19] de ispatlanmış olan iki farklı asimetrik versiyonu ifade edilmiştir.

Teorem 3.5.2. (X, d) *ileri tam asimetrik metrik uzay ve* $T : X \to X$ *ileri büzülme dönüşümü olsun.* X *üzerinde ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirsin. Bu durumda,* T *tek bir sabit noktaya sahiptir.*

Teorem 3.5.3. (X, d) *ileri dizisel kompakt asimetrik uzay ve* $T : X \to X$ *geri büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda,* T *tek bir sabit noktaya sahiptir.*

Şimdi asimetrik metrik uzaylarda yeni bir sabit nokta teoremi verelim.

Teorem 3.5.4. *(X,d) ileri tam asimetrik metrik uzay ve $T : X \to X$ ileri sürekli bir fonksiyon olsun. X üzerinde ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirsin. Eğer her $x, y \in X$ için*

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha(d(x,Tx) + d(y,Ty))$$

olacak şekilde bir $0 < \alpha < 1/2$ sayısı varsa, T tek bir sabit noktaya sahiptir.

Kanıt. $x_0 \in X$ olmak üzere,

$$x_1 = T(x_0), x_2 = T(x_1) = T^2(x_0), ..., x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x_0)$$

olsun.

$$\begin{aligned} d(x_1,x_2) = d(T(x_0),T(x_1)) &\leq \alpha[d(x_0,T(x_0)) + d(x_1,T(x_1))] \\ &= \alpha[d(x_0,x_1) + d(x_1,x_2)] \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$d(x_1,x_2) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_0,x_1)$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$d(x_2,x_3) \leq (\frac{\alpha}{1-\alpha})^2 d(x_0,x_1)$$

olur. Böyle devam ederek,

$$d(x_n,x_{n+1}) \leq (\frac{\alpha}{1-\alpha})^n d(x_0,x_1)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} d(x_n,x_{n+p}) &\leq d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_{n+p}) \\ &\leq (\frac{\alpha}{1-\alpha})^n d(x_0,x_1) + (\frac{\alpha}{1-\alpha})^{n+1} d(x_0,x_1) + ... \\ &\quad ... + (\frac{\alpha}{1-\alpha})^{n+p-1} d(x_0,x_1) \\ &\leq (\frac{\alpha}{1-\alpha})^n d(x_0,x_1)[1 + (\frac{\alpha}{1-\alpha}) + ... + (\frac{\alpha}{1-\alpha})^{p-1}] \\ &= (\frac{\alpha}{1-\alpha})^n d(x_0,x_1) \frac{1-(\frac{\alpha}{1-\alpha})^p}{1-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\ &< (\frac{\alpha}{1-\alpha})^n d(x_0,x_1) \frac{1}{1-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \to 0 \ (n \to \infty) \end{aligned}$$

ve böylece

$$d(x_n, x_{n+p}) \to 0 \ (n \to \infty)$$

olur. Bu durumda, (x_n) dizisi ileri Cauchy dizisidir. X ileri tam olduğundan (x_n) dizisi ileri yakınsaktır. Bu dizinin yakınsadığı nokta x olsun. T ileri sürekli olduğundan $T(x_n) \xrightarrow{f} Tx$ olur. İleri yakınsaklığın geri yakınsaklığı gerektirmesi nedeniyle limit tek olacağından $x_{n+1} \xrightarrow{f} x$ olur, ve böylece $T(x) = x$ bulunur. Şu halde x noktası T dönüşümünün sabit noktası olur.

Şimdi sabit noktanın tek olduğunu gösterelim. Varsayalım ki x ve y noktaları T dönüşümünün farklı iki sabit noktası olsun.

$$\begin{aligned} d(x,y) &= d(T(x), T(y)) \\ &\leq \alpha[d(x,Tx) + d(y,Ty)] \\ &= \alpha[d(x,x) + d(y,y)] = 0 \end{aligned}$$

olduğundan $x = y$ bulunur. Buradan T dönüşümünün tek bir sabit noktaya sahip olduğu görülür. $\square$

Bölüm 4

ASİMETRİK METRİK UZAYLARDA KOMPAKT OLMAMA ÖLÇÜLERİ

Bu bölümde asimetrik metrik uzaylarda Kuratowski ve Hausdorff ileri (geri) kompakt olmama ölçüleri tanımlanarak temel özellikleri incelenecektir.

4.1 İleri ve Geri Kompakt Olmama Ölçüleri

Tanım 4.1.1. (X,d) *bir ileri tam asimetrik metrik uzay ve* $\mathbf{B}$*,* X *kümesinin ileri sınırlı alt kümelerinin bir ailesi olsun.*

$$\phi^+ : \mathbf{B} \to [0,+\infty]$$

fonksiyonuna aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X *üzerinde bir ileri kompakt olmama ölçüsü denir*

(i) (Regülerlik) $\phi^+(B) = 0 \Leftrightarrow B$ *ileri göreceli kompakt kümedir.*

(ii) (Kapanış altında değişmezlik) $\phi^+(B) = \phi^+(\overline{B^+}), \quad \forall B \in \mathbf{B}$

(iii) (Yarı toplamsallık) $\phi^+(B_1 \cup B_2) = \max\{\phi^+(B_1), \phi^+(B_2)\}, \quad \forall B_1, B_2 \in \mathbf{B}$

Tanım 4.1.2. (X,d) *bir geri tam asimetrik metrik uzay ve* $\mathbf{B}$*,* X *kümesinin geri sınırlı alt kümelerinin bir ailesi olsun.*

$$\phi^- : \mathbf{B} \to [0, +\infty]$$

fonksiyonuna aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X üzerinde bir geri kompakt olmama ölçüsü denir.

