

Yeni Tip Darboux Çatılarına Göre Manyetik Eğriler ve Genelleştirilmiş Fokal Yüzeyler

Ersin Işık

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Mayıs 2025

Magnetic Curves and Generalized Focal Surfaces According to New Type Darboux Frames

Ersin Işık

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics and Computer Sciences

May 2025

Yeni Tip Darboux Çatılarına Göre Manyetik Eğriler ve Genelleştirilmiş Fokal Yüzeyler

Ersin Işık

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği Uyarınca

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Geometri Bilim Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Ş. Nevin Gürbüz

Mayıs 2025

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı YÜKSEK LİSANS öğrencisi Ersin Işık'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı “Yeni Tip Darboux Çatılarına Göre Manyetik Eğriler ve Genelleştirilmiş Fokal Yüzeyler” başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Ş. Nevin GÜRBÜZ

İkinci Danışman : -

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Ş. Nevin GÜRBÜZ

Üye : Prof. Dr. Özcan GELİŞGEN

Üye : Doç. Dr. Koray YILMAZ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fatma TÜMSEK
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Ş. Nevin Gürbüz danışmanlığında hazırlamış olduğum “Yeni Tip Darboux Çatılarına Göre Manyetik Eğriler ve Genelleştirilmiş Fokal Yüzeyler” başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 15/05/2025

Ersin IŞIK

ÖZET

Bu tez, oskülatör, normal ve rektifyen Darboux çatılarına göre manyetik eğrileri, doğrusal olmayan Schrödinger (NLS) denklemleri ile ilgili üç sınıfı ve üç dönüşümü ve bu dönüşümlerin diferensiyelleri için üç formülü, Hasimoto yüzeylerinin genelleştirilmiş fokal yüzeylerini incelemeyi amaçlamaktadır.

Bu çalışma yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde çalışma hakkında genel bir bilgi verilmiş çalışmanın amaçları vurgulanmıştır. İkinci bölümde önceki araştırmalara dair literatür araştırmasına yer verilmiştir. Üçüncü bölümde temel formlar ve eğrilikler, Öklidyen 3-uzayda oskülatör, normal ve rektifyen Darboux çatıları, Öklidyen 3-uzayda Hasimoto yüzeyi ve genelleştirilmiş fokal yüzeylere dair tanımlara yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde Öklidyen 3-uzayda oskülatör, normal ve rektifyen Darboux çatılarına göre manyetik eğrilerle ilgili tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Beşinci bölümde oskülatör, normal ve rektifyen Darboux çatılarına göre NLS denklemi ile ilgili yeni sınıflar ele alınmıştır. Altıncı bölümde bu çatılara göre NLS ile ilişkili Hasimoto benzeri dönüşümlerin diferensiyel formülleri verilmiştir. Yedinci bölümde Öklidyen 3-uzayda oskülatör, normal ve rektifyen Darboux çatılarına göre Hasimoto yüzeylerinin genelleştirilmiş fokal yüzeyleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Oskülatör Darboux Çatısı, Normal Darboux Çatısı, Rektifyen Darboux Çatısı, Hasimoto yüzeyi, Genelleştirilmiş Fokal Yüzeyler, Manyetik Eğriler.

SUMMARY

This thesis aims to investigate magnetic curves according to osculating, normal, and rectifying Darboux frames, three classes and three transformations related to nonlinear Schrödinger (NLS) equations and three formulas for the differentials of these transformations, and the generalized focal surfaces of Hasimoto surfaces.

This study consists of seven chapters. The first chapter provides general information about the study and emphasizes its objectives. The second chapter includes a literature review of previous research. The third chapter includes definitions of fundamental forms and curvatures, osculating, normal, and rectifying Darboux frames in Euclidean 3-space, the Hasimoto surface in Euclidean 3-space, and generalized focal surfaces.

The fourth chapter includes definitions and theorems related to magnetic curves according to osculating, normal, and rectifying Darboux frames in Euclidean 3-space. In the fifth chapter, new classes related to the NLS equation according to osculating, normal, and rectifying Darboux frames are discussed. The sixth chapter provides the differential formulas of Hasimoto-like transformations associated with NLS according to these frames. The seventh chapter examines the generalized focal surfaces of Hasimoto surfaces according to osculating, normal, and rectifying Darboux frames in Euclidean 3-space.

Key Words: Osculating Darboux Frame, Normal Darboux Frame, Rectifying Darboux Frame, Hasimoto surface, Generalized Focal Surfaces, Magnetic Curves.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının her aşamasında, zaman mefhumunu bir kenara bırakarak bana yol gösteren, engin bilgisiyle ufkumu açan ve değerli rehberliğiyle bu çalışmayı mümkün kılan Sayın

Prof. Dr. Şerife Nevin GÜRBÜZ

hocama en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, bu zorlu süreçte bana sevgi, sabır ve anlayışla destek olan, varlıklarıyla gücüme güç katan sevgili aileme de kalbimin en derininden teşekkür ederim. Onların manevi desteği olmadan bu çalışmanın bu noktaya ulaşması düşünülemezdi.

ESKİŞEHİR, 2025

Ersin Işık

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	vi
SUMMARY	vii
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
1. GİRİŞ VE AMAÇ	1
2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI	2
3. TEMEL KAVRAMLAR	5
3.1. $\mathbb{E}^3$ Uzayında Temel Formlar ve Eğrilikler	5
3.2. $\mathbb{E}^3$ Uzayında Oskülatör, Normal ve Rektifyen Darboux Çatıları	6
3.3. $\mathbb{E}^3$ Uzayında Hasimoto Yüzeyi ve Genelleştirilmiş Fokal Yüzeyler	9
4. $\mathbb{E}^3$ UZAYINDA OSKÜLATÖR, NORMAL VE REKTİFYEN DARBOUX ÇATILARINA GÖRE MANYETİK EĞRİLER	10
4.1. $\mathbb{E}^3$ Uzayında Oskülatör Darboux Çatısına Göre Manyetik Eğriler	10
4.2. $\mathbb{E}^3$ Uzayında Normal Darboux Çatısına Göre Manyetik Eğriler	14
4.3. $\mathbb{E}^3$ Öklidyen 3-uzayda Rektifyen Darboux Çatısına Göre Manyetik Eğriler	19
5. $\mathbb{E}^3$ UZAYINDA OSKÜLATÖR, NORMAL VE REKTİFYEN DARBOUX ÇATILARINA GÖRE NLS İLE İLİŞKİLİ ÜÇ SINIF	24
5.1. $\mathbb{E}^3$ Uzayında Oskülatör Darboux Çatısı İçin Yeni Sınıflar	24
5.2. $\mathbb{E}^3$ Uzayında Normal Darboux Çatısı İçin Yeni Sınıflar	26
5.3. $\mathbb{E}^3$ Uzayında Rektifyen Darboux Çatısı İçin Yeni Sınıflar	29
6. $\mathbb{E}^3$ UZAYINDA OSKÜLATÖR, NORMAL VE REKTİFYEN DARBOUX ÇATILARI İÇİN HASİMOTO BENZERİ DÖNÜŞÜMLERİN DİFERENSİYELLERİ İÇİN FORMÜLLER	32
6.1. Oskülatör Darboux çatısına göre NLS ile ilişkili Hasimoto benzeri dönüşümlerin diferensiyelleri için formüller	32
6.2. Normal Darboux çatısına göre NLS ile ilişkili Hasimoto benzeri dönüşümlerin diferensiyelleri için formüller	34

İÇİNDEKİLER

6.3. Öklidyen 3-Uzayda Rektifyen Darboux çatısına göre NLS ile ilişkili Hasimoto benzeri dönüşümlerin diferensiyelleri için formüller	36
7. $\mathbb{E}^3$ UZAYINDA OSKÜLATÖR, NORMAL VE REKTİFYEN DARBOUX ÇATILARINA GÖRE GENELLEŞTİRİLMİŞ FOKAL YÜZEYLER	39
7.1. Öklidyen 3-Uzayda Oskülatör Darboux Çatısına Göre Genelleştirilmiş Fokal Yüzeyler	39
7.2. Öklidyen 3-Uzayda Normal Darboux Çatısına Göre Genelleştirilmiş Fokal Yüzeyler	45
7.3. Öklidyen 3-Uzayda Rektifyen Darboux Çatısına Göre Genelleştirilmiş Fokal Yüzeyler	51
8. BULGULAR VE TARTIŞMA	57
9. SONUÇ VE ÖNERİLER	58
KAYNAKLAR DİZİNİ	59

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Diferensiyel geometrinin temelini oluşturan kavramlar eğriler ve yüzeylerdir. Frenet ve Serret, birbirinden bağımsız olarak, eğri boyunca hareket eden bir parçacığın kinematik özelliklerini belirleyen bir çatı inşa etmişlerdir. Daha sonra Darboux, yüzey üzerindeki eğrilerin ve yüzeyin kendisinin yapısını incelemek için kullanışlı bir araç olan Darboux çatısını inşa etmiştir. Darboux çatısı manyetik eğrileri analiz etmek için de kullanışlı bir araçtır.

Yüklü bir parçacık, bir manyetik alana girdiğinde Lorentz kuvveti

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = \Phi(\gamma') = \mathcal{V} \times \gamma'$$

etkisi altında kalarak bir yörüngeye doğru hareket eder ve parçacığın hareket ettiği bu yörüngeye manyetik eğri denir (Barros ve Romero, 2007). Bu çalışmada amaçlarımızdan biri Öklidyen 3-uzayda oskülatör Darboux çatısına göre $\tilde{D}_o$, U ve Y_o , normal Darboux çatısına göre $\tilde{D}_n$, T ve Y_n ve rektifyen Darboux çatısına göre $\tilde{D}_r$, V ve Y_r —manyetik eğrilerini tanımlamaktır. Aynı zamanda oskülator, normal ve rektifyen Darboux çatılarının Lorentz kuvvet denklemlerini elde etmektir. Killing manyetik alanları, özellikle 3 boyutlu uzayda, fiziksel sistemlerin incelenmesinde önemli rol oynar.

Barros ve Romero (2007) Killing manyetik akılarını girdap filament akıları olarak görüp manyetik yörüngelerin kübik Schrödinger denkleminin çözümleri olarak soliton karakterini belirtmek için Hasimoto dönüşümünü kullanmışlardır. NLS denklemi ile ilişkili olan yüzeylere Hasimoto yüzeyi denir. Bu çalışmadaki amaçlarımızdan biri de oskülatör Darboux, normal Darboux ve rektifyen Darboux çatılarına göre NLS denklemi ile ilişkili yeni sınıflar ve yeni Hasimoto benzeri dönüşümler, aynı zamanda oskülatör, normal ve rektifyen Darboux çatılarına göre NLS denklemi ile ilişkili Hasimoto benzeri dönüşümlerin diferensiyelleri için yeni formüller ve bu çatılara göre Hasimoto yüzeylerini elde etmek, bunlara ilişkin Gauss ve ortalama eğriliklerini bulmak, bu eğrilikler yardımıyla asli eğrilikleri vermek ve bu çatılara göre Hasimoto yüzeylerinin genelleştirilmiş fokal yüzeylerini sunmaktır.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

18. yüzyılda L. Euler ve C. F. Gauss gibi matematikçiler yüzeylerin eğriliği ve eğrilerin yay uzunluğu gibi temel kavramları sunmuşlardır. G. Monge ise yüzeyler teorisine önemli katkılarda bulunmuş ve diferensiyel geometriyi ayrı bir disiplin olarak ele almıştır. 19.yy başlarında Gauss yüzeylerin içsel geometrisi üzerinde çalışmış, yüzeyin eğriliğinin ölçülebilecek içsel bir özellik olduğunu göstermiştir. Frenet (1847) ve Serret (1851) birbirinden bağımsız olarak geliştirdikleri ve daha sonra bir araya getirilen çalışmalar ile bir eğrinin her noktasındaki teğet, normal ve binormal vektörleri tanımlayan bir çatı ortaya koymuş, eğrilik ve burulmayı hesaplayarak eğrinin uzaydaki şeklini anlamak için bir temel oluşturmuşlardır. Daha sonra J.G Darboux 1887-1896 yılları arasında yayınladığı dört ciltlik "Théorie générale des surfaces" isimli eserinde yüzeyleri kapsamlı bir şekilde ele almış ve Darboux çatısını inşa etmiştir. Darboux, bu çatı ile bir yüzey üzerinde bulunan hareketli bir eğrinin yüzeye olan ilişkisini incelemiştir. Darboux çatısı birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Balakrishan (1994) Öklidiyen 3-uzayda Darboux çatısına göre eğri evölüsyonunun birinci sınıfını elde etmiştir. Doğan ve Yaylı (2012) Darboux çatısını incelemiş, Gauss ve ortalama eğriliklerini hesaplamışlardır. Birçok matematikçi tarafından başka çatılar da inşa edilmiştir. Coquillart (1987) q -çatıyı tanımlamıştır. Ertuğ Gürbüz (2023), $\{t, u, g\}$ çatısına göre doğrusal olmayan NLS denklemiyle ilişkili yeni sınıflar ve yeni Hasimoto benzeri dönüşümler elde etmiş ve bu Hasimoto benzeri dönüşümlerin diferensiyelleri için yeni formüller sunmuştur.

Frenet-Serret çatısına alternatif olarak birçok çatı geliştirilmiştir. Bu çatılardan biri L. R. Bishop (1975) tarafından geliştirilen alternatif çatıdır. Bu çatı Frenet-Serret çatısının tanımlanamadığı durumlarda (özellikle eğrinin ikinci türevinin sıfır olduğu hallerde) herhangi bir uzay eğrisini analiz edebilmesi anlamında önemlidir. Yılmaz ve Turgut (2010) tarafından 2. tip Bishop çatısı oluşturulmuştur. Soliman vd. (2019) 3. tip Bishop çatısını oluşturarak bu çatı ile zamana göre eğri evölüsyonunu incelemişlerdir. Alkan vd. (2024), Darboux çatısını temel alan oskülatör Darboux, normal Darboux ve rektifyen Darboux çatılarını incelemişlerdir.

Matematik ve fizikte özel bir dalga türünü ifade eden solitonlar ve uzay eğrileri arasındaki ilişkiler fiziksel anlamda geniş bir uygulama alanına sahip olduklarından birçok matematikçi bu konular üzerinde çalışmıştır. Hasimoto (1971) bir girdap filament hareketini ve bunun elastikler ile olan ilişkisini incelemiştir. Hasimoto (1972) kendi adı

verilen aşağıdaki Hasimoto dönüşümü

$$\psi = \kappa e^{i \int \tau ds}$$

yardımla vorteks filament denkleminin, doğrusal olmayan Schrödinger (NLS) denkleminde

$$\frac{1}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} + \frac{1}{2} |\psi|^2 \psi$$

karşılık geldiğini göstermiştir. Langer ve Perline (1990), eğriler üzerinde integrallenebilir akıları ve Hasimoto dönüşümünü incelemişlerdir. Nassar vd. (2012) Öklidyen 3-uzayda Frenet çatısına göre Hasimoto yüzeylerini incelemişlerdir. Ertuğ Gürbüz (2018a), (2018b) Öklidyen ve Minkowski 3-uzaylarında Darboux çatısına göre eğri evolüsyonunun NLS ile ilişkili üç sınıfını elde etmiş ve üç geometrik fazı incelemiştir. Ertuğ Gürbüz ve Yoon (2020) Minkowski uzayında bir Frenet çatısına karşılık gelen ikinci ve üçüncü sınıf eğri evolüsyonları için Hasimoto yüzeylerini incelemişlerdir. Elzawy (2021) Hasimoto yüzeylerini Galilean uzayda analiz etmiştir. Elsharkawy (2024) üç boyutlu Minkowski uzayında Hasimoto yüzeylerinin eşbiçimli geometrisini inceleyerek bu yüzeylere özgü geometrik özellikleri, özellikle Gauss ve ortalama eşbiçimli eğriliklerini analiz etmiştir. Abdel-aziz vd. (2024) Minkowski uzayında bir timelike Hasimoto yüzeyinin temel form katsayılarından evolüsyon denklemlerini tanıtmış, q-eğri kullanarak üç tip Hasimoto yüzeyi sunmuşlardır.

Manyetik eğriler matematikte ve fizikte bir çok uygulama alanına sahiptir. Manyetik eğriler, bir manyetik alanın etkisi altında hareket eden yüklü bir parçacığın yörüngesini temsil eder ve Lorentz kuvvet denklemini sağlar. Başka bir deyişle, bir yüklü parçacık bir manyetik alanın etkisi altına girdiğinde Lorentz kuvveti açığa çıkar ve bu etkiyle yüklü parçacık bu manyetik alan içerisinde bir yörüngede ilerlemeye başlar. Bu yörüngeye manyetik eğri adı verilir. Barros ve Romero (2007) manyetik alanlar içindeki girdap benzeri yapıları fiziksel ve geometrik açıdan ayrıntılı olarak analiz etmişlerdir. Romaniuc ve Munteanu (2011) Öklidyen 3-uzayda Killing manyetik alanlara karşılık gelen manyetik eğrileri incelemişlerdir. Özdemir vd. (2019) aynı manyetik alan çizgilerini ve manyetik eğrileri paylaşan yüzey aileleri için parametrik bir gösterim elde etmiş, bu yüzeylerle ilişkili olarak hareket eden yüklü parçacıkların yörüngelerini araştırmışlardır. Ertuğ Gürbüz (2021) Öklidyen 3-uzayda Darboux çatısına göre elektrik alanının varyasyonu yardımıyla manyetik eğrileri incelemiştir. Ertuğ Gürbüz (2024) lightlike ve timelike yüzeyler üzerinde Darboux çatıları için manyetik eğrileri incelemiştir.

Fokal yüzeyler genel olarak ses, ışık ve diğer dalga türlerinin yansıması veya kırılması sonucu yoğunlaştığı noktaların geometrik yeri olarak tanımlanabilir. Bu bağlamda fokal yüzeyler hem teorik anlamda geniş bir çalışma alanı sunmakta hem de uygulama

anlamında optik, akustik ve radar sistemleri gibi çeşitli mühendislik disiplinlerinde önemli yer tutmaktadır. Hagen vd. (1991) fokal yüzeylerin doğruların kongrüansları olarak anlaşılması prensibini kullanarak, bunu görüntüleme alanında ilk kez kullanmışlardır. Hagen ve Hahmann (1992) genelleştirilmiş fokal yüzeyleri yüzeyleri analizetmişlerdir. Özdemir (2008) $\mathbb{E}^n$ n-boyutlu Öklidiyen uzayda fokal eğriler ve yüzeyleri sınıflandırmıştır. Şimşek (2016) fokal yüzeyleri Lorentz-Minkowski uzayında ele almıştır. Kişi vd. (2020) Galilean 3-uzayında yeni bir tip fokal yüzey elde etmişlerdir. Eren vd. (2022) girdap filament akılarının fokal yüzeylerini incelemiş ve bu akılar ile bunların fokal yüzeylerini karşılaştırarak yeni karakterizasyonlar elde etmişlerdir. Güler (2022) verilen bir parametrik yüzeyin offset yüzeyinin fokal yüzeyleri ile yüzeyin geometrisi arasındaki ilişkileri incelemiştir.



3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmada faydalanılan ve çalışmanın temelini oluşturan tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

3.1. $\mathbb{E}^3$ Uzayında Temel Formlar ve Eğrilikler

Diferensiyel geometride, yüzeylerin içsel ve dışsal geometrik özelliklerini tanımlamak için birinci ve ikinci temel formlardan faydalanılır. Birinci temel form yüzeyin içsel geometrisini yani yüzeyin kendi üzerinde ölçülen uzunlukları, açıları tanımlamak için kullanılırken ikinci temel form yüzeyin eğrilik, burulma gibi dışsal özelliklerini tanımlamak ve yüzeyi sınıflandırmak için kullanılır. Bu kısımda birinci ve ikinci temel form ile ilgili tanımlara yer verilmiştir.

3-boyutlu standart reel vektör uzayı $\mathbb{R}^3$ ile birleştirilmiş $\mathbb{R}^3$ afin uzayında $x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3)$ vektörler olmak üzere Öklid iç çarpımı

$$\langle, \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$$

biçiminde tanımlanır. Böylece $\mathbb{R}^3$ afin uzayı 3-boyutlu Öklid uzayı olur ve $\mathbb{E}^3$ ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

$\alpha(s) : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$ parametrizasyonu ile verilsin. $\|\alpha'(s)\| = 1$ iken bu eğri (I, α) koordinat komşuluğu için birim hızlı eğri olarak ifade edilir. Böyle olunca s , yay parametresi adını alır. Her $s \in [a, b]$ için $\alpha'(s) \neq 0$ ise α eğrisi düzenli (regüler) eğri olarak adlandırılır (Hacısalıhoğlu, 1998).

Bir koordinat yaması $X : D \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$ nin açık bir alt kümesi olan D den $\mathbb{R}^3$ e giden birebir ve düzgün bir dönüşümdür (O'Neill, 1996).

$\mathbb{E}^3$ uzayında bir M yüzeyi $h(s, u) = (d(s, u), e(s, u), f(s, u))$ biçiminde verilmiş olsun. Burada diferensiyellenebilir d, e, f fonksiyonlarına h 'nin koordinat fonksiyonları denir. Birinci ve ikinci temel formun katsayıları aşağıdaki gibi verilir

$$E = \langle h_s, h_s \rangle, \quad F = \langle h_s, h_u \rangle, \quad G = \langle h_u, h_u \rangle \quad (3.1)$$

$$l = \langle h_{ss}, \mathbb{N} \rangle \quad m = \langle h_{su}, \mathbb{N} \rangle \quad n = \langle h_{uu}, \mathbb{N} \rangle \quad (3.2)$$

Burada

$$\mathbb{N} = \frac{h_s \times h_u}{\|h_s \times h_u\|} \quad (3.3)$$

yüzeyin birim normal vektör alanıdır. (3.1), (3.2) denklemleri kullanılarak yüzeyin I . ve II . temel formları sırasıyla

$$I = E ds^2 + 2F ds du + G du^2 \quad (3.4)$$

$$II = l ds^2 + 2m ds du + n du^2 \quad (3.5)$$

şeklinde verilir (Gray, 1975; Lopez, 2008)

$\mathbb{E}^3$ uzayında M yüzeyinin Ortalama ve Gaus eğrilikleri sırasıyla

$$H = \frac{En + Gl - 2Fm}{2(EG - F^2)} \quad (3.6)$$

$$K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2} \quad (3.7)$$

biçiminde verilir (Shifrin, 2008).

$X : D \longrightarrow \mathbb{E}^3$ regüler bir yama olsun. X 'in asli eğrilikleri k_1 ve k_2 aşağıdaki biçimde verilir (Hacısalıhoğlu, 2000).

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K} \quad (3.8)$$

$$k_2 = H - \sqrt{H^2 - K} \quad (3.9)$$

3.2. $\mathbb{E}^3$ Uzayında Oskülatör, Normal ve Rektifyen Darboux Çatıları

$\alpha(s) : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi M üzerinde s yay uzunluğuna sahip birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ ile gösterilirse Frenet türev formülleri aşağıdaki gibi verilir (Do Carmo, 1976)

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N \\ N' &= -\kappa T + \tau B \\ B' &= -\tau N \end{aligned} \quad (3.10)$$

Burada κ eğrilik, τ burulmayı göstermektedir ve T, N ve B sırasıyla α eğrisinin birim teğet, asli normal ve binormal vektörleridir. Diğer taraftan, α eğrisi bir yüzey eğrisi olduğundan, Darboux çatısı olarak adlandırılan başka bir ortonormal çatıya sahiptir ve bu çatı $\{T, V, U\}$ ile gösterilir; burada T eğrinin birim teğeti, U eğri boyunca M yüzeyinin birim normali ve $V = U \times T$ ile tanımlanan bir birim vektördür. Birim teğet vektörü T nin hem Frenet çatısı

hem de Darboux çatısı için ortak olduğu gerçeği gözönüne alınarak bu çatılar arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilebilir (O'Neill, 1966):

$$\begin{bmatrix} T \\ V \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Burada θ açısı V ve N vektörleri arasındaki açıdır. κ_n , κ_g ve τ_g sırasıyla α eğrisinin normal eğrilik, geodezik eğrilik ve geodezik burulması olmak üzere α eğrisinin Darboux çatı türev formülleri aşağıdaki gibi verilir (O'Neill, 1966):

$$\begin{bmatrix} T' \\ V' \\ U' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_g & \kappa_n \\ -\kappa_g & 0 & \tau_g \\ -\kappa_n & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ V \\ U \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Bu eğrilikler ile κ ve τ arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \kappa_g &= \kappa \cos \theta \\ \kappa_n &= \kappa \sin \theta \\ \tau_g &= \tau + \frac{d\theta}{ds} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Yönlendirilmiş bir M yüzeyinde Darboux çatısı $\{T, V, U\}$ olan birim hızlı bir eğri için oskülatör Darboux vektör alanı, normal Darboux vektör alanı ve rektifyen Darboux vektör alanı sırasıyla şu şekilde tanımlanır (Hananoi vd., 2015).

$$\begin{aligned} D_o &= \tau_g(s)T(s) - \kappa_n(s)V(s) \\ D_n &= -\kappa_n(s)V(s) + \kappa_g(s)U(s) \\ D_r &= \tau_g(s)T(s) + \kappa_g(s)U(s) \end{aligned} \quad (3.14)$$

$\alpha(s) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ eğrisi M üzerinde birim hızlı bir yüzey eğrisi $\{T, V, U\}$ Darboux çatısıyla verilmiş olsun. κ_n , κ_g ve τ_g , α eğrisinin eğrilikleri ve $D_o = \tau_g(s)T(s) - \kappa_n(s)V(s)$ oskülatör Darboux vektör olmak üzere aşağıdaki eşitlik sağlanır (Alkan vd., 2024).

$$\tilde{D}_o(s) = \frac{D_o(s)}{\|D_o(s)\|} = \frac{\tau_g(s)}{\sqrt{\tau_g^2(s) + \kappa_n^2(s)}}T(s) - \frac{\kappa_n(s)}{\sqrt{\tau_g^2(s) + \kappa_n^2(s)}}V(s) \quad (3.15)$$

$\tilde{D}_o$ vektörü T ve V tarafından gerilen uzayda olduğu için $\tilde{D}_o$ ve U vektörleri birbirine diktir. Böylece $\tilde{D}_o \perp U$ olur. Dolayısıyla $Y_o = \tilde{D}_o \times U$ birim vektörü tanımlanabilir. Açıkça anlaşılabilir ki $\tilde{D}_o, U$ ve Y_o vektörleri birbirine dik olan birim vektörlerdir. Böylece bu vektörler kullanılarak yüzey üzerinde α eğrisi boyunca yeni bir ortonormal çatı inşa edilebilir. $\{\tilde{D}_o, U, Y_o\}$ vektörleriyle kurulan bu çatıya oskülatör Darboux çatısı denir. α eğrisinin oskülatör Darboux çatısı şu şekilde tanımlanır (Alkan vd., 2024).

$$\begin{aligned} \tilde{D}_o' &= -\delta_o Y_o \\ U' &= \mu_o Y_o \\ Y_o' &= \delta_o \tilde{D}_o - \mu_o U \end{aligned} \quad (3.16)$$

Burada $\delta_o = \left(\frac{\tau_g}{\kappa_n}\right)' \left(\frac{\kappa_n^2}{\kappa_n^2 + \tau_g^2}\right) + \kappa_g$ ve $\mu_o = \sqrt{\kappa_n^2 + \tau_g^2}$ dir.

