

TÜRKİYE CUMHURİYETİ  
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KİNEMATİK UZAYDA BAZI ÖZEL EĞRİ FORMLARININ  
STABİLİTESİ VE BİR ELİPTİK YÖRÜNGE MODELLEMESİ

MATEMATİK  
YÜKSEK LİSANS TEZİ

İBRAHİM SARIER  
HAZİRAN 2025

HAZİRAN 2025

Yüksek Lisans Tezi-Matematik

İBRAHİM SARIER

**KİNEMATİK UZAYDA BAZI ÖZEL EĞRİ FORMLARININ  
STABİLİTESİ VE BİR ELİPTİK YÖRÜNGE MODELLEMESİ**

**Gaziantep Üniversitesi**

**Matematik**

**Yüksek Lisans Tezi**

**Danışman**

**Dr. Öğr. Üyesi Sultan ERDUR**

**İbrahim SARIER**

**Haziran 2025**



©2025[Gaziantep Üniversitesi]

**İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilmek suretiyle tezde yer aldığını beyan ederim.**

**İbrahim SARIER**

## **ABSTRACT**

### **KINEMATICS STABILITY OF SOME SPECIAL CURVE FORMS IN SPACE AND MODELING AN ELLIPTICAL TRAJECTORY**

**SARIER, İbrahim**

**M.Sc. in Mathematics**

**Supervisor: Assist. Prof. Dr. Sultan ERDUR**

**June 2025**

**55 pages**

This study consists of five chapters. Chapter 1 presents the introduction; chapter 2 covers fundamental definitions and theorems related to the topic; chapter 3 investigates the invariance of the positions and geometric properties of certain special types of curves under basic transformations used in kinematics; chapter 4 demonstrates how a transformation matrix that defines the trajectory of a specific point as an ellipse can be constructed; and chapter 5 includes the discussion and conclusion sections of the study. The focus of this research is on helix, circle, ellipse, and parabola curves. Using the parametric equations of these curves, the study examines how their positions and characterizations (such as curvature and torsion) are affected under a general transformation matrix that involves rotation around an arbitrary axis by a given angle and translation by an arbitrary vector. The analysis shows, through mathematical proofs, that while the positions of the examined special curve types are altered, their characterizations remain invariant under these transformations. To support the theoretical findings, numerical examples with specific rotation angles and translation vectors are provided, confirming the validity of the results. In chapter 4, the construction of a transformation matrix that defines the trajectory of a specific point as an ellipse is detailed, and the curves generated by this matrix under various parameters are examined as an application.

**Key Words:** Kinematics, Transformations, Curves, Characterization, Trajectories.

## ÖZET

### KİNEMATİK UZAYDA BAZI ÖZEL EĞRİ FORMLARININ STABİLİTESİ VE BİR ELİPTİK YÖRÜNGE MODELLEMESİ

**SARIER, İbrahim**  
**Yüksek Lisans Tezi, Matematik**  
**Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Sultan ERDUR**  
**Haziran 2025**  
**55 sayfa**

Bu çalışma, 5 bölümden oluşmaktadır. 1. bölümde giriş, 2. bölümde konuyla ilgili temel tanım ve teoremler, 3. bölümde kinematikte kullanılan temel dönüşümler altında bazı özel eğri türlerinin konumu ve geometrik özelliklerinin değişmezliği, 4. bölümde belirli bir noktanın yörüngesini elips olarak tanımlayan bir dönüşüm matrisinin nasıl tanımlanabileceği ve 5. bölümde de çalışma ile ilgili tartışma ve sonuç bölümü gösterildi. Çalışmanın odağında helis, çember, elips ve parabol eğrileri bulunmaktadır. Bu eğrilerin parametrik denklemleri kullanılarak, herhangi bir eksen etrafında belirli bir açıyla dönme ve keyfi bir vektörle ötelenme işlemlerini içeren genel bir transformasyon matrisi altında eğrilerin konum ve karakterizasyonlarının (eğrilik ve burulma gibi) nasıl etkilendiği araştırıldı. Analizler sonucunda, incelenen özel eğri türlerinin konumları etkilense de karakterizasyonlarının bu dönüşümler altında değişmediği matematiksel olarak ispatlandı. Teorik bulguları desteklemek amacıyla, belirli dönme açıları ve öteleme vektörleri kullanılarak sayısal örnekler sunuldu ve sonuçların geçerliliği gösterildi. Çalışmanın dördüncü bölümünde ise belirli bir noktanın yörüngesini elips olarak tanımlayan bir dönüşüm matrisinin nasıl tanımlanabileceği gösterildi ve bu matrisin farklı parametreler altında ürettiği eğriler uygulama olarak incelendi.

**Anahtar Kelimeler:** Kinematik, Dönüşümler, Eğriler, Karakterizasyon, Yörüngeler.



*"Canum aileme"*

## TEŞEKKÜR

Bu alıŐma sűresince tűm bilgilerini benimle paylaŐmaktan kaçınmayan, her tűrlű konuda desteęini benden esirgemeyen ve tezimde bűyűk emeęi olan, Gaziantep Ŭniversitesi űğretim űyelerinden danıŐman hocam, sayın Dr. Ŭğr. Ŭyesi Sultan ERDUR' a sonsuz minnet ve teŐekkűrlerimi sunarım. Ayrıca bu sűrete hep yanımda olan, varlıęı ve duaları ile desteklerini esirgemeyen canım aileme sonsuz teŐekkűr ederim.



## İÇİNDEKİLER

Sayfa	
ABSTRACT .....	i
ÖZET.....	ii
İTHAF .....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
İÇİNDEKİLER .....	v
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	vi
SEMBOLLER LİSTESİ.....	vii
BÖLÜM 1 GİRİŞ .....	1
BÖLÜM 2 TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	2
BÖLÜM 3 BAZI ÖZEL EĞRİLERİN TRANSFORMASYON MATRİSİ ALTINDA GEOMETRİK KARAKTERİZASYONLARI.....	10
3.1 Transformasyon Altında Helis Eğrisi.....	10
3.2 Transformasyon Altında Çember Eğrisi.....	25
3.3 Transformasyon Altında Elips Eğrisi .....	33
3.4 Transformasyon Altında Parabol Eğrisi .....	39
BÖLÜM 4 YÖRÜNGESİ ELİPS OLAN DÖNÜŞÜM MATRİSİ.....	43
BÖLÜM 5 TARTIŞMA VE SONUÇ.....	52
KAYNAKLAR.....	53
ÖZGEÇMİŞ.....	55

## ŞEKİLLER LİSTESİ

	<b>Sayfa</b>
<b>Şekil 2.1</b> Bir noktanın konum vektörünün uzayda gösterilmesi. ....	6
<b>Şekil 2.2</b> Yönelimi verilen katı cismin gösterilmesi. ....	7
<b>Şekil 2.3</b> Koordinat sistemlerinin birbirine göre tanımlanması. ....	8
<b>Şekil 4.1</b> Bir noktanın koordinat sisteminde gösterilmesi. ....	43
<b>Şekil 4.2</b> $(a, 0)$ noktasından geçen elipsin gösterilmesi. ....	46
<b>Şekil 4.3</b> $(0, b)$ noktasından geçen elipsin gösterilmesi. ....	47
<b>Şekil 4.4</b> Çemberin koordinat sisteminde gösterilmesi. ....	48
<b>Şekil 4.5</b> Bir P noktasının koordinat sisteminde gösterilmesi. ....	48
<b>Şekil 4.6</b> Bir P noktasından geçen elipsin gösterilmesi. ....	51

## SEMBOLLER LİSTESİ

$\alpha$	Alfa
$\beta$	Beta
$\pi$	Pi
$E^3$	3-boyutlu Öklid Uzayı
$\  \ $	Norm
$\langle , \rangle$	İç Çarpım
$\wedge$	$E^3$ de vektörel çarpım
$\kappa$	Eğrinin eğriliği
$\tau$	Eğrinin burulması (torsiyonu)
$\{T, N, B\}$	Frenet Çatısı
$T$	Birim teğet vektör alanı
$N$	Asli normal vektör alanı
$B$	Binormal vektör alanı
$C^k$	Sürekli ve k. basamaktan kısmi türevli fonksiyonlar kümesi

## BÖLÜM 1

### GİRİŞ

Kinematik, hareketin altında yatan kuvvetleri dikkate almaksızın mekanizmaların hareketini inceleyen temel bir bilim dalıdır. Özellikle robotik sistemlerde, mekanizmanın hareket kapasitesi tasarım ve kontrol süreçlerinin en kritik unsurlarından birini oluşturur. Bu bağlamda, kinematik problemlerin çözümü, hedeflenen görevlerin başarılabilmesi için farklı analiz yöntemlerinin kullanılmasını gerektirir. Diferansiyel geometrinin önemli bir alt dalı olan eğriler teorisi, kinematik analizlerde sıklıkla başvurulan bir alandır.

Bu çalışma, beş bölümden oluştu. 1. bölümde giriş, 2. bölümde temel tanım ve teoremler, 3. bölümde kinematikte karşılaşılan temel dönüşümlerden olan dönme ve öteleme hareketleri altında bazı özel eğri türlerinin konumu ve formunun stabilitesi gösterildi. Çalışmanın odağında helis, çember, elips ve parabol gibi sıkça karşılaşılan eğrilerin, belirli bir eksen etrafında döndürülme ve bir vektör boyunca ötelenme sonucunda geometrik karakterizasyonlarının korunup korunmadığı sorusuna yanıt arandı. Bu eğrilerin parametrik ifadeleri kullanılarak, söz konusu kinematik dönüşümler uygulandığında eğrilik ve burulma gibi temel karakterizasyonlarının değişmediği, yani eğrinin sadece konumunun değişip geometrik yapısının korunduğu ispatlandı. Bu durumun, aynı zamanda ele alınan dönüşümler için birer izometri olduğu da vurgulandı. Çalışmada, teorik ispatların yanı sıra, konuyu somutlaştırmak amacıyla belirli açı değerleri ve öteleme vektörleri için sayısal örneklere de yer verildi.

Çalışmanın 4. bölümünde, belirli bir noktanın yörüngesini elips olarak tanımlayan bir dönüşüm matrisinin nasıl elde edileceği incelendi ve bu matrisin farklı parametreler altında ürettiği eğriler özel olarak değerlendirildi.

Çalışmanın 5. bölümünde konu ile ilgili tartışma ve sonuç bölümü ele alındı ve çalışmanın literatüre olan katkısı açıklandı.

## BÖLÜM 2

### TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, Bölüm 3 ve Bölüm 4 için kullanılacak olan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

**Tanım 2.1** Kinematik, Kütle ve kuvvet kavramlarını içermeyen mekaniğin dallarından birisidir. Sadece tek bir nokta veya nokta sisteminin zamana bağlı yer değiştirmesini ele almaktadır (Corke, 2017).

**Tanım 2.2**  $R^2$  uzayında alınan değişken bir P noktasının  $X(x, y)$  koordinatları eğer hareketli bir M çattısı altında ölçülendirilmiş ise, P' nin sabit bir F çattısı altındaki koordinatları

$$X = [A]x + d$$

ile verilir. Burada

$$X = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

olmak üzere oluşturulan dönüşüm dönme matrisini ifade eder.  $D = (A, d)$  şeklinde verilir ve  $D$ , düzlem yer değiştirme olarak adlandırılır (Schilling, 1990).

**Tanım 2.3** Düzlem üzerinde alınan her bir noktayı vektör yardımıyla aynı düzlem üzerinde herhangi bir nokta ile eşleştiren dönüşüme öteleme denir.

Yani matematiksel olarak öteleme vektörü;

$v = (a, b)$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} T_v : R^2 &\rightarrow R^2 \\ (x, y) &\rightarrow (x + a, y + b) \end{aligned}$$

olarak ifade edilir (Zembat, 2015).