(i) (Regülerlik) $\phi^-(B) = 0 \Leftrightarrow B$ geri göreceli kompakt kümedir.

(ii) (Kapanış altında değişmezlik) $\phi^-(B) = \phi^-(\overline{B^-}), \quad \forall B \in \mathbf{B}$

(iii) (Yarı toplamsallık) $\phi^-(B_1 \cup B_2) = \max\{\phi^-(B_1), \phi^-(B_2)\}, \quad \forall B_1, B_2 \in \mathbf{B}$

Örnek 4.1.3. *Bir X asimetrik metrik uzayında*

$$\phi^+(B) = \begin{cases} 0 & , B \text{ ileri göreceli kompakt ise,} \\ 1 & , d.\ d. \end{cases}$$

olarak tanımlanan fonksiyon bir ileri kompakt olmama ölçüsüdür.

4.2 Kuratowski İleri ve Geri Kompakt Olmama Ölçüleri

Bu kısımda asimetrik metrik uzaylarda Kuratowski ileri ve geri kompakt olmama ölçüleri tanımlanarak temel özellikleri üzerinde durulacaktır.

Not 4.2.1. *Not 3.1.3 te belirtildiği gibi, X bir asimetrik metrik uzay olmak üzere, $d^s(x,y) = \max\{d(x,y), d(y,x)\}$ ile tanımlanan d^s bir metrik olduğundan bir $A \subseteq X$ kümesinin çapı, metrik uzaylarda olduğu gibi*

$$Çap(A) = sup\{d(x,y) \mid x, y \in A\}$$

biçimindedir.

Metrik uzaylarda Çap(A) = Çap$(\overline{A})$ eşitliğinin sağlanmasına rağmen bu özellik, asimetrik metrik uzaylarda ileri yakınsaklığın geri yakınsaklığı gerektirmesi durumunda gerçeklenir.

Önerme 4.2.2. *X bir asimetrik metrik uzay olmak üzere $A \subseteq X$ olsun. X üzerinde ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektiriyorsa Çap(A) = Çap$(\overline{A^+})$ olur.*

Kanıt. $A \subseteq \bar{A}^+$ olduğundan $\text{Çap}(A) \leq \text{Çap}(\overline{A^+})$ olduğu açıktır. Bu durumda, $\text{Çap}(\overline{A^+}) \leq \text{Çap}(A)$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Bunun için A kümesinin ileri kapanışından x ve y noktalarını alalım. A kümesi içinde x noktasına ileri yakınsayan bir (x_n) dizisi ve y noktasına ileri yakınsayan bir (y_n) dizisi vardır. X üzerinde ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirdiğinden (y_n) dizisi y noktasına geri yakınsar. $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda $\forall n \geq N_1$ için $d(x, x_n) < \varepsilon$ ve $\forall n \geq N_2$ için $d(y_n, y) < \varepsilon$ olacak şekilde $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ vardır. $N = \max\{N_1, N_2\}$ seçilirse $\forall n \geq N$ için

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y) \leq 2\varepsilon + d(x_n, y_n) \leq 2\varepsilon + \text{Çap}(A)$$

ve buradan

$$\text{Çap}(\overline{A^+}) \leq 2\varepsilon + \text{Çap}(A)$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\text{Çap}(\overline{A^+}) \leq \text{Çap}(A)$ bulunmuş olur. O halde $\text{Çap}(A) = \text{Çap}(\overline{A^+})$ elde edilmiş olur. □

$\text{Çap}(A)$, d^s metriğine göre A'nın çapıdır. Genel olarak, bir (X, d) asimetrik metrik uzayında bir $A \subset X$ alt kümesi d^s metriğine göre sınırlı ise A ileri (ve geri) sınırlıdır çünkü $\forall x \in X$ ve $r > 0$ için $B_{d^s}(x, \varepsilon) \subset B^+(x, \varepsilon)$ ve $B_{d^s}(x, \varepsilon) \subseteq B^-(x, \varepsilon)$ sağlanır. Ancak bunun tersi doğru değildir.

Örnek 4.2.3. *$X = \mathbb{R}$ üzerinde $d(x, y) = \max\{y - x, 0\}$ asimetrik metriğini gözönüne alalım. $A = (-\infty, 0) \subset X$ alt kümesi ileri sınırlıdır çünkü $A \subset B^+(0, 1) = (-\infty, 1)$ sağlanır. Buna karşın, Çap$(A) = \infty$ olur. Aksi halde, $\forall x, y \in A$ için $d(x, y) < K$ olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı var olsun. $x = -(K + 2) \in A$ ve $y = -1 \in A$ alınırsa, $d(x, y) = K + 1 < K$ çelişkisi elde edilir. Ayrıca, bu asimetrik metrikte ileri (geri) yakınsaklık geri (ileri) yakınsaklığın gerektirmez. Gerçekten, $x_n = \frac{1}{n}$ dizisi için, $x_n \xrightarrow{f} 1$ ancak $x_n \overset{b}{\nrightarrow} 1$ olur.*

Aşağıdaki teorem asimetrik metrik uzaylarda ileri ve geri sınırlı alt kümelerin asimetrik koşulları altında çaplarının sonlu olacağını ifade etmektedir.

Teorem 4.2.4. *(X, d) bir asimetrik metrik uzay olsun.*

(a) $A \subseteq X$ ileri sınırlı ve X üzerinde ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektiriyorsa, Çap$(A) < \infty$ olur.