$\alpha(s) : I \subset R \rightarrow M$ eğrisi M üzerinde birim hızlı bir yüzey eğrisi $\{T, V, U\}$ Darboux çatısıyla verilmiş olsun. κ_n , κ_g ve τ_g , α eğrisinin eğrilikleri ve $D_n = -\kappa_n(s)V(s) + \kappa_g(s)U(s)$ normal Darboux vektör olmak üzere aşağıdaki eşitlik sağlanır (Alkan vd., 2024).

$$\tilde{D}_n(s) = \frac{D_n(s)}{\|D_n(s)\|} = \frac{-\kappa_n(s)}{\sqrt{\kappa_g^2(s) + \kappa_n^2(s)}}V(s) + \frac{\kappa_g(s)}{\sqrt{\kappa_g^2(s) + \kappa_n^2(s)}}U(s) \quad (3.17)$$

$\tilde{D}_n$ vektörü U ve V tarafından gerilen uzayda olduğu için $\tilde{D}_n$ ve T vektörleri birbirine diktir. Böylece $\tilde{D}_n \perp T$ olur. Dolayısıyla $Y_n = \tilde{D}_n \times T$ birim vektörü tanımlanabilir. Açıkça anlaşılabilir ki $\tilde{D}_n, T$ ve Y_n vektörleri birbirine dik olan birim vektörlerdir. Böylece bu vektörler kullanılarak yüzey üzerinde α eğrisi boyunca yeni bir ortonormal çatı inşa edilebilir. $\{\tilde{D}_n, T, Y_n\}$ vektörleriyle kurulan bu çatıya normal Darboux çatı denir. α eğrisinin normal Darboux çatısı şu şekilde tanımlanır (Alkan vd., 2024)

$$\begin{aligned} \tilde{D}_n' &= -\delta_n Y_n \\ T' &= \mu_n Y_n \\ Y_n' &= \delta_n \tilde{D}_n - \mu_n T \end{aligned} \quad (3.18)$$

Burada $\delta_n = \left(\frac{\kappa_n}{\kappa_g}\right)' \left(\frac{\kappa_g^2}{\kappa_n^2 + \kappa_g^2}\right) + \tau_g$ ve $\mu_n = \sqrt{\kappa_n^2 + \kappa_g^2}$ dir.

$\alpha(s) : I \subseteq R \rightarrow M$ eğrisi M üzerinde birim hızlı bir yüzey eğrisi $\{T, V, U\}$ Darboux çatısıyla verilmiş olsun. κ_n , κ_g ve τ_g , α eğrisinin eğrilikleri ve $D_r = \tau_g(s)T(s) + \kappa_g(s)U(s)$ rektifyen Darboux vektör olmak üzere aşağıdaki eşitlik sağlanır (Alkan vd., 2024)

$$\tilde{D}_r(s) = \frac{D_r(s)}{\|D_r(s)\|} = \frac{\tau_g(s)}{\sqrt{\kappa_g^2(s) + \tau_g^2(s)}}T(s) + \frac{\kappa_g(s)}{\sqrt{\kappa_g^2(s) + \tau_g^2(s)}}U(s) \quad (3.19)$$

$\tilde{D}_r$ vektörü T ve U tarafından gerilen uzayda olduğu için $\tilde{D}_r$ ve V vektörleri birbirine diktir. Dolayısıyla $Y_r = \tilde{D}_r \times V$ birim vektörü tanımlanabilir. Açıkça anlaşılabilir ki $\tilde{D}_r, V$ ve Y_r vektörleri birbirine dik olan birim vektörlerdir. Böylece bu vektörler kullanılarak yüzey üzerinde α eğrisi boyunca yeni bir ortonormal çatı inşa edilebilir. $\{\tilde{D}_r, V, Y_r\}$ vektörleriyle kurulan bu çatıya rektifyen Darboux çatı denir. α eğrisinin rektifyen Darboux çatısı şu şekilde tanımlanır (Alkan vd., 2024)

$$\begin{aligned} \tilde{D}_r' &= -\delta_r Y_r \\ V' &= \mu_r Y_r \\ Y_r' &= \delta_r \tilde{D}_r - \mu_r V \end{aligned} \quad (3.20)$$

Burada $\delta_r = \left(\frac{\tau_g}{\kappa_g}\right)' \left(\frac{\kappa_g^2}{\kappa_g^2 + \tau_g^2}\right) - \kappa_n$ ve $\mu_r = \sqrt{\kappa_g^2 + \tau_g^2}$ dir.

3.3. $\mathbb{E}^3$ Uzayında Hasimoto Yüzeyi ve Genelleştirilmiş Fokal Yüzeyler

Bir girdap filamentinin konum vektörü $r = r(s, t)$ olsun.

$$r_t = r_s \times r_{ss} \quad (3.21)$$

denklemleri Betchov- Da Rios veya girdap filament denklemleri olarak adlandırılır. Şekil değişikliği içermeyen belirli bu tür girdap hareketlerinin, Doğrusal Olmayan Schrödinger (NLS) denkleminin hareketli dalga çözümlerine karşılık geldiği Hasimoto (1971) tarafından verilmiştir. NLS denklemleriyle ilişkili soliton yüzeyine NLS yüzeyi veya Hasimoto yüzeyi denir.

Fokal yüzeyler doğru kongrüansları alanında bilinmektedir. Doğru kongrüansları bir uçaktaki basınç ve ısı dağılımını, sıcaklığı, yağışları, atmosferdeki ozonu vb. görselleştirmek için kullanılabilir. Ancak burada fokal yüzeyler, yüzeyin daha fazla işlenmesinden önce, yüzeyin kalitesini analiz etmek için bir yüzey sorgulama aracı olarak kullanılmaktadır.

$E(s, t)$ birim vektörlerin kümesi verildiğinde bir doğru kongrüansı parametrik olarak şu şekilde tanımlanır:

$$C(s, t, z) = X(s, t) + zE(s, t) \quad (3.22)$$

Her (s, t) çifti için (3.22) ifadesi kongrüansın bir doğrusudur ve bu sebeple C kongrüansının üretici olarak adlandırılır. Burada z parametresi X üzerindeki noktaya karşılık gelen işaretli uzaklıktır. C nin her bir üreticinin üzerinde iki özel (gerçek, sanal, birim) nokta vardır. Bu noktalar fokal noktalar olarak adlandırılır. Bu noktalar üreticilerin oskülatör noktalarıdır. Bu sebeple fokal yüzey fokal noktaların geometrik yeridir. Genel olarak fokal yüzeyler iki kısımdan oluşur (Hagen, 1992).

$X(s, t)$ yüzeyi $\mathbb{E}^3$ uzayında bir yüzey ve $N(s, t)$ bu yüzeyin normal vektör alanı olsun. Bu durumda $X(s, t)$ yüzeyinin fokal yüzeyi parametrik olarak şu şekilde verilir (Hagen, 1991)

$$C(s, t) = X(s, t) + \frac{1}{k_i} N(s, t), i = 1, 2 \quad (3.23)$$

Burada k_1 ve k_2 yüzeyin asli eğrilikleridir (Hagen, 1991).

4. $\mathbb{E}^3$ UZAYINDA OSKÜLATOR, NORMAL VE REKTİFYEN DARBOUX ÇATILARINA GÖRE MANYETİK EĞRİLER

Bu bölümde Öklidyen 3-uzayda oskülatör, normal ve rektifyen Darboux çatılarına göre manyetik eğriler ve Lorentz kuvvet denklemleri incelenecektir.

4.1. $\mathbb{E}^3$ Uzayında Oskülatör Darboux Çatısına Göre Manyetik Eğriler

Bu kesimde, oskülatör Darboux çatısına göre $\tilde{D}_o$, U ve Y_o manyetik eğriler incelenecektir.

$\mathbb{E}^3$ uzayında oskülatör Darboux çatısına göre $\tilde{D}_o$ —Manyetik Eğriler

Tanım 4.1: $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi, oskülatör Darboux çatısına göre bir eğri olsun. Eğer $\tilde{D}_o$ vektör alanı, $\mathbb{E}^3$ uzayında oskülatör Darboux çatısına göre, aşağıdaki Lorentz kuvvet denklemini

$$\nabla_{\gamma'} \tilde{D}_o = \Phi(\tilde{D}_o) = \mathcal{X}_1 \times \tilde{D}_o \quad (4.1)$$

sağlarsa, bu durumda γ eğrisine oskülatör Darboux çatısına göre $\tilde{D}_o$ —manyetik eğri denir.

Teorem 4.1: $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi, oskülatör Darboux çatısına göre birim hızlı bir $\tilde{D}_o$ —manyetik eğri olsun. Bu durumda, oskülatör Darboux çatısına göre Lorentz kuvvet denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{bmatrix} \Phi(\tilde{D}_o) \\ \Phi(U) \\ \Phi(Y_o) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\delta_0 \\ 0 & 0 & \varpi_{o1} \\ \delta_0 & -\varpi_{o1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{D}_o \\ U \\ Y_o \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Burada , $\varpi_{o1} = \langle \Phi(U), Y_o \rangle$ biçiminde tanımlanan bir fonksiyondur.

İspat: $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi, Öklidyen 3-uzayda oskülatör Darboux çatısına göre birim hızlı bir $\tilde{D}_o$ —manyetik eğri olsun. Bu durumda (4.1) yardımıyla

$$\nabla_{\gamma'} \tilde{D}_o = \Phi(\tilde{D}_o) = -\delta_0 Y_o \quad (4.3)$$

dır. Aynı zamanda

$$\Phi(U) \in \text{Span}\{\tilde{D}_o, U, Y_o\}$$

olduğundan

$$\Phi(U) = p_{o1}\tilde{D}_o + p_{o2}U + p_{o3}Y_o \quad (4.4)$$

dır. (4.3) ve (4.4) denklemleri kullanılarak,

$$p_{o1} = \langle \Phi(U), \tilde{D}_o \rangle = -\langle \Phi(\tilde{D}_o), U \rangle = 0 \quad (4.5)$$

$$p_{o2} = \langle \Phi(U), U \rangle = 0 \quad (4.6)$$

$$p_{o3} = \langle \Phi(U), Y_o \rangle = \varpi_{o1} \quad (4.7)$$

elde edilir. (4.3), (4.4), (4.5), (4.6) ve (4.7) kullanılarak,

$$\Phi(U) = \varpi_{o1}Y_o \quad (4.8)$$

bulunur. Benzer olarak,

$$\Phi(Y_o) \in \text{Span}\{\tilde{D}_o, U, Y_o\}$$

olduğundan

$$\Phi(Y_o) = q_{o1}\tilde{D}_o + q_{o2}U + q_{o3}Y_o \quad (4.9)$$

dır. (4.3) ve (4.9) denklemleri kullanılarak

$$q_{o1} = \langle \Phi(Y_o), \tilde{D}_o \rangle = -\langle \Phi(\tilde{D}_o), Y_o \rangle = \delta_o \quad (4.10)$$

$$q_{o2} = \langle \Phi(Y_o), U \rangle = -\langle \Phi(U), Y_o \rangle = -\varpi_{o1} \quad (4.11)$$

$$q_{o3} = \langle \Phi(Y_o), Y_o \rangle = 0 \quad (4.12)$$

elde edilir. (4.3), (4.9), (4.10), (4.11) ve (4.12) denklemleri kullanılarak,

$$\Phi(Y_o) = \delta_o\tilde{D}_o - \varpi_{o1}U \quad (4.13)$$

bulunur. Böylece (4.3), (4.8) ve (4.13) denklemleri yardımıyla $\mathcal{X}_1$ vektör alanı ve (4.2) elde edilerek ispat tamamlanmış olur. Burada

$$\mathcal{X}_1 = \delta_o U + \varpi_{o1}\tilde{D}_o$$

dır.

$\mathbb{E}^3$ uzayında oskülator Darboux çatısına göre U –Manyetik Eğriler

Tanım 4.2: $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi, oskülator Darboux çatısına göre bir eğri olsun. Eğer U vektör alanı, $\mathbb{E}^3$ uzayında oskülator Darboux çatısına göre, aşağıdaki Lorentz kuvvet denklemini

$$\nabla_{\gamma'} U = \Phi(U) = \mathcal{X}_2 \times U \quad (4.14)$$

sağlarsa, bu durumda γ eğrisine oskülator Darboux çatısına göre U –manyetik eğri denir.

Teorem 4.2: $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi, oskülör Darboux çatısına göre birim hızlı bir U -manyetik eğri olsun. Bu durumda, oskülör Darboux çatısına göre Lorentz kuvvet aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{bmatrix} \Phi(\tilde{D}_o) \\ \Phi(U) \\ \Phi(Y_o) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varpi_{o2} \\ 0 & 0 & \mu_0 \\ -\varpi_{o2} & -\mu_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{D}_o \\ U \\ Y_o \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Burada , $\varpi_{o2} = \langle \Phi(\tilde{D}_o), Y_o \rangle$ biçiminde tanımlanan bir fonksiyondur.

İspat. $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi, Öklidyen 3-uzayda oskülör Darboux çatısına göre birim hızlı bir U -manyetik eğri olsun. Bu durumda (4.14) yardımıyla,

$$\nabla_{\gamma'} U = \Phi(U) = \mu_0 Y_o \quad (4.16)$$

dır. Aynı zamanda

$$\Phi(\tilde{D}_o) \in \text{Span}\{\tilde{D}_o, U, Y_o\}$$

olduğundan

$$\Phi(\tilde{D}_o) = r_{o1}\tilde{D}_o + r_{o2}U + r_{o3}Y_o \quad (4.17)$$

dır. (4.16) ve (4.17) kullanılarak,

$$r_{o1} = \langle \Phi(\tilde{D}_o), \tilde{D}_o \rangle = 0 \quad (4.18)$$

$$r_{o2} = \langle \Phi(\tilde{D}_o), U \rangle = -\langle \Phi(U), \tilde{D}_o \rangle = -\langle \mu_0 Y_o, \tilde{D}_o \rangle = 0 \quad (4.19)$$

$$r_{o3} = \langle \Phi(\tilde{D}_o), Y_o \rangle = \varpi_{o2} \quad (4.20)$$

elde edilir. (4.16), (4.17), (4.18), (4.19) ve (4.20) kullanılarak,

$$\Phi(\tilde{D}_o) = \varpi_{o2} Y_o \quad (4.21)$$

bulunur. Benzer olarak,

$$\Phi(Y_o) \in \text{Span}\{\tilde{D}_o, U, Y_o\}$$

olduğundan

$$\Phi(Y_o) = v_{o1}\tilde{D}_o + v_{o2}U + v_{o3}Y_o \quad (4.22)$$

dır. (4.16) ve (4.22) denklemleri kullanılarak

$$v_{o1} = \langle \Phi(Y_o), \tilde{D}_o \rangle = -\langle \Phi(\tilde{D}_o), Y_o \rangle = -\varpi_{o2} \quad (4.23)$$

$$v_{o2} = \langle \Phi(Y_o), U \rangle = -\langle \Phi(U), Y_o \rangle = -\langle \mu_o Y_o, Y_o \rangle = -\mu_o \quad (4.24)$$

$$v_{o3} = \langle \Phi(Y_o), Y_o \rangle = 0 \quad (4.25)$$

elde edilir. (4.16), (4.22), (4.23), (4.24) ve (4.25) kullanılarak,

$$\Phi(Y_o) = -\varpi_{o2}\tilde{D}_o - \mu_o U \quad (4.26)$$

bulunur. Böylece (4.26), (4.21) ve (4.26) denklemleri yardımıyla $\mathcal{X}_2$ vektör alanı ve (4.15) elde edilerek ispat tamamlanmış olur. Burada

$$\mathcal{X}_2 = \mu_o \tilde{D}_o - \varpi_{o2} U.$$

$\mathbb{E}^3$ uzayında oskülator Darboux çatısına göre Y_o –Manyetik Eğriler

Tanım 4.3: $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi, oskülator Darboux çatısına göre bir eğri olsun. Eğer Y_o vektör alanı, $\mathbb{E}^3$ uzayında oskülatör Darboux çatısına göre, aşağıdaki Lorentz kuvvet denklemini

$$\nabla_{\gamma'} Y_o = \Phi(Y_o) = \mathcal{X}_3 \times Y_o = \delta_o \tilde{D}_o - \mu_o U \quad (4.27)$$

sağlarsa, bu durumda γ eğrisine oskülator Darboux çatısına göre Y_o –manyetik eğri denir.

Teorem 4.3: $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi, oskülator Darboux çatısına göre birim hızlı bir Y_o –manyetik eğri olsun. Bu durumda, oskülatör Darboux çatısının Lorentz kuvvet denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{bmatrix} \Phi(\tilde{D}_o) \\ \Phi(U) \\ \Phi(Y_o) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varpi_{o3} & -\delta_o \\ -\varpi_{o3} & 0 & \mu_o \\ \delta_o & -\mu_o & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{D}_o \\ U \\ Y_o \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Burada, $\varpi_{o3} = \langle \Phi(\tilde{D}_o), U \rangle$ biçiminde tanımlanan bir fonksiyondur.

İspat. $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi, Öklidyen 3-uzayda oskülator Darboux çatısına göre birim hızlı bir Y_o –manyetik eğri olsun. Bu durumda (4.27) yardımıyla,

$$\nabla_{\gamma'} Y_o = \Phi(Y_o) = \delta_o \tilde{D}_o - \mu_o U \quad (4.29)$$

dır. Aynı zamanda

$$\Phi(\tilde{D}_o) \in \text{Span}\{\tilde{D}_o, U, Y_o\}$$

olduğundan

$$\Phi(\tilde{D}_o) = y_{o1}\tilde{D}_o + y_{o2}U + y_{o3}Y_o \quad (4.30)$$

dır. (4.29) ve (4.30) kullanılarak,

$$y_{o1} = \langle \Phi(\tilde{D}_o), \tilde{D}_o \rangle = 0 \quad (4.31)$$

$$y_{o2} = \langle \Phi(\tilde{D}_o), U \rangle = \varpi_{o3} \quad (4.32)$$

$$y_{o3} = \langle \Phi(\tilde{D}_o), Y_o \rangle = -\langle \Phi(Y_o), \tilde{D}_o \rangle = -\langle \delta_0 \tilde{D}_o - \mu_o U, \tilde{D}_o \rangle = -\delta_0 \quad (4.33)$$

elde edilir. (4.29), (4.30), (4.31), (4.32) ve (4.33) kullanılarak,

$$\Phi(\tilde{D}_o) = \varpi_{o3} U - \delta_0 Y_o \quad (4.34)$$

elde edilir. Benzer olarak,

$$\Phi(U) \in \text{Span}\{\tilde{D}_o, U, Y_o\}$$

olduğundan

$$\Phi(U) = z_{o1} \tilde{D}_o + z_{o2} U + z_{o3} Y_o \quad (4.35)$$

dır. (4.29) ve (4.35) denklemleri kullanılarak

$$z_{o1} = \langle \Phi(U), \tilde{D}_o \rangle = -\langle \Phi(\tilde{D}_o), U \rangle = -\varpi_{o3} \quad (4.36)$$

$$z_{o2} = \langle \Phi(U), U \rangle = 0 \quad (4.37)$$

$$z_{o3} = \langle \Phi(U), Y_o \rangle = -\langle \Phi(Y_o), U \rangle = -\langle \delta_0 \tilde{D}_o - \mu_o U, U \rangle = \mu_o \quad (4.38)$$

elde edilir. (4.29), (4.35), (4.36), (4.37) ve (4.38) denklemleri kullanılarak,

$$\Phi(U) = -\varpi_{o3} \tilde{D}_o + \mu_o Y_o \quad (4.39)$$

bulunur. Böylece (4.29), (4.34) ve (4.39) denklemleri yardımıyla $\mathcal{X}_3$ vektör alanı ve (4.28) elde edilerek ispat tamamlanmış olur. Burada

$$\mathcal{X}_3 = \mu_o \tilde{D}_o + \delta_0 U + \varpi_{o3} Y_o$$

dır.

4.2. $\mathbb{E}^3$ Uzayında Normal Darboux Çatısına Göre Manyetik Eğriler

Bu kesimde, normal Darboux çatısına göre $\tilde{D}_n$, T ve Y_n —manyetik eğriler incelenecektir.

$\mathbb{E}^3$ uzayında normal Darboux çatısına göre $\tilde{D}_n$ —Manyetik Eğriler

Tanım 4.4: $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi, normal Darboux çatısına göre bir eğri olsun. Eğer $\tilde{D}_n$ vektör alanı, $\mathbb{E}^3$ uzayında normal Darboux çatısına göre, aşağıdaki Lorentz kuvvet denklemini

$$\nabla_{\gamma'} \tilde{D}_n = \Phi(\tilde{D}_n) = \mathcal{Y}_1 \times \tilde{D}_n \quad (4.40)$$

sağlarsa bu durumda γ eğrisine normal Darboux çatısına göre $\tilde{D}_n$ —manyetik eğri denir.

Teorem 4.4: $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi, normal Darboux çatısına göre birim hızlı bir $\tilde{D}_n$ —manyetik eğri olsun. Bu durumda, normal Darboux çatısına göre Lorentz kuvvet denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{bmatrix} \Phi(\tilde{D}_n) \\ \Phi(T) \\ \Phi(Y_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\delta_n \\ 0 & 0 & \varpi_{n1} \\ \delta_n & -\varpi_{n1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{D}_n \\ T \\ Y_n \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Burada , $\varpi_{n1} = \langle \Phi(T), Y_n \rangle$ biçiminde tanımlanan bir fonksiyondur.

İspat. $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi, Öklidyen 3-uzayda normal Darboux çatısına göre birim hızlı bir $\tilde{D}_n$ —manyetik eğri olsun. Bu durumda (4.40) yardımıyla,

$$\nabla_{\gamma'} \tilde{D}_n = \Phi(\tilde{D}_n) = -\delta_n Y_n \quad (4.42)$$

dır. Aynı zamanda

$$\Phi(T_n) \in \text{Span}\{\tilde{D}_n, T, Y_n\}$$

olduğundan

$$\Phi(T_n) = p_{n1} \tilde{D}_n + p_{n2} T + p_{n3} Y_n \quad (4.43)$$

dır. (4.42) ve (4.43) denklemleri kullanılarak,

$$p_{n1} = \langle \Phi(T), \tilde{D}_n \rangle = -\langle \Phi(\tilde{D}_n), T \rangle = 0 \quad (4.44)$$

$$p_{n2} = \langle \Phi(T), T \rangle = 0 \quad (4.45)$$

$$p_{n3} = \langle \Phi(T), Y_n \rangle = \varpi_{n1} \quad (4.46)$$

elde edilir. (4.42), (4.43), (4.44), (4.45) ve (4.46) kullanılarak,

$$\Phi(T) = \varpi_{n1} Y_n \quad (4.47)$$

elde edilir. Benzer olarak,

$$\Phi(Y_n) \in \text{Span}\{\tilde{D}_n, T, Y_n\}$$

olduğundan

$$\Phi(Y_n) = q_{n1} \tilde{D}_n + q_{n2} T + q_{n3} Y_n \quad (4.48)$$

dır. (4.42) ve (4.48) denklemleri kullanılarak

$$q_{n1} = \langle \Phi(Y_n), \tilde{D}_n \rangle = -\langle \Phi(\tilde{D}_n), Y_n \rangle = \delta_n \quad (4.49)$$

$$q_{n2} = \langle \Phi(Y_n), T \rangle = -\langle \Phi(T), Y_n \rangle = -\varpi_{n1} \quad (4.50)$$

$$q_{n3} = \langle \Phi(Y_n), Y_n \rangle = 0 \quad (4.51)$$

elde edilir. (4.42), (4.48), (4.49), (4.50) ve (4.51) denklemleri kullanılarak,

$$\Phi(Y_n) = \delta_n \tilde{D}_n - \varpi_{n1} T \quad (4.52)$$

bulunur. Böylece (4.42), (4.47) ve (4.52) denklemleri yardımıyla $\mathcal{Y}_1$ vektör alanı ve (4.41) elde edilerek ispat tamamlanmış olur. Burada

$$\mathcal{Y}_1 = \delta_n T + \varpi_{n1} \tilde{D}_n$$

dır.

$\mathbb{E}^3$ uzayında normal Darboux çatısına göre T -Manyetik Eğriler

Tanım 4.5: $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi, normal Darboux çatısına göre bir eğri olsun. Eğer T vektör alanı, $\mathbb{E}^3$ uzayında normal Darboux çatısına göre, aşağıdaki Lorentz kuvvet denklemini

$$\nabla_{\gamma'} T = \Phi(T) = \mathcal{Y}_2 \times T \quad (4.53)$$

sağlarsa, bu durumda γ eğrisine normal Darboux çatısına göre T -manyetik eğri denir.

Teorem 4.5: $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi, normal Darboux çatısına göre birim hızlı bir T -manyetik eğri olsun. Bu durumda, normal Darboux çatısına göre Lorentz kuvvet denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{bmatrix} \Phi(\tilde{D}_n) \\ \Phi(T) \\ \Phi(Y_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varpi_{n2} \\ 0 & 0 & \mu_n \\ -\varpi_{n2} & -\mu_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{D}_n \\ T \\ Y_n \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

Burada, $\varpi_{n2} = \langle \Phi(\tilde{D}_n), Y_n \rangle$ biçiminde tanımlanan bir fonksiyondur.