**Tanım 2.4** Bir robot kolu yönlendirilirken her ekleme hareket noktaları başlangıç kabul edilerek hareketleri sonucunda oluşacak yeni konum en alttan en üstteki ekleme kadar takip edilir. Üç eksenli bu yapıda her bir ekleme 3x3 lük bir matris tanımlanır ve eksenlere uygulanan dönme hareketlerini de 3x3 lük matrise eklenir ve burada oluşan matris yapı 4x4 lüktür. Elde edilen bu 4x4 lük matris yapıya transformasyon matrisi adı verilir ve 4-4 matrisinin elemanı daima 1 olarak yapılır. Aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.

$$F = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & P_{3 \times 1} \\ F_{1 \times 3} & 1 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Dönme Matrisi} & \text{Konum Vektörü} \\ \text{Perspektif Dönüşüm} & \text{Ölçek} \end{bmatrix}$$

(Muhurcu, 2005)

**Tanım 2.5**  $d$ ,  $n$ -boyutlu Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu belirtmek üzere,  $f : E^n \rightarrow E^n$  fonksiyonu için;

$$d(f(X), f(Y)) = d(X, Y)$$

$X, Y \in E^n$  sağlanıyorsa  $f$  fonksiyonu  $E^n$ 'de bir izometridir denir (Hacısalihoglu, 1998).

**Tanım 2.6**  $\alpha : I \rightarrow E^3$ ,  $I = \{t \mid t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 2\pi\}$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (r \cos t, r \sin t, 0) \text{ olmak üzere,}$$

$\alpha = \{\alpha(t) \mid t \in I\}$  ifadesi,  $E^3$  de,  $O$  merkezli ve  $r$  yarıçaplı bir çember belirtir (Hacısalihoglu, 1998).

**Tanım 2.7**  $\alpha : I \rightarrow E^3$ ,  $I = \mathbb{R}$  olmak üzere,

$$s \rightarrow \alpha(s) = (s, s^2, 0)$$

sağlanıyorsa  $\alpha$  bir parabol belirtir (Hacısalihoglu, 1998).

**Tanım.2.8** Dik koordinat sisteminde kartezyen denklemi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

şeklinde verilen elips eğrisinin parametrik ifadesi,

$$I = \{t \mid 0 \leq t < 2\pi\}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \alpha : I &\rightarrow E^2 \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (a \cos t, b \sin t) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir (Hacısalıhoğlu, 1998).

**Tanım 2.9**  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  biçiminde verilen  $\mathbb{C}^\infty$  sınıfından düzgün bir  $\alpha$  dönüşümüne  $\mathbb{R}^n$  de bir eğridir denir. Eğrinin parametre aralığı  $I \subseteq \mathbb{R}$  şeklindedir ve  $t \in I$  değişkenine ise eğrinin parametresi denir (Ateş, 2022).

**Tanım 2.10**  $E^3$  'de bir  $\alpha$  eğrisi verilmiş olsun.  $\alpha$  eğrisi eğer teğet vektör alanı ile sabit doğrultulu bir açı yapıyor ise  $\alpha$  eğrisi bir genel helis eğrisidir denir.

$\alpha$  eğrisinin belirttiği teğet vektör alanı  $T$  ile sabit doğrultulu bir doğru da  $U$  ile verilmiş ise,

$$\langle T, U \rangle = \cos \theta, \quad \theta = \text{sabit}$$

dir. Burada  $U$  sabit doğrultulu doğrusu genel helisin eksenidir (Ergün, 2014).

**Tanım 2.11**  $E^3$  uzayında verilen birim hızlı bir  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisi için,

$$\kappa : I \rightarrow E^3, \quad \kappa(s) = \|T'(s)\|$$

fonksiyonuna  $\alpha(s)$  eğrisinin eğrilik fonksiyonu,  $\kappa(s)$  sayısına da eğrinin  $\alpha(s)$  noktasındaki birinci eğriliği denir (Mumcu, 2018).

**Tanım 2.12**  $E^3$  uzayında verilen bir birim hızlı  $\alpha:I \rightarrow E^3$  eğrisinin Frenet vektör alanları  $\{T, N, B\}$  olmak üzere,

$$\tau:I \rightarrow E^3, \quad \tau(t) = \langle B'(t), N(t) \rangle$$

şeklinde verilen fonksiyonuna  $\alpha$  eğrisinin burulma fonksiyonu denir.  $\tau(t)$  sayısına da eğrinin  $\alpha(t)$  noktasındaki ikinci eğriliği yani eğrinin burulması denir (Mumcu, 2018).

**Teorem 2.1**  $E^3$  de  $(I, \alpha)$  komşuluğunda bir eğri  $\alpha(t)$  olarak verilsin. O halde  $\alpha(t)$  eğrisinin bir genel helis eğrisi olabilmesi için gerek ve yeter şart  $I'$  da alınan her bir  $t$  elemanı için ancak ve ancak  $\frac{\kappa}{\tau}$  ifadesinin sabit olmasıdır (Millman ve Parker, 1977).

**Teorem 2.2** 3-boyutlu Öklid uzayında alınan regüler bir eğri  $\alpha:I \subseteq \rightarrow E^3$  olsun ve  $T, N, B$  Frenet vektör alanları verilsin. O halde,

$\kappa$  eğrinin eğriliği ve  $\tau$  eğrinin torsiyonu olmak üzere,

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}$$

$$\tau = \frac{\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2}$$

dir (Değirmen, 2017).

**Tanım 2.13**  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğunda bir  $M$  eğrisi verilmiş olsun. Eğer  $\forall t \in I$  için,

$$\|\alpha'(t)\| = 1$$

ise  $(I, \alpha)$  ya göre  $M$  eğrisi bir birim hızlı eğridir denir ve eğrinin  $t \in I$  parametresi de eğrinin yay parametresi olarak adlandırılır (Ergün, 2014).

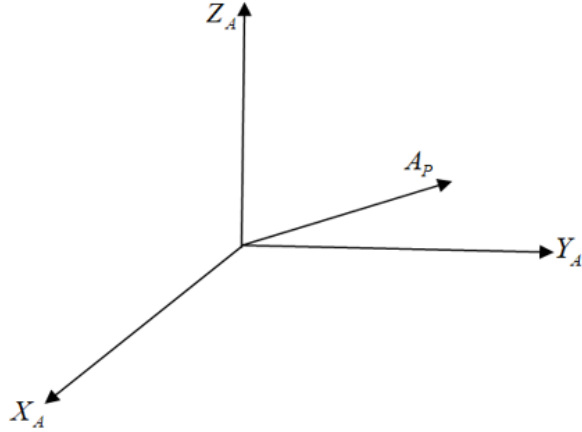
**Sonuç 2.1**  $\mathbb{R}^3$  uzayında birim hızlı bir eğri  $\lambda(s)$  olarak verilsin. O halde şu sonuçlardan söz edebiliriz.

$\lambda$  eğrisinde alınan her  $s$  noktası için;

1.  $\tau = 0$  sağlanıyor ise  $\lambda$  düzlemsel bir eğridir.
2.  $\tau > 0$  sağlanıyor ise  $\lambda$  sağ sarmalı bir eğridir.
3.  $\tau < 0$  sağlanıyor ise  $\lambda$  sol sarmalı bir eğridir.

(Sy, 2001).

**Tanım 2.14** Bir noktanın konumu uzayda gösterebilmek için  $3 \times 1$  boyutlu konum vektörü kullanılır. Şekil 2.1 'de belirtildiği üzere;

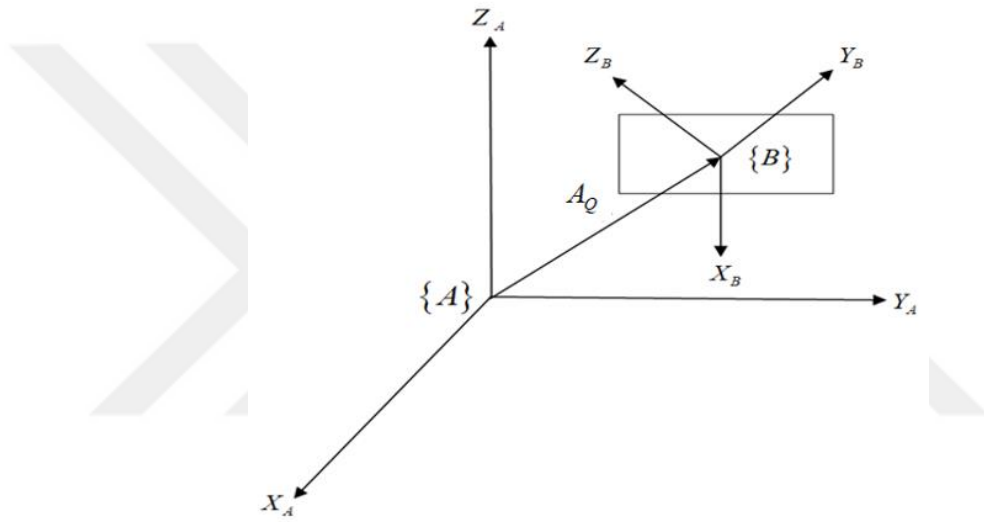


**Şekil 2.1** Bir noktanın konum vektörünün uzayda gösterilmesi.

$$A_Q = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}$$

Burada koordinat sistemine göre tanımlanan alt indis vektörü  $A$  olarak verilsin.  $q_x$ ,  $q_y$  ve  $q_z$  bu vektörün  $A$  koordinat çatısındaki bileşenleridir.

Katı bir cisme ait koordinat çatılarının konumlanmasını inceleyelim. Bunu doğru bir şekilde belirleyebilmek için hem konum hem de yöneliminin belirlenmesi gerekmektedir. Bunun için şekil 2.1' den de anlaşılacağı şekilde bir  $\{B\}$  koordinat çatısı belirlenerek cisme tutturulur. Cismin yönelimi belirlemek demek aslında  $\{A\}$  koordinat sistemine göre tanımlanması demektir. Bu ise ancak  $\{B\}$  Koordinat çatısının tüm birim vektörlerini  $\{A\}$  koordinat çatısına göre elde ederek sağlanabilir. Bunlar ise sütunları birer vektör belirten 3x3 tipinde bir matrisle ifade edilir. Bu matris rotasyon matrisi olarak isimlendirilir.



**Şekil 2.2** Yönelimi verilen katı cismin gösterilmesi.

$${}^A_B R = \begin{bmatrix} A_{X_B} & A_{Y_B} & A_{Z_B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{X_B \cdot X_A} & A_{Y_B \cdot X_A} & A_{Z_B \cdot X_A} \\ A_{X_B \cdot Y_A} & A_{Y_B \cdot Y_A} & A_{Z_B \cdot Y_A} \\ A_{X_B \cdot Z_A} & A_{Y_B \cdot Z_A} & A_{Z_B \cdot Z_A} \end{bmatrix}$$

${}^A_B R : \{B\}$  koordinat çatısının  $\{A\}$  koordinat çatısına göre temsili rotasyon matrisi.

Verilen ifadeden anlaşılacağı üzere bu matrisin girdileri,  $\{B\}$  koordinat sistemindeki birim vektörlerin  $\{A\}$  koordinat sistemi üzerindeki izdüşümlerinden oluşmaktadır. Bu izdüşümler nokta çarpımlarından oluşan izdüşümlerdir. Ayrıca bu rotasyon matrisi ortonormal kolonlara sahiptir ve aşağıdaki özellikleri barındırır.

$${}^A_B R = {}^A_B R^{-1} = {}^A_B R^T$$

şeklinde eşitliğe sahiptir.

$X$ ,  $Y$  ve  $Z$  eksenlerine göre dönmeye kullanılan rotasyon matrisleri, aşağıda sırasıyla verilmiştir.

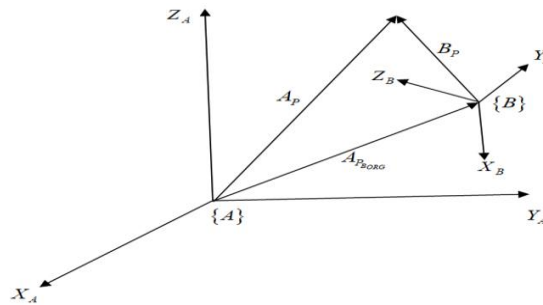
$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Yılmaz, 2010).

