

3 ve 4-Boyutlu Öklidyen Uzaylarda Quasi-Çatılı Helisler

Ebrar Demir

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Mayıs 2025



Helices with Quasi-Frame in 3 and 4-Dimensional Euclidean Spaces

Ebrar Demir

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics and Computer Sciences

May 2025

3 ve 4-Boyutlu Öklidyen Uzaylarda Quasi-Çatılı Helisler

Ebrar Demir

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği Uyarınca

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Geometri Bilim Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Cumali Ekici

Mayıs 2025

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı YÜKSEK LİSANS öğrencisi Ebrar Demir'in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "3 ve 4-Boyutlu Öklidyen Uzaylarda Quasi-Çatılı Helisler" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Cumali Ekici

İkinci Danışman :

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Cumali Ekici

Üye : Prof. Dr. Özcan Gelişgen

Üye : Doç. Dr. Koray Yılmaz

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Fatma TÛMSEK
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Cumali Ekici danışmanlığında hazırlamış olduğum “3 ve 4-Boyutlu Öklidyen Uzaylarda Quasi-Çatılı Helisler” başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 14/05/2025

Ebrar DEMİR

ÖZET

Bu çalışmada 3-boyutlu uzayda ve 4-boyutlu uzayda bir uzay eğrisinin quasi-çatısı kullanılarak helis kavramı üzerine odaklanılmıştır.

Beş bölümden oluşan bu çalışmada; birinci bölümde genel olarak tezde kullanılan kavramlar ile çalışmanın amacı dile getirilmiştir. İkinci bölümde helis, slant helis ve Darboux helis ile ilgili daha önce yapılmış çalışmalarla ilgili bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Öklidyen 3-uzayda bir eğrinin Frenet çatısı tanımlanmıştır. Frenet çatısı ve Frenet eğrilikleri yardımıyla Frenet türev denklemleri gibi temel kavramlar tanımlanmıştır. Daha sonra helis, slant helis ve Darboux helis kavramları için tanımlar verilmiştir. Küresel göstergeler yardımıyla bir eğrinin helis, slant helis ve Darboux helis olması için sağlanması gereken teoremler verilmiştir. Ancak Frenet çatısı eğrinin ikinci türevinin sıfır olduğu durumlarda hesaplanamadığından bir eğri verildiğinde eğrinin ikinci türevinin sıfır olduğu durumda da hesaplanabilen quasi-çatısı tanıtılmıştır. Yine quasi-çatı için quasi-eğrilikleri ve quasi-varyasyon denklemleri verilmiştir. Ayrıca Öklidyen 4-uzayda da Frenet ve quasi-çatıları için benzer kavramlar aktarılmıştır. Ek olarak 4-boyutlu uzayda helis kavramı ile \mathbf{B}_2 tip slant helis olma şartı verilmiştir.

Dördüncü bölümde, Öklidyen 3-uzayda bir eğrinin quasi-çatısı için quasi-eğrilikleri ve quasi-türev denklemleri kullanılarak küresel göstergeler yardımıyla quasi-helis, quasi-slant helis ve quasi-Darboux helis olma şartları elde edilmiştir.

Beşinci bölümde ise 4-boyutlu uzayda quasi-çatı için farklı tiplerden slant helisler üzerine teoriler verilmiş ve \mathbf{B}_{q2} tip slant helis olma şartı için bir teorem ifade ve ispat edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Quasi-çatı, helis, slant helis, Darboux helis.

SUMMARY

In this study, it is aimed to focus on the concept of helix using the quasi-frame of a space curve in 3-dimensional space and 4-dimensional space.

The study is divided into five sections. In the first section, information about the content of the thesis is given, and the purpose of the study is stated. In the second section, information about the past studies on helix, slant helix, and Darboux helix is given.

In the third section, the Frenet frame of a curve in 3-dimensional Euclidean space is defined. Basic concepts such as Frenet frame and Frenet frame equations are described with the help of Frenet frame and Frenet curvatures. Then, definitions are given for the concepts of helix, slant helix, and Darboux helix. Theorems that must be provided for helix, slant helix, and Darboux helix are given with the help of spherical indicators. However, since the Frenet frame cannot be calculated in cases where the second derivative of the curve is zero, the quasi-frame, which can be calculated in cases where the second derivative of the curve is zero when a curve is given, is introduced. Again, quasi-curvatures and quasi-derivative equations are given for quasi-frame. Also, similar concepts are given for Frenet and quasi-frames in 4-dimensional Euclidean space. In addition, the concept of helix in 4-dimensional space and the condition of being a \mathbf{B}_2 type slant helix are given.

In the fourth section, the quasi-curvatures and quasi-frame equations for the quasi-frame of a curve in Euclidean 3-space are used to obtain the conditions for being quasi-helix, quasi-slant helix, and quasi-Darboux helix with the help of spherical indicators.

In the fifth section, theories on different types of slant helices in 4-dimensional space are given and a theorem is expressed and proven for the condition for being a \mathbf{B}_{q2} type slant helix for the quasi-frame in 4-dimensional space.

Key Words: Quasi-frame, helix, slant helix, Darboux helix.

TEŞEKKÜR

“3 ve 4-Boyutlu Öklidyen Uzaylarda Quasi-Çatılı Helisler” adlı tez çalışmamda, tüm bilgilerini ve değerli vaktini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, tezimde büyük emeği olan ve bana inanan değerli danışmanım Sayın

Prof. Dr. Cumali Ekici

hocama teşekkür ederim.

Hayatım boyunca her koşulda maddi, manevi desteğini esirgemeyen, varlıklarıyla bana güç veren canım annem Kıymet Dođankan ve babam Varol Dođankan’a saygılarımı sunarım. Bu süreçte her zaman yanımda olan sabrıyla ve sevgisiyle bana moral veren sevgili eşim Berkcan Demir’e sonsuz teşekkür ederim.

ESKİŞEHİR, 2025

Ebrar Demir

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	vi
SUMMARY	vii
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xi
1. GİRİŞ VE AMAÇ	1
2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI	2
3. TEMEL KAVRAMLAR	4
3.1. \mathbb{R}^3 Uzayında Eğriler ve Çatı Yapıları	4
3.2. \mathbb{R}^4 Uzayında Eğriler ve Frenet Çatısı	12
3.3. \mathbb{R}^4 Uzayında Eğriler ve Quasi-Çatısı	13
4. 3-BOYUTLU UZAYDA QUASİ ÇATI VEKTÖRLERİ İLE OLUŞAN HELİSLER	15
4.1. Quasi-Vektörleri Tarafından Oluşan Quasi-Ani Dönme Vektörü	15
4.2. Quasi-Çatı Vektörleri ile Oluşan Quasi-Helisler	17
5. 4-BOYUTLU UZAYDA QUASİ-ÇATILI SLANT HELİSLER	37
5.1. Öklidyen 4-uzayda Quasi-Helisler	37
5.2. B_{q_2} Tipinde Slant Helis	45
6. BULGULAR VE TARTIŞMA	57
7. SONUÇ VE ÖNERİLER	58
KAYNAKLAR DİZİNİ	59

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
3.1 Frenet çatısı ve quasi çatısı ortak gösterimi	7
4.1 Eğri ve eğrinin küresel göstergeleri	24
4.2 Eğrinin bir parçası ve eğri ile kürenin resmi	26
5.1 (a) xyz -uzayındaki helis eğrisi (b) xyt -uzayındaki helis eğrisi	52
5.2 (c) xzt -uzayındaki helis eğrisi (d) yzt -uzayındaki helis eğrisi	53
5.3 (a) xyz -uzayındaki helis eğrisi (b) xyt -uzayındaki helis eğrisi	55
5.4 (c) xzt -uzayındaki helis eğrisi (d) yzt -uzayındaki helis eğrisi	56

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
\mathbb{R}	Reel Sayılar Cismi
\langle, \rangle	Skaler Çarpım Fonksiyonu
\times	Vektörel Çarpım Fonksiyonu
$\ \cdot\ $	Norm Fonksiyonu
α	Uzay Eğrisi
T	Teğet Vektör
N	Normal Vektör
B₁	Birinci Binormal Vektör
B₂	İkinci Binormal Vektör
N_q	Quasi-Normal Vektör
B_{q1}	Birinci Quasi-Binormal Vektör
B_{q2}	İkinci Quasi-Binormal Vektör
k_{q1}	Birinci Quasi-Eğriliği
k_{q2}	İkinci Quasi-Eğrilik
k_{q3}	Üçüncü Quasi-Eğrilik
k_{q4}	Dördüncü Quasi-Eğrilik
κ, τ, η	Frenet Eğrilikleri

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Diferansiyel geometrinin temellerinden biri olan eğriler teorisi çok çeşitli çalışma alanlarına sahiptir. Bir eğrinin çeşitli özelliklerini karakterize etmek için kullanılabilen çatılardan biri Frenet çatısı olarak isimlendirilir. Frenet çatısı yardımıyla elde edilen Frenet türev denklemleri ve eğrilikleri üzerinde çalışılan uzay eğrisini sınıflandırmada yardımcı olur. Bu çalışmada en çok bilinen eğri olan helisler incelenmiştir.

Öklidyen 3-uzayda tanım olarak helis, bir uzay eğrisi kullanılarak elde edilen teğet vektörüyle sabit bir doğrultunun arasındaki açının sabit olduğu durum olarak Lacret tarafından tanımlanmış olup Saint Venant tarafından ispatlanmıştır. Bir helis eğrisi burulması τ ve eğriliği κ olmak üzere $\frac{\tau}{\kappa}$ oranının sabit olması olarak da tanımlanır. Slant helis ise eğrinin asli normal vektörüyle sabit bir doğrultunun arasındaki açının sabit olduğu durum olarak Izumiya ve Takeuchi tarafından tanımlanmıştır. Eğriliği sıfırdan farklı olmak üzere bir uzay eğrisinin slant helis olması için sağlaması gereken özellik eğrinin asli normal göstergesi kullanılarak oluşturulan küresel görüntüsünün jeodezik eğriliği olan $\sigma(s) = \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(s)$ değerinin sabit olmasıdır. Son olarak Darboux helis kavramında Yaylı ve arkadaşları tarafından tanımlanmıştır. Zıplar ve arkadaşları bir uzay eğrisinin Darboux helis olması için gerek ve yeter koşulu eğrinin Darboux vektörünün küresel görüntüsünün jeodezik eğriliği olan $\sigma(s) = \frac{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}}{\kappa^2} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(s)$ değerinin sabit olmasıdır olarak tanımlamışlardır. İlâveten Coquillart, quasî-normal vektörü tanımlamıştır. Eğrinin ikinci türevinin sıfır olduğu durumda da kullanılabilen yeni bir yapı olarak quasî-çatı kavramını Dede ve arkadaşları ifade etmiştir. Çalışmamız boyunca yararlanılacak yapı quasî-çatıdır. Bu çalışmada ilk olarak quasî-ani dönme vektörü elde edilip çalışma boyunca quasî-ani dönme vektörü yerine quasî-Darboux ismi kullanılmıştır. Ek olarak eğrinin küresel görüntülerinin jeodezik eğriliği kullanılarak quasî-helis, quasî-slant helis ve quasî-Darboux helis kavramları tanıtılmış ve quasî-helis, quasî-slant helis ve quasî-Darboux helis olması için sağlaması gereken şartlar ispatlanmıştır.

Mağden, Öklid 4-uzay \mathbb{E}^4 uzayında helislerin integral karakterizasyonunu elde etmiştir. Bunun ardından Önder vd. 4-boyutlu Öklid uzayında Frenet türev denklemleri ve eğrilikleri yardımıyla slant helis kavramının bir tipi olan \mathbf{B}_2 tipinde slant helis tanıtılmış ve bu tanım ile ilgili bazı teoremler verilmiştir. Bu çalışmada ise quasî-türev denklemleri ve eğrilikleri yardımıyla quasi-slant helisler için teoremler ifade edilip ispatlanmıştır. Ardından \mathbf{B}_{q2} -slant helis elde edilmiş olup teorem ispatlanmıştır.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Frenet, 1847 yılında eğriler ile ilgili çatı kavramını ele almıştır. Diferensiyel geometri alanında eğriler ve yüzeyler teorisi birçok bilim insanının ilgi alanı olmuştur (Struik, 1961; Do-Carmo, 1976; Gray vd., 1993; Kuhnel, 2002).

Coquillart (1987) tarafından Frenet çatısında oluşabilecek durumlardan biri olan ikinci türevin tanımsız olduğu durumlarda bir uzay eğrisinin quasi-normal vektörünü ifade etmiştir. Ardından Dede vd., (2015) bu quasi-normal vektörü kullanarak quasi-çatıyı tanımlamışlardır. Dede vd., 2018 yılında tanımladıkları quasi-çatı, sabit olarak seçilmiş bir izdüşüm olarak adlandırılan vektör yardımıyla oluşturulan bir çatıdır. Paralel öteleme taşıma çatısının genelleştirilmiş hali quasi-çatısıdır.

Helis kavramı ilk olarak 1806 yılında Michel Ange Lancret tarafından tanımlanmış olup bir uzay eğrisinin teğet vektörüyle sabit bir doğru arasındaki açının sabit olması şeklindedir. Bu tanım 1845 yılında Barre Saint Venant tarafından ispatlanmıştır. Saint Venant tarafından verilen tanım bir eğrinin silindirik helis olması için $\frac{\tau}{\kappa}$ oranının sabit olması şeklindedir.

Izumiya ve Takeuchi tarafından 2004 yılında asli normal vektör alanıyla sabit bir doğrultunun sabit açı yaptığı durumdaki eğrilere slant helis adı verilmiştir. Eğriliği sıfırdan farklı olmak üzere bir uzay eğrisinin slant helis olabilmesi için sağlaması gereken şartın eğrinin (n) asli normal göstergesinin küresel göstergesinin jeodezik eğriliği olan $\sigma(s) = \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(s)$ fonksiyonunun sabit olmasıdır. Çamcı vd. (2013) 3-boyutlu Öklid uzayında küresel slant helislerle ilgili teoremlerle konuya ilişkin hesaplamalar yapmışlardır.

Darboux çatısı, 1896 yılında Darboux tarafından tanımlanmıştır. Öklidyen 3-uzayda Darboux helis kavramı ilk olarak Yaylı vd. tarafından (2012) tanımlanmıştır. Öklid uzayında Darboux helisler İlarıslan ve Yıldırım (2018) tarafından detaylandırılmıştır. Zıplar vd. (2012) eğrinin küresel göstergeleri yardımıyla helis kavramı, slant helis kavramı ve Darboux helis kavramı ile ilgili karakterizasyon teoremlerini ispatlamışlardır. Bu çalışmada quasi-çatı ve quasi-türev denklemleri kullanılarak ilk olarak quasi-ani dönme vektörü elde edilmiş olup daha sonra quasi-helis kavramı, quasi-slant helis kavramı ve quasi-Darboux helis kavramı ile ilgili karakterizasyon denklemleri ispatlanmıştır. Ünlütürk vd. (2023) yılında ilk olarak diferensiyel denklem çözümlerini kullanarak quasi-çatı denklemlerini yardımıyla 0, 1, 2 ve 3

tipinde slant helisleri tanımlamışlar ve ispatlamışlardır. Ardından Ünlütürk vd. (2024) quasi-çatıyı kullanarak timelike quasi-helisleri tanımlamışlardır.

3-boyutlu Öklidyen uzayda farklı çatılarda çalışmalar yapılmış olup bunlar Bishop (1975), Do Carmo (1976), Klok (1986), Bloomenthal (1990), Yılmaz ve Turgut (2010), Kızıltuğ Ve Yaylı (2013), Şentürk ve Yüce (2015), Kaymanlı Uğur vd. (2020), Kaymanlı Uğur (2020), Solomuma ve Al-Doyel (2021) ve son olarak Dede vd. (2021) şeklindedir.

Ali ve Lopez tarafından (2009) yılında 4-boyutlu Öklidyen uzayda ve Ali ve Lopez tarafından (2012) yılında Minkowski 4-uzayda slant helisler tanımlanmış ve ilgili kavramlara dair bazı teoremler verilmiştir. Kula ve Yaylı ise (2005) slant helisin küresel görüntülerini, teğet göstergesi ve binormal göstergesini araştırıp ispatlamışlardır. Ünlütürk vd. (2025) yılında 4-boyutlu Öklidyen uzayda quasi-çatı denklemleri yardımıyla 0, 1, 2 ve 3 tipinde slant helisleri tanımlamışlar ve ispatlamışlardır. Önder vd. (2008) Öklidyen 4-uzayda slant helis kavramının yeni tipi olan \mathbf{B}_2 -slant helis kavramını tanıtmış ve teoremleri ispatlamıştır. 4-boyutlu Öklidyen uzayda farklı çatılarda çalışmalar Doğan ve Yaylı (2012), Coşkun Ekici ve Akça (2023), Ekici vd. (2023), Gezer ve Ekici (2023), Yağbasan ve Ekici (2023) ve Yağbasan vd. tarafından (2023) yılında yapılmıştır. Bu çalışmada 4-boyutlu uzayda quasi-çatı kullanılarak Tip-0, Tip-1, Tip-2, Tip-3 cinsinden slant helisler ifade edilip teoremleri ispatlanmıştır. Ek olarak slant helisin \mathbf{B}_{q_2} -slant helisi tanıtılmış ve ardından \mathbf{B}_{q_2} -slant helisi tipi için teorem ispatlanmıştır.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm boyunca, hesaplamalarda kullanılabilecek Öklidyen 3 ve 4-uzayda vektör kavramları ile onların teorileri üzerinde durulmuştur.

3.1. \mathbb{R}^3 Uzayında Eğriler ve Çatı Yapıları

Tanım 3.1: n -boyutlu Öklidyen uzayda bir M eğrisi, (I, α) haritası ile verilsin. Eğrinin hız vektörü olan $\alpha'(t)$ tanjant vektörü

$$\alpha'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{d\alpha_i}{dt} \Big|_t \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(t)}$$

şeklinde ifade edilmişti

$$\begin{aligned} \alpha' : M &\rightarrow \bigcup_{\forall m \in M} T_m(M) \\ m = \alpha(t) &\rightarrow \alpha'(t) \end{aligned}$$

dönüşümünü dikkate alalım.

$$\begin{aligned} \pi : \bigcup_{\forall m \in M} T_m(M) &\rightarrow M \\ \alpha'(t) &\rightarrow \alpha(t) = m \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\pi \circ \alpha' = I_M : M \xrightarrow{\text{özdüşlük}} M$$

olduğu aşikardır. Buradan α' , M eğrisi üzerinde bir vektör alanı olarak tanımlanır. α' vektör alanına, M eğrisinin (I, α) haritasına göre teğet vektör alanı ismi verilir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 3.2: $M \subset \mathbb{E}^n$ eğrisi (I, α) haritası ile verilsin. Bu bilgiyle $\psi = \{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$ sistemi doğrusal bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}, k > r$ için $\alpha^{(k)} \in Sp\{\psi\}$ olmak üzere ψ den elde edilen $\{\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_r\}$ ortonormal baz sistemine, M eğrisinin Serret-Frenet r -ayaklısı alanı ve alanı $m \in M$ için $\{\mathbf{V}_1(m), \mathbf{V}_2(m), \dots, \mathbf{V}_r(m)\}$ ye ise $m \in M$ noktasındaki Serret-Frenet r -ayaklısı denir. $\forall \mathbf{V}_i, 1 \leq i \leq r$ ye Serret-Frenet vektörleri denir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 3.3: $M \subset \mathbb{E}^n$ eğrisi (J, α) haritasıyla verilsin. $s \in J$ ye karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r -ayaklısı olsun. O zaman $1 \leq i \leq r$ için

$$k_i : J \rightarrow \mathbb{R}, k_i(s) = \langle \mathbf{V}'_i(s), \mathbf{V}_{i+1}(s) \rangle$$

biçiminde ifade edilen k_i fonksiyonlarına M eğrisinin i -yinci eğrilik fonksiyonları adı verilir (Hacısalihoglu, 1983).

Teorem 3.1: Birim hızlı $M \subset \mathbb{E}^n$ eğrisi (J, α) haritasıyla verildiğinde $s \in J$ için $\alpha(s)$ noktasındaki $k_i(s)$ ve $\{\mathbf{V}_1(s), \dots, \mathbf{V}_r(s)\}$ olarak verilen Frenet çatısı göz önüne alındığında $1 \leq i \leq r$ olmak üzere

$$\begin{aligned} 1) \mathbf{V}'_1(s) &= k_1(s)\mathbf{V}_2(s) \\ 2) \mathbf{V}'_i(s) &= -k_{i-1}(s)\mathbf{V}_{i-1}(s) + k_i(s)\mathbf{V}_{i+1}(s) \\ 3) \mathbf{V}'_r(s) &= -k_{r-1}(s)\mathbf{V}_{r-1}(s) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 3.4: $n = 3$ özel hali için türev formülleri

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}'_1 \\ \mathbf{V}'_2 \\ \mathbf{V}'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradaki $k_1(s)$ değeri eğrilik adıyla $k_2(s)$ değeri de burulma adıyla bilinir. Burada

$$\begin{aligned} k_1 &= \langle \mathbf{T}', \mathbf{N} \rangle \\ k_2 &= \langle \mathbf{N}', \mathbf{B} \rangle \end{aligned}$$

dir (Hacısalihoglu, 1983).

Teorem 3.2: $M \subset \mathbb{E}^n$ eğrisi (I, α) haritasıyla verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere $\alpha(s)$ noktasında Frenet r-ayaklısı $\{\mathbf{V}_1(s), \mathbf{V}_2(s), \dots, \mathbf{V}_r(s)\}$ ve

$$E_i(s) = \alpha^{(i)}(s) - \sum_{j < i} \langle \alpha^{(i)}(s), \mathbf{V}_j(s) \rangle \cdot \mathbf{V}_j(s), \quad 1 \leq i \leq r$$

olacak şekilde

$$k_i = \frac{\|E_{i+1}\|}{\|E_i\|}$$

dir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 3.5: Frenet çatısı için birim hızlı M eğrisinin

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(s) &= \alpha'(s) \\ \mathbf{N}(s) &= \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} \\ \mathbf{B}(s) &= \frac{\alpha'(s) \times \alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}\end{aligned}$$

s keyfi parametre ise

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(s) &= \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|} \\ \mathbf{B}(s) &= \frac{\alpha'(s) \times \alpha''(s)}{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s)\|} \\ \mathbf{N}(s) &= \mathbf{B}(s) \times \mathbf{T}(s)\end{aligned}$$

dir.

Tanım 3.6: Gereksiz bükülmelerin önüne geçilmiş olan teğet vektörünün de kullanıldığı quasi-çatı elemanları izdüşüm vektörü ve keyfi bir vektör

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_z &= (0, 0, 1) \\ \mathbf{X} &= (a, b, c)\end{aligned}$$

yardımla

$$\begin{aligned}\mathbf{X} \times \mathbf{k}_z &= \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (b, -a, 0)\end{aligned}$$

bulunur. Bu bilgiye göre quasi-çatı vektörleri

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \\ \mathbf{N}_q &= \frac{\mathbf{T} \times \mathbf{k}}{\|\mathbf{T} \times \mathbf{k}\|} \\ \mathbf{B}_q &= \mathbf{T} \times \mathbf{N}_q\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır (Dede vd., 2015).

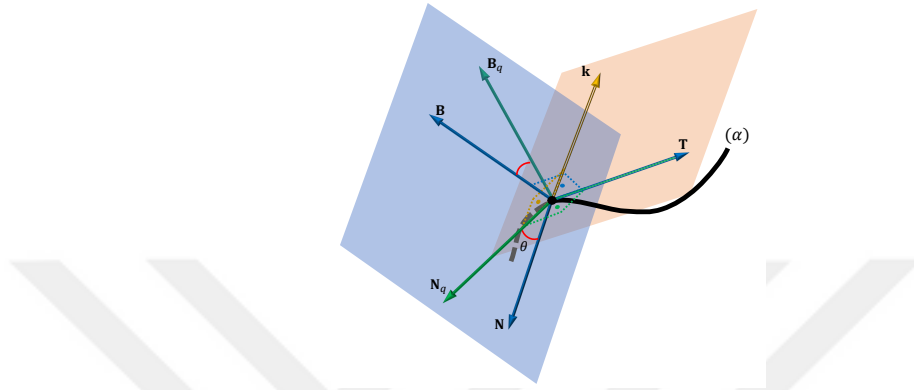
Teorem 3.3: Öklidyen 3-uzayda bir uzay eğrisinin quasi-çatı türevleri

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}'_q \\ \mathbf{B}'_q \end{bmatrix} = \|\alpha'\| \begin{bmatrix} 0 & k_{q1} & k_{q2} \\ -k_{q1} & 0 & k_{q3} \\ -k_{q2} & -k_{q3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N}_q \\ \mathbf{B}_q \end{bmatrix}$$

şeklinde verilir. Quasi-eğrilikleri ise

$$k_{q1} = \frac{\langle \mathbf{T}', \mathbf{N}_q \rangle}{\|\alpha'\|}, k_{q2} = \frac{\langle \mathbf{T}', \mathbf{B}_q \rangle}{\|\alpha'\|}, k_{q3} = \frac{\langle \mathbf{N}'_q, \mathbf{B}_q \rangle}{\|\alpha'\|}$$

dir (Dede vd., 2015).



Şekil 3.1 Frenet çatısı ve quasi çatısı ortak gösterimi

Tanım 3.7: M 3-boyutlu uzayda bir yüzey ve $\alpha : I \rightarrow M$ eğri olacak şekilde M yüzeyinin birim dik vektör alanı \mathbf{Z} olsun. α'' vektör alanı, $\mathbf{Z} \circ \alpha$ vektör alanının lineer birleşimi ise, α eğrisine, M yüzeyinde bir jeodezik eğri adı verilir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 3.8: $\alpha : I \rightarrow M$ birim hızlı eğri olsun. $\mathbf{T}(s)$ eğrinin birim teğet vektörü olmak üzere $\mathbf{Y}(s) = (\mathbf{Z} \circ \alpha)(s) \times \mathbf{T}(s)$ vektörü için

$$k_g(s) = \langle \alpha''(s), \mathbf{Y}(s) \rangle$$

skaleri (α, M) ikilisinin $\alpha(s)$ noktasındaki jeodezik eğriliği olarak adlandırılır (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 3.9: Bir yüzey eğrisinin bir noktasında, sonsuz küçük bir kesimin o noktada yüzeye teğet düzleme dik izdüşümün eğriliğine geodezik eğrilik denir. Yani \mathbb{E}^3 uzayında s -yay parametresi ile verilen α eğrisi için $\alpha'(s) = \mathbf{T}$ olacak şekilde

$$k_g = \|D_{\mathbf{T}}\mathbf{T}\| = \left\| \frac{d^2\alpha}{ds^2} \right\|$$

ifadesine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasında oluşan geodezik eğriliği olarak adlandırılır. $k_g = 0$ ise α eğrisine geodezik eğri denir (Ekici, 2021).

