T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİJİTAL TOPOLOJİDE SABİT NOKTA TEOREMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Büşra SELEN

DENİZLİ, AĞUSTOS-2025

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİJİTAL TOPOLOJİDE SABİT NOKTA TEOREMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Büşra SELEN

DENİZLİ, AĞUSTOS-2025

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

Büşra SELEN

ÖZET

DİJİTAL TOPOLOJİDE SABİT NOKTA TEOREMLERİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Büşra SELEN
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
TEZ DANIŞMANI: Dr. Öğr.Üyesi.Gülseli BURAK
DENİZLİ, AĞUSTOS-2025

Bu tezde, dijital topolojik uzaylarda sabit nokta teoremleri incelenmiştir. Öncelikle dijital yakınlık bağıntısı, dijital aralıklar, bağlantılılık, dijital homeomorfizma ve homotopi kavramları ele alınmıştır. Ardından dijital metrik uzaylar tanıtılmış, Hausdorff metriği, Euler karakteristiği ve Lusternik–Schnirelmann kategorisi gibi topolojik ölçütler açıklanmıştır. Tezin odak noktası ise dijital metrik uzaylarda kontraksiyon koşulları altında Banach, Kannan, Chatterjea, Reich ve Zamfirescu tip sabit nokta teoremleridir. Dijital kontraksiyon dönüşümlerinin sabit nokta özellikleri detaylı olarak incelenmiş ve κ-bağlantılı ya da bağlantısız yapılar üzerindeki davranışları örneklerle açıklanmıştır. Bu çalışma, dijital topolojide sabit nokta teoremlerinin dijital metrik yapılar üzerindeki geçerliliğini sistemli biçimde göstermeyi ve bu alandaki kuramsal altyapıyı güçlendirmeyi hedeflemektedir.

ANAHTAR KELİMELER: Dijital Topoloji, Dijital Metrik Uzaylar, Sabit Nokta Teoremleri, Kontraksiyon Dönüşümleri.

ABSTRACT

FIXED POINT THEOREMS IN DIGITAL TOPOLOGY
MSC THESIS
Büşra SELEN
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: Asst.Prof.Dr. Gülseli BURAK)
DENİZLİ, AUGUST-2025

In this thesis, fixed point theorems in the context of digital topology are examined. Digital topology enables the application of classical topological concepts to finite and discrete structures, making it possible to analyze digital images. This study first introduces fundamental concepts such as digital adjacency relations, digital intervals, connectedness, digital homeomorphism, and homotopy. Then, digital metric spaces are presented, and topological measures such as Hausdorff distance, Euler characteristic, and Lusternik–Schnirelmann category are explained. The main focus of this thesis is to establish digital analogues of fixed point theorems of Banach, Kannan, Chatterjea, Reich, and Zamfirescu types under contraction conditions in digital metric spaces. The properties of digital contraction mappings and their behavior on κ-connected and disconnected structures are examined in detail with examples. This study aims to systematically demonstrate the validity of fixed point theorems in digital metric spaces and to strengthen the theoretical foundation in this area.

KEYWORDS: Digital Topology, Digital Metric Spaces, Fixed Point Theorems, Contraction Mappings.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

κ	:	Yakınlık bağıntısı
d	:	Metrik fonksiyon
d_κ	:	En kısa yol metrik fonksiyonu
H	:	Hausdorff metriği
H_d	:	d ye bağlı Hausdorf metriği
H_p	:	d_p ye bağlı Hausdorf metriği
$H_{(x,\kappa)}$	:	X de d_κ ya bağlı Hausdorff metriği
χ	:	Euler karakteristiği
$S_\chi(A,B)$	:	Euler karakteristiğine bağlı metrik fonksiyonu
$LS_\kappa(A,B)$	:	Lusternik–Schnirelmann kategorisine bağlı metrik fonksiyonu
$S_d(X,Y)$	:	d metriğine bağlı süreklilik metriği
$SC_\kappa^{n,l}$	:	$\mathbb{Z}^n$ de l elemanlı basit kapalı κ- eğri

ÖNSÖZ

Çalışmam boyunca bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan, yönlendirmeleriyle bana yol gösteren değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Gülseli BURAK'a en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca her zaman yanımda olan, desteğini ve sevgisini esirgemeyen aileme ve hayat arkadaşım Oktay ALABAŞ'a sonsuz teşekkür ederim.

Teşekkürlerimle,

Büşra SELEN

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Dijital topoloji, klasik topolojik kavramların sonlu ve ayrık yapılar üzerine uyarlanması ile ortaya çıkan bir çalışma alanıdır. Özellikle bilgisayarla görüntü işleme, biyomedikal ve analiz gibi uygulamalarda, dijital görüntülerin topolojik özelliklerini doğru biçimde incelemek büyük önem taşır. Dijital topoloji, kafes yapıdaki nokta kümeleri üzerinde tanımlanan yakınlık bağıntısı ile şekillenir ve bu yapılar üzerinde süreklilik, bağlantılılık, homeomorfizma ve homotopi gibi kavramlar yeniden tanımlanır.

Bu çalışmanın temel amacı, dijital metrik uzaylar üzerinde klasik sabit nokta teoremlerini incelemek ve bu bağlamda dijital kontraksiyon dönüşümlerinin sabit nokta özelliklerini araştırmaktır. Dijital görüntüler üzerinde tanımlanan metrik yapılar (örneğin Öklit metriği, Manhattan metriği ve en kısa yol metrikleri) sayesinde, Hausdorff metriği gibi kavramların dijital versiyonları elde edilir ve bunlar dijital görüntülerin benzerliğini ölçmekte kullanılır.

Çalışmada ilk olarak dijital topolojinin temel kavramları olan dijital aralık, bağlantılılık, süreklilik, homeomorfizma, homotopi, basit kapalı eğri ve kapalı yüzey gibi yapılar detaylı biçimde tanımlanmıştır. Ardından Hausdorff metriği bağlamında dijital görüntüler arası mesafe ölçümleri, Euler karakteristiği ve Lusternik–Schnirelmann kategorisi gibi topolojik özelliklerin sayısal ölçümleri sunulmuştur.

Bunu takiben, dijital metrik uzaylarda kontraksiyon dönüşümleri detaylı olarak ele alınmış; Banach, Kannan, Chatterjea, Reich ve Zamfirescu tip kontraksiyonlar için sabit nokta sonuçlarının dijital versiyonları ortaya konmuştur. Ayrıca κ-bağlantılı ve κ-bağlantılı olmayan dijital uzaylarda kontraksiyonların farklı davranışları örneklerle incelenmiştir.

Bu tez ile amaçlanan, dijital topolojide sabit nokta teoremlerinin dijital metrik yapılar üzerindeki geçerliliğini sistemli biçimde ortaya koymak ve klasik analizdeki güçlü sabit nokta ilkelerinin dijital uzaylara nasıl adapte edilebileceğini göstermektir. Bu sayede hem kuramsal açıdan dijital topolojinin temelleri güçlendirilecek hem de dijital görüntü işleme uygulamaları için sağlam matematiksel araçlar sağlanacaktır.

2. Ön Bilgiler

2.1 κ-Yakınlık Bağıntısı

$\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi ve $\mathbb{Z}^n$ n boyutlu Öklid uzayında kafes noktalarının kümesi olsun. Bir (ikili) dijital görüntü, yakınlık bağıntısı ile $\mathbb{Z}^n$ nin bir alt kümesidir. Yakınlık bağıntısı dijital görüntülerin çalışılmasında kullanılır.

Tanım 2.1.1: $p = (p_1, \ldots, p_n)$, $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{Z}^n$ ayrık iki nokta ve $1 \leq l \leq n$ pozitif tam sayısı için

1. $|p_i - q_i| = 1$ olacak şekilde en çok l kadar i indisi var ve

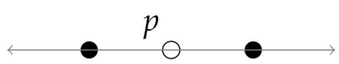
2. $|p_j - q_j| \neq 1$ olacak şekilde diğer tüm j indisleri için $p_j = q_j$

koşulları sağlanıyorsa p ve q ya c_l-yakın denir.

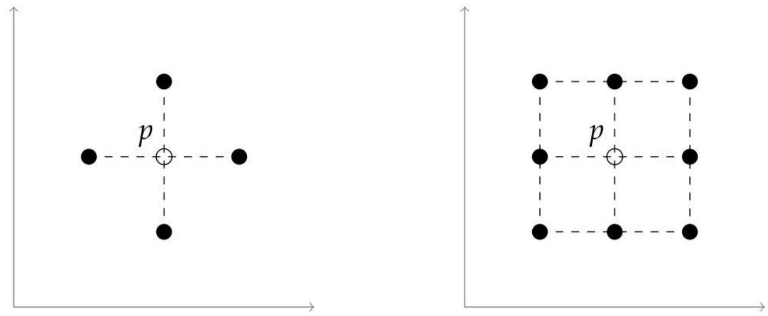
Burada c_l-yakın dediğimizde bir noktaya yakın olan noktaların sayısını anlayacağız ve genel olarak bu yakınlığa κ-yakınlık adını vereceğiz. κ-yakınlık bağıntısını (Han 2006) ;

$$\kappa \in \left\{ 3^n - 1 \ (n \geq 2), \quad 3^n - \sum_{t=0}^{r-2} \binom{n}{t} 2^{n-t} - 1 \ (2 \leq r \leq n,\ n \geq 3), \quad 2n \ (n \geq 1) \right\}$$

ile de belirleyebiliriz. Örnek olarak $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^2$ ve $\mathbb{Z}^3$ de yakınlık bağıntıları Şekil 2.1 ve 2.2 de gösterilmiştir.