**Tanım 2.14.1** Uzayda verilen bir  $\{B\}$  koordinat sistemini bir  $\{A\}$  koordinat sistemine göre tanımlayabilmek için,  $\{B\}$  koordinat çatisının orijininin  $\{A\}$  koordinat çatisına göre konumunun bilinmesi ve aynı zamanda  $\{B\}$  koordinat çatisının  $\{A\}$  koordinat çatisına göre nasıl bir yönlenmeye sahip olduğunun bilinmesi gerekmektedir.



**Şekil 2.3** Koordinat sistemlerinin birbirine göre tanımlanması.

Şekil 2.3’de  $\{B\}$  koordinat sisteminde tanımlı bulunan  $B_P$  vektörü  $\{A\}$  koordinat sisteminde,

$$A_P = A_{P_{BORG}} + {}^A_B R \cdot B_P$$

şeklinde ifade edilir.

$A_{P_{BORG}}$  :  $\{B\}$ ’nin orijininin  $\{A\}$ ’nin orijinine göre konumu (Yılmaz, 2010).



## BÖLÜM 3

### BAZI ÖZEL EĞRİLERİN TRANSFORMASYON MATRİSİ ALTINDA GEOMETRİK KARAKTERİZASYONLARI

Bu bölümde, helis, çember, elips ve parabol eğrilerinin herhangi bir eksen etrafında bir  $\theta$  açısı kadar döndürülerek  $\vec{d} = (k, l, m)$  vektörü kadar ötelemesi sonucunda geometrik karakterizasyonunun değişmezliğine ve bu eğrinin yeni konumuna odaklanılmaktadır. Konumu değişen ve geometrik formu stabil kalan bu eğriler için sayısal örnekler verilerek çalışmalar uygulamalı olarak ele alınacaktır.

#### 3.1 Transformasyon Altında Helis Eğrisi

**Teorem 3.1.1**  $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t, at)$  parametrik denkleminin verilen helis eğrisinin  $y$  - eksenini etrafında bir  $\theta$  açısı kadar döndürülerek  $\vec{d} = (k, l, m)$  vektörü kadar ötelemesi sonucunda geometrik karakterizasyonu değişmez.

**İspat:** Öncelikle helis eğrisini başlangıç konumunda karakteristik olarak inceleyelim. Bunun için  $\alpha(t)$  'nin birinci ve ikinci eğrilikleri hesaplanacaktır.

$\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t, at)$  denkleminde  $\alpha'(t)$ ,  $\alpha''(t)$  ve  $\alpha'''(t)$  değerleri;

$$\alpha'(t) = (-r \sin t, r \cos t, a)$$

$$\alpha''(t) = (-r \cos t, -r \sin t, 0)$$

$$\alpha'''(t) = (r \sin t, -r \cos t, 0)$$

şeklinde bulunur. Buradan birinci türevin normu,

$$\begin{aligned} \|\alpha'(t)\| &= \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t + a^2} \\ &= \sqrt{r^2 + a^2} \end{aligned}$$

olur. Görüleceği üzere  $\sqrt{r^2 + a^2} \in \mathbb{R}$  olacağı aşikardır.

$$\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -r \sin t & r \cos t & a \\ -r \cos t & -r \sin t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= e_1(0 + ar \sin t) - e_2(0 + ar \cos t) + e_3(r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t)$$

$$= (ar \sin t, -ar \cos t, r^2)$$

Bulduğumuz bu vektörün normu,

$$\begin{aligned} \|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\| &= \sqrt{a^2 r^2 \sin^2 t + a^2 r^2 \cos^2 t + r^4} \\ &= \sqrt{a^2 r^2 + r^4} \\ &= r\sqrt{a^2 + r^2} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Eğrilik formülünde bulunan değerler yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} \\ &= \frac{r\sqrt{a^2 + r^2}}{\sqrt{a^2 + r^2}^3} \\ &= \frac{r}{a^2 + r^2} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Şimdi de eğrinin torsiyonunu bulmak için gereken ifadeler formülde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle &= \langle (ar \sin t, -ar \cos t, r^2), (r \sin t, -r \cos t, 0) \rangle \\ &= ar^2 \sin^2 t + ar^2 \cos^2 t \\ &= ar^2 \end{aligned}$$

olur ve torsiyon değeri,

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \frac{\langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2} \\ &= \frac{ar^2}{(r\sqrt{a^2 + r^2})^2} \\ &= \frac{a}{a^2 + r^2} \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Helis eğrisinin birinci konumuna göre karakterizasyonu bu şekilde bulundu. Şimdi de  $\alpha(t)$ ' nin aşağıdaki dönüşüm sonrasında oluşan eğrilikleri hesaplanırsa:

Bu amaçla  $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t, at)$  eğrisinin  $y$  eksenini etrafında  $\theta$  açısı kadar dönme ve  $\vec{d} = (k, l, m)$  vektörü kadar ötelemesi için kullanacağımız rotasyon,

$$A_P = {}^A_B R \cdot B_P + A_{P_{ORG}}$$

şeklinde olduğundan, verilenler yerlerine yazıldığında oluşan transformasyon matrisi:

$$A_P = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ at \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ l \\ m \end{bmatrix}$$

$$A_P = \beta(t) = (\cos \theta r \cos t + \sin \theta at + k, r \sin t + l, -\sin \theta r \cos t + \cos \theta at + m)$$

olarak elde edilir. Burada  $\beta(t)$  verilen eğrinin transformasyon sonrası konum vektörüdür. Yeni konuma göre eğrilikleri hesaplamak için gereken işlemler yapılırsa  $\beta(t)$ ' nin türevleri,

$$\beta(t) = (\cos \theta r \cos t + \sin \theta at + k, r \sin t + l, -\sin \theta r \cos t + \cos \theta at + m)$$

ve türevleri,

$$\beta'(t) = (-r \cos \theta \sin t + a \sin \theta, r \cos t, r \sin \theta \sin t + a \cos \theta)$$

$$\beta''(t) = (-r \cos \theta \cos t, -r \sin t, r \sin \theta \cos t)$$

$$\beta'''(t) = (r \cos \theta \sin t, -r \cos t, -r \sin \theta \sin t)$$

şeklinde olup, birinci türevin normu:

$$\begin{aligned} \|\beta'(t)\| &= \sqrt{(-r \cos \theta \sin t + a \sin \theta)^2 + (r \cos t)^2 + (r \sin \theta \sin t + a \cos \theta)^2} \\ &= \sqrt{r^2 \cos^2 \theta \sin^2 t + a^2 \sin^2 \theta - 2ar \cos \theta \sin \theta \sin t + r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 t + a^2 \cos^2 \theta + 2ar \cos \theta \sin \theta \sin t} \\ &= \sqrt{a^2 + r^2 \sin^2 t (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + r^2 \cos^2 t} \\ &= \sqrt{a^2 + r^2} \end{aligned}$$

olarak bulunmuş olur.

$$\begin{aligned} \beta'(t) \wedge \beta''(t) &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -r \cos \theta \sin t - a \sin \theta & r \cos t & -r \sin \theta \sin t + a \cos \theta \\ -r \cos \theta \cos t & -r \sin t & -r \sin \theta \cos t \end{vmatrix} \\ &= e_1 (r^2 \sin \theta \cos^2 t + r^2 \sin \theta \sin^2 t + ar \cos \theta \sin t) \\ &\quad - e_2 (-r^2 \sin \theta \cos \theta \sin t \cos t + ar \sin^2 \theta \cos t + r^2 \sin \theta \cos \theta \sin t \cos t + ar \cos^2 \theta \cos t) \\ &\quad + e_3 (r^2 \cos \theta \sin^2 t - ar \sin \theta \sin t + r^2 \cos \theta \cos^2 t) \end{aligned}$$

yani,

$$\beta'(t) \wedge \beta''(t) = (r^2 \sin \theta + ar \cos \theta \sin t, -ar \cos t, r^2 \cos \theta - ar \sin \theta \sin t)$$

ve normu da:

$$\begin{aligned} \|\beta'(t) \wedge \beta''(t)\| &= \sqrt{(r^2 \sin \theta + ar \cos \theta \sin t)^2 + (-ar \cos t)^2 + (r^2 \cos \theta - ar \sin \theta \sin t)^2} \\ &= \sqrt{r^4 + a^2 r^2 \sin^2 t + a^2 r^2 \cos^2 t} \\ &= \sqrt{r^2 (r^2 + a^2)} \\ &= r \sqrt{r^2 + a^2} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Buradan elde edilen tüm verileri eğrilik formülünde yerine yazarak yeni konuma göre bulduğumuz birinci eğrilik,

$$\begin{aligned}
\kappa_2 &= \frac{\|\beta'(t) \wedge \beta''(t)\|}{\|\beta'(t)\|^3} \\
&= \frac{r\sqrt{r^2 + a^2}}{(\sqrt{r^2 + a^2})^3} \\
&= \frac{r}{r^2 + a^2} \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada karşılaştırma yapılacak olursa başlangıç konumunda ki eğrilik ile dönüşüm sonrası konuma ait elde edilen eğriliğin aynı olduğu görülür. Yani;

$$\kappa_1 = \kappa_2$$

'dir. Eğrinin yeni konumundaki torsiyonu için gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$\langle \beta'(t) \wedge \beta''(t), \beta'''(t) \rangle = \langle (r^2 \sin \theta + ar \cos \theta \sin t, -ar \cos t, r^2 \cos \theta - ar \sin \theta \sin t), (r \cos \theta \sin t, -r \cos t, -r \sin \theta \sin t) \rangle$$

ve buradan iç çarpımın sonucu,

$$\begin{aligned}
&= r^3 \cos \theta \sin \theta \sin t + ar^2 \cos^2 \theta \sin^2 t + ar^2 \cos^2 t - r^3 \cos \theta \sin \theta \sin t + ar^2 \sin^2 \theta \sin^2 t \\
&= ar^2 \sin^2 t + ar^2 \cos^2 t \\
&= ar^2
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Şimdi bulunan sonuçları torsiyon formülünde yerlerine yazarak eğrinin yeni konumunun torsiyon değerini bulursak,

$$\begin{aligned}
\tau_2 &= \frac{\langle \beta'(t) \wedge \beta''(t), \beta'''(t) \rangle}{\|\beta'(t) \wedge \beta''(t)\|^2} \\
&= \frac{ar^2}{(r\sqrt{r^2 + a^2})^2} \\
&= \frac{ar^2}{r^2(r^2 + a^2)} \\
&= \frac{a}{r^2 + a^2} \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Bu da bize helis eğrisinin birinci ve ikinci konumuna göre torsiyon değerlerinin eşit olduğunu gösterir. Yani;

$$\tau_1 = \tau_2$$

şeklindedir. Sonuç olarak parametrik halde verilen  $\alpha(t)$  helis eğrisinin transformasyon sonucunda formunun stabil kaldığı görülmüştür.

Şimdi özel bir helis eğrisi ve transformasyon matrisi için Teorem 3.1.1 'in bir uygulaması aşağıdaki gibi verilecektir.

**Örnek 3.1.1**  $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t, at)$  parametrik helis eğrisinin  $y$ -ekseninde  $\theta = 30^\circ$  döndürülerek  $\vec{d} = (2, 4, 5)$  birim ötelenmesi sonucu geometrik karakterizasyonunu inceleyelim.