Helisler

Öklidyen 3-uzayda eğriliği sıfırdan farklı olmak üzere seçilen bir uzay eğrisi olan α eğrisinin teğet vektör alanı \mathbf{T} ile sabit olacak şekilde alınan \mathbf{U} vektörünün aralarındaki açının sabit olduğu durumda α eğrisi helis adını alır.

Bu doğrultuda bir $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. Her $t \in I$ için

- 1) $\mathbf{U}' = 0$
- 2) $\langle \mathbf{T}(t), \mathbf{U} \rangle = \cos \theta$ (θ sabit)

koşullarını sağlayan bir \mathbf{U} vektörü varsa, α eğrisine helis denir. Bir helis eğrisinin hem eğriliği, hem de burulması sıfırdan farklı ve sabit ise bu helise dairesel helis denir (Özdemir, 2021).

Örnek 3.1: $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ şeklinde $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ eğrisinin helis olduğunu gösteriniz. Her $t \in I$ için koşulları sağlayan bir \mathbf{U} vektörü bulunsun.

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \\ &= \frac{(-\sin t, \cos t, 1)}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

olarak bulunabilir. \mathbf{T} ile sabit açı yapacak şekilde sabit olan bir vektörü $\mathbf{U} = (0, 0, 1)$ alabiliriz.

$$\langle \mathbf{T}(t), \mathbf{U} \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45$$

olarak bulunduğu için her $t \in I$ için \mathbf{T} ile \mathbf{U} vektörü sabit açı yapar. Böylece eğrinin helis olduğu ispatlanmış olur (Özdemir, 2021).

Örnek 3.2: $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ şeklinde $\beta(t) = (t + \sqrt{3} \sin t, 2 \cos t, \sqrt{3}t - \sin t)$ eğrisinin helis olduğunu gösteriniz. Her $t \in I$ için koşulları sağlayan bir \mathbf{U} vektörü bulunsun.

$$\beta'(t) = (1 + \sqrt{3} \cos t, -2 \sin t, \sqrt{3} - \cos t)$$

olur. Ardından

$$\begin{aligned} \|\beta'(t)\| &= \sqrt{1 + 2\sqrt{3} \cos t + 3 \cos^2 t + 4 \sin^2 t + 3 - 2\sqrt{3} \cos t + \cos^2 t} \\ &= \sqrt{4 + 4(\cos^2 t + \sin^2 t)} \\ &= \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Buna göre

$$\mathbf{T} = \frac{\beta'(t)}{\|\beta'(t)\|} = \frac{(1 + \sqrt{3} \cos t, -2 \sin t, \sqrt{3} - \cos t)}{2\sqrt{2}}$$

olarak bulunabilir. \mathbf{T} ile sabit açı yapan ve sabit olan bir vektör $\mathbf{U} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ alınsın. Her $t \in I$ için

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{T}(t), \mathbf{U} \rangle &= \frac{1 + \sqrt{3} \cos t}{4\sqrt{2}} + 0 + \frac{3 - \sqrt{3} \cos t}{4\sqrt{2}} \\ &= \frac{4}{4\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

olduğundan

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

dir. Buna göre β eğrisi bir helistir (Özdemir, 2021).

Teorem 3.4: Bir uzay eğrinin burulması τ ve eğriliği κ olmak üzere

$$\frac{\tau}{\kappa}$$

oranının sabit olmasına helis denir (Lancret, 1806).

Sonuç 3.1: Lancret teoremine göre, bir helis eğrisinde

$$\frac{\tau}{\kappa} = \cot \theta = c$$

eşitliğinden dik üçgende trigonometrik oranlar yardımıyla

$$\cos \theta = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \text{ ve } \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}$$

olduğu görülür. Böylece sabit \mathbf{U} vektöründe

$$\mathbf{U} = \cos \theta \mathbf{T} + \sin \mathbf{B} = \frac{c\mathbf{T} + \mathbf{B}}{\sqrt{1+c^2}}$$

eşitliğiyle belirlidir (Özdemir, 2021).

Tanım 3.10: $M \subset \mathbb{E}^n$ eğrisi (I, α) haritasıyla verilsin. Her $s \in I$ için $\alpha'(s)$ birim hız vektörü, bir \mathbf{U} sabit birim vektörü ile sabit açı teşkil ediyorsa M ye bir eğilim çizgisi ve $Sp\{\mathbf{U}\}$ ya da M eğilim çizgisinin eğilim eksenini denir (Lancret, 1806).

Yani, bir eğrinin sabit bir doğrultu ile her noktasındaki teğetin yaptığı açı sabitse bu eğriye eğilim çizgisi veya helis denir. Sabit doğruya eğilim çizgisinin eksenini veya bu eğilim

ekseni denir. Sabit açının $\frac{\pi}{2}$ den farklı olması gerekir. Aksi halde düzlemdeki bütün eğrilerin birer eğilim çizgisi olması gerekir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 3.11: Eğriliği sıfır olmayacak şekilde asal normal birim vektörüyle sabit bir doğrultunun arasında oluşan sabit açılı eğriye slant helis denir (Izumiya ve Takeuchi, 2004).

Teorem 3.5: Bir α eğrisinin Frenet elemanları yardımıyla oluşturulan fonksiyonunun slant helis olması için

$$\sigma(s) = \left(\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \right) (s)$$

fonksiyonu sabit olmalıdır (Izumiya ve Takeuchi, 2004; Kula ve Yaylı, 2005).

Frenet Ani dönme vektörü:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

matris formuyla veya

$$\mathbf{T}' = \kappa \mathbf{N}$$

$$\mathbf{N}' = -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}$$

$$\mathbf{B}' = -\tau \mathbf{N}$$

türev denklemleriyle de yazılabilir. Buradan Frenet ani dönme vektörünü, Frenet ani dönme vektörü tanımı kullanarak bulunabilir. Yani

$$\mathbf{T}' = \mathbf{f} \times \mathbf{T}$$

$$\mathbf{N}' = \mathbf{f} \times \mathbf{N}$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{f} \times \mathbf{B}$$

denklemleri sağlanır. \mathbf{f} Frenet ani dönme vektörü

$$\mathbf{f} = c_1 \mathbf{T} + c_2 \mathbf{N} + c_3 \mathbf{B}$$

şeklinde yazılır. Buna göre c_1 , c_2 ve c_3 katsayıları hesaplanmalıdır.

$\mathbf{T}' = \mathbf{f} \times \mathbf{T}$ denkleminde \mathbf{T}' ve \mathbf{f} değerleri yerine yazılırsa

$$\kappa \mathbf{N} = (c_1 \mathbf{T} + c_2 \mathbf{N} + c_3 \mathbf{B}) \times \mathbf{T}$$

bulunur. Vektörel çarpım dağıtılsa

$$\kappa \mathbf{N} = c_1(\mathbf{T} \times \mathbf{T}) + c_2(\mathbf{N} \times \mathbf{T}) + c_3(\mathbf{B} \times \mathbf{T})$$

elde edilir. Buna göre

$$\kappa \mathbf{N} = c_2(-\mathbf{B}) + c_3(\mathbf{N})$$

bulunur. İki vektörün eşitliğinden $c_2 = 0$ ve $c_3 = \kappa$ elde edilir. Şimdi ise $\mathbf{N}' = \mathbf{f} \times \mathbf{N}$ denkleminde \mathbf{N}' ve \mathbf{f} değerleri yerine yazılırsa

$$-\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B} = (c_1 \mathbf{T} + c_2 \mathbf{N} + c_3 \mathbf{B}) \times \mathbf{N}$$

bulunur. Vektörel çarpım dağıtılsa

$$-\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B} = c_1(\mathbf{T} \times \mathbf{N}) + c_2(\mathbf{N} \times \mathbf{N}) + c_3(\mathbf{B} \times \mathbf{N})$$

olur. Buradan

$$-\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B} = c_1(\mathbf{B}) + c_3(-\mathbf{T})$$

bulunur. İki vektörün eşitliğinden $c_1 = \tau$ ve $c_3 = \kappa$ elde edilir. Son olarak $\mathbf{B}' = \mathbf{f} \times \mathbf{B}$ denkleminde \mathbf{B}' ve \mathbf{f} değerleri yerine yazılırsa

$$-\tau \mathbf{N} = (c_1 \mathbf{T} + c_2 \mathbf{N} + c_3 \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$-\tau \mathbf{N} = c_1(\mathbf{T} \times \mathbf{B}) + c_2(\mathbf{N} \times \mathbf{B}) + c_3(\mathbf{B} \times \mathbf{B})$$

elde edilir. Buna göre

$$-\tau \mathbf{N} = c_1(-\mathbf{N}) + c_2(\mathbf{T})$$

bulunur. İki vektörün eşitliğinden $c_1 = \tau$ ve $c_2 = 0$ elde edilir. Bulunan değerler \mathbf{f} denkleminde yerine yazılırsa $\mathbf{f} = \tau \mathbf{T} + \kappa \mathbf{B}$ bulunur (Ekici ve Öztürk, 2008).

Teorem 3.6: $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ yay parametresi ile verilen eğri için

$$\mathbf{W}_1(s) = \tau(s)\mathbf{T}(s) + \kappa(s)\mathbf{B}(s)$$

olan vektör Darboux vektörü şeklinde isimlendirilir. Darboux vektörü $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ Frenet 3-ayaklısının her s anındaki helis hareketi eksenidir.

$$\mathbf{W}(s) = \frac{\mathbf{W}_1(s)}{\|\mathbf{W}_1(s)\|} = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}(\tau \mathbf{T} + \kappa \mathbf{B})$$

vektörüne ise α eğrisinin Darboux göstergesi denir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 3.12: α , \mathbb{E}^3 3-uzayda eğrilik ve burulma sıfırdan farklı olmak koşuluyla bir eğri olsun. Bu α eğrisi için \mathbf{W} Darboux vektörü her noktada sabit olacak şekilde \mathbf{U} doğrusu ile sabit açı yaptığında yani $\langle \mathbf{W}, \mathbf{U} \rangle = \cos \theta$, θ açısı sabit olursa α eğrisine Darboux helis adı verilir (Macit, 2019).

Teorem 3.7: α eğrisinin Darboux helis olması için gerekli ve yeterli şart

$$\sigma(s) = \frac{(\tau^2 + \kappa^2)^{\frac{3}{2}}}{\kappa^2} \frac{1}{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'}$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır (Senol, 2008; Zıplar vd., 2012).

Tanım 3.13: $\alpha : I \rightarrow R^n$ ve $a, b \in I$ olsun.

$$t = \int_a^b \|\alpha'(s)\| ds$$

gerçel sayısına α eğrisinin $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki yay uzunluğu denir (Gray, 1997).

3.2. \mathbb{R}^4 Uzayında Eğriler ve Frenet Çatısı

Öklidyen 4-uzayda $\mathbf{U} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ ve $\mathbf{V} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ vektörleri için standart skaler çarpım

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

ve bir vektörün normu $\|\mathbf{U}\| = \sqrt{\langle \mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle}$ şeklinde verilir (Williams ve Stein, 1964; Shaw, 1987; Alessio, 2009; Elsayied vd. 2021).

\mathbb{E}^4 uzayında $\mathbf{U} \times \mathbf{V} \times \mathbf{W}$ vektörel çarpımı baz vektörleri yardımıyla determinant ve kofaktörler kullanılarak bulunur. Bu sebeple \mathbb{E}^4 uzayında $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$ vektörel çarpımı tanımlı değildir. Çünkü 3×4 -tipinde determinant hesabı yapılamaz (Shaw, 1987; Alessio, 2009).

Öklidyen 4-uzayda birim hızlı olarak $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^4$ şeklinde verilen eğrinin $\alpha''(s) \neq 0$ için Frenet çatı vektörleri

$$\mathbf{T}(s) = \alpha'(s) \quad \mathbf{N}(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{B}_2(s) = \frac{\alpha'(s) \times \alpha''(s) \times \alpha'''(s)}{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s) \times \alpha'''(s)\|} \quad \mathbf{B}_1(s) = \mathbf{B}_2(s) \times \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)$$

şeklinde verilir (Alessio, 2009; Elsayied vd. 2021). Bu durumda Frenet türev denklemlerinin gösterimi

$$\begin{aligned}\mathbf{T}'(s) &= \kappa(s)\mathbf{N}(s), \\ \mathbf{N}'(s) &= -\kappa(s)\mathbf{T}(s) + \tau(s)\mathbf{B}_1(s), \\ \mathbf{B}'_1(s) &= -\tau(s)\mathbf{N}(s) + \eta(s)\mathbf{B}_2(s), \\ \mathbf{B}'_2(s) &= -\eta(s)\mathbf{B}_1(s)\end{aligned}\quad (3.2)$$

biçimindedir (Gluck, 1966). Kolaylıkla yukarıdaki eşitlikten görülür ki eğrinin birinci, ikinci ve üçüncü eğriliği adı verilen fonksiyonlar sırasıyla

$$\begin{aligned}\kappa &= \langle \mathbf{T}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle \\ \tau &= \langle \mathbf{N}'(s), \mathbf{B}_1(s) \rangle \\ \eta &= \langle \mathbf{B}'_1(s), \mathbf{B}_2(s) \rangle\end{aligned}\quad (3.3)$$

biçimindedir (Öztürk vd., 2017; Alessio, 2009).

3.3. \mathbb{R}^4 Uzayında Eğriler ve Quasi-Çatısı

Öklidyen 4-uzayda $\alpha(s)$ ile verilen uzay eğrisi için quasi-çatı $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}_q, \mathbf{B}_{q1}, \mathbf{B}_{q2}\}$ olarak verilir. Burada \mathbf{k}_z ve \mathbf{k}_t izdüşüm vektörleri yardımıyla quasi-vektörleri

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|}, & \mathbf{N}_q &= \frac{\mathbf{T} \times \mathbf{k}_z \times \mathbf{k}_t}{\|\mathbf{T} \times \mathbf{k}_z \times \mathbf{k}_t\|}, \\ \mathbf{B}_{q1} &= \mathbf{B}_{q2} \times \mathbf{T} \times \mathbf{N}_q, & \mathbf{B}_{q2} &= \frac{\alpha'(s) \times \mathbf{N}_q(s) \times \alpha'''(s)}{\|\alpha'(s) \times \mathbf{N}_q(s) \times \alpha'''(s)\|}\end{aligned}\quad (3.4)$$

şeklinde verilir. Dikkat edilmesi gereken birim teğet vektörü ve kullanılan izdüşüm vektörlerinin doğrusal olması halinde quasi-normal vektörü hesaplanamaz (Elsayied vd., 2021; Gezer ve Ekici, 2023).

Öklidyen 4-uzayda birim hızlı olarak alınan eğri için (3.4) eşitlikleri kullanılarak quasi-çatı türev denklemleri

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}'_q \\ \mathbf{B}'_{q1} \\ \mathbf{B}'_{q2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_{q1} & k_{q2} & 0 \\ -k_{q1} & 0 & k_{q3} & 0 \\ -k_{q2} & -k_{q3} & 0 & k_{q4} \\ 0 & 0 & -k_{q4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N}_q \\ \mathbf{B}_{q1} \\ \mathbf{B}_{q2} \end{bmatrix}\quad (3.5)$$

şeklinde verilir. Buna göre quasi-eğrilikler olarak ifade edilen

$$\begin{aligned}k_{q1} &= \frac{\langle \mathbf{T}', \mathbf{N}_q \rangle}{\|\alpha'\|}, & k_{q2} &= \frac{\langle \mathbf{T}', \mathbf{B}_{q1} \rangle}{\|\alpha'\|}, \\ k_{q3} &= \frac{\langle \mathbf{N}'_q, \mathbf{B}_{q1} \rangle}{\|\alpha'\|} & \text{ve} & k_{q4} = \frac{\langle \mathbf{B}'_{q1}, \mathbf{B}_{q2} \rangle}{\|\alpha'\|}\end{aligned}\quad (3.6)$$

fonksiyonları verilir (Gezer ve Ekici, 2023).

Teorem 3.8: $\alpha = \alpha(s)$, \mathbb{R}^4 uzayında eğrilikleri sıfırdan farklı olacak şekilde birim hızlı bir eğri olsun. k_1 , k_2 ve k_3 Frenet eğrilikleri olmak üzere α eğrisinin genel bir helis olması ancak ve ancak

$$\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 + \left(\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' \frac{1}{k_3}\right)^2 = \text{sabit}$$

ifadesinin var olmasıdır (Yoon, 2012).

Tanım 3.14: $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^4$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim normal vektörü olan $\mathbf{N}(s)$, sabit şekilde seçilen \mathbf{U} birim vektörüyle sabit açı yapıyorsa, α eğrisine slant helis adı verilir (Izumiya ve Takeuchi, 2004).

Tanım 3.15: $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^4$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasında ikinci binormal vektörü $\mathbf{B}_2(s)$, bir \mathbf{U} birim vektörü ile sabit bir açı yapıyorsa yani eğri boyunca

$$\langle \mathbf{B}_2(s), \mathbf{U} \rangle = \cos \theta$$

ise α eğrisinin adı \mathbf{B}_2 -slant helis olarak isimlendirilir (Önder vd., 2008).

Teorem 3.9: Birim hızlı bir α eğrisi \mathbb{R}^4 uzayında eğrilikleri sıfırdan farklı olacak şekilde birim hızlı bir eğri olsun. k_1 , k_2 ve k_3 Frenet eğrilikleri olmak üzere α eğrisinin \mathbf{B}_2 -slant helis olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\left(\frac{k_3}{k_2}\right)^2 + \frac{1}{k_1^2} \left(\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\right)^2 = \tan^2 \theta = \text{sabit} \quad (3.7)$$

olmasıdır (Önder vd., 2008).

4. 3-BOYUTLU UZAYDA QUASI ÇATI VEKTÖRLERİ İLE OLUŞAN HELİSLER

Bu bölümde, ilk olarak quasi-çati vektörleri kullanılarak quasi-ani dönme vektörü elde edilip bu çalışma boyunca birim quasi-ani dönme vektörü kavramı quasi-Darboux olarak adlandırılacaktır. Daha sonra eğrinin küresel göstergeleri yardımıyla quasi-helís, quasi-slant helís ve quasi-Darboux helís kavramları için teoremler verilmiş ve bu teoremler ispatlanmıştır. Ek olarak quasi-helís, quasi-slant helís ve quasi-Darboux helís için ispatlanan yapıların sonuçları ispatlanmıştır. Çalışma örnekler ile desteklenmiştir.

4.1. Quasi-Vektörleri Tarafından Oluşan Quasi-Ani Dönme Vektörü

Quasi-eğrilikleri

$$\begin{aligned} k_{q1} &= \frac{\langle \mathbf{T}', \mathbf{N}_q \rangle}{\|\alpha'\|} \\ k_{q2} &= \frac{\langle \mathbf{T}', \mathbf{B}_q \rangle}{\|\alpha'\|} \\ k_{q3} &= \frac{\langle \mathbf{N}'_q, \mathbf{B}_q \rangle}{\|\alpha'\|} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}'_q \\ \mathbf{B}'_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_{q1} & k_{q2} \\ -k_{q1} & 0 & k_{q3} \\ -k_{q2} & -k_{q3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N}_q \\ \mathbf{B}_q \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

matris formuyla veya

$$\begin{aligned} \mathbf{T}' &= k_{q1}\mathbf{N}_q + k_{q2}\mathbf{B}_q \\ \mathbf{N}'_q &= -k_{q1}\mathbf{T} + k_{q3}\mathbf{B}_q \\ \mathbf{B}'_q &= -k_{q2}\mathbf{T} - k_{q3}\mathbf{N}_q \end{aligned}$$

quasi-türev denklemleriyle verilebilir. Buradan quasi-ani dönme vektörü, quasi-ani dönme vektörü tanımı kullanarak bulunur. Bu durumda

$$\mathbf{T}' = \mathbf{Q}_0 \times \mathbf{T}_q \quad (4.2)$$

$$\mathbf{N}'_q = \mathbf{Q}_0 \times \mathbf{N}_q \quad (4.3)$$

$$\mathbf{B}'_q = \mathbf{Q}_0 \times \mathbf{B}_q \quad (4.4)$$

denklemleri sağlanır. \mathbf{Q}_0 quası-ani dönme vektörü

$$\mathbf{Q}_0 = c_1 \mathbf{T} + c_2 \mathbf{N}_q + c_3 \mathbf{B}_q \quad (4.5)$$

şeklinde yazılır. Buna göre c_1 , c_2 ve c_3 katsayıları hesaplanmalıdır.

(4.2) denkleminde (4.1) ve (4.5) değerleri yerine yazılırsa

$$k_{q1} \mathbf{N}_q + k_{q2} \mathbf{B}_q = (c_1 \mathbf{T} + c_2 \mathbf{N}_q + c_3 \mathbf{B}_q) \times \mathbf{T}$$

bulunur. Vektörel çarpım dağıtılırsa

$$k_{q1} \mathbf{N}_q + k_{q2} \mathbf{B}_q = c_1 (\mathbf{T} \times \mathbf{T}) + c_2 (\mathbf{N}_q \times \mathbf{T}) + c_3 (\mathbf{B}_q \times \mathbf{T})$$

elde edilir. Buna göre

$$k_{q1} \mathbf{N}_q + k_{q2} \mathbf{B}_q = c_2 (-\mathbf{B}_q) + c_3 (\mathbf{N}_q)$$

bulunur. İki vektörün eşitliğinden $c_2 = -k_{q2}$ ve $c_3 = k_{q1}$ elde edilir.

Şimdi ise (4.3) denkleminde (4.1) ve (4.5) değerleri yerine yazılırsa

$$-k_{q1} \mathbf{T} + k_{q3} \mathbf{B}_q = (c_1 \mathbf{T} + c_2 \mathbf{N}_q + c_3 \mathbf{B}_q) \times \mathbf{N}_q$$

bulunur. Vektörel çarpım dağıtılırsa

$$-k_{q1} \mathbf{T} + k_{q3} \mathbf{B}_q = c_1 (\mathbf{T} \times \mathbf{N}_q) + c_2 (\mathbf{N}_q \times \mathbf{N}_q) + c_3 (\mathbf{B}_q \times \mathbf{N}_q)$$

elde edilir. Buna göre

$$-k_{q1} \mathbf{T} + k_{q3} \mathbf{B}_q = c_1 (\mathbf{B}_q) + c_3 (-\mathbf{T})$$

bulunur. İki vektörün eşitliğinden $c_1 = k_{q3}$ ve $c_3 = k_{q1}$ elde edilir.

Son olarak (4.4) denkleminde (4.1) ve (4.5) değerleri yerine yazılırsa

$$-k_{q2} \mathbf{T} - k_{q3} \mathbf{N}_q = (c_1 \mathbf{T} + c_2 \mathbf{N}_q + c_3 \mathbf{B}_q) \times \mathbf{B}_q$$

bulunur. Vektörel çarpım dağıtılırsa

$$-k_{q2} \mathbf{T} - k_{q3} \mathbf{N}_q = c_1 (\mathbf{T} \times \mathbf{B}_q) + c_2 (\mathbf{N}_q \times \mathbf{B}_q) + c_3 (\mathbf{B}_q \times \mathbf{B}_q)$$

elde edilir. Buna göre

$$-k_{q2} \mathbf{T} - k_{q3} \mathbf{N}_q = c_1 (-\mathbf{N}_q) + c_2 (\mathbf{T})$$

bulunur. İki vektörün eşitliğinden $c_1 = k_{q3}$ ve $c_2 = -k_{q2}$ elde edilir. Bulunan değerler (4.5) denkleminde yazılırsa

$$\mathbf{Q}_0(s) = k_{q3} \mathbf{T} - k_{q2} \mathbf{N}_q + k_{q1} \mathbf{B}_q \quad (4.6)$$

elde edilir.

Teorem 4.1: $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisi için

$$\mathbf{Q}_0(s) = k_{q3}(s)\mathbf{T}(s) - k_{q2}(s)\mathbf{N}_q(s) + k_{q1}(s)\mathbf{B}_q(s)$$

vektörü quasi-Darboux vektörü olarak adlandırılır. Bu vektöre $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}_q, \mathbf{B}_q\}$ üç ayaklısının her s anında bir ani helis hareketi yaptığı eksendir.

$$\mathbf{Q}(s) = \frac{\mathbf{Q}_0(s)}{\|\mathbf{Q}_0(s)\|} = \frac{1}{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q2}^2 + k_{q3}^2}}(k_{q3}\mathbf{T} - k_{q2}\mathbf{N}_q + k_{q1}\mathbf{B}_q) \quad (4.7)$$

vektörüne ise α eğrisinin birim quasi-ani dönme vektörü denir. Bu tezde birim quasi-ani dönme vektörü kavramını quasi-Darboux olarak isimlendireceğiz.

4.2. Quasi-Çatı Vektörleri ile Oluşan Quasi-Helisler

Bu kısımda quasi-çatı vektörleri ile oluşturulan quasi-helisler ele alınmıştır.

Teorem 4.2: \mathbb{E}^3 uzayında α birim hızlı eğri olsun. α eğrisinin quasi-helis olması için

$$\kappa_g = \frac{k_{q1}^2 \left(\frac{k_{q2}}{k_{q1}}\right)' + k_{q3}(k_{q1}^2 + k_{q2}^2)}{(k_{q1}^2 + k_{q2}^2)^{3/2}} \quad (4.8)$$

fonksiyonu her noktada sabittir. Burada k_{q1} , k_{q2} ve k_{q3} eğrinin quasi-eğrilikleridir.