Şekil 2.1: 2-yakın



Şekil 2.2: 4-yakın ve 8-yakın

2.2 Dijital Aralık ve Dijital Bağlantılılık

Bir dijital aralık $a, b \in \mathbb{Z},\ a \leq b$ olmak üzere,

$$[a, b]_{\mathbb{Z}} = \{z \in \mathbb{Z} : a \leq z \leq b\}$$

şeklinde tanımlanır. Herhangi bir kafes noktasının κ-komşuluğu ise bu noktaya κ-yakın olan noktaların kümesidir. $(X, \kappa) \subset \mathbb{Z}^n$ dijital görüntüsü ve $\varepsilon \in \mathbb{N}$ olsun. Dijital görüntünün x_0 elemanının ε yarıçaplı κ-komşuluğu, $l_\kappa(x_0, x)$, x_0 dan x e en kısa basit κ-yolunun uzunluğu olmak üzere:

$$N_\kappa(x_0, \varepsilon) = \{x \in X \mid l_\kappa(x_0, x) \leq \varepsilon\} \cup \{x_0\}$$

şeklinde tanımlanır. $\mathbb{Z}^n$ de κ-yakınlık bağıntısı tanımlı ve $X \subset \mathbb{Z}^n$ bir dijital görüntü olsun. $\forall x, y \in X$, $x \neq y$ için $x = x_0$, $y = x_r$ ve $i = 0, 1, \ldots, r-1$ iken x_i ile x_{i+1} κ-yakın olacak şekilde dijital görüntü X in bir $\{x_0, x_1, \ldots, x_r\}$ altkümesi var ise X dijital görüntüsüne κ-bağlantılı denir (Han 2006).

2.3 Dijital Süreklilik

Tanım 2.3.1: $X \subset \mathbb{Z}^{n_0}$, $Y \subset \mathbb{Z}^{n_1}$, (X, κ_0) ve (Y, κ_1) dijital görüntüler olsun. X in her κ_0-bağlantılı U alt kümesi için $f(U)$, Y de κ_1-bağlantılı ise $f : X \to Y$ fonksiyonuna dijital (κ_0, κ_1)-sürekli denir (Boxer 1999, Rosenfeld 1986).

Önerme 2.3.2: $f : X \to Y$ fonksiyonu dijital (κ_0, κ_1)-sürekli olabilmesi için gerek ve yeter şart, X in her $\{x_0, x_1\}$ κ_0-yakın noktaları için $f(x_0) = f(x_1)$ ya da $f(x_0)$ ile $f(x_1)$ κ_1-yakın olmasıdır.

X in her κ-bağlantılı alt kümesi, κ-bağlantılılık tanımından dolayı, birbirine κ-yakın ikililerin birleşiminden oluşacağından tanıma denk olduğu açıktır (Boxer 1999).

2.4 Dijital Homeomorfizma

Boxer (1994) ve (1999) makalelerinde homeomorfizma kavramını *"$f : (X, \kappa_0) \rightarrow (Y, \kappa_1)$ fonksiyonu dijital (κ_0, κ_1)-sürekli, bijektif ve f^{-1} dijital (κ_1, κ_0)-sürekli ise f ye dijital (κ_0, κ_1)-homeomorfizma denir."* şeklinde tanımlamıştır.

Dijital homeomorfizma topolojideki tanımıyla aynı şekilde tanımlanmış olsa da uygulamada farklılık göstermektedir. Bu nedenle L.Boxer (2006) da dijital homeomorfizma kavramı yerine dijital izomorfizma kavramını kullanmayı önermiştir. $\mathbb{R}$ deki topolojide bütün kapalı aralıklar birbirine homeomorf iken $\mathbb{Z}$ deki dijital topolojide dijital aralıklar dijital homeomorf değildir. Örneğin;

$$[1, 3]_{\mathbb{Z}} = \{1, 2, 3\} \quad \text{ve} \quad [2, 5]_{\mathbb{Z}} = \{2, 3, 4, 5\}$$

dijital aralıkları birbirine dijital $(2, 2)$-homeomorf değildir. Bu nedenle bu çalışmada dijital homeomorfizma yerine dijital izomorfizma tanımını kullanacağız.

Benzer şekilde homotopi kavramı da dijital görüntülerde tanımlanmaya çalışılmıştır. Bu tanımlamayı yaparken araştırmacıların karşısına çıkan sorun, iki dijital görüntünün kartezyen çarpımının oluşturduğu yeni dijital görüntünün üzerinde tanımlı yakınlık bağıntısının tespit edilememesi ve sürekli olması gereken homotopi fonksiyonunun inşa edilememesidir.

Bu problemi Boxer (2005), Tanım 2 ve 3 koşullarını ekleyerek çözmüştür.

2.5 Dijital Homotopi

Tanım 2.5.1. $f, g : (X, \kappa_0) \to (Y, \kappa_1)$ fonksiyonlar olsunlar. Aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde bir

$$H : X \times [0, m]_{\mathbb{Z}} \to Y$$

fonksiyonu ve m pozitif tamsayısı varsa f ve g ye dijital (κ_0, κ_1)-homotopik denir. $f \simeq_{(\kappa_0,\kappa_1)} g$ ile gösterilir.

1. $\forall x \in X$ için $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, m) = g(x)$,

2. $\forall x \in X$ için $H_x : [0, m]_{\mathbb{Z}} \to Y$, $\forall t \in [0, m]_{\mathbb{Z}},\ H_x(t) = H(x, t)$ fonksiyonu dijital $(2, \kappa_1)$-sürekli,

3. $\forall t \in [0, m]_{\mathbb{Z}}$ için $H_t : X \to Y$, $\forall x \in X,\ H_t(x) = H(x, t)$ fonksiyonu dijital (κ_0, κ_1)-sürekli (Boxer 2005).

Tanım 2.5.2. $f : X \to Y$ dijital (κ_0, κ_1)-sürekli fonksiyon olsun.

$$g \circ f \simeq_{(\kappa_0,\kappa_0)} 1_X \text{ ve } f \circ g \simeq_{(\kappa_1,\kappa_1)} 1_Y$$

olacak şekilde $g : Y \to X$ dijital (κ_1, κ_0)-sürekli fonksiyonu varsa f ye dijital (κ_0, κ_1)-homotopi denktir denir (Boxer 2025, Han 2000).

2.6 Büzülebilirlik ve Retract

Tanım 2.6.1: (X, κ_0) dijital görüntü olsun. (X, κ_0) üzerindeki birim dönüşüm sabit dönüşüme (κ_0, κ_0)-homotop ise X e κ_0-büzülebilir denir (Boxer 1994).

Tanım 2.6.2: $\emptyset \neq A \subset X$ ve $i : A \to X$ κ_0-kapsama dönüşümü olsun. $\forall a \in A,\ r \circ i(a) = a$ olacak şekilde $r : X \to A$ dijital κ_0 sürekli fonksiyonu varsa X e κ_0-retract denir (Boxer 1999).

2.7 Dijital Yol ve Dijital Loop

Tanım 2.7.1: $(X,\kappa) \subset \mathbb{Z}^n$ dijital görüntüsünde x noktasından y noktasına bir dijital κ-yolu,

$$f : [0,m]_{\mathbb{Z}} \to X, \quad f(0) = x,\ f(m) = y$$

olacak şekildeki dijital $(2,\kappa)$-sürekli fonksiyonudur. Eğer ilave olarak $f(0) = f(m)$ ise f ye dijital κ-loop (κ-kapalı yol) denir ve $p = f(0)$ noktası f loopunun taban noktasıdır. Eğer f bir sabit fonksiyon ise aşikâr loop denir (Khalimsky 1987).

2.8 Dijital Basit Kapalı Eğri

Tanım 2.8.1: $X \subset \mathbb{Z}^n$, κ yakınlık bağıntısı ile bir dijital görüntü olsun. Eğer öyle $m > 3$ için aşağıdaki koşulları sağlayan bir

$$f : [0, m-1]_{\mathbb{Z}} \to X$$

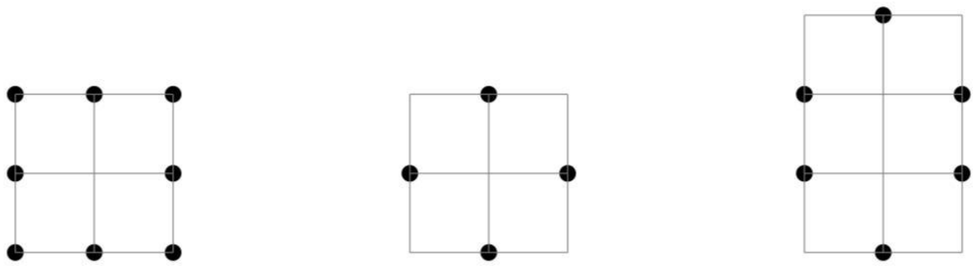
dijital $(2,\kappa)$-sürekli fonksiyon var ise X e bir dijital basit kapalı κ-eğri denir:

- f birebir ve örtendir;
- $f(0)$ ve $f(m-1)$ κ-komşudur;
- Tüm $t \in [0, m-1]_{\mathbb{Z}}$ için, $f([0, m-1]_{\mathbb{Z}})$ içindeki $f(t)$nin tek κ-komşuları

  $$f((t-1) \bmod (m)) \text{ ve } f((t+1) \bmod (m))$$

  dir (Boxer 2005).

Bilinen basit kapalı eğriler Şekil 2.3 de gösterilmiştir.



Şekil 2.3: MSC_4 , MSC'_8 ve MSC_8

2.9 Dijital Kapalı Yüzey

Tanım 2.9.1: $(X, \kappa) \subset \mathbb{Z}^n$, $n \geq 3$ dijital görüntü ve $\overline{X} = \mathbb{Z}^n - X$ olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa X kapalı κ-yüzey denir.

1. $(\kappa, \overline{\kappa}) \in \{(\kappa, 2n), (2n, 3^n - 1)\}$ ve $n \neq 3^n - 2^n - 1$ için:

    - Her $x \in X$ için $|X \setminus \{x\} \cap N_{26}(x, 1)|$ kümesi x e κ-yakın olan bir tane eleman içerir.
    - $|X|^x$, x ve κ-yakın iki tane $\overline{\kappa}$ bileşene sahiptir. (Bu bileşenleri C^{xx} ve D^{xx} ile gösterelim.)
    - Her $y \in N_\kappa$ için $N_{\overline{\kappa}} \cap C^{xx} \neq \emptyset$ ve $N_{\overline{\kappa}} \cap D^{xx} \neq \emptyset$ dir.