$\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t, at)$  eğrisinin yapısını anlayabilmek için  $\alpha(t)$  eğrisinin başlangıç konumunda iken  $\kappa_1$  ve  $\tau_1$  değerlerine ihtiyaç vardır. Bu değerler ise Teorem 3.1.1 de,

$$\kappa_1 = \frac{r}{a^2 + r^2} \in \mathbb{R} \text{ ve } \tau_1 = \frac{a}{a^2 + r^2} \in \mathbb{R}$$

olarak bulunmuştu. O halde  $\alpha(t)$  eğrisinin geometrik karakterizasyonunu inceleyebilmek için bulunması gereken ifade  $\kappa_2$  ve  $\tau_2$  değerleridir. Yani eğrinin dönüşüm altındaki eğrilik ve torsiyonu bilinmelidir. Bunun için rotasyon matrisi olan;

$$A_P = {}^A_B R \cdot B_P + A_{P_{BORG}}$$

ifade de verilenler düzenlenirse,

$$\beta(t) = \begin{bmatrix} \cos 30 & 0 & \sin 30 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin 30 & 0 & \cos 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ at \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$A_P = {}^A_B R \cdot B_P + A_{P_{BORG}}$  ve matriste açıların trigonometrik değerleri yerlerine yazılırsa elde edilen transformasyon matrisi,

$$\beta(t) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ at \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$A_p = \beta(t) = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} r \cos t + \frac{1}{2} at + 2, r \sin t + 4, -\frac{1}{2} r \cos t + \frac{\sqrt{3}}{2} at + 5 \right)$$

şeklinde bulunur.  $\beta(t)$ 'nin birinci türevi,

$$\beta'(t) = \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} r \sin t + \frac{1}{2} a, r \cos t, \frac{1}{2} r \sin t + \frac{\sqrt{3}}{2} a \right)$$

ve normu da,

$$\begin{aligned} \|\beta'(t)\| &= \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} r \sin t + \frac{1}{2} a\right)^2 + (r \cos t)^2 + \left(\frac{1}{2} r \sin t + \frac{\sqrt{3}}{2} a\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{3}{4} r^2 \sin^2 t + \frac{1}{4} a^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} ar \sin t + r^2 \cos^2 t + \frac{1}{4} r^2 \sin^2 t + \frac{3}{4} a^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} ar \sin t} \\ &= \sqrt{r^2 \sin^2 t + a^2 + r^2 \cos^2 t} \\ &= \sqrt{a^2 + r^2} \end{aligned}$$

şeklinde olur. Buradan  $\beta(t)$ 'nin diğer türevleri alınırsa,

$$\beta''(t) = \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} r \cos t, -r \sin t, \frac{1}{2} r \cos t \right)$$

$$\beta'''(t) = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} r \sin t, -r \cos t, -\frac{1}{2} r \sin t \right)$$

olarak elde edilir.  $\beta'(t)$  ve  $\beta''(t)$ 'nin vektörel çarpımları ise,

$$\beta'(t) \wedge \beta''(t) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}r \sin t - \frac{1}{2}a & r \cos t & -\frac{1}{2}r \sin t + \frac{\sqrt{3}}{2}a \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}r \cos t & -r \sin t & -\frac{1}{2}r \cos t \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \beta'(t) \wedge \beta''(t) &= e_1 \left( (r \cos t) \left( \frac{1}{2}r \cos t \right) - (-r \sin t) \left( \frac{1}{2}r \sin t + \frac{\sqrt{3}}{2}a \right) \right) \\ &\quad - e_2 \left( \left( -\frac{\sqrt{3}}{2}r \sin t + \frac{1}{2}a \right) \left( \frac{1}{2}r \cos t \right) - \left( -\frac{\sqrt{3}}{2}r \cos t \right) \left( \frac{1}{2}r \sin t + \frac{\sqrt{3}}{2}a \right) \right) \\ &\quad + e_3 \left( \left( -\frac{\sqrt{3}}{2}r \sin t + \frac{1}{2}a \right) (-r \sin t) - \left( -\frac{\sqrt{3}}{2}r \cos t \right) (r \cos t) \right) \end{aligned}$$

ifadesinde matematiksel ara işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned} \beta'(t) \wedge \beta''(t) &= e_1 \left( \frac{1}{2}r^2 \cos^2 t + \frac{1}{2}r^2 \sin^2 t + \frac{\sqrt{3}}{2}ar \sin t \right) \\ &\quad - e_2 \left( -\frac{\sqrt{3}}{4}r^2 \sin t \cos t + \frac{1}{4}ar \cos t + \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 \sin t \cos t + \frac{3}{4}ar \cos t \right) \\ &\quad + e_3 \left( \frac{\sqrt{3}}{2}r^2 \sin^2 t - \frac{1}{2}ar \sin t + \frac{\sqrt{3}}{2}r^2 \cos^2 t \right) \end{aligned}$$

ve buradan  $\beta'(t)$  ve  $\beta''(t)$ ' nin vektörel çarpımlarının en sade hali,

$$\begin{aligned} \beta'(t) \wedge \beta''(t) &= e_1 \left( \frac{1}{2}r^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}ar \sin t \right) - e_2 (ar \cos t) + e_3 \left( \frac{\sqrt{3}}{2}r^2 - \frac{1}{2}ar \sin t \right) \\ &= \left( -\frac{1}{2}r^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}ar \sin t, -ar \cos t, \frac{\sqrt{3}}{2}r^2 + \frac{1}{2}ar \sin t \right) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur ve  $\beta'(t)$  ve  $\beta''(t)$ ' nin vektörel çarpımlarının normu ise,

$$\|\beta'(t) \wedge \beta''(t)\| = \sqrt{\left( \frac{1}{2}r^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}ar \sin t \right)^2 + (-ar \cos t)^2 + \left( \frac{\sqrt{3}}{2}r^2 - \frac{1}{2}ar \sin t \right)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{1}{4}r^4 + \frac{3}{4}a^2r^2 \sin^2 t + \frac{\sqrt{3}}{2}ar^3 \sin t + a^2r^2 \cos^2 t + \frac{3}{4}r^4 + \frac{1}{4}a^2r^2 \sin^2 t - \frac{\sqrt{3}}{2}ar^3 \sin t} \\
&= \sqrt{r^4 + a^2r^2 \sin^2 t + a^2r^2 \cos^2 t} \\
&= \sqrt{r^4 + a^2r^2} \\
&= r\sqrt{a^2 + r^2}
\end{aligned}$$

olur. Bulunan bu ifadeler  $\beta(t)$ ' nin eğrilik formülünde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\kappa_2 &= \frac{\|\beta'(t) \wedge \beta''(t)\|}{\|\beta'(t)\|^3} \\
&= \frac{r\sqrt{a^2 + r^2}}{(\sqrt{a^2 + r^2})^3} \\
&= \frac{r}{a^2 + r^2} \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

olur ki bu da bize eğrinin ilk konumu ile ikinci konumunda eğrilik değerlerinin değişmediği sonucuna ulaştırır. Yani,

$$\kappa_1 = \kappa_2$$

dir. Eğrinin ikinci konumdaki torsiyon değerini inceleyerek devam edersek;

$$\begin{aligned}
\langle \beta'(t) \wedge \beta''(t), \beta'''(t) \rangle &= \left\langle \left( \frac{1}{2}r^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}ar \sin t, -ar \cos t, \frac{\sqrt{3}}{2}r^2 - \frac{1}{2}ar \sin t \right), \left( \frac{\sqrt{3}}{2}r \sin t, -r \cos t, -\frac{1}{2}r \sin t \right) \right\rangle \\
&= ar^2 \sin^2 t + ar^2 \cos^2 t \\
&= ar^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) \\
&= ar^2
\end{aligned}$$

olur ve ifadeler torsiyon formülünde yerlerine yazılırsa,

$$\tau_2 = \frac{ar^2}{\left(r\sqrt{a^2 + r^2}\right)^2}$$

$$= \frac{a}{a^2 + r^2} \in \mathbb{R}$$

olarak elde edilir. ilk durumdaki torsiyon değeri ile ikinci durumdaki torsiyon değerleri karşılaştırıldığında,  $\tau_1 = \tau_2$  olduğu görülür.

Yani özetle karşılaştırma yaparsak eğrinin ilk konumu ile ikinci konumunda  $\kappa_1 = \kappa_2$  ve  $\tau_1 = \tau_2$  olduğu görülür. Bu da bize verilen helis eğrisinin özel açı ve vektör değerleri için transformasyon altında karakterizasyonunun değişmediği sonucuna ulaştırır. O halde genel helis eğrisine ait sonuçları veren Teorem 3.1.1'in doğruluğu özel bir örnek üzerinde görülmüş olur.

Şimdi ise farklı bir parametrik denklemle verilmiş helis eğrisi üzerinde aşağıdaki uygulama verilecektir.

**Örnek 3.1.2**  $\alpha(t) = \left( \frac{1}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}t \right)$  eğrisinin  $x$ -ekseni üzerinde  $\theta = 45^\circ$  döndürülerek  $\vec{d} = (1, 3, 7)$  birim ötelenmesi sonucu geometrik karakterizasyonunu inceleyelim.

Önce eğrinin ilk konumundaki geometrik karakterizasyonunu incelersek,

$$\alpha(t) = \left( \frac{1}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}t \right)$$

olmak üzere,  $\alpha'(t)$ ,  $\alpha''(t)$ ,  $\alpha'''(t)$  değerlerini bulursak;

$$\alpha'(t) = \left( \frac{1}{2}(1+t)^{\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2}(1-t)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\alpha''(t) = \left( \frac{1}{4}(1+t)^{-\frac{1}{2}}, \frac{1}{4}(1-t)^{-\frac{1}{2}}, 0 \right)$$

$$\alpha'''(t) = \left( -\frac{1}{8}(1+t)^{-\frac{3}{2}}, \frac{1}{8}(1-t)^{-\frac{3}{2}}, 0 \right)$$

olur ve birinci türevin normu,

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\left( \frac{1}{2}(1+t)^{\frac{1}{2}} \right)^2 + \left( -\frac{1}{2}(1-t)^{\frac{1}{2}} \right)^2 + \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{1}{4}(1+t) + \frac{1}{4}(1-t) + \frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}t + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}t + \frac{1}{2}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Şimdi diğer hesaplamalara geçilirse, vektörel çarpım:

$$\begin{aligned}
\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{1}{2}(1+t)^{\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2}(1-t)^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4}(1+t)^{-\frac{1}{2}} & \frac{1}{4}(1-t)^{-\frac{1}{2}} & 0 \end{vmatrix} \\
&= \left( -\frac{1}{4\sqrt{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}, \frac{1}{4\sqrt{2}}(1+t)^{-\frac{1}{2}}, \frac{1}{8} \left( (1+t)^{\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} + (1+t)^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}} \right) \right) \\
&= \left( -\frac{1}{4\sqrt{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}, \frac{1}{4\sqrt{2}}(1+t)^{-\frac{1}{2}}, \frac{1}{4(1-t^2)^{\frac{1}{2}}} \right)
\end{aligned}$$

olarak bulunur ve vektörel çarpımın normu da;

$$\begin{aligned}
\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\| &= \sqrt{\left( -\frac{1}{4\sqrt{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} \right)^2 + \left( \frac{1}{4\sqrt{2}}(1+t)^{-\frac{1}{2}} \right)^2 + \left( \frac{1}{8} \left( (1+t)^{\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} + (1+t)^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}} \right) \right)^2} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan  $\alpha(t)$ 'nin eğriliği;

$$\kappa_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}$$

şeklinde olduğu görülür. Şimdi eğrinin ikinci eğriliğini bulmak için elde edilen veriler kullanılıp ara ifadeler düzenlenirse;

$$\langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle = \left\langle \left( -\frac{1}{4\sqrt{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}, \frac{1}{4\sqrt{2}}(1+t)^{-\frac{1}{2}}, \frac{1}{4(1-t^2)^{\frac{1}{2}}} \right), \left( -\frac{1}{8}(1+t)^{-\frac{3}{2}}, \frac{1}{8}(1-t)^{-\frac{3}{2}}, 0 \right) \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{32\sqrt{2}(1-t)^{\frac{1}{2}}(1+t)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{32\sqrt{2}(1+t)^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{1}{32\sqrt{2}} \left( \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}(1+t)} + \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}(1-t)} \right) \\
&= \frac{1}{32\sqrt{2}} \left( \frac{1-t+1+t}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\
&= \frac{1}{16\sqrt{2}} \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

olur ve eğrinin torsiyon değeri,

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \frac{\langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2} \\
&= \frac{\frac{1}{16\sqrt{2}} \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}}{\left( \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}} \right)^2} \\
\tau_1 &= \frac{1}{2\sqrt{2}(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Burada eğrinin ikinci konumuna geçmeden önce eğrinin birinci ve ikinci eğriliklerinin oranına bakıldığında

$$\frac{\kappa_1}{\tau_1} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}}{\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}} = 1$$

olur ki, Teorem 2.1 gereği  $\frac{\kappa_1}{\tau_1} \in \mathbb{R}$  olduğundan  $\alpha(t)$  eğrisi bir helis eğrisidir.