İspat: α eğrisinin küresel teğetler göstergesi (\mathbf{T}) nin parametresi $s_{\mathbf{T}}$ ve birim teğet vektörü $\mathbf{T}_{\mathbf{T}}$ olsun. (\mathbf{T}) nin \mathbb{E}^3 deki geodezik eğriliği $\kappa_{\mathbf{T}}$ olsun.

$$\alpha(s_{\mathbf{T}}) = \mathbf{T}$$

eşitliğin türevi alınırsa

$$\frac{d\alpha}{ds_{\mathbf{T}}} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \frac{ds}{ds_{\mathbf{T}}} \quad (4.9)$$

bulunur. (4.9) eşitliğinde quasi-çatı türevleri yerine yazılırsa

$$\mathbf{T}_{\mathbf{T}} = (k_{q1}\mathbf{N}_q + k_{q2}\mathbf{B}_q) \frac{ds}{ds_{\mathbf{T}}} \quad (4.10)$$

elde edilir. Bulunan eşitliğin normu alınırsa

$$\|\mathbf{T}_{\mathbf{T}}\| = \sqrt{k_{q1}^2 + k_{q2}^2} \frac{ds}{ds_{\mathbf{T}}}$$

bulunur. $\|\mathbf{T}_{\mathbf{T}}\| = 1$ olduğundan

$$\frac{1}{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q2}^2}} = \frac{ds}{ds_{\mathbf{T}}}$$

bulunur. Bulunan değer (4.10) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_T &= (k_{q1}\mathbf{N}_q + k_{q2}\mathbf{B}_q) \frac{1}{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q2}^2}} \\ &= \frac{k_{q1}}{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q2}^2}}\mathbf{N}_q + \frac{k_{q2}}{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q2}^2}}\mathbf{B}_q\end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen bu denklemde \mathbf{Q} ile \mathbf{T} arasındaki açı Φ olmak üzere

$$\frac{k_{q1}}{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q2}^2}} = \cos \Phi \text{ ve } \frac{k_{q2}}{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q2}^2}} = \sin \Phi \quad (4.11)$$

yazılırsa (4.10) denklemi

$$\mathbf{T}_T = \cos \Phi \mathbf{N}_q + \sin \Phi \mathbf{B}_q \quad (4.12)$$

elde edilir. (4.12) denkleminin türevi alınır

$$\mathbf{T}_T[\mathbf{T}_T] = \frac{d\mathbf{T}_T}{ds_T} = \frac{d\mathbf{T}_T}{ds} \frac{ds}{ds_T}$$

bulunur. Buna göre D konneksiyonu için

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{T}_T}\mathbf{T}_T &= \frac{1}{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q2}^2}}(-\Phi' \sin \Phi \mathbf{N}_q + \cos \Phi(-k_{q1}\mathbf{T} + k_{q3}\mathbf{B}_q) \\ &\quad + \Phi' \cos \Phi \mathbf{B}_q + \sin \Phi(-k_{q2}\mathbf{T} - k_{q3}\mathbf{B}_q)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q2}^2}}(-\Phi' \sin \Phi \mathbf{N}_q - k_{q1} \cos \Phi \mathbf{T} + k_{q3} \cos \Phi \mathbf{B}_q \\ &\quad + \Phi' \cos \Phi \mathbf{B}_q - k_{q2} \sin \Phi \mathbf{T} - k_{q3} \sin \Phi \mathbf{N}_q) \\ &= \frac{1}{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q2}^2}}(\mathbf{T}(-k_{q1} \cos \Phi - k_{q2} \sin \Phi) \\ &\quad + \mathbf{N}_q \sin \Phi(-\Phi' - k_{q3}) + \mathbf{B}_q \cos \Phi(\Phi' + k_{q3}))\end{aligned} \quad (4.13)$$

bulunur. (4.13) denkleminin \mathbf{T} kısmında $\cos \Phi$ ve $\sin \Phi$ değerleri yerine yazılırsa

$$D_{\mathbf{T}_T}\mathbf{T}_T = (\mathbf{T}(\frac{-k_{q1}^2 - k_{q2}^2}{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q2}^2}}) + \mathbf{N}_q \sin \Phi(-\Phi' - k_{q3}) + \mathbf{B}_q \cos \Phi(\Phi' + k_{q3})) \frac{1}{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q2}^2}}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$D_{\mathbf{T}_T}\mathbf{T}_T = \mathbf{T}(-1) + \mathbf{N}_q \sin \Phi(\frac{-\Phi' - k_{q3}}{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q2}^2}}) + \mathbf{B}_q \cos \Phi(\frac{\Phi' + k_{q3}}{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q2}^2}}) \quad (4.14)$$

elde edilir. (4.14) denkleminin normu alınır

$$\begin{aligned}\|D_{\mathbf{T}_T}\mathbf{T}_T\| &= \sqrt{1 + (\frac{-\Phi' - k_{q3}}{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q2}^2}})^2 \sin^2 \Phi + (\frac{\Phi' + k_{q3}}{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q2}^2}})^2 \cos^2 \Phi} \\ &= \sqrt{1 + \frac{(\Phi' + k_{q3})^2}{k_{q1}^2 + k_{q2}^2}}\end{aligned} \quad (4.15)$$

bulunur. (4.15) denklemini $\kappa_{\mathbf{T}}$ olduğundan

$$\kappa_{\mathbf{T}} = \sqrt{1 + \frac{(\Phi' + k_{q3})^2}{k_{q1}^2 + k_{q2}^2}} \quad (4.16)$$

elde edilir. (\mathbf{T}) nin S^3 deki geodezik eğriliği

$$\kappa_g = \|\nabla_{\mathbf{T}} \mathbf{T}\|$$

şeklindedir. S kürenin şekil operatörü, D konneksiyon ve ∇ konneksiyon olmak üzere Gauss dönüşümünden

$$D_{\mathbf{T}} \mathbf{T} = \nabla_{\mathbf{T}} \mathbf{T} + \langle S(\mathbf{T}), \mathbf{T} \rangle \mathbf{T}$$

denklemini yazılabilir. Birim küreden dolayı $S = \frac{1}{r} I_2$ yazılabilir. Yani $S(\mathbf{T}) = I(\mathbf{T}) = \mathbf{T}$ bulunur. O halde $\langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle = 1$ bulunur. Buna göre

$$D_{\mathbf{T}} \mathbf{T} = \nabla_{\mathbf{T}} \mathbf{T} + \mathbf{T}$$

olur. Bu ifadenin normunun karesi alınır

$$\kappa_{\mathbf{T}}^2 = \kappa_g^2 + 1 \quad (4.17)$$

elde edilir. (4.17) denkleminde (4.16) değeri yerine yazılırsa

$$1 + \frac{(\Phi' + k_{q3})^2}{k_{q1}^2 + k_{q2}^2} = \kappa_g^2 + 1$$

bulunur. Bu ifade düzenlenirse

$$\kappa_g = \frac{\Phi' + k_{q3}}{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q2}^2}} \quad (4.18)$$

elde edilir. Bu denklemin çözümü için Φ' değeri bulunmalıdır. Bu yüzden (4.11) değerleri kullanılarak

$$\tan \Phi = \frac{\sin \Phi}{\cos \Phi} = \frac{k_{q2}}{k_{q1}}$$

bulunur. Her iki tarafında türevi alınır

$$\Phi'(1 + \tan^2 \Phi) = \left(\frac{k_{q2}}{k_{q1}}\right)'$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \Phi' &= \frac{1}{\left(1 + \frac{k_{q2}^2}{k_{q1}^2}\right)} \left(\frac{k_{q2}}{k_{q1}}\right)' \\ &= \frac{k_{q1}^2}{(k_{q1}^2 + k_{q2}^2)} \left(\frac{k_{q2}}{k_{q1}}\right)' \end{aligned} \quad (4.19)$$

olur. Bulunan (4.19) değeri (4.18) de yerine yazılırsa

$$\kappa_g = \frac{\frac{k_{q1}^2}{(k_{q1}^2 + k_{q2}^2)} \left(\frac{k_{q2}}{k_{q1}}\right)' + k_{q3}}{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q2}^2}}$$

elde edilir. Ardından bu ifade düzenlenirse

$$\kappa_g = \frac{k_{q1}^2 \left(\frac{k_{q2}}{k_{q1}}\right)' + k_{q3}(k_{q1}^2 + k_{q2}^2)}{(k_{q1}^2 + k_{q2}^2)^{3/2}} \quad (4.20)$$

bulunur. Eğrinin küresel göstergesi geodezikse çemberdir. Çemberin birinci eğriliği sabit olduğundan κ_T sabittir. (4.17) denkleminde dolayı κ_g fonksiyonu her noktada sabittir. Bu nedenle α eğrisi quasi-helistir.

Sonuç 4.1: k_{q1} , k_{q2} ve k_{q3} eğrinin quasi-eğrilikleri olmak üzere α eğrisi helis ise

$$\kappa_g = \frac{k_{q1}^2 \left(\frac{k_{q2}}{k_{q1}}\right)' + k_{q3}(k_{q1}^2 + k_{q2}^2)}{(k_{q1}^2 + k_{q2}^2)^{3/2}}$$

oranı sabittir.

İspat: Frenet çatı ve quasi-çatı eğrilikleri arasındaki ilişki göz önüne alındığında quasi-çatı eğriliklerinden $k_{q2} = 0$ alınırsa (4.8) denkleminde

$$\begin{aligned} \kappa_g &= \frac{k_{q3}(k_{q1}^2)}{(k_{q1}^2)^{3/2}} \\ &= \frac{k_{q3}k_{q1}^2}{k_{q1}^3} \\ &= \frac{k_{q3}}{k_{q1}} \end{aligned}$$

bulunur. (4.20) eşitliğinin sabit olduğu kullanıldığında bulunan son eşitliğin de sabit olduğu görülür. Bu nedenle α eğrisi helistir. Bu da Teorem 3.5 ile aynı anlama gelir.

Teorem 4.3: \mathbb{E}^3 uzayında α birim hızlı eğri olsun. α eğrisinin quasi-slant helis olması için

$$\kappa_g = \frac{(k_{q1}^2 \left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)' - k_{q2}(k_{q1}^2 + k_{q3}^2))}{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^{3/2}} \quad (4.21)$$

fonksiyonu her noktada sabittir. Burada k_{q1} , k_{q2} ve k_{q3} eğrinin quasi-eğrilikleridir.

İspat: α nın küresel asli normaller göstergesi (\mathbf{N}_q) nin parametresi $s_{\mathbf{N}_q}$ ve birim teğet vektörü $\mathbf{T}_{\mathbf{N}_q}$ olsun. (\mathbf{N}_q) nin \mathbb{E}^3 deki geodezik eğriliği $\kappa_{\mathbf{N}_q}$ olsun.

$$\alpha(s_{\mathbf{N}_q}) = \mathbf{N}_q(s)$$

eşitliğin türevi alınırsa

$$\frac{d\alpha}{ds_{\mathbf{N}_q}} = \frac{d\mathbf{N}_q}{ds} \frac{ds}{ds_{\mathbf{N}_q}}$$

olur. Eşitlik düzenlenirse

$$\mathbf{T}_{N_q} = (-k_{q1}\mathbf{T} + k_{q3}\mathbf{B}_q) \frac{ds}{dS_{N_q}} \quad (4.22)$$

bulunur. (4.22) eşitliğinin normu alınır

$$\|\mathbf{T}_{N_q}\| = \sqrt{k_{q1}^2 + k_{q3}^2} \frac{ds}{dS_{N_q}}$$

elde edilir. $\|\mathbf{T}_{N_q}\| = 1$ olduğundan

$$\frac{1}{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q3}^2}} = \frac{ds}{dS_{N_q}}$$

şeklinde ifade edilir. Bulduğumuz değer (4.22) denklemine yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{N_q} &= \frac{1}{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q3}^2}} (-k_{q1}\mathbf{T} + k_{q3}\mathbf{B}_q) \\ &= -\frac{k_{q1}}{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q3}^2}} \mathbf{T} + \frac{k_{q3}}{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q3}^2}} \mathbf{B}_q \end{aligned} \quad (4.23)$$

elde edilir. Bulunan denklemde \mathbf{Q} vektörüyle \mathbf{N}_q arasında oluşan açı Φ olacak şekilde

$$\cos \Phi = \frac{k_{q1}}{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q3}^2}} \quad (4.24)$$

$$\sin \Phi = \frac{k_{q3}}{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q3}^2}} \quad (4.25)$$

alınır ve (4.23) denklemine yerine yazılırsa

$$\mathbf{T}_{N_q} = -\cos \Phi \mathbf{T} + \sin \Phi \mathbf{B}_q \quad (4.26)$$

elde edilir. (4.26) eşitliğinin türevi alınır

$$\mathbf{T}_{N_q} [\mathbf{T}_{N_q}] = \frac{d\mathbf{T}_{N_q}}{dS_{N_q}} = \frac{d\mathbf{T}_{N_q}}{ds} \frac{ds}{dS_{N_q}}$$

bulunur. Buna göre D konneksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{T}_{N_q}} \mathbf{T}_{N_q} &= \frac{1}{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q3}^2}} (\Phi' \sin \Phi \mathbf{T} - \cos \Phi (k_{q1}\mathbf{N}_q + k_{q2}\mathbf{B}_q) \\ &\quad + \Phi' \cos \Phi \mathbf{B}_q + \sin \Phi (-k_{q2}\mathbf{T} - k_{q3}\mathbf{N}_q)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q3}^2}} (-\Phi' \sin \Phi \mathbf{N}_q - k_{q1} \cos \Phi \mathbf{N}_q - k_{q2} \cos \Phi \mathbf{B}_q \\ &\quad + \Phi' \cos \Phi \mathbf{B}_q - k_{q2} \sin \Phi \mathbf{T} - k_{q3} \sin \Phi \mathbf{N}_q) \\ &= \frac{1}{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q3}^2}} (\mathbf{T} (\Phi' \sin \Phi - k_{q2} \sin \Phi) + \mathbf{N}_q (-k_{q1} \cos \Phi - k_{q3} \sin \Phi) \\ &\quad + \mathbf{B}_q (\Phi' \cos \Phi - k_{q2} \cos \Phi)) \end{aligned} \quad (4.27)$$

bulunur. (4.27) denkleminin \mathbf{N}_q kısmında (4.24) ve (4.25) değerleri yerine yazılırsa

$$D_{\mathbf{T}_{N_q}} \mathbf{T}_{N_q} = \frac{1}{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q3}^2}} (\mathbf{T}(\Phi' \sin \Phi - k_{q2} \sin \Phi) + \mathbf{N}_q \left(\frac{-k_{q1}^2 - k_{q3}^2}{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q3}^2}} \right) + \mathbf{B}_q(\Phi' \cos \Phi - k_{q2} \cos \Phi)) \quad (4.28)$$

elde edilir. (4.28) denklemin normu alınır

$$\|D_{\mathbf{T}_{N_q}} \mathbf{T}_{N_q}\| = \sqrt{1 + \frac{(\Phi' - k_{q2})^2}{k_{q1}^2 + k_{q3}^2}} \quad (4.29)$$

bulunur. (4.29) ifadesi κ_{N_q} olduğundan

$$\kappa_{N_q} = \sqrt{1 + \frac{(\Phi' - k_{q2})^2}{k_{q1}^2 + k_{q3}^2}} \quad (4.30)$$

bulunur. (\mathbf{N}_q) nun S^3 deki geodezik eğriliği

$$\kappa_g = \|\nabla_{\mathbf{T}_{N_q}} \mathbf{T}_{N_q}\|$$

şeklindedir. S kürenin şekil operatörü, D konneksiyon ve ∇ konneksiyon olmak üzere Gauss dönüşümünden

$$D_{\mathbf{T}_{N_q}} \mathbf{T}_{N_q} = \nabla_{\mathbf{T}_{N_q}} \mathbf{T}_{N_q} + \langle S(\mathbf{T}_{N_q}), \mathbf{T}_{N_q} \rangle \mathbf{N}_q$$

formülü yazılabilir. Birim küreden dolayı $S = \frac{1}{r} I_2$ yazılabilir. Yani $S(\mathbf{T}_{N_q}) = I(\mathbf{T}_{N_q}) = \mathbf{T}_{N_q}$ bulunur. O halde $\langle \mathbf{T}_{N_q}, \mathbf{T}_{N_q} \rangle = 1$ bulunur. Buna göre

$$D_{\mathbf{T}_{N_q}} \mathbf{T}_{N_q} = \nabla_{\mathbf{T}_{N_q}} \mathbf{T}_{N_q} + \mathbf{N}_q$$

olur. Bu ifadenin normunun karesi alınır

$$\kappa_{N_q}^2 = \kappa_g^2 + 1 \quad (4.31)$$

bulunur. (4.31) denkleminde (4.30) değeri yerine yazılırsa

$$1 + \frac{(\Phi' - k_{q2})^2}{k_{q1}^2 + k_{q3}^2} = \kappa_g^2 + 1$$

bulunur. Buna göre

$$\kappa_g = \frac{(\Phi' - k_{q2})}{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q3}^2}} \quad (4.32)$$

elde edilir. Bu denklemin çözümü için Φ' değeri bulunmalıdır. Bu yüzden (4.24) ve (4.25) değerleri kullanılırsa

$$\tan \Phi = \frac{\sin \Phi}{\cos \Phi} = \frac{k_{q3}}{k_{q1}}$$

bulunur. Her iki tarafında türevi alınırsa

$$\Phi'(1 + \tan^2 \Phi) = \left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)'$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\Phi' &= \frac{1}{\left(1 + \frac{k_{q3}^2}{k_{q1}^2}\right)} \left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)' \\ &= \frac{k_{q1}^2}{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)} \left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)'\end{aligned}\quad (4.33)$$

olur. (4.33) değeri (4.32) denkleminde yerine yazılırsa

$$\kappa_g = \frac{(k_{q1}^2 \left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)' - k_{q2}(k_{q1}^2 + k_{q3}^2))}{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^{3/2}} \quad (4.34)$$

elde edilir.

Eğrinin küresel göstergesi geodezikse çemberdir. Çemberin birinci eğriliği sabit olduğundan κ_{N_q} sabittir. (4.31) denkleminde dolayı κ_g fonksiyonu her noktada sabittir. Bu nedenle α eğrisi quasi-slant helistir.

Sonuç 4.2: k_{q1} , k_{q2} ve k_{q3} eğrinin quasi-eğrilikleri olmak üzere α eğrisi slant helis ise

$$\kappa_g = \frac{(k_{q1}^2 \left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)' - k_{q2}(k_{q1}^2 + k_{q3}^2))}{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^{3/2}}$$

oranı sabittir.

İspat: Frenet çatı ve quasi-çatı eğrilikleri arasındaki ilişki göz önüne alındığında quasi-çatı eğriliklerinden $k_{q2} = 0$ alınırsa (4.21) denkleminde

$$\kappa_g = \frac{k_{q1}^2}{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^{3/2}} \left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)'$$

bulunur. (4.34) eşitliğinin sabit olduğu kullanıldığında bulunan son eşitliğin de sabit olduğu görülür. Bu nedenle α eğrisi slant helistir. Bu da Teorem 3.6 ile aynı anlama gelir.

Örnek 4.1: (\mathbb{R}, α) haritası yardımıyla verilen $M \subset \mathbb{E}^3$ eğrisi

$$\alpha(s) = \left(\frac{1}{3} \cos\left(\frac{3t}{2}\right), \frac{1}{3} \sin\left(\frac{3t}{2}\right), \frac{\sqrt{3}t}{2}\right)$$

olarak alınsın.

Bu eğrinin quasi-çatı vektörlerini bulmak için t parametresi yardımıyla türev alınır ve norm hesabı yapılırsa $\mathbf{k}_z = (0, 0, 1)$ izdüşüm vektörü yardımıyla quasi-çatı vektörleri

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_q = \left(-\frac{1}{2} \sin\left(\frac{3t}{2}\right), \frac{1}{2} \cos\left(\frac{3t}{2}\right), \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

ve

$$\mathbf{N}_q = \left(\cos\left(\frac{3t}{2}\right), \sin\left(\frac{3t}{2}\right), 0\right)$$

$$\mathbf{B}_q = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{3t}{2}\right), \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{3t}{2}\right), -\frac{1}{2}\right)$$

olarak elde edilir. (3.6) eşitliklerinden quasi-eğrilikleri ise

$$k_{q1} = -\frac{3}{4}$$

$$k_{q2} = 0$$

$$k_{q3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

elde edilir.

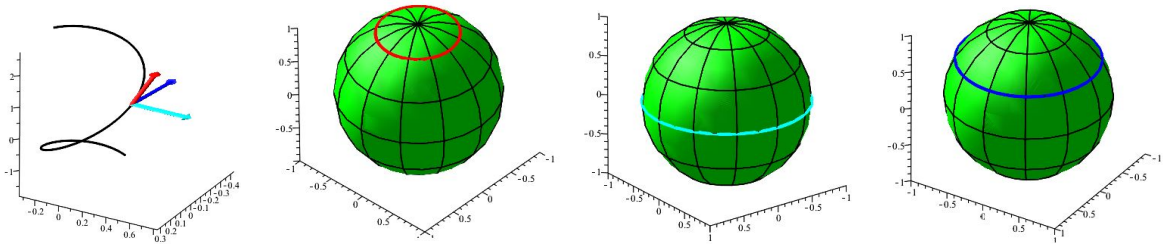
Teorem 4.2 göz önüne alındığında

$$\frac{k_{q1}^2 \left(\frac{k_{q2}}{k_{q1}}\right)' + k_{q3}(k_{q1}^2 + k_{q2}^2)}{(k_{q1}^2 + k_{q2}^2)^{3/2}} = \text{sabit}$$

bağıntısı kullanılırsa

$$\frac{k_{q1}^2 \left(\frac{k_{q2}}{k_{q1}}\right)' + k_{q3}(k_{q1}^2 + k_{q2}^2)}{(k_{q1}^2 + k_{q2}^2)^{3/2}} = -\sqrt{3}$$

olduğundan eğri \mathbb{E}^3 uzayında quasi-helistir. Eğri, eğrinin teğetler göstergesi (kırmızı), \mathbf{N}_q ile oluşan küresel göstergesi (açık mavi) ve \mathbf{B}_q ile oluşan küresel göstergesinin (mavi) küre ile çizdirilmiş grafikleri Şekil 4.1 ile verilmiştir.



Şekil 4.1 Eğri ve eğrinin küresel göstergeleri

Örnek 4.2: (\mathbb{R}, α) haritası yardımıyla verilen $M \subset \mathbb{E}^3$ eğrisi

$$\alpha(s) = \left(-\cos\left(\frac{t}{13}\right) \cos\left(\frac{5t}{169}\right) - \frac{5}{13} \sin\left(\frac{t}{13}\right) \sin\left(\frac{5t}{169}\right), \right. \\ \left. \frac{5}{13} \cos\left(\frac{t}{13}\right) \sin\left(\frac{5t}{169}\right) - \sin\left(\frac{t}{13}\right) \cos\left(\frac{5t}{169}\right), -\frac{12}{13} \sin\left(\frac{5t}{169}\right) \right)$$

olarak alınsın.

Bu eğrinin quasi-çatı vektörlerini bulmak için t parametresi yardımıyla türev alınır ve norm hesabı yapılırsa $\mathbf{k}_z = (0, 0, 1)$ izdüşüm vektörü yardımıyla quasi-çatı vektörleri

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\cos\frac{t}{169}(5-20\cos(\frac{t}{169})^2+16\cos(\frac{t}{169})^4)} \left[\frac{12\sin(\frac{t}{13})\cos(\frac{5t}{169})}{13}, -\frac{12\cos(\frac{t}{13})\sin(\frac{5t}{169})}{13}, \frac{5\cos(\frac{5t}{169})}{13} \right]$$

ve

$$\mathbf{N}_q = \frac{1}{\cos\frac{t}{169}(5-20\cos(\frac{t}{169})^2+16\cos(\frac{t}{169})^4)} \left[-\cos(\frac{t}{169})^2(65536\cos(\frac{t}{169})^{16} - 294912\cos(\frac{t}{169})^{14} \right. \\ \left. + 552960\cos(\frac{t}{169})^{12} - 559104\cos(\frac{t}{169})^{10} + 329472\cos(\frac{t}{169})^8 - 113984\cos(\frac{t}{169})^6 \right. \\ \left. + 22048\cos(\frac{t}{169})^4 - 2080\cos(\frac{t}{169})^2 + 65), -\sin(\frac{t}{169})\cos(\frac{t}{169})(65536\cos(\frac{t}{169})^{16} \right. \\ \left. - 262144\cos(\frac{t}{169})^{14} + 430080\cos(\frac{t}{169})^{12} - 372736\cos(\frac{t}{169})^{10} + 183040\cos(\frac{t}{169})^8 \right. \\ \left. - 50624\cos(\frac{t}{169})^6 + 7296\cos(\frac{t}{169})^4 - 440\cos(\frac{t}{169})^2 + 5), 0 \right]$$

$$\mathbf{B}_q = \left[-\frac{5}{13} \sin\left(\frac{t}{169}\right) (4096 \cos\left(\frac{t}{169}\right)^{12} - 11264 \cos\left(\frac{t}{169}\right)^{10} + 11520 \cos\left(\frac{t}{169}\right)^8 \right. \\ \left. - 5376 \cos\left(\frac{t}{169}\right)^6 + 1120 \cos\left(\frac{t}{169}\right)^4 - 84 \cos\left(\frac{t}{169}\right)^2 + 1, \right. \\ \left. \frac{5}{13} \cos\left(\frac{t}{169}\right) (4096 \cos\left(\frac{t}{169}\right)^{12} - 13312 \cos\left(\frac{t}{169}\right)^{10} + 16640 \cos\left(\frac{t}{169}\right)^8 \right. \\ \left. - 9984 \cos\left(\frac{t}{169}\right)^6 + 2912 \cos\left(\frac{t}{169}\right)^4 - 364 \cos\left(\frac{t}{169}\right)^2 + 13, -\frac{12}{13} \right]$$

olarak elde edilir. (3.6) eşitliklerinden quasi-eğrilikleri ise

$$k_{q1} = \frac{1}{\cos\frac{t}{169}(5-20\cos(\frac{t}{169})^2+16\cos(\frac{t}{169})^4)} \\ k_{q2} = 0 \\ k_{q3} = -\frac{5}{12\cos\frac{t}{169}(5-20\cos(\frac{t}{169})^2+16\cos(\frac{t}{169})^4)}$$

elde edilir.