(b) $A \subseteq X$ geri sınırlı ve X üzerinde geri yakınsaklık ileri yakınsaklığı gerektiriyorsa, Çap$(A) < \infty$ olur.

Kanıt. (a) $A \subseteq X$ ileri sınırlı ise $\forall x \in X,\ \exists \delta > 0 \ni A \subset B^+(x, \delta)$ olup, X üzerinde ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirdiğinden, Teorem 3.1.12 gereğince,

$$\tau^- \subset \tau^+ = \tau_{d^s}$$

olur. Şu halde,

$$A \subset B^+(x, \delta) = B_{d^s}(x, \delta)$$

olur. Buradan,

$$a \in A \Rightarrow a \in B^+(x, \delta) = B_{d^s}(x, \delta)$$

bulunur. Bu durumda, $d(a, x) < d(x, a) < \delta$ elde edilir.

Şimdi, $y, z \in A$ alalım. Bu durumda,

$$d(y, x) < d(x, y) < \delta \text{ ve } d(z, x) < d(x, z) < \delta$$

olur. Buradan,

$$d(y, z) < d(y, x) + d(x, z) < 2\delta$$

ve

$$d(z, y) < d(z, x) + d(x, y) < 2\delta$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\text{Çap}(A) = \sup_{y,z \in A} d(y, z) < 2\delta$$

bulunur.

(b) (a) şıkkına benzer şekilde gösterilir. □

Sonuç 4.2.5. *(X, d) bir asimetrik metrik uzay olsun. X ileri (geri) kompakt ve X üzerinde ileri (geri) yakınsaklık geri (ileri) yakınsaklığı gerektiriyorsa Çap$(X) < \infty$ olur.*

Kanıt. Önerme 3.1.33 ve Teorem 4.2.4 kullanılarak istenen elde edilir. □

Metrik uzaylardaki ileri ve geri kompakt olmama ölçülerinin tanımlarında kapanış altında değişmezlik özelliği gerçeklendiği için, aşağıda verilen Kuratowski ileri (geri) kompakt olmama ölçüsünün asimetrik metrik uzay üzerinde ileri (geri) yakınsaklığın geri (ileri) yakınsaklığı gerektirmesi koşulu altında tanımlanması uygun olacaktır çünkü kapanış altında değişmezliğin gerçeklenmesi için yukarıdaki Önerme 4.2.2'de ifade edilen eşitliğe gerek duyulmaktadır. Ayrıca Teorem 4.2.4 sayesinde de, ileri (geri) sınırlı alt kümelerin çaplarının sonluluğu garanti altına alınmaktadır.

Tanım 4.2.6. *X bir asimetrik metrik uzay ve $Q \subseteq X$ ileri sınırlı bir alt küme olsun. X üzerinde ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirsin. Q kümesinin Kuratowski ileri kompakt olmama ölçüsü*

$$\alpha^+(Q) = \inf\left\{\varepsilon > 0 : \exists S_i(\textit{ileri sınırlı}) \subset X \ni Q \subset \textstyle\bigcup_{i=1}^n S_i,\ \textit{Çap}(S_i) < \varepsilon\ (1 \leq i \leq n)\right\}$$

olarak tanımlanır.

Yukarıdaki tanıma göre, X kümesinin her ileri sınırlı Q alt kümesi için

$$\alpha^+(Q) \leq \text{Çap}(Q) < \infty$$

sağlanır.

Tanım 4.2.7. *X bir asimetrik metrik uzay ve $Q \subseteq X$ geri sınırlı bir alt küme olsun. X üzerinde geri yakınsaklık ileri yakınsaklığı gerektirsin. Q kümesinin Kuratowski geri kompakt olmama ölçüsü*

$$\alpha^-(Q) = \inf\left\{\varepsilon > 0 : \exists S_i(\textit{geri sınırlı}) \subset X \ni Q \subset \textstyle\bigcup_{i=1}^n S_i,\ \textit{Çap}(S_i) < \varepsilon\ (1 \leq i \leq n)\right\}$$

olarak tanımlanır.

Yukarıdaki tanıma göre, X kümesinin her geri sınırlı Q alt kümesi için

$$\alpha^-(Q) \leq \text{Çap}(Q) < \infty$$

sağlanır.

Teorem 4.2.8. *Q, Q_1 ve Q_2; (X, d) ileri tam asimetrik metrik uzayının ileri sınırlı alt kümeleri olsun ve X üzerinde ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirsin. Bu durumda aşağıdaki özellikler gerçeklenir.*

(a) (Regülerlik) $\alpha^+(Q) = 0 \Leftrightarrow Q$ ileri göreceli kompakt kümedir,

(b) (Kapanış altında değişmezlik) $\alpha^+(Q) = \alpha^+(\overline{Q^+})$,

(c) (Yarı toplamsallık) $\alpha^+(Q_1 \cup Q_2) = \max\{\alpha^+(Q_1), \alpha^+(Q_2)\}$,

(d) (Monotonluk) $Q_1 \subset Q_2 \Rightarrow \alpha^+(Q_1) \leq \alpha^+(Q_2)$,

(e) $\alpha^+(Q_1 \cap Q_2) \leq \min\{\alpha^+(Q_1), \alpha^+(Q_2)\}$.

Kanıt. (a) $\Rightarrow$: $\alpha^+(Q) = 0 \Rightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists S_1, ..., S_n \subset X\ \ni\ Q \subset \bigcup_{i=1}^n S_i,\ \text{Çap}(S_i) < \varepsilon$ olur. Bu durumda Q ileri bütünüyle sınırlıdır. Q ileri tam olduğundan Q ileri göreceli kompakt bulunur.