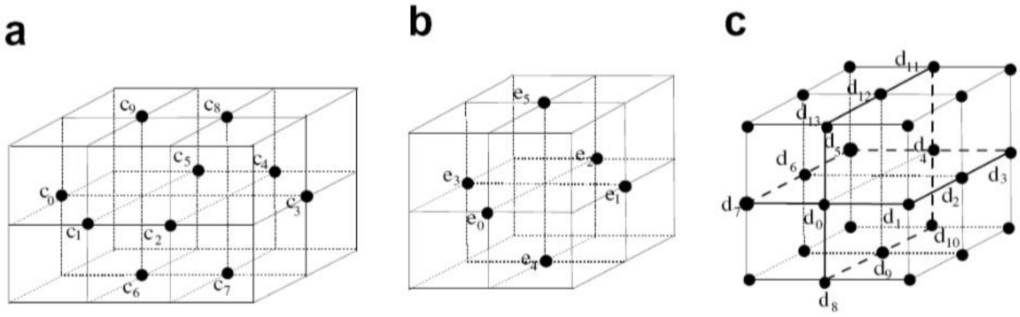
    Ayrıca X kapalı κ-yüzeyi için, X basit κ-noktaya sahip değil ise X basit kapalı κ-yüzey denir.

2. $(\kappa, \overline{\kappa}) = (3^n - 2^n - 1, 2n)$ için:

    - X, κ-bağlantılı
    - Her $x \in X$ için $|X|^x$ genelleştirilmiş basit kapalı eğri

    Ayrıca $|X|^x$ basit kapalı κ eğri ise X basit kapalı κ-yüzey denir (Han 2006).

Bilinen dijital basit kapalı yüzeyler Şekil 2.4 te verilmiştir.



Şekil 2.4: (a)MSS_{18}, (b)MSS'_{18} ve (c)MSS_6

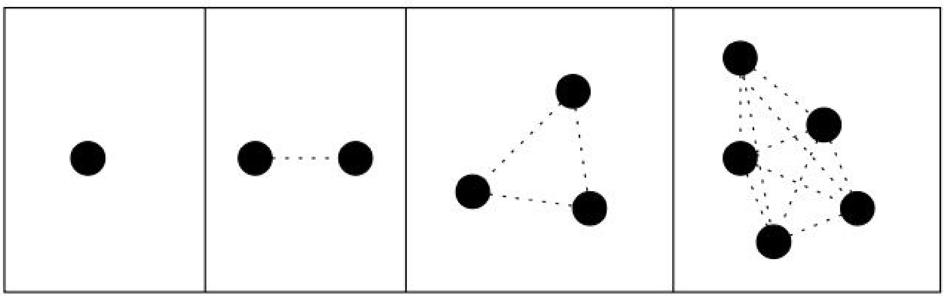
2.10 Dijital Simpleks

Tanım 2.10.1: $P = \{p_0, p_1, \ldots, p_m\} \subset (\mathbb{Z}^n, \kappa)$ da bir dijital görüntü olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa P ye dijital (κ, m)-simpleks denir ve $P = \langle p_0, p_1, \ldots, p_m \rangle$ ile gösterilir. m ye de simpleksin boyutu denir.

1. $\sum_{i=0}^{m} t_i p_i = 0$ ve $\sum_{i=0}^{m} t_i = 0$ ise, $t_0 = \cdots = t_m = 0$.

2. Her $i, j \in \{0, 1, \ldots, m\}, i \neq j$ için p_i ve p_j κ-yakın (Arslan 2008).

Bu durumda bazı simpleksler Şekil 2.5 te gösterilmiştir.



Şekil 2.5: Sırasıyla (2,0), (2,1), (8,2) ve (26,4)-simpleksler

3. Dijital Metrik Uzaylar

Tanım 3.0.1: X boş olmayan bir küme olsun ve $d : X \times X \to [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in X$ için aşağıdaki koşullar sağlansın:

- $d(x, y) \geq 0$,
- $d(x, x) = 0$,
- $d(x, y) = d(y, x)$,
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Bu durumda d, X üzerinde bir **psödometriktir**. Eğer ayrıca $d(x, y) = 0$ ise $x = y$ sonucu da çıkıyorsa, o zaman d X üzerinde bir **metriktir** (Dugundji 1966).

3.1 Euler Karakteristiği

Tanım 3.1.1: $(X, \kappa) \subset \mathbb{Z}^m$ bir dijital görüntü ve $\alpha_q := (X, \kappa)$ daki dijital q-simplekslerin sayısı, $q \geq 0$ olsun. (X, κ) nın Euler karakteristiği;

$$\chi(X, \kappa) = \sum_{q=0}^{m} (-1)^q \alpha_q$$

ile tanımlıdır.

(X, κ) dijital görüntüsünün Euler karakteristiği $\chi(X)$ olmak üzere

$$S_\chi(A, B) = |\chi(A) - \chi(B)|$$

fonksiyonu $\mathbb{Z}^n$ deki dijital görüntü için bir psödometriktir (Han 2007).

Örnek 3.1.2: MSS_{18} in Euler karakteristiğini hesaplayalım.

$$\chi(MSS_{18}, 18) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 10 - 20 + 8 = -2$$

3.2 Dijital Lusternik–Schnirelmann Kategorisi

Tanım 3.2.1: (X, κ) ve (Y, λ) bir dijital görüntü ve $\{U_1, \ldots, U_{n+1}\}$ X in bir örtüsü olsun. $f : X \to Y$, (κ, λ)-sürekli fonksiyonun LS kategorisi her j için $f|_{U_j}$ (κ, λ)-nullhomotopik olacak şekilde en küçük n tam sayısıdır. f nin LS kategorisi $\mathrm{cat}_{\kappa,\lambda}(f)$ ile gösterilir.

Not 3.2.2: $\mathrm{cat}_\kappa(X) = \mathrm{cat}_{\kappa,\kappa}(\mathrm{Id_X})$ olduğu açıktır. (Bu durum dijital LS kategorisinin tanımından çıkar).

(X, κ) nın LS kategorisi $cat_\kappa(X)$ olmak üzere

$$S_{LS,\kappa}(A, B) = |\mathrm{cat}_\kappa(A) - \mathrm{cat}_\kappa(B)|$$

fonksiyonu $\mathbb{Z}^n$ deki dijital görüntü için bir psödometriktir (Vergili ve Borat 2020).

Lemma 3.2.3: (Boxer 2021) $\Delta_i : X^2 \to [0, \infty)$ bir psödometrik olsun, $1 \leq i \leq n$. O halde

$$D = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i : X^2 \to [0, \infty)$$

bir psödometriktir. Ayrıca, eğer Δ_i lerden en az biri bir metrik ise, o zaman D bir metriktir.

Bu çalışmalarda $\mathbb{R}^n$ veya $\mathbb{Z}^n$ in kullandığımız metriklerinden bahsediyoruz. $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ olsun. $p \geq 1$ olduğunda ℓ_p metriği $\mathbb{R}^n$ için

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$

şeklinde tanımlanır.

- $p = 1$, Manhattan veya şehir bloğu metriğini verir

$$d_1 : (\mathbb{R}^n)^2 \to [0, \infty), \quad d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

- $p = 2$, Öklid metriğini verir

$$d_2 : (\mathbb{R}^n)^2 \to [0, \infty), \quad d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}$$

Tanım 3.2.4: (Han 2005) (X, κ) bağlantılı bir dijital görüntü olsun. $x, y \in X$ için şeklinde tanımlanan $d_\kappa : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonuna en kısa yol metriği denir.

$$d_\kappa(x, y) = \min\{n \mid X \text{ içinde } x \text{ ten } y \text{ ye uzunluğu } n \text{ olan bir } \kappa\text{-yolu vardır}\}.$$

Tanım 3.2.5: (Hausdorff metriği) $d : X^2 \to [0, \infty)$ bir metrik ve $X \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. O halde, X in boş olmayan, sınırlı ve kapalı altkümeleri A ve B için (özellikle $X \subseteq \mathbb{Z}^n$ durumunda, A ve B sonlu altkümelerdir) d ye bağlı Hausdorff metriği

$$H(A, B) = \min \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon > 0 \mid \forall (a, b) \in A \times B,\ \exists (a', b') \in A \times B \\ \text{öyle ki } \exists \varepsilon \geq d(a, b') \text{ve} \varepsilon \geq d(a', b) \end{array} \right\}$$

şeklinde tanımlanır (Nadler 1978).

Tanım 3.2.6: $X \subseteq \mathbb{Z}^n$, $\emptyset \neq A \subseteq X$, $\emptyset \neq B \subseteq X$ olsun. κ, X üzerinde bir yakınlık bağıntısı olsun. O halde

$$H_{(X,\kappa)}(A, B) = \min \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon \geq 0 | \forall (a, b) \in A \times B,\ \exists (a', b') \in A \times B \text{ öyle ki} \\ a' \text{ den } b \text{ ye ve } b' \text{ den } a \text{ ya } X \text{ içinde uzunluğu} \\ \leq \varepsilon \text{ olan } \kappa\text{-yolları vardır.} \end{array} \right\}$$

Klasik topolojiden dijital topolojiye uyarlanabilen bir başka metrik Borsuk süreklilik metriğidir (Vergili 2020).

Tanım 3.2.7:(X, κ) ve (Y, λ), $\mathbb{Z}^n$ de dijital görüntüler olsun. d Öklid metriği olmak üzere Süreklilik metriği $\delta_d(X, Y)$, $f : X \to Y$, (κ, λ)-sürekli ve $g : Y \to X$, (λ, κ)-sürekli olan ve

$$\forall x \in X \text{ için } d(x, f(x)) \leq t \text{ ve } \forall y \in Y \ için\ d(y, g(y)) \leq t$$

şartını sağlayan $t > 0$ sayılarının en büyük alt sınırıdır.