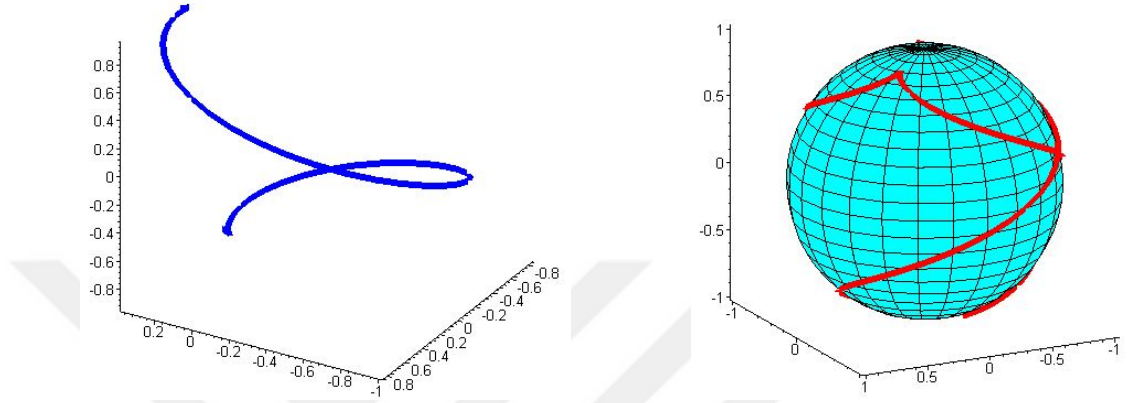
Teorem 4.2 göz önüne alındığında

$$\frac{k_{q1}^2 \left(\frac{k_{q2}}{k_{q1}}\right)' + k_{q3}(k_{q1}^2 + k_{q2}^2)}{(k_{q1}^2 + k_{q2}^2)^{3/2}} = \text{sabit}$$

bağıntısı kullanılırsa

$$\frac{k_{q1}^2 \left(\frac{k_{q2}}{k_{q1}}\right)' + k_{q3}(k_{q1}^2 + k_{q2}^2)}{(k_{q1}^2 + k_{q2}^2)^{3/2}} = \frac{5}{12}$$

olduğundan eğri \mathbb{E}^3 uzayında quasi-helistir. Eğrinin bir parçası ve eğrinin küre ile birlikte çizdirilen grafiği Şekil 4.2 ile verilmiştir.



Şekil 4.2 Eğrinin bir parçası ve eğri ile kürenin resmi

Teorem 4.4: Eğer \mathbf{Q} quasi-ani dönme vektörünün küresel göstergesi bir çember ya da çemberin bir parçası ise α eğrisi bir quasi-Darboux helistir.

İspat: \mathbf{Q} ile oluşturulan (c) eğrisinin parametresi s_c ve \mathbf{T}_c de (c) nin birim teğet vektörü olsun. Ayrıca κ_c ile de (c) nin \mathbb{E}^3 uzayında geodezik eğriliği gösterilsin.

$$\alpha(s_c) = c(s) = \frac{k_{q3}}{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q2}^2 + k_{q3}^3}} \mathbf{T} - \frac{k_{q2}}{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q2}^2 + k_{q3}^3}} \mathbf{N}_q + \frac{k_{q1}}{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q2}^2 + k_{q3}^3}} \mathbf{B}_q$$

alınsın. Burada \mathbf{Q} quasi-ani dönme vektörü için doğrultman kosinüsleri sırasıyla

$$\frac{k_{q3}}{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q2}^2 + k_{q3}^3}} = \cos \theta_1 \quad (4.35)$$

$$-\frac{k_{q2}}{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q2}^2 + k_{q3}^3}} = \cos \theta_2 \quad (4.36)$$

$$\frac{k_{q1}}{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q2}^2 + k_{q3}^3}} = \cos \theta_3 \quad (4.37)$$

olmak üzere denklem

$$\alpha(s_c) = c(s) = \cos \theta_1 \mathbf{T} + \cos \theta_2 \mathbf{N}_q + \cos \theta_3 \mathbf{B}_q$$

şeklinde yazılır. Bu ifadenin türevi alınır

$$\frac{d\alpha}{ds_c} = \frac{d\alpha}{ds} \frac{ds}{ds_c}$$

bulunur. Buna göre

$$\mathbf{T}_c = \frac{d\alpha}{ds} \frac{ds}{ds_c}$$

elde edilir. Türevin değeri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_c = & (-\theta'_1 \sin \theta_1 \mathbf{T} + \cos \theta_1 (k_{q1} \mathbf{N}_q + k_{q2} \mathbf{B}_q) - \theta'_2 \sin \theta_2 \mathbf{N}_q + \cos \theta_2 (-k_{q1} \mathbf{T} + k_{q3} \mathbf{B}_q) \\ & - \theta'_3 \sin \theta_3 \mathbf{B}_q + \cos \theta_3 (-k_{q2} \mathbf{T} - k_{q3} \mathbf{N}_q)) \frac{ds}{ds_c} \end{aligned}$$

bulunur. Düzenlenirse

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_c = & ((-\theta'_1 \sin \theta_1 - \cos \theta_2 k_{q1} - \cos \theta_3 k_{q2}) \mathbf{T} + (\cos \theta_1 k_{q1} - \theta'_2 \sin \theta_2 - \cos \theta_3 k_{q3}) \mathbf{N}_q \\ & + (\cos \theta_1 k_{q2} + \cos \theta_2 k_{q3} - \theta'_3 \sin \theta_3) \mathbf{B}_q) \frac{ds}{ds_c} \end{aligned} \quad (4.38)$$

elde edilir. (4.38) denkleminde (4.35),(4.36),(4.37) değerleri yerine yazılırsa

$$\mathbf{T}_c = (-\theta'_1 \sin \theta_1 \mathbf{T} - \theta'_2 \sin \theta_2 \mathbf{N}_q - \theta'_3 \sin \theta_3 \mathbf{B}_q) \frac{ds}{ds_c} \quad (4.39)$$

elde edilir. (4.39) denkleminin normu alınır

$$\|\mathbf{T}_c\| = \left\| (-\theta'_1 \sin \theta_1 \mathbf{T} - \theta'_2 \sin \theta_2 \mathbf{N}_q - \theta'_3 \sin \theta_3 \mathbf{B}_q) \frac{ds}{ds_c} \right\|$$

bulunur. $\|\mathbf{T}_c\| = 1$ olduğundan

$$\frac{ds}{ds_c} = \frac{1}{\sqrt{(-\theta'_1 \sin \theta_1)^2 + (-\theta'_2 \sin \theta_2)^2 + (-\theta'_3 \sin \theta_3)^2}} \quad (4.40)$$

elde edilir. Bu çalışmada

$$\Delta = (-\theta'_1 \sin \theta_1)^2 + (-\theta'_2 \sin \theta_2)^2 + (-\theta'_3 \sin \theta_3)^2 \quad (4.41)$$

olacak şekilde alınacaktır. Bulunan eşitlik (4.39) denkleminde yerine yazılırsa

$$\mathbf{T}_c = -\frac{\theta'_1 \sin \theta_1}{\sqrt{\Delta}} \mathbf{T} - \frac{\theta'_2 \sin \theta_2}{\sqrt{\Delta}} \mathbf{N}_q - \frac{\theta'_3 \sin \theta_3}{\sqrt{\Delta}} \mathbf{B}_q \quad (4.42)$$

elde edilir. (4.42) denkleminin türevi alınır

$$\mathbf{T}_c[\mathbf{T}_c] = D_{\mathbf{T}_c} \mathbf{T}_c = \frac{d\mathbf{T}_c}{ds} \frac{ds}{ds_c}$$

bulunur. Buna göre D konneksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{T}_c} \mathbf{T}_c = & \left(\left(-\frac{\theta'_1 \sin \theta_1}{\sqrt{\Delta}} \right)' \mathbf{T} + \left(-\frac{\theta'_1 \sin \theta_1}{\sqrt{\Delta}} \right) \mathbf{T}' + \left(-\frac{\theta'_2 \sin \theta_2}{\sqrt{\Delta}} \right)' \mathbf{N}_q \right. \\ & \left. + \left(-\frac{\theta'_2 \sin \theta_2}{\sqrt{\Delta}} \right) \mathbf{N}_q' + \left(-\frac{\theta'_3 \sin \theta_3}{\sqrt{\Delta}} \right)' \mathbf{B}_q + \left(-\frac{\theta'_3 \sin \theta_3}{\sqrt{\Delta}} \right) \mathbf{B}_q' \right) \frac{ds}{ds_c} \end{aligned}$$

bulunur.

Türevler alınıp yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
D_{\mathbf{T}_c} \mathbf{T}_c = & \left(\left(\frac{-(\theta'_1 \sin \theta_1)' \sqrt{\Delta} + \theta'_1 \sin \theta_1 \frac{\Delta'}{2\sqrt{\Delta}}}{\Delta} \right) \mathbf{T} + \left(-\frac{\theta'_1 \sin \theta_1}{\sqrt{\Delta}} \right) (k_{q1} \mathbf{N}_q + k_{q2} \mathbf{B}_q) \right. \\
& \left(\frac{-(\theta'_2 \sin \theta_2)' \sqrt{\Delta} + \theta'_2 \sin \theta_2 \frac{\Delta'}{2\sqrt{\Delta}}}{\Delta} \right) \mathbf{N}_q + \left(-\frac{\theta'_2 \sin \theta_2}{\sqrt{\Delta}} \right) (-k_{q1} \mathbf{T} + k_{q3} \mathbf{B}_q) \\
& \left. \left(\frac{-(\theta'_3 \sin \theta_3)' \sqrt{\Delta} + \theta'_3 \sin \theta_3 \frac{\Delta'}{2\sqrt{\Delta}}}{\Delta} \right) \mathbf{B}_q + \left(-\frac{\theta'_3 \sin \theta_3}{\sqrt{\Delta}} \right) (-k_{q2} \mathbf{T} - k_{q3} \mathbf{N}_q) \right) \frac{ds}{ds_c}
\end{aligned} \tag{4.43}$$

elde edilir.

Düzenleme yapmak için öncelikle Δ' değeri hesaplanmalıdır bu nedenle (4.41) eşitliğinin türevi alınır

$$\begin{aligned}
\Delta' = & 2(-\theta'_1 \sin \theta_1)(-\theta'_1 \theta''_1 \sin \theta_1 - (\theta'_1)^3 \sin \theta_1 \cos \theta_1) \\
& + 2(-\theta'_2 \sin \theta_2)(-\theta'_2 \theta''_2 \sin \theta_2 - (\theta'_2)^3 \sin \theta_2 \cos \theta_2) \\
& + 2(-\theta'_3 \sin \theta_3)(-\theta'_3 \theta''_3 \sin \theta_3 - (\theta'_3)^3 \sin \theta_3 \cos \theta_3)
\end{aligned} \tag{4.44}$$

elde edilir.

(4.44) ve (4.40) değerleri (4.43) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
D_{\mathbf{T}_c} \mathbf{T}_c = & \frac{1}{\Delta^2} [(-\theta''_1 \sin \theta_1 - (\theta'_1)^2 \cos \theta_1) \Delta + (\theta'_1)^2 \theta''_1 \sin^3 \theta_1 + (\theta'_1)^4 \sin^2 \theta_1 \cos \theta_1 \\
& + \theta'_1 \theta'_2 \theta''_2 \sin \theta_1 \sin^2 \theta_2 + \theta'_1 (\theta'_2)^3 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2 + \theta'_1 \theta'_3 \theta''_3 \sin \theta_1 \sin^2 \theta_3 \\
& + \theta'_1 (\theta'_3)^3 \sin \theta_1 \sin \theta_3 \cos \theta_3 + (\theta'_2 \sin \theta_2 k_{q1} + \theta'_3 \sin \theta_3 k_{q2}) \Delta] \mathbf{T} \\
& + [(-\theta''_2 \sin \theta_2 - (\theta'_2)^2 \cos \theta_2) \Delta + \theta'_1 \theta''_1 \theta'_2 \sin^2 \theta_1 \sin \theta_2 + (\theta'_2)^2 \theta''_2 \sin^3 \theta_2 \\
& + (\theta'_1)^3 \theta'_2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2 + (\theta'_2)^4 \sin^2 \theta_2 \cos \theta_2 + \theta'_2 \theta'_3 \theta''_3 \sin \theta_2 \sin^2 \theta_3 \\
& + \theta'_2 (\theta'_3)^3 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_3 + (-\theta'_1 \sin \theta_1 k_{q1} + \theta'_3 \sin \theta_3 k_{q3}) \Delta] \mathbf{N}_q \\
& + [(-\theta''_3 \sin \theta_3 - (\theta'_3)^2 \cos \theta_3) \Delta + \theta'_1 \theta''_1 \theta'_3 \sin^2 \theta_1 \sin \theta_3 + (\theta'_3)^2 \theta''_3 \sin^3 \theta_3 \\
& + \theta'_2 \theta''_2 \theta'_3 \sin^2 \theta_2 \sin \theta_3 + (\theta'_2)^3 \theta'_3 \sin \theta_2 \cos \theta_2 \sin \theta_3 + (\theta'_1)^3 \theta'_3 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \sin \theta_3 \\
& + (\theta'_3)^4 \sin^2 \theta_3 \cos \theta_3 + (-\theta'_1 \sin \theta_1 k_{q2} - \theta'_2 \sin \theta_2 k_{q3}) \Delta] \mathbf{B}_q
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.41) değeri yerine yazılır gerekli işlemler yapılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned}
D_{\mathbf{T}_c} \mathbf{T}_c &= \frac{1}{\Delta^2} [(-\theta_1'' \sin \theta_1 - (\theta_1')^2 \cos \theta_1)((\theta_2' \sin \theta_2)^2 + (\theta_3' \sin \theta_3)^2) \\
&\quad + (\theta_1' \sin \theta_1)(\theta_2'' \theta_2' \sin^2 \theta_2 + (\theta_2')^3 \sin \theta_2 \cos \theta_2 + \theta_3'' \theta_3' \sin^2 \theta_3 \\
&\quad + (\theta_3')^3 \sin \theta_3 \cos \theta_3) + (\theta_2' \sin \theta_2 k_{q1} + \theta_3' \sin \theta_3 k_{q2}) \Delta] \mathbf{T} \\
&\quad + [(-\theta_2'' \sin \theta_2 - (\theta_2')^2 \cos \theta_2)((\theta_1' \sin \theta_1)^2 + (\theta_3' \sin \theta_3)^2) \\
&\quad + (\theta_2' \sin \theta_2)(\theta_1'' \theta_1' \sin^2 \theta_1 + (\theta_1')^3 \sin \theta_1 \cos \theta_1 + \theta_3'' \theta_3' \sin^2 \theta_3 \\
&\quad + (\theta_3')^3 \sin \theta_3 \cos \theta_3) + (-\theta_1' \sin \theta_1 k_{q1} + \theta_3' \sin \theta_3 k_{q3}) \Delta] \mathbf{N}_q \\
&\quad + [(-\theta_3'' \sin \theta_3 - (\theta_3')^2 \cos \theta_3)((\theta_1' \sin \theta_1)^2 + (\theta_2' \sin \theta_2)^2) \\
&\quad + (\theta_3' \sin \theta_3)(\theta_1'' \theta_1' \sin^2 \theta_1 + (\theta_1')^3 \sin \theta_1 \cos \theta_1 + \theta_2'' \theta_2' \sin^2 \theta_2 \\
&\quad + (\theta_2')^3 \sin \theta_2 \cos \theta_2) + (-\theta_1' \sin \theta_1 k_{q2} - \theta_2' \sin \theta_2 k_{q3}) \Delta] \mathbf{B}_q)
\end{aligned} \tag{4.45}$$

bulunur. (4.45) denkleminin normu alınır

$$\|D_{\mathbf{T}_c} \mathbf{T}_c\| = \kappa_c$$

elde edilir. Buna göre

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{(\Delta)^4} ((-\theta_1'' \sin \theta_1 - (\theta_1')^2 \cos \theta_1)((\theta_2' \sin \theta_2)^2 + (\theta_3' \sin \theta_3)^2) \\
&\quad + \theta_1' \sin \theta_1 (\theta_2'' \theta_2' \sin^2 \theta_2 + (\theta_2')^3 \sin \theta_2 \cos \theta_2) \\
&\quad + \theta_1' \sin \theta_1 (\theta_3'' \theta_3' \sin^2 \theta_3 + (\theta_3')^3 \sin \theta_3 \cos \theta_3) \\
&\quad + (\theta_2' \sin \theta_2 k_{q1} + \theta_3' \sin \theta_3 k_{q2}) (\Delta)^2
\end{aligned} \tag{4.46}$$

ve

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{(\Delta)^4} ((-\theta_2'' \sin \theta_2 - (\theta_2')^2 \cos \theta_2)((\theta_1' \sin \theta_1)^2 + (\theta_3' \sin \theta_3)^2) \\
&\quad + \theta_2' \sin \theta_2 (\theta_1'' \theta_1' \sin^2 \theta_1 + (\theta_1')^3 \sin \theta_1 \cos \theta_1) \\
&\quad + \theta_2' \sin \theta_2 (\theta_3'' \theta_3' \sin^2 \theta_3 + (\theta_3')^3 \sin \theta_3 \cos \theta_3) \\
&\quad + (-\theta_1' \sin \theta_1 k_{q1} + \theta_3' \sin \theta_3 k_{q3}) (\Delta)^2
\end{aligned} \tag{4.47}$$

nihayetinde

$$\begin{aligned}
C &= \frac{1}{(\Delta)^4} ((-\theta_3'' \sin \theta_3 - (\theta_3')^2 \cos \theta_3)((\theta_1' \sin \theta_1)^2 + (\theta_2' \sin \theta_2)^2) \\
&\quad + \theta_3' \sin \theta_3 (\theta_1'' \theta_1' \sin^2 \theta_1 + (\theta_1')^3 \sin \theta_1 \cos \theta_1) \\
&\quad + \theta_3' \sin \theta_3 (\theta_2'' \theta_2' \sin^2 \theta_2 + (\theta_2')^3 \sin \theta_2 \cos \theta_2) \\
&\quad + (-\theta_1' \sin \theta_1 k_{q2} - \theta_2' \sin \theta_2 k_{q3}) (\Delta)^2
\end{aligned} \tag{4.48}$$

olarak alınırsa

$$\|D_{\mathbf{T}_c} \mathbf{T}_c\| = \kappa_c = \sqrt{A + B + C} \quad (4.49)$$

elde edilir.

Doğrultman kosinüsleri göz önüne alınırsa (4.35) denkleminde

$$\begin{aligned} \sin \theta_1 &= \frac{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q2}^2}}{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q2}^2 + k_{q3}^3}} \\ \tan \theta_1 &= \frac{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q2}^2}}{k_{q3}} \\ \theta_1' &= \frac{k_{q3}^2}{k_{q1}^2 + k_{q2}^2 + k_{q3}^3} \left(\frac{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q2}^2}}{k_{q3}} \right)' \end{aligned}$$

elde edilir. (4.36) denkleminde

$$\begin{aligned} \sin \theta_2 &= \frac{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q3}^2}}{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q2}^2 + k_{q3}^3}} \\ \tan \theta_2 &= \frac{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q3}^2}}{-k_{q2}} \\ \theta_2' &= \frac{k_{q2}^2}{k_{q1}^2 + k_{q2}^2 + k_{q3}^3} \left(\frac{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q3}^2}}{-k_{q2}} \right)' \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak (4.37)

$$\begin{aligned} \sin \theta_3 &= \frac{\sqrt{k_{q2}^2 + k_{q3}^2}}{\sqrt{k_{q1}^2 + k_{q2}^2 + k_{q3}^3}} \\ \tan \theta_3 &= \frac{\sqrt{k_{q2}^2 + k_{q3}^2}}{-k_{q1}} \\ \theta_3' &= \frac{k_{q1}^2}{k_{q1}^2 + k_{q2}^2 + k_{q3}^3} \left(\frac{\sqrt{k_{q2}^2 + k_{q3}^2}}{k_{q1}} \right)' \end{aligned}$$

elde edilir. Doğrultman kosinüsleri ile elde edilen değerler (4.46) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
A = & \frac{1}{(\Delta)^4} \left(- \left(\frac{k_{q3}^2}{k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2} \left(\frac{\sqrt{k_{q1}^2+k_{q2}^2}}{k_{q3}} \right)' \right)' \frac{k_{q2}^4 (k_{q1}^2+k_{q3}^2) \sqrt{k_{q1}^2+k_{q2}^2}}{(k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2)^{7/2}} \left(\left(\frac{\sqrt{k_{q1}^2+k_{q3}^2}}{-k_{q2}} \right)' \right)^2 \right. \\
& - \left(\frac{k_{q3}^2}{k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2} \left(\frac{\sqrt{k_{q1}^2+k_{q2}^2}}{k_{q3}} \right)' \right)' \frac{k_{q1}^4 (k_{q2}^2+k_{q3}^2) \sqrt{k_{q1}^2+k_{q2}^2}}{(k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2)^{7/2}} \left(\left(\frac{\sqrt{k_{q2}^2+k_{q3}^2}}{k_{q1}} \right)' \right)^2 \\
& - \frac{k_{q3}^5 k_{q2}^4 (k_{q1}^2+k_{q3}^2)}{(k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2)^{11/2}} \left(\left(\frac{\sqrt{k_{q1}^2+k_{q2}^2}}{k_{q3}} \right)' \right)^2 \left(\left(\frac{\sqrt{k_{q1}^2+k_{q3}^2}}{-k_{q2}} \right)' \right)^2 \\
& - \frac{k_{q3}^5 k_{q1}^4 (k_{q2}^2+k_{q3}^2)}{(k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2)^{11/2}} \left(\left(\frac{\sqrt{k_{q1}^2+k_{q2}^2}}{k_{q3}} \right)' \right)^2 \left(\left(\frac{\sqrt{k_{q2}^2+k_{q3}^2}}{k_{q1}} \right)' \right)^2 \\
& + \frac{k_{q3}^2 k_{q2}^2 (k_{q1}^2+k_{q3}^2) \sqrt{k_{q1}^2+k_{q2}^2}}{(k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2)^{7/2}} \left(\frac{\sqrt{k_{q1}^2+k_{q2}^2}}{k_{q3}} \right)' \left(\frac{k_{q2}^2}{k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2} \left(\frac{\sqrt{k_{q2}^2+k_{q3}^2}}{-k_{q2}} \right)' \right)' \left(\frac{\sqrt{k_{q1}^2+k_{q3}^2}}{-k_{q2}} \right)' \\
& - \frac{k_{q3}^2 k_{q2}^7 \sqrt{k_{q1}^2+k_{q3}^2} \sqrt{k_{q1}^2+k_{q2}^2}}{(k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2)^{11/2}} \left(\frac{\sqrt{k_{q1}^2+k_{q2}^2}}{k_{q3}} \right)' \left(\left(\frac{\sqrt{k_{q1}^2+k_{q3}^2}}{-k_{q2}} \right)' \right)^3 \\
& + \frac{k_{q3}^2 k_{q1}^2 (k_{q2}^2+k_{q3}^2) \sqrt{k_{q1}^2+k_{q2}^2}}{(k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2)^{7/2}} \left(\frac{\sqrt{k_{q1}^2+k_{q2}^2}}{k_{q3}} \right)' \left(\frac{k_{q1}^2}{k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2} \left(\frac{\sqrt{k_{q2}^2+k_{q3}^2}}{k_{q1}} \right)' \right)' \left(\frac{\sqrt{k_{q2}^2+k_{q3}^2}}{k_{q1}} \right)' \\
& + \frac{k_{q3}^2 k_{q1}^7 \sqrt{k_{q2}^2+k_{q3}^2} \sqrt{k_{q1}^2+k_{q2}^2}}{(k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2)^{11/2}} \left(\frac{\sqrt{k_{q1}^2+k_{q2}^2}}{k_{q3}} \right)' \left(\left(\frac{\sqrt{k_{q2}^2+k_{q3}^2}}{k_{q1}} \right)' \right)^3 \\
& + \left(\frac{k_{q2}^2 k_{q1} \sqrt{k_{q1}^2+k_{q3}^2}}{(k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2)^{3/2}} \left(\frac{\sqrt{k_{q1}^2+k_{q3}^2}}{-k_{q2}} \right)' + \frac{k_{q1}^2 k_{q2} \sqrt{k_{q2}^2+k_{q3}^2}}{(k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2)^{3/2}} \left(\frac{\sqrt{k_{q2}^2+k_{q3}^2}}{k_{q1}} \right)' \right) \Delta \Big)^2
\end{aligned} \tag{4.50}$$

değeri bulunur.