$\Leftarrow$: Q ileri göreceli kompakt ise, X ileri tam olduğundan, Q ileri bütünüyle sınırlıdır. Bu durumda, herhangi bir $\varepsilon > 0$ için Q, çapı ε dan küçük ya da eşit olan sonlu sayıda küme tarafından örtülebilir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\alpha^+(Q) = 0$ bulunur. (b) $\alpha^+(Q) \leq \alpha^+(\overline{Q^+})$ olduğu açıktır. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için S_i, X kümesinin $\text{Çap}(S_i) < \varepsilon$ $(i = 1, 2, ..., n)$ koşulunu gerçekleyen ileri sınırlı alt kümesi ve

$$Q \subset \bigcup_{i=1}^n S_i$$

olsun. Bu durumda,

$$\overline{Q^+} \subset \overline{\bigcup_{i=1}^n S_i}^{\,+} = \bigcup_{i=1}^n \overline{S_i}^{+}$$

olur. X üzerinde ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirdiğinden,

$$\text{Çap}(S_i) = \text{Çap}(\overline{S_i}^{+})$$

sağlanır. Buradan,

$$\alpha^+(\overline{Q^+}) \leq \alpha^+(Q)$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\alpha^+(Q) = \alpha^+(\overline{Q^+})$$

bulunur.

(c) $\alpha^+(Q_1) \leq \alpha^+(Q_1 \cup Q_2)$ ve $\alpha^+(Q_2) \leq \alpha^+(Q_1 \cup Q_2)$ olduğundan,

$$\max\left\{\alpha^+(Q_1), \alpha^+(Q_2)\right\} \leq \alpha^+(Q_1 \cup Q_2)$$

olur. Şimdi $\max\{\alpha^+(Q_1), \alpha^+(Q_2)\} = s$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Q_1 ve Q_2, çapı $s + \varepsilon$ sayısından küçük olan sonlu sayıda alt küme tarafından örtülür. Bu örtülerin birleşimi de $Q_1 \cup Q_2$ kümesinin bir sonlu örtüsü olur. O halde $\alpha^+(Q_1 \cup Q_2) \leq s + \varepsilon$ bulunur. ε keyfi olduğundan $\alpha^+(Q_1 \cup Q_2) \leq s$ elde edilir. Buradan,

$$\alpha^+(Q_1 \cup Q_2) = \max\left\{\alpha^+(Q_1), \alpha^+(Q_2)\right\}$$

bulunur.

(d) $\alpha^+(Q_2) =: t \Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists S_1, ..., S_n \subset X,\ \text{Çap}(S_k) \leq t + \varepsilon\ (1 \leq k \leq n)$
$\ni\ Q_2 \subset \bigcup_{k=1}^{n} S_k$
$Q_1 \subset Q_2$ olduğundan, $Q_1 \subset \bigcup_{k=1}^{n} (S_k \cap Q_1)$, $\text{Çap}(S_k \cap Q_1) \leq t + \varepsilon$ bulunur. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\alpha^+(Q_1) \leq t$, yani $\alpha^+(Q_1) \leq \alpha^+(Q_2)$ elde edilir. (e) $Q_1 \cap Q_2 \subseteq Q_1$ ve $Q_1 \cap Q_2 \subseteq Q_2$ olduğundan, $\alpha^+(Q_1 \cap Q_2) \leq \alpha^+(Q_1)$ ve $\alpha^+(Q_1 \cap Q_2) \leq \alpha^+(Q_2)$ olur. Buradan,

$$\alpha^+(Q_1 \cap Q_2) \leq \min\left\{\alpha^+(Q_1), \alpha^+(Q_2)\right\}$$

elde edilir. □

Not 4.2.9. *Teorem 4.2.8'de elde edilen sonuçlara benzer sonuçlar, geri yakınsaklığın ileri yakınsaklığı gerektirmesi durumunda α^- için de geçerlidir.*

4.2.1 Genelleştirilmiş Asimetrik Arzela-Ascoli Teoremi

Bu kısımda, Teorem 4.2.10'da Banach uzayları için verilen Genelleştirilmiş Arzela-Ascoli Teoreminin [4, Theorem 2.11] asimetrik metrik uzay versiyonu verilerek kanıtlanacaktır. (Bkz. Teorem 4.2.11).

Teorem 4.2.10. *(Genelleştirilmiş Arzela-Ascoli Teoremi) X bir Banach uzayı, $D \subset \mathbb{R}^n$ alt kümesi kompakt ve $\mathcal{B} \subset C(D, X)$ alt kümesi sınırlı ve eşsürekli olsun. Bu durumda*

$$\alpha(\mathcal{B}) = \sup\{\alpha(\{f(x) :\ f \in \mathcal{B}\}) :\ x \in D\}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 4.2.11. *(Asimetrik Metrik Uzaylarda Genelleştirilmiş Arzela-Ascoli Teoremi) (X, d_X) ve (Y, d_Y) ileri kompakt asimetrik metrik uzaylar olmak üzere, (Y, d_Y) üzerinde ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirsin. $C_{ff}(X, Y)$ kümesi, d_Y asimetrik metriğine karşılık gelen $\bar{\rho}$ düzgün asimetrik metriği ile donatılmış olsun. Bu durumda, eğer $\mathcal{F} \subseteq C_{ff}(X, Y)$ alt kümesi ileri eşsürekli ve d_Y altında ileri noktasal sınırlı ise*

$$\alpha^+(\mathcal{F}) = \sup\{\alpha^+(\mathcal{F}(x)) :\ x \in X\} \qquad (*)$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt. $(*)$ eşitliğini kanıtlamak için

$$\alpha^+(\mathcal{F}) \leq \alpha^+(\mathcal{F}(X)) \leq \sup\{\alpha^+(\mathcal{F}(x)) : x \in X\} \leq \alpha^+(\mathcal{F})$$

eşitsizliklerinin sağlandığını göstermek yeterli olacaktır.