İspat. $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi, Öklidyen 3-uzayda normal Darboux çatısına göre birim hızlı bir T -manyetik eğri olsun. Bu durumda (4.53) yardımıyla,

$$\nabla_{\gamma'} T = \Phi(T) = \mu_n Y_n \quad (4.55)$$

dır. Aynı zamanda

$$\Phi(\tilde{D}_n) \in \text{Span}\{\tilde{D}_n, T, Y_n\}$$

olduğundan

$$\Phi(\tilde{D}_n) = r_{n1} \tilde{D}_n + r_{n2} T + r_{n3} Y_n \quad (4.56)$$

dır. (4.55) ve (4.56) denklemleri kullanılarak,

$$r_{n1} = \langle \Phi(\tilde{D}_n), \tilde{D}_n \rangle = 0 \quad (4.57)$$

$$r_{n2} = \langle \Phi(\tilde{D}_n), T \rangle = - \langle \Phi(T), \tilde{D}_n \rangle = - \langle \mu_n Y_n, \tilde{D}_n \rangle = 0 \quad (4.58)$$

$$r_{n3} = \langle \Phi(\tilde{D}_n), Y_n \rangle = \varpi_{n2} \quad (4.59)$$

elde edilir. (4.55), (4.56), (4.57), (4.58) ve (4.59) kullanılarak,

$$\Phi(\tilde{D}_n) = \varpi_2 Y_n \quad (4.60)$$

elde edilir. Benzer olarak,

$$\Phi(Y_n) \in \text{Span}\{\tilde{D}_n, T, Y_n\}$$

olduğundan

$$\Phi(Y_n) = v_{n1} \tilde{D}_n + v_{n2} T + v_{n3} Y_n \quad (4.61)$$

dır. (4.55) ve (4.61) denklemleri kullanılarak

$$v_{n1} = \langle \Phi(Y_n), \tilde{D}_n \rangle = - \langle \Phi(\tilde{D}_n), Y_n \rangle = -\varpi_{n2} \quad (4.62)$$

$$v_{n2} = \langle \Phi(Y_n), T \rangle = - \langle \Phi(T), Y_n \rangle = - \langle \mu_n Y_n, Y_n \rangle = -\mu_n \quad (4.63)$$

$$v_{n3} = \langle \Phi(Y_n), Y_n \rangle = 0 \quad (4.64)$$

elde edilir. (4.55), (4.61), (4.62), (4.63) ve (4.64) denklemleri kullanılarak,

$$\Phi(Y_n) = -\varpi_{n2} \tilde{D}_n - \mu_n T \quad (4.65)$$

bulunur. Böylece (4.55), (4.60) ve (4.65) denklemleri yardımıyla $\mathcal{Y}_2$ vektör alanı ve (4.54) elde edilerek ispat tamamlanmış olur. Burada

$$\mathcal{Y}_2 = \mu_n \tilde{D}_n - \varpi_{n2} T.$$

$\mathbb{E}^3$ uzayında normal Darboux çatısına göre Y_n —Manyetik Eğriler

Tanım 4.6: $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi, normal Darboux çatısına göre bir eğri olsun. Eğer Y_n vektör alanı, $\mathbb{E}^3$ uzayında normal Darboux çatısına göre, aşağıdaki Lorentz kuvvet denklemini

$$\nabla_{\gamma'} Y_n = \Phi(Y_n) = \mathcal{Y}_3 \times Y_n = \delta_n \tilde{D}_n - \mu_n T \quad (4.66)$$

sağlarsa, bu durumda γ eğrisine normal Darboux çatısına göre Y_n —manyetik eğri denir.

Teorem 4.7: $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi, normal Darboux çatısına göre birim hızlı bir Y_n —manyetik eğri olsun. Bu durumda, normal Darboux çatısına göre Lorentz kuvvet denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{bmatrix} \Phi(\tilde{D}_n) \\ \Phi(T) \\ \Phi(Y_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varpi_{n3} & -\delta_n \\ -\varpi_{n3} & 0 & \mu_n \\ \delta_n & -\mu_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{D}_n \\ T \\ Y_n \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

Burada , $\varpi_{n3} = \langle \Phi(\tilde{D}_n), T \rangle$ biçiminde tanımlanan bir fonksiyondur.

İspat. $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi, Öklidyen 3-uzayda normal Darboux çatısına göre birim hızlı bir Y_n -manyetik eğri olsun. Bu durumda (4.66) yardımıyla,

$$\nabla_{\gamma'} Y_n = \Phi(Y_n) = \delta_n \tilde{D}_n - \mu_n T \quad (4.68)$$

dır. Aynı zamanda

$$\Phi(\tilde{D}_n) \in \text{Span}\{\tilde{D}_n, T, Y_n\}$$

olduğundan

$$\Phi(\tilde{D}_n) = y_{n1} \tilde{D}_n + y_{n2} T + y_{n3} Y_n \quad (4.69)$$

dır. (4.68) ve (4.69) kullanılarak,

$$y_{n1} = \langle \Phi(\tilde{D}_n), \tilde{D}_n \rangle = 0 \quad (4.70)$$

$$y_{n2} = \langle \Phi(\tilde{D}_n), T \rangle = \varpi_{n3} \quad (4.71)$$

$$y_{n3} = \langle \Phi(\tilde{D}_n), Y_n \rangle = -\langle \Phi(Y_n), \tilde{D}_n \rangle = -\langle \delta_n \tilde{D}_n - \mu_n T, \tilde{D}_n \rangle = -\delta_n \quad (4.72)$$

elde edilir. (4.68), (4.69), (4.70), (4.71) ve (4.72) kullanılarak

$$\Phi(\tilde{D}_n) = \varpi_{n3} T - \delta_n Y_n \quad (4.73)$$

bulunur. Benzer olarak,

$$\Phi(T) \in \text{Span}\{\tilde{D}_n, T, Y_n\}$$

olduğundan

$$\Phi(T) = z_{n1} \tilde{D}_n + z_{n2} T + z_{n3} Y_n \quad (4.74)$$

dır. (4.68) ve (4.74) denklemleri kullanılarak

$$z_{n1} = \langle \Phi(T), \tilde{D}_n \rangle = -\langle \Phi(\tilde{D}_n), T \rangle = -\varpi_{n3} \quad (4.75)$$

$$z_{n2} = \langle \Phi(T), T \rangle = 0 \quad (4.76)$$

$$z_{n3} = \langle \Phi(T), Y_n \rangle = -\langle \Phi(Y_n), T \rangle = -\langle \delta_n \tilde{D}_n - \mu_n T, T \rangle = \mu_n \quad (4.77)$$

elde edilir. (4.68), (4.74), (4.75), (4.76) ve (4.77) kullanılarak,

$$\Phi(T) = -\varpi_{n3} \tilde{D}_n + \mu_n Y_n \quad (4.78)$$

bulunur. Böylece (4.68), (4.73) ve (4.78) denklemleri yardımıyla $\mathcal{Y}_3$ vektör alanı ve (4.67) elde edilerek ispat tamamlanmış olur. Burada

$$\mathcal{Y}_3 = \mu_n \tilde{D}_n + \delta_n T + \varpi_{n3} Y_n$$

dır.

4.3. $\mathbb{E}^3$ Öklidyen 3-uzayda Rektifyen Darboux Çatısına Göre Manyetik Eğriler

Bu kesimde, rektifyen Darboux çatısına göre $\tilde{D}_r$, V ve Y_r —manyetik eğriler incelenecektir.

$\mathbb{E}^3$ uzayında rektifyen Darboux çatısına göre $\tilde{D}_r$ -manyetik Eğriler

Tanım 4.8: $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi, rektifyen Darboux çatısına göre bir eğri olsun. Eğer $\tilde{D}_r$ vektör alanı, $\mathbb{E}^3$ uzayında rektifyen Darboux çatısına göre, aşağıdaki Lorentz kuvvet denklemini

$$\nabla_{\gamma'} \tilde{D}_r = \Phi(\tilde{D}_r) = \mathcal{Z}_1 \times \tilde{D}_r \quad (4.79)$$

sağlarsa bu durumda γ eğrisine rektifyen Darboux çatısına göre $\tilde{D}_r$ —manyetik eğri denir.

Teorem 4.8: $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi, rektifyen Darboux çatısına göre birim hızlı bir $\tilde{D}_r$ —manyetik eğri olsun. Bu durumda, rektifyen Darboux çatısına göre Lorentz kuvvet denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{bmatrix} \Phi(\tilde{D}_r) \\ \Phi(V) \\ \Phi(Y_r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\delta_r \\ 0 & 0 & \varpi_{r1} \\ \delta_r & -\varpi_{r1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{D}_r \\ V \\ Y_r \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

Burada, $\varpi_{r1} = \langle \Phi(V), Y_r \rangle$ biçiminde tanımlanan bir bir fonksiyondur.

İspat. $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi, Öklidyen 3-uzayda rektifyen Darboux çatısına göre birim hızlı bir $\tilde{D}_r$ —manyetik eğri olsun. Bu durumda (4.79) yardımıyla,

$$\nabla_{\gamma'} \tilde{D}_r = \Phi(\tilde{D}_r) = -\delta_r Y_r \quad (4.81)$$

dır. Aynı zamanda

$$\Phi(V) \in \text{Span}\{\tilde{D}_r, V, Y_r\}$$

olduğundan

$$\Phi(V) = p_{r1} \tilde{D}_r + p_{r2} V + p_{r3} Y_r \quad (4.82)$$

dır. (4.81) ve (4.82) denklemleri kullanılarak,

$$p_{r1} = \langle \Phi(V), \tilde{D}_r \rangle = -\langle \Phi(\tilde{D}_r), V \rangle = 0 \quad (4.83)$$

$$p_{r2} = \langle \Phi(V), V \rangle = 0 \quad (4.84)$$

$$p_{r3} = \langle \Phi(V), Y_r \rangle = \varpi_{r1} \quad (4.85)$$

elde edilir. (4.81), (4.82), (4.83), (4.84) ve (4.85) kullanılarak,

$$\Phi(V) = \varpi_{r1} Y_r \quad (4.86)$$

bulunur. Benzer olarak,

$$\Phi(Y_r) \in \text{Span}\{\tilde{D}_r, V, Y_r\}$$

olduğundan

$$\Phi(Y_r) = q_{r1}\tilde{D}_r + q_{r2}V + q_{r3}Y_r \quad (4.87)$$

dır. (4.81) ve (4.87) denklemleri kullanılarak

$$q_{r1} = \langle \Phi(Y_r), \tilde{D}_r \rangle = -\langle \Phi(\tilde{D}_r), Y_r \rangle = \delta_r \quad (4.88)$$

$$q_{r2} = \langle \Phi(Y_r), V \rangle = -\langle \Phi(V), Y_r \rangle = -\varpi_{r1} \quad (4.89)$$

$$q_{r3} = \langle \Phi(Y_r), Y_r \rangle = 0 \quad (4.90)$$

elde edilir. (4.81), (4.87), (4.88), (4.89) ve (4.90) denklemleri kullanılarak,

$$\Phi(Y_r) = \delta_r \tilde{D}_r - \varpi_{r1} V \quad (4.91)$$

bulunur. Böylece (4.81), (4.86) ve (4.91) denklemleri yardımıyla $\mathcal{Z}_1$ vektör alanı ve (4.80) elde edilerek ispat tamamlanmış olur. Burada

$$\mathcal{Z}_1 = \delta_r V + \varpi_{r1} \tilde{D}_r.$$

$\mathbb{E}^3$ uzayında rektifyen Darboux çatısına göre V –Manyetik Eğriler

Tanım 4.9: $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi, rektifyen Darboux çatısına göre bir eğri olsun. Eğer V vektör alanı, $\mathbb{E}^3$ uzayında rektifyen Darboux çatısına göre, aşağıdaki Lorentz kuvvet denklemini

$$\nabla_{\gamma'} V = \Phi(V) = \mathcal{Z}_2 \times V \quad (4.92)$$

sağlar ise, bu durumda γ eğrisine rektifyen Darboux çatısına göre V –manyetik eğri denir.

Teorem 4.9: $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi, rektifyen Darboux çatısına göre birim hızlı bir V –manyetik eğri olsun. Bu durumda, rektifyen Darboux çatısına göre Lorentz kuvvet denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{bmatrix} \Phi(\tilde{D}_r) \\ \Phi(V) \\ \Phi(Y_r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varpi_{r2} \\ 0 & 0 & \mu_r \\ -\varpi_{r2} & -\mu_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{D}_r \\ V \\ Y_r \end{bmatrix} \quad (4.93)$$

Burada, $\varpi_{r2} = \langle \Phi(\tilde{D}_r), Y_r \rangle$ biçiminde tanımlanan bir fonksiyondur.

İspat. $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi, Öklidyen 3-uzayda rektifyen Darboux çatısına göre birim hızlı bir V –manyetik eğri olsun. Bu durumda (4.92) yardımıyla,

$$\nabla_{\gamma'} V = \Phi(V) = \mu_r Y_r \quad (4.94)$$

dır. Aynı zamanda

$$\Phi(\tilde{D}_r) \in \text{Span}\{\tilde{D}_r, V, Y_r\}$$

olduğundan

$$\Phi(\tilde{D}_r) = r_{r1}\tilde{D}_r + r_{r2}V + r_{r3}Y_r \quad (4.95)$$

dır. (4.94) ve (4.95) denklemleri kullanılarak,

$$r_{r1} = \langle \Phi(\tilde{D}_r), \tilde{D}_r \rangle = 0 \quad (4.96)$$

$$r_{r2} = \langle \Phi(\tilde{D}_r), V \rangle = -\langle \Phi(V), \tilde{D}_r \rangle = -\langle \mu_r Y_r, \tilde{D}_r \rangle = 0 \quad (4.97)$$

$$r_{r3} = \langle \Phi(\tilde{D}_r), Y_r \rangle = \varpi_{r2} \quad (4.98)$$

elde edilir. (4.94), (4.95), (4.96), (4.97) ve (4.98) kullanılarak,

$$\Phi(\tilde{D}_r) = \varpi_{r2} Y_r \quad (4.99)$$

Benzer olarak,

$$\Phi(Y_r) \in \text{Span}\{\tilde{D}_r, V, Y_r\}$$

olduğundan

$$\Phi(Y_r) = v_{r1}\tilde{D}_r + v_{r2}V + v_{r3}Y_r \quad (4.100)$$

dır. (4.94) ve (4.100) denklemleri kullanılarak

$$v_{r1} = \langle \Phi(Y_r), \tilde{D}_r \rangle = -\langle \Phi(\tilde{D}_r), Y_r \rangle = -\varpi_{r2} \quad (4.101)$$

$$v_{r2} = \langle \Phi(Y_r), V \rangle = -\langle \Phi(V), Y_r \rangle = -\langle \mu_r Y_r, Y_r \rangle = -\mu_r \quad (4.102)$$

$$v_{r3} = \langle \Phi(Y_r), Y_r \rangle = 0 \quad (4.103)$$

elde edilir. (4.94), (4.100), (4.101), (4.102) ve (4.103) denklemleri kullanılarak,

$$\Phi(Y_r) = -\varpi_{r2}\tilde{D}_r - \mu_r V \quad (4.104)$$

bulunur. Böylece, (4.94), (4.99) ve (4.104) denklemleri yardımıyla $\mathcal{Z}_2$ vektör alanı ve (4.93) elde edilerek ispat tamamlanmış olur. Burada

$$\mathcal{Z}_2 = \mu_r \tilde{D}_r - \varpi_{r2} V.$$

$\mathbb{E}^3$ uzayında rektifyen Darboux çatısına göre Y_r —Manyetik Eğriler

Tanım 4.10: $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi, rektifyen Darboux çatısına göre bir eğri olsun. Eğer Y_r vektör alanı, $\mathbb{E}^3$ uzayında rektifyen Darboux çatısına göre, aşağıdaki Lorentz kuvvet denklemini

$$\nabla_{\gamma'} Y_r = \Phi(Y_r) = \mathcal{Z}_3 \times Y_r = \delta_r \tilde{D}_r - \mu_r V \quad (4.105)$$

sağlarsa, bu durumda γ eğrisine rektifyen Darboux çatısına göre Y_r —manyetik eğri denir.

Teorem 4.10: $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi, rektifyen Darboux çatısına göre birim hızlı bir Y_r —manyetik eğri olsun. Bu durumda, rektifyen Darboux çatısına göre Lorentz kuvvet denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{bmatrix} \Phi(\tilde{D}_r) \\ \Phi(V) \\ \Phi(Y_r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varpi_{r3} & -\delta_r \\ -\varpi_{r3} & 0 & \mu_r \\ \delta_r & -\mu_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{D}_r \\ V \\ Y_r \end{bmatrix} \quad (4.106)$$

Burada, $\varpi_{r3} = \langle \Phi(\tilde{D}_r), V \rangle$ biçiminde tanımlanan bir fonksiyondur.

İspat. $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi, Öklidyen 3-uzayda rektifyen Darboux çatısına göre birim hızlı bir Y_r —manyetik eğri olsun. Bu durumda (4.105) yardımıyla,

$$\nabla_{\gamma'} Y_r = \Phi(Y_r) = \delta_r \tilde{D}_r - \mu_r V \quad (4.107)$$

dır. Aynı zamanda

$$\Phi(\tilde{D}_r) \in \text{Span}\{\tilde{D}_r, V, Y_r\}$$

olduğundan

$$\Phi(\tilde{D}_r) = y_{r1} \tilde{D}_r + y_{r2} V + y_{r3} Y_r \quad (4.108)$$

dır. (4.107) ve (4.108) denklemleri kullanılarak,

$$y_{r1} = \langle \Phi(\tilde{D}_r), \tilde{D}_r \rangle = 0 \quad (4.109)$$

$$y_{r2} = \langle \Phi(\tilde{D}_r), V \rangle = \varpi_{r3} \quad (4.110)$$

$$y_{r3} = \langle \Phi(\tilde{D}_r), Y_r \rangle = -\langle \Phi(Y_r), \tilde{D}_r \rangle = -\langle \delta_r \tilde{D}_r - \mu_r V, \tilde{D}_r \rangle = -\delta_r \quad (4.111)$$

elde edilir. (4.107), (4.108), (4.109), (4.110) ve (4.111) kullanılarak,

$$\Phi(\tilde{D}_r) = \varpi_{r3} V - \delta_r Y_r \quad (4.112)$$

elde edilir. Benzer olarak,

$$\Phi(V) \in \text{Span}\{\tilde{D}_r, V, Y_r\}$$

olduğundan

$$\Phi(V) = z_{r1} \tilde{D}_r + z_{r2} V + z_{r3} Y_r \quad (4.113)$$

dır. (4.107) ve (4.113) denklemleri kullanılarak,

$$z_{r1} = \langle \Phi(V), \tilde{D}_r \rangle = -\langle \Phi(\tilde{D}_r), V \rangle = -\varpi_{r3} \quad (4.114)$$

$$z_{r2} = \langle \Phi(V), V \rangle = 0 \quad (4.115)$$

$$z_{r3} = \langle \Phi(V), Y_r \rangle = -\langle \Phi(Y_r), V \rangle = -\langle \delta_n \tilde{D}_r - \mu_r V, V \rangle = \mu_r \quad (4.116)$$

elde edilir. (4.107), (4.113), (4.114), (4.115) ve (4.116) denklemleri kullanılarak,

$$\Phi(V) = -\varpi_{r3} \tilde{D}_r + \mu_r Y_r \quad (4.117)$$

bulunur. Böylece (4.107), (4.112) ve (4.117) denklemleri yardımıyla $\mathcal{Z}_3$ vektör alanı ve (4.106) elde edilerek ispat tamamlanmış olur. Burada

$$\mathcal{Z}_3 = \mu_r \tilde{D}_r + \delta_r V + \varpi_{r3} Y_r$$

dır.

5. $\mathbb{E}^3$ UZAYINDA OSKÜLATÖR, NORMAL VE REKTİFYEN DARBOUX ÇATILARINA GÖRE NLS İLE İLİŞKİLİ ÜÇ SINIF

Bu kesimde, Öklidyen 3-uzayda oskülatör, normal ve rektifyen Darboux çatılarına göre doğrusal olmayan Schrödinger denklemi (NLS) ile ilişkili üç sınıf araştırılacaktır.

5.1. $\mathbb{E}^3$ Uzayında Oskülatör Darboux Çatısı İçin Yeni Sınıflar

Bu kesimde, Öklidyen 3-uzayda oskülatör Darboux çatısına göre NLS denklemi ile ilgili üç sınıf incelenecektir.

$\mathbb{E}^3$ Uzayında Oskülatör Darboux Çatısı İçin I.sınıf

Öklidyen 3-uzay $\mathbb{E}^3$ de oskülatör Darboux çatısına göre NLS denklemi ile ilgili birinci sınıf için yeni çatı $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \overline{\mathcal{A}}_2\}$ aşağıdaki gibi sunulur:

$$\mathcal{A}_1 = \tilde{D}_o \quad (5.1)$$

$$\mathcal{A}_2 = \frac{(Y_o + iU)}{\sqrt{2}} e^{-i \int \mu_o} \quad (5.2)$$

$$\overline{\mathcal{A}}_2 = \frac{(Y_o - iU)}{\sqrt{2}} e^{i \int \mu_o}. \quad (5.3)$$

(5.1), (5.2) ve (5.3) kullanılarak, $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \overline{\mathcal{A}}_2\}$ çatısının s yay parametresine göre türevi alındığında

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_{1s} \\ \mathcal{A}_{2s} \\ \overline{\mathcal{A}}_{2s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\overline{\varrho} & -\varrho \\ \varrho & 0 & 0 \\ \overline{\varrho} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_2 \\ \overline{\mathcal{A}}_2 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

elde edilir. Oskülatör Darboux çatısına göre NLS denklemi ile ilgili birinci sınıf için birinci yeni dönüşüm

$$\varrho = \frac{\delta_0}{\sqrt{2}} e^{-i \int \mu_o} \quad (5.5)$$

biçiminde verilir. Ayrıca birinci yeni dönüşümün eşleniği şu şekilde yazılır:

$$\overline{\varrho} = \frac{\delta_0}{\sqrt{2}} e^{i \int \mu_o}. \quad (5.6)$$

$\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \overline{\mathcal{A}}_2\}$ çatısının t zaman evolüsyonu, $\gamma_s = \tilde{D}_o$ ve $\gamma_{ts} = \gamma_{st}$ yardımıyla, (5.5) ve (5.6) kullanılarak $\mathcal{A}_{1t}, \mathcal{A}_{2t}, \overline{\mathcal{A}}_{2t}$ aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_{1t} \\ \mathcal{A}_{2t} \\ \overline{\mathcal{A}}_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i\overline{\varrho}_s & i\varrho_s \\ -i\varrho_s & a_2 & 0 \\ i\overline{\varrho}_s & 0 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_2 \\ \overline{\mathcal{A}}_2 \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

$\mathcal{A}_{2st} = \mathcal{A}_{2ts}$ bağdaşabilirlik şartlarından ve (5.4), (5.7) kullanılarak repulsive tip NLS- denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$i\varrho_t = \varrho_{ss} - i|\varrho|^2 \varrho. \quad (5.8)$$

$\mathbb{E}^3$ Uzayında Oskülatör Darboux Çatısı İçin II.Sınıf.

Öklidyen 3-uzay $\mathbb{E}^3$ de oskülatör Darboux çatısına göre NLS denklemi ile ilgili ikinci sınıf için yeni çatı $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \overline{\mathcal{B}}_2\}$ aşağıdaki gibi sunulur:

$$\mathcal{B}_1 = U \quad (5.9)$$

$$\mathcal{B}_2 = \frac{(Y_o + i\tilde{D}_o)}{\sqrt{2}} e^{i \int \delta_0} \quad (5.10)$$

$$\overline{\mathcal{B}}_2 = \frac{(Y_o - i\tilde{D}_o)}{\sqrt{2}} e^{-i \int \delta_0}. \quad (5.11)$$

(5.9) , (5.10) ve (5.11) kullanılarak $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \overline{\mathcal{B}}_2\}$ çatısının s yay parametresine göre türevi alındığında

$$\begin{bmatrix} \mathcal{B}_{1s} \\ \mathcal{B}_{2s} \\ \overline{\mathcal{B}}_{2s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \overline{\omega} & \omega \\ -\omega & 0 & 0 \\ -\overline{\omega} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{B}_2 \\ \overline{\mathcal{B}}_2 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

elde edilir. Oskülatör Darboux çatısına göre NLS denklemi ile ilgili ikinci sınıf için ikinci yeni dönüşüm

$$\omega = \frac{\mu_o}{\sqrt{2}} e^{i \int \delta_o} \quad (5.13)$$

biçiminde verilir. Ayrıca ikinci yeni dönüşümün eşleniği şu şekilde yazılır:

$$\overline{\omega} = \frac{\mu_o}{\sqrt{2}} e^{-i \int \delta_o} \quad (5.14)$$

$\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \overline{\mathcal{B}}_2\}$ çatısının t zaman evolüsyonu $\gamma_s = U$ ve $\gamma_{ts} = \gamma_{st}$ yardımıyla, (5.13) ve (5.14) kullanılarak $\mathcal{B}_{1t}, \mathcal{B}_{2t}, \overline{\mathcal{B}}_{2t}$ aşağıdaki gibi ifade edilir

$$\begin{bmatrix} \mathcal{B}_{1t} \\ \mathcal{B}_{2t} \\ \overline{\mathcal{B}}_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i\overline{\omega}_s & i\omega_s \\ -i\omega_s & b_2 & 0 \\ i\overline{\omega}_s & 0 & -b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{B}_2 \\ \overline{\mathcal{B}}_2 \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

$\mathcal{B}_{2st} = \overline{\mathcal{B}}_{2ts}$ bağdaşabilirlik şartlarından ve (5.12) ve (5.15) kullanılarak NLS denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\omega_t = i\omega_{ss} + b_2\omega, b_2 = i\omega\overline{\omega} \quad (5.16)$$

$\mathbb{E}^3$ Uzayında Oskülatör Darboux Çatısı İçin III.Sınıf

Öklidyen 3-uzay $\mathbb{E}^3$ de oskülatör Darboux çatısına göre NLS denklemi ile ilgili ikinci sınıf için yeni çatı $\{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \overline{\mathcal{C}}_2\}$ aşağıdaki gibi sunulur:

$$\mathcal{C}_1 = Y_o \quad (5.17)$$

$$\mathcal{C}_2 = \frac{\tilde{D}_o + iU}{\sqrt{2}} \quad (5.18)$$

$$\overline{\mathcal{C}}_2 = \frac{\tilde{D}_o - iU}{\sqrt{2}}. \quad (5.19)$$

(5.17), (5.18) ve (5.19), kullanılarak $\{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \overline{\mathcal{C}}_2\}$ çatısının s yay parametresine göre türevi alındığında

$$\begin{bmatrix} \mathcal{C}_{1s} \\ \mathcal{C}_{2s} \\ \overline{\mathcal{C}}_{2s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varsigma & \overline{\varsigma} \\ -\overline{\varsigma} & 0 & 0 \\ -\varsigma & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{C}_1 \\ \mathcal{C}_2 \\ \overline{\mathcal{C}}_2 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

elde edilir. Oskülatör Darboux çatısına göre NLS denklemi ile ilgili üçüncü sınıf için üçüncü yeni dönüşüm

$$\varsigma = \frac{\delta_o + i\mu_o}{\sqrt{2}} \quad (5.21)$$

biçiminde verilir. Ayrıca üçüncü yeni dönüşümün eşleniği şu şekilde yazılır:

$$\overline{\varsigma} = \frac{\delta_o - i\mu_o}{\sqrt{2}}. \quad (5.22)$$

$\{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \overline{\mathcal{C}}_2\}$ çatısının t zaman evolüsyonu, $\gamma_s = Y_o$ ve $\gamma_{ts} = \gamma_{st}$ yardımıyla $\mathcal{C}_{1t}$ ve (5.22) kullanılarak $\mathcal{C}_{1t}, \mathcal{C}_{2t}, \overline{\mathcal{C}}_{2t}$ aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{C}_{1t} \\ \mathcal{C}_{2t} \\ \overline{\mathcal{C}}_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i\varsigma_s & i\overline{\varsigma}_s \\ -i\overline{\varsigma}_s & c_2 & 0 \\ i\varsigma_s & 0 & -c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{C}_1 \\ \mathcal{C}_2 \\ \overline{\mathcal{C}}_2 \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

$\mathcal{C}_{2st} = \mathcal{C}_{2ts}$ bağdaşabilirlik şartlarından ve (5.20), (5.23) kullanılarak NLS denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\varsigma_t = i\varsigma_{ss} + c_2\varsigma, c_2 = i\varsigma\overline{\varsigma} \quad (5.24)$$

5.2. $\mathbb{E}^3$ Uzayında Normal Darboux Çatısı İçin Yeni Sınıflar

Bu kesimde, Öklidyen 3-uzayda normal Darboux çatısına göre NLS denklemi ile ilgili üç sınıf incelenecektir.