Benzer şekilde doğrultman kosinüsleri ile elde edilen değerler (4.47) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
B = & \frac{1}{(\Delta)^4} \left(- \left(\frac{k_{q2}^2}{k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2} \left(\frac{\sqrt{k_{q1}^2+k_{q3}^2}}{-k_{q2}} \right)' \right)' \frac{\sqrt{k_{q1}^2+k_{q3}^2} k_{q3}^4 (k_{q1}^2+k_{q2}^2)}{(k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2)^{7/2}} \left(\left(\frac{\sqrt{k_{q1}^2+k_{q2}^2}}{k_{q3}} \right)' \right)^2 \right. \\
& - \left(\frac{k_{q2}^2}{k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2} \left(\frac{\sqrt{k_{q1}^2+k_{q3}^2}}{-k_{q2}} \right)' \right)' \frac{\sqrt{k_{q1}^2+k_{q3}^2} k_{q1}^4 (k_{q2}^2+k_{q3}^2)}{(k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2)^{7/2}} \left(\left(\frac{\sqrt{k_{q2}^2+k_{q3}^2}}{k_{q1}} \right)' \right)^2 \\
& + \frac{k_{q2}^5 k_{q3}^4 (k_{q1}^2+k_{q2}^2)}{(k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2)^{11/2}} \left(\left(\frac{\sqrt{k_{q1}^2+k_{q3}^2}}{-k_{q2}} \right)' \right)^2 \left(\left(\frac{\sqrt{k_{q1}^2+k_{q2}^2}}{k_{q3}} \right)' \right)^2 \\
& + \frac{k_{q2}^5 k_{q1}^4 (k_{q2}^2+k_{q3}^2)}{(k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2)^{11/2}} \left(\left(\frac{\sqrt{k_{q1}^2+k_{q3}^2}}{-k_{q2}} \right)' \right)^2 \left(\left(\frac{\sqrt{k_{q2}^2+k_{q3}^2}}{k_{q1}} \right)' \right)^2 \\
& + \frac{k_{q2}^2 \sqrt{k_{q1}^2+k_{q3}^2} k_{q3}^2 (k_{q1}^2+k_{q2}^2)}{(k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2)^{7/2}} \left(\frac{\sqrt{k_{q1}^2+k_{q3}^2}}{-k_{q2}} \right)' \left(\frac{k_{q3}^2}{k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2} \left(\frac{\sqrt{k_{q1}^2+k_{q2}^2}}{k_{q3}} \right)' \right)' \left(\frac{\sqrt{k_{q1}^2+k_{q2}^2}}{k_{q3}} \right)' \\
& + \frac{k_{q2}^2 \sqrt{k_{q1}^2+k_{q3}^2} k_{q3}^7 \sqrt{k_{q1}^2+k_{q2}^2}}{(k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2)^{11/2}} \left(\frac{\sqrt{k_{q1}^2+k_{q3}^2}}{-k_{q2}} \right)' \left(\left(\frac{\sqrt{k_{q1}^2+k_{q2}^2}}{k_{q3}} \right)' \right)^3 \\
& + \frac{k_{q2}^2 \sqrt{k_{q1}^2+k_{q3}^2} k_{q1}^2 (k_{q2}^2+k_{q3}^2)}{(k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2)^{7/2}} \left(\frac{\sqrt{k_{q1}^2+k_{q3}^2}}{-k_{q2}} \right)' \left(\frac{k_{q1}^2}{k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2} \left(\frac{\sqrt{k_{q2}^2+k_{q3}^2}}{k_{q1}} \right)' \right)' \left(\frac{\sqrt{k_{q2}^2+k_{q3}^2}}{k_{q1}} \right)' \\
& + \frac{k_{q2}^2 \sqrt{k_{q1}^2+k_{q3}^2} k_{q1}^7 \sqrt{k_{q2}^2+k_{q3}^2}}{(k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2)^{11/2}} \left(\frac{\sqrt{k_{q1}^2+k_{q3}^2}}{-k_{q2}} \right)' \left(\left(\frac{\sqrt{k_{q2}^2+k_{q3}^2}}{k_{q1}} \right)' \right)^3 \\
& + \left(- \frac{k_{q3}^2 k_{q1} \sqrt{k_{q1}^2+k_{q2}^2}}{(k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2)^{3/2}} \left(\frac{\sqrt{k_{q1}^2+k_{q2}^2}}{k_{q3}} \right)' + \frac{k_{q1}^2 k_{q3} \sqrt{k_{q2}^2+k_{q3}^2}}{(k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2)^{3/2}} \left(\frac{\sqrt{k_{q2}^2+k_{q3}^2}}{k_{q1}} \right)' \right) (\Delta)^2
\end{aligned}$$

(4.51)

olarak elde edilir.

Son olarak doğrultman kosinüsleri ile elde edilen değerler (4.48) eşitliklerinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
C = & \frac{1}{(\Delta)^4} \left(- \left(\frac{k_{q1}^2}{k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2} \left(\frac{\sqrt{k_{q2}^2+k_{q3}^2}}{k_{q1}} \right)' \right)' \frac{\sqrt{k_{q2}^2+k_{q3}^2} k_{q3}^4 (k_{q1}^2+k_{q2}^2)}{(k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2)^{7/2}} \left(\left(\frac{\sqrt{k_{q1}^2+k_{q2}^2}}{k_{q3}} \right)' \right)^2 \right. \\
& - \left(\frac{k_{q1}^2}{k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2} \left(\frac{\sqrt{k_{q2}^2+k_{q3}^2}}{k_{q1}} \right)' \right)' \frac{\sqrt{k_{q2}^2+k_{q3}^2} k_{q2}^4 (k_{q1}^2+k_{q3}^2)}{(k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2)^{7/2}} \left(\left(\frac{\sqrt{k_{q1}^2+k_{q3}^2}}{-k_{q2}} \right)' \right)^2 \\
& - \frac{k_{q1}^5 k_{q3}^4 (k_{q1}^2+k_{q2}^2)}{(k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2)^{11/2}} \left(\left(\frac{\sqrt{k_{q2}^2+k_{q3}^2}}{k_{q1}} \right)' \right)^2 \left(\left(\frac{\sqrt{k_{q1}^2+k_{q2}^2}}{k_{q3}} \right)' \right)^2 \\
& - \frac{k_{q1}^5 k_{q2}^4 (k_{q1}^2+k_{q3}^2)}{(k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2)^{11/2}} \left(\left(\frac{\sqrt{k_{q2}^2+k_{q3}^2}}{k_{q1}} \right)' \right)^2 \left(\left(\frac{\sqrt{k_{q1}^2+k_{q3}^2}}{-k_{q2}} \right)' \right)^2 \\
& + \frac{k_{q1}^2 \sqrt{k_{q2}^2+k_{q3}^2} k_{q3}^2 (k_{q1}^2+k_{q2}^2)}{(k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2)^{7/2}} \left(\frac{\sqrt{k_{q2}^2+k_{q3}^2}}{k_{q1}} \right)' \left(\frac{k_{q3}^2}{k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2} \left(\frac{\sqrt{k_{q1}^2+k_{q2}^2}}{k_{q3}} \right)' \right)' \left(\frac{\sqrt{k_{q1}^2+k_{q2}^2}}{k_{q3}} \right)' \\
& + \frac{k_{q1}^2 \sqrt{k_{q2}^2+k_{q3}^2} k_{q3}^7 \sqrt{k_{q1}^2+k_{q2}^2}}{(k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2)^{11/2}} \left(\frac{\sqrt{k_{q2}^2+k_{q3}^2}}{k_{q1}} \right)' \left(\left(\frac{\sqrt{k_{q1}^2+k_{q2}^2}}{k_{q3}} \right)' \right)^3 \\
& + \frac{k_{q1}^2 \sqrt{k_{q2}^2+k_{q3}^2} k_{q2}^2 (k_{q1}^2+k_{q3}^2)}{(k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2)^{7/2}} \left(\frac{\sqrt{k_{q2}^2+k_{q3}^2}}{k_{q1}} \right)' \left(\frac{k_{q2}^2}{k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2} \left(\frac{\sqrt{k_{q1}^2+k_{q3}^2}}{k_{q1}} \right)' \right)' \left(\frac{\sqrt{k_{q1}^2+k_{q3}^2}}{-k_{q2}} \right)' \\
& - \frac{k_{q1}^2 \sqrt{k_{q2}^2+k_{q3}^2} k_{q2}^7 \sqrt{k_{q1}^2+k_{q3}^2}}{(k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2)^{11/2}} \left(\frac{\sqrt{k_{q2}^2+k_{q3}^2}}{k_{q1}} \right)' \left(\left(\frac{\sqrt{k_{q1}^2+k_{q3}^2}}{-k_{q2}} \right)' \right)^3 \\
& + \left(- \frac{k_{q3}^2 k_{q2} \sqrt{k_{q1}^2+k_{q2}^2}}{(k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2)^{3/2}} \left(\frac{\sqrt{k_{q1}^2+k_{q2}^2}}{k_{q3}} \right)' - \frac{k_{q2}^2 k_{q3} \sqrt{k_{q1}^2+k_{q3}^2}}{(k_{q1}^2+k_{q2}^2+k_{q3}^2)^{3/2}} \left(\frac{\sqrt{k_{q1}^2+k_{q3}^2}}{-k_{q2}} \right)' \right) \Delta \Big)^2
\end{aligned} \tag{4.52}$$

elde edilir. (4.49) ifadesi olan κ_c değeri ve (C) nin S^3 deki geodezik eğriliği

$$\kappa_g = \|\nabla_{\mathbf{T}_C} \mathbf{T}_C\|$$

şekindedir. S kürenin şekil operatörü, D konneksiyon ve ∇ konneksiyon olmak üzere Gauss dönüşümünden

$$D_{\mathbf{T}_c} \mathbf{T}_c = \nabla_{\mathbf{T}_C} \mathbf{T}_C + \langle S(\mathbf{T}_C), \mathbf{T}_C \rangle \mathbf{N}_q$$

formülü yazılabilir. Birim küreden dolayı $S = \frac{1}{r} I_2$ yazılabilir. Yani $S(\mathbf{T}_C) = I(\mathbf{T}_C) = \mathbf{T}_c$ bulunur. O halde $\langle \mathbf{T}_c, \mathbf{T}_c \rangle = 1$ bulunur. Buna göre

$$D_{\mathbf{T}_c} \mathbf{T}_c = \nabla_{\mathbf{T}_C} \mathbf{T}_C + \mathbf{N}_q$$

olur. Bu ifadenin normunun karesi alınır

$$\kappa_c^2 = \kappa_g^2 + 1 \tag{4.53}$$

bulunur. (4.53) denkleminde (4.49) değeri yerine yazılırsa

$$A + B + C = \kappa_g^2 + 1$$

bulunur. Buna göre

$$\kappa_g = A + B + C - 1 \quad (4.54)$$

elde edilir. Eğrinin küresel göstergesi geodezikse çemberdir. Çemberin birinci eğriliği sabit olduğundan κ_c sabittir. (4.53) denkleminde dolayı κ_g fonksiyonu her noktada sabittir. Bu nedenle α eğrisi quasi-Darboux helistir.

Sonuç 4.2: α eğrisi Darboux helis ise

$$\kappa_g = A + B + C - 1$$

oranı sabittir.

İspat: Frenet çatı ve quasi-çatı eğrilikleri arasındaki ilişki göz önüne alındığında quasi-çatı eğriliklerinden $k_{q2} = 0$ alınır

$$\begin{aligned} A = & \frac{1}{\left(\frac{k_{q3}^4 k_{q1}^2}{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^3} \left(\left(\frac{k_{q1}}{k_{q3}} \right)' \right)^2 + \frac{k_{q1}^4 k_{q3}^2}{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^3} \left(\left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}} \right)' \right)^2 \right)^4} \left[\frac{k_{q3}^3 k_{q1}^8}{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^{11/2}} \left(\frac{k_{q1}}{k_{q3}} \right)' \left(\left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}} \right)' \right)^3 \right. \\ & - \left(\left(\frac{k_{q1}}{k_{q3}} \right)' \right)^2 \frac{k_{q3}^7 k_{q1}^4}{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^{11/2}} \left(\left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}} \right)' \right)^2 \\ & - \left(\frac{k_{q3}^2}{k_{q1}^2 + k_{q3}^2} \left(\frac{k_{q1}}{k_{q3}} \right)' \right)' \frac{k_{q1}^5 k_{q3}^2}{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^{7/2}} \left(\left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}} \right)' \right)^2 \\ & \left. + \frac{k_{q3}^4 k_{q1}^3}{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^{7/2}} \left(\frac{k_{q1}}{k_{q3}} \right)' \left(\frac{k_{q1}^2}{k_{q1}^2 + k_{q3}^2} \left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}} \right)' \right)' \left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}} \right)' \right]^2 \end{aligned} \quad (4.55)$$

olur. Benzer yolla

$$\begin{aligned} B = & \frac{1}{\left(\frac{k_{q3}^4 k_{q1}^2}{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^3} \left(\left(\frac{k_{q1}}{k_{q3}} \right)' \right)^2 + \frac{k_{q1}^4 k_{q3}^2}{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^3} \left(\left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}} \right)' \right)^2 \right)^4} \left[- \frac{k_{q3}^6 k_{q1}^4}{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^{9/2}} \left(\frac{k_{q1}}{k_{q3}} \right)' \left(\left(\frac{k_{q1}}{k_{q3}} \right)' \right)^2 \right. \\ & - \frac{k_{q3}^4 k_{q1}^6}{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^{9/2}} \left(\frac{k_{q1}}{k_{q3}} \right)' \left(\left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}} \right)' \right)^2 + \frac{k_{q1}^4 k_{q3}^6}{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^{9/2}} \left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}} \right)' \left(\left(\frac{k_{q1}}{k_{q3}} \right)' \right)^2 \\ & \left. + \frac{k_{q1}^6 k_{q3}^4}{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^{9/2}} \left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}} \right)' \left(\left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}} \right)' \right)^2 \right]^2 \end{aligned} \quad (4.56)$$

ve son olarak

$$\begin{aligned}
C = & \frac{1}{\left(\frac{k_{q3}^4 k_{q1}^2}{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^3} \left(\left(\frac{k_{q1}}{k_{q3}}\right)'\right)^2 + \frac{k_{q1}^4 k_{q3}^2}{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^3} \left(\left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)'\right)^2\right)^4} \left[\frac{k_{q1}^3 k_{q3}^8}{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^{11/2}} \left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)' \left(\left(\frac{k_{q1}}{k_{q3}}\right)'\right)^3 \right. \\
& - \frac{k_{q1}^7 k_{q3}^4}{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^{11/2}} \left(\left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)'\right)^2 \left(\left(\frac{k_{q1}}{k_{q3}}\right)'\right)^2 \\
& - \left(\frac{k_{q1}^2}{k_{q1}^2 + k_{q3}^2} \left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)'\right)' \frac{k_{q3}^5 k_{q1}^2}{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^{7/2}} \left(\left(\frac{k_{q1}}{k_{q3}}\right)'\right)^2 \\
& \left. + \frac{k_{q1}^4 k_{q3}^3}{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^{7/2}} \left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)' \left(\frac{k_{q1}^2}{k_{q1}^2 + k_{q3}^2} \left(\frac{k_{q1}}{k_{q3}}\right)'\right)' \left(\frac{k_{q1}}{k_{q3}}\right)'\right]^2
\end{aligned} \tag{4.57}$$

elde edilir. Bulunan (4.55), (4.56) ve (4.57) denklemlerinde

$$\left(\frac{k_{q1}}{k_{q3}}\right)' = -\frac{k_{q1}^2}{k_{q3}^2} \left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)'$$

eşitliği yazılırsa ve düzenlenirse

$$\begin{aligned}
A = & \frac{1}{\left(\frac{k_{q1}^6}{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^3} \left(\left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)'\right)^2 + \frac{k_{q1}^4 k_{q3}^2}{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^3} \left(\left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)'\right)^2\right)^4} \left[-\frac{k_{q1}^8 k_{q3}^3}{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^{11/2}} \left(\left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)'\right)^4 \right. \\
& + \left(\frac{k_{q1}^2}{k_{q1}^2 + k_{q3}^2} \left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)'\right)' \frac{k_{q1}^5 k_{q3}^2}{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^{7/2}} \left(\left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)'\right)^2 - \frac{k_{q1}^{10} k_{q3}}{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^{11/2}} \left(\left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)'\right)^4 \\
& \left. - \left(\frac{k_{q1}^2}{k_{q1}^2 + k_{q3}^2} \left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)'\right)' \frac{k_{q1}^5 k_{q3}^2}{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^{7/2}} \left(\left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)'\right)^2 \right]^2
\end{aligned} \tag{4.58}$$

ve

$$B = \frac{\left(\frac{k_{q1}^4}{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^3} \left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)' + \frac{k_{q1}^2 k_{q3}^2}{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^3} \left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)'\right)^2}{\left(\frac{k_{q1}^6}{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^3} \left(\left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)'\right)^2 + \frac{k_{q1}^4 k_{q3}^2}{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^3} \left(\left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)'\right)^2\right)^2} \tag{4.59}$$

ve

$$\begin{aligned}
C = & \frac{1}{\left(\frac{k_{q1}^6}{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^3} \left(\left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)'\right)^2 + \frac{k_{q1}^4 k_{q3}^2}{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^3} \left(\left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)'\right)^2\right)^4} \left[-\frac{k_{q1}^{11}}{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^{11/2}} \left(\left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)'\right)^4 \right. \\
& - \left(\frac{k_{q1}^2}{k_{q1}^2 + k_{q3}^2} \left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)'\right)' \frac{k_{q1}^6 k_{q3}}{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^{7/2}} \left(\left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)'\right)^2 - \frac{k_{q1}^9 k_{q3}^2}{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^{11/2}} \left(\left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)'\right)^2 \\
& \left. + \left(\frac{k_{q1}^2}{k_{q1}^2 + k_{q3}^2} \left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)'\right)' \frac{k_{q1}^6 k_{q3}}{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^{7/2}} \left(\left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)'\right)^2 \right]^3
\end{aligned} \tag{4.60}$$

bulunur. Gerekli işlemler yapılır ve (4.58), (4.59) ve (4.60) değerleri (4.54) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \kappa_g = & \left(-\frac{k_{q1}^{16} k_{q3}^2 (k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^{14}}{\left(\left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)'\right)^8 k_{q1}^{16} (k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^{15}} \left(\left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)'\right)^8 + \frac{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^8 k_{q1}^4}{\left(\left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)'\right)^4 k_{q1}^8 (k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^5} \left(\left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)'\right)^2 \right. \\ & \left. - \frac{k_{q1}^{18} (k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^{14}}{\left(\left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)'\right)^8 k_{q1}^{16} (k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^{15}} \left(\left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)'\right)^8 - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

bulunur. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\kappa_g = \left(\frac{k_{q3}^2}{k_{q1}^2 + k_{q3}^2} + \frac{1}{\left(\left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)'\right)^2} \frac{k_{q1}^4}{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^3} + \frac{k_{q1}^2}{k_{q1}^2 + k_{q3}^2} - 1 \right)^{1/2}$$

yani

$$\begin{aligned} \kappa_g &= \left(\frac{k_{q3}^2 + k_{q1}^2}{k_{q1}^2 + k_{q3}^2} + \frac{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^3}{\left(\left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)'\right)^2 k_{q1}^4} - 1 \right)^{1/2} \\ &= \left(1 + \frac{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^3}{\left(\left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)'\right)^2 k_{q1}^4} - 1 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\kappa_g = \frac{1}{\left(\frac{k_{q3}}{k_{q1}}\right)'} \frac{(k_{q1}^2 + k_{q3}^2)^{3/2}}{k_{q1}^2}$$

elde edilir. (4.54) eşitliğinin sabit olduğu kullanıldığında bulunan son eşitliğin de sabit olduğu görülür. Bu nedenle α eğrisi Darboux helistir. Bu da Teorem 3.8 ile aynı anlama gelir.

5. 4-BOYUTLU UZAYDA QUASI-ÇATILI SLANT HELİSLER

Bu bölümde, Öklidyen 4-uzayda quasi-çatı kullanılarak hesaplamaları yapılan quasi-helisler hakkında tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Ayrıca Frenet çatı vektörü yardımıyla oluşturulan \mathbf{B}_2 tipindeki slant helis için verilen teorem, \mathbf{B}_{q2} quasi-vektörü kullanılarak yeni bir teorem verilmiş ve onun ispatı yapılmıştır. Sonuç ile de desteklenmiştir.

5.1. Öklidyen 4-uzayda Quasi-Helisler

Bu kısımda Öklidyen 4-uzayda quasi-vektörler ile oluşturulan quasi-helisler verilmiştir.

Tanım 5.1: \mathbb{E}^4 uzayında $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}_{q1}, \mathbf{B}_{q2}\}$ quasi-çatısı ile verilen α eğrisi

- i) $\langle \mathbf{T}, \mathbf{U} \rangle = \cos \theta_1$ ise Tip-0 cinsinden slant helis
- ii) $\langle \mathbf{N}_q, \mathbf{U} \rangle = \cos \theta_2$ ise Tip-1 cinsinden slant helis
- iii) $\langle \mathbf{B}_{q1}, \mathbf{U} \rangle = \cos \theta_3$ ise Tip-2 cinsinden slant helis
- iv) $\langle \mathbf{B}_{q2}, \mathbf{U} \rangle = \cos \theta_4$ ise Tip-3 cinsinden slant helis

olarak adlandırılır. Burada $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ sabit açılar, $k_{q1}, k_{q2}, k_{q3}, k_{q4}$ quasi-eğrilikleridir ve \mathbf{U} , \mathbb{E}^4 uzayındaki quasi-helislerinin ekseni olan sıfırdan farklı sabit bir vektördür (Ünlütürk vd., 2025).

\mathbf{U} vektörü quasi-çatının vektör alanlarının lineer birleşimi olarak yazılırsa

$$\mathbf{U} = \lambda_1 \mathbf{T} + \lambda_2 \mathbf{N}_q + \lambda_3 \mathbf{B}_{q1} + \lambda_4 \mathbf{B}_{q2}$$

burada

$$\lambda_1 = \langle \mathbf{T}, \mathbf{U} \rangle, \lambda_2 = \langle \mathbf{N}_q, \mathbf{U} \rangle, \lambda_3 = \langle \mathbf{B}_{q1}, \mathbf{U} \rangle \text{ ve } \lambda_4 = \langle \mathbf{B}_{q2}, \mathbf{U} \rangle$$

şeklindedir. \mathbf{U} sabit bir vektör alanı olduğundan farklılaşması ortadan kalkar yani

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}' &= \lambda_1' \mathbf{T} + \lambda_1 \mathbf{T}' + \lambda_2' \mathbf{N}_q + \lambda_2 \mathbf{N}_q' + \lambda_3' \mathbf{B}_{q1} + \lambda_3 \mathbf{B}_{q1}' + \lambda_4' \mathbf{B}_{q2} + \lambda_4 \mathbf{B}_{q2}' \\
&= \lambda_1' \mathbf{T} + \lambda_1 (k_{q1} \mathbf{N}_q + k_{q2} \mathbf{B}_{q1}) + \lambda_2' \mathbf{N}_q + \lambda_2 (-k_{q1} \mathbf{T} + k_{q3} \mathbf{B}_{q1}) \\
&\quad + \lambda_3' \mathbf{B}_{q1} + \lambda_3 (-k_{q2} \mathbf{T} + k_{q3} \mathbf{N}_q + k_{q4} \mathbf{B}_{q2}) + \lambda_4' \mathbf{B}_{q2} + \lambda_4 (-k_{q4} \mathbf{B}_{q1}) \\
&= (\lambda_1' - \lambda_2 k_{q1} - \lambda_3 k_{q2}) \mathbf{T} + (\lambda_1 k_{q1} + \lambda_2' - \lambda_3 k_{q3}) \mathbf{N}_q \\
&\quad + (\lambda_3' + \lambda_1 k_{q2} - \lambda_4 k_{q4} + \lambda_2 k_{q3}) \mathbf{B}_{q1} + (\lambda_4' + \lambda_3 k_{q4}) \mathbf{B}_{q2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur. Buna göre

$$\begin{aligned}
\lambda_1' - \lambda_2 k_{q1} - \lambda_3 k_{q2} &= 0 \\
\lambda_1 k_{q1} + \lambda_2' - \lambda_3 k_{q3} &= 0 \\
\lambda_3' + \lambda_1 k_{q2} - \lambda_4 k_{q4} + \lambda_2 k_{q3} &= 0 \\
\lambda_4' + \lambda_3 k_{q4} &= 0
\end{aligned} \tag{5.1}$$

denklem sistemi bulunur.

Tip-0 cinsinden quasí-helísler:

Teorem 5.1: (Ünlütürk vd., 2025) α, \mathbb{E}^4 uzayında quasí-çatılı bir eğri olsun. k_{q1}, k_{q2}, k_{q3} ve k_{q4} eğrinin quasi-eğrilikleri olmak üzere α eğrisinin tip-0 cinsinden bir quasí-helís olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} \left[\frac{k_{q1}}{k_{q2}} \cos \theta_1 e^{-\int \frac{k_{q1} k_{q3}}{k_{q2}} ds} \int k_{q1} e^{\int \frac{k_{q1} k_{q3}}{k_{q2}} ds} ds \right] - k_{q3} \cos \theta_1 e^{-\int \frac{k_{q1} k_{q3}}{k_{q2}} ds} \int k_{q1} e^{\int \frac{k_{q1} k_{q3}}{k_{q2}} ds} ds \\
+ k_{q4} \int \left\{ \frac{k_{q1} k_{q4}}{k_{q2}} \cos \theta_1 e^{-\int \frac{k_{q1} k_{q3}}{k_{q2}} ds} \int k_{q1} e^{\int \frac{k_{q1} k_{q3}}{k_{q2}} ds} ds \right\} ds + \cos \theta_1 k_{q2} = 0
\end{aligned} \tag{5.2}$$

denkleminin sağlanmasıdır.