(i) $\alpha^+(\mathcal{F}) \leq \alpha^+(\mathcal{F}(X))$ eşitsizliği sağlanır. Gerçekten, Lemma 3.1.44'ten $\mathcal{F}$ geri eş-sürekli olduğundan, herhangi bir $a \in X$ seçildiğinde her $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta_a > 0$ sayısı vardır ki $d_X(a, x) < \delta_a$ iken her $f \in \mathcal{F}$ için $d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon$ ve $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$ sağlanır. X ileri kompakt olduğundan öyle sonlu sayıda $a_1, ..., a_k$ elemanları vardır ki $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B^+(a_i, \delta_{a_i})$ olur. Bu durumda, $x \in B^+(a_i, \delta_{a_i})$ ise her $f \in \mathcal{F}$ için $d_Y(f(x), f(a_i)) < \varepsilon$ olur.

Diğer taraftan, Kuratowski ileri kompakt olmama ölçüsü tanımından, Sonuç 4.2.5 gözönüne alınarak, aynı $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle $V_1, ..., V_m \subset Y$ alt kümeleri vardır ki $\mathcal{F}(X) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} V_j$ ve her $1 \leq j \leq m$ için $\text{Çap}(V_j) < \alpha^+(\mathcal{F}(X)) + \varepsilon$ olur. Burada $\text{Çap}(V_j) = \max\limits_{x,y \in V_j} \{d_Y(x, y)\} < \infty$ biçimindedir.

$J = \{\beta \mid \beta : \{1, ..., k\} \to \{1, ..., m\}\}$ kümesini gözönüne alalım. $\beta \in J$ için $L_\beta = \{f \in \mathcal{F} : f(a_i) \in V_{\beta(i)}\}$ kümesi tanımlansın. Bu durumda,

$$\mathcal{F} \subseteq \bigcup\nolimits_{\beta \in J} L_\beta$$

sağlanır. Gerçekten, $f \in \mathcal{F}$ olsun. $\beta \in J$ ise, her $1 \leq i \leq k$ için $1 \leq \beta(i) \leq m$ olur. $\mathcal{F}(X) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} V_j$ ve $a_i \in X$ olduğundan $f(a_i) \in V_{\beta(i)}$ olur. Bu durumda, $f \in \bigcup_{\beta \in J} L_\beta$ bulunur.
$f, g \in L_\beta$ ise, öyle bir $1 \leq i \leq k$ sayısı vardır ki her $x \in X$ için $x \in B_X^+(a_i, \delta_{a_i})$ ise

$$d_Y(f(x), f(a_i)) < \varepsilon \text{ ve } d_Y(g(a_i), g(x)) < \varepsilon$$

olur. Ayrıca,

$$d_Y(f(a_i), g(a_i)) < \alpha^+(\mathcal{F}(X)) + \varepsilon$$

olduğundan,

$$d_Y(f(x), g(x)) \leq d_Y(f(x), f(a_i)) + d_Y(f(a_i), g(a_i)) + d_Y(g(a_i), g(x))$$

$$< \alpha^+(\mathcal{F}(X)) + 3\varepsilon$$

olur ve buradan da

$$\alpha^+(\mathcal{F}) \leq \alpha^+(\mathcal{F}(X)) + 3\varepsilon$$

bulunur. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan, istenen elde edilir.

(ii) $\alpha^+(\mathcal{F}(X)) \leq \sup\{\alpha^+(\mathcal{F}(x)) : x \in X\}$ eşitsizliği sağlanır. Gerçekten, $\mathcal{F}$ geri eşsürekli ve X ileri kompakt olduğundan, öyle $a_1, ..., a_k \in X$ elemanları ve $\delta_{a_1}, ..., \delta_{a_k} > 0$ sayıları vardır ki $X \subseteq \bigcup_{i=1}^k B^+(a_i, \delta_{a_i})$ olur. Bu durumda, $x \in B^+(a_i, \delta_{a_i})$ ise her $\varepsilon > 0$ ve her $f \in \mathcal{F}$ için $d_Y(f(x), f(a_i)) < \varepsilon$ olur. Ayrıca, her $1 \leq i \leq k$ için $\mathcal{F}(a_i)$ ailesinin $\text{Çap}(\mathcal{S}_j^{(i)}) < \varepsilon$ olacak şekilde sonlu bir $\{\mathcal{S}_j^{(i)}\}_{j=1}^m$ örtülüşü vardır. $\mathcal{F}_j^{(i)}(a_i) := \mathcal{S}_j^{(i)} \cap \mathcal{F}(a_i)$ diyelim. Bu durumda, Kuratowski ileri kompakt olmama ölçüsü tanımından, her $1 \leq i \leq k$ için $\{\mathcal{F}_j^{(i)}(a_i)\}_{j=1}^m$ ailesi, $\mathcal{F}(a_i)$ kümesinin

$$\max_{1 \leq j \leq m} \{\text{Çap}(\mathcal{F}_j^{(i)}(a_i))\} < \alpha^+(\mathcal{F}(a_i)) + \varepsilon$$

koşulunu sağlayan sonlu bir örtülüşü olur.