Önerme 3.2.8: $\mathbb{Z}^n$ içinde tanımlı sonlu dijital görüntüler (X,κ) ve (Y,κ) ile d, $\mathbb{Z}^n$ için bir metrik olsun.O halde

$$H_d(X,Y) \leq \delta_d(X,Y)$$

dir (Boxer 2021).

İspat: $u = H_d(X,Y)$ olsun. X ve Y sonlu olduğundan $x_0 \in X$ için $u = \min\{d(x_0,y) \mid y \in Y\}$ alınabilir. O halde $f : X \to Y$, κ-sürekli fonksiyonlar için

$$d(x_0, f(x_0)) \geq u$$

olur ve

$$\delta_d(X,Y) \geq u$$

dur.

Teorem 3.2.9:

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid |x| = n \text{ veya } |y| = n\}, \quad Y = X \setminus \{(n,n)\}.$$

Burada d Manhattan metriği ve $\kappa = c_1$ alınırsa

$$H_1(X,Y) = 1 \quad \text{ve} \quad \delta_d(X,Y) \geq 2n-1$$

elde edilir (Boxer 2021).

İspat: $H_1(X,Y) = 1$ olduğu açıktır.

$F : (Y,c_1)$ den $(\mathbb{Z},c_1)$ in bir alt kümesine bir izomorfizma olsun. $f : X \to Y$ bir c_1-sürekli fonksiyon olsun. X üzerinde karşıt kutuplu (antipodal) bir nokta çifti $P, -P$ vardır ve bu çift için $|F \circ f(P) - F \circ f(-P)| \leq 1$ olur.

F bir izomorfizma olduğuna göre $f(P), f(-P)$ ye eşittir ya da c_1 yakındır. Şimdi ya

$$d(P, f(P)) \geq 2n-1$$

ya da

$$d(-P, f(-P)) \geq 2n-1$$

olduğunu göstereceğiz.

$P = (n, u)$ ise, $-P = (-n, -u)$ olur. O zaman eğer; $f(P) = (n, -n)$ ise,

$$f(-P) \in \{(n-1, -n), (n, -n), (n, -n+1)\} \implies d(-P, f(-P)) \geq 2n - 1.$$

Not: $(n, n) \notin Y$, bu yüzden $f(P) = (n, n)$ olamaz. Eğer $f(P) = (n, v)$ ve $|v| < n$ ise,

$$f(-P) \in \{(n, v-1), (n, v), (n, v+1)\} \implies d(-P, f(-P)) \geq 2n.$$

Benzer durumlar $P = (-n, u)$, $P = (w, n)$ ve $P = (w, -n)$ için de geçerlidir. Dolayısıyla $\delta_d(X, Y) \geq 2n - 1$ dir. $\square$

Boş olmayan ve sınırlı bir $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesinin bir d metriğine göre çapı şöyle tanımlanır:

$$\mathrm{diam}_d(A) = \max\{d(a, b) \mid a, b \in A\}.$$

d_p için diam_p ve d_κ için diam_κ gösterimlerini kullanacağız.

$\mathbb{R}^n$ içindeki boş olmayan sınırlı küme çiftleri için bir fonksiyon s_d şöyle tanımlanır:

$$s_d(A, B) = |\mathrm{diam}_d(A) - \mathrm{diam}_d(B)|.$$

Ayrıca s_p gösterimini s_{d_p} için ve s_κ gösterimini de s_{d_κ} için kullanacağız.

Teorem 3.2.10: A ve B, $\mathbb{R}^n$ içindeki boş olmayan, sınırlı altkümeler olsun. H_p, metriği d_p ne bağlı Hausdorff metriği olsun ve $H_p(A, B) \leq m$ olsun. O zaman $s_p(A, B) \leq 2m$ olur (Boxer 2021).

İspat: $a, a' \in A$ olacak şekilde $d_p(a, a') = \mathrm{diam}_p(A)$ vardır. Ayrıca $b, b' \in B$ olacak şekilde $d_p(a, b) \leq m$ ve $d_p(a', b') \leq m$ vardır. Bu durumda

$$\mathrm{diam}_p(A) = d_p(a, a') \leq d_p(a, b) + d_p(b, b') + d_p(b', a')$$

$$\leq m + \mathrm{diam}_p(B) + m = \mathrm{diam}_p(B) + 2m.$$

bulunur.

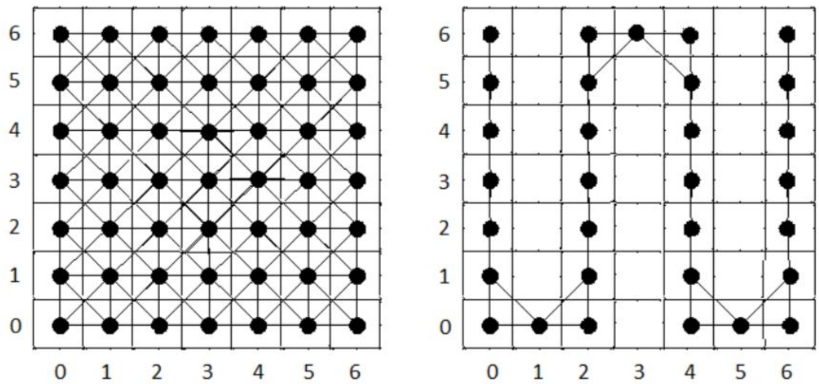
Benzer şekilde, $\mathrm{diam}_p(B) \leq \mathrm{diam}_p(A) + 2m$ elde edilir. Buradan

$$\mathrm{diam}_p(A) - \mathrm{diam}_p(B) \leq 2m....(1)$$

$$\mathrm{diam}_p(B) - \mathrm{diam}_p(A) \leq 2m....(2)$$

(1) ve (2) den $s_p(A, B) \leq 2m$ elde edilir.

Örnek 3.2.11: (Boxer 2021)



Şekil 3.1: Q ve S Kümeleri

n çift bir doğal sayı olsun. $Q = [0, n]^2_{\mathbb{Z}}$ olarak tanımlansın.

$$S = Q \setminus \left[\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{4k+1\} \times [1, n]_{\mathbb{Z}} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{4k+3\} \times [0, n-1]_{\mathbb{Z}} \right].$$

(Şekil 3.1 e bakınız.)

Bu durumda $s_1(Q, S) = 0$. Ancak $\mathrm{diam}_{c_1}(Q) = 2n$ iken

$$\mathrm{diam}_{c_1}(S) = n + n(1 + n/2).$$

Dolayısıyla

$$s_{c_1}(Q, S) = \frac{n^2}{2}.$$

İspat: Q ve S kümelerinin her birinin, d_1 metriğine göre çapı, karşıt olarak seçilen noktalar arasındaki maksimum uzaklığa sahiptir. Bu nedenle

$$\mathrm{diam}_1(S) = diam_1(Q) = 2n \Rightarrow s_1(Q, S) = 0$$

bulunur. Q nun çapına karşıt noktalar d_{c_1} metriğine göre maksimum uzaklığa sahiptir. Böylece

$$\mathrm{diam}_{c_1}(Q) = 2n$$

dir. S kümesinin d_{c_1} metriğine göre maksimum uzaklıktaki noktaları şunlardır:

Eğer $n = 4k + 2$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}$ varsa : $(0, n)$ ve (n, n) noktaları,

Eğer $n = 4k$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}$ varsa : $(0, n)$ ve $(n, 0)$ noktaları.

Her iki durumda da maksimum uzaklıktaki noktalar arasında tek en kısa c_1-yolu n yatay adım gerektirir. Dikey adım sayısı şu şekilde hesaplanır. Geçilmesi gereken dikey çizgi sayısı $1 + n/2$ dir ve her birinin uzunluğu n dir. Bu nedenle toplam dikey adım sayısı

$$n \times (1 + n/2)$$

elde edilir. Böylece, S kümesindeki maksimum uzaklıktaki noktalar arasındaki adım sayısı

$$\mathrm{diam}_{c_1}(S) = n + n(1 + n/2)$$

dir. Bu nedenle $\kappa = c_1$ için

$$s_\kappa(Q, S) = |n + n(1 + n/2) - 2n| = \frac{n^2}{2}$$

olur.

Teorem 3.2.12: A ve B, $\mathbb{Z}^n$ de c_u-bağlantılı bir X kümesinin sonlu, boş olmayan c_u-bağlantılı altkümeleri olsun. $1 \leq u \leq n$ ve $m \in \mathbb{N}$ için

$$H_{(X,c_u)}(A, B) \leq m$$

oluyorsa

$$H_p(A, B) \leq mu^{1/p}$$

dir (Boxer 2021).

İspat: Varsayım gereği, $x \in A$ ve $y \in B$ verildiğinde, $x' \in A$, $y' \in B$ ve x ten y' ne giden c_u-yolu P ile y den x' ne giden c_u-yolu Q olacak şekilde X içinde tanımlı c_u-yollar P ve Q vardır; öyle ki her birinin uzunluğu en fazla m dir.

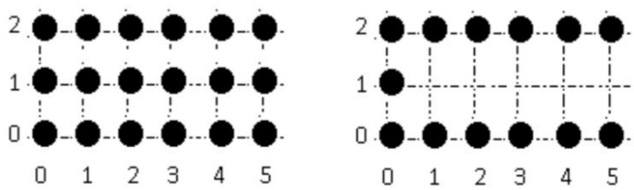
Her bir c_u-komşuluk adımı, en fazla $u^{1/p}$ Öklid uzaklığına karşılık geldiğinden

$$d_p(x, y') \leq mu^{1/p} \quad \text{ve} \quad d_p(y, x') \leq mu^{1/p}$$

olur. Böylece

$$H_p(X, Y) \leq mu^{1/p}$$

dir. □



Şekil 3.2: A ve B Kümeleri

Örnek 3.2.13: *Boxer* (2021)

$$A = [0, n]_{\mathbb{Z}} \times [0, 2],$$

$$B = A \setminus ([1, n]_{\mathbb{Z}} \times \{1\})$$

Bu durumda $H_1(A, B) = 1$. Ancak;

- $\kappa = c_1$ için: $\mathrm{diam}_\kappa(A) = n + 2$, $\mathrm{diam}_\kappa(B) = 2n + 2 \Rightarrow s_\kappa(A, B) = n,$
- $\kappa = c_2$ için: $\mathrm{diam}_\kappa(A) = n$, $\mathrm{diam}_\kappa(B) = 2n \Rightarrow s_\kappa(A, B) = n.$

Örnek 3.2.14: (Boxer 2021)

$$B = [0, n]_{\mathbb{Z}} \times [0, 2]_{\mathbb{Z}} \setminus \ ([1, n]_{\mathbb{Z}} \times \{1\})$$

(Şekil 3.2 ye bakınız.)

$$C = [0, n]_{\mathbb{Z}} \times \{0\} \subseteq B \text{ olsun.}$$

Bu durumda

$$H_1(B, C) = H_2(B, C) = 2$$

olur. Ancak

$$H_{(B,c_1)}(B, C) = n + 2 \quad \text{ve} \quad H_{(B,c_2)}(B, C) = n + 1$$

dir.