İspat: Oluşan (5.1) denklem sisteminde $\lambda_1 = \cos \theta_1$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
\lambda_2 k_{q1} + \lambda_3 k_{q2} &= 0 \\
\lambda_2' - \lambda_3 k_{q3} + \cos \theta_1 k_{q1} &= 0 \\
\lambda_3' + \lambda_2 k_{q3} - \lambda_4 k_{q4} + \cos \theta_1 k_{q2} &= 0 \\
\lambda_4' + \lambda_3 k_{q4} &= 0
\end{aligned} \tag{5.3}$$

bulunur. (5.3) denklem sisteminin birinci denkleminde

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= -\frac{k_{q2}}{k_{q1}} \lambda_3 \\
\lambda_3 &= -\frac{k_{q1}}{k_{q2}} \lambda_2
\end{aligned} \tag{5.4}$$

bulunur. (5.4) eşitliğinin ikinci denklemini (5.3) sisteminin ikinci denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki birinci dereceden doğrusal diferensiyel denkleme ulaşılır

$$\lambda_2' - \frac{k_{q1}k_{q3}}{k_{q2}}\lambda_2 = -\cos\theta_1 k_{q1}$$

bulunur. Bulunan diferensiyel denklem çözülürse

$$\lambda_2 = -\cos\theta_1 e^{-\int \frac{k_{q1}k_{q3}}{k_{q2}} ds} \int k_{q1} e^{\int \frac{k_{q1}k_{q3}}{k_{q2}} ds} ds$$

bulunur. Bulduğumuz λ_2 değerini (5.4) un ikinci denkleminde yerine yazılırsa

$$\lambda_3 = \frac{k_{q1}}{k_{q2}} \cos\theta_1 e^{-\int \frac{k_{q1}k_{q3}}{k_{q2}} ds} \int k_{q1} e^{\int \frac{k_{q1}k_{q3}}{k_{q2}} ds} ds$$

elde edilir. (5.3) un dördüncü denkleminde λ_3 değeri yerine yazılırsa

$$\frac{d\lambda_4}{ds} = -\lambda_3 k_{q4} = -\frac{k_{q1}k_{q4}}{k_{q2}} \cos\theta_1 e^{-\int \frac{k_{q1}k_{q3}}{k_{q2}} ds} \int k_{q1} e^{\int \frac{k_{q1}k_{q3}}{k_{q2}} ds} ds$$

yazılabilir. Bu denklemde λ_4 değerini bulmak için her tarafın integralini alırsak

$$\lambda_4 = -\int \left(\frac{k_{q1}k_{q4}}{k_{q2}} \cos\theta_1 e^{-\int \frac{k_{q1}k_{q3}}{k_{q2}} ds} \int k_{q1} e^{\int \frac{k_{q1}k_{q3}}{k_{q2}} ds} ds \right) ds$$

bulunur. Bulunan denklemleri (5.3) un üçüncü denkleminde yerine koyarsak

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left[\frac{k_{q1}}{k_{q2}} \cos\theta_1 e^{-\int \frac{k_{q1}k_{q3}}{k_{q2}} ds} \int k_{q1} e^{\int \frac{k_{q1}k_{q3}}{k_{q2}} ds} ds \right] - k_{q3} \cos\theta_1 e^{-\int \frac{k_{q1}k_{q3}}{k_{q2}} ds} \int k_{q1} e^{\int \frac{k_{q1}k_{q3}}{k_{q2}} ds} ds \\ + k_{q4} \int \left\{ \frac{k_{q1}k_{q4}}{k_{q2}} ds \int k_{q1} e^{\int \frac{k_{q1}k_{q3}}{k_{q2}} ds} ds \right\} ds + \cos\theta_1 k_{q2} = 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

elde edilir. Tersine (5.2) denkleminin geçerli olduğunu varsayalım. O zaman

$$\begin{aligned} \mathbf{U} = & \cos\theta_1 \mathbf{T} - \left(\cos\theta_1 e^{-\int \frac{k_{q1}k_{q3}}{k_{q2}} ds} \int k_{q1} e^{\int \frac{k_{q1}k_{q3}}{k_{q2}} ds} ds \right) \mathbf{N}_q \\ & - \left(\frac{k_{q1}}{k_{q2}} \cos\theta_1 e^{-\int \frac{k_{q1}k_{q3}}{k_{q2}} ds} \int k_{q1} e^{\int \frac{k_{q1}k_{q3}}{k_{q2}} ds} ds \right) \mathbf{B}_{q1} \\ & - \left(\int \left\{ \frac{k_{q1}k_{q4}}{k_{q2}} \cos\theta_1 e^{-\int \frac{k_{q1}k_{q3}}{k_{q2}} ds} \int k_{q1} e^{\int \frac{k_{q1}k_{q3}}{k_{q2}} ds} ds \right\} ds \right) \mathbf{B}_{q2} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Buna göre $\mathbf{U}' = 0$ olur. Dolayısıyla α eğrisi tip-0 cinsinden bir quasi-helistir.

Sonuç 5.1: Eğer α eğrisi tip-0 cinsinden bir quasi-helis ise α eğrisinin doğrusu

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_0 = & \cos\theta_1 \mathbf{T} - \left(\cos\theta_1 e^{-\int \frac{k_{q1}k_{q3}}{k_{q2}} ds} \int k_{q1} e^{\int \frac{k_{q1}k_{q3}}{k_{q2}} ds} ds \right) \mathbf{N}_q \\ & - \left(\frac{k_{q1}}{k_{q2}} \cos\theta_1 e^{-\int \frac{k_{q1}k_{q3}}{k_{q2}} ds} \int k_{q1} e^{\int \frac{k_{q1}k_{q3}}{k_{q2}} ds} ds \right) \mathbf{B}_{q1} \\ & - \left(\int \left\{ \frac{k_{q1}k_{q4}}{k_{q2}} \cos\theta_1 e^{-\int \frac{k_{q1}k_{q3}}{k_{q2}} ds} \int k_{q1} e^{\int \frac{k_{q1}k_{q3}}{k_{q2}} ds} ds \right\} ds \right) \mathbf{B}_{q2} \end{aligned}$$

olur (Ünlütürk vd., 2025). Burada k_{q1} , k_{q2} , k_{q3} ve k_{q4} eğrinin quasi-eğrilikleridir.

Açıklama: α eğrisinin \mathbf{T} birim teğet vektörü ve sabit eksen \mathbf{D}_0 birbirine diktir. Yani $\cos\theta_1 = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ dır. Buna göre \mathbb{E}^4 uzayında \mathbf{D}_0 eksen kaybolur ve tip-0 cinsinden quasi-helis oluşmaz.

Tip-1 cinsinden quasi-heliksler:

Teorem 5.2: (Ünlütürk vd., 2025) α, \mathbb{E}^4 uzayında quasi-çatılı bir eğri olsun. k_{q1}, k_{q2}, k_{q3} ve k_{q4} eğrinin quasi-eğrilikleri olmak üzere α eğrisinin tip-1 cinsinden bir quasi-helis olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left[\frac{k_{q1}}{k_{q3}} \cos \theta_2 e^{\int \frac{k_{q1}k_{q2}}{k_{q3}} ds} \int k_{q1} e^{-\int \frac{k_{q1}k_{q2}}{k_{q3}} ds} ds \right] + k_{q2} \cos \theta_2 e^{\int \frac{k_{q1}k_{q2}}{k_{q3}} ds} \int k_{q1} e^{-\int \frac{k_{q1}k_{q2}}{k_{q3}} ds} ds \\ + k_{q4} \int \left\{ \frac{k_{q1}k_{q4}}{k_{q3}} \cos \theta_2 e^{\int \frac{k_{q1}k_{q2}}{k_{q3}} ds} \int k_{q1} e^{-\int \frac{k_{q1}k_{q2}}{k_{q3}} ds} ds \right\} ds + \cos \theta_2 k_{q3} = 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

denkleminin sağlanmasıdır.

İspat: Oluşan (5.1) denklem sisteminde $\lambda_2 = \cos \theta_2$ yazılırsa

$$\begin{aligned} \lambda_1' - \lambda_3 k_{q2} + \cos \theta_2 k_{q1} &= 0 \\ \lambda_1 k_{q1} - \lambda_3 k_{q3} &= 0 \\ \lambda_3' + \lambda_1 k_{q2} - \lambda_4 k_{q4} + \cos \theta_2 k_{q3} &= 0 \\ \lambda_4' + \lambda_3 k_{q4} &= 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

bulunur. (5.8) denklem sisteminin ikinci denkleminde

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{k_{q3}}{k_{q1}} \lambda_3 \\ \lambda_3 &= \frac{k_{q1}}{k_{q3}} \lambda_1 \end{aligned} \quad (5.9)$$

bulunur. (5.9) eşitliğinin ikinci denklemini (5.8) sisteminin birinci denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki birinci dereceden doğrusal diferensiyel denkleme ulaşılır

$$\lambda_1' - \frac{k_{q1}k_{q2}}{k_{q3}} \lambda_1 = \cos \theta_2 k_{q1}$$

bulunur. Bulunan diferensiyel denklem çözülmüşse

$$\lambda_1 = \cos \theta_2 e^{\int \frac{k_{q1}k_{q2}}{k_{q3}} ds} \int k_{q1} e^{-\int \frac{k_{q1}k_{q2}}{k_{q3}} ds} ds$$

bulunur. Bulduğumuz λ_2 değerini (5.9) un ikinci denkleminde yerine yazarsak

$$\lambda_3 = \frac{k_{q1}}{k_{q3}} \cos \theta_2 e^{\int \frac{k_{q1}k_{q2}}{k_{q3}} ds} \int k_{q1} e^{-\int \frac{k_{q1}k_{q2}}{k_{q3}} ds} ds$$

elde edilir. Son olarak (5.8) in dördüncü denkleminde λ_3 değeri yerine yazılırsa

$$\frac{d\lambda_4}{ds} = -\lambda_3 k_{q4} = -\frac{k_{q1}k_{q4}}{k_{q3}} \cos \theta_2 e^{\int \frac{k_{q1}k_{q2}}{k_{q3}} ds} \int k_{q1} e^{-\int \frac{k_{q1}k_{q2}}{k_{q3}} ds} ds$$

yazılabilir. Bu denklemde λ_4 değerini bulmak için her tarafın integralini alırsak

$$\lambda_4 = - \int \left(\frac{k_{q1}k_{q4}}{k_{q3}} \cos \theta_2 e^{\int \frac{k_{q1}k_{q2}}{k_{q3}} ds} \int k_{q1} e^{-\int \frac{k_{q1}k_{q2}}{k_{q3}} ds} ds \right) ds$$

bulunur. Bulunan denklemler (5.8) in üçüncü denkleminde yerine koyulursa istenilen bulunur.

Tersine (5.7) denkleminin geçerli olduğunu ve sabit \mathbf{U} vektör alanında geçerli olduğu varsayalım. O zaman

$$\begin{aligned} \mathbf{U} = & (\cos \theta_2 e^{\int \frac{k_{q1}k_{q2}}{k_{q3}} ds} \int k_{q1} e^{-\int \frac{k_{q1}k_{q2}}{k_{q3}} ds} ds) \mathbf{T} + \cos \theta_2 \mathbf{N}_q \\ & + \left(\frac{k_{q1}}{k_{q3}} \cos \theta_2 e^{\int \frac{k_{q1}k_{q2}}{k_{q3}} ds} \int k_{q1} e^{-\int \frac{k_{q1}k_{q2}}{k_{q3}} ds} ds \right) \mathbf{B}_{q1} \\ & - \left(\int \left(\frac{k_{q1}k_{q4}}{k_{q3}} \cos \theta_2 e^{\int \frac{k_{q1}k_{q2}}{k_{q3}} ds} \int k_{q1} e^{-\int \frac{k_{q1}k_{q2}}{k_{q3}} ds} ds \right) ds \right) \mathbf{B}_{q2} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Buna göre $\mathbf{U}' = 0$ olur. Dolayısıyla α eğrisi tip-1 cinsinden bir quasi-helistir.

Sonuç 5.2: Eğer α eğrisi tip-1 cinsinden bir quasi-helis ise α eğrisinin ekseni

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_1 = & (\cos \theta_2 e^{\int \frac{k_{q1}k_{q2}}{k_{q3}} ds} \int k_{q1} e^{-\int \frac{k_{q1}k_{q2}}{k_{q3}} ds} ds) \mathbf{T} + \cos \theta_2 \mathbf{N}_q \\ & + \left(\frac{k_{q1}}{k_{q3}} \cos \theta_2 e^{\int \frac{k_{q1}k_{q2}}{k_{q3}} ds} \int k_{q1} e^{-\int \frac{k_{q1}k_{q2}}{k_{q3}} ds} ds \right) \mathbf{B}_{q1} \\ & - \left(\int \left(\frac{k_{q1}k_{q4}}{k_{q3}} \cos \theta_2 e^{\int \frac{k_{q1}k_{q2}}{k_{q3}} ds} \int k_{q1} e^{-\int \frac{k_{q1}k_{q2}}{k_{q3}} ds} ds \right) ds \right) \mathbf{B}_{q2} \end{aligned}$$

olur (Ünlütürk vd., 2025). Burada k_{q1}, k_{q2}, k_{q3} ve k_{q4} eğrinin quasi-eğrilikleridir.

Açıklama: α eğrisinin \mathbf{N}_q quasi-normal vektörü ve sabit eksen \mathbf{D}_1 birbirine diktir. Yani $\cos \theta_2 = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ dır. Buna göre \mathbb{E}^4 uzayında \mathbf{D}_1 ekseni kaybolur ve tip-1 cinsinden quasi-helis oluşmaz.

Tip-2 cinsinden quasi-helísler:

Teorem 5.3: (Ünlütürk vd., 2025) α, \mathbb{E}^4 uzayında quasi-çatılı bir eğri olsun. k_{q1}, k_{q2}, k_{q3} ve k_{q4} eğrinin quasi-eğrilikleri olmak üzere α eğrisinin tip-2 cinsinden bir quasi-helis olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} & k_{q2} \cos \theta_3 e^{\int \frac{k_{q1}k_{q2}}{k_{q3}} ds} \int \left(\frac{k_{q1}k_{q4}}{k_{q2}} \int k_{q4} ds + k_{q2} \right) e^{-\int \frac{k_{q1}k_{q2}}{k_{q3}} ds} ds + k_{q4} \cos \theta_3 \int k_{q4} ds \\ & + k_{q3} \cos \theta_3 e^{\int \frac{k_{q1}k_{q3}}{k_{q2}} ds} \int \left(-\frac{k_{q1}k_{q4}}{k_{q2}} \int k_{q4} ds + k_{q3} \right) e^{-\int \frac{k_{q1}k_{q3}}{k_{q2}} ds} ds = 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

denkleminin sağlanmasıdır.

İspat: Oluşan (5.1) denklem sisteminde $\lambda_3 = \cos \theta_3$ yazılırsa

$$\begin{aligned}\lambda_1' - \lambda_2 k_{q1} - \cos \theta_3 k_{q2} &= 0 \\ \lambda_2' + \lambda_1 k_{q1} - \cos \theta_3 k_{q3} &= 0 \\ \lambda_1 k_{q2} - \lambda_4 k_{q4} + \lambda_2 k_{q3} &= 0 \\ \lambda_4' + \cos \theta_3 k_{q4} &= 0\end{aligned}\quad (5.12)$$

bulunur. (5.12) denklem sisteminin dördüncü denklemi çözülürse

$$\begin{aligned}\lambda_4' &= -\cos \theta_3 k_{q4} \\ \lambda_4 &= \cos \theta_3 \int k_{q4} ds\end{aligned}\quad (5.13)$$

bulunur. Bulunan değer (5.12) eşitliğinin üçüncü denklemine yazılırsa

$$\lambda_1 = \frac{-\lambda_2 k_{q3} + \lambda_4 k_{q4}}{k_{q2}} = -\frac{k_{q3}}{k_{q2}} \lambda_2 + \cos \theta_3 \frac{k_{q4}}{k_{q2}} \int k_{q4} ds \quad (5.14)$$

ve

$$\lambda_2 = \frac{-\lambda_1 k_{q2} + \lambda_4 k_{q4}}{k_{q3}} = -\frac{k_{q2}}{k_{q3}} \lambda_1 + \cos \theta_3 \frac{k_{q4}}{k_{q3}} \int k_{q4} ds \quad (5.15)$$

bulunur. (5.14) denklemi (5.12) nin ikinci denklemine ve (5.15) denklemi (5.12) nin birinci denklemine yazılırsa

$$\lambda_2' - \frac{k_{q1} k_{q3}}{k_{q2}} \lambda_2 = \cos \theta_3 \left(-\frac{k_{q4} k_{q1}}{k_{q2}} \int k_{q4} ds + k_{q3} \right)$$

ve

$$\lambda_1' - \frac{k_{q1} k_{q2}}{k_{q3}} \lambda_1 = \cos \theta_3 \left(\frac{k_{q4} k_{q1}}{k_{q2}} \int k_{q4} ds + k_{q2} \right)$$

bulunur. Bulunan bu iki diferensiyel denklem çözülürse

$$\lambda_2 = \cos \theta_3 e^{\int \frac{k_{q1} k_{q3}}{k_{q2}} ds} \int \left(-\frac{k_{q1} k_{q4}}{k_{q2}} \int k_{q4} ds + k_{q3} \right) e^{-\int \frac{k_{q1} k_{q3}}{k_{q2}} ds} ds$$

ve

$$\lambda_1 = \cos \theta_3 e^{\int \frac{k_{q1} k_{q2}}{k_{q3}} ds} \int \left(\frac{k_{q1} k_{q4}}{k_{q2}} \int k_{q4} ds + k_{q2} \right) e^{-\int \frac{k_{q1} k_{q2}}{k_{q3}} ds} ds$$

elde edilir. Bulunan tüm değerler (5.12) nin üçüncü denkleminde yerine yazılırsa tip-2 cinsinden quasi-helis olma koşulu sağlanır.

Tersine (5.11) denkleminin geçerli olduğunu ve sabit \mathbf{U} vektör alanında geçerli olduğunu varsayalım. O zaman

$$\begin{aligned}\mathbf{U} &= \left(\cos \theta_3 e^{\int \frac{k_{q1} k_{q2}}{k_{q3}} ds} \int \left(\frac{k_{q1} k_{q4}}{k_{q2}} \int k_{q4} ds + k_{q2} \right) e^{-\int \frac{k_{q1} k_{q2}}{k_{q3}} ds} ds \right) \mathbf{T} \\ &\quad - \left(\cos \theta_3 e^{\int \frac{k_{q1} k_{q3}}{k_{q2}} ds} \int \left(-\frac{k_{q1} k_{q4}}{k_{q2}} \int k_{q4} ds + k_{q3} \right) e^{-\int \frac{k_{q1} k_{q3}}{k_{q2}} ds} ds \right) \mathbf{N}_q \\ &\quad + \cos \theta_3 \mathbf{B}_{q1} - \left(\cos \theta_3 \int k_{q4} ds \right) \mathbf{B}_{q2}\end{aligned}\quad (5.16)$$

Buna göre $\mathbf{U}' = 0$ olur. Dolayısıyla α eğrisi tip-2 cinsinden bir quasi-helistir.

Sonuç 5.3: Eğer α eğrisi tip-2 cinsinden bir quasi-helis ise α eğrisinin ekseni

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_2 = & (\cos \theta_3 e^{\int \frac{k_{q1}k_{q2}}{k_{q3}} ds} \int (\frac{k_{q1}k_{q4}}{k_{q2}} \int k_{q4} ds + k_{q2}) e^{-\int \frac{k_{q1}k_{q2}}{k_{q3}} ds} ds) \mathbf{T} \\ & - (\cos \theta_3 e^{\int \frac{k_{q1}k_{q3}}{k_{q2}} ds} \int (-\frac{k_{q1}k_{q4}}{k_{q2}} \int k_{q4} ds + k_{q3}) e^{-\int \frac{k_{q1}k_{q3}}{k_{q2}} ds} ds) \mathbf{N}_q \\ & + \cos \theta_3 \mathbf{B}_{q1} - (\cos \theta_3 \int k_{q4} ds) \mathbf{B}_{q2} \end{aligned}$$

olur (Ünlütürk vd., 2025). Burada k_{q1} , k_{q2} , k_{q3} ve k_{q4} eğrinin quasi-eğrilikleridir.

Açıklama: α eğrisinin \mathbf{B}_{q1} birinci quasi-normal vektörü ve sabit eksen \mathbf{D}_2 birbirine diktir. Yani $\cos \theta_3 = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ dir. Buna göre \mathbb{E}^4 uzayında \mathbf{D}_2 ekseni kaybolur ve tip-2 cinsinden quasi-helis oluşmaz.

Tip-3 cinsinden quasi-helísler:

Teorem: 5.4 (Ünlütürk vd., 2025) α, \mathbb{E}^4 uzayında quasi-çatılı bir eğri olsun. k_{q1}, k_{q2}, k_{q3} ve k_{q4} eğrinin quasi-eğrilikleri olmak üzere α eğrisinin tip-3 cinsinden bir quasi-helis olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} & (\cos \theta_4 e^{-\int \frac{k_{q1}k_{q2}}{k_{q3}} ds} \int \frac{k_{q1}k_{q4}}{k_{q3}} e^{\int \frac{k_{q1}k_{q2}}{k_{q3}} ds} ds) k_{q2} - \cos \theta_4 k_{q4} \\ & - (\cos \theta_4 e^{\int \frac{k_{q1}k_{q3}}{k_{q2}} ds} \int \frac{k_{q1}k_{q4}}{k_{q2}} e^{-\int \frac{k_{q1}k_{q3}}{k_{q2}} ds} ds) k_{q3} = 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

denkleminin sağlanmasıdır.

İspat: Oluşan (5.1) denklem sisteminde $\lambda_4 = \cos \theta_4$ yazılırsa

$$\begin{aligned} \lambda_1' - \lambda_3 k_{q2} - \lambda_2 k_{q1} &= 0 \\ \lambda_2' + \lambda_1 k_{q1} - \lambda_3 k_{q3} &= 0 \\ \lambda_3' + \lambda_1 k_{q2} - \cos \theta_4 k_{q4} + \lambda_2 k_{q3} &= 0 \\ \lambda_3 k_{q4} &= 0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

bulunur. (5.18) denklem sisteminin dördüncü denkleminde λ_3 veya k_{q4} sıfır olmalıdır. Bu durumda k_{q4} ün sıfır olması tanım ile çelişeceğinden $\lambda_3 = 0$ olmalıdır. Buna göre denklem sistemi şu hale dönüşür.

$$\begin{aligned} \lambda_1' - \lambda_2 k_{q1} &= 0 \\ \lambda_2' + \lambda_1 k_{q1} &= 0 \\ \lambda_1 k_{q2} - \cos \theta_4 k_{q4} + \lambda_2 k_{q3} &= 0 \end{aligned} \quad (5.19)$$

(5.19) eşitliğinin üçüncü denklemden

$$\lambda_1 = -\frac{k_{q3}}{k_{q2}}\lambda_2 + \frac{k_{q4}}{k_{q2}}\cos\theta_4$$

ve

$$\lambda_2 = -\frac{k_{q2}}{k_{q3}}\lambda_1 + \frac{k_{q4}}{k_{q3}}\cos\theta_4$$

bulunur. Bulduğumuz değerleri yazarsak aşağıdaki birinci dereceden doğrusal diferensiyel denklemlerine ulaşırız:

$$\lambda_1' + \frac{k_{q1}k_{q2}}{k_{q3}}\lambda_1 = \frac{k_{q1}k_{q4}}{k_{q3}}\cos\theta_4$$

ve

$$\lambda_2' - \frac{k_{q1}k_{q3}}{k_{q2}}\lambda_2 = -\frac{k_{q1}k_{q4}}{k_{q2}}\cos\theta_4$$

bulunur. Bulunan diferensiyel denklemler çözülürse

$$\lambda_1 = \cos\theta_4 e^{-\int \frac{k_{q1}k_{q2}}{k_{q3}} ds} \int \frac{k_{q1}k_{q4}}{k_{q3}} e^{\int \frac{k_{q1}k_{q2}}{k_{q3}} ds} ds$$

ve

$$\lambda_2 = -\cos\theta_4 e^{\int \frac{k_{q1}k_{q3}}{k_{q2}} ds} \int \frac{k_{q1}k_{q4}}{k_{q2}} e^{-\int \frac{k_{q1}k_{q3}}{k_{q2}} ds} ds$$

bulunur. Bulunan değerler yerine yazılırsa istenilen bulunur.

Tersine (5.17) denkleminin geçerli olduğunu ve sabit \mathbf{U} vektör alanında geçerli olduğunu varsayalım. O zaman

$$\begin{aligned} \mathbf{U} = & (\cos\theta_4 e^{-\int \frac{k_{q1}k_{q2}}{k_{q3}} ds} \int \frac{k_{q1}k_{q4}}{k_{q3}} e^{\int \frac{k_{q1}k_{q2}}{k_{q3}} ds} ds) \mathbf{T} \\ & - (\cos\theta_4 e^{\int \frac{k_{q1}k_{q3}}{k_{q2}} ds} \int \frac{k_{q1}k_{q4}}{k_{q2}} e^{-\int \frac{k_{q1}k_{q3}}{k_{q2}} ds} ds) \mathbf{N}_q - \cos\theta_4 \mathbf{B}_{q2} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Buna göre $\mathbf{U}' = 0$ olur. Dolayısıyla α eğrisi tip-3 cinsinden bir quasi-helistir.

Sonuç 5.4: Eğer α eğrisi tip-3 cinsinden bir quasi-helis ise α eğrisinin eksenini

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_3 = & (\cos\theta_4 e^{-\int \frac{k_{q1}k_{q2}}{k_{q3}} ds} \int \frac{k_{q1}k_{q4}}{k_{q3}} e^{\int \frac{k_{q1}k_{q2}}{k_{q3}} ds} ds) \mathbf{T} \\ & - (\cos\theta_4 e^{\int \frac{k_{q1}k_{q3}}{k_{q2}} ds} \int \frac{k_{q1}k_{q4}}{k_{q2}} e^{-\int \frac{k_{q1}k_{q3}}{k_{q2}} ds} ds) \mathbf{N}_q - \cos\theta_4 \mathbf{B}_{q2} \end{aligned}$$

olur (Ünlütürk vd., 2025). Burada k_{q1}, k_{q2}, k_{q3} ve k_{q4} eğrinin quasi-eğrilikleridir.

Açıklama: α eğrisinin \mathbf{B}_{q2} ikinci quası-normal vektörü ve sabit eksen \mathbf{D}_3 birbirine diktir. Yani $\cos\theta_4 = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ dır. Buna göre \mathbb{E}^4 uzayında \mathbf{D}_3 eksenini kaybolur ve tip-3 cinsinden quası-helis oluşmaz.

5.2. \mathbf{B}_{q2} Tipinde Slant Helis

Bu kısımda orijinal olan \mathbf{B}_{q2} quası-slant helis için bir teorem ifade ve ispat edilmiştir.

Teorem 5.5: Birim hızlı α eğrisinin \mathbb{E}^4 uzayında \mathbf{B}_{q2} quası-slant helis olabilmesi için ancak ve ancak

$$\sin^2 \theta_3 = \left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right)^2 + \frac{1}{k_{q1}^2} \left(\left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right)' \right)^2 = \text{sabit}$$

var olmasıdır. Burada quasi-eğrilikleri $k_{q1}, k_{q2}, k_{q3}, k_{q4}$ ve θ_3 , ikinci quası-binormal vektör \mathbf{B}_{q2} vektörüyle \mathbf{U} birim sabit vektörü arasında sabit açıdır.