$\mathbb{E}^3$ Uzayında Normal Darboux Çatısı İçin I.sınıf.

Öklidyen 3-uzay $\mathbb{E}^3$ de normal Darboux çatısına göre NLS denklemi ile ilgili birinci sınıf için yeni çatı $\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \overline{\mathcal{D}}_2\}$ aşağıdaki gibi sunulur:

$$\mathcal{D}_1 = \tilde{D}_n \quad (5.25)$$

$$\mathcal{D}_2 = \frac{(Y_n + iT)}{\sqrt{2}} e^{-i \int \mu_n} \quad (5.26)$$

$$\overline{\mathcal{D}}_2 = \frac{(Y_n - iT)}{\sqrt{2}} e^{i \int \mu_n}. \quad (5.27)$$

(5.25), (5.26) ve (5.27) kullanılarak $\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \overline{\mathcal{D}}_2\}$ çatısının s yay parametresine göre türevi alındığında

$$\begin{bmatrix} \mathcal{D}_{1s} \\ \mathcal{D}_{2s} \\ \overline{\mathcal{D}}_{2s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\overline{\varphi} & -\varphi \\ \varphi & 0 & 0 \\ \overline{\varphi} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{D}_1 \\ \mathcal{D}_2 \\ \overline{\mathcal{D}}_2 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

elde edilir. Normal Darboux çatısına göre NLS denklemi ile ilgili birinci sınıf için birinci yeni dönüşüm

$$\varphi = \frac{\delta_n}{\sqrt{2}} e^{-i \int \mu_n} \quad (5.29)$$

biçiminde verilir. Ayrıca birinci yeni dönüşümün eşleniği şu şekilde yazılır:

$$\overline{\varphi} = \frac{\delta_n}{\sqrt{2}} e^{i \int \mu_n} \quad (5.30)$$

$\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \overline{\mathcal{D}}_2\}$ çatısının t zaman evolüsyonu, $\gamma_s = \tilde{D}_n$ ve $\gamma_{ts} = \gamma_{st}$ yardımıyla, (5.29) ve (5.30) kullanılarak $\mathcal{D}_{1t}, \mathcal{D}_{2t}, \overline{\mathcal{D}}_{2t}$ aşağıdaki gibi ifade edilir

$$\begin{bmatrix} \mathcal{D}_{1t} \\ \mathcal{D}_{2t} \\ \overline{\mathcal{D}}_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i\overline{\varphi}_s & i\varphi_s \\ -i\varphi_s & d_2 & 0 \\ i\overline{\varphi}_s & 0 & -d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{D}_1 \\ \mathcal{D}_2 \\ \overline{\mathcal{D}}_2 \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$

$\mathcal{D}_{2st} = \mathcal{D}_{2ts}$ bağdaşabilirlik şartlarından ve (5.28), (5.31) kullanılarak repulsive tip NLS⁻ denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$i\varphi_t = \varphi_{ss} - i|\varphi|^2 \varphi \quad (5.32)$$

$\mathbb{E}^3$ Uzayında Normal Darboux Çatısı İçin II.Sınıf.

Öklidyen 3-uzay $\mathbb{E}^3$ de normal Darboux çatısına göre NLS denklemi ile ilgili ikinci sınıf için yeni çatı $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \overline{\mathcal{E}}_2\}$ aşağıdaki gibi sunulur:

$$\mathcal{E}_1 = T \quad (5.33)$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{(Y_n + i\tilde{D}_n)}{\sqrt{2}} e^{i \int \delta_n} \quad (5.34)$$

$$\overline{\mathcal{E}}_2 = \frac{(Y_n - i\tilde{D}_n)}{\sqrt{2}} e^{-i \int \delta_n}. \quad (5.35)$$

(5.33), (5.34) ve (5.35) kullanılarak $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \bar{\mathcal{E}}_2\}$ çatısının s yay parametresine göre türevi alındığında

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}_{1s} \\ \mathcal{E}_{2s} \\ \bar{\mathcal{E}}_{2s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\theta} & \theta \\ -\theta & 0 & 0 \\ -\bar{\theta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \\ \bar{\mathcal{E}}_2 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

elde edilir. Normal Darboux çatısına göre NLS denklemi ile ilgili ikinci sınıf için ikinci yeni dönüşüm

$$\theta = \frac{\mu_n}{\sqrt{2}} e^{i \int \delta_n} \quad (5.37)$$

biçiminde verilir. Ayrıca ikinci yeni dönüşümün eşleniği şu şekilde yazılır:

$$\bar{\theta} = \frac{\mu_n}{\sqrt{2}} e^{-i \int \delta_n} \quad (5.38)$$

$\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \bar{\mathcal{E}}_2\}$ çatısının t zaman evolüsyonu $\gamma_s = T$ ve $\gamma_{ts} = \gamma_{st}$ yardımıyla, (5.37) ve (5.38) kullanılarak $\mathcal{E}_{1t}, \mathcal{E}_{2t}, \bar{\mathcal{E}}_{2t}$ aşağıdaki gibi ifade edilir

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}_{1t} \\ \mathcal{E}_{2t} \\ \bar{\mathcal{E}}_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i\bar{\theta}_s & i\theta_s \\ -i\theta_s & e_2 & 0 \\ i\bar{\theta}_s & 0 & -e_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \\ \bar{\mathcal{E}}_2 \end{bmatrix}. \quad (5.39)$$

$\mathcal{E}_{2st} = \mathcal{E}_{2ts}$ bağdaşabilirlik şartlarından ve (5.36), (5.39) kullanılarak NLS denklemi aşağıdaki gibi elde edilir

$$\theta_t = i\theta_{ss} + e_2\theta, \quad e_2 = i\theta\bar{\theta} \quad (5.40)$$

$\mathbb{E}^3$ Uzayında Normal Darboux Çatısı İçin III.Sınıf

Öklidyen 3-uzay $\mathbb{E}^3$ de normal Darboux çatısına göre NLS denklemi ile ilgili üçüncü sınıf için yeni çatı $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \bar{\mathcal{F}}_2\}$ aşağıdaki gibi sunulur:

$$\mathcal{F}_1 = Y_n \quad (5.41)$$

$$\mathcal{F}_2 = \frac{\tilde{D}_n + iT}{\sqrt{2}} \quad (5.42)$$

$$\bar{\mathcal{F}}_2 = \frac{\tilde{D}_n - iT}{\sqrt{2}}. \quad (5.43)$$

(5.41), (5.42) ve (5.43) kullanılarak $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \bar{\mathcal{F}}_2\}$ çatısının s yay parametresine göre türevi alındığında

$$\begin{bmatrix} \mathcal{F}_{1s} \\ \mathcal{F}_{2s} \\ \bar{\mathcal{F}}_{2s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\beta} & \beta \\ -\beta & 0 & 0 \\ -\bar{\beta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \\ \bar{\mathcal{F}}_2 \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

elde edilir. Normal Darboux çatısına göre NLS denklemi ile ilgili üçüncü sınıf için üçüncü yeni dönüşüm

$$\beta = \frac{\delta_n + i\mu_n}{\sqrt{2}} \quad (5.45)$$

biçiminde verilir. Ayrıca üçüncü yeni dönüşümün eşleniği şu şekilde yazılır:

$$\bar{\beta} = \frac{\delta_n - i\mu_n}{\sqrt{2}}. \quad (5.46)$$

$\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \bar{\mathcal{F}}_2\}$ çatısının t zaman evolüsyonu, $\gamma_s = Y_n$ ve $\gamma_{ts} = \gamma_{st}$ yardımıyla, (5.45) ve (5.46) kullanılarak $\mathcal{F}_{1t}, \mathcal{F}_{2t}, \bar{\mathcal{F}}_{2t}$ aşağıdaki gibi ifade edilir

$$\begin{bmatrix} \mathcal{F}_{1t} \\ \mathcal{F}_{2t} \\ \bar{\mathcal{F}}_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & i\bar{\beta}_s & -i\beta_s \\ i\beta_s & f_2 & 0 \\ -i\bar{\beta}_s & 0 & -f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \\ \bar{\mathcal{F}}_2 \end{bmatrix}. \quad (5.47)$$

$\mathcal{F}_{2st} = \mathcal{F}_{2ts}$ bağdaşabilirlik şartlarından ve (5.44), (5.47) kullanılarak NLS denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\beta_t = i\beta_{ss} + f_2\beta, f_2 = -i\beta\bar{\beta} \quad (5.48)$$

5.3. $\mathbb{E}^3$ Uzayında Rektifyen Darboux Çatısı İçin Yeni Sınıflar

Bu kesimde, Öklidyen 3-uzayda rektifyen Darboux çatısına göre NLS denklemi ile ilgili üç sınıf incelenecektir.

$\mathbb{E}^3$ Uzayında Rektifyen Darboux Çatısı İçin I.Sınıf.

Öklidyen 3-uzay $\mathbb{E}^3$ de rektifyen Darboux çatısına göre NLS denklemi ile ilgili birinci sınıf için yeni çatı $\{\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \bar{\mathcal{G}}_2\}$ aşağıdaki gibi sunulur:

$$\mathcal{G}_1 = \tilde{D}_r \quad (5.49)$$

$$\mathcal{G}_2 = \frac{(Y_r + iV)}{\sqrt{2}} e^{-i \int \mu_r} \quad (5.50)$$

$$\bar{\mathcal{G}}_2 = \frac{(Y_r - iV)}{\sqrt{2}} e^{i \int \mu_r}. \quad (5.51)$$

(5.49), (5.50) ve (5.51) kullanılarak $\{\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \bar{\mathcal{G}}_2\}$ çatısının s yay parametresine göre türevi alındığında

$$\begin{bmatrix} \mathcal{G}_{1s} \\ \mathcal{G}_{2s} \\ \bar{\mathcal{G}}_{2s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\varkappa & -\varkappa \\ \varkappa & 0 & 0 \\ \varkappa & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{G}_1 \\ \mathcal{G}_2 \\ \bar{\mathcal{G}}_2 \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

elde edilir. Rektifyen Darboux çatısına göre NLS denklemi ile ilgili birinci sınıf için birinci yeni dönüşüm

$$\varkappa = \frac{\delta_r}{\sqrt{2}} e^{-i \int \mu_r} \quad (5.53)$$

biçiminde verilir. Ayrıca birinci yeni dönüşümün eşleniği şu şekilde yazılır:

$$\overline{\kappa} = \frac{\delta_r}{\sqrt{2}} e^{i \int \mu_r}. \quad (5.54)$$

$\{\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \overline{\mathcal{G}}_2\}$ çatısının t zaman evolüsyonu $\gamma_s = \tilde{D}_r$ ve $\gamma_{ts} = \gamma_{st}$ yardımıyla, (5.53) ve (5.54) kullanılarak $\mathcal{G}_{1t}, \mathcal{G}_{2t}, \overline{\mathcal{G}}_{2t}$ aşağıdaki gibi elde edilir

$$\begin{bmatrix} \mathcal{G}_{1t} \\ \mathcal{G}_{2t} \\ \overline{\mathcal{G}}_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i\overline{\kappa}_s & i\kappa_s \\ -i\kappa_s & g_2 & 0 \\ i\overline{\kappa}_s & 0 & -g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{G}_1 \\ \mathcal{G}_2 \\ \overline{\mathcal{G}}_2 \end{bmatrix}. \quad (5.55)$$

$\mathcal{G}_{2st} = \mathcal{G}_{2ts}$ bağdaşabilirlik şartlarından ve (5.52), (5.55) kullanılarak repulsive tip NLS⁻ denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$i\kappa_t = \kappa_{ss} - i|\kappa|^2 \kappa \quad (5.56)$$

$\mathbb{E}^3$ Uzayında Rektifyen Darboux Çatısı İçin II.Sınıf.

Öklidyen 3-uzay $\mathbb{E}^3$ de rektifyen Darboux çatısına göre NLS denklemi ile ilgili ikinci sınıf için yeni çatı $\{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \overline{\mathcal{H}}_2\}$ aşağıdaki gibi sunulur:

$$\mathcal{H}_1 = V \quad (5.57)$$

$$\mathcal{H}_2 = \frac{(Y_r + i\tilde{D}_r)}{\sqrt{2}} e^{i \int \delta_r} \quad (5.58)$$

$$\overline{\mathcal{H}}_2 = \frac{(Y_r - i\tilde{D}_r)}{\sqrt{2}} e^{-i \int \delta_r}. \quad (5.59)$$

(5.57), (5.58) ve (5.59) kullanılarak $\{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \overline{\mathcal{H}}_2\}$ çatısının s yay parametresine göre türevi alındığında

$$\begin{bmatrix} \mathcal{H}_{1s} \\ \mathcal{H}_{2s} \\ \overline{\mathcal{H}}_{2s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \overline{\pi} & \pi \\ -\pi & 0 & 0 \\ -\overline{\pi} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \mathcal{H}_2 \\ \overline{\mathcal{H}}_2 \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

elde edilir. Rektifyen Darboux çatısına göre NLS denklemi ile ilgili ikinci sınıf için ikinci yeni dönüşüm

$$\pi = \frac{\mu_r}{\sqrt{2}} e^{i \int \delta_r} \quad (5.61)$$

biçiminde verilir. Ayrıca ikinci yeni dönüşümün eşleniği şu şekilde yazılır:

$$\overline{\pi} = \frac{\mu_r}{\sqrt{2}} e^{-i \int \delta_r} \quad (5.62)$$

$\{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \overline{\mathcal{H}}_2\}$ çatısının t zaman evolüsyonu $\gamma_s = V$ ve $\gamma_{ts} = \gamma_{st}$ yardımıyla, (5.61) ve (5.62) kullanılarak $\mathcal{H}_{1t}, \mathcal{H}_{2t}, \overline{\mathcal{H}}_{2t}$ aşağıdaki gibi ifade edilir

$$\begin{bmatrix} \mathcal{H}_{1t} \\ \mathcal{H}_{2t} \\ \overline{\mathcal{H}}_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i\overline{\pi}_s & i\pi_s \\ -i\pi_s & h_2 & 0 \\ i\overline{\pi}_s & 0 & -h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \mathcal{H}_2 \\ \overline{\mathcal{H}}_2 \end{bmatrix}. \quad (5.63)$$

$\mathcal{H}_{2st} = \mathcal{H}_{2ts}$ bağdaşabilirlik şartlarından ve (5.60), (5.63) kullanılarak NLS denklemi aşağıdaki gibi elde edilir

$$\pi_t = i\pi_{ss} + h_2\pi, h_2 = i\pi\bar{\pi} \quad (5.64)$$

$\mathbb{E}^3$ Uzayında Rektifyen Darboux Çatısı İçin III.Sınıf

Öklidyen 3-uzay $\mathbb{E}^3$ de rektifyen Darboux çatısına göre NLS denklemi ile ilgili üçüncü sınıf için yeni çatı $\{\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \bar{\mathcal{I}}_2\}$ aşağıdaki gibi sunulur:

$$\mathcal{I}_1 = Y_r \quad (5.65)$$

$$\mathcal{I}_2 = \frac{\tilde{D}_r + iV}{\sqrt{2}} \quad (5.66)$$

$$\bar{\mathcal{I}}_2 = \frac{\tilde{D}_r - iV}{\sqrt{2}}. \quad (5.67)$$

(5.65), (5.66) ve (5.67) kullanılarak $\{\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \bar{\mathcal{I}}_2\}$ çatısının s yay parametresine göre türevi alındığında

$$\begin{bmatrix} \mathcal{I}_{1s} \\ \mathcal{I}_{2s} \\ \bar{\mathcal{I}}_{2s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\alpha} & \alpha \\ -\alpha & 0 & 0 \\ -\bar{\alpha} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_2 \\ \bar{\mathcal{I}}_2 \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

elde edilir. Rektifyen Darboux çatısına göre NLS denklemi ile ilgili üçüncü sınıf için üçüncü yeni dönüşüm

$$\alpha = \frac{\delta_r + i\mu_r}{\sqrt{2}} \quad (5.69)$$

biçiminde verilir. Ayrıca üçüncü yeni dönüşümün eşleniği şu şekilde yazılır:

$$\bar{\alpha} = \frac{\delta_r - i\mu_r}{\sqrt{2}}. \quad (5.70)$$

$\{\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \bar{\mathcal{I}}_2\}$ çatısının t zaman evolüsyonu $\gamma_s = Y_r$ ve $\gamma_{ts} = \gamma_{st}$ yardımıyla, (5.69) ve (5.70) kullanılarak $\mathcal{I}_{1t}, \mathcal{I}_{2t}, \bar{\mathcal{I}}_{2t}$ aşağıdaki gibi ifade edilir

$$\begin{bmatrix} \mathcal{I}_{1t} \\ \mathcal{I}_{2t} \\ \bar{\mathcal{I}}_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & i\bar{\alpha}_s & -i\alpha_s \\ i\alpha_s & j_2 & 0 \\ -i\bar{\alpha}_s & 0 & -j_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_2 \\ \bar{\mathcal{I}}_2 \end{bmatrix}. \quad (5.71)$$

$\mathcal{I}_{2st} = \mathcal{I}_{2ts}$ bağdaşabilirlik şartlarından ve (5.68), (5.71) kullanılarak, repulsive tip NLS- denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\alpha_t = i\alpha_{ss} + j_2\alpha, j_2 = -i\alpha\bar{\alpha} \quad (5.72)$$

6. $\mathbb{E}^3$ UZAYINDA OSKÜLATÖR, NORMAL VE REKTİFYEN DARBOUX ÇATILARI İÇİN HASİMOTO BENZERİ DÖNÜŞÜMLERİN DİFERENSİYELLERİ İÇİN FORMÜLLER

6.1. Oskülatör Darboux çatısına göre NLS ile ilişkili Hasimoto benzeri dönüşümlerin diferensiyelleri için formüller

Oskülatör Darboux çatısına göre bir eğri boyunca birinci sınıf için vektör alanı

$$\mathfrak{F}_1 = f_1 \tilde{D}_o + g_1 U + h_1 Y_o \quad (6.1)$$

şeklinde verilsin. Burada f_1 , g_1 ve h_1 diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

**Öklidyen 3-uzayda oskülatör Darboux çatısına göre NLS ile ilişkili birinci
Hasimoto benzeri dönüşümün diferensiyeli için formül**

$\mathfrak{F}_1$ in yay uzunluğu koruma şartını sağlaması için

$$\langle \mathfrak{F}_{1s}, \tilde{D}_o \rangle = 0, \quad f_{1s} = -h_1 \delta_o$$

olmalıdır. Öklidyen 3-uzayda oskülatör Darboux çatısına göre (6.1) verilen vektör alanı için birinci dönüşümün normalizasyon operatörü $\mathcal{N}$ ve yineleme operatörü $\mathcal{R}$ aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\mathfrak{F}_1 &= -\left(\int_0^s \delta_o ds\right) \tilde{D}_o h_1 + g_1 U + h_1 Y_o, \\ \mathcal{R}\mathfrak{F}_1 &= -\mathcal{N}(\tilde{D}_o \times \mathfrak{F}_{1s}) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Oskülatör Darboux çatısına göre birinci sınıf için Hasimoto benzeri dönüşümün diferensiyel formülü $\mathfrak{D}_1(\mathfrak{F}_1)$ aşağıdaki gibi verilir.

$$\mathfrak{D}_1(\mathfrak{F}_1) = \langle \mathcal{A}_2, \tilde{D}_o \times (\mathcal{R}\mathfrak{F}_1)_s \rangle \quad (6.3)$$

Örnek 6.1: Eğer (6.3) $\mathfrak{F}_1 = \delta_o U$ vektör alanına uygulanırsa, aşağıdakiler elde edilir

$$\mathcal{R}\mathfrak{F}_1 = -\frac{\delta_o^2}{2} \tilde{D}_o - \delta_o \mu_o U + \delta_{os} Y_o,$$

$$\mathfrak{D}_1(\mathfrak{F}_1) = \varrho_t = [i(\frac{\delta_o^3}{2} + \delta_{oss} - \delta_o\mu_o^2) + (\delta_{os}\mu_o + (\delta_o\mu_o)_s)]\rho_1, \quad \rho_1 = \frac{e^{-i\int\mu_o}}{\sqrt{2}}. \quad (6.4)$$

(6.4) kullanılarak, Öklidyen 3-uzayda oskülatör Darboux çatısı için birinci dönüşüm ϱ nun diferensiyel formülü aşağıdaki repulsive tip NLS denklemini verir:

$$i\varrho_t = \varrho_{ss} - i|\varrho|^2\varrho$$

Burada

$$\delta_{ot} = (2\delta_{os}\mu_o + \mu_{os}\delta_o) = \frac{(\delta_o^2\mu_o)_s}{\delta_o}$$

ve

$$\mu_{ot} = \frac{1}{\delta_o}(\frac{\delta_o^3}{2} + \delta_{oss} - \delta_o\mu_o^2)_s.$$

Öklidyen 3-uzayda oskülatör Darboux çatısına göre NLS ile ilişkili ikinci Hasimoto benzeri dönüşümün diferensiyeli için formül

Öklidyen 3-uzayda oskülatör Darboux çatısı için normalizasyon operatörü $\mathcal{N}$, yineleme operatörü $\mathcal{R}$ ve (6.1)de verilen vektör alanı için ikinci Hasimoto benzeri dönüşümün diferensiyel formülü $\mathfrak{D}_2$ sırasıyla şu şekilde elde edilir :

$$\mathcal{N}\mathfrak{F}_1 = (\int_0^s h_1\mu_o ds)U + f_1\tilde{D}_o + h_1Y_o, \quad (6.5)$$

$$\mathcal{R}\mathfrak{F}_1 = -\mathcal{N}(U \times \mathfrak{F}_{1s}), \quad (6.6)$$

$$\mathfrak{D}_2(\mathfrak{F}_1) = \langle \mathcal{B}_2, U \times (\mathcal{R}\mathfrak{F}_1)_s \rangle. \quad (6.7)$$

Örnek 6.2: (6.7) $\mathfrak{F}_1 = \mu_o\tilde{D}_o$ vektör alanına uygulanırsa, (6.5) ve (6.6) kullanılarak aşağıdakiler elde edilir:

$$\mathcal{R}\mathfrak{F}_1 = -\frac{\mu_o^2}{2}U - \delta_o\mu_o\tilde{D}_o - \mu_{os}Y_o$$

$$\mathfrak{D}_2(\mathfrak{F}_1) = \omega_t = [-i(\frac{\mu_o^3}{2} + \mu_{oss} - \delta_o^2\mu_o) + (\delta_o\mu_{os} + (\delta_o\mu_o)_s)]\omega_1, \quad \omega_1 = \frac{e^{i\int\delta_o}}{\sqrt{2}}. \quad (6.8)$$

(6.8) kullanılarak Öklidyen 3-uzayda oskülatör Darboux çatısı için ikinci Hasimoto benzeri dönüşüm ω nın diferensiyel formülü aşağıdaki NLS denklemini verir.

$$\omega_t = i\omega_{ss} + b_2\omega, \quad b_2 = i\omega\bar{\omega}$$

Öklidyen 3-uzayda oskülatör Darboux çatısına göre NLS ile ilişkili üçüncü Hasimoto benzeri dönüşümün diferensiyeli için formül

Öklidyen 3-uzayda oskülatör Darboux çatısı için normalizasyon operatörü $\mathcal{N}$, yineleme operatörü $\mathcal{R}$ ve (6.1)de verilen vektör alanı için üçüncü Hasimoto benzeri

dönüşümün diferensiyel formülü $\mathfrak{D}_3$ sırasıyla şu şekilde elde edilir :

$$\mathcal{N}\mathfrak{F}_1 = f_1\widetilde{D}_o + g_1U + \left(\int_0^s (f_1\delta_o - g_1\mu_o)ds\right)Y_o \quad (6.9)$$

$$\mathcal{R}\mathfrak{F}_1 = -\mathcal{N}(Y_o \times \mathfrak{F}_{1s}). \quad (6.10)$$

$$\mathfrak{D}_3(\mathfrak{F}_1) = \langle \mathcal{C}_2, Y_o \times (\mathcal{R}\mathfrak{F}_1)_s \rangle / \sqrt{2}, \quad (6.11)$$

Örnek 6.3: (6.11) $\mathfrak{F}_1 = \delta_o U + \mu_o \widetilde{D}_o$ vektör alanına uygulanırsa (6.9) ve (6.10) kullanılarak aşağıdakiler elde edilir:

$$\mathcal{R}\mathfrak{F}_1 = (\delta_{os}\widetilde{D}_o - \mu_{os}U + \left(\frac{\mu_o^2 + \delta_o^2}{2}\right)Y_o) \quad (6.12)$$

$$\mathfrak{D}_3(\mathfrak{F}_1) = \varsigma_t = [(\mu_{oss} + \mu_o\left(\frac{\delta_o^2 + \mu_o^2}{2}\right)) + i(\delta_{oss} + \delta_o\left(\frac{\delta_o^2 + \mu_o^2}{2}\right))]/\sqrt{2} \quad (6.13)$$

(6.13) kullanılarak Öklidyen 3-uzayda oskülatör Darboux çatısı için üçüncü Hasimoto benzeri dönüşüm ς nin diferensiyel formülü aşağıdaki NLS denklemini verir:

$$\varsigma_t = i\varsigma_{ss} + c_2\varsigma, c_2 = i\varsigma\bar{\varsigma}$$

6.2. Normal Darboux çatısına göre NLS ile ilişkili Hasimoto benzeri dönüşümlerin diferensiyelleri için formüller

Normal Darboux çatısına göre bir eğri boyunca birinci sınıf için vektör alanı

$$\mathfrak{F}_2 = f_2\widetilde{D}_n + g_2T + h_2Y_n \quad (6.14)$$

şeklinde verilsin. Burada f_2 , g_2 ve h_2 diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

Öklidyen 3-uzayda normal Darboux çatısına göre NLS ile ilişkili birinci dönüşümün diferensiyeli için formül