İspat: $H_1(B, C) = H_2(B, C) = 2$ olduğu kolayca görülür.

$C \subseteq B$ olduğundan, B ile C arasındaki Hausdorff uzaklığını bulmak, C den B nin en uzak noktasını bulmak demektir.

$\kappa = c_1$ ve $\kappa = c_2$ durumlarında: Kısa yol metriğine göre C den B nin en uzak noktası $b = (n, 2)$ dir ve C de ona en yakın nokta $c = (0, 0)$ dır. Bu durumda

$$d_{c_1}(b, c) = n + 2$$

$$d_{c_2}(b, c) = n + 1$$

olur. Dolayısıyla iddia sağlanır.

Önerme 3.2.15: (Boxer 2021) $A \neq \emptyset \neq B$ ve $A \cup B \subseteq J = [0, n]^2_{\mathbb{Z}}$ olmak üzere:

$$H_1(A, B) = H_{(J,c_1)}(A, B).$$

İspat: $n = H_1(A, B)$ olsun. $x \in A$ alalım. O hâlde $y \in B$ olacak şekilde $d_1(x, y) \leq n$ vardır. d_1 in tanımı gereği, J içinde x den y ye en fazla n uzunluğunda bir c_1-yolu vardır. Benzer şekilde $u \in B$ için, u dan $v \in A$ ya J içinde en fazla n uzunluğunda bir c_1-yolu vardır. Dolayısıyla

$$H_{(J,c_1)}(A,B) \leq H_1(A,B)$$

dir.

Şimdi $n = H_{(J,c_1)}(A,B)$ olsun. Bu durumda $x \in A$ için J içinde x ten $y \in B$ ye en fazla n uzunluğunda bir c_1-yolu vardır. Benzer şekilde $u \in B$ için $v \in A$ ya en fazla n uzunluğunda bir c_1-yolu vardır. Her c_1-komşuluğu, d_1 mesafesi 1 olan bir adıma karşılık geldiğinden

$$d_1(x,y) \leq n \quad \text{ve} \quad d_1(u,v) \leq n$$

elde edilir. Böylece

$$H_1(A,B) \leq n = H_{(J,c_1)}(A,B)$$

bulunur. □

4. Dijital Metrik Uzayında Çeşitli Kontraksiyon Koşulları

Tanım 4.1: (X, κ) bir dijital görüntü kümesi olsun.

$$d\colon (X, \kappa) \times (X, \kappa) \to \mathbb{Z}^n$$

fonksiyonu, metrik uzayın tüm özelliklerini sağlıyorsa, (X, d, κ) yapısına *dijital metrik uzay* denir (Ege ve Karaca 2015).

Tanım 4.2: Bir dijital metrik uzay (X, d, κ) içindeki $\{x_n\}$ noktalar dizisi, her $\varepsilon > 0$ için, $n, m > \alpha$ olmak üzere

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

şartını sağlayan bir $\alpha \in \mathbb{N}$ varsa bir *Cauchy dizisi* olarak adlandırılır (Ege ve Karaca 2015).

Teorem 4.3: Bir dijital metrik uzay (X, d, κ) için, $\{x_n\} \subseteq X \subseteq \mathbb{Z}^n$ bir Cauchy dizisi ise, $\alpha \in \mathbb{N}$ vardır ki tüm $n, m \gneq \alpha$ için $x_n = x_m$ dir (Han 2015).

İspat: (X, d, κ) dijital metrik uzayında $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisi ise, $\alpha \in \mathbb{N}$ olacak şekilde tüm $n, m \geq \alpha$ için $d(x_n, x_m) < 1$ olur. Böylece, x_n ve x_m birbirine eşittir. $\square$

Tanım 4.4: (X, d, κ) bir dijital metrik uzayında $\{x_n\}$ bir dizi olsun. Her $\varepsilon \gneq 0$ için bir $\alpha \in \mathbb{N}$ var, her $n \gneq \alpha$ ve $l \in X$ için

$$d(x_n, l) \lneq \varepsilon$$

şartı sağlanıyorsa $\{x_n\}$ dizisi l noktasına yakınsaktır denir.

Önerme 4.5: (X, d, κ) bir dijital metrik uzayında tanımlı $\{x_n\}$ dizisi bir $l \in X$ noktasına yakınsıyorsa, bir $\alpha \in \mathbb{N}$ vardır ve tüm $n \gneq \alpha$ için $x_n = l$ olur (Han 2015).

Tanım 4.6: (X, d, κ) herhangi bir dijital metrik uzay ve $f : (X, d, \kappa) \to (X, d, \kappa)$ dijital bir fonksiyon olsun. Eğer $\lambda \in (0, 1)$ olacak şekilde bir λ varsa ve tüm $x, y \in X$ için

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonu *dijital kontraksiyon fonksiyonu* olarak adlandırılır (Ege ve Karaca 2015).

Önerme 4.7: Her dijital kontraksiyon dönüşümü $f : (X, d, \kappa) \rightarrow (X, d, \kappa)$ κ-sürekli olur (Ege ve Karaca 2015).

Tanım 4.8: Bir dijital metrik uzay (X, d, κ), her Cauchy dizisi $\{x_n\}$ (X, d, κ) içinde bir l noktasına yakınsıyorsa *tam*dır (Ege ve Karaca 2015).

Teorem 4.9: (X, d, κ) dijital metrik uzayı tamdır (Han 2015).

İspat: (X, d, κ) dijital metrik uzayında herhangi bir Cauchy dizisi $\{x_n\}$ alalım. Teorem 4.3 'e göre, $\alpha \in \mathbb{N}$ olacak şekilde tüm $n, m \geq \alpha$ için $x_n = x_m$ olur. Ayrıca, Önerme 4.5'e göre, bu durumda $\{x_n\}$ dizisi bir $l \in X$ noktasına yakınsar ve $\alpha \in \mathbb{N}$ olacak şekilde tüm $n \geq \alpha$ için $x_n = l$ olur. Dolayısıyla dizi X içinde yakınsar ve X tamdır. $\square$

Ege ve Karaca (2015) Bu makalede ele alınmış Örnek 3.8 inceleyelim.

Örnek 3.8 de verilen $f(x) = \frac{x}{2}$ fonksiyonu, $[0, 2]_{\mathbb{Z}}$ bir dijital kontraksiyon dönüşümü olamaz. Daha açık bir şekilde,

$$f : X := \{0, 1, 2\} \rightarrow X := \{0, 1, 2\}$$

biçiminde verilen ve $f(x) = \frac{x}{2}$ olarak tanımlanan bu fonksiyon bir fonksiyon olamaz çünkü

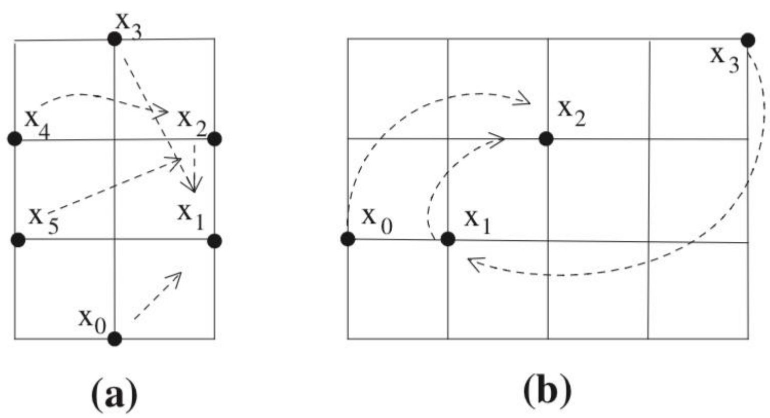
$$f(X) = \{f(0) = 0,\ f(1) = \tfrac{1}{2},\ f(2) = 1\}$$

kümesi X'in bir altkümesi bile değildir.

Bir dijital metrik uzay (X, d, κ) üzerinde bir dijital kontraksiyon dönüşümü f için, $\mathrm{Im}(f)$ tek elemanlı bir küme olmak zorunda olmamakla birlikte (Şekil 4.1 e bakınız.), bir dijital aralık aşağıdaki özelliğe sahiptir.

Sonuç 4.10: (Han 2016) (Bir dijital aralık $([0, l]_{\mathbb{Z}}, 2)$ için Banach kontraksiyon ilkesi): $([0, l]_{\mathbb{Z}}, 2)$ üzerinde tanımlı herhangi bir dijital kontraksiyon dönüşümü sabit bir fonksiyondur, bu da f nin bir sabit noktası olduğu anlamına gelir.

İspat: $f : ([0, l]_{\mathbb{Z}}, 2) \rightarrow ([0, l]_{\mathbb{Z}}, 2)$ bir dijital kontraksiyon dönüşümü olsun. Herhangi bir $x_0 \in [0, l]_{\mathbb{Z}}$ noktası alalım. $f(x_0) := t_0 \in [0, l]_{\mathbb{Z}}$ olduğunu varsayalım. f nin dijital kontraksiyon varsayımına göre, $x \in N_2(x_0, 1)$ noktaları için $f(x)$ noktası t_0 ya gönderilmelidir ve ayrıca $x' \in N_2(x, 1)$ noktalarının görüntüsü de $f(x') = t_0$ olur. Ardışık olarak, tümevarım ile $f([0, l]_{\mathbb{Z}})$ görüntüsünün $\{t_0\}$ tek elemanlı küme olması gerektiğini görürüz. Böylece ispat tamamlanır. $\square$



Şekil 4.1: MSC_8 üzerindeki veya 8-bağlı olmayan dijital metrik uzay $(X, d, 8)$ üzerindeki bir dijital kontraksiyon dönüşümünün sabit noktasının bulunması.