Bu helis eğrisi için verilen açı ve verilen vektör altındaki transformasyon dönüşümü;

$$A_p = \beta(t) = {}^A_B R \cdot B_p + A_{P_{BORG}}$$

ifadesinde düzenlenirse;

$$R_x(\alpha) = {}^A_B R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 45 & -\sin 45 \\ 0 & \sin 45 & \cos 45 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\beta(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}} + 1 \\ \frac{1}{3\sqrt{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}t + 3 \\ \frac{1}{3\sqrt{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}t + 7 \end{bmatrix}$$

elde edilecektir. Bu transformasyon matrisini vektörel formda yazdığımızda,

$$\beta(t) = \left( \frac{1}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}} + 1, \frac{1}{3\sqrt{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}t + 3, \frac{1}{3\sqrt{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}t + 7 \right)$$

olur. Eğrinin yeni konumu için gerekli türevler alındığında,

$$\beta'(t) = \left( \frac{1}{2}(1+t)^{\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\beta''(t) = \left( \frac{1}{4}(1+t)^{-\frac{1}{2}}, \frac{1}{4\sqrt{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}, \frac{1}{4\sqrt{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} \right)$$

$$\beta'''(t) = \left( -\frac{1}{8}(1+t)^{-\frac{3}{2}}, \frac{1}{8\sqrt{2}}(1-t)^{-\frac{3}{2}}, \frac{1}{8\sqrt{2}}(1-t)^{-\frac{3}{2}} \right)$$

olarak elde edilir. Buradan  $\beta'(t)$ 'nin normu ise,

$$\begin{aligned} \|\beta'(t)\| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}(1+t)^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}(1+t) + \frac{1}{4}(1-t) + \frac{1}{2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

olarak bulunur.  $\beta'(t) \wedge \beta''(t)$  ise,

$$\beta'(t) \wedge \beta''(t) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{1}{2}(1+t)^{\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}(1+t)^{-\frac{1}{2}} & \frac{1}{4\sqrt{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} & \frac{1}{4\sqrt{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \left[ \left( -\frac{1}{2\sqrt{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{4\sqrt{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} \right) - \left( \frac{1}{4\sqrt{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} \right) \left( -\frac{1}{2\sqrt{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \right) \right], \\ &- \left[ \left( \frac{1}{2}(1+t)^{\frac{1}{2}} \right) \left( \frac{1}{4\sqrt{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} \right) - \left( \frac{1}{4}(1+t)^{-\frac{1}{2}} \right) \left( -\frac{1}{2\sqrt{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \right) \right], \\ &\left[ \left( \frac{1}{2}(1+t)^{\frac{1}{2}} \right) \left( \frac{1}{4\sqrt{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} \right) - \left( \frac{1}{4}(1+t)^{-\frac{1}{2}} \right) \left( -\frac{1}{2\sqrt{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

ara işlemler yapıldığında,

$$= \left[ -\frac{1}{16} - \frac{1}{8\sqrt{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{16} - \frac{1}{8\sqrt{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}, -\frac{1}{8\sqrt{2}}(1+t)^{\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{8\sqrt{2}}(1+t)^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8}(1+t)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{8\sqrt{2}}(1+t)^{\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{8\sqrt{2}}(1+t)^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8}(1+t)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$= \left[ -\frac{1}{4\sqrt{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}, -\frac{1}{8\sqrt{2}} \left( \left( \frac{1+t}{1-t} \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \frac{1-t}{1+t} \right)^{\frac{1}{2}} \right) + \frac{1}{8(1+t)^{\frac{1}{2}}}, \frac{1}{8\sqrt{2}} \left( \left( \frac{1+t}{1-t} \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \frac{1-t}{1+t} \right)^{\frac{1}{2}} \right) + \frac{1}{8(1+t)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

olarak bulunur ve  $\beta'(t) \wedge \beta''(t)$ 'nin normuna bakıldığında ise,

$$\begin{aligned}
\|\beta'(t) \wedge \beta''(t)\| &= \sqrt{\left(-\frac{1}{4\sqrt{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1-t}}{\sqrt{1-t^2}}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1-t}}{\sqrt{1-t^2}}\right)\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{32}(1-t)^{-1} + \frac{1}{64}\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1-t}}{\sqrt{1-t^2}}\right)^2 + \frac{1}{64}\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1-t}}{\sqrt{1-t^2}}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{32}(1-t)^{-1} + \frac{1}{64}\left(\frac{2-2\sqrt{2(1-t)}+1-t+2+2\sqrt{2(1-t)}+1-t}{1-t^2}\right)} \\
&= \sqrt{\frac{1}{32}(1-t)^{-1} + \frac{1}{64}\left(\frac{6-2t}{1-t^2}\right)} \\
&= \sqrt{\frac{1}{32}\left(\frac{1+t+3-t}{1-t^2}\right)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan ifadeleri eğrilik formülünde yerine yazdığımızda,

$$\kappa_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1-t^2}}$$

olur ve buradan da görülüyor ki eğrinin transformasyon sonrasında oluşan birinci eğriliği stabil kalmıştır. Şimdi eğrinin yeni konumunda torsiyon değerine bakılırsa;

Bunun için gereken karma çarpım hesaplanırsa,

$$(\beta'(t) \wedge \beta''(t), \beta'''(t)) = \left\langle \left( -\frac{1}{4\sqrt{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}, -\frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1-t}}{\sqrt{1-t^2}}\right), \frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1-t}}{\sqrt{1-t^2}}\right) \right), \left( -\frac{1}{8}(1+t)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{8\sqrt{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{8\sqrt{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}} \right) \right\rangle$$

olur ve ara işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{32\sqrt{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}(1+t)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{64\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1-t}}{\sqrt{1-t^2}}\right)(1-t)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{64\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1-t}}{\sqrt{1-t^2}}\right)(1-t)^{-\frac{3}{2}} \\
&= \frac{1}{32\sqrt{2}} \frac{1}{(1-t)^{\frac{1}{2}}(1+t)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{64\sqrt{2}} \left( \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1-t}-\sqrt{2}-\sqrt{1-t}}{\sqrt{1-t^2}(1-t)^{\frac{3}{2}}} \right) \\
&= \frac{1}{32\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{1-t}\sqrt{(1+t)^3}} - \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{(1-t)^3}} \right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{32\sqrt{2}} \left( \frac{1-t+1+t}{\sqrt{1-t^2}(1-t^2)} \right)$$

$$= \frac{1}{64\sqrt{2}} \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

olarak bulunur. Bulunan ifadeler torsiyon formülünde yerlerine yazılırsa,

$$\tau_2 = \frac{(\beta'(t), \beta''(t), \beta'''(t))}{\|\beta'(t) \wedge \beta''(t)\|^2}$$

$$= \frac{1}{16\sqrt{2}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{\left( \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \right)^2}$$

$$= \frac{1}{16\sqrt{2}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{8(1-t^2)}{1}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}$$

elde edilir. Görüldüğü üzere eğrinin yeni konumunda torsiyon değeri yine aynı kalmıştır. Sonuç olarak söyleyebiliriz ki eğrinin

$$\kappa_1 = \kappa_2 \quad \vee \quad \tau_1 = \tau_2$$

eşitlikleri sağlandığından verilen eğrinin transformasyon altında geometrik karakterizasyonu korunmuştur. Yani eğrinin sadece konumu değişmiş ancak geometrik yapısı stabil kalmıştır.

### 3.2 Transformasyon Altında Çember Eğrisi

**Teorem 3.2.1**  $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t, 0)$  parametrik denklemi ile verilen çember eğrisinin  $y$ -ekseni etrafında bir  $\theta$  açısı kadar döndürülerek  $\vec{d} = (m, n, p)$  vektörü kadar ötelenmesi sonucunda geometrik karakterizasyonu değişmez.

**İspat:** İlk adım olarak çember eğrisini başlangıç konumunda karakteristik olarak inceleyelim. Bunun için  $\alpha(t)$ 'nin birinci eğriliği ve torsiyonunu hesaplırsak;

Eğrinin  $\alpha'(t)$ ,  $\alpha''(t)$ ,  $\alpha'''(t)$  değerlerine baktığımızda;

$$\alpha'(t) = (-r \sin t, r \cos t, 0)$$

$$\alpha''(t) = (-r \cos t, -r \sin t, 0)$$

$$\alpha'''(t) = (r \sin t, -r \cos t, 0)$$

şeklinde bulunur. Buradan birinci türevin normu,

$$\begin{aligned} \|\alpha'(t)\| &= \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} \\ &= \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} \\ &= r \end{aligned}$$

olur ve buradan birinci eğriliği bulmak için kullanılacak ara elemanlardan  $\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)$  ifadesine bakıldığında ise,

$$\begin{aligned} \alpha'(t) \wedge \alpha''(t) &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -r \sin t & r \cos t & 0 \\ -r \cos t & -r \sin t & 0 \end{vmatrix} \\ &= (0, 0, r^2) \end{aligned}$$

ve bu vektörün normu,

$$\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\| = r^2$$

olarak elde edilir. Bulunan bu sonuçlar eğrilik formülünde yerine yazılırsa;

$$\kappa_1 = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{r^2}{r^3}$$

$$= \frac{1}{r}$$

olarak bulunur. Eğrinin torsiyonu için gereken bir diğer terim ise,

$$\begin{aligned} \langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle &= \langle (0, 0, r^2), (r \sin t, -r \cos t, 0) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan da eğrinin torsiyon değeri,

$$\tau_1 = \frac{0}{(r^2)^2} = 0$$

şeklinde çıkmaktadır. Çemberin ilk konumundaki eğriliği ve torsiyonu bu şekilde bulundu. Şimdi de  $\alpha(t)$ ' nin aşağıdaki dönüşüm sonrasında oluşan eğriliklerini hesaplayalım. Bu amaçla kullanılacak rotasyon;

$$A_p = \beta(t) = {}^A R_B . B_p + A_{p_{BORG}}$$

şeklinde olduğundan, verilenler yerlerine yazıldığında oluşan transformasyon matrisi:

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ n \\ p \end{bmatrix}$$

$$A_p = \beta(t) = (r \cos \theta \cos t + m, r \sin t + n, -r \sin \theta \cos t + p)$$

olarak bulunur. Bu dönüşüm matrisinde eğrilik ve torsiyon için gereken işlemler yapılırsa,  $\beta(t)$ ' nin türevi;

$$\beta'(t) = (-r \cos \theta \sin t, r \cos t, r \sin \theta \sin t)$$

şeklinde olup,  $\beta'(t)$ ' nin normu,

$$\|\beta'(t)\| = \sqrt{(-r \cos \theta \sin t)^2 + (r \cos t)^2 + (r \sin \theta \sin t)^2}$$

$$\begin{aligned}
\|\beta'(t)\| &= \sqrt{r^2 \cos^2 \theta \sin^2 t + r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 t} \\
&= r \sqrt{\sin^2 t (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \cos^2 t} \\
&= r \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} \\
&= r
\end{aligned}$$

olur ve  $\beta(t)$ 'nin diğer türevleri,

$$\beta''(t) = (-r \cos \theta \cos t, -r \sin t, r \sin \theta \cos t)$$

$$\beta'''(t) = (r \cos \theta \sin t, -r \cos t, -r \sin \theta \sin t)$$

şeklindedir.  $\beta'(t) \wedge \beta''(t)$  ise,

$$\beta'(t) \wedge \beta''(t) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -r \cos \theta \sin t & r \cos t & r \sin \theta \sin t \\ -r \cos \theta \cos t & -r \sin t & r \sin \theta \cos t \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= e_1 ((r \cos t)(r \sin \theta \cos t) - (-r \sin t)(r \sin \theta \sin t)) \\
&- e_2 ((-r \cos \theta \sin t)(r \sin \theta \cos t) - (-r \cos \theta \cos t)(r \sin \theta \sin t)) \\
&+ e_3 ((-r \cos \theta \sin t)(-r \sin t) - (-r \cos \theta \cos t)(r \cos t))
\end{aligned}$$

$$\beta'(t) \wedge \beta''(t) = e_1 (r^2 \sin \theta) - e_2 (0) + e_3 (r^2 \cos \theta)$$

$$\beta'(t) \wedge \beta''(t) = (r^2 \sin \theta, 0, r^2 \cos \theta)$$

olur ve  $\beta'(t) \wedge \beta''(t)$ 'nin normu da,

$$\|\beta'(t) \wedge \beta''(t)\| = \sqrt{r^4 \sin^2 \theta + r^4 \cos^2 \theta}$$

$$\|\beta'(t) \wedge \beta''(t)\| = r^2$$

şeklinde bulunur. Gereken diğer hesaplamalar yapılırsa,

$$\begin{aligned} (\beta'(t), \beta''(t), \beta'''(t)) &= \langle \beta'(t) \wedge \beta''(t), \beta'''(t) \rangle \\ &= \langle (r^2 \sin \theta, 0, r^2 \cos \theta), (r \cos \theta \sin t, -r \cos t, -r \sin \theta \sin t) \rangle \\ &= (r^3 \cos \theta \sin \theta \sin t - r^3 \cos \theta \sin \theta \sin t) = 0 \end{aligned}$$