$\mathfrak{F}_2$ in yay uzunluğu koruma şartını sağlaması için

$$\langle \mathfrak{F}_{2s}, \widetilde{D}_n \rangle = 0, f_{2s} = -h_2\delta_n$$

olmalıdır. Öklidyen 3-Uzayda normal Darboux çatısına göre (5.6) verilen vektör alanı için birinci sınıf için normalizasyon operatörü $\mathcal{N}$ and yineleme operatörü $\mathcal{R}$ aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$\mathcal{N}\mathfrak{F}_2 = \left(-\int_0^s h_2\delta_n ds\right)\widetilde{D}_n + g_2T + h_2Y_n,$$

$$\mathcal{R}\mathfrak{F}_2 = -\mathcal{N}(\tilde{D}_n \times \mathfrak{F}_{2s}), \quad (6.15)$$

Normal Darboux çatısına göre birinci sınıf için Hasimoto benzeri dönüşümün diferensiyel formülü $\mathfrak{D}_1(\mathfrak{F}_2)$ aşağıdaki gibi verilir.

$$\mathfrak{D}_1(\mathfrak{F}_2) = \langle \mathcal{D}_2, \tilde{D}_n \times (\mathcal{R}\mathfrak{F}_2)_s \rangle. \quad (6.16)$$

Örnek 6.4: Eğer (6.16) $\mathfrak{F}_2 = \delta_n T$ vektör alanına uygulanırsa, aşağıdakiler elde edilir

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\mathfrak{F}_2 &= -\frac{\delta_n^2}{2} \tilde{D}_n - \delta_n \mu_n T + \delta_{ns} Y_n, \\ \mathfrak{D}_1(\mathfrak{F}_2) &= \varphi_t = [i(\frac{\delta_n^3}{2} + \delta_{nss} - \delta_n \mu_n^2) + (\delta_{ns} \mu_n + (\delta_n \mu_n)_s)] \varphi_1, \quad \varphi_1 = \frac{e^{-i \int \mu_n}}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

(6.17) kullanılarak, Öklidyen 3-uzayda normal Darboux çatısı için birinci Hasimoto benzeri dönüşüm φ nin diferensiyel formülü aşağıdaki NLS denklemini verir:

$$i\varphi_t = \varphi_{ss} - i|\varphi|^2 \varphi$$

Burada

$$\delta_{nt} = (2\delta_{ns} \mu_n + \mu_{ns} \delta_n) = \frac{(\delta_n^2 \mu_n)_s}{\delta_n}$$

ve

$$\mu_{nt} = \frac{1}{\delta_n} (\frac{\delta_n^3}{2} + \delta_{nss} - \delta_n \mu_n^2)_s.$$

Öklidyen 3-uzayda normal Darboux çatısına göre NLS ile ilişkili ikinci dönüşümün diferensiyeli için formül

Öklidyen 3-uzayda normal Darboux çatısı için normalizasyon operatörü $\mathcal{N}$, yineleme operatörü $\mathcal{R}$, ve (6.14)da verilen vektör alanı için ikinci Hasimoto benzeri dönüşümün diferensiyel formülü $\mathfrak{D}_2$ sırasıyla şu şekilde ifade edilir:

$$\mathcal{N}\mathfrak{F}_2 = (\int_0^s h_2 \mu_n ds) T + f_2 \tilde{D}_n + h_2 Y_n, \quad (6.18)$$

$$\mathcal{R}\mathfrak{F}_2 = -\mathcal{N}(T \times \mathfrak{F}_{2s}), \quad (6.19)$$

$$\mathfrak{D}_2(\mathfrak{F}_2) = \langle \mathcal{E}_2, T \times (\mathcal{R}\mathfrak{F}_2)_s \rangle. \quad (6.20)$$

Örnek 6.5: (6.20) $\mathfrak{F}_2 = \mu_n \tilde{D}_n$ vektör alanına uygulanırsa (6.18) ve (6.19) kullanılarak aşağıdakiler elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\mathfrak{F}_2 &= -\frac{\mu_n^2}{2} T - \delta_n \mu_n \tilde{D}_n - \mu_{ns} Y_n \\ \mathfrak{D}_2(\mathfrak{F}_2) &= \theta_t = [-i(\frac{\mu_n^3}{2} + \mu_{nss} - \delta_n^2 \mu_n) + (\delta_n \mu_{ns} + (\delta_n \mu_n)_s)] \theta_1, \quad \theta_1 = \frac{e^{i \int \delta_n}}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

(6.21) kullanılarak Öklidyen 3-uzayda normal Darboux çatısı için ikinci Hasimoto benzeri dönüşüm θ nın diferensiyel formülü aşağıdaki NLS denklemini verir.

$$\theta_t = i\theta_{ss} + e_2\theta, e_2 = i\theta\bar{\theta}$$

Öklidyen 3-uzayda normal Darboux çatısına göre NLS ile ilişkili ikinci dönüşümün diferensiyeli için formül

Öklidyen 3-uzayda normal Darboux çatısı için normalizasyon operatörü $\mathcal{N}$, yineleme operatörü $\mathcal{R}$ ve (6.14)da verilen vektör alanı için üçüncü Hasimoto benzeri dönüşümün diferensiyel formülü $\mathfrak{D}_3$ sırasıyla şu şekilde ifade edilir:

$$\mathcal{N}\mathfrak{F}_2 = f_2\tilde{D}_n + g_2T + \left(\int_0^s (f_2\delta_n - g_2\mu_n)ds\right)Y_n \quad (6.22)$$

$$\mathcal{R}\mathfrak{F}_2 = -\mathcal{N}(Y_n \times \mathfrak{F}_{2s}). \quad (6.23)$$

$$\mathfrak{D}_3(\mathfrak{F}_2) = \langle \mathcal{F}_2, Y_n \times (\mathcal{R}\mathfrak{F}_2)_s \rangle / \sqrt{2}, \quad (6.24)$$

Örnek 6.6: (6.24) $\mathfrak{F}_2 = \delta_n T + \mu_n \tilde{D}_n$ vektör alanına uygulanırsa (6.22) ve (6.23) kullanılarak aşağıdakiler elde edilir:

$$\mathcal{R}\mathfrak{F}_2 = (\delta_{ns}\tilde{D}_n - \mu_{ns}T + (\frac{\mu_n^2 + \delta_n^2}{2})Y_n) \quad (6.25)$$

$$\mathfrak{D}_3(\mathfrak{F}_2) = \beta_t = [(\mu_{nss} + \mu_n(\frac{\delta_n^2 + \mu_n^2}{2})) + i(\delta_{nss} + \delta_n(\frac{\delta_n^2 + \mu_n^2}{2}))]/\sqrt{2} \quad (6.26)$$

(6.26) kullanılarak Öklidyen 3-uzayda normal Darboux çatısı için üçüncü Hasimoto benzeri dönüşüm β nın diferensiyel formülü aşağıdaki NLS denklemini verir

$$\beta_t = i\beta_{ss} + f_2\beta, f_2 = -i\beta\bar{\beta}$$

6.3. Öklidyen 3-Uzayda Rektifyen Darboux çatısına göre NLS ile ilişkili Hasimoto benzeri dönüşümlerin diferensiyelleri için formüller

Rektifyen Darboux çatısına göre bir eğri boyunca birinci sınıf için vektör alanı

$$\mathfrak{F}_3 = f_3\tilde{D}_r + g_3V + h_3Y_r \quad (6.27)$$

şeklinde verilsin. Burada f_3 , g_3 ve h_3 diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

Öklidyen 3-uzayda rektifyen Darboux çatısına göre NLS ile ilişkili birinci Hasimoto benzeri dönüşümün diferensiyeli için formül

$\mathfrak{F}_3$ in yay uzunluğu koruma şartını sağlaması için

$$\langle \mathfrak{F}_{3s}, \tilde{D}_r \rangle = 0, \quad f_{3s} = -h_3 \delta_r$$

olmalıdır. Öklidyen 3-uzayda rektifyen Darboux çatısına göre (6.27) verilen vektör alanı için birinci dönüşümün normalizasyon operatörü $\mathcal{N}$ ve yineleme operatörü $\mathcal{R}$ aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\mathfrak{F}_3 &= \left(- \int_0^s h_3 \delta_r ds \right) \tilde{D}_r + g_3 V + h_r Y_r, \\ \mathcal{R}\mathfrak{F}_3 &= -\mathcal{N}(\tilde{D}_r \times \mathfrak{F}_{3s}), \end{aligned} \quad (6.28)$$

Rektifyen Darboux çatısına göre birinci sınıf için Hasimoto benzeri dönüşümün diferensiyel formülü $\mathfrak{D}_1(\mathfrak{F}_3)$ aşağıdaki gibi verilir.

$$\mathfrak{D}_1(\mathfrak{F}_3) = \langle \mathcal{G}_2, \tilde{D}_r \times (\mathcal{R}\mathfrak{F}_3)_s \rangle. \quad (6.29)$$

Örnek 6.7: Eğer (6.29) $\mathfrak{F}_3 = \delta_r V$ vektör alanına uygulanırsa, aşağıdakiler elde edilir

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\mathfrak{F}_3 &= -\frac{\delta_r^2}{2} \tilde{D}_r - \delta_r \mu_r V + \delta_{rs} Y_r, \\ \mathfrak{D}_1(\mathfrak{F}_3) = \mathcal{K}_t &= [i(\frac{\delta_r^3}{2} + \delta_{rss} - \delta_r \mu_r^2) + (\delta_{rs} \mu_r + (\delta_r \mu_r)_s)] \mathcal{K}_1, \quad \mathcal{K}_1 = \frac{e^{-i \int \mu_r}}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

(6.30) kullanılarak, Öklidyen 3-uzayda rektifyen Darboux çatısı için birinci Hasimoto benzeri dönüşüm $\mathcal{K}$ nin diferensiyel formülü aşağıdaki NLS denklemini verir:

$$i\mathcal{K}_t = \mathcal{K}_{ss} - i|\mathcal{K}|^2 \mathcal{K}$$

Burada

$$\delta_{rt} = (2\delta_{rs} \mu_r + \mu_{rs} \delta_r) = \frac{(\delta_r^2 \mu_r)_s}{\delta_r}$$

ve

$$\mu_{rt} = \frac{1}{\delta_r} \left(\frac{\delta_r^3}{2} + \delta_{rss} - \delta_r \mu_r^2 \right)_s$$

dir.

Öklidyen 3-uzayda rektifyen Darboux çatısına göre NLS ile ilişkili ikinci Hasimoto benzeri dönüşümün diferensiyeli için formül

Öklidyen 3-uzayda rektifyen Darboux çatısı için normalizasyon operatörü $\mathcal{N}$, yineleme operatörü $\mathcal{R}$ ve (6.27)de verilen vektör alanı için ikinci Hasimoto benzeri dönüşümün diferensiyel formülü $\mathfrak{D}_3$ sırasıyla şu şekilde elde edilir :

$$\mathcal{N}\mathfrak{F}_3 = \left(\int_0^s h_3 \mu_r ds \right) V + f_3 \tilde{D}_r + h_3 Y_r, \quad (6.31)$$

$$\mathcal{R}\mathfrak{F}_3 = -\mathcal{N}(V \times \mathfrak{F}_{3s}), \quad (6.32)$$

$$\mathcal{D}_2(\mathfrak{F}_3) = \langle \mathcal{H}_2, V \times (\mathcal{R}\mathfrak{F}_3)_s \rangle. \quad (6.33)$$

Örnek 6.8: (6.33) $\mathfrak{F}_3 = \mu_r \tilde{D}_r$ vektör alanına uygulanırsa, (6.31) ve (6.32) kullanılarak aşağıdakiler elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\mathfrak{F}_3 &= -\frac{\mu_r^2}{2}V - \delta_r \mu_r \tilde{D}_r - \mu_{rs} Y_r \\ \mathcal{D}_2(\mathfrak{F}_3) = \pi_t &= [-i(\frac{\mu_r^3}{2} + \mu_{rss} - \delta_r^2 \mu_r) + (\delta_r \mu_{rs} + (\delta_r \mu_r)_s)]\pi_1, \quad \pi_1 = \frac{e^{i \int \delta_o}}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (6.34)$$

(6.34) kullanılarak Öklidyen 3-uzayda rektifyen Darboux çatısı için ikinci Hasimoto benzeri dönüşüm π nin diferensiyel formülü aşağıdaki NLS denklemini verir:

$$d\pi_t = i\pi_{ss} + b_2\pi, b_2 = i\pi\bar{\pi}$$

Öklidyen 3-uzayda rektifyen Darboux çatısına göre NLS ile ilişkili üçüncü Hasimoto benzeri dönüşümün diferensiyeli için formül

Öklidyen 3-uzayda rektifyen Darboux çatısı için normalizasyon operatörü $\mathcal{N}$, yineleme operatörü $\mathcal{R}$ ve (6.27)de verilen vektör alanı için üçüncü Hasimoto benzeri dönüşümün diferensiyel formülü $\mathcal{D}_3$ sırasıyla şu şekilde elde edilir:

$$\mathcal{N}\mathfrak{F}_3 = f_3 \tilde{D}_r + g_3 V + \left(\int_0^s (f_3 \delta_r - g_3 \mu_r) ds \right) Y_r \quad (6.35)$$

$$\mathcal{R}\mathfrak{F}_3 = -\mathcal{N}(Y_r \times \mathfrak{F}_{3s}). \quad (6.36)$$

$$\mathcal{D}_3(\mathfrak{F}_3) = \langle \mathcal{I}_2, Y_r \times (\mathcal{R}\mathfrak{F}_3)_s \rangle / \sqrt{2}, \quad (6.37)$$

Örnek 6.9: (6.37) $\mathfrak{F}_3 = \delta_r V + \mu_r \tilde{D}_r$ vektör alanına uygulanırsa (6.35) ve (6.36) kullanılarak aşağıdakiler elde edilir:

$$\mathcal{R}\mathfrak{F}_3 = (\delta_{rs} \tilde{D}_r - \mu_{rs} V + (\frac{\mu_r^2 + \delta_r^2}{2}) Y_r) \quad (6.38)$$

$$\mathcal{D}_3(\mathfrak{F}_3) = \alpha_t = [(\mu_{rss} + \mu_r(\frac{\delta_r^2 + \mu_r^2}{2})) + i(\delta_{rss} + \delta_r(\frac{\delta_r^2 + \mu_r^2}{2}))]/\sqrt{2} \quad (6.39)$$

(6.39) kullanılarak Öklidyen 3-uzayda rektifyen Darboux çatısı için üçüncü Hasimoto benzeri dönüşüm α nın diferensiyel formülü aşağıdaki NLS denklemini verir:

$$\alpha_t = i\alpha_{ss} + c_2\alpha, c_2 = i\alpha\bar{\alpha}$$

7. $\mathbb{E}^3$ UZAYINDA OSKÜLATÖR, NORMAL VE REKTİFYEN DARBOUX ÇATILARINA GÖRE GENELLEŞTİRİLMİŞ FOKAL YÜZEYLER

Bu bölümde oskülatör, normal ve rektifyen Darboux çatılarına göre genelleştirilmiş fokal yüzeyler incelenecektir.

7.1. Öklidyen 3-Uzayda Oskülatör Darboux Çatısına Göre Genelleştirilmiş Fokal Yüzeyler

3 boyutlu Öklid uzayında hareketli uzay eğrisi γ ve $\gamma = \gamma(s, t)$ hareketli uzay eğrisinin konum vektörü olsun. Burada s yay parametresi ve t zamanı göstermektedir. Öklidyen 3-uzayda eğri boyunca bir yüzey üzerinde oskülatör Darboux çatısı $\{\tilde{D}_o, U, Y_o\}$ ile gösterilsin. $\tilde{D}_o$, γ eğrisinin birim tanjant vektörü, U yüzeyin birim normal vektörü ve $Y_o = \tilde{D}_o \times U$ birim vektördür. $\{\tilde{D}_o, U, Y_o\}$ oskülatör Darboux çatısının t zaman evölüsyonu, genel formunda aşağıdaki gibi verilir

$$\begin{aligned}\tilde{D}_{ot} &= x_{o1}U + x_{o2}Y_o \\ U_t &= -x_{o1}\tilde{D}_o + x_{o3}Y_o \\ Y_{ot} &= -x_{o2}\tilde{D}_o - x_{o3}U\end{aligned}\tag{7.1}$$

Burada, x_{o1}, x_{o2}, x_{o3} diferensiyellebilir fonksiyonlardır. (3.16), (7.1) ve $\tilde{D}_{ost} = \tilde{D}_{ots}$, $U_{st} = U_{ts}$ ve $Y_{ost} = Y_{ots}$ bağdaşabilirlik şartlarını kullanarak

$$\begin{aligned}x_{o1s} &= \delta_o\gamma + \mu_o x_{o2} \\ x_{o2s} &= -\delta_o - \mu_o x_{o1} \\ x_{o3s} &= \mu_{ot} - \delta_o x_{o1}\end{aligned}\tag{7.2}$$

elde edilir.

$$\gamma_s = \tilde{D}_o\tag{7.3}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\gamma_t &= \gamma_s \times \gamma_{ss} = \tilde{D}_o \times \tilde{D}_{os} \\ &= -\delta_o(\tilde{D}_o \times Y_o) \\ &= \delta_o U\end{aligned}\tag{7.4}$$

(7.1), (7.2) ve (7.4) ve $\gamma_{ts} = \gamma_{st}$ bağdaşabilirlik şartları kullanılarak,

$$\begin{aligned}x_{o1} &= \delta_{os} \\ x_{o2} &= \delta_o \mu_o \\ x_{o3} &= \frac{\delta_{oss} - \delta_o \mu_o^2}{\delta_o}\end{aligned}\tag{7.5}$$

ve

$$\begin{aligned}\mu_{ot} &= \delta_o \delta_{os} + \left(\frac{\delta_{oss} - \delta_o \mu_o^2}{\delta_o} \right)_s \\ \delta_{ot} &= -\delta_o \mu_{os} - 2\delta_{os} \mu_o\end{aligned}\quad (7.6)$$

elde edilir. (7.3), (7.4) denklemlerinin s ve t ye göre türevi alınarak

$$\gamma_{ss} = -\delta_o Y_o \quad (7.7)$$

$$\gamma_{ts} = \delta_{os} U + \delta_o \mu_o Y_o \quad (7.8)$$

$$\gamma_{tt} = -x_{o1} \delta_o \tilde{D}_o + \delta_{ot} U + x_{o3} \delta_o Y_o \quad (7.9)$$

elde edilir. (7.3), (7.4), (7.7), (7.8) ve (7.9) kullanılarak oskülatör Darboux çatısına göre Hasimoto yüzeyinin birim normal vektör alanı

$$\mathbb{N}_o = \frac{\gamma_s \times \gamma_t}{\|\gamma_s \times \gamma_t\|} = \frac{\tilde{D}_o \times (\delta_o U)}{\|\tilde{D}_o \times (\delta_o U)\|} = Y_o \quad (7.10)$$

şeklinde elde edilir. Öklidyen 3-uzayda oskülatör Darboux çatısına göre Hasimoto yüzeyinin birinci temel formu

$$I_o = E_o ds^2 + 2F_o ds dt + G_o dt^2 \quad (7.11)$$

biçiminde verilir. Burada Öklidyen 3-uzayda oskülatör Darboux çatısına göre Hasimoto yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned}E_o &= \langle \gamma_s, \gamma_s \rangle = \langle \tilde{D}_o, \tilde{D}_o \rangle = 1 \\ F_o &= \langle \gamma_s, \gamma_t \rangle = \langle \tilde{D}_o, \delta_o U \rangle = 0 \\ G_o &= \langle \gamma_t, \gamma_t \rangle = \langle \delta_o U, \delta_o U \rangle = \delta_o^2\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Öklidyen 3-uzayda oskülatör Darboux çatısına göre Hasimoto yüzeyinin ikinci temel formu

$$II_o = e_o ds^2 + 2f_o ds dt + g_o dt^2$$

biçiminde verilir. Burada, Öklidyen 3-uzayda oskülatör Darboux çatısına göre Hasimoto yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned}e_o &= \langle \gamma_{ss}, \mathbb{N}_o \rangle = \langle -\delta_o Y_o, Y_o \rangle = -\delta_o \\ f_o &= \langle \gamma_{st}, \mathbb{N}_o \rangle = \langle \delta_{os} U + \delta_o \mu_o Y_o, Y_o \rangle = \delta_o \mu_o \\ g_o &= \langle \gamma_{tt}, \mathbb{N}_o \rangle = \langle -x_{o1} \delta_o \tilde{D}_o + \delta_{ot} U + x_{o3} \delta_o Y_o, Y_o \rangle = x_{o3} \delta_o\end{aligned}\quad (7.12)$$

biçiminde elde edilir. (7.11) ve (7.12) kullanılarak Öklidyen 3-uzayda oskülatör Darboux çatısına göre Hasimoto yüzeyinin sırasıyla Gauss ve ortalama eğrilikleri aşağıdaki biçimde çıkarılır:

$$\begin{aligned}K_o &= \frac{e_o g_o - f_o^2}{E_o G_o - F_o^2} \\ &= -\frac{\delta_o^2 x_{o3} + \delta_o^2 \mu_o^2}{\delta_o^2} \\ &= -(x_{o3} + \mu_o^2)\end{aligned}\quad (7.13)$$

$$\begin{aligned}
H_o &= \frac{E_o g_o - 2F_o f_o + G_o e_o}{2(E_o G_o - F_o^2)} \\
&= \frac{x_{o3}\delta_o - \delta_o^3}{2\delta_o^2} \\
&= \frac{1}{2\delta_o} (x_{o3} - \delta_o^2)
\end{aligned} \tag{7.14}$$

(7.13) ve (7.14) yardımıyla Öklidyen 3-uzayda oskülatör Darboux çatısına göre Hasimoto yüzeyinin birinci ve ikinci asli eğrilikleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}
k_{o1} &= H_o + \sqrt{H_o^2 - K_o} \\
&= \frac{\frac{1}{2\delta_o} (x_{o3} - \delta_o^2)}{+ \sqrt{(\frac{1}{2\delta_o} (x_{o3} - \delta_o^2))^2 + x_{o3} + \mu_o^2}}
\end{aligned} \tag{7.15}$$

$$\begin{aligned}
k_{o2} &= H_o - \sqrt{H_o^2 - K_o} \\
&= \frac{\frac{1}{2\delta_o} (x_{o3} - \delta_o^2)}{- \sqrt{(\frac{1}{2\delta_o} (x_{o3} - \delta_o^2))^2 + x_{o3} + \mu_o^2}}
\end{aligned} \tag{7.16}$$

Girdap filament akısı tarafından üretilen genelleştirilmiş fokal yüzeyin parametrik gösterimi aşağıdaki gibi verilir:

$$\Upsilon(s, t) = \gamma(s, t) + (k_{o1}^2 + k_{o2}^2)\mathbb{N}_o(s, t) \tag{7.17}$$

(7.17) denkleminin oskülatör Darboux çatısı kullanılarak s ve t ye göre kısmi türevleri

$$\begin{aligned}
\Upsilon_s(s, t) &= \gamma_s(s, t) + 2(k_{o1}k_{o1s} + k_{o2}k_{o2s})\mathbb{N}_o(s, t) + (k_{o1}^2 + k_{o2}^2)\mathbb{N}_{os}(s, t) \\
&= \tilde{D}_o + 2(k_{o1}k_{o1s} + k_{o2}k_{o2s})Y_o + (k_{o1}^2 + k_{o2}^2)(\delta_o\tilde{D}_o - \mu_o U) \\
&= (1 + \delta_o(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))\tilde{D}_o - \mu_o(k_{o1}^2 + k_{o2}^2)U + 2(k_{o1}k_{o1s} + k_{o2}k_{o2s})Y_o
\end{aligned} \tag{7.18}$$

$$\begin{aligned}
\Upsilon_t(s, t) &= \gamma_t(s, t) + 2(k_{o1}k_{o1t} + k_{o2}k_{o2t})\mathbb{N}_o(s, t) + (k_{o1}^2 + k_{o2}^2)\mathbb{N}_{ot}(s, t) \\
&= \delta_o U + 2(k_{o1}k_{o1t} + k_{o2}k_{o2t})Y_o - (k_{o1}^2 + k_{o2}^2)(x_{o2}\tilde{D}_o + x_{o3}U) \\
&= -x_{o2}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2)\tilde{D}_o + (\delta_o - x_{o3}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))U + 2(k_{o1}k_{o1t} + k_{o2}k_{o2t})Y_o
\end{aligned} \tag{7.19}$$

şeklinde bulunur. Burada k_{o1s} ve k_{o2s} , asli eğriliklerin s parametresine göre, k_{o1t} ve k_{o2t} , t parametresine göre kısmi türevlerdir. (7.18) ve (7.19) kullanılarak girdap filament akısı tarafından üretilen genelleştirilmiş fokal yüzeyin birim normal vektör alanı $\mathbb{N}_o^*$ aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\mathbb{N}_o^* = \frac{\Upsilon_s \times \Upsilon_t}{\|\Upsilon_s \times \Upsilon_t\|} = \frac{\lambda_{o1}\tilde{D}_o + \lambda_{o2}U + \lambda_{o3}Y_o}{\sqrt{\lambda_{o1}^2 + \lambda_{o2}^2 + \lambda_{o3}^2}}, \lambda_{o1}^2 + \lambda_{o2}^2 + \lambda_{o3}^2 \neq 0 \tag{7.20}$$