Önerme 4.11: (X, d, κ) dijital metrik uzayında, $\{x_n\} \subseteq X$ dizisinden iki nokta x_i, x_j κ-komşu ise, bu iki nokta arasındaki Öklid uzunluğu $d(x_i, x_j)$ en az 1 ve iki noktanın konumuna bağlı olarak en fazla $\sqrt{t}$ olur (Han 2016).

İspat κ-komşuluk tanımına göre, iki nokta $x_i = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ ve $x_j = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ için her bir koordinatta $|i_k - j_k| \leq 1$ olur.

Öklid uzunluğu

$$d(x_i, x_j) = \sqrt{(i_1 - j_1)^2 + (i_2 - j_2)^2 + \cdots + (i_n - j_n)^2}$$

dir. Ve en az bir koordinatta $|i_k - j_k| = 1$ olmak zorundadır (yoksa aynı nokta olurlar). Bu durumda minimum mesafe

$$d(x_i, x_j) \geq 1$$

dir. Öte yandan, her bir koordinat farkı en fazla 1 olduğundan

$$d(x_i, x_j) \leq \sqrt{n \cdot 1^2} = \sqrt{n}.$$

Burada $t = n$ alınırsa

$$d(x_i, x_j) \leq \sqrt{t}$$

olur. Dolayısıyla iddia sağlanır.

Teorem 4.12 (X, d, κ) $\mathbb{Z}^n$ de dijital metrik uzay ve (X, κ) κ-bağlı olsun,

(1) Eğer $\kappa = 2n$ ise, $f : (X, d, 2n) \to (X, d, 2n)$ dijital kontraksiyon dönüşümü sabit bir fonksiyondur.

(2) Eğer $\kappa \neq 2n$ ve $|X| \geq 3$ ise, $f : (X, d, \kappa) \to (X, d, \kappa)$ dijital kontraksiyon dönüşümü sabit bir fonksiyon olmak zorunda değildir (Han 2016).

İspat: (1) $f : (X, d, 2n) \to (X, d, 2n)$ bir dijital kontraksiyon dönüşümü olsun. Herhangi bir $x_0 \in X$ noktası alalım ve $f(x_0) := t_0$ diyelim. İlk olarak, $x_1 \in N_{2n}(x_0, 1)$ ve $x_1 \neq x_0$ olacak şekilde bir nokta ele alalım. f nin dijital kontraksiyon özelliği gereği, $\lambda \in (0, 1)$ için

$$d(f(x_1), f(x_0)) \leq \lambda d(x_1, x_0) = \lambda,$$

çünkü $d(x_1, x_0) = 1$ (bkz. Önerme 4.11). Önerme 4.11 e göre $d(f(x_1), f(x_0)) = 0$ olur ki bu da $f(x_1) = f(x_0)$ anlamına gelir.

İkinci olarak, $x_2 \in N_{2n}(x_1, 1)$ ve $x_2 \notin \{x_0, x_1\}$ olacak şekilde bir nokta ele alalım. f nin dijital kontraksiyon özelliği gereği, $\lambda \in (0, 1)$ için:

$$d(f(x_2), f(x_1)) \leq \lambda d(x_2, x_1) = \lambda,$$

çünkü $d(x_2, x_1) = 1$. Önerme 4.11 e göre $d(f(x_2), f(x_1)) = 0$ olur ki bu da $f(x_2) = f(x_1)$ anlamına gelir.

Ardışık olarak, tümevarım yoluyla $f(X)$ görüntüsünün $\{t_0\}$ tek elemanlı küme olması gerektiğini görürüz. Böylece ispat tamamlanır. □

Sonuç 4.13: Her $f : SC_{2n}^{n,l} \to SC_{2n}^{n,l}$ dijital kontraksiyon dönüşümü sabit fonksiyon ise ; bu da f nin bir sabit noktası vardır. Teorem 4.12 (1)'in ispatına benzer bir yöntemle, minimal basit kapalı 18-yüzeyinin (bkz. Şekil 2.4 (b)) şu özelliğini elde ederiz:

Sonuç 4.14: Herhangi bir dijital kontraksiyon dönüşümü $f : MSS'_{18} \to MSS'_{18}$ sabit bir fonksiyondur; bu da f nin bir sabit noktası olduğu anlamına gelir.

İspat: $MSS'_{18} := \{e_i \mid i \in [0, 5]_{\mathbb{Z}}\}$ üzerinde tanımlı bir dijital kontraksiyon dönüşümü f yi ele alalım (bkz. Şekil 2 (b)). Herhangi bir nokta seçelim, uygunluk açısından $e_0 \in MSS'_{18}$ olsun ve $f(e_0) := e' \in MSS'_{18}$ diyelim. İlk olarak, $e_i \in N_{18}(e_0, 1),\ i \in \{1, 3, 4, 5\}$ noktasını ele alalım. f nin dijital kontraksiyon özelliği gereği, $\lambda \in (0, 1)$ için

$$d(f(e_i), f(e_0)) \leq \lambda d(e_i, e_0) = \lambda\sqrt{2},$$

olur. Çünkü $d(e_i, e_0) = \sqrt{2}$ dir. (bkz. Önerme 4.11). Dolayısıyla

$$d(f(e_i), f(e_0)) \leq \sqrt{2}$$

elde ederiz. MSS'_{18} in özelliği gereği $d(f(e_i), f(e_0)) = 0$ olur ki bu da

$$f(e_i) = f(e_0) = e'$$

anlamına gelir. Ardışık olarak, tümevarım yoluyla $f(MSS'_{18})$ görüntüsünün $\{e'\}$ tek elemanlı küme olması gerektiğini görürüz. Böylece ispat tamamlanır (Han 2016). □

Önerme 4.15: Her dijital daralma fonksiyonu $f\colon (X,d,\kappa) \to (X,d,\kappa)$, dijital olarak süreklidir.

İspat: (X,d,κ) bir dijital metrik uzay ve $f : X \to X$ bir dijital kontraksiyon dönüşümü olsun. $a \in X$ alalım ve $\epsilon > 0$ olsun. $\delta = \epsilon$ olarak alalım. Eğer $d(a,b) < \delta$ ise,

$$d(f(a), f(b)) \leq \lambda d(a,b) < \lambda\epsilon < \epsilon$$

olur, burada $\lambda \in (0,1)$ ve $a, b \in X$ için geçerlidir. Böylece f bir (κ,κ)-sürekli fonksiyondur. $\square$

Teorem 4.16:(Kannan Kontraksiyon Prensibi) $X \subseteq \mathbb{Z}^n$ olmak üzere, (X,κ) bir dijital görüntü ve κ, X üzerindeki bir yakınlık bağıntısı olsun. (X,d,κ) dijital metrik uzay ve $T\colon X \to X$ fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in X$ ve $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha\left[d(x,Tx) + d(y,Ty)\right]$$

bu eşitsizlik sağlanıyorsa, T nin X üzerinde tek bir sabit noktası vardır (Park ve diğ. 2019).

İspat: $x_0 \in X$ olsun ve $x_{n+1} = Tx_n$ şeklinde bir dizi tanımlayalım. İlk adımda

$$d(x_1,x_2) = d(Tx_0,Tx_1) \leq \alpha\left[d(x_0,Tx_0) + d(x_1,Tx_1)\right]$$

bulunur.Buradan

$$d(x_1,x_2) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_0,x_1)$$

elde edilir. Benzer şekilde devam edersek

$$d(x_2,x_3) \leq \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2 d(x_0,x_1)$$

ve genel olarak

$$d(x_n,x_{n+1}) \leq \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n d(x_0,x_1)$$

bulunur.

$\beta = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ olsun. O zaman yukarıdaki ifadeyi şu şekilde yeniden yazabiliriz ve

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \beta^n d(x_0, x_1)$$

olur. Üçgen eşitsizliğini tekrar kullanırsak

$$d(x_n, x_{n+k}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+k-1}, x_{n+k})$$

$$\leq \beta^n d(x_0, x_1)[1 + \beta + \beta^2 + \cdots + \beta^{k-1}]$$

$$\leq \frac{\beta^n}{1-\beta} d(x_0, x_1)$$

olur ve $0 \leq \beta < 1$ olduğundan bu ifade $n \to \infty$ iken $\frac{\beta^n}{1-\beta} d(x_0, x_1)$ 0 a yakınsar. Dolayısıyla $\{x_n\}$ dizisi (X, d, κ) içinde bir Cauchy dizisidir. Teorem 4.8 e göre (X, d, κ) tam olduğundan, bir limit noktası v vardır.

Ayrıca T dijital olarak sürekli olduğundan

$$T(v) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = v$$

olur. Bu nedenle T nin bir sabit noktası vardır.

Şimdi T nin tek bir sabit noktası olduğunu gösterelim. a ve b, T nin sabit noktaları ise

$$d(a, b) = d(Ta, Tb) \leq \alpha[d(a, Ta) + d(b, Tb)] = \alpha[0 + 0] = 0$$

olur. Sonuç olarak $d(a, b) = 0$ ve $a = b$ olur. □

Teorem 4.17: (Chatterjea Kontraksiyon Prensibi) $X \subseteq \mathbb{Z}^n$ olsun, (X, κ) bir dijital görüntü ve κ, X üzerindeki bir yakınlık bağıntısı olsun. (X, d, κ) dijital metrik uzayı ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ ve $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha \left[d(x, Ty) + d(y, Tx)\right]$$

eşitsizlik sağlanıyorsa, T nin X üzerinde tek bir sabit noktası vardır (Park ve diğ. 2019).