İspat: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^4$ uzayının sıfırdan farklı quasi-eğrilikleri k_{q1}, k_{q2}, k_{q3} ve k_{q4} olan bir birim hızlı eğri olduğunu varsayalım ve $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}_q, \mathbf{B}_{q1}, \mathbf{B}_{q2}\}$, α eğrisinin quası-çatısını belirtir. Kabul edelim ki α eğrisi \mathbf{B}_{q2} tipinde quası-slant helis olsun. O zaman

$$\langle \mathbf{B}_{q2}, \mathbf{U} \rangle = \cos \theta = \text{sabit} \quad (5.21)$$

eşitliği yazılabilir. (5.21) denkleminin türevi alınır

$$\langle \mathbf{B}'_{q2}, \mathbf{U} \rangle + \langle \mathbf{B}_{q2}, \mathbf{U}' \rangle = 0$$

olur. $\mathbf{U}' = 0$ olduğundan

$$\langle \mathbf{B}'_{q2}, \mathbf{U} \rangle = 0 \quad (5.22)$$

elde edilir. (5.22) eşitliğinde quası-türev denklemleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \langle -k_{q4} \mathbf{B}_{q1}, \mathbf{U} \rangle &= 0 \\ -k_{q4} \langle \mathbf{B}_{q1}, \mathbf{U} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Yani $\mathbf{U} \in Sp\{\mathbf{T}, \mathbf{N}_q, \mathbf{B}_{q2}\}$ dir. Buna göre

$$\mathbf{U} = a_1 \mathbf{T} + a_2 \mathbf{N}_q + a_3 \mathbf{B}_{q2} \quad (5.23)$$

yazılabilir. Sırasıyla \mathbf{T}, \mathbf{N}_q ve \mathbf{B}_{q2} ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{T}, \mathbf{U} \rangle &= \langle a_1 \mathbf{T} + a_2 \mathbf{N}_q + a_3 \mathbf{B}_{q2}, \mathbf{T} \rangle \\ &= a_1 \langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle + a_2 \langle \mathbf{N}_q, \mathbf{T} \rangle + a_3 \langle \mathbf{B}_{q2}, \mathbf{T} \rangle \\ &= a_1 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{N}_q, \mathbf{U} \rangle &= \langle a_1 \mathbf{T} + a_2 \mathbf{N}_q + a_3 \mathbf{B}_{q2}, \mathbf{N}_q \rangle \\ &= a_1 \langle \mathbf{T}, \mathbf{N}_q \rangle + a_2 \langle \mathbf{N}_q, \mathbf{N}_q \rangle + a_3 \langle \mathbf{B}_{q2}, \mathbf{N}_q \rangle \\ &= a_2 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{B}_{q2}, \mathbf{U} \rangle &= \langle a_1 \mathbf{T} + a_2 \mathbf{N}_q + a_3 \mathbf{B}_{q2}, \mathbf{B}_{q2} \rangle \\
 &= a_1 \langle \mathbf{T}, \mathbf{B}_{q2} \rangle + a_2 \langle \mathbf{N}_q, \mathbf{B}_{q2} \rangle + a_3 \langle \mathbf{B}_{q2}, \mathbf{B}_{q2} \rangle \\
 &= a_3
 \end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$\langle \mathbf{T}, \mathbf{U} \rangle = a_1 = \cos \theta_1 \quad (5.24)$$

$$\langle \mathbf{N}_q, \mathbf{U} \rangle = a_2 = \cos \theta_2 \quad (5.25)$$

$$\langle \mathbf{B}_{q2}, \mathbf{U} \rangle = a_3 = \cos \theta_3 = \text{sabit} \quad (5.26)$$

şeklindedir. \mathbf{U} birim vektör olduğundan

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \quad (5.27)$$

yazılabilir. (5.23) denkleminin türevi alınırsa

$$\frac{d\mathbf{U}}{ds} = a_1' \mathbf{T} + a_1 \mathbf{T}' + a_2' \mathbf{N}_q + a_2 \mathbf{N}_q' + a_3' \mathbf{B}_{q2} + a_3 \mathbf{B}_{q2}' \quad (5.28)$$

olur. (5.28) eşitliğinde quasi-türev denklemleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{U}}{ds} &= a_1' \mathbf{T} + a_1(k_{q1} \mathbf{N}_q + k_{q2} \mathbf{B}_{q1}) + a_2' \mathbf{N}_q + a_2(-k_{q1} \mathbf{T} + k_{q3} \mathbf{B}_{q1}) + a_3' \mathbf{B}_{q2} + a_3(-k_{q4} \mathbf{B}_{q1}) \\
 &= a_1' \mathbf{T} + a_1 k_{q1} \mathbf{N}_q + a_1 k_{q2} \mathbf{B}_{q1} + a_2' \mathbf{N}_q - a_2 k_{q1} \mathbf{T} + a_2 k_{q3} \mathbf{B}_{q1} + a_3' \mathbf{B}_{q2} - a_3 k_{q4} \mathbf{B}_{q1} \\
 &= \mathbf{T}(a_1' - a_2 k_{q1}) + \mathbf{N}_q(a_1 k_{q1} + a_2') + \mathbf{B}_{q1}(a_1 k_{q2} + a_2 k_{q3} - a_3 k_{q4})
 \end{aligned}$$

elde edilir. $\mathbf{U}' = 0$ olduğundan

$$0 = \mathbf{T}(a_1' - a_2 k_{q1}) + \mathbf{N}_q(a_1 k_{q1} + a_2') + \mathbf{B}_{q1}(a_1 k_{q2} + a_2 k_{q3} - a_3 k_{q4})$$

bulunur. Buna göre

$$a_1' - a_2 k_{q1} = 0$$

$$a_1 k_{q1} + a_2' = 0$$

$$a_1 k_{q2} + a_2 k_{q3} - a_3 k_{q4} = 0$$

denklemler sistemi elde edilir. Bulunan bu denklem sistemine göre

$$a_2 = \frac{a_1'}{k_{q1}} = \frac{a_3 k_{q4} - a_1 k_{q2}}{k_{q3}} \quad (5.29)$$

$$a_2' = -a_1 k_{q1} \quad (5.30)$$

bulunur. Buradan (5.29) ifadesinin türevinden

$$\frac{da_2}{ds} = \frac{1}{k_{q1}^2} \left(\frac{d^2 a_1}{ds^2} k_{q1} - \frac{da_1}{ds} k_{q1}' \right)$$

olur. Yani

$$0 = \frac{1}{k_{q1}^2} \left(\frac{d^2 a_1}{ds^2} k_{q1} - \frac{da_1}{ds} k'_{q1} \right) - \frac{da_2}{ds}$$

bulunur. Bulunan ifade k_{q1} ile çarpılırsa

$$0 = \frac{d^2 a_1}{ds^2} - \frac{da_1}{ds} \frac{k'_{q1}}{k_{q1}} - k_{q1} \frac{da_2}{ds}$$

elde edilir. (5.30) değeri yerine yazılırsa

$$0 = \frac{d^2 a_1}{ds^2} - \frac{da_1}{ds} \frac{k'_{q1}}{k_{q1}} + k_{q1}^2 a_1 \quad (5.31)$$

elde edilir. $t = \int_0^s k_{q1}(s) ds$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\frac{dt}{ds} = k_{q1}(s)$$

olur. Bu ifadenin türevi alınır

$$\begin{aligned} \frac{dk_{q1}}{ds} &= \frac{dk_{q1}}{dt} \frac{dt}{ds} \\ k'_{q1} &= \frac{dk_{q1}}{dt} k_{q1} \end{aligned}$$

olur. Bulunan bu değerler (5.31) denkleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{da_1}{ds} \right) - \frac{da_1}{ds} \frac{k'_{q1}}{k_{q1}} + k_{q1}^2 a_1 &= 0 \\ \frac{d}{ds} \left(\frac{da_1}{dt} \frac{dt}{ds} \right) - \frac{da_1}{dt} \frac{dt}{ds} \frac{k'_{q1}}{k_{q1}} + k_{q1}^2 a_1 &= 0 \\ \frac{d}{ds} \left(\frac{da_1}{dt} k_{q1} \right) - \frac{da_1}{dt} k_{q1} \frac{k'_{q1}}{k_{q1}} + k_{q1}^2 a_1 &= 0 \\ 2 \frac{d}{dt} \left(\frac{da_1}{dt} k_{q1} \right) \frac{dt}{ds} - \frac{da_1}{dt} k'_{q1} + k_{q1}^2 a_1 &= 0 \\ \left(\frac{d^2 a_1}{dt^2} k_{q1} + \frac{da_1}{dt} \frac{dk_{q1}}{dt} \right) k_{q1} - \frac{da_1}{dt} k'_{q1} + k_{q1}^2 a_1 &= 0 \\ \frac{d^2 a_1}{dt^2} k_{q1}^2 + \frac{da_1}{dt} \frac{dk_{q1}}{dt} k_{q1} - \frac{da_1}{dt} \frac{dk_{q1}}{dt} k_{q1} + k_{q1}^2 a_1 &= 0 \end{aligned}$$

yazılır. Buradan

$$\frac{d^2 a_1}{dt^2} k_{q1}^2 + k_{q1}^2 a_1 = 0 \quad (5.32)$$

bulunur. (5.32) denkleminde her taraf k_{q1}^2 değerine bölünürse

$$\frac{d^2 a_1}{dt^2} + a_1 = 0$$

elde edilir. Bulunan bu diferensiyel denklem çözümlerse

$$a_1 = A \cos t + B \sin t \quad (5.33)$$

bulunur. Burada A ve B sabit fonksiyonudur. (5.29) ve (5.30) değerleri kullanılırsa

$$a_2 = \frac{a_3 k_{q4} - a_1 k_{q2}}{k_{q3}} = -A \sin t + B \cos t \quad (5.34)$$

$$a_1 = -\frac{1}{k_{q1}} \left(\frac{a_3 k_{q4} - a_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right)' = A \cos t + B \sin t \quad (5.35)$$

bulunur. (5.34) $\sin t$, (5.35) $-\cos t$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} \frac{a_3 k_{q4} - a_1 k_{q2}}{k_{q3}} \sin t &= -A \sin^2 t + B \cos t \sin t \\ \frac{1}{k_{q1}} \left(\frac{a_3 k_{q4} - a_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right)' \cos t &= -A \cos^2 t + B \sin t \cos t \end{aligned}$$

elde edilir. Taraf tarafa toplanırsa

$$A = \frac{a_3 k_{q4} - a_1 k_{q2}}{k_{q3}} \sin t + \frac{1}{k_{q1}} \left(\frac{a_3 k_{q4} - a_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right)' \cos t \quad (5.36)$$

bulunur. (5.34) $\cos t$, (5.35) $\sin t$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} \frac{a_3 k_{q4} - a_1 k_{q2}}{k_{q3}} \cos t &= -A \sin t \cos t + B \cos^2 t \\ \frac{1}{k_{q1}} \left(\frac{a_3 k_{q4} - a_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right)' \sin t &= A \cos t \sin t + B \sin^2 t \end{aligned}$$

elde edilir. Taraf tarafa toplanırsa

$$B = \frac{a_3 k_{q4} - a_1 k_{q2}}{k_{q3}} \cos t - \frac{1}{k_{q1}} \left(\frac{a_3 k_{q4} - a_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right)' \sin t \quad (5.37)$$

bulunur. (5.36) ve (5.37) değerlerinden

$$A^2 + B^2 = \left(\frac{a_3 k_{q4} - a_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right)^2 + \frac{1}{k_{q1}^2} \left(\left(\frac{a_3 k_{q4} - a_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right)' \right)^2 \quad (5.38)$$

elde edilir. Buna göre

$$\begin{aligned} a_1^2 &= A^2 \cos^2 t + B^2 \sin^2 t + 2AB \sin t \cos t \\ a_2^2 &= A^2 \sin^2 t + B^2 \cos^2 t - 2AB \sin t \cos t \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$a_1^2 + a_2^2 = A^2 + B^2$$

bulunur. (5.27) denkleminde ve $a_3 = \cos \theta_3$ olduğundan

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 &= 1 - \cos^2 \theta_3 \\ &= \sin^2 \theta_3 \end{aligned}$$

elde edilir. Değerler (5.38) denkleminde yerine yazılırsa

$$\sin^2 \theta_3 = \left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right)^2 + \frac{1}{k_{q1}^2} \left(\left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right)' \right)^2 = \text{sabit} \quad (5.39)$$

bulunur.

Tersine

$$\sin^2 \theta_3 = \left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right)^2 + \frac{1}{k_{q1}^2} \left(\left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right)' \right)^2 = \text{sabit}$$

olduğu kabul edilsin. O halde $\langle \mathbf{B}_{q2}, \mathbf{U} \rangle = \cos \theta$ olacak şekilde \mathbf{U} birim vektörü vardır. (5.23), (5.34) ve (5.35) denklemleri kullanırsa \mathbf{U} birim vektörü

$$\mathbf{U} = \left(-\frac{1}{k_{q1}} \left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right)' \right) \mathbf{T} + \left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right) \mathbf{N}_q + \cos \theta_3 \mathbf{B}_{q2}$$

şeklinde tanımlanır. \mathbf{U} birim vektör olduğundan türevi sabit olmalıdır. Buna göre

$$\begin{aligned} \mathbf{U}' &= \left[-\frac{1}{k_{q1}} \left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right)' \right]' \mathbf{T} + \left[-\frac{1}{k_{q1}} \left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right)' \right] \mathbf{T}' \\ &\quad + \left[\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right]' \mathbf{N}_q + \left[\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right] \mathbf{N}'_q \\ &\quad + \cos \theta_3' \mathbf{B}_{q2} + \cos \theta_3 \mathbf{B}'_{q2} \end{aligned} \quad (5.40)$$

şeklinde olur. (5.40) eşitliğinde quasi-türev formülleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{U}' &= \left[\frac{-\left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right)'' k_{q1} + \left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right)' k_{q1}'}{k_{q1}^2} \right] \mathbf{T} \\ &\quad + \left[-\frac{1}{k_{q1}} \left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right)' \right] (k_{q1} \mathbf{N}_q + k_{q2} \mathbf{B}_{q1}) + \left[\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right]' \mathbf{N}_q \\ &\quad + \left[\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right] (-k_{q1} \mathbf{T} + k_{q3} \mathbf{B}_{q1}) + \cos \theta_3 (-k_{q4} \mathbf{B}_{q1}) \end{aligned}$$

bulunur. Yani

$$\begin{aligned} \mathbf{U}' &= \left[-\left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right)'' \frac{1}{k_{q1}} + \left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right)' \frac{k_{q1}'}{k_{q1}^2} - k_{q1} \left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right) \right] \mathbf{T} \\ &\quad + \left[-\left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right)' + \left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right)' \right] \mathbf{N}_q \\ &\quad + \left[-\frac{k_{q2}}{k_{q1}} \left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right)' + \cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2} - \cos \theta_3 k_{q4} \right] \mathbf{B}_{q1} \end{aligned}$$

elde edilir. Düzenlenirse

$$\begin{aligned} \mathbf{U}' &= \left[-\left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right)'' \frac{1}{k_{q1}} + \left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right)' \frac{k_{q1}'}{k_{q1}^2} \right. \\ &\quad \left. - k_{q1} \left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right) \right] \mathbf{T} \\ &\quad + \left(-\frac{k_{q2}}{k_{q1}} \left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right)' - \cos \theta_1 k_{q2} \right) \mathbf{B}_{q1} \end{aligned} \quad (5.41)$$

bulunur. (5.39) in türevini dikkate alırsak

$$0 = 2 \left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right) \left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right)' - 2 \left(\left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right)' \right)^2 \frac{k'_{q1}}{k_{q1}^3} \\ + 2 \left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right)' \left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right)'' \frac{1}{k_{q1}^2}$$

bulunur. Düzenlenirse

$$0 = 2 \left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right)' \left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right) \left[\left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right) + \left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right) \frac{1}{k_{q1}^2} \right. \\ \left. - \left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right)' \frac{k'_{q1}}{k_{q1}^3} \right]$$

elde edilir. Yani

$$\left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right) + \left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right) \frac{1}{k_{q1}^2} - \left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right)' \frac{k'_{q1}}{k_{q1}^3} = 0$$

elde edilir. Bu nedenle (5.41) denklemini

$$\mathbf{U}' = \left(-\frac{k_{q2}}{k_{q1}} \left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right)' - \cos \theta_1 k_{q2} \right) \mathbf{B}_{q1}$$

elde edilir. (5.35) ve (5.24) değerleri göz önüne alınırsa $\mathbf{U}' = 0$ olur.

Bu nedenle \mathbf{U} vektörü sabit vektördür. Dolayısıyla α eğrisi Öklidyen 4-uzayda \mathbf{B}_{q2} tipinde quasi-slant helis olur.

Sonuç 5.5: α eğrisi \mathbf{B}_2 tipinde slant helis ise

$$\sin^2 \theta_3 = \left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right)^2 + \frac{1}{k_{q1}^2} \left(\left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right)' \right)^2$$

oranı sabittir. Burada k_{q1} , k_{q2} , k_{q3} ve k_{q4} eğrinin quasi-eğrilikleridir.

İspat: Frenet çatı ve quasi-çatı eğrilikleri arasındaki ilişki göz önüne alındığında quasi-çatı eğriliklerinden $k_{q2} = 0$ alınırsa (5.39) denkleminde

$$\sin^2 \theta_3 = \cos^2 \theta_3 \left(\left(\frac{k_{q4}}{k_{q3}} \right)^2 + \frac{1}{k_{q1}^2} \left(\left(\frac{k_{q4}}{k_{q3}} \right)' \right)^2 \right)$$

her taraf $\cos^2 \theta_3$ değerine bölünürse

$$\tan^2 \theta_3 = \left(\frac{k_{q4}}{k_{q3}} \right)^2 + \frac{1}{k_{q1}^2} \left(\left(\frac{k_{q4}}{k_{q3}} \right)' \right)^2$$

bulunur. Bu nedenle α eğrisi \mathbf{B}_2 tipinde slant helistir. Bu da Teorem 3.11 ile aynı anlama gelir.

Örnek 5.1: (\mathbb{R}, α) haritası yardımıyla verilen $M \subset \mathbb{E}^4$ eğrisi

$$\alpha(s) = \left(\cos \frac{s}{\sqrt{5}} - 3, \sin \frac{s}{\sqrt{5}} - 4, \cos \frac{2s}{\sqrt{5}} - 1, \sin \frac{2s}{\sqrt{5}} + 2 \right)$$

olarak alınsın. Bu eğrinin Frenet elemanları ve quasi-çatı vektörlerini bulmak için s parametresi yardımıyla türev alınır ve norm hesabı yapılırsa

$$\alpha'(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \sin \frac{s}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \cos \frac{s}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \sin \frac{2s}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \cos \frac{2s}{\sqrt{5}} \right)$$

$$\alpha''(s) = \left(-\frac{1}{5} \cos \frac{s}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{5} \sin \frac{s}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{5} \cos \frac{2s}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{5} \sin \frac{2s}{\sqrt{5}} \right)$$

$$\|\alpha'(s)\| = 1 \quad \text{ve} \quad \|\alpha''(s)\| = \frac{17}{5\sqrt{17}}$$

bulunur. O halde eğri birim hızlı eğridir. Buradan Frenet vektörleri

$$\mathbf{T} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \sin \frac{s}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \cos \frac{s}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \sin \frac{2s}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \cos \frac{2s}{\sqrt{5}} \right)$$

$$\mathbf{N} = \left(-\frac{1}{\sqrt{17}} \cos \frac{s}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{17}} \sin \frac{s}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{17}} \cos \frac{2s}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{17}} \sin \frac{2s}{\sqrt{5}} \right)$$

$$\mathbf{B}_2 = \left(\frac{4}{\sqrt{17}} \cos \frac{s}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{17}} \sin \frac{s}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{17}} \cos \frac{2s}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{17}} \sin \frac{2s}{\sqrt{5}} \right)$$

$$\mathbf{B}_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \sin \frac{s}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \cos \frac{s}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \sin \frac{2s}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \cos \frac{2s}{\sqrt{5}} \right)$$

olarak elde edilir. Bu durumda (3.3) eşitliklerinden Frenet eğrilikleri ise

$$k_1(s) = \frac{\sqrt{17}}{5} \quad k_2(s) = -\frac{6\sqrt{17}}{85} \quad \text{ve} \quad k_3(s) = \frac{2\sqrt{17}}{17}$$

şeklinindedir. Diğer taraftan $\mathbf{k}_x = (1, 0, 0, 0)$ ve $\mathbf{k}_y = (0, 1, 0, 0)$ izdüşüm vektörleri yardımıyla quasi-çatı vektörleri

$$\mathbf{T} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \sin \frac{s}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \cos \frac{s}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \sin \frac{2s}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \cos \frac{2s}{\sqrt{5}} \right)$$

$$\mathbf{N}_q = \left(0, 0, \cos \frac{2s}{\sqrt{5}}, \sin \frac{2s}{\sqrt{5}} \right)$$

$$\mathbf{B}_{q2} = \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{5}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{5}}, 0, 0 \right)$$

$$\mathbf{B}_{q1} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \sin \frac{s}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \cos \frac{s}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \sin \frac{2s}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \cos \frac{2s}{\sqrt{5}} \right)$$

olarak elde edilir. (3.6) eşitliklerinden quasi-eğrilikleri ise

$$k_{q1}(s) = -\frac{4}{5}, \quad k_{q2}(s) = 0, \quad k_{q3}(s) = \frac{2}{5} \quad \text{ve} \quad k_{q4}(s) = -\frac{2}{5}$$

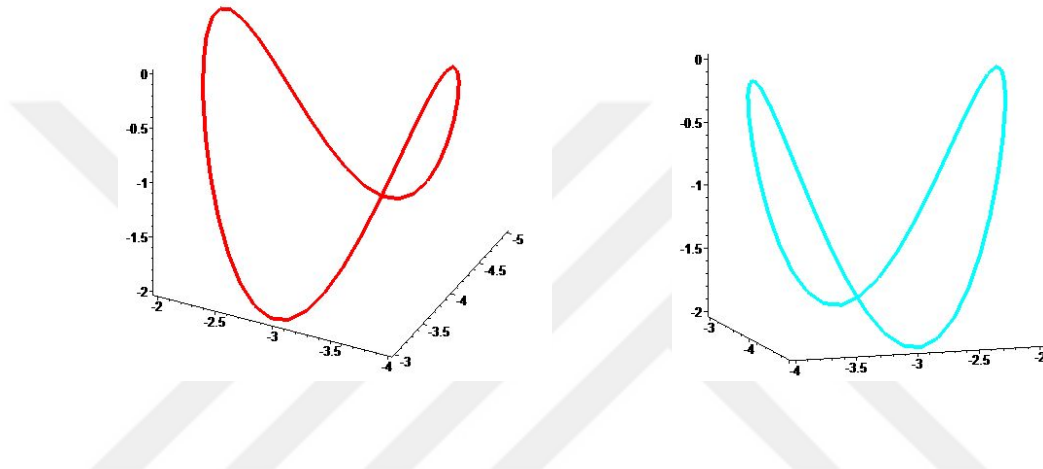
şeklinde bulunur. xyz -uzayındaki izdüşümü olan eğri denklemi

$$\alpha_{xyz}(s) = \left(\cos \frac{s}{\sqrt{5}} - 3, \sin \frac{s}{\sqrt{5}} - 4, \cos \frac{2s}{\sqrt{5}} - 1, \right)$$

şeklindedir ve grafiği Şekil 5.1(a) ile verilmiştir. xyt -uzayındaki izdüşümü olan eğri denklemi

$$\alpha_{xyt}(s) = \left(\cos \frac{s}{\sqrt{5}} - 3, \sin \frac{s}{\sqrt{5}} - 4, \sin \frac{2s}{\sqrt{5}} + 2 \right)$$

bulunur ve grafiği Şekil 5.1(b) ile verilmiştir. xzt -uzayındaki izdüşümü olan eğri denklemi



Şekil 5.1 (a) xyz -uzayındaki helis eğrisi (b) xyt -uzayındaki helis eğrisi

$$\alpha_{xzt}(s) = \left(\cos \frac{s}{\sqrt{5}} - 3, \cos \frac{2s}{\sqrt{5}} - 1, \sin \frac{2s}{\sqrt{5}} + 2 \right)$$

elde edilir ve grafiği Şekil 5.2(c) ile verilmiştir. yzt -uzayındaki izdüşümü olan eğri denklemi

$$\alpha_{yzt}(s) = \left(\sin \frac{s}{\sqrt{5}} - 4, \cos \frac{2s}{\sqrt{5}} - 1, \sin \frac{2s}{\sqrt{5}} + 2 \right)$$

biçimindedir ve grafiği Şekil 5.2(d) ile verilmiştir.

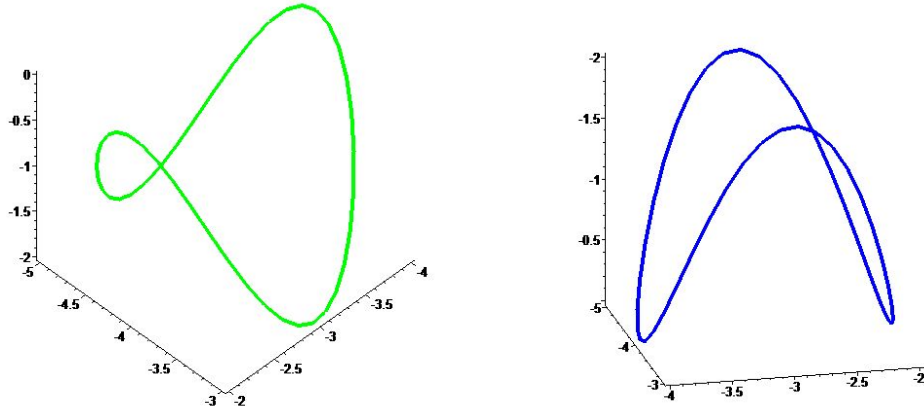
Teorem 3.10 göz önüne alındığında

$$\left(\frac{k_1}{k_2} \right)^2 + \left(\left(\frac{k_1}{k_2} \right)' \frac{1}{k_3} \right)^2 = \text{sabit}$$

bağıntısı kullanılırsa

$$\left(\frac{k_1}{k_2} \right)^2 + \left(\left(\frac{k_1}{k_2} \right)' \frac{1}{k_3} \right)^2 = \frac{289}{36}$$

olduğundan eğri \mathbb{E}^4 uzayında genel helistir.