$B_{i,j} := \mathcal{F}_j^{(i)}(B^+(a_i, \delta_{a_i}))$ diyelim. Bu durumda, $\{B_{i,j}\}_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq m}}$ ailesi $\mathcal{F}(X)$ kümesinin bir sonlu örtülüşüdür. Dahası,

$$\text{Çap}(B_{i,j}) = \sup\{d_Y(f(x), g(y)) : f, g \in \mathcal{F}_j^{(i)},\ x, y \in B^+(a_i, \delta_{a_i})\} < \infty$$

olur.

$$d_Y(f(x), g(y)) \leq d_Y(f(x), f(a_i)) + d_Y(f(a_i), g(a_i)) + d_Y(g(a_i), g(y))$$

$$< d_Y(f(a_i), g(a_i)) + 2\varepsilon$$

olduğundan

$$\text{Çap}(B_{i,j}) \leq \sup\{d_Y(f(a_i), g(a_i)) : f, g \in \mathcal{F}_j^{(i)}\} + 2\varepsilon = \text{Çap}(\mathcal{F}_j^{(i)}(a_i)) + 2\varepsilon$$

gerçeklenir. Buradan,

$$\max_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq m}} \{\text{Çap}(B_{i,j})\} \leq \max_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq m}} \{\text{Çap}(\mathcal{F}_j^{(i)}(a_i))\} + 2\varepsilon$$

olur, ve böylece

$$\alpha^+(\mathcal{F}(X)) < \max_{1 \leq i \leq k}\{\alpha^+(\mathcal{F}(a_i))\} + 3\varepsilon \leq \sup\{\alpha^+(\mathcal{F}(x)) : x \in X\} + 3\varepsilon$$

bulunur. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan, istenen elde edilir.

(iii) $\sup\{\alpha^+(\mathcal{F}(x) : \ x \in X\} \leq \alpha^+(\mathcal{F})$ eşitsizliği sağlanır. Gerçekten, $\alpha^+(\mathcal{F}) < \mu$ olsun. Bu durumda, öyle sonlu sayıda $\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_p \subset C_{ff}(X, Y)$ alt kümeleri vardır ki her $1 \leq i \leq p$ için Çap$(\mathcal{F}_i) \leq \mu$ ve $\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{F}_i$ olur. Böylece, her $x \in X$ için

$$\mathcal{F}(x) \subset \bigcup_{i=1}^{p} \{f(x) : \ f \in \mathcal{F}_i\}$$

sağlanır. Şu halde,

$$\begin{aligned}
\text{Çap}(\{f(x) : \ f \in \mathcal{F}_i\}) &= \sup\{d_Y(f(x), g(x)) : \ f, g \in \mathcal{F}_i\} \\
&\leq \sup\{\sup\{d_Y(f(z), g(z)) : \ z \in X\} : \ f, g \in \mathcal{F}_i\} \\
&= \sup\{\bar{\rho}(f, g) : \ f, g \in \mathcal{F}_i\} \\
&= \text{Çap}(\mathcal{F}_i) \\
&\leq \mu
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan, $\alpha^+(\mathcal{F}(x)) \leq \mu$ olur ve dolayısıyla istenen elde edilir. □

4.3 Hausdorff İleri ve Geri Kompakt Olmama Ölçüleri

Bu kısımda asimetrik metrik uzaylarda Hausdorff ileri ve geri kompakt olmama ölçüleri tanımlanarak temel özellikleri üzerinde durulacaktır.

Tanım 4.3.1. *X bir asimetrik metrik uzay ve $Q \subseteq X$ ileri sınırlı bir alt küme olsun. X üzerinde ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirsin. Q kümesinin Hausdorff ileri kompakt olmama ölçüsü*

$$\chi^+(Q) = \inf\{\varepsilon > 0 : \exists\, x_1, x_2, ..., x_n \in X \ni Q \subset \textstyle\bigcup_{i=1}^{n} B^+(x_i, r_i),\ r_i < \varepsilon\ (1 \leq i \leq n)\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 4.3.2. *X bir asimetrik metrik uzay ve $Q \subseteq X$ geri sınırlı bir alt küme olsun. X üzerinde geri yakınsaklık ileri yakınsaklığı gerektirsin. Q kümesinin Hausdorff geri kompakt olmama ölçüsü*

$$\chi^-(Q) = \inf\{\varepsilon > 0 : \exists\, x_1, x_2, ..., x_n \in X \ni Q \subset \bigcup_{i=1}^n B^-(x_i, r_i),\ r_i < \varepsilon\ (1 \leq i \leq n)\}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 4.3.3. *Q, Q_1 ve Q_2; X ileri tam asimetrik metrik uzayının ileri sınırlı alt kümeleri olsun ve X üzerinde ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirsin. Bu durumda aşağıdaki özellikler gerçeklenir.*

(a) (Regülerlik) $\chi^+(Q) = 0 \Leftrightarrow Q$ ileri bütünüyle sınırlıdır,

(b) (Kapanış altında değişmezlik) $\chi^+(Q) = \chi^+(\overline{Q^+})$,

(c) (Yarı toplamsallık) $\chi^+(Q_1 \cup Q_2) = \max\{\chi^+(Q_1), \chi^+(Q_2)\}$,

(d) (Monotonluk) $Q_1 \subset Q_2 \Rightarrow \chi^+(Q_1) \leq \chi^+(Q_2)$,

(e) $\chi^+(Q_1 \cap Q_2) \leq \min\{\chi^+(Q_1), \chi^+(Q_2)\}$.

Kanıt. (a) ve (d) tanımdan açıktır.

(b) Monotonluktan $\chi^+(Q) \leq \chi^+(\overline{Q^+})$ olduğu açıktır. Şimdi $\varepsilon > 0$ verilsin.