İspat: $x_0 \in X$ olsun ve $x_n = Tx_{n-1}$ şeklinde bir dizi tanımlayalım.

İlk adımda

$$d(x_1, x_2) = d(Tx_0, Tx_1) \leq \alpha\,[d(x_0, Tx_1) + d(x_1, Tx_0)]$$

$$\leq \alpha\,[d(x_0, x_2) + d(x_1, x_1)]$$

$$\leq \alpha\,[d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2)]$$

Yani

$$(1-\alpha)d(x_1, x_2) \leq \alpha d(x_0, x_1)$$

$$d(x_1, x_2) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_0, x_1)$$

olur ve benzer şekilde aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir.

$$d(x_2, x_3) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_1, x_2) \leq (\frac{\alpha}{1-\alpha})^2 d(x_0, x_1)$$

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq (\frac{\alpha}{1-\alpha})^n d(x_0, x_1)$$

Burada $\beta = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ alırsak

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \beta^n d(x_0, x_1)$$

elde ederiz.Üçgen eşitsizliğinden

$$d(x_n, x_{n+k}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{n+k-1}, x_{n+k})$$

$$\leq \beta^n d(x_0, x_1)[1 + \beta + \cdots + \beta^{k-1}]$$

$$\leq \frac{\beta^n}{1-\beta} d(x_0, x_1)$$

elde edilir. $0 \leq \beta < 1$ olduğundan, $n \to \infty$ iken $\frac{\beta^n}{1-\beta} d(x_0, x_1)$ 0 a yakınsar. Dolayısıyla $\{x_n\}$ dizisi (X, d, κ) dijital metrik uzayında bir Cauchy dizisidir. (X, d, κ) tam bir dijital metrik uzay olduğuna göre bir limit noktası u vardır.

T dijital olarak sürekli olduğundan

$$T(u) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = u$$

olur. Dolayısıyla T bir sabit noktaya sahiptir.

Şimdi sabit noktanın tekliğini gösterelim. a ve b, T nin sabit noktaları olsun. Teoremin koşulundan

$$d(a,b) = d(Ta,Tb) \leq \alpha[d(a,Tb) + d(b,Ta)]$$

$$= \alpha[d(a,b) + d(b,a)] = 2\alpha d(a,b)$$

$$d(a,b) \leq 2\alpha d(a,b)$$

$$(1-2\alpha)d(a,b) \leq 0$$

olur. Sonuç olarak $d(a,b) = 0$ ve $a = b$ olur. □

Teorem 4.18: (Reich Kontraksiyon Prensibi) Eğer T, dijital metrik uzay (X,d,κ) üzerinde tanımlı bir fonksiyon olup her $x,y \in X$ ve $a+b+c < 1$ koşulunu sağlayan tüm negatif olmayan reel sayılar a,b,c için

$$d(Tx,Ty) \leq a\,d(x,Tx) + b\,d(y,Ty) + c\,d(x,y)$$

sağlanıyorsa, T nin X üzerinde tek bir sabit noktası vardır (Park ve diğ. 2019).

İspat: $x_0 \in X$ alınsın. $x_{n+1} = Tx_n$ olacak şekilde bir dizi tanımlayalım. İlk adımda

$$d(x_1,x_2) = d(Tx_0,Tx_1) \leq a\,d(x_0,Tx_0) + b\,d(x_1,Tx_1) + c\,d(x_0,x_1)$$

$$\leq a\,d(x_0,x_1) + b\,d(x_1,x_2) + c\,d(x_0,x_1)$$

$$\leq \frac{a+c}{1-b}\,d(x_0,x_1)$$

elde ederiz. $\beta = \frac{a+c}{1-b} < 1$ alınarak

$$d(x_n,x_{n+1}) \leq \beta^n\,d(x_0,x_1)$$

olur. Üçgen eşitsizliğinden

$$d(x_n,x_{n+k}) \leq d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+k-1},x_{n+k})$$

$$\leq \beta^n d(x_0, x_1)[1 + \beta + \beta^2 + \cdots + \beta^{k-1}]$$
$$\leq \frac{\beta^n}{1-\beta} d(x_0, x_1).$$

$0 \leq \beta < 1$ olduğundan $n \to \infty$ iken $\frac{\beta^n}{1-\beta} d(x_0, x_1)$ 0 a yakınsar. Dolayısıyla $\{x_n\}$ dizisi (X, d, κ) uzayında bir Cauchy dizisidir. (X, d, κ) tam olduğu için bir limit noktası w vardır.

$$T(w) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = w$$

Böylece T nin bir sabit noktası vardır.

Sabit noktanın tekliğini göstermek için a ve b, T nin sabit noktaları olsun. Teoremdeki koşuldan

$$d(a, b) = d(Ta, Tb) \leq a\, d(a, a) + b\, d(b, b) + c\, d(a, b) = c\, d(a, b)$$

$a + b + c < 1$ ve $a, b \geq 0$ olduğundan $c < 1$ dir. Dolayısıyla

$$d(a, b) \leq c\, d(a, b)$$

bulunur. Buradan $d(a, b) = 0$ dır ve $a = b$ olur. □

Tanım 4.19: (X, d, κ) bir dijital metrik uzay ve $T : (X, d, \kappa) \to (X, d, \kappa)$ bir dijital dönüşüm olsun. $\forall x, y \in X$ için

$$d(T(x), T(y)) \leq \lambda \max\left\{d(x, y), \frac{d(x, Tx) + d(y, Ty)}{2}, \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2}\right\}$$

olacak şekilde $\lambda \in (0, 1)$ varsa T ye Zamfirescu dijital kontraksiyonu denir.

Teorem 4.20: (Zamfirescu Kontraksiyon Prensibi) (X, d, κ) $\mathbb{Z}^n$ üzerinde dijital metrik uzay ve $T : X \to X$ bir Zamfirescu dijital kontraksiyonu olsun. T, tek bir sabit noktaya sahiptir, yani $T(c) = c$ olacak şekilde bir tek $c \in X$ vardır.

İspat: x_0, X in bir noktası olsun. $T(x_n) = x_{n+1}$ iterasyon dizisini ele alalım.

$$M(x, y) = \max\left\{d(x, y), \frac{d(x, Tx) + d(y, Ty)}{2}, \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2}\right\}$$

olarak tanımlayalım.

I. Durum: $M(x,y) = d(x,y)$ olsun.

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq \lambda d(x_n, x_{n-1}) \leq \ldots \leq \lambda^n d(x_1, x_0)$$

II. Durum: $M(x,y) = \frac{d(x,Tx)+d(y,Ty)}{2}$ olsun.

$$d(x_2, x_1) = d(Tx_1, Tx_0) \leq \frac{\lambda}{2}(d(x_1, Tx_1) + d(x_0, Tx_0))$$

$$= \frac{\lambda}{2}\left(d(x_1, x_2) + d(x_0, x_1)\right)$$

$$(1 - \frac{\lambda}{2})d(x_2, x_1) \leq \frac{\lambda}{2}d(x_1, x_0)$$

$$d(x_2, x_1) \leq \frac{\lambda}{2-\lambda}d(x_1, x_0)$$

$$\vdots$$

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{\lambda}{2-\lambda}d(x_n, x_{n-1}) \leq \ldots \leq \left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)^n d(x_1, x_0)$$

III. Durum: $M(x,y) = \frac{d(x,Ty)+d(y,Tx)}{2}$ olsun.

$$d(x_2, x_1) = d(Tx_1, Tx_0) \leq \frac{\lambda}{2}\left(d(x_1, Tx_0) + d(x_0, Tx_1)\right)$$

$$= \frac{\lambda}{2}\left(d(x_1, x_1) + d(x_0, x_2)\right)$$

$$d(x_2, x_1) \leq \frac{\lambda}{2}d(x_0, x_2) \leq \frac{\lambda}{2}(d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2))$$

$$(1 - \frac{\lambda}{2})d(x_2, x_1) \leq \frac{\lambda}{2}d(x_1, x_0)$$

$$d(x_2, x_1) \leq \frac{\lambda}{2-\lambda}d(x_1, x_0)$$

$$d(x_3, x_2) = d(Tx_2, Tx_1) \leq \frac{\lambda}{2}\left(d(x_2, Tx_1) + d(x_1, Tx_2)\right)$$

$$= \frac{\lambda}{2}\left(d(x_2, x_2) + d(x_1, x_3)\right)$$

$$d(x_3,x_2) \leq \frac{\lambda}{2} d(x_1,x_3) \leq \frac{\lambda}{2}(d(x_1,x_2)+d(x_2,x_3))$$

$$(1-\frac{\lambda}{2})d(x_3,x_2) \leq \frac{\lambda}{2} d(x_2,x_1)$$

$$d(x_3,x_2) \leq \frac{\lambda}{2-\lambda} d(x_2,x_1)$$

$$\vdots$$

$$d(x_{n+1},x_n) \leq \frac{\lambda}{2-\lambda} d(x_n,x_{n-1}) \leq \ldots \leq \left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)^n d(x_1,x_0)$$

$$d(x_n,x_{n+k}) \leq d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_{n+2}) + \ldots + d(x_{n+k-1},x_{n+k})$$

I. durumdan:

$$d(x_n,x_{n+k}) \leq \lambda^n d(x_1,x_0) + \lambda^{n+1} d(x_1,x_0) + \ldots + \lambda^{n+k-1} d(x_1,x_0)$$

$$= \lambda^n \left[1+\lambda+\ldots+\lambda^{k-1}\right] d(x_1,x_0)$$

$$\leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_1,x_0)$$

$0 \leq \lambda < 1$ olduğundan $n \to \infty$ için $\frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_1,x_0) \to 0$ olur.

Dolayısıyla $\{x_n\}$ dizisi (X,d,κ) içinde bir Cauchy dizisidir.