şeklinde olur. Bulunan tüm değerler birinci eğrilik ve torsiyon formüllerinde yerlerine yazıldığında eğrinin transformasyon sonrası oluşan yeni karakterizasyonu bulunmuş olur. O halde formülde yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= \frac{\|\beta'(t) \wedge \beta''(t)\|}{\|\beta'(t)\|^3} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r} \\ \tau_2 &= \frac{(\beta'(t), \beta''(t), \beta'''(t))}{\|\beta'(t) \wedge \beta''(t)\|^2} = \frac{0}{r^4} = 0 \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Karşılaştırma yapılırsa  $\kappa_1 = \kappa_2$  ve  $\tau_1 = \tau_2$  olduğu görülür. Demek ki eğrinin belirli bir açı kadar döndürülmesi ve belirli bir vektör kadar ötelenmesi sonucunda eğrinin formunun stabil kaldığı görülmektedir. Bu da bize çember eğrisinin verilen sabit açı ve sabit vektör ile yapılan dönüşümlerde geometrik karakterizasyonunun değişmeyeceği bilgisine ulaştırır.

Şimdi bu bir özel açı ve vektör değerleri ile örneklendirilecektir.

**Örnek 3.2.1**  $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t, 0)$  parametrik denklemi ile verilen çemberin  $y$ -ekseni etrafında  $\theta = 30^\circ$  döndürülerek  $\vec{d} = (3, 5, 6)$  birim ötelenmesi sonucu geometrik karakterizasyonunu inceleyelim.

Problemin çözümündeki amaç dönüşüm sonucunda eğrinin yapısal formunun korunduğunu göstermek olduğu için öncelikle verilen çember eğrisinin karakterizasyon incelemesine bakalım. Bu amaçla eğrinin ilk durumdaki eğriliklerini bilmeliyiz.  $\kappa_1$  ve  $\tau_1$  değerleri Teorem 3.2.1'in ispatında şu şekilde

$$\kappa_1 = \frac{1}{r} \text{ ve } \tau_1 = 0$$

bulunmuştu. O halde çözüm için gerekli olan adımı,

$$\beta(t) = A_P = {}^A_B R \cdot B_P + A_{P_{ORG}}$$

transformasyonu ile oluşan eğri üzerinde inceleyerek devam edersek;

$$\beta(t) = \begin{bmatrix} \cos 30 & 0 & \sin 30 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin 30 & 0 & \cos 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\beta(t) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

bu transformasyon matrisi vektörel formda yazıldığında,

$$\beta(t) = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} r \cos t + 3, r \sin t + 5, -\frac{1}{2} r \cos t + 6 \right)$$

elde edilir.  $\beta(t)$  için  $\beta'(t)$  ve  $\|\beta'(t)\|$  hesaplanırsa,

$$\beta'(t) = \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} r \sin t, r \cos t, \frac{1}{2} r \sin t \right)$$

$$\begin{aligned} \|\beta'(t)\| &= \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} r \sin t\right)^2 + (r \cos t)^2 + \left(\frac{1}{2} r \sin t\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{3}{4} r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t + \frac{1}{4} r^2 \sin^2 t} \\ &= \sqrt{r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t} \\ &= r \end{aligned}$$

elde edilir.  $\beta(t)$  'nin diğer türevlerine bakıldığında,

$$\beta''(t) = \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} r \cos t, -r \sin t, \frac{1}{2} r \cos t \right)$$

$$\beta'''(t) = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} r \sin t, -r \cos t, -\frac{1}{2} r \sin t \right)$$

olup, birinci ve ikinci türevlerin vektörel çarpımları hesaplanırsa,

$$\beta'(t) \wedge \beta''(t) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} r \sin t & r \cos t & \frac{1}{2} r \sin t \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} r \cos t & -r \sin t & \frac{1}{2} r \cos t \end{vmatrix}$$

ifadesi düzenlenerek,

$$\begin{aligned} \beta'(t) \wedge \beta''(t) &= e_1 \left( (r \cos t) \left( \frac{1}{2} r \cos t \right) - (-r \sin t) \left( \frac{1}{2} r \sin t \right) \right) \\ &\quad - e_2 \left( \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} r \sin t \right) \left( \frac{1}{2} r \cos t \right) - \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} r \cos t \right) \left( \frac{1}{2} r \sin t \right) \right) \\ &\quad + e_3 \left( \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} r \sin t \right) (-r \sin t) - \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} r \cos t \right) (r \cos t) \right) \\ &= e_1 \left( \frac{1}{2} r^2 \cos^2 t + \frac{1}{2} r^2 \sin^2 t \right) - e_2 \left( -\frac{\sqrt{3}}{4} r^2 \sin t \cos t + \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 \sin t \cos t \right) + e_3 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} r^2 \sin^2 t + \frac{\sqrt{3}}{2} r^2 \cos^2 t \right) \\ &= e_1 \left( \frac{1}{2} r^2 \right) - e_2 (0) + e_3 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} r^2 \right) \\ &= \left( -\frac{1}{2} r^2, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} r^2 \right) \end{aligned}$$

olarak bulunur.  $\beta'(t) \wedge \beta''(t)$  teriminin normu ise,

$$\|\beta'(t) \wedge \beta''(t)\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}r^2\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r^2\right)^2}$$

$$\|\beta'(t) \wedge \beta''(t)\| = \sqrt{\frac{1}{4}r^4 + \frac{3}{4}r^4} = \sqrt{r^4}$$

$$\|\beta'(t) \wedge \beta''(t)\| = r^2$$

şeklinde elde edilir. Buradan gereken iç çarpımları bulunursa;

$$\langle \beta'(t) \wedge \beta''(t), \beta'''(t) \rangle = \left\langle \left( \frac{1}{2}r^2, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}r^2 \right), \left( \frac{\sqrt{3}}{2}r \sin t, -r \cos t, -\frac{1}{2}r \sin t \right) \right\rangle$$

$$\langle \beta'(t) \wedge \beta''(t), \beta'''(t) \rangle = \frac{\sqrt{3}}{4}r^3 \sin t + 0 - \frac{\sqrt{3}}{4}r^3 \sin t$$

$$\langle \beta'(t) \wedge \beta''(t), \beta'''(t) \rangle = 0$$

elde edilir. Bulunan sonuçlar eğrilik formülünde yerlerine yazılırsa,

$$\kappa_2 = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}$$

olur ve torsiyon formülünde yerine yazılırsa,

$$\tau_2 = \frac{0}{(r^2)^2} = 0$$

şeklinde olur. Bulduğumuz sonuçları karşılaştırdığımızda  $\kappa_1 = \kappa_2$  ve  $\tau_1 = \tau_2$  olduğu sonucuna ulaşmış oluruz. Bu da bize genel halde verilen çember eğrisi için ispatladığımız Teorem 3.2.1' i destekler niteliktedir.

Aynı şekilde genel formda verilen bir elips için benzer teoremi verelim.

### 3.3 Transformasyon Altında Elips Eğrisi

**Teorem 3.3.1**  $\alpha(t) = (r_1 \cos t, r_2 \sin t, 0)$  denkleminin temsil ettiği elips eğrisinin  $y$  - eksenini etrafında bir  $\theta$  açısı kadar döndürülerek  $\vec{d} = (k, l, m)$  vektörü kadar ötelemesi sonucunda geometrik karakterizasyonu değişmez.

**İspat:** İlk aşama eğrinin karakterizasyon incelemesi yaparak başlayalım. Bunun için de  $\alpha(t)$ ' nin gereken türevleri alınırsa:

$$\alpha(t) = (r_1 \cos t, r_2 \sin t, 0)$$

$$\alpha'(t) = (-r_1 \sin t, r_2 \cos t, 0)$$

$$\alpha''(t) = (-r_1 \cos t, -r_2 \sin t, 0)$$

$$\alpha'''(t) = (r_1 \sin t, -r_2 \cos t, 0)$$

olur ve  $\alpha'(t)$ ' nin normu da,

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{r_1^2 \sin^2 t + r_2^2 \cos^2 t}$$

şeklinde elde edilir.  $\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)$  terimi de,

$$\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -r_1 \sin t & r_2 \cos t & 0 \\ -r_1 \cos t & -r_2 \sin t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= e_1(0-0) - e_2(0-0) + e_3(r_1 r_2 \sin^2 t + r_1 r_2 \cos^2 t)$$

$$\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = (0, 0, r_1 r_2)$$

şeklinde olur ve  $\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)$ ' nin normuna bakıldığında,

$$\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\| = \sqrt{r_1^2 r_2^2} = r_1 r_2$$

elde edilir. İç çarpımları ise;

$$\langle \alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle = \langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle$$

$$= \langle (0, 0, r_1 r_2), (r_1 \sin t, -r_2 \cos t, 0) \rangle = 0$$

olarak bulunmuş olur. Şimdi de bulunan değerler  $\kappa_1$  ve  $\tau_1$  formülünde yerlerine yazılırsa,

$$\kappa_1 = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{r_1 r_2}{(\sqrt{r_1^2 \sin^2 t + r_2^2 \cos^2 t})^3}$$

ve

$$\tau_1 = \frac{(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2} = \frac{0}{r_1^2 r_2^2} = 0$$

şeklinde elde edilir. Burada eğrimiz düzlemsel olduğu için  $\tau$  sıfırdır. Teorem 3.3.1'e göre ilk durumdaki geometrik karakterizasyonu bu şekilde bulundu. Şimdi bu eğriye dönme ve öteleme fonksiyonu uygulanırsa;

$$A_p = {}^A_B R \cdot B_p + A_{P_{BORG}}$$

$$A_p = \beta(t) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \cos t \\ r_2 \sin t \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ l \\ m \end{bmatrix}$$

$\beta(t)$  burada  $\alpha(t)$ ' nin transformasyon altında ulaştığı konumdur. O halde,

$$\beta(t) = (r_1 \cos \theta \cos t + k, r_2 \sin t + l, -r_1 \sin \theta \cos t + m)$$

koordinatları elde edilir. Buradan  $\beta(t)$  ' nin dönüşüm sonrası türevlerine bakılırsa,

$$\beta'(t) = (-r_1 \cos \theta \sin t, r_2 \cos t, r_1 \sin \theta \sin t)$$

$$\beta''(t) = (-r_1 \cos \theta \cos t, -r_2 \sin t, r_1 \sin \theta \cos t)$$

$$\beta'''(t) = (r_1 \cos \theta \sin t, -r_2 \cos t, -r_1 \sin \theta \sin t)$$

olur ve birinci türevin normu da,

$$\|\beta'(t)\| = \sqrt{r_1^2 \cos^2 \theta \sin^2 t + r_2^2 \cos^2 t + r_1^2 \sin^2 \theta \sin^2 t}$$

$$\|\beta'(t)\| = \sqrt{r_1^2 \sin^2 t + r_2^2 \cos^2 t}$$

şeklinde elde edilir ve dikkat edilirse  $\|\alpha'(t)\| = \|\beta'(t)\|$  olduğundan eğrinin dönüşüm öncesi ve sonrasındaki birinci türevlerinin normları değişmemiştir.