Burada,

$$\begin{aligned}
\Upsilon_s \times \Upsilon_t &= -2 \left(\begin{array}{c} \mu_o(k_{o1}^2 + k_{o2}^2)(k_{o1}k_{o1t} + k_{o2}k_{o2t}) \\ + (k_{o1}k_{o1s} + k_{o2}k_{o2s})(\delta_o - x_{o3}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2)) \end{array} \right) \tilde{D}_o \\
&+ 2 \left(\begin{array}{c} ((k_{o1}k_{o1s} + k_{o2}k_{o2s})(-x_{o2}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))) \\ - (1 + \delta_o(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))(k_{o1}k_{o1t} + k_{o2}k_{o2t}) \end{array} \right) U \\
&+ \left(\begin{array}{c} ((1 + \delta_o(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))(\delta_o - x_{o3}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))) \\ - (\mu_o(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))(x_{o2}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2)) \end{array} \right) Y_o
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\lambda_{o1} &= -2(\mu_o(k_{o1}^2 + k_{o2}^2)(k_{o1}k_{o1t} + k_{o2}k_{o2t}) + (k_{o1}k_{o1s} + k_{o2}k_{o2s})(\delta_o - x_{o3}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))) \\ \lambda_{o2} &= 2((k_{o1}k_{o1s} + k_{o2}k_{o2s})(-x_{o2}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2)) - (1 + \delta_o(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))(k_{o1}k_{o1t} + k_{o2}k_{o2t})) \\ \lambda_{o3} &= (1 + \delta_o(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))(\delta_o - x_{o3}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2)) - (\mu_o(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))(x_{o2}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))\end{aligned}$$

dir. Öklidyen 3-uzayda oskülör Darboux çatısına göre Υ genelleştirilmiş fokal yüzeyinin birinci temel formu

$$I_o^* = E_o^* ds^2 + 2F_o^* ds dt + G_o^* dt^2 \quad (7.21)$$

şeklinde verilir. Öklidyen 3-uzayda oskülör Darboux çatısına göre Υ genelleştirilmiş fokal yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned}E_o^* &= \langle \Upsilon_s, \Upsilon_s \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} (1 + \delta_o(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))\tilde{D}_o + (-\mu_o(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))U \\ +2(k_{o1}k_{o1s} + k_{o2}k_{o2s})Y_o, \\ (1 + \delta_o(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))\tilde{D}_o + (-\mu_o(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))U \\ +2(k_{o1}k_{o1s} + k_{o2}k_{o2s})Y_o \end{pmatrix} \right\rangle \quad (7.22) \\ &= (1 + \delta_o(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))^2 + \mu_o^2(k_{o1}^2 + k_{o2}^2)^2 + 4(k_{o1}k_{o1s} + k_{o2}k_{o2s})^2 \\ F_o^* &= \langle \Upsilon_s, \Upsilon_t \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} (1 + \delta_o(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))\tilde{D}_o - \mu_o(k_{o1}^2 + k_{o2}^2)U \\ +2(k_{o1}k_{o1s} + k_{o2}k_{o2s})Y_o, (-x_{o2}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))\tilde{D}_o \\ +(\delta_o - x_{o3}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))U + 2(k_{o1}k_{o1t} + k_{o2}k_{o2t})Y_o \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= -(1 + \delta_o(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))(x_{o2}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2) - \mu_o(k_{o1}^2 + k_{o2}^2)(\delta_o - x_{o3}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))) \\ &\quad + 4(k_{o1}k_{o1s} + k_{o2}k_{o2s})(k_{o1}k_{o1t} + k_{o2}k_{o2t}) \\ G_o^* &= \langle \Upsilon_t, \Upsilon_t \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} (-x_{o2}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))\tilde{D}_o + (\delta_o - x_{o3}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))U \\ +2(k_{o1}k_{o1t} + k_{o2}k_{o2t})Y_o, \\ (-x_{o2}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))\tilde{D}_o + (\delta_o - x_{o3}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))U \\ +2(k_{o1}k_{o1t} + k_{o2}k_{o2t})Y_o \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= x_{o2}^2(k_{o1}^2 + k_{o2}^2)^2 + (\delta_o - x_{o3}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))^2 + 4(k_{o1}k_{o1t} + k_{o2}k_{o2t})^2\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. (7.18) ve (7.19) eşitliklerinin s ve t ye göre türevleri alınarak

$$\begin{aligned}\Upsilon_{ss} &= \begin{pmatrix} (\delta_{os}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2) + 2\delta_o(k_{o1}k_{o1s} + k_{o2}k_{o2s}))\tilde{D}_o \\ -\delta_o(1 + \delta_o(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))Y_o \\ -(\mu_{os}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2) + 2\mu_o(k_{o1}k_{o1s} + k_{o2}k_{o2s}))U \\ -\mu_o^2(k_{o1}^2 + k_{o2}^2)Y_o \\ +2(k_{o1s}k_{o1s} + k_{o1}k_{o1ss} + k_{o2s}k_{o2s} + k_{o2}k_{o2ss})Y_o \\ +2(k_{o1}k_{o1s} + k_{o2}k_{o2s})(\delta_o\tilde{D}_o - \mu_oU) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\delta_{os}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2) + 4\delta_o(k_{o1}k_{o1s} + k_{o2}k_{o2s}))\tilde{D}_o \\ -(\mu_{os}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2) + 4\mu_o(k_{o1}k_{o1s} + k_{o2}k_{o2s}))U \\ +2(k_{o1s}k_{o1s} + k_{o1}k_{o1ss} + k_{o2s}k_{o2s} + k_{o2}k_{o2ss}) \\ -\mu_o^2(k_{o1}^2 + k_{o2}^2) - \delta_o(1 + \delta_o(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))Y_o \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{st} &= \begin{pmatrix} \delta_{ot}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2) + 2\delta_o(k_{o1}k_{o1t} + k_{o2}k_{o2t})\tilde{D}_o \\ +((1 + \delta_o(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))(x_{o1}U + x_{o2}Y_o) \\ -(\mu_o(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))(-x_{o1}\tilde{D}_o + x_{o3}Y_o) \\ +2(k_{o1t}k_{o1s} + k_{o1}k_{o1st} + k_{o2t}k_{o2s} + k_{o2}k_{o2st})Y_o \\ +2(k_{o1}k_{o1s} + k_{o2}k_{o2s})(-x_{o2}\tilde{D}_o - x_{o3}U) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\delta_{ot}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2) + 2\delta_o(k_{o1}k_{o1t} + k_{o2}k_{o2t}) \\ +x_{o1}\mu_o(k_{o1}^2 + k_{o2}^2) - 2x_{o2}(k_{o1}k_{o1s} + k_{o2}k_{o2s}))\tilde{D}_o \\ +((x_{o1}(1 + \delta_o(k_{o1}^2 + k_{o2}^2) - \mu_{ot}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2) \\ -2\mu_o(k_{o1}k_{o1t} + k_{o2}k_{o2t})) - 2x_{o3}(k_{o1}k_{o1s} + k_{o2}k_{o2s}))U \\ + (x_{o2}(1 + \delta_o(k_{o1}^2 + k_{o2}^2)) - x_{o3}\mu_o(k_{o1}^2 + k_{o2}^2) \\ +2(k_{o1t}k_{o1s} + k_{o1}k_{o1st} + k_{o2t}k_{o2s} + k_{o2}k_{o2st}))Y_o \end{pmatrix} \\
\Upsilon_{tt} &= \begin{pmatrix} -(x_{o2}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))_t\tilde{D}_o \\ +(-x_{o2}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2)(x_{o1}U + x_{o2}Y_o) \\ +(\delta_o - x_{o3}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))_tU \\ +(\delta_o - x_{o3}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))(-x_{o1}\tilde{D}_o + x_{o3}Y_o) \\ +2(k_{o1}k_{o1t} + k_{o2}k_{o2t})_tY_o \\ -2(k_{o1}k_{o1t} + k_{o2}k_{o2t})(x_{o2}\tilde{D}_o + x_{o3}U) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -(x_{o2t}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2) + 2x_{o2}(k_{o1}k_{o1t} + k_{o2}k_{o2t}))\tilde{D}_o \\ +(-x_{o2}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2)(x_{o1}U + x_{o2}Y_o) \\ +(\delta_{ot} - x_{o3t}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2) - 2x_{o3}(k_{o1}k_{o1t} + k_{o2}k_{o2t}))U \\ +(\delta_o - x_{o3}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))(-x_{o1}\tilde{D}_o + x_{o3}Y_o) \\ +2(k_{o1t}^2 + k_{o1}k_{o1tt} + k_{o2t}^2 + k_{o2}k_{o2tt})Y_o \\ -2(k_{o1}k_{o1t} + k_{o2}k_{o2t})(x_{o2}\tilde{D}_o + x_{o3}U) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -((x_{o2t}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2) + 2x_{o2}(k_{o1}k_{o1t} + k_{o2}k_{o2t})) \\ +x_{o1}(\delta_o - x_{o3}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2)) + 2x_{o2}(k_{o1}k_{o1t} + k_{o2}k_{o2t}))\tilde{D}_o \\ -(x_{o1}x_{o2}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2) + (\delta_{ot} - x_{o3t}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2) - 2x_{o3}(k_{o1}k_{o1t} + k_{o2}k_{o2t})) \\ -2x_{o3}(k_{o1}k_{o1t} + k_{o2}k_{o2t}))U \\ -(x_{o2}^2(k_{o1}^2 + k_{o2}^2) + x_{o3}(\delta_o - x_{o3}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2)) \\ +2(k_{o1t}^2 + k_{o1}k_{o1tt} + k_{o2t}^2 + k_{o2}k_{o2tt}))Y_o \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

Öklidyen 3-uzayda oskülatör Darboux çatısına göre Υ genelleştirilmiş fokal yüzeyinin ikinci temel formu

$$II_o^* = e_o^*ds^2 + 2f_o^*dsdt + g_o^*dt^2 \quad (7.23)$$

Bu eşitlikler kullanılarak Öklidyen 3-uzayda Υ genelleştirilmiş fokal yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned}
e_o^* &= \langle \Upsilon_{ss}, \mathbb{N}_o^* \rangle = \left\langle \xi_{o1} \tilde{D}_o + \xi_{o2} U + \xi_{o3} Y_o, \frac{\lambda_{o1} \tilde{D}_o + \lambda_{o2} U + \lambda_{o3} Y_o}{\sqrt{\lambda_{o1}^2 + \lambda_{o2}^2 + \lambda_{o3}^2}} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_{o1}^2 + \lambda_{o2}^2 + \lambda_{o3}^2}} (\xi_{o1} \lambda_{o1} + \xi_{o2} \lambda_{o2} + \xi_{o3} \lambda_{o3}) \\
f_o^* &= \langle \Upsilon_{st}, \mathbb{N}_o^* \rangle = \left\langle \phi_{o1} \tilde{D}_o + \phi_{o2} U + \phi_{o3} Y_o, \frac{\lambda_{o1} \tilde{D}_o + \lambda_{o2} U + \lambda_{o3} Y_o}{\sqrt{\lambda_{o1}^2 + \lambda_{o2}^2 + \lambda_{o3}^2}} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_{o1}^2 + \lambda_{o2}^2 + \lambda_{o3}^2}} (\phi_{o1} \lambda_{o1} + \phi_{o2} \lambda_{o2} + \phi_{o3} \lambda_{o3}) \\
g_o^* &= \langle \Upsilon_{tt}, \mathbb{N}_o^* \rangle = \left\langle \psi_{o1} \tilde{D}_o + \psi_{o2} U + \psi_{o3} Y_o, \frac{\lambda_{o1} \tilde{D}_o + \lambda_{o2} U + \lambda_{o3} Y_o}{\sqrt{\lambda_{o1}^2 + \lambda_{o2}^2 + \lambda_{o3}^2}} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_{o1}^2 + \lambda_{o2}^2 + \lambda_{o3}^2}} (\psi_{o1} \lambda_{o1} + \psi_{o2} \lambda_{o2} + \psi_{o3} \lambda_{o3})
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Öyle ki

$$\begin{aligned}
\xi_{o1} &= \delta_{os}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2) + 4\delta_o(k_{o1}k_{o1s} + k_{o2}k_{o2s}) \\
\xi_{o2} &= -(\mu_{os}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2) + 4\mu_o(k_{o1}k_{o1s} + k_{o2}k_{o2s})) \\
\xi_{o3} &= \begin{pmatrix} 2(k_{o1s}k_{o1s} + k_{o1}k_{o1ss} + k_{o2}k_{o2s} + k_{o2}k_{o2ss}) \\ -\mu_o^2(k_{o1}^2 + k_{o2}^2) - \delta_o(1 + \delta_o(k_{o1}^2 + k_{o2}^2)) \end{pmatrix} \\
\phi_{o1} &= \begin{pmatrix} \delta_{ot}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2) + 2\delta_o(k_{o1}k_{o1t} + k_{o2}k_{o2t}) \\ +x_{o1}\mu_o(k_{o1}^2 + k_{o2}^2) - 2x_{o2}(k_{o1}k_{o1s} + k_{o2}k_{o2s}) \end{pmatrix} \\
\phi_{o2} &= \begin{pmatrix} (x_{o1}(1 + \delta_o(k_{o1}^2 + k_{o2}^2)) - \mu_{ot}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2)) \\ -2\mu_o(k_{o1}k_{o1t} + k_{o2}k_{o2t}) - 2x_{o3}(k_{o1}k_{o1s} + k_{o2}k_{o2s}) \end{pmatrix} \\
\phi_{o3} &= \begin{pmatrix} x_{o2}(1 + \delta_o(k_{o1}^2 + k_{o2}^2)) - x_{o3}\mu_o(k_{o1}^2 + k_{o2}^2) \\ +2(k_{o1t}k_{o1s} + k_{o1}k_{o1st} + k_{o2t}k_{o2s} + k_{o2}k_{o2st}) \end{pmatrix} \\
\psi_{o1} &= \begin{pmatrix} -(x_{o2t}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2) + 2x_{o2}(k_{o1}k_{o1t} + k_{o2}k_{o2t})) \\ +x_{o1}(\delta_o - x_{o3}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2)) + 2x_{o2}(k_{o1}k_{o1t} + k_{o2}k_{o2t}) \end{pmatrix} \\
\psi_{o2} &= \begin{pmatrix} -(x_{o1}x_{o2}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2) + (\delta_{ot} - x_{o3t}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2)) \\ -2x_{o3}(k_{o1}k_{o1t} + k_{o2}k_{o2t})) - 2x_{o3}(k_{o1}k_{o1t} + k_{o2}k_{o2t}) \end{pmatrix} \\
\psi_{o3} &= \begin{pmatrix} -(x_{o2}^2(k_{o1}^2 + k_{o2}^2) + x_{o3}(\delta_o - x_{o3}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))) \\ +2(k_{o1t}^2 + k_{o1}k_{o1tt} + k_{o2t}^2 + k_{o2}k_{o2tt}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

dir. Bu eşitlikler kullanılarak genelleştirilmiş fokal yüzeyin ortalama eğriliği ve Gauss eğriliği aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}
 K_o^* &= \frac{e_o^* g_o^* - f_o^{*2}}{E_o^* G_o^* - F_o^{*2}} \\
 &= \frac{\left((\xi_{o1}\lambda_{o1} + \xi_{o2}\lambda_{o2} + \xi_{o3}\lambda_{o3})(\psi_{o1}\lambda_{o1} + \psi_{o2}\lambda_{o2} + \psi_{o3}\lambda_{o3}) - (\phi_{o1}\lambda_{o1} + \phi_{o2}\lambda_{o2} + \phi_{o3}\lambda_{o3})^2 \right)}{\left(\begin{aligned} &(\lambda_{o1}^2 + \lambda_{o2}^2 + \lambda_{o3}^2)((1 + \delta_o(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))^2 \\ &\quad + \mu_o^2(k_{o1}^2 + k_{o2}^2)^2 \\ &\quad + 4(k_{o1}k_{o1s} + k_{o2}k_{o2s})^2)(x_{o2}^2(k_{o1}^2 + k_{o2}^2)^2 \\ &\quad + (\delta_o - x_{o3}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))^2 \\ &\quad + 4(k_{o1}k_{o1t} + k_{o2}k_{o2t})^2) \\ &\quad - ((1 + \delta_o(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))(-x_{o2}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2) \\ &\quad - \mu_o(k_{o1}^2 + k_{o2}^2)(\delta_o - x_{o3}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2)) \\ &\quad + 4(k_{o1}k_{o1s} + k_{o2}k_{o2s})(k_{o1}k_{o1t} + k_{o2}k_{o2t}))^2) \end{aligned} \right)}
 \end{aligned} \tag{7.24}$$

ve

$$\begin{aligned}
 H_o^* &= \frac{E_o^* g_o^* - 2F_o^* f_o^* + G_o^* e_o^*}{2(E_o^* G_o^* - F_o^{*2})} \\
 &= \frac{\left(\begin{aligned} &((1 + \delta_o(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))^2 + \mu_o^2(k_{o1}^2 + k_{o2}^2)^2 \\ &\quad + 4(k_{o1}k_{o1s} + k_{o2}k_{o2s})^2)(\psi_{o1}\lambda_{o1} + \psi_{o2}\lambda_{o2} + \psi_{o3}\lambda_{o3}) \\ &\quad - 2((1 + \delta_o(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))(-x_{o2}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2) \\ &\quad - \mu_o(k_{o1}^2 + k_{o2}^2)(\delta_o - x_{o3}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2)) \\ &\quad + 4(k_{o1}k_{o1s} + k_{o2}k_{o2s})(k_{o1}k_{o1t} + k_{o2}k_{o2t})(\phi_{o1}\lambda_{o1} + \phi_{o2}\lambda_{o2} + \phi_{o3}\lambda_{o3})) \\ &\quad + (x_{o2}^2(k_{o1}^2 + k_{o2}^2)^2 + (\delta_o - x_{o3}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))^2 \\ &\quad + 4(k_{o1}k_{o1t} + k_{o2}k_{o2t})^2)(\xi_{o1}\lambda_{o1} + \xi_{o2}\lambda_{o2} + \xi_{o3}\lambda_{o3}) \end{aligned} \right)}{\left(\begin{aligned} &2\sqrt{\lambda_{o1}^2 + \lambda_{o2}^2 + \lambda_{o3}^2}((1 + \delta_o(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))^2 + \mu_o^2(k_{o1}^2 + k_{o2}^2)^2 \\ &\quad + 4(k_{o1}k_{o1s} + k_{o2}k_{o2s})^2)(x_{o2}^2(k_{o1}^2 + k_{o2}^2)^2 \\ &\quad + (\delta_o - x_{o3}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))^2 + 4(k_{o1}k_{o1t} + k_{o2}k_{o2t})^2) \\ &\quad - ((1 + \delta_o(k_{o1}^2 + k_{o2}^2))(-x_{o2}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2) \\ &\quad - \mu_o(k_{o1}^2 + k_{o2}^2)(\delta_o - x_{o3}(k_{o1}^2 + k_{o2}^2)) \\ &\quad + 4(k_{o1}k_{o1s} + k_{o2}k_{o2s})(k_{o1}k_{o1t} + k_{o2}k_{o2t}))^2) \end{aligned} \right)}
 \end{aligned} \tag{7.25}$$

7.2. Öklidyen 3-Uzayda Normal Darboux Çatısına Göre Genelleştirilmiş Fokal Yüzeyler

3 boyutlu Öklid uzayında hareketli uzay eğrisi γ ve $\gamma = \gamma(s, t)$ hareketli uzay eğrisinin konum vektörü olsun. Burada s yay parametresi ve t zamanı göstermektedir. Öklidyen 3-uzayda eğri boyunca bir yüzey üzerinde normal Darboux çatısı $\{\tilde{D}_n, V, Y_n\}$ ile gösterilsin.

$\tilde{D}_n$, γ eğrisinin birim tanjant vektörü, V yüzeyin birim normal vektörü ve $Y_n = \tilde{D}_n \times V$ birim vektördür. Birinci sınıf için yüzey üzerinde normal Darboux çatısına göre t zaman evolüsyonunun denklemleri aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned}\tilde{D}_{nt} &= x_{n1}V + x_{n2}Y_n \\ V_t &= -x_{n1}\tilde{D}_n + x_{n3}Y_n \\ Y_{nt} &= -x_{n2}\tilde{D}_n - x_{n3}V\end{aligned}\quad (7.26)$$

Burada, x_{n1}, x_{n2}, x_{n3} diferensiyellebilir fonksiyonlardır. (3.18), (7.26) ve $\tilde{D}_{nst} = \tilde{D}_{nts}, V_{st} = V_{ts}$ ve $Y_{nst} = Y_{nts}$ bağdaşabilirlik şartlarını kullanarak,

$$\begin{aligned}x_{n1s} &= \delta_n x_{n3} + \mu_n x_{n2} \\ x_{n2s} &= -\delta_n - \mu_n x_{n1} \\ x_{n3s} &= \mu_{nt} - \delta_n x_{n1}\end{aligned}\quad (7.27)$$

elde edilir.

$$\gamma_s = \tilde{D}_n \quad (7.28)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\gamma_t &= \gamma_s \times \gamma_{ss} = \tilde{D}_n \times \tilde{D}_{ns} \\ &= \tilde{D}_n \times (-\delta_n Y_n) \\ &= \delta_n V\end{aligned}\quad (7.29)$$

(3.20), (7.26), (7.27), (7.28) ve $\gamma_{ts} = \gamma_{st}$ bağdaşabilirlik şartları kullanılarak,

$$\begin{aligned}x_{n1} &= \delta_{ns} \\ x_{n2} &= \delta_n \mu_n \\ x_{n3} &= \frac{\delta_{nss} - \delta_n \mu_n^2}{\delta_n}\end{aligned}\quad (7.30)$$

ve

$$\begin{aligned}\mu_{nt} &= \delta_n \delta_{ns} + \left(\frac{\delta_{nss} - \delta_n \mu_n^2}{\delta_n} \right)_z \\ \delta_{nt} &= -\delta_n \mu_{ns} - 2\delta_{ns} \mu_n\end{aligned}\quad (7.31)$$

elde edilir. (7.28), (7.29) denklemlerinin s ve t ye göre türev alınarak

$$\gamma_{ss} = -\delta_n Y_n \quad (7.32)$$

$$\gamma_{ts} = \delta_{ns} V + \delta_n \mu_n Y_n \quad (7.33)$$

$$\gamma_{tt} = -x_{n1} \delta_n \tilde{D}_n + \delta_{nt} V + x_{n3} \delta_n Y_n \quad (7.34)$$

elde edilir. (7.28), (7.29), (7.32), (7.33) ve (7.34) kullanılarak normal Darboux çatısına göre Hasimoto yüzeyinin birim normal vektör alanı

$$\mathbb{N}_n = \frac{\gamma_s \times \gamma_t}{\|\gamma_s \times \gamma_t\|} = \frac{\tilde{D}_n \times (\delta_n V)}{\tilde{D}_n \times (\delta_n V)} = Y_n \quad (7.35)$$

şeklinde elde edilir. Öklidyen 3-uzayda normal Darboux çatısına göre Hasimoto yüzeyinin birinci temel formu

$$I_n = E_n ds^2 + 2F_n ds dt + G_n dt^2 \quad (7.36)$$

biçiminde verilir. Burada Öklidyen 3-uzayda normal Darboux çatısına göre Hasimoto yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} E_n &= \langle \gamma_s, \gamma_s \rangle = \langle \tilde{D}_n, \tilde{D}_n \rangle = 1 \\ F_n &= \langle \gamma_s, \gamma_t \rangle = \langle \tilde{D}_n, \delta_n V \rangle = 0 \\ G_n &= \langle \gamma_t, \gamma_t \rangle = \langle \delta_n V, \delta_n V \rangle = \delta_n^2 \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Öklidyen 3-uzayda normal Darboux çatısına göre Hasimoto yüzeyinin ikinci temel formu

$$II_n = e_n ds^2 + 2f_n ds dt + g_n dt^2 \quad (7.37)$$

biçiminde verilir. Burada Öklidyen 3-uzayda normal Darboux çatısına göre Hasimoto yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} e_n &= \langle \gamma_{ss}, \mathbb{N}_n \rangle = \langle -\delta_n Y_n, Y_n \rangle = -\delta_n \\ f_n &= \langle \gamma_{st}, \mathbb{N}_n \rangle = \langle \delta_{ns} V + \delta_n \mu_n Y_n, Y_n \rangle = \delta_n \mu_n \\ g_n &= \langle \gamma_{tt}, \mathbb{N}_n \rangle = \langle x_{n1} \delta_n \tilde{D}_n + \delta_{nt} V + x_{n3} \delta_n Y_n, Y_n \rangle = x_{n3} \delta_n \end{aligned} \quad (7.38)$$

şeklinde elde edilir. (7.36) ve (7.38) kullanılarak Öklidyen 3-uzayda normal Darboux çatısına göre Hasimoto yüzeyinin sırasıyla Gauss ve ortalama eğrilikleri aşağıdaki biçimde çıkarılır:

$$\begin{aligned} K_n &= \frac{e_n g_n - f_n^2}{E_n G_n - F_n^2} \\ &= -\frac{\delta_n x_{n3} \delta_n + \delta_n^2 \mu_n^2}{\delta_n^2} \\ &= -x_{n3} - \mu_n^2 \end{aligned} \quad (7.39)$$

ve

$$\begin{aligned} H_n &= \frac{E_n g_n - 2F_n f_n + G_n e_n}{2(E_n G_n - F_n^2)} \\ &= \frac{x_{n3} \delta_n - \delta_n^3}{2\delta_n^2} \\ &= \frac{1}{2\delta_n} (x_{n3} - \delta_n^2) \end{aligned} \quad (7.40)$$

(7.39) ve (7.40) yardımıyla Öklidyen 3-uzayda normal Darboux çatısına göre Hasimoto yüzeyinin birinci ve ikinci asli eğrilikleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} k_{n1} &= H_n + \sqrt{H_n^2 - K_n} \\ &= \frac{1}{2\delta_n} (x_{n3} - \delta_n^2) + \sqrt{\left(\frac{1}{2\delta_n} (x_{n3} - \delta_n^2)\right)^2 + x_{n3} + \mu_n^2} \end{aligned} \quad (7.41)$$

ve

$$\begin{aligned} k_{n2} &= H_n - \sqrt{H_n^2 - K_n} \\ &= \frac{1}{2\delta_n} (x_{n3} - \delta_n^2) - \sqrt{\left(\frac{1}{2\delta_n} (x_{n3} - \delta_n^2)\right)^2 + x_{n3} + \mu_n^2} \end{aligned} \quad (7.42)$$

Girdap filament akısı tarafından üretilen genelleştirilmiş fokal yüzeyin normal Darboux çatısına göre parametrik gösterimi aşağıdaki gibi verilir:

$$\Sigma(s, t) = \gamma(s, t) + (k_{n1} \cdot k_{n2})\mathbb{N}_n(s, t) \quad (7.43)$$

(7.43) kullanılarak,

$$\begin{aligned} \Sigma_s(s, t) &= \gamma_s(s, t) + (k_{n1}k_{n2})_s\mathbb{N}_n(s, t) + (k_{n1}k_{n2})\mathbb{N}_{ns}(s, t) \\ &= \tilde{D}_n + (k_{n1}k_{n2})_sY_n + k_{n1}k_{n2}(\delta_n\tilde{D}_n - \mu_nV) \\ &= (1 + \delta_nk_{n1}k_{n2})\tilde{D}_n - \mu_nk_{n1}k_{n2}V + (k_{n1}k_{n2})_sY_n \end{aligned} \quad (7.44)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_t(s, t) &= \gamma_t(s, t) + (k_{n1}k_{n2})_t\mathbb{N}_n(s, t) + (k_{n1}k_{n2})\mathbb{N}_{nt}(s, t) \\ &= \delta_nV + (k_{n1}k_{n2})_tY_n + k_{n1}k_{n2}(-x_{n2}\tilde{D}_n - x_{n3}V) \\ &= -x_{n2}k_{n1}k_{n2}\tilde{D}_n + (\delta_n - x_{n3}k_{n1}k_{n2})V + (k_{n1}k_{n2})_tY_n \end{aligned} \quad (7.45)$$

şeklinde bulunur. Burada k_{n1s} ve k_{n2s} , asli eğriliklerin s parametresine göre, k_{n1t} ve k_{n2t} asli eğriliklerin t parametresine göre kısmi türevleridir. (7.44) ve (7.45) kullanılarak girdap filament akısı tarafından üretilen genelleştirilmiş fokal yüzeyinin birim normal vektör alanı $\mathbb{N}_n^*$ aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\mathbb{N}_n^* = \frac{\Sigma_s \times \Sigma_t}{\|\Sigma_s \times \Sigma_t\|} = \frac{\lambda_{n1}\tilde{D}_n + \lambda_{n2}V + \lambda_{n3}Y_n}{\sqrt{\lambda_{n1}^2 + \lambda_{n2}^2 + \lambda_{n3}^2}}, \quad \lambda_{n1}^2 + \lambda_{n2}^2 + \lambda_{n3}^2 \neq 0 \quad (7.46)$$