II ve III. durumdan

$$d(x_n,x_{n+k}) \leq \left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)^n d(x_1,x_0) + \left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)^{n+1} d(x_1,x_0) +$$

$$\ldots + \left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)^{n+k-1} d(x_1,x_0)$$

$$= \left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)^n \left[1+(\frac{\lambda}{2-\lambda})+\ldots+\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)^{k-1}\right] d(x_1,x_0)$$

$\frac{\lambda}{2-\lambda} = \beta$ denirse $0 < \beta < 1$ olur.

$$d(x_n,x_{n+k}) \leq \beta^n \left[1+\beta+\ldots+\beta^{k-1}\right] d(x_1,x_0)$$

$$\leq \frac{\beta^n}{1-\beta} d(x_1,x_0)$$

$$n \to \infty \text{ için } \frac{\beta^n}{1-\beta} d(x_1, x_0) \to 0 \text{ olur.}$$

Dolayısıyla $\{x_n\}$ dizisi (X, d, κ) içinde bir Cauchy dizisidir.

(X, d, κ) tam olduğundan $\{x_n\}$ dizisinin bir u limit noktası vardır. T nin (κ, κ)-sürekliliğinden

$$T(u) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = u$$

elde edilir. u, T'nin bir sabit noktasıdır.

T nin tek bir sabit noktası olduğunu gösterelim. v de T nin bir sabit noktası olsun.

$$d(u, v) = d(Tu, Tv)$$

I. durumdan

$$d(u, v) \leq \lambda d(u, v) \Rightarrow (1-\lambda) d(u, v) \leq 0$$

elde edilir. $d(u, v) = 0$ ve $u = v$ bulunur.

II. Durumdan

$$d(u, v) = d(Tu, Tv) \leq \frac{\lambda}{2} \left(d(u, Tu) + d(v, Tv) \right)$$

$$= \frac{\lambda}{2} (d(u, u) + d(v, v))$$

$$= \frac{\lambda}{2} (0 + 0) = 0$$

Bu durumda $d(u, v) = 0$ ve $u = v$ dir.

III. Durumdan

$$d(u, v) = d(Tu, Tv) \leq \frac{\lambda}{2} \left(d(u, Tv) + d(v, Tu) \right)$$

$$= \frac{\lambda}{2} \left(d(u, v) + d(v, u) \right)$$

$$d(u,v) \leq \lambda d(u,v) \Rightarrow (1-\lambda)d(u,v) \leq 0$$

Buradan $d(u,v)=0$ ve $u=v$ dir. □

Tanım 4.21: (X,d,κ) bir dijital metrik uzay ve $T:(X,d,\kappa)\to(X,d,\kappa)$ bir dijital dönüşüm olsun. $\forall x,y\in X$ ve $0\leq \alpha+\beta+\delta<1$ için

$$d(Tx,Ty) \leq \alpha d(x,Ty)+\beta d(y,Tx)+\delta d(x,y)$$

olacak şekilde $\alpha,\beta,\delta \in {\mathbb{R}_0}^+$ varsa T ye dijital Rhoades kontraksiyonu denir.

Teorem 4.22: (Rhoades Kontraksiyon Prensibi) (X,d,κ) bir dijital metrik uzay ve $T:(X,d,\kappa)\to(X,d,\kappa)$ bir dijital dönüşüm olsun. $\forall x,y\in X$, $0\leq\alpha+\beta+\delta<1$, $\beta\leq\frac{1-\delta}{2}$ için

$$d(Tx,Ty) \leq \alpha d(x,Ty)+\beta d(y,Tx)+\delta d(x,y)$$

olacak şekilde T bir Rhoades kontraksiyonu ise, T tek bir sabit noktaya sahiptir; yani $T(c)=c$ olacak şekilde bir tek $c\in X$ vardır.

İspat: $x_0 \in X$ olsun. $Tx_n = x_{n+1}$ olacak şekilde bir dizi alalım.

$$d(x_2,x_1) = d(Tx_1,Tx_0) \leq \alpha d(x_1,Tx_0)+\beta d(x_0,Tx_1)+\delta d(x_1,x_0)$$

$$= \alpha d(x_1,x_1)+\beta d(x_0,x_2)+\delta d(x_1,x_0)$$

$$\leq \beta(d(x_0,x_1)+d(x_1,x_2))+\delta d(x_1,x_0)$$

$$= \beta d(x_0,x_1)+\beta d(x_1,x_2)+\delta d(x_1,x_0)$$

$$(1-\beta)d(x_2,x_1) \leq (\beta+\delta)d(x_1,x_0)$$

$$d(x_2,x_1) \leq \frac{\beta+\delta}{1-\beta}d(x_1,x_0)$$

$\frac{\beta+\delta}{1-\beta}=\lambda$ olarak alalım. $\beta\leq\frac{1-\delta}{2}$ olduğundan $\lambda<1$ dir.

Benzer şekilde

$$d(x_3,x_2) = d(Tx_2,Tx_1) \leq \alpha d(x_2,Tx_1)+\beta d(x_1,Tx_2)+\delta d(x_2,x_1)$$

$$= \alpha d(x_2, x_2) + \beta d(x_1, x_3) + \delta d(x_2, x_1)$$

$$\leq \beta(d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)) + \delta d(x_2, x_1)$$

$$= \beta d(x_1, x_2) + \beta d(x_2, x_3) + \delta d(x_2, x_1)$$

$$(1 - \beta) d(x_3, x_2) \leq (\beta + \delta) d(x_2, x_1)$$

$$d(x_3, x_2) \leq \frac{(\beta + \delta)}{1 - \beta} d(x_2, x_1)$$

$$\vdots$$

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda d(x_n, x_{n-1}) \leq \ldots \leq \lambda^n d(x_1, x_0)$$

$$d(x_n, x_{n+k}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{n+k-1}, x_{n+k})$$

$$\leq \lambda^n d(x_1, x_0) + \lambda^{n+1} d(x_1, x_0) + \ldots + \lambda^{n+k-1} d(x_1, x_0)$$

$$\leq \lambda^n \left(1 + \lambda + \ldots + \lambda^{k-1}\right) d(x_1, x_0)$$

$$\leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} d(x_1, x_0)$$

$n \to \infty$ için $\frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_1, x_0)$, 0 a yakınsar. Dolayısıyla $\{x_n\}$ dizisi (X, d, κ) içinde bir Cauchy dizisidir.

(X, d, κ) tam olduğundan $\{x_n\}$ dizisinin bir u limit noktası vardır. T'nin (κ, κ)-sürekliliğinden

$$T(u) = \lim_{n \to \infty} T(x_n) = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = u$$

elde edilir. u, T nin bir sabit noktasıdır.

T nin tek bir sabit noktası olduğunu gösterelim. v de T'nin bir sabit noktası olsun.

$$d(u, v) = d(Tu, Tv) \leq \alpha d(u, Tv) + \beta d(v, Tu) + \delta d(u, v)$$

$$= \alpha d(u, v) + \beta d(v, u) + +\delta d(u, v)$$

$$\Rightarrow d(u, v) \leq (\alpha + \beta + \delta) d(u, v)$$

$$\Rightarrow (1 - \alpha - \beta - \delta) d(u, v) \leq 0$$

bulunur. Bu durumda $d(u, v) = 0$ ve $u = v$ dir □

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, dijital topolojide sabit nokta teoremlerinin dijital metrik uzaylara uygulanabilirliği incelenmiştir. Dijital komşuluk yapıları, Hausdorff metrik ve çeşitli kontraksiyon türleri dijital ortamda tanımlanarak sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır.

5. KAYNAKLAR

1. Boxer, L “A classical construction for the digital fundamental group”, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 10, 51–62, (1999).

2. Boxer, L “Beyond the Hausdorff metric in digital topology”, arXiv:2108.93114v2 [cs.CG], (2021).

3. Boxer, L “Digitally continuous functions”, *Pattern Recognition Letters*, 15, 833–839, (1994).

4. Boxer, L. “Digital products, wedges, and covering spaces”, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 25, 159–171, (2006).

5. Boxer, L. “Properties of digital homotopy”, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 22, 19–26, (2005).

6. Dugundji, J. *Topology*, Allyn and Bacon, Baston, 1966.

7. Ege, O., Karaca, I., “Banach fixed point theorem for digital images”, *Journal of Nonlinear Science and Applications*, 8, 237–245, (2015).

8. Han, S. E. “Banach fixed point theorem from the viewpoint of digital topology”, *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 9, 895–905, (2016).

9. Han, S. E. “Connected sum of digital closed surfaces”, *Information Sciences*, 176, 332–348, (2006).

10. Han, S.E. “Digital fundamental group and Euler characteristic of a connected sum of digital closed surfaces”, *Information Sciences*, 177, 3314–3326, (2007).

11. Han, S.E. “Digital version of the fixed point theory”, *Proceedings of 11th ICFPTA (Abstracts)*, 1–4, (2015).

12. Han, S. E. “KD-(k_0, k_1)-homotopy equivalence and its applications”, *Journal of the Korean Mathematical Society*, 47(5), 1031–1054, (2010).

13. Han, S.E. “Non-product property of the digital fundamental group”, *Information Sciences*, 171, 73–91, (2005).

14. Han, S. E. “On the simplicial complexes determined from a digital graph”, *Honam Mathematical Journal*, 27, 115–129, (2015).

15. Karaca, I., Öztel, A., Boxer, L., “Topological invariants in digital images”, *Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications*, 11(2), 109–149, (2011).

16. Nadler Jr., S. B. *Hyperspaces of Sets*, Marcel Dakker, New York, 1978.

17. Park, C. Ege, O. Kumar, S. Jain, D. “Fixed point theorems for various contraction conditions in digital metric spaces”, *Journal of Computational Analysis and Applications*, July 2019.

18. Rosenfeld, A. “Continuous functions on digital pictures”, *Pattern Recognition Letters*, 4, 177–184, (1986).

19. Verilli, T. “Digital Hausdorff distance on a connected digital image”, *Communications Faculty of Sciences University of Ankara - Series A1 Mathematics and Statistics*, 69(2), 1079–1082, (2020).

20. Verilli, T. Borat, A. “Digital Lusternik–Schnirelmann category of digital functions”, *Journal of Mathematics and Statistics*, 49(4), 1414–1422, (2020).