Dönüşüm sonrası vektörel çarpımları,

$$\beta'(t) \wedge \beta''(t) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -r_1 \cos \theta \sin t & r_2 \cos t & r_1 \sin \theta \sin t \\ -r_1 \cos \theta \cos t & -r_2 \sin t & r_1 \sin \theta \cos t \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \beta'(t) \wedge \beta''(t) &= e_1((r_2 \cos t)(r_1 \sin \theta \cos t) - (-r_2 \sin t)(r_1 \sin \theta \sin t)) \\ &\quad - e_2((-r_1 \cos \theta \sin t)(r_1 \sin \theta \cos t) - (-r_1 \cos \theta \cos t)(r_1 \sin \theta \sin t)) \end{aligned}$$

düzenlenerek gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned} \beta'(t) \wedge \beta''(t) &= e_1(r_1 r_2 \sin \theta \cos^2 t + r_1 r_2 \sin \theta \sin^2 t) \\ &\quad - e_2(-r_1^2 \sin \theta \cos \theta \sin t \cos t + r_1^2 \sin \theta \cos \theta \sin t \cos t) \\ &\quad + e_3(r_1 r_2 \cos \theta \sin^2 t + r_1 r_2 \cos \theta \cos^2 t) \end{aligned}$$

$$\beta'(t) \wedge \beta''(t) = e_1(r_1 r_2 \sin \theta) - e_2(0) + e_3(r_1 r_2 \cos \theta)$$

$$\beta'(t) \wedge \beta''(t) = (r_1 r_2 \sin \theta, 0, r_1 r_2 \cos \theta)$$

olarak elde edilir. Bulduğumuz  $\beta'(t) \wedge \beta''(t)$  teriminin normu ise,

$$\begin{aligned} \|\beta'(t) \wedge \beta''(t)\| &= \sqrt{(r_1 r_2 \sin \theta)^2 + 0^2 + (r_1 r_2 \cos \theta)^2} \\ &= \sqrt{r_1^2 r_2^2 \sin^2 \theta + r_1^2 r_2^2 \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{r_1^2 r_2^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} \\ &= \sqrt{r_1^2 r_2^2} = |r_1 r_2| \end{aligned}$$

şeklinde olur. O halde eğrilik karşılaştırması yapılırsa;

$$\kappa_2 = \frac{r_1 r_2}{\left(\sqrt{r_1^2 \sin^2 t + r_2^2 \cos^2 t}\right)^3}$$

olur ve buradan da  $\kappa_1 = \kappa_2$  olduğu görülür. Torsiyon için iç çarpımları gerekli olduğundan,

$$\begin{aligned}
\langle \beta'(t) \wedge \beta''(t), \beta'''(t) \rangle &= \langle (r_1 r_2 \sin \theta, 0, r_1 r_2 \cos \theta), (r_1 \cos \theta \sin t, -r_2 \cos t, -r_1 \sin \theta \sin t) \rangle \\
&= r_1^2 r_2 \sin \theta \cos \theta \sin t - r_1^2 r_2 \cos \theta \sin \theta \sin t \\
&= 0
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buna göre torsiyonu,

$$\tau_2 = \frac{0}{r_1^2 r_2^2} = 0$$

olup torsiyon karşılaştırması yapılırsa  $\tau_1 = \tau_2$  olarak bulunur ki bu da torsiyon değerinin her iki durumda da aynı kaldığını gösterir.

Sonuç olarak şunu söyleyebiliriz ki elipsin herhangi bir açı kadar dönme ve herhangi bir vektör kadar öteleme sonucunda geometrik karakterizasyonu korunmuş ve konumu haricinde yapısal formunun stabilitesi gösterilmiştir.

Şimdi bir açı ve bir vektör ile ispat örneklendirilecektir.

**Örnek 3.3.1**  $\alpha(t) = (r_1 \cos t, r_2 \sin t, 0)$  elipsinin  $z$ -ekseninde  $\theta = 45^\circ$  döndürülerek  $\vec{d} = (2, 1, 5)$  vektörü kadar ötelenmesi sonucu geometrik karakterizasyonunu inceleyelim.

Problemin çözümü için gerekli olan  $\alpha(t) = (r_1 \cos t, r_2 \sin t, 0)$  elipsinin  $\kappa_1$  ve  $\tau_1$  değerleri Teorem 3.3.1 'in ispatında,

$$\kappa_1 = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{r_1 r_2}{(\sqrt{r_1^2 \sin^2 t + r_2^2 \cos^2 t})^3}$$

ve

$$\tau_1 = \frac{(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2} = \frac{0}{r_1^2 r_2^2} = 0$$

şeklinde bulunmuştu. O halde çözüm için gerekli olan adımı,

$$\beta(t) = A_p = {}^A_B R \cdot B_p + A_{p_{BORG}}$$

transformasyonu ile oluşan eğri üzerinde incelenirse;

$$\beta(t) = \begin{bmatrix} \cos 45 & -\sin 45 & 0 \\ \sin 45 & \cos 45 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \cos t \\ r_2 \sin t \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$\beta(t)$  eğrisinde açı değerleri yerlerine yazılıp oluşan matris düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned} \beta(t) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \cos t \\ r_2 \sin t \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} r_1 \cos t - \frac{1}{\sqrt{2}} r_2 \sin t + 2, \frac{1}{\sqrt{2}} r_1 \cos t + \frac{1}{\sqrt{2}} r_2 \sin t + 1, 5 \right] \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buradan  $\beta(t)$ 'nin türevleri,

$$\beta'(t) = \left[ -\frac{1}{\sqrt{2}} r_1 \sin t - \frac{1}{\sqrt{2}} r_2 \cos t, -\frac{1}{\sqrt{2}} r_1 \sin t + \frac{1}{\sqrt{2}} r_2 \cos t, 0 \right]$$

$$\beta''(t) = \left[ -\frac{1}{\sqrt{2}} r_1 \cos t + \frac{1}{\sqrt{2}} r_2 \sin t, -\frac{1}{\sqrt{2}} r_1 \cos t - \frac{1}{\sqrt{2}} r_2 \sin t, 0 \right]$$

$$\beta'''(t) = \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} r_1 \sin t + \frac{1}{\sqrt{2}} r_2 \cos t, \frac{1}{\sqrt{2}} r_1 \sin t - \frac{1}{\sqrt{2}} r_2 \cos t, 0 \right]$$

olarak bulunur ve  $\beta'(t)$ 'nin normu,

$$\begin{aligned} \|\beta'(t)\| &= \sqrt{\left( -\frac{1}{\sqrt{2}} r_1 \sin t - \frac{1}{\sqrt{2}} r_2 \cos t \right)^2 + \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} r_1 \sin t + \frac{1}{\sqrt{2}} r_2 \cos t \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} r_1^2 \sin^2 t + 2 \frac{1}{\sqrt{2}} r_1 \sin t \frac{1}{\sqrt{2}} r_2 \cos t + \frac{1}{2} r_2^2 \cos^2 t + \frac{1}{2} r_1^2 \sin^2 t - 2 \frac{1}{\sqrt{2}} r_1 \sin t \frac{1}{\sqrt{2}} r_2 \cos t + \frac{1}{2} r_2^2 \cos^2 t} \\ &= \sqrt{r_1^2 \sin^2 t + r_2^2 \cos^2 t} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Ara işlemlerle devam edildiğinde

$$\begin{aligned}
\beta'(t) \wedge \beta''(t) &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}r_1 \sin t - \frac{1}{\sqrt{2}}r_2 \cos t & -\frac{1}{\sqrt{2}}r_1 \sin t + \frac{1}{\sqrt{2}}r_2 \cos t & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}r_1 \cos t + \frac{1}{\sqrt{2}}r_2 \sin t & -\frac{1}{\sqrt{2}}r_1 \cos t - \frac{1}{\sqrt{2}}r_2 \sin t & 0 \end{vmatrix} \\
&= \left[ 0, 0, \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}r_1 \sin t - \frac{1}{\sqrt{2}}r_2 \cos t \right) \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}r_1 \cos t - \frac{1}{\sqrt{2}}r_2 \sin t \right) - \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}r_1 \cos t + \frac{1}{\sqrt{2}}r_2 \sin t \right) \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}r_1 \sin t + \frac{1}{\sqrt{2}}r_2 \cos t \right) \right] \\
&= \left[ 0, 0, \frac{1}{2}r_1^2 \sin t \cos t + \frac{1}{2}r_1r_2 \sin^2 t + \frac{1}{2}r_1r_2 \cos^2 t + \frac{1}{2}r_2^2 \cos t \sin t - \left( \frac{1}{2}r_1^2 \cos t \sin t - \frac{1}{2}r_1r_2 \cos^2 t - \frac{1}{2}r_1r_2 \sin^2 t + \frac{1}{2}r_2^2 \cos t \sin t \right) \right] \\
&= \left[ 0, 0, \frac{1}{2} \sin t \cos t (r_1^2 + r_2^2) + \frac{1}{2}r_1r_2 (\sin^2 t + \cos^2 t) - \left( \frac{1}{2} \cos t \sin t (r_1^2 + r_2^2) - \frac{1}{2}r_1r_2 (\cos^2 t + \sin^2 t) \right) \right] \\
\beta'(t) \wedge \beta''(t) &= [0, 0, r_1r_2]
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buradan  $\beta'(t) \wedge \beta''(t)$  teriminin normu,

$$\|\beta'(t) \wedge \beta''(t)\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + r_1^2 r_2^2} = |r_1 r_2|$$

şeklinde bulunur. İç çarpımlarına bakıldığında ise,

$$\begin{aligned}
(\beta'(t), \beta''(t), \beta'''(t)) &= \langle \beta'(t) \wedge \beta''(t), \beta'''(t) \rangle \\
&= \left\langle (0, 0, r_1 r_2), \left( \frac{1}{\sqrt{2}}r_1 \sin t + \frac{1}{\sqrt{2}}r_2 \cos t, \frac{1}{\sqrt{2}}r_1 \sin t - \frac{1}{\sqrt{2}}r_2 \cos t, 0 \right) \right\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

olarak elde edilir ve son olarak  $\kappa_2$  ve  $\tau_2$  için bulunan ifadeler formülde yerine yazılırsa;

$$\kappa_2 = \frac{\|\beta'(t) \wedge \beta''(t)\|}{\|\beta'(t)\|^3} = \frac{r_1 r_2}{\left( \sqrt{r_1^2 \sin^2 t + r_2^2 \cos^2 t} \right)^3}$$

ve

$$\tau_2 = \frac{(\beta'(t), \beta''(t), \beta'''(t))}{\|\beta'(t) \wedge \beta''(t)\|^2} = \frac{0}{r_1^2 r_2^2} = 0$$

olarak elde edilir. Buradan kıyaslama yapıldığında  $\kappa_1 = \kappa_2$  olduğu aşikârdır. O halde elips eğrisinde tüm genel durumlar için sağlandığını ispatladığımız Teorem 3.3.1'in

özel açı ve vektör değerleri için de sağlandığı görülmektedir. Yani verilen bir  $\alpha(t)$  elips eğrisinin  $z$ -ekseninde  $\theta = 45^\circ$  döndürülmesi ve  $\vec{d} = (2,1,5)$  vektörü kadar ötelenmesi sonucu geometrik karakterizasyonu değişmemiştir.

Aynı şekilde genel formda verilen bir parabol için benzer teoremi verelim.