Burada,

$$\begin{aligned} \Sigma_s \times \Sigma_t &= -(\mu_nk_{n1}k_{n2}(k_{n1}k_{n2})_t + (\delta_n - x_{n3}k_{n1}k_{n2})(k_{n1}k_{n2})_s)\tilde{D}_n \\ &\quad -((1 + \delta_nk_{n1}k_{n2})(k_{n1}k_{n2})_t + x_{n2}k_{n1}k_{n2}(k_{n1}k_{n2})_s)V \\ &\quad +((1 + \delta_nk_{n1}k_{n2})(\delta_n - x_{n3}k_{n1}k_{n2}) - \mu_nx_{n2}k_{n1}^2k_{n2}^2)Y_n \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \lambda_{n1} &= -(\mu_nk_{n1}k_{n2}(k_{n1}k_{n2})_t + (\delta_n - x_{n3}k_{n1}k_{n2})(k_{n1}k_{n2})_s) \\ \lambda_{n2} &= -((1 + \delta_nk_{n1}k_{n2})(k_{n1}k_{n2})_t + x_{n2}k_{n1}k_{n2}(k_{n1}k_{n2})_s) \\ \lambda_{n3} &= (1 + \delta_nk_{n1}k_{n2})(\delta_n - x_{n3}k_{n1}k_{n2}) - \mu_nx_{n2}k_{n1}^2k_{n2}^2 \end{aligned}$$

biçimindedir. Öklidyen 3-uzayda normal Darboux çatısına göre Σ genelleştirilmiş fokal yüzeyinin birinci temel formu

$$I_n^* = E_n^*ds^2 + 2F_n^*dsdt + G_n^*dt^2 \quad (7.47)$$

şeklinde verilir. Öklidyen 3-uzayda normal Darboux çatısına göre Σ genelleştirilmiş fokal yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned}
E_n^* &= \langle \Sigma_s, \Sigma_s \rangle = \langle (1 + \delta_n k_{n1} k_{n2}) \tilde{D}_n - \mu_n k_{n1} k_{n2} V + (k_{n1} k_{n2})_s Y_n, \\
&\quad (1 + \delta_n k_{n1} k_{n2}) \tilde{D}_n - \mu_n k_{n1} k_{n2} V + (k_{n1} k_{n2})_s Y_n \rangle \\
&= (1 + \delta_n k_{n1} k_{n2})^2 + (\mu_n k_{n1} k_{n2})^2 + (k_{n1} k_{n2})_s^2 \\
F_n^* &= \langle \Sigma_s, \Sigma_t \rangle = \langle (1 + \delta_n k_{n1} k_{n2}) \tilde{D}_n - \mu_n k_{n1} k_{n2} V + (k_{n1} k_{n2})_s Y_n, \\
&\quad -x_{n2} k_{n1} k_{n2} \tilde{D}_n + (\delta_n - x_{n3} k_{n1} k_{n2}) V + (k_{n1} k_{n2})_t Y_n \rangle \\
&= -x_{n2} k_{n1} k_{n2} (1 + \delta_n k_{n1} k_{n2}) - \mu_n k_{n1} k_{n2} (\delta_n - x_{n3} k_{n1} k_{n2}) + (k_{n1} k_{n2})_s (k_{n1} k_{n2})_t \\
G_n^* &= \langle \Sigma_t, \Sigma_t \rangle = \langle -x_{n2} k_{n1} k_{n2} \tilde{D}_n + (\delta_n - x_{n3} k_{n1} k_{n2}) V + (k_{n1} k_{n2})_t Y_n, \\
&\quad -x_{n2} k_{n1} k_{n2} \tilde{D}_n + (\delta_n - x_{n3} k_{n1} k_{n2}) V + (k_{n1} k_{n2})_t Y_n \rangle \\
&= (x_{n2} k_{n1} k_{n2})^2 + (\delta_n - x_{n3} k_{n1} k_{n2})^2 + (k_{n1} k_{n2})_t^2
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. (7.44) ve (7.45) eşitliklerinin s ve t ye göre türevleri alınarak

$$\begin{aligned}
\Sigma_{ss} &= \left(\begin{aligned} &(\delta_n k_{n1} k_{n2})_s \tilde{D}_n + (1 + \delta_n k_{n1} k_{n2})(-\delta_n Y_n) - (\mu_n k_{n1} k_{n2})_s V - \mu_n k_{n1} k_{n2} (\mu_n Y_n) \\ &+ (k_{n1} k_{n2})_{ss} Y_n + (k_{n1} k_{n2})_s (\delta_n \tilde{D}_n - \mu_n V) \end{aligned} \right) \\
&= \left(\begin{aligned} &((\delta_n k_{n1} k_{n2})_s + \delta_n (k_{n1} k_{n2})_s) \tilde{D}_n - ((\mu_n k_{n1} k_{n2})_s + \mu_n (k_{n1} k_{n2})_s) V \\ &+ (-\delta_n (1 + \delta_n k_{n1} k_{n2}) - \mu_n^2 k_{n1} k_{n2} + (k_{n1} k_{n2})_{ss}) Y_n \end{aligned} \right) \\
\Sigma_{st} &= \left(\begin{aligned} &(\delta_n k_{n1} k_{n2})_t \tilde{D}_n + (1 + \delta_n k_{n1} k_{n2})(x_{n1} V + x_{n2} Y_n) \\ &- (\mu_n k_{n1} k_{n2})_t V - (\mu_n k_{n1} k_{n2})(-x_{n1} \tilde{D}_n + x_{n3} Y_n) \\ &+ (k_{n1} k_{n2})_{st} Y_n + (k_{n1} k_{n2})_s (-x_{n2} \tilde{D}_n - x_{n3} V) \end{aligned} \right) \\
&= \left(\begin{aligned} &((\delta_n k_{n1} k_{n2})_t + x_{n1} (\mu_n k_{n1} k_{n2}) - x_{n2} (k_{n1} k_{n2})_s) \tilde{D}_n \\ &+ (x_{n1} (1 + \delta_n k_{n1} k_{n2}) - (\mu_n k_{n1} k_{n2})_t - x_{n3} (k_{n1} k_{n2})_s) V \\ &+ (x_{n2} (1 + \delta_n k_{n1} k_{n2}) - x_{n3} (\mu_n k_{n1} k_{n2}) + (k_{n1} k_{n2})_{st}) Y_n \end{aligned} \right) \\
\Sigma_{tt} &= \begin{aligned} &- (x_{n2} k_{n1} k_{n2})_t \tilde{D}_n - x_{n2} k_{n1} k_{n2} (x_{n1} V + x_{n2} Y_n) \\ &+ (\delta_n - x_{n3} k_{n1} k_{n2})_t V + (\delta_n - x_{n3} k_{n1} k_{n2})(-x_{n1} \tilde{D}_n + x_{n3} Y_n) \\ &+ (k_{n1} k_{n2})_{tt} Y_n + (k_{n1} k_{n2})_t (-x_{n2} \tilde{D}_n - x_{n3} V) \\ &- ((x_{n2} k_{n1} k_{n2})_t + x_{n1} (\delta_n - x_{n3} k_{n1} k_{n2}) + x_{n2} (k_{n1} k_{n2})_t) \tilde{D}_n \\ &= + (-x_{n1} x_{n2} k_{n1} k_{n2} + (\delta_n - x_{n3} k_{n1} k_{n2})_t - x_{n3} (k_{n1} k_{n2})_t) V \\ &+ (-x_{n2}^2 k_{n1} k_{n2} + x_{n3} (\delta_n - x_{n3} k_{n1} k_{n2}) + (k_{n1} k_{n2})_{tt}) Y_n \end{aligned}
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

Öklidyen 3-uzayda normal Darboux çatısına göre Σ genelleştirilmiş fokal yüzeyinin ikinci temel formu

$$II_n^* = e_n^* ds^2 + 2f_n^* ds dt + g_n^* dt^2 \quad (7.48)$$

Bu eşitlikler kullanılarak Öklidyen 3-uzayda Σ genelleştirilmiş fokal yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned}
e_n^* &= \langle \Sigma_{ss}, \mathbb{N}_n^* \rangle = \left\langle \xi_{n1} \tilde{D}_n + \xi_{n2} V + \xi_{n3} Y_n, \frac{\lambda_{n1} \tilde{D}_n + \lambda_{n2} V + \lambda_{n3} Y_n}{\sqrt{\lambda_{n1}^2 + \lambda_{n2}^2 + \lambda_{n3}^2}} \right\rangle \quad (7.49) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n1}^2 + \lambda_{n2}^2 + \lambda_{n3}^2}} (\xi_{n1} \lambda_{n1} + \xi_{n2} \lambda_{n2} + \xi_{n3} \lambda_{n3}) \\
f_n^* &= \langle \Sigma_{st}, \mathbb{N}_n^* \rangle = \left\langle \phi_{n1} \tilde{D}_n + \phi_{n2} V + \phi_{n3} Y_n, \frac{\lambda_{n1} \tilde{D}_n + \lambda_{n2} V + \lambda_{n3} Y_n}{\sqrt{\lambda_{n1}^2 + \lambda_{n2}^2 + \lambda_{n3}^2}} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n1}^2 + \lambda_{n2}^2 + \lambda_{n3}^2}} (\phi_{n1} \lambda_{n1} + \phi_{n2} \lambda_{n2} + \phi_{n3} \lambda_{n3}) \\
g_n^* &= \langle \Sigma_{tt}, \mathbb{N}_n^* \rangle = \left\langle \psi_{n1} \tilde{D}_n + \psi_{n2} V + \psi_{n3} Y_n, \frac{\lambda_{n1} \tilde{D}_n + \lambda_{n2} V + \lambda_{n3} Y_n}{\sqrt{\lambda_{n1}^2 + \lambda_{n2}^2 + \lambda_{n3}^2}} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n1}^2 + \lambda_{n2}^2 + \lambda_{n3}^2}} (\psi_{n1} \lambda_{n1} + \psi_{n2} \lambda_{n2} + \psi_{n3} \lambda_{n3})
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Öyle ki

$$\begin{aligned}
\xi_{n1} &= (\delta_n k_{n1} k_{n2})_s + \delta_n (k_{n1} k_{n2})_s \\
\xi_{n2} &= -(\mu_n k_{n1} k_{n2})_s - \mu_n (k_{n1} k_{n2})_s \\
\xi_{n3} &= -\delta_n (1 + \delta_n k_{n1} k_{n2}) - \mu_n^2 k_{n1} k_{n2} + (k_{n1} k_{n2})_{ss} \\
\phi_{n1} &= (\delta_n k_{n1} k_{n2})_t + x_{n1} (\mu_n k_{n1} k_{n2}) - x_{n2} (k_{n1} k_{n2})_s \\
\phi_{n2} &= x_{n1} (1 + \delta_n k_{n1} k_{n2}) - (\mu_n k_{n1} k_{n2})_t - x_{n3} (k_{n1} k_{n2})_s \\
\phi_{n3} &= x_{n2} (1 + \delta_n k_{n1} k_{n2}) - x_{n3} (\mu_n k_{n1} k_{n2}) + (k_{n1} k_{n2})_{st} \\
\psi_{n1} &= -(x_{n2} k_{n1} k_{n2})_t - x_{n1} (\delta_n - x_{n3} k_{n1} k_{n2}) - x_{n2} (k_{n1} k_{n2})_t \\
\psi_{n2} &= -x_{n1} x_{n2} k_{n1} k_{n2} + (\delta_n - x_{n3} k_{n1} k_{n2})_t - x_{n3} (k_{n1} k_{n2})_t \\
\psi_{n3} &= -x_{n2}^2 k_{n1} k_{n2} + x_{n3} (\delta_n - x_{n3} k_{n1} k_{n2}) + (k_{n1} k_{n2})_{tt}
\end{aligned} \quad (7.50)$$

dir. Bu eşitlikler kullanılarak genelleştirilmiş fokal yüzeyin ortalama eğriliği ve Gauss eğriliği aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}
K_n^* &= \frac{e_n^* g_n^* - f_n^{*2}}{E_n^* G_n^* - F_n^{*2}} \quad (7.51) \\
&= \frac{\left((\xi_{n1} \lambda_{n1} + \xi_{n2} \lambda_{n2} + \xi_{n3} \lambda_{n3})(\psi_{n1} \lambda_{n1} + \psi_{n2} \lambda_{n2} + \psi_{n3} \lambda_{n3}) - (\phi_{n1} \lambda_{n1} + \phi_{n2} \lambda_{n2} + \phi_{n3} \lambda_{n3})^2 \right)}{\left((\lambda_{n1}^2 + \lambda_{n2}^2 + \lambda_{n3}^2)((1 + \delta_n k_{n1} k_{n2})^2 + (\mu_n k_{n1} k_{n2})^2 + (k_{n1} k_{n2})_s^2)((x_{n2} k_{n1} k_{n2})^2 + (\delta_n - x_{n3} k_{n1} k_{n2})^2 + (k_{n1} k_{n2})_t^2) - (-x_{n2} k_{n1} k_{n2}(1 + \delta_n k_{n1} k_{n2}) - \mu_n k_{n1} k_{n2}(\delta_n - x_{n3} k_{n1} k_{n2}) + (k_{n1} k_{n2})_s(k_{n1} k_{n2})_t)^2 \right)}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 H_n^* &= \frac{E_n^* g_n^* - 2F_n^* f_n^* + G_n^* e_n^*}{2(E_n^* G_n^* - F_n^{*2})} \\
 &= \frac{\begin{pmatrix} ((1 + \delta_n k_{n1} k_{n2})^2 + (\mu_n k_{n1} k_{n2})^2 \\ + (k_{n1} k_{n2})_s^2)(\psi_{n1} \lambda_{n1} + \psi_{n2} \lambda_{n2} + \psi_{n3} \lambda_{n3}) \\ - 2(-x_{n2} k_{n1} k_{n2}(1 + \delta_n k_{n1} k_{n2}) \\ - \mu_n k_{n1} k_{n2}(\delta_n - x_{n3} k_{n1} k_{n2}) \\ + (k_{n1} k_{n2})_s (k_{n1} k_{n2})_t)(\phi_{n1} \lambda_{n1} + \phi_{n2} \lambda_{n2} + \phi_{n3} \lambda_{n3}) \\ + ((x_{n2} k_{n1} k_{n2})^2 + (\delta_n - x_{n3} k_{n1} k_{n2})^2 \\ + (k_{n1} k_{n2})_t^2)(\xi_{n1} \lambda_{n1} + \xi_{n2} \lambda_{n2} + \xi_{n3} \lambda_{n3}) \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2\sqrt{\lambda_{n1}^2 + \lambda_{n2}^2 + \lambda_{n3}^2}(((1 + \delta_n k_{n1} k_{n2})^2 + (\mu_n k_{n1} k_{n2})^2 \\ + (k_{n1} k_{n2})_s^2)((x_{n2} k_{n1} k_{n2})^2 + (\delta_n - x_{n3} k_{n1} k_{n2})^2 \\ + (k_{n1} k_{n2})_t^2) - (-x_{n2} k_{n1} k_{n2}(1 + \delta_n k_{n1} k_{n2}) \\ - \mu_n k_{n1} k_{n2}(\delta_n - x_{n3} k_{n1} k_{n2}) + (k_{n1} k_{n2})_s (k_{n1} k_{n2})_t)^2 \end{pmatrix}}
 \end{aligned} \tag{7.52}$$

7.3. Öklidyen 3-Uzayda Rektifyen Darboux Çatısına Göre Genelleştirilmiş Fokal Yüzeyler

3 boyutlu Öklid uzayında hareketli uzay eğrisi γ ve $\gamma = \gamma(s, t)$ hareketli uzay eğrisinin konum vektörü olsun. Burada s yay parametresi ve t zamanı göstermektedir. Öklidyen 3-uzayda eğri boyunca bir yüzey üzerinde rektifyen Darboux çatısı $\{\tilde{D}_r, T, Y_r\}$ ile gösterelim. $\tilde{D}_r$, γ eğrisinin birim tanjant vektörü, T yüzeyin birim normal vektörü ve $Y_r = \tilde{D}_r \times T$ birim vektördür. $\{\tilde{D}_r, T, Y_r\}$ rektifyen Darboux çatısının t zaman evolüsyonu, genel formunda aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned}
 \tilde{D}_{rt} &= x_{r1}T + x_{r2}Y_r \\
 T_t &= -x_{r1}\tilde{D}_r + x_{r3}Y_r \\
 Y_{tu} &= -x_{r2}\tilde{D}_r - x_{r3}T
 \end{aligned} \tag{7.53}$$

Burada x_{r1}, x_{r2}, x_{r3} diferensiyellebilir fonksiyonlardır. (3.20), (7.53) ve $\tilde{D}_{rst} = \tilde{D}_{rts}, T_{st} = T_{ts}$ ve $Y_{rst} = Y_{rts}$ bağdaşabilirlik şartlarını kullanarak,

$$\begin{aligned}
 x_{r1s} &= \delta_r x_{r3} + \mu_r x_{r2} \\
 x_{r2s} &= -\delta_r - \mu_r x_{r1} \\
 x_{r3s} &= \mu_{rt} - \delta_r x_{r1}
 \end{aligned} \tag{7.54}$$

elde edilir.

$$\gamma_s = \tilde{D}_r \tag{7.55}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
 \gamma_t &= \gamma_s \times \gamma_{ss} = \tilde{D}_r \times \tilde{D}_{rs} \\
 &= \tilde{D}_r \times (-\delta_r Y_r) \\
 &= \delta_r T
 \end{aligned} \tag{7.56}$$

elde edilir. (3.20), (7.53), (7.54), (7.55) ve $\gamma_{ts} = \gamma_{st}$ bağıdaşabilirlik şartları kullanılarak,

$$\begin{aligned} x_{r1} &= \delta_{rs} \\ x_{r2} &= \delta_r \mu_r \\ x_{r3} &= \frac{\delta_{rss} - \delta_r \mu_r^2}{\delta_r} \end{aligned} \quad (7.57)$$

ve

$$\begin{aligned} \mu_{rt} &= \delta_r \delta_{rs} + \left(\frac{\delta_{rss} - \delta_r \mu_r^2}{\delta_r} \right)_s \\ \delta_{rt} &= -\delta_r \mu_{rs} - 2\delta_{rs} \mu_r \end{aligned} \quad (7.58)$$

elde edilir. (7.55), (7.56) denkemlerinin s ve t ye göre türevi alınarak

$$\gamma_{ss} = -\delta_r Y_r \quad (7.59)$$

$$\gamma_{ts} = \delta_{rs} T + \delta_r \mu_r Y_r \quad (7.60)$$

$$\gamma_{tt} = -x_{o1} \delta_r \tilde{D}_r + \delta_{rt} T + x_{o3} \delta_r Y_r \quad (7.61)$$

elde edilir. (7.55), (7.56), (7.59), (7.60) ve (7.61) kullanılarak rektifyen Darboux çatısına göre Hasimoto yüzeyinin birim normal vektör alanı

$$\mathbb{N}_r = \frac{h_s \times h_u}{\|h_s \times h_u\|} = \frac{\tilde{D}_r \times (\delta_r T)}{\|\tilde{D}_r \times (\delta_r T)\|} = Y_r \quad (7.62)$$

şeklinde elde edilir. Öklidyen 3-uzayda rektifyen Darboux çatısına göre Hasimoto yüzeyinin birinci temel formu,

$$I_r = E_r ds^2 + 2F_r ds dt + G_r dt^2 \quad (7.63)$$

biçiminde verilir. Burada, Öklidyen 3-uzayda rektifyen Darboux çatısına göre birinci temel formun katsayıları

$$\begin{aligned} E_r &= \langle \gamma_s, \gamma_s \rangle = \langle \tilde{D}_r, \tilde{D}_r \rangle = 1 \\ F_r &= \langle \gamma_s, \gamma_t \rangle = \langle \tilde{D}_r, \delta_r V \rangle = 0 \\ G_r &= \langle \gamma_t, \gamma_t \rangle = \langle \delta_r T, \delta_r T \rangle = \delta_r^2 \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Öklidyen 3-uzayda rektifyen Darboux çatısına göre Hasimoto yüzeyinin ikinci temel formu

$$II_r = e_r ds^2 + 2f_r ds dt + g_r dt^2 \quad (7.64)$$

biçiminde verilir. Burada, Öklidyen 3-uzayda rektifyen Darboux çatısına göre Hasimoto yüzeyinin ikinci temel formun katsayıları

$$\begin{aligned} e_r &= \langle \gamma_{ss}, \mathbb{N}_r \rangle = -\langle \delta_r Y_r, Y_r \rangle = -\delta_r \\ f_r &= \langle \gamma_{st}, \mathbb{N}_r \rangle = \langle \delta_{rs} T + \delta_r \mu_r Y_r, Y_r \rangle = \delta_r \mu_r \\ g_r &= \langle \gamma_{tt}, \mathbb{N}_r \rangle = \langle -x_{r1} \delta_r \tilde{D}_r + \delta_{rt} T + x_{r3} \delta_r Y_r, Y_r \rangle = x_{r3} \delta_r \end{aligned} \quad (7.65)$$

biçiminde verilir. (7.63), (7.65) kullanılarak Öklidyen 3-uzayda rektifyen Darboux çatısına göre Hasimoto yüzeyinin sırasıyla Gauss ve ortalama eğrilikleri aşağıdaki biçimde çıkarılır:

$$\begin{aligned} K_r &= \frac{e_r g_r - f_r^2}{E_r G_r - F_r^2} \\ &= -\frac{\delta_r^2 x_{r3} + \delta_r^2 \mu_r^2}{\delta_r^2} \\ &= -x_{r3} - \mu_r^2 \end{aligned} \quad (7.66)$$

$$\begin{aligned} H_r &= \frac{E_r g_r - 2F_r f_r + G_r e_r}{2(E_r G_r - F_r^2)} \\ &= \frac{x_{r3} \delta_r - \delta_r^3}{2\delta_r^2} \\ &= \frac{1}{2\delta_r} (x_{r3} - \delta_r^2) \end{aligned} \quad (7.67)$$

(7.66), (7.67) yardımıyla Öklidyen 3-uzayda rektifyen Darboux çatısına göre Hasimoto yüzeyinin birinci ve ikinci asli eğrilikleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} k_{r1} &= H_r + \sqrt{H_r^2 - K_r} \\ &= \frac{\frac{1}{2\delta_r} (x_{r3} - \delta_r^2)}{+ \sqrt{(\frac{1}{2\delta_r} (x_{r3} - \delta_r^2))^2 + x_{r3} + \mu_r^2}} \end{aligned} \quad (7.68)$$

ve

$$\begin{aligned} k_{r2} &= H_r - \sqrt{H_r^2 - K_r} \\ &= \frac{\frac{1}{2\delta_r} (x_{r3} - \delta_r^2)}{- \sqrt{(\frac{1}{2\delta_r} (x_{r3} - \delta_r^2))^2 + x_{r3} + \mu_r^2}} \end{aligned} \quad (7.69)$$

Girdap filament akısı tarafından üretilen genelleştirilmiş fokal yüzeyin parametrik gösterimi aşağıdaki gibi verilir

$$\Omega(s, t) = \gamma(s, t) + \left(\frac{k_{r1} + k_{r2}}{2}\right) \mathbb{N}_r(s, t) \quad (7.70)$$

(7.70) in rektifyen Darboux çatısı kullanılarak s ve t ye göre kısmi türevleri

$$\begin{aligned} \Omega_s(s, t) &= \gamma_s(s, t) + \left(\frac{k_{r1} + k_{r2}}{2}\right)_s \mathbb{N}_r(s, t) + \left(\frac{k_{r1} + k_{r2}}{2}\right) \mathbb{N}_{rs}(s, t) \\ &= \tilde{D}_r + \frac{1}{2}(k_{r1s} + k_{r2s})Y_r + \frac{1}{2}(k_{r1} + k_{r2})(\delta_r \tilde{D}_r - \mu_r T) \\ &= (1 + \frac{1}{2}\delta_r(k_{r1} + k_{r2}))\tilde{D}_r - \frac{1}{2}\mu_r(k_{r1} + k_{r2})T + \frac{1}{2}(k_{r1s} + k_{r2s})Y_r \end{aligned} \quad (7.71)$$

$$\begin{aligned} \Omega_t(s, t) &= \gamma_t(s, t) + \left(\frac{k_{r1} + k_{r2}}{2}\right)_t \mathbb{N}_r(s, t) + \left(\frac{k_{r1} + k_{r2}}{2}\right) \mathbb{N}_{rt}(s, t) \\ &= \delta_r T + \frac{1}{2}(k_{r1t} + k_{r2t})Y_r + \frac{1}{2}(k_{r1} + k_{r2})(-x_{r2}\tilde{D}_r - x_{r3}T) \\ &= -\frac{1}{2}x_{r2}(k_{r1} + k_{r2})\tilde{D}_r + (\delta_r - \frac{1}{2}x_{r3}(k_{r1} + k_{r2}))T + \frac{1}{2}(k_{r1t} + k_{r2t})Y_r \end{aligned} \quad (7.72)$$

şeklinde bulunur. Burada, k_{r1s} ve k_{r2s} , asli eğriliklerin s parametresine göre, k_{r1s} ve k_{r2s} , t parametresine göre kısmi türevleridir. (7.71) ve (7.72) kullanılarak girdap filament akısı tarafından üretilen genelleştirilmiş fokal yüzeyin birim normal vektör alanı $\mathbb{N}_r^*$ aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\mathbb{N}_r^* = \frac{\Omega_s \times \Omega_t}{\|\Omega_s \times \Omega_t\|} = \frac{\lambda_{r1}\tilde{D}_r + \lambda_{r2}T + \lambda_{r3}Y_r}{\sqrt{\lambda_{r1}^2 + \lambda_{r2}^2 + \lambda_{r3}^2}}, \quad \lambda_{r1}^2 + \lambda_{r2}^2 + \lambda_{r3}^2 \neq 0 \quad (7.73)$$