$Q \subset \bigcup_{k=0}^n B^+(x_k, \chi^+(Q) + \frac{\varepsilon}{2})$ olacak şekilde $n = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ve $k = 0, 1, ...n$ için $x_k \in X$ vardır. Buradan,

$$\overline{Q^+} \subset \bigcup_{k=0}^n \overline{B^+(x_k, \chi^+(Q) + \frac{\varepsilon}{2})}^+ \subset \bigcup_{k=0}^n B^+(x_k, \chi^+(Q) + \varepsilon)$$

bulunur. ε keyfi olduğundan, $\chi^+(\overline{Q^+}) \leq \chi^+(Q)$ elde edilir.

(c) $\chi^+(Q_1) \leq \chi^+(Q_1 \cup Q_2)$ ve $\chi^+(Q_2) \leq \chi^+(Q_1 \cup Q_2)$ olduğundan,

$$\max\left\{\chi^+(Q_1), \chi^+(Q_2)\right\} \leq \chi^+(Q_1 \cup Q_2)$$

olur. Şimdi $\max\{\chi^+(Q_1), \chi^+(Q_2)\} = \gamma$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Q_1 ve Q_2, $\gamma + \varepsilon$ yarıçaplı ileri açık yuvarların sonlu birleşimleri tarafından örtülür. Bu örtülerin birleşimi de $Q_1 \cup Q_2$ kümesinin bir sonlu örtüsü olur. O halde $\chi^+(Q_1 \cup Q_2) \leq \gamma + \varepsilon$ bulunur. ε keyfi olduğundan $\chi^+(Q_1 \cup Q_2) \leq \gamma$ elde edilir. Yani

$$\chi^+(Q_1 \cup Q_2) = \max\left\{\chi^+(Q_1), \chi^+(Q_2)\right\}$$

bulunur.

(e) Monotonluk özelliğinin doğrudan sonucudur. □

Örnek 4.3.4. *$x \neq 0$ için $d(x,0) = x$ ve $d(0,x) = \frac{1}{x}$ olmak üzere, $d : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ asimetrik metriği*

$$d(x,y) := \begin{cases} d(x,0) + d(0,y), & y \neq x \text{ ise}, \\ 0, & y = x \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlansın.

$\mathbb{Z}^+$ bu asimetrik metrikte ileri kompakt olduğundan $\chi^+(\mathbb{Z}^+) = 0$ olur ancak geri kompakt olmadığından $\chi^-(\mathbb{Z}^+) \neq 0$ olur.

Teorem 4.3.5. *(X,d) bir ileri tam asimetrik metrik uzay olsun ve X üzerinde ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirsin. ϕ^+, χ^+ veya α^+ olmak üzere, eğer $\{B_n\}$, X kümesinin boştan farklı, ileri kapalı ve ileri sınırlı alt kümelerinin azalan bir dizisi ve* $\lim_{n\to\infty} \phi^+(B_n) = 0$ *ise $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ kümesi boştan farklı ve ileri kompakttır.*

Kanıt. (x_n), $n = 1, 2, 3, ...$ için $x_n \in B_n$ olacak şekilde bir dizi olsun.
$C_n = \{x_k : k \geq n\}$ olan, kümelerin azalan bir (C_n) dizisini gözönüne alalım. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $C_n \subset B_n$ dir. Buradan $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \phi^+(C_1) &= \phi^+(C_n \cup \{x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}\}) \\ &= \max\{\phi^+(C_n), \phi^+(\{x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}\})\} \\ &= \phi^+(C_n) \leq \phi^+(B_n) \end{aligned}$$

elde edilir.
$\lim_{n\to\infty} \phi^+(B_n) = 0$ olduğundan $\phi^+(C_1) = 0$ bulunur. Bu durumda $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi ileri relatif kompakttır. x, (x_n) dizisinin alt dizisinin ileri limiti olsun. Herbir B_n kümesi ileri kapalı olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $x \in B_n$, yani $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \varnothing$ olur. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\phi^+(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) \leq \phi^+(B_n)$ olduğundan $\phi^+(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) = 0$ olur. Yani $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ kümesi ileri kompakt bulunur. $\square$

Bölüm 5

SONUÇ

Bu çalışmada ilk olarak asimetrik metrik uzaylarda fonksiyon dizileri ile ilgili bazı sonuçlara ulaşılmıştır. (X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetrik metrik uzaylar olmak üzere, Y ileri kompakt ve Y üzerinde ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektiriyorsa X uzayından Y uzayına tanımlı fonksiyonların bir (f_n) dizisinin düzgün ileri yakınsak olması için gerek ve yeter koşulun düzgün ileri Cauchy olduğu kanıtlanmıştır.

Sonrasında, bir d asimetriğine sahip bir X asimetrik metrik uzayında ileri (geri) kuazi-Cauchy dizisi kavramları tanımlanmış, yukarı ve aşağı kompaktlık tanımları verilerek X in bir E alt kümesinin ileri bütünüyle sınırlı olması için gerek ve yeter koşulun yukarı kompakt olması olduğu elde edilmiştir. X üzerinde ileri yakınsaklığın geri yakınsaklığı gerektirmesi durumunda X asimetrik metrik uzayının bir E alt kümesinden bir Y asimetrik metrik uzayına tanımlı yukarı sürekli her f fonksiyonunun ileri sürekli olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca, bir X asimetrik metrik uzayında istatistiksel ileri (geri) kuazi-Cauchy dizisi kavramları tanımlanmış, istatistiksel yukarı ve istatistiksel aşağı kompaktlık tanımları verilerek X in bir E alt kümesinin ileri bütünüyle sınırlı olması için gerek ve yeter koşulun istatistiksel yukarı kompakt olduğu kanıtlanmıştır. Son olarak, asimetrik metrik uzaylarda bir sabit nokta teoremi ifade ve ispat edilmiştir.