Şekil 5.2 (c) xzt -uzayındaki helis eğrisi (d) yzt -uzayındaki helis eğrisi

Teorem 5.5 göz önüne alındığında

$$\sin^2 \theta_3 = \left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right)^2 + \frac{1}{k_{q1}^2} \left(\left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}} \right)' \right)^2$$

bağıntısı kullanılır ve quasi-eğrilikler yerine yazılırsa

$$\sin^2 \theta_3 = (\cos \theta_3)^2$$

bulunur. $\langle \mathbf{B}_{q2}, \mathbf{U} \rangle = a_3 = \cos \theta_3 = \text{sabit}$ olduğundan eğri \mathbb{E}^4 uzayında \mathbf{B}_{q2} slant helistir.

Örnek 5.2: (\mathbb{R}, α) haritası yardımıyla verilen $M \subset \mathbb{E}^4$ eğrisi

$$\begin{aligned} \alpha(t) = & \left(-\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}} \cos\left(\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right), \right. \\ & \frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}} \sin\left(\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right), \\ & -\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}} \cos\left(\frac{2\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right), \\ & \left. \frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}} \sin\left(\frac{2\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right) \right) \end{aligned}$$

olarak alınsın. Buradan Frenet vektörleri

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \sin\left(\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right), \frac{1}{\sqrt{5}} \cos\left(\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right), \frac{2}{\sqrt{5}} \sin(2\sqrt{10t}), \frac{2}{\sqrt{5}} \cos(2\sqrt{10t}) \right) \\ \mathbf{N} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{34}} \cos\left(\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right), -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{34}} \sin\left(\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right), \frac{4}{\sqrt{17}} \cos(2\sqrt{10t}), -\frac{4}{\sqrt{17}} \sin(2\sqrt{10t}) \right) \\ \mathbf{B}_2 &= \left(-\frac{4}{\sqrt{17}} \cos\left(\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right), \frac{4}{\sqrt{17}} \sin\left(\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right), \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{34}} \cos(2\sqrt{10t}), -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{34}} \sin(2\sqrt{10t}) \right) \\ \mathbf{B}_1 &= \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \sin\left(\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right), -\frac{2}{\sqrt{5}} \cos\left(\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right), \frac{1}{\sqrt{5}} \sin(2\sqrt{10t}), \frac{1}{\sqrt{5}} \cos(2\sqrt{10t}) \right)\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu durumda (3.3) eşitliklerinden Frenet eğrilikleri ise

$$k_1(t) = \frac{\sqrt{34}}{2\sqrt{t}\sqrt[4]{125}} \quad k_2(t) = -\frac{6}{\sqrt[4]{125}\sqrt{34t}} \quad \text{ve} \quad k_3(t) = \frac{\sqrt[4]{5}2}{\sqrt{34t}}$$

şeklinde. Buradan $\mathbf{k}_x = (1, 0, 0, 0)$ ve $\mathbf{k}_y = (0, 1, 0, 0)$ izdüşüm vektörleri yardımıyla quasi-çatı vektörleri

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \sin\left(\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right), \frac{1}{\sqrt{5}} \cos\left(\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right), \frac{2}{\sqrt{5}} \sin(2\sqrt{10s}), \frac{2}{\sqrt{5}} \cos(2\sqrt{10t}) \right) \\ \mathbf{N}_q &= (0, 0, \cos(\sqrt{10t}), -\sin(\sqrt{10t})) \\ \mathbf{B}_{q2} &= \left(\frac{6\sqrt{2} \cos\left(\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right) \sqrt[4]{5}\sqrt{t} + 2\sqrt{5} \sin\left(\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right)}{\sqrt{25 + 72t\sqrt{5}}}, \right. \\ &\quad \left. \frac{6\sqrt{2} \sin\left(\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right) \sqrt[4]{5}\sqrt{t} - 2\sqrt{5} \cos\left(\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right)}{\sqrt{25 + 72t\sqrt{5}}}, \right. \\ &\quad \left. \frac{\sqrt{5} \sin(\sqrt{10t})}{\sqrt{25 + 72t\sqrt{5}}}, \frac{\sqrt{5} \cos(\sqrt{10t})}{\sqrt{25 + 72t\sqrt{5}}} \right)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{q1} &= \left(-\frac{12\sqrt{2} \sin\left(\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right) 5^{-\frac{1}{4}}\sqrt{t} - 5 \cos\left(\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right)}{\sqrt{25 + 72t\sqrt{5}}}, \right. \\ &\quad \left. -\frac{12\sqrt{2} \cos\left(\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right) 5^{-\frac{1}{4}}\sqrt{t} + 5 \sin\left(\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right)}{\sqrt{25 + 72t\sqrt{5}}}, \right. \\ &\quad \left. \frac{6\sqrt{2t} \sin(\sqrt{10t})}{\sqrt[4]{5}\sqrt{25 + 72t\sqrt{5}}}, \frac{6\sqrt{2t} \cos(\sqrt{10t})}{\sqrt[4]{5}\sqrt{25 + 72t\sqrt{5}}} \right)\end{aligned}$$

olarak elde edilir. (3.6) eşitliklerinden quasi-eğrilikleri ise

$$\begin{aligned}k_{q1}(t) &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5t}} & k_{q2}(t) &= \frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt{2}\sqrt{25t + 72t^2\sqrt{5}}} \\ k_{q3}(t) &= \frac{12}{\sqrt{5}\sqrt{25 + 72t\sqrt{5}}} & k_{q4}(t) &= \frac{\sqrt[4]{5}4\sqrt{2}(450t\sqrt{5} + 1296t^2 + 125)}{\sqrt{t}(25 + 72t\sqrt{5})^2}\end{aligned}$$

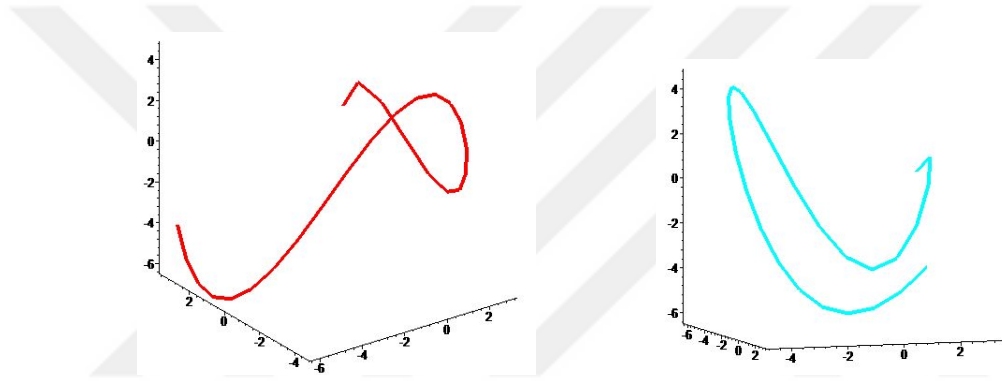
şeklinde bulunur. xyz -uzayındaki izdüşümü olan eğri denklemi

$$\alpha_{xyz}(t) = \left(-\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}} \cos\left(\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right), \frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}} \sin\left(\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right), \right. \\ \left. -\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}} \cos\left(\frac{2\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right) \right)$$

şeklindedir ve grafiği Şekil 5.3(a) ile verilmiştir. xyt -uzayındaki izdüşümü olan eğri denklemi

$$\alpha_{xyt}(t) = \left(-\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}} \cos\left(\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right), \frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}} \sin\left(\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right), \right. \\ \left. \frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}} \sin\left(\frac{2\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right) \right)$$

bulunur ve grafiği Şekil 5.3(b) ile verilmiştir. xzt -uzayındaki izdüşümü olan eğri denklemi



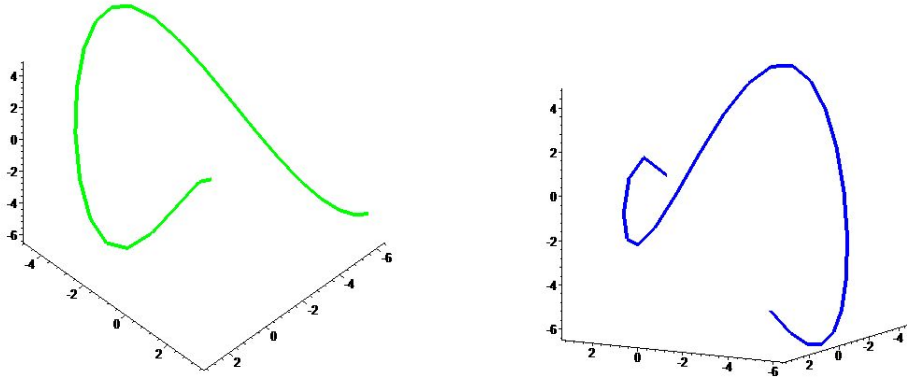
Şekil 5.3 (a) xyz -uzayındaki helis eğrisi (b) xyt -uzayındaki helis eğrisi

$$\alpha_{xzt}(t) = \left(-\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}} \cos\left(\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right), \right. \\ \left. -\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}} \cos\left(\frac{2\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right), \right. \\ \left. \frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}} \sin\left(\frac{2\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right) \right)$$

elde edilir ve grafiği Şekil 5.4(c) ile verilmiştir. yzt -uzayındaki izdüşümü olan eğri denklemi

$$\alpha_{yzt}(t) = \left(\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}} \sin\left(\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right), \right. \\ \left. -\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}} \cos\left(\frac{2\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right), \right. \\ \left. \frac{\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}} \sin\left(\frac{2\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\sqrt{2t}}{\sqrt[4]{5}}\right) \right)$$

biçimindedir ve grafiği Şekil 5.4(d) ile verilmiştir.



Şekil 5.4 (c) xzt -uzayındaki helis eğrisi (d) yzt -uzayındaki helis eğrisi

Teorem 3.10 göz önüne alındığında

$$\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 + \left(\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' \frac{1}{k_3}\right)^2 = \text{sabit}$$

bağıntısı kullanılırsa

$$\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 + \left(\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' \frac{1}{k_3}\right)^2 = \frac{289}{36}$$

olduğundan eğri \mathbb{E}^4 uzayında genel helistir.

Teorem 5.5 göz önüne alındığında

$$\sin^2 \theta_3 = \left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}}\right)^2 + \frac{1}{k_{q1}^2} \left(\left(\frac{\cos \theta_3 k_{q4} - \cos \theta_1 k_{q2}}{k_{q3}}\right)'\right)^2$$

bağıntısı kullanılır ve quasi-eğrilikler yerine yazılırsa

$$\sin^2 \theta_3 = \frac{5(25 + 72t\sqrt{5})}{144} \left(\frac{4 \cos \theta_3 \sqrt[4]{5}\sqrt{2}(450t\sqrt{5} + 1296t^2 + 125)}{\sqrt{t}(72t\sqrt{5} + 25)^2} - \frac{\cos \theta_1 \sqrt{2}\sqrt[4]{5}}{2\sqrt{25t + 72t^2\sqrt{5}}}\right)^2$$

bulunur. Bulunan ifade sabit olmadığından eğri \mathbb{E}^4 uzayında \mathbf{B}_{q2} slant helis değildir.

Bu tezdeki şekiller Maple programı yardımıyla çizdirilmiştir.

6. BULGULAR VE TARTIŞMA

Frenet çatısına ek olarak Coquillart, quasi-normal vektörünü tanımlamıştır. Quasi-normal vektörü kullanılarak Dede vd., quasi-çatı adını verdikleri alternatif bir çatı tanımlamışlardır. Bu çatının farklı çatılara göre bazı avantajları vardır.

Helis, bilim ve doğal yaşamdaki çok önemli eğrilerden birisidir. Helis kavramı pek çok bilim dalında kullanım alanı olan eğridir. Helis yapısına DNA'da, vidalarda, yaylarda, helis merdivenler gibi bir çok yapıda karşılaşılır. İlâveten fraktal geometride, bilgisayar destekli tasarım ve bilgisayar grafikleri alanlarında helis eğrisinin veya helis yapılarının kullanıldığı fark edilir.

Matematiksel anlamda helis eğrinin teğet vektörüyle sabit bir doğru arasında oluşan açının sabit olması; slant helis eğrinin normal vektörü ile sabit bir doğru arasındaki açının sabit olması ve son olarak Darboux helis ise Darboux vektörü ile sabit bir doğrunun arasındaki açının sabit olması olarak adlandırılır. 3-boyutlu uzayda bu kavramlar küresel göstergeler yardımıyla ispatlanmıştır. Bu çalışmada quasi-çatı kullanılarak küresel göstergeler yardımıyla quasi-helis, quasi-slant helis ve quasi-Darboux helis kavramları tanıtılmış ve bu kavramlar ile ilgili teoremler ispatlanmıştır. Bulunan ispatlarda $k_{q2} = 0$ alınırsa Frenet çatılı helis, slant helis ve Darboux helis kavramları ile benzer yapılar elde edilmiş olur.

4-boyutlu uzayda slant helis kavramı için tanımlanan \mathbf{B}_2 -slant helis için bir karakterizasyon ve quasi-helisler ile ilgili teoremler verilmiştir. Bu yapılar göz önüne alınarak quasi-çatı yardımıyla \mathbf{B}_{q2} - slant helis tanımlanmıştır. Bu tanımdan yola çıkarak bir teorem verilip ispatı yapılmıştır. Bulunan bu ispatta $k_{q2} = 0$ alınırsa Frenet çatılı \mathbf{B}_2 -slant helis ile benzer kavram bulunmuş olur.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Helis, slant helis ve Darboux helis kavramları Öklidyen ve Öklidyen olmayan uzaylar içinde hesaplanmıştır. Öklidyen 3-uzayda ve 4-uzayda hem eğriler hem de çatılar farklı seçilerek helis, slant helis ve Darboux helis kavramları için diferensiyel geometrik hesaplamalar yapılmıştır.

Bu çalışmada, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatı ile helis, slant helis ve Darboux helis için küresel göstergeler yardımıyla teoremler verilmiştir. Ardından quası-çatı vektörleri ve küresel göstergelerden yararlanarak helis, slant helis ve Darboux helis için ifade edilen teoremlerin ispatları yapılmıştır. Yapılan ispatlar Frenet çatılı helisler ile karşılaştırılmıştır. Öklid 4-uzayında Frenet çatılı \mathbf{B}_2 tipinde slant helis kavramı tanımlanmış ve teorem verilmiştir. Ardından quası-çatı vektörleri kullanılarak Tip-0, Tip-1, Tip-2 ve Tip-3 cinsinden slant helisler için teoriler ifade edilip \mathbf{B}_{q2} tipinde slant helis kavramı tanımlanmış ve bir teorem ispatlanmıştır. Yapılan ispat \mathbf{B}_2 tipinde slant helis ile karşılaştırılmıştır.

Takip eden çalışma yapıları için Minkowski ile Galilen uzayı gibi farklı uzaylarda farklı çatılar kullanılarak bu yapılar incelenebilir. Ayrıca yüksek boyutlarda helis, slant helis ve Darboux helis kavramları ile araştırmalar ele alınabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Alessio, O. (2009). *Differential geometry of intersection curves R^4 of three implicit surfaces*. Comput. Aided Geom. Des., 26, 455-471.
- Ali, A. T., Lopez & Turgut, M. (2012). *k-type partially null and pseudo null slant helices in Minkowski 4-space*. Math. Commun., 17, 93-103.
- Ali, A. T., & López, R. (2009). *Slant helices in Euclidean 4-space E^4* . J. Egypt Math. Soc. Vol. 18(2), 223-230.
- Ateş, M. (2022). *Dört boyutlu Öklid uzayında çatılandırılmış genel ve çatılandırılmış η_3 -slant helisler* [Yüksek Lisans tezi, Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü]. YÖK Ulusal Tez Merkezi. [https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/TezGoster?key = kIrltdtJ31bRgjb6fHvMURN-YJQKCIQTX-3WbTGHAjuo8xoPCcBqz0byQMiY1-kj](https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/TezGoster?key=kIrltdtJ31bRgjb6fHvMURN-YJQKCIQTX-3WbTGHAjuo8xoPCcBqz0byQMiY1-kj)
- Barros, M. (1997). *General helices and a theorem of Lancret*. Proceedings of the American Mathematical Society, 125(5), 1503-1509. S0002-9939(97)03692-7
- Bishop, R. L. (1975). *There is more than one way to frame a curve*. Amer. Math. Monthly, 82, 246-251.
- Bloomenthal, J. (1990). *Calculation of reference frames along a space curve*. Graphics gems, Academic Press Professional, Inc., San Diego, CA.
- Canbirdi, M. (2022). *Üç boyutlu Öklid uzayında çatılandırılmış slant helisler üzerine*. [Yüksek Lisans tezi, Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü]. YÖK Ulusal Tez Merkezi. [https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/TezGoster?key = RsTB16RWK25OBMIKtIgYYbXipldtbVliEKoqjgkX5WT9eA3g17RWaIM2vaqsTYT2](https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/TezGoster?key=RsTB16RWK25OBMIKtIgYYbXipldtbVliEKoqjgkX5WT9eA3g17RWaIM2vaqsTYT2)
- Coquillart, S. (1987). *Computing offsets of B-spline curves*. Computer-Aided Design, 19(6), 305-309.
- Coşkun Ekici, A., & Akça, Z. (2023). *The ruled surfaces generated by quasi-vectors in \mathbb{E}^4 space*. Hagia Sophia Journal of Geometry, 5(2), 6-17.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Camcı, Ç., İlarıslan, K., Kula, L., & Hacısalihoğlu, H.H., (2009). *Harmonic curvatures and generalized helices in \mathbb{E}^4* . Science Direct, Chaos, Solitons and Fractals 40 2590–2596
- Darboux, G. (1896). *Leçons sur la theorie generale des surfaces I-II-IIIIV.*, Gauthier-Villars, Paris.
- Dede, M., Tozak, H., & Ekici, C. (2017). *On the parallel ruled surface with B-Darboux frame*. AHA, 106.
- Dede, M., Ekici, C., & Görgülü, A. (2015). *Directional q-frame along a space curve*. IJARCSSE, 5(12), 775-780.
- Dede, M., Çimdiker Aslan, M., & Ekici, C. (2021). *On a variational problem due to the B-Darboux frame in Euclidean 3-spaces*. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 44(17), 12630-12639.
- Do Carmo, M.P. (1976). *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Doğan, F., & Yaylı, Y. (2012). *Tubes with Darboux frame*. Int. J. Contemp. Math. Sci., 13(7), 751-758.
- Ekici, C. (2021). *Eğrilerin ve yüzeylerin diferensiyel geometrisi*, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir.
- Elsayied, H. K., Tawfiq, A. M., & Elsharkawy, A. (2021). *Special smarandach curves according to the quasi frame in 4-dimensional Euclidean space E^4* . Houston Journal of Mathematics, 74(2), 467-482.
- Ekici, C., Kaymanlı G. U., & Okur, S. (2021). *A new characterization of ruled surfaces according to q-frame vectors in Euclidean 3-space*. International Journal of Mathematical Combinatorics, 3, 20-31.
- Ekici A., Akça, Z., & Ekici, C. (2023). *The ruled surfaces generated by quasi-vectors in E^4 space*. 7. International Biltek Congress on Current Developments in Science, Technology and Social Sciences, 400-418.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Frenet, F. (1852). *Sur les courbes à double courbure, thèse, toulouse*. Abstract in Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 17, 437-447.
- Gezer, B. & Ekici, C. (2023). *On space curve with quasi frame in E^4* . 4th International Black Sea Modern Scientific Research Congress, 1951-1962.
- Gray, A. (1993). *Modern differential geometry of curves and surfaces*, CRS Press, Inc.
- Gray, A. (1997). *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica*, (2nd ed.). CRC press.
- Hacısalihoğlu, H.H., (1983). *Diferensiyel geometri*, Gazi Üniversitesi.
- Hacısalihoğlu, H.H., (1998). *Diferensiyel geometri II*, Ankara Üniversitesi.
- Izumiya, S., & Takeuchi, N., (2004). *New special curves and developable surfaces*. Turkish Journal of Mathematics, 28(2), Article 6, 1-1-2004.
- İlarslan, K., & Yıldırım, M., (2018). *On Darboux helices in Euclidean 4-space*. Math Meth Appl Sci. 1-6.
- Kaymanlı Uğur, G., Ekici, C., & Dede, M. (2020). *Directional evolution of the ruled surfaces via the evolution of their directrix using q -frame along a timelike space curve*. European Journal of Science and Technology, 20, 392-396.
- Kızıltuğ, S., & Yaylı, Y., (2013). *Timelike tubes with Darboux frame in Minkowski 3-space*. International Journal of Physical Sciences, 8(1), 31-36.
- Klok, F. (1986). *Two moving coordinate frames for sweeping along a 3D trajectory*. Comput. Aided Geom. Des., 3, 217-229.
- Kuhnel, W. (2002). *Differential geometry, curves-surfaces-manifolds*, American Mathematical Society.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Kula, L., & Yayli, Y., (2004). *On slant helix and its spherical indicatrix*. Applied Mathematics and Computation 169 (2005) 600–607.
- Lancret, M.A., (1806). *Memoire sur les courbes a double courbure*. Memoires presentes a l'Institut 1, 416-454.
- Macit, N. (2019). *Darboux çatısına göre helisler ve karakterizasyonları* [Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü]. YÖK Ulusal Tez Merkezi. <https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/TezGoster?key=npGs9H39x7G6401x51yqpHkdf4BQQ2HGMHuI5IjCtBtA5bxRW-RZywZXinTbLCfj>
- Özdemir, M., (2020). *Diferansiyel geometri*, Altın Nokta.
- O'Neill, B., (1983). *Elementary differential geometry*, (2nd edition) Elsevier/Academic Press, Amsterdam.
- Önder, M., Kazaz, M., Kocayiğit, H., & Kılıç, O., (2008). *B₂-Slant helix in Euclidean 4-space E⁴*. Int. J. Contemp. Math. Sciences, 29(3), 1433-1440.
- Öztürk, G., Gürpınar, S., & Arslan, K. (2017). *A new characterization of curves in Euclidean 4-space E⁴*. Buletinul Academiei de Stiinte a Republicii Moldova. Matematica, 83(1), 39-50.
- Ekici, C., & Öztürk, H. (2017). *Bir kapalı timelike regle yüzeyin integral invaryantları arasındaki bazı bağıntılar*. Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, 7(1), 245-258.
- Solouma, E. M., Al-Dayel, İ., Khan, M. A., & Lazer, Y. A. A., (2024). *Characterization of imbricate-ruled surfaces via rotation-minimizing Darboux frame in Minkowski 3-space E₁³*. AIMS Mathematics, 9(5), 13028-13042.
- Solouma, E. M., & AL-Dayel, I. (2021). *Harmonic evolute surface of tubular surfaces via B-Darboux frame in Euclidean 3-Space*. Advances in Mathematical Physics, 2021, 1-7.
- Sabuncuoğlu, A. (2004). *Diferansiyel geometri*, (2. baskı). Nobel Yayın Dağıtım.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Şenol, A. (2008). *Uzay formlarında genel helisler* [Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü]. YÖK Ulusal Tez Merkezi. https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/TezGoster?key=UPP_Zu9isEmWGFXFCBYasR83UNq5iurHLNZ0FNDwhDwePIYF5sCL2W0kjgf78K34
- Şentürk, G. Y., & Yüce, S. (2015). *Characteristic properties of the ruled surface with Darboux frame in E^3* . Kuwait J. Sci., 42(2), 14-33.
- Tartık, F. (2020). *4-Boyutlu Öklid uzayında helisler ve karakterizasyonları* [Yüksek Lisans Tezi, Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü]. YÖK Ulusal Tez Merkezi. https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/TezGoster?key=f10Kw4p1rmMDotyKRdYv1BrO_z515TJ3sU13rSRNLBVcLx7CkHGUcipsWfGHJqIB
- Uğur Kaymanlı, G. (2020). *Characterization of the evolute offset of ruled surfaces with B-Darboux frame*. Journal of New Theory, 33, 50-55.
- Ünlütürk, Y., Ekici, C., & Ünal, D., (2023). *A new modelling of timelike Q -helices*, Honam Mathematical J. 45(2), 231–247.
- Ünlütürk, Y., Ekici, C., & Ünal, D., (2024). *A new glance to the aspect of Q -helices*, Facta Universitatis Ser. Math. Inform., 39(1), 51–65.
- Ünlütürk, Y., Ekici, C., & Ünal, D. (2025). *A new description of Q -helices in Euclidean 4-Space*, Differential Equations and Dynamical Systems (DEDS), <https://doi.org/10.1007/s12591-025-00713-5>.
- Williams, M. Z., & Stein, F. M. (1964). *A triple product of vectors in four-space*, Mathematics Magazine 37(4), 230-235.
- Yağbasan, B., & Ekici, C. (2023). *Tube surfaces in 4 dimensional Euclidean space*, 4th International Black Sea Modern Scientific Research Congress, 1951-1962.
- Yağbasan, B., Tozak, H., & Ekici, C. (2023). *Directional tube surface in Euclidean 4-Space*. Hagia Sophia Journal of Geometry, 5(2), 18-30.
- Yılmaz, S., & Turgut, M. (2010). *A new version of Bishop frame and an application to spherical images*. J. Math. Anal. Appl., 371, 764-776.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Yoon, D. W. (2012). *On the quaternionic general helices in Euclidean 4-space*. Honam Mathematical Journal, 34(3), 381-390.

Zıplar, E., Senol, A., & Yaylı, Y., (2012). *On Darboux helices in Euclidean 3-Space*, Global Journal of Science Frontier Research Mathematics and Decision Sciences, 13(12).