Burada,

$$\begin{aligned}\Omega_s \times \Omega_t = & \left(-\frac{1}{4}\mu_r(k_{r1} + k_{r2})(k_{r1t} + k_{r2t}) - \frac{1}{2}(\delta_r - \frac{1}{2}x_{r3}(k_{r1} + k_{r2}))\right)\tilde{D}_r \\ & + \left(-\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}\delta_r(k_{r1} + k_{r2}))(k_{r1t} + k_{r2t}) - \frac{1}{4}x_{r2}(k_{r1} + k_{r2})(k_{r1s} + k_{r2s})\right)T \\ & + \left((1 + \frac{1}{2}\delta_r(k_{r1} + k_{r2})(\delta_r - \frac{1}{2}x_{r3}(k_{r1} + k_{r2})) - \frac{1}{4}\mu_r x_{r2}(k_{r1} + k_{r2})^2\right)Y_r\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\lambda_{r1} &= -\frac{1}{4}\mu_r(k_{r1} + k_{r2})(k_{r1t} + k_{r2t}) - \frac{1}{2}(\delta_r - \frac{1}{2}x_{r3}(k_{r1} + k_{r2})) \\ \lambda_{r2} &= -\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}\delta_r(k_{r1} + k_{r2}))(k_{r1t} + k_{r2t}) - \frac{1}{4}x_{r2}(k_{r1} + k_{r2})(k_{r1s} + k_{r2s}) \\ \lambda_{r3} &= (1 + \frac{1}{2}\delta_r(k_{r1} + k_{r2})(\delta_r - \frac{1}{2}x_{r3}(k_{r1} + k_{r2})) - \frac{1}{4}\mu_r x_{r2}(k_{r1} + k_{r2})^2\end{aligned}\quad (7.74)$$

Öklidyen 3-uzayda rektifyen Darboux çatısına göre Ω genelleştirilmiş fokal yüzeyinin birinci temel formu

$$I_r^* = E_r^* ds^2 + 2F_r^* dsdt + G_r^* dt^2 \quad (7.75)$$

şeklinde verilir. Öklidiyen 3-uzayda rektifyen Darboux çatısına göre Ω genelleştirilmiş fokal yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned}E_r^* &= \langle \Omega_s, \Omega_s \rangle = \langle (1 + \frac{1}{2}\delta_r(k_{r1} + k_{r2}))\tilde{D}_r - \frac{1}{2}\mu_r(k_{r1} + k_{r2})T + \frac{1}{2}(k_{r1s} + k_{r2s})Y_r, \\ &\quad (1 + \frac{1}{2}\delta_r(k_{r1} + k_{r2}))\tilde{D}_r - \frac{1}{2}\mu_r(k_{r1} + k_{r2})T + \frac{1}{2}(k_{r1s} + k_{r2s})Y_r \rangle \\ &= (1 + \frac{1}{2}\delta_r(k_{r1} + k_{r2}))^2 + \frac{1}{4}\mu_r^2(k_{r1} + k_{r2})^2 + \frac{1}{4}(k_{r1s} + k_{r2s})^2 \\ F_r^* &= \langle \Omega_s, \Omega_t \rangle = \langle (1 + \frac{1}{2}\delta_r(k_{r1} + k_{r2}))\tilde{D}_r - \frac{1}{2}\mu_r(k_{r1} + k_{r2})T + \frac{1}{2}(k_{r1s} + k_{r2s})Y_r, \\ &\quad -\frac{1}{2}x_{r2}(k_{r1} + k_{r2})\tilde{D}_r + (\delta_r - \frac{1}{2}x_{r3}(k_{r1} + k_{r2}))T + \frac{1}{2}(k_{r1t} + k_{r2t})Y_r \rangle \\ &= -\frac{1}{2}x_{r2}(1 + \frac{1}{2}\delta_r(k_{r1} + k_{r2}))(k_{r1} + k_{r2}) \\ &\quad -\frac{1}{2}\mu_r(k_{r1} + k_{r2})(\delta_r - \frac{1}{2}x_{r3}(k_{r1} + k_{r2})) + \frac{1}{4}(k_{r1s} + k_{r2s})(k_{r1t} + k_{r2t}) \\ G_r^* &= \langle \Omega_t, \Omega_t \rangle = \langle -\frac{1}{2}x_{r2}(k_{r1} + k_{r2})\tilde{D}_r + (\delta_r - \frac{1}{2}x_{r3}(k_{r1} + k_{r2}))T + \frac{1}{2}(k_{r1t} + k_{r2t})Y_r, \\ &\quad -\frac{1}{2}x_{r2}(k_{r1} + k_{r2})\tilde{D}_r + (\delta_r - \frac{1}{2}x_{r3}(k_{r1} + k_{r2}))T + \frac{1}{2}(k_{r1t} + k_{r2t})Y_r \rangle \\ &= \frac{1}{4}x_{r2}^2(k_{r1} + k_{r2})^2 + (\delta_r - \frac{1}{2}x_{r3}(k_{r1} + k_{r2}))^2 + \frac{1}{4}(k_{r1t} + k_{r2t})^2\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. (7.71) ve (7.72) eşitliklerinin s ve t ye göre türevleri alınarak

$$\begin{aligned}
\Omega_{ss} &= \begin{pmatrix} (\frac{1}{2}(\delta_{rs}(k_{r1} + k_{r2}) + \delta_r(k_{r1s} + k_{r2s}) + \delta_r(k_{r1s} + k_{r2s}))\tilde{D}_r \\ -\frac{1}{2}(\mu_{rs}(k_{r1} + k_{r2}) + \mu_r(k_{r1s} + k_{r2s}) + \mu_r(k_{r1s} + k_{r2s}))T \\ +(-\delta_r(1 + \frac{1}{2}\delta_r(k_{r1} + k_{r2})) \\ -\frac{1}{2}\mu_r^2(k_{r1s} + k_{r2s}) + \frac{1}{2}(k_{r1ss} + k_{r2ss}))Y_r \end{pmatrix} \\
\Omega_{st} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\delta_{rt}(k_{r1} + k_{r2}) + \delta_r(k_{r1t} + k_{r2t}) \\ +x_{r1}\mu_r(k_{r1} + k_{r2}) - x_{r2}(k_{r1s} + k_{r2s}))\tilde{D}_r \\ +(x_{r1}(1 + \frac{1}{2}\delta_r(k_{r1} + k_{r2})) - \frac{1}{2}(\mu_{rt}(k_{r1} + k_{r2}) \\ +\mu_r(k_{r1t} + k_{r2t})) - \frac{1}{2}x_{r3}(k_{r1s} + k_{r2s}))T \\ +(x_{r2}(1 + \frac{1}{2}\delta_r(k_{r1} + k_{r2})) \\ -\frac{1}{2}x_{r3}\mu_r(k_{r1} + k_{r2}) + \frac{1}{2}(k_{r1st} + k_{r2st}))Y_r \end{pmatrix} \\
\Omega_{tt} &= \begin{pmatrix} (-\frac{1}{2}x_{r2t}(k_{r1} + k_{r2}) - \frac{1}{2}x_{r2}(k_{r1t} + k_{r2t}) \\ -x_{r1}(\delta_r - \frac{1}{2}x_{r3}(k_{r1} + k_{r2})) - \frac{1}{2}x_{r2}(k_{r1t} + k_{r2t}))\tilde{D}_r \\ +(-\frac{1}{2}x_{r1}x_{r2}(k_{r1} + k_{r2}) \\ +(\delta_{rt} - \frac{1}{2}x_{r3t}(k_{r1} + k_{r2}) - x_{r3}(k_{r1t} + k_{r2t}))T \\ +(-\frac{1}{2}x_{r2}^2(k_{r1} + k_{r2}) + x_{r3}(\delta_r - \frac{1}{2}x_{r3}(k_{r1} + k_{r2})) \\ +\frac{1}{2}(k_{r1tt} + k_{r2tt}))Y_r \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Öklidyen 3-uzayda rektifyen Darboux çatısına göre Ω genelleştirilmiş fokal yüzeyinin ikinci temel formu

$$II_r^* = e_r^* ds^2 + 2f_r^* dsdt + g_r^* dt^2$$

Bu eşitlikler kullanılarak Öklidyen 3-uzayda Ω genelleştirilmiş fokal yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned}
e_r^* &= \langle \Omega_{ss}, \mathbb{N}_r^* \rangle = \left\langle \xi_{r1}\tilde{D}_r + \xi_{r2}T + \xi_{r3}Y_r, \frac{\lambda_{r1}\tilde{D}_r + \lambda_{r2}T + \lambda_{r3}Y_r}{\sqrt{\lambda_{r1}^2 + \lambda_{r2}^2 + \lambda_{r3}^2}} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_{r1}^2 + \lambda_{r2}^2 + \lambda_{r3}^2}} (\xi_{r1}\lambda_{r1} + \xi_{r2}\lambda_{r2} + \xi_{r3}\lambda_{r3}) \\
f_r^* &= \langle \Omega_{st}, \mathbb{N}_r^* \rangle = \left\langle \phi_{r1}\tilde{D}_r + \phi_{r2}T + \phi_{r3}Y_r, \frac{\lambda_{r1}\tilde{D}_r + \lambda_{r2}T + \lambda_{r3}Y_r}{\sqrt{\lambda_{r1}^2 + \lambda_{r2}^2 + \lambda_{r3}^2}} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_{r1}^2 + \lambda_{r2}^2 + \lambda_{r3}^2}} (\phi_{r1}\lambda_{r1} + \phi_{r2}\lambda_{r2} + \phi_{r3}\lambda_{r3}) \\
g_r^* &= \langle \Omega_{tt}, \mathbb{N}_r^* \rangle = \left\langle \psi_{r1}\tilde{D}_n + \psi_{r2}T + \psi_{r3}Y_r, \frac{\lambda_{r1}\tilde{D}_r + \lambda_{r2}T + \lambda_{r3}Y_r}{\sqrt{\lambda_{r1}^2 + \lambda_{r2}^2 + \lambda_{r3}^2}} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_{r1}^2 + \lambda_{r2}^2 + \lambda_{r3}^2}} (\psi_{r1}\lambda_{r1} + \psi_{r2}\lambda_{r2} + \psi_{r3}\lambda_{r3})
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Öyle ki

$$\begin{aligned}
\xi_{r1} &= \frac{1}{2}(\delta_{rs}(k_{r1} + k_{r2}) + \delta_r(k_{r1s} + k_{r2s}) + \delta_r(k_{r1s} + k_{r2s})) \\
\xi_{r2} &= -\frac{1}{2}(\mu_{rs}(k_{r1} + k_{r2}) + \mu_r(k_{r1s} + k_{r2s}) + \mu_r(k_{r1s} + k_{r2s})) \\
\xi_{r3} &= -\delta_r(1 + \frac{1}{2}\delta_r(k_{r1} + k_{r2})) - \frac{1}{2}\mu_r^2(k_{r1s} + k_{r2s}) + \frac{1}{2}(k_{r1ss} + k_{r2ss}) \\
\phi_{r1} &= \frac{1}{2}(\delta_{rt}(k_{r1} + k_{r2}) + \delta_r(k_{r1t} + k_{r2t}) + x_{r1}\mu_r(k_{r1} + k_{r2}) - x_{r2}(k_{r1s} + k_{r2s})) \\
\phi_{r2} &= x_{r1}(1 + \frac{1}{2}\delta_r(k_{r1} + k_{r2})) - \frac{1}{2}(\mu_{rt}(k_{r1} + k_{r2}) + \mu_r(k_{r1t} + k_{r2t})) - \frac{1}{2}x_{r3}(k_{r1s} + k_{r2s}) \\
\phi_{r3} &= x_{r2}(1 + \frac{1}{2}\delta_r(k_{r1} + k_{r2})) - \frac{1}{2}x_{r3}\mu_r(k_{r1} + k_{r2}) + \frac{1}{2}(k_{r1st} + k_{r2st}) \\
\psi_{r1} &= -\frac{1}{2}x_{r2t}(k_{r1} + k_{r2}) - \frac{1}{2}x_{r2}(k_{r1t} + k_{r2t}) - x_{r1}(\delta_r - \frac{1}{2}x_{r3}(k_{r1} + k_{r2})) - \frac{1}{2}x_{r2}(k_{r1t} + k_{r2t}) \\
\psi_{r2} &= -\frac{1}{2}x_{r1}x_{r2}(k_{r1} + k_{r2}) + (\delta_{rt} - \frac{1}{2}x_{r3t}(k_{r1} + k_{r2}) - x_{r3}(k_{r1t} + k_{r2t})) \\
\psi_{r3} &= -\frac{1}{2}x_{r2}^2(k_{r1} + k_{r2}) + x_{r3}(\delta_r - \frac{1}{2}x_{r3}(k_{r1} + k_{r2})) + \frac{1}{2}(k_{r1tt} + k_{r2tt})
\end{aligned}$$

dir. Bu eşitlikler kullanılarak genelleştirilmiş fokal yüzeyin ortalama eğriliği ve Gauss eğriliği aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}
K_n^* &= \frac{e_n^*g_n^* - f_n^{*2}}{E_n^*G_n^* - F_n^{*2}} \\
&= \frac{(\xi_{n1}\lambda_{n1} + \xi_{n2}\lambda_{n2} + \xi_{n3}\lambda_{n3})(\psi_{n1}\lambda_{n1} + \psi_{n2}\lambda_{n2} + \psi_{n3}\lambda_{n3}) - (\phi_{n1}\lambda_{n1} + \phi_{n2}\lambda_{n2} + \phi_{n3}\lambda_{n3})^2}{(\lambda_{n1}^2 + \lambda_{n2}^2 + \lambda_{n3}^2)((1 + \delta_n k_{n1}k_{n2})^2 + (\mu_n k_{n1}k_{n2})^2 + (k_{n1}k_{n2})_s^2((x_{n2}k_{n1}k_{n2})^2 + (\delta_n - x_{n3}k_{n1}k_{n2})^2 + (k_{n1}k_{n2})_t^2) - (-x_{n2}k_{n1}k_{n2}(1 + \delta_n k_{n1}k_{n2}) - \mu_n k_{n1}k_{n2}(\delta_n - x_{n3}k_{n1}k_{n2}) + (k_{n1}k_{n2})_s(k_{n1}k_{n2})_t)^2)}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
H_n^* &= \frac{E_n^*g_n^* - 2F_n^*f_n^* + G_n^*e_n^*}{2(E_n^*G_n^* - F_n^{*2})} \\
&= \frac{\left(\begin{aligned} &((1 + \delta_n k_{n1}k_{n2})^2 + (\mu_n k_{n1}k_{n2})^2 + (k_{n1}k_{n2})_s^2)(\psi_{n1}\lambda_{n1} + \psi_{n2}\lambda_{n2} + \psi_{n3}\lambda_{n3}) \\ &- 2(-x_{n2}k_{n1}k_{n2}(1 + \delta_n k_{n1}k_{n2}) - \mu_n k_{n1}k_{n2}(\delta_n - x_{n3}k_{n1}k_{n2}) \\ &+ (k_{n1}k_{n2})_s(k_{n1}k_{n2})_t)(\phi_{n1}\lambda_{n1} + \phi_{n2}\lambda_{n2} + \phi_{n3}\lambda_{n3}) \\ &+ ((x_{n2}k_{n1}k_{n2})^2 + (\delta_n - x_{n3}k_{n1}k_{n2})^2 + (k_{n1}k_{n2})_t^2)(\xi_{n1}\lambda_{n1} + \xi_{n2}\lambda_{n2} + \xi_{n3}\lambda_{n3}) \end{aligned} \right)}{\left(\begin{aligned} &2\sqrt{\lambda_{n1}^2 + \lambda_{n2}^2 + \lambda_{n3}^2}((1 + \delta_n k_{n1}k_{n2})^2 + (\mu_n k_{n1}k_{n2})^2 + (k_{n1}k_{n2})_s^2((x_{n2}k_{n1}k_{n2})^2 + (\delta_n - x_{n3}k_{n1}k_{n2})^2 + (k_{n1}k_{n2})_t^2) \\ &- (-x_{n2}k_{n1}k_{n2}(1 + \delta_n k_{n1}k_{n2}) - \mu_n k_{n1}k_{n2}(\delta_n - x_{n3}k_{n1}k_{n2}) + (k_{n1}k_{n2})_s(k_{n1}k_{n2})_t)^2 \end{aligned} \right)}
\end{aligned}$$

8. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, Öklidyen 3-uzayda eğrileri ve yüzeyleri incelemek için güçlü araçlar olan oskülatör, normal ve rektifyen Darboux çatılarına odaklanılmıştır. Darboux çatısı yüzeyler üzerindeki eğrilerin özelliklerini belirlemede ve manyetik eğriler gibi fiziksel anlamı olan eğrileri modellemede önemli bir yere sahiptir. Alkan vd. (2024) tarafından yüzey eğrileri için tanımlanan oskülatör, normal ve rektifyen Darboux çatıları, yüzeyler ve eğriler arasındaki etkileşimi derinlemesine inceleme potansiyeli sunmaktadır.

Çalışmanın ilk kısmında yeni tanımlanan bu Darboux çatılarına göre manyetik eğri kavramını genişlettik. Oskülatör, normal ve rektifyen Darboux vektörleri boyunca etkili manyetik alanlar altında hareket eden yüklü parçacıkların yörüngelerini tanımlayarak yeni manyetik eğri sınıflarını ortaya koyduk. Elde ettiğimiz Lorentz kuvvet denklemleri, bu yeni manyetik eğri türlerinin dinamiklerini anlamak için bir temel ortaya koymaktadır. Bu denklemlerin analizi farklı manyetik alan yapıları altında parçacıkların nasıl hareket edeceğine dair önemli bilgiler sağlayabilir.

İkinci olarak, Hasimoto dönüşümü ve doğrusal olmayan Schrödinger (NLS) denklemi arasındaki ilişkiden yola çıkarak (Hasimoto, 1972; Abdel-All vd., 2012; Ertuğ Gürbüz, 2018, 2019), oskülatör, normal ve rektifyen Darboux çatılarına göre yeni Hasimoto benzeri dönüşümler tanımladık. Barros ve Romero (2007) Killing manyetik yörüngelerinin NLS denkleminin çözümleri olarak ifade edilebileceğini söyleyerek manyetik eğriler ve dalga teorisi arasında bir bağlantı ortaya koymuşlardır. Bu çalışmada tanımlanan yeni Hasimoto benzeri dönüşümler ve bunların diferansiyel formülleri, bu bağlantıyı farklı bir açıdan inceleme imkanı sunmaktadır. Bu dönüşümler aracılığıyla elde edilen yeni NLS denklem sınıfları, farklı fiziksel sistemlerin modellenmesinde kullanılabilecek yeni geometrik araçlar sağlayabilir.

Son olarak, oskülatör, normal ve rektifyen Darboux çatılarına göre yeni Hasimoto benzeri dönüşümlerle ilişkili Hasimoto yüzeylerini inşa etmeyi ve bu yüzeylerin geometrik özelliklerini (Gauss ve ortalama eğrilikleri, asli eğrilikleri) incelemeyi ve bu şekilde elde edilen yeni yüzeylerin şekli ve içsel geometrisi hakkında bilgi sahibi olmayı amaçladık.

Oskülatör, normal ve rektifyen Darboux çatılarına göre Hasimoto yüzeylerinin genelleştirilmiş fokal yüzeylerinin bulunması optik ve akustik gibi farklı fizik alanlarında yeni bir bakış sunabileceğinden potansiyel uygulamalar açısından önemlidir.

9. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada $\mathbb{E}^3$ uzayında oskülatör, normal ve rektifyen Darboux çatılarına göre manyetik eğriler incelendi. Bu çatılara göre NLS ile ilişkili yeni sınıflar ve Hasimoto benzeri dönüşümler ve NLS denklemi ile ilişkili Hasimoto benzeri dönüşümlerin diferensiyelleri için yeni formüller elde edildi. Oskülatör, normal ve rektifyen Darboux çatılarına göre Hasimoto yüzeyleri elde edilip bu yüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri hesaplandı, Hasimoto yüzeylerinin özel olarak Gauss eğrilik fonksiyonu, ortalama eğrilik fonksiyonu ve enerji fonksiyonu olarak adlandırılan genelleştirilmiş fokal yüzeyleri verildi.

Çalışmamız $\mathbb{E}^3$ uzayında oskülatör, normal ve rektifyen Darboux çatılarına göre yapılmıştır. Öklidiyen 3-uzayda başka çatılara göre incelenebilir, Minkowski uzayına aktararak aynı çatı ve farklı çatılar için de çalışmalar yapılarak yeni sonuçlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Abdel-aziz H.S., Serry H. M., El-Adawy F. M., & Khalifa Saad M. (2024). *Geometry and evolution of Hasimoto surface in Minkowski 3-space*, PLOS ONE, 19(1), e0294310.
- Alkan, A., Kocayiğit, H., Ağırman Aydın, T. (2024). *New moving frames for the curves lying on a surface*, Sigma J Eng Nat Sci, 42(4), 1023-1029.
- Balakrishnan, R. (1994). *Space curve evolution, geometric phase and solitons*, Theoretical and Mathematical Physics, 99, 501-504.
- Barros M. & Romero A. (2007). *Magnetic vortices*. Europhysics Letters, 77(3), 1-6.
- Barros, M., Ferrández, A., Lucas, P., & Merono, M.A. (1999). *Solutions of the Betchov-Da Rios soliton equation: a Lorentzian approach*. J. Geom. Phys., 31, 217-228.
- Barros, M., Cabrerizo, J. L., Fernandez, M., & Romero, A. (2007). *Magnetic vortex filament flows*. J. Math. Phys., 48(8), 082904.
- Bishop, L. R. (1975). *There is more than one way to frame a curve*. The American Mathematical Monthly, 82(3), 246-251.
- Cabrerizo, J. L. (2013). *Magnetic fields in 2D and 3D sphere*. J. Nonlinear Math. Phys., 20(3), 440-450.
- Coquillart, S. (1987). *Computing offsets of B-spline curves*. Computer-Aided Design, 19(6), 305-09.
- Do Carmo, M.P. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Doğan, F. & Yaylı, Y. (2012). *Tubes with Darboux frame*. Int. J. Contemp. Math. Sciences, 7(16), 751-758.
- Druta-Romaniuc, S.L. & Munteanu, M.I. (2011) *Magnetic curves corresponding to Killing magnetic fields in E^3* . J. Math. Phys., 52, 113506
- Elsharkawy, A., (2024). *Exploring Hasimoto surfaces within equiform geometry in Minkowski space*, Physica Scripta, 100, 016101

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Elzawy, M. (2021). *Hasimoto surfaces in Galilean space G_3* , Journal of the Egyptian Mathematical Society, 29(5).
- Eren, K., Myrzakulova, Z., Ersoy, S., Nugmanova, G., & Myrzakulov, R. (2022). *Focal Surfaces of Integrable Isotropic and Anisotropic Vortex Filament Flows*. https://www.researchgate.net/publication/363840850_Focal_Surfaces_of_Integrable_Isotropic_and_Anisotropic_Vortex_Filament_Flows. Erişim tarihi:7.12.2022
- Ertuğ Gürbüz, N. (2010). *Intrinsic geometry of NLS equation and heat system in 3-dimensional Minkowski space*. Adv. Studies Theor. Phys., 4(1), 557-564.
- Ertuğ Gürbüz N., (2018a). *Three classes of non-lightlike curve evolution according to Darboux frame and geometric phase*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.15(2), 1850023.
- Ertuğ Gürbüz N., (2018b) *Öklidiyen uzayda Darboux çatısına göre eğri evolüsyonunun üç sınıfına göre Hasimoto yüzeyleri*, Fen bilimleri ve matematik alanında akademik çalışmalar, Gece Publishing, 49-62.
- Ertuğ Gürbüz, N., Yoon, D. W. (2020). *Hasimoto surfaces for two classes of curve evolution in Minkowski 3-space*. Demonstratio Mathematica, 53, 277-284.
- Ertuğ Gürbüz N., (2023). *The evolution of an electric field, Hasimoto surfaces and three differential formulas with the new frame in $\mathbb{R}_1^3$* , Optik, 272, 170217.
- Ertuğ Gürbüz N., (2024). *Geometric phases, magnetic curves for Darboux frames on lightlike and timelike surfaces*. Journal of Universal Mathematics, 7, 158-174.
- Gray, A. (1993). *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces*. CRC Press.
- Güler, F. (2022). *The focal surfaces of offset surface*. Optik - International Journal for Light and Electron Optics, 271,170053.
- Hacısalıhoğlu, H.H., (2000). *Diferensiyel Geometri*, Cilt I, Ankara Üniversitesi.
- Hagen, H., & Hahmann, S. (1992). *Generalized Focal Surfaces: a New Method for Surface Interrogation*, IEEE Proceedings Visualization, 70-76.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Hagen, H., Müller, H., & Nielson, G. M. (1991). *Focus on Scientific Visualization*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 252-258.
- Hananoi, S., Ito, N. and Izumiya, S. (2015). Spherical Darboux images of curves on surfaces, *Journal of Singularities*, 12, 114-127.
- Hasimoto, H. (1971). *Motion of a vortex filament and its relation to elastica*. J. Phys. Soc. Jpn., 31, 293-294.
- Hasimoto, H. (1972). *A soliton on a vortex filament*. J. Fluid. Mech. 51, 477-485.
- Kiş, İ., & Öztürk, G. (2020). A new study on focal surface of a given surface, *Turkish Journal of Science*, 5, 208-213.
- Lakshmanan, M. (1977). *Continuum spin system as an exactly solvable dynamical system*. Phys. Lett. A., 61, 53-54.
- Lamb Jr, G. L. (1977). *Solitons on moving space curves*. Journal of Mathematical Physics, 18(8), 1654-1661.
- Langer, J., & Perline, R. (1990). *The Hasimoto transformation and integrable flows on curves*. Applied Mathematics Letters, 3(2), 61-64.
- Muruges, S., & Balakrishnan, R. (2001). *New connections between moving curves and soliton equations*. Physics Letters A, 290(1-2), 81-87.
- Nassar H. Abdel-All, R. A. Hussien, & Taha Youssef (2012). *Hasimoto Surfaces*, Life Sci J, 9(3), 556-560.
- Özdemir, B. (2008). *E^n de fokal eğriler ve fokal yüzeylerin bir karakterizasyonu*. [Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü] YÖK Ulusal Tez Merkezi. <https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/TezGoster?key=NtBAevXNhYaNqJFoAcdBdh1NJj57bBtJ-QuwgsE4bq5gSW9fEjWmlFoSVBiUJFGf>
- Sabuncuoğlu, A. (2004). *Diferensiyel geometri*. Nobel Yayınevi, Ankara.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Shifrin, T. (2008). *Differential geometry: a first course in curves and surfaces*. University of Georgia.
- Soliman, M.A., Abdel-All, N. H. , Hussien, R. A., & Youssef ,T. (2019). *Evolution of space curves using Type-3 Bishop frame*. Caspian J. Math. Sci., 8(1), 58-73.<https://doi.org/10.22080/CJMS.2018.14455.1344>.
- Şimşek H. (2016). *Sonlu boyutlu Minkowski uzaylarında fokal eğriler ve fokal yüzeyler*. [Doktora Tezi, Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü] YÖK Ulusal Tez Merkezi.https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/TezGoster?key=Br_XTptK8CZ70f0JGX9xEoQI0G70AnMnZsPAZqDy1qssPy87zBo3oXdUwdAm2Vzj
- Yılmaz, S., & Turgut, M. (2010). *New Version of Bishop frame and an Application to Spherical Images*. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 371, 764-776.