Ayrıca asimetrik metrik uzaylarda ileri kompakt olmama ölçüsü, geri kompakt olmama ölçüsü, Hausdorff ileri ve geri kompakt olmama ölçüleri, Kuratowski ileri ve geri kompakt olmama ölçüleri tanımlanarak bunlara ait temel özellikler elde edilmiştir. Son olarak, asimetrik metrik uzaylarda Genelleştirilmiş Arzela-Ascoli Teoremi ifade ve ispat edilmiş olup, ardından Genelleştirilmiş Cantor Kesişim Teoremi tipi bir teorem elde edilmiştir.

Kaynakça

[1] R.R. Akhmerov, M.I. Kamenskii, A.S. Potapov, A.E. Rodkina, B.N. Sadovksii, *Measures of Non compactness and Condensing Operators*, Birkhäuser, 1992.

[2] G.E. Albert, *A note on quasi metric spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 47, 479-482, 1941.

[3] A.M. Aminpour, S. Khorshidvandpour, M. Mousavi, *Some results in asymmetric metric spaces*, Mathematica Aeterna 2, 533-540, 2012.

[4] J. M. Ayerbe Toledano, T. Dominguez Benavides, G. Lopez Acedo, *Measures of Noncompactness in Metric Fixed Point Theory*, Birkhäuser, 1997.

[5] J. Banaś and K. Goebel, *Measures of Non-compactness in Banach Spaces*, Marcel Dekker Inc., New York, 1980.

[6] J. Banaś and M. Mursaleen, *Sequence spaces and measures of noncompactness with applications to differential and integral equations*, Springer, 2014.

[7] D. Burton, and J. Coleman, *Quasi-Cauchy Sequences*, Amer. Math. Monthly 117, 328-333, 2010.

[8] H. Cakalli, *Forward continuity*, J. Comput. Anal. Appl. 13, 225-230, 2011.

[9] H. Cakalli, *Beyond Cauchy and quasi-Cauchy sequences*, Filomat 32, 1035-1042, 2018.

[10] J. Cao, and A. Kanibir, *Quasi-Cauchy Sequences in Quasi-Pseudo-Metric Spaces*, Questions and Answers in General Topology 39, 43-52, 2021.

[11] Ş. Cobzaş, *Functional Analysis in Asymmetric Normed Spaces*, Frontiers in Mathematics,Springer, Basel, 2013.

[12] J. Collins and J. Zimmer, *An asymmetric Arzela-Ascoli theorem*, Topology Appl. 154, 2312-2322, 2007.

[13] H. Çakallı, *Statistical quasi-Cauchy sequences*, Mathematical and Computer Modelling 54, 1620-1624, 2011.

[14] H. Çakallı, *Statistical ward continuity*, Applied Mathematics Letters 24, 1727-1728, 2011.

[15] F.I. Dagci, Tunc Misirlioglu, H. Cakalli, Lj.D.R. Kočinac , *A new note on asymmetric metric spaces*, AIP Conference Proceedings 2879, 020002, 2023.

[16] F.I. Dagci, H. Cakalli, *Quasi-Cauchy sequences on asymmetric metric spaces*, Filomat 38:25, 8917-8923, 2024.

[17] H. Fast, *Sur la convergence statistique*, Colloq. Math. 2, 241-244, 1951.

[18] J. A. Fridy, *On statistical convergence*, Analysis 5, 301-313, 1985.

[19] S. Khorshidvandpour, M. Mosaffa and S.M. Mousavi, *Some fixed point theorems in asymmetric metric spaces*, Scientia Magna 9, 13-17, 2013.

[20] H.P.A. Kunzi, *A note on sequentially compact quasi-pseudometric spaces*, Monatsh. Math. 95, 219–220, 1983.

[21] E. Malkowsky, V. Rakočević, *An introduction into the theory of sequence spaces and measure of noncompactness*, Zb. Rad. (Beogr.) 9(17), 143–234, 2000.

[22] A.C.G. Mennucci, *On asymmetric distances*, Technical report, Scuola Normale Superiore, Pisa, 2004.

[23] J. Munkres, *Topology*, Second Edition, Pearson, 2014.

[24] F.J. Palladino, *On half Cauchy sequences*, Arxiv. arXiv:1102.4641v1, 3 pages, 2012.

[25] I.L. Reilly, P.V. Subrahmanyam, M.K. Vamanamurthy, *Cauchy sequences in quasipseudometric spaces*, Monatsh. Math. 93, 127–140, 1982.

[26] H. Ribeiro, *Sur les espaces a metrique faible*, Portug. Math. 4, 65-68, 1943.

[27] R.A.Stoltenberg, *On quasi metric spaces*, Duke Math J. 36, 65-71, 1969.

[28] W.A. Wilson, *On quasi-metric spaces*, Amer. J. Math. 53, 675-684, 1931.

ÖZGEÇMİŞ

Fikriye İnce Dağcı lise eğitimini 2000 yılında Metin Nuran Çakallıklı Antalya Anadolu Lisesi'nde tamamladıktan sonra 2012 yılında yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden mezun olmuştur. 2019 yılında Maltepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Tezli Yüksek Lisans programını tamamlamıştır. Halen İstanbul Kültür Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı Matematik Doktora programına devam etmektedir.