### 3.4 Transformasyon Altında Parabol Eğrisi

**Teorem 3.4.1**  $\alpha(t) = (t, t^2, 0)$  parametrik denkleminin verilen parabol eğrisinin  $x$ -ekseni etrafında bir  $\theta$  açısı kadar döndürülerek  $\vec{d} = (k, l, m)$  vektörü kadar ötelenmesi sonucunda geometrik karakterizasyonu değişmez.

**İspat:** Öncelikle parabol eğrisini başlangıç konumunda karakteristik olarak inceleyelim. Bunun için  $\alpha(t)$ 'nin birinci ve ikinci eğrilikleri hesaplanırsa:

$\alpha(t) = (t, t^2, 0)$  denkleminde  $\alpha'(t)$ ,  $\alpha''(t)$  ve  $\alpha'''(t)$  değerleri

$$\alpha'(t) = (1, 2t, 0)$$

$$\alpha''(t) = (0, 2, 0)$$

$$\alpha'''(t) = (0, 0, 0)$$

olarak bulunur.  $\alpha'(t)$ 'nin normu ise,

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2}$$

olur ve  $\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)$  terimi,

$$\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 2t & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = e_1[0] - e_2[0] + e_3[2]$$

$$\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = (0, 0, 2)$$

şeklinde elde edilir ve  $\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)$  normuna bakılırsa,

$$\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2} = 2$$

olarak bulunur. Şimdi torsiyonu bulmak için gereken terimler hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} \langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle &= \langle (0, 0, 2), (0, 0, 0) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

olmaktadır. Bulunan ifadeler formülde yerlerine yazıldığında  $\kappa_1$  ve  $\tau_1$  değerleri,

$$\kappa_1 = \frac{2}{(\sqrt{1+4t^2})^3}$$

ve

$$\tau_1 = \frac{0}{4} = 0$$

şeklinde bulunur. Parabol eğrisinin başlangıç konumuna göre karakteristiği bu şekilde bulundu. Şimdi de  $\alpha(t)$ ' nin aşağıdaki dönüşüm sonrasında oluşan eğrilikleri hesaplanırsa;

Bu amaçla  $\alpha(t) = (t, t^2, 0)$  eğrisinin  $x$ -ekseni etrafında  $\theta$  açısı kadar dönme ve  $\vec{d} = (k, l, m)$  vektörü kadar ötelemesi için kullanacağımız rotasyon:

$$\beta(t) = A_P = {}_B^A R \cdot B_P + A_{P_{BORG}}$$

şeklinde olduğundan, verilenler yerlerine yazıldığında oluşan transformasyon matrisi:

$$\beta(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ t^2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ l \\ m \end{bmatrix}$$

$$\beta(t) = (t+k, t^2 \cos \theta + l, t^2 \sin \theta + m)$$

olarak bulunur. Burada  $\beta(t)$  verilen  $\alpha(t)$  eğrisinin transformasyon sonrası konum vektörüdür. Yeni konuma göre birinci ve ikinci eğrilikleri hesaplamak için gereken işlemler yapılırsa,  $\beta(t)$ 'nin türevleri,

$$\beta'(t) = (1, 2t \cos \theta, 2t \sin \theta)$$

$$\beta''(t) = (0, 2 \cos \theta, 2 \sin \theta)$$

$$\beta'''(t) = (0, 0, 0)$$

şeklinde olup birinci türevin normu:

$$\|\beta'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2 \cos^2 \theta + 4t^2 \sin^2 \theta}$$

$$\|\beta'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2}$$

olarak bulunmuş olur. Şimdi gereken vektörel çarpım hesaplanırsa,

$$\beta'(t) \wedge \beta''(t) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 2t \cos \theta & 2t \sin \theta \\ 0 & 2 \cos \theta & 2 \sin \theta \end{vmatrix}$$

$$= e_1 [4t \cos \theta \sin \theta - 4t \cos \theta \sin \theta] - e_2 [2 \sin \theta] + e_3 [2 \cos \theta]$$

$$= (0, -2 \sin \theta, 2 \cos \theta)$$

elde edilir ve bu teriminin normu,

$$\|\beta'(t) \wedge \beta''(t)\| = \sqrt{4 \sin^2 \theta + 4 \cos^2 \theta} = 2$$

şeklinde olur. Gerekli olan iç çarpım işlemleri ise,

$$\langle \beta'(t) \wedge \beta''(t), \beta'''(t) \rangle = \langle (0, -2 \sin \theta, 2 \cos \theta), (0, 0, 0) \rangle$$

$$= 0$$

olarak elde edilir. Buradan bulunan terimler parabol eğrisinin dönüşüm sonrası birinci ve ikinci eğriliği formülünde yerlerine yazılırsa  $\kappa_2$  ve  $\tau_2$  değerleri,

$$\kappa_2 = \frac{2}{(\sqrt{1 + 4t^2})^3}$$

ve

$$\tau_2 = \frac{0}{4} = 0$$

şeklinde bulunur. Karşılaştırma yapıldığında  $\alpha(t) = (t, t^2, 0)$  parabol eğrisinin  $\kappa_2$  ve  $\tau_2$  değerleri için  $\kappa_1 = \kappa_2$  ve  $\tau_1 = \tau_2$  olduğunu söyleyebiliriz. Bu da bize benzer şekilde bir parabol eğrisinin alınan herhangi bir açı ve herhangi bir öteleme vektörü için transformasyon altında karakterinin değişmediği sonucuna ulaştırır.



## BÖLÜM 4

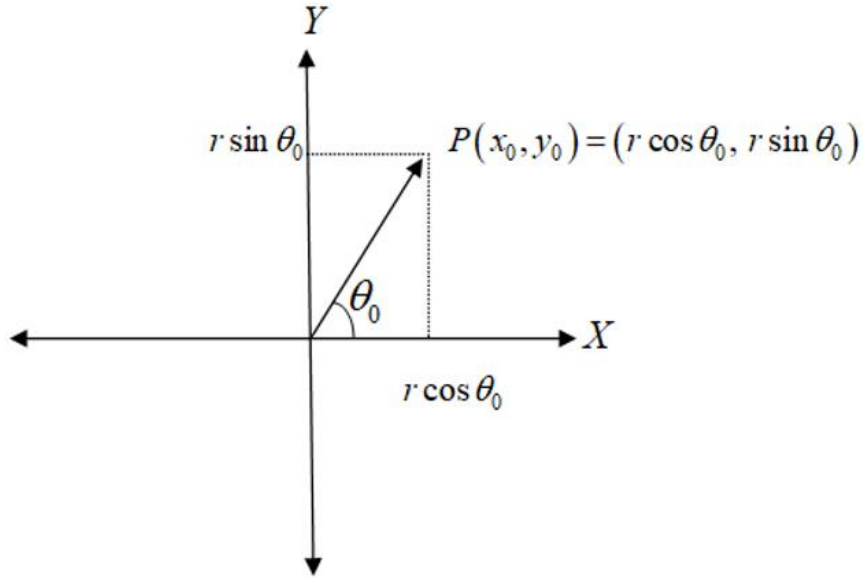
### YÖRÜNGESİ ELİPS OLAN DÖNÜŞÜM MATRİSİ

Bu bölümde, kinematik uzayda özel bir dönüşüm matrisinin incelenmesine odaklanılmaktadır. Bu matris, belirli bir  $P$  noktasının yörüngesini eliptik bir formda tanımlama yeteneğine sahip olup, farklı parametreler altında hangi eğrilere karşılık geldiği uygulamalı olarak ele alınacaktır.

**Teorem 4.1**  $M = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & d_1 \\ \sin \theta & \cos \theta & d_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  matrisi,  $P(x_0, y_0) = (r \cos \theta_0, r \sin \theta_0)$

noktasına etkisi  $E: \alpha(\varphi) = (a \cos \varphi, b \sin \varphi, 1)$  elipsi olan bir transformasyon matrisidir. Burada  $\theta_0$ ;  $\vec{P}$  vektörünün  $x$ -ekseni ile yaptığı açı,  $\varphi = \theta_0 + \theta$  ve  $0 < \theta \leq 2\pi$ ,  $\theta_0 < \varphi \leq 2\pi + \theta_0$  şeklindedir.

**İspat:**  $P$  noktasının konum vektörü aşağıdaki şekilde verilsin:



**Şekil 4.1** Bir noktanın koordinat sisteminde gösterilmesi.

Burada,  $r = \|P\|$  olduğu aşikârdır. İspata geçmeden önce,  $P$  noktasına etkisi  $E: \alpha(\varphi) = \alpha(\theta_0 + \theta) = (a \cos(\theta_0 + \theta), b \sin(\theta_0 + \theta), 1)$  elips eğrisi olan  $M$  matrisi ile arasında;

$$M.P = E$$

bağıntısı olduğunu belirtelim. Burada  $M$  matrisi  $z$ -ekseni etrafında  $\theta^\circ$  dönme ( $0 < \theta \leq 2\pi$ ) ve  $\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$  vektörü kadar öteleme sağlayan matristir.

Bu eşitlikten  $d_1$  ve  $d_2$  değerleri aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & d_1 \\ \sin \theta & \cos \theta & d_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos \theta_0 \\ r \sin \theta_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos(\theta_0 + \theta) \\ b \sin(\theta_0 + \theta) \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$r \cos \theta_0 \cos \theta - r \sin \theta_0 \sin \theta + d_1 = a \cos(\theta_0 + \theta)$$

$$r \cos(\theta_0 + \theta) + d_1 = a \cos(\theta_0 + \theta)$$

$$d_1 = (a - r) \cos(\theta_0 + \theta)$$

$$r \cos \theta_0 \sin \theta + r \sin \theta_0 \cos \theta + d_2 = b \sin(\theta_0 + \theta)$$

$$r \sin(\theta_0 + \theta) + d_2 = b \sin(\theta_0 + \theta)$$

$$d_2 = (b - r) \sin(\theta_0 + \theta).$$

Elde edilen  $d_1$  ve  $d_2$  değerleri yerine yazılırsa  $M$  matrisi;

$$M = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & (a - r) \cos(\theta_0 + \theta) \\ \sin \theta & \cos \theta & (b - r) \sin(\theta_0 + \theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Buradan  $M.P = E$  olduğu gösterilirse;

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & (a - r) \cos(\theta_0 + \theta) \\ \sin \theta & \cos \theta & (b - r) \sin(\theta_0 + \theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos \theta_0 \\ r \sin \theta_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos(\theta_0 + \theta) \\ b \sin(\theta_0 + \theta) \\ 1 \end{bmatrix}$$

ifadesinde soldaki matrisler çarpılırsa,

$$\begin{aligned} & (r \cos \theta \cos \theta_0 - r \sin \theta \sin \theta_0 + (a-r) \cos(\theta_0 + \theta), \\ & r \sin \theta \cos \theta_0 + r \cos \theta \sin \theta_0 + (b-r) \sin(\theta_0 + \theta), 1) \end{aligned}$$

olur ve buradan toplam fark formülleri gereği

$$r \cos \theta \cos \theta_0 - r \sin \theta \sin \theta_0 = r \cos(\theta_0 + \theta)$$

$$r \sin \theta \cos \theta_0 + r \cos \theta \sin \theta_0 = r \sin(\theta_0 + \theta)$$

ifadeleri yerlerine yazılırsa,

$$r \cos \theta \cos \theta_0 - r \sin \theta \sin \theta_0 + (a-r) \cos(\theta_0 + \theta) = a \cos(\theta_0 + \theta)$$

$$r \sin \theta \cos \theta_0 + r \cos \theta \sin \theta_0 + (b-r) \sin(\theta_0 + \theta) = b \sin(\theta_0 + \theta)$$

olur. Böylece ispat tamamlanmış olur. Yani,  $M \cdot P = E$  eşitliği sağlanır.

Şimdi ise verilen noktanın bazı özel durumları incelenirse:

i. Verilen nokta özel olarak  $x$ -ekseni üzerinde alınırsa yani  $a = r$  olarak seçilirse  $\theta_0 = 0$  olduğu aşikardır. O halde koordinatları

$$P = \begin{bmatrix} a \cos(\theta_0) \\ a \sin(\theta_0) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$(a, 0)$  olarak elde edilir ve  $M$  matrisi de özel olarak,

$$M = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & (b-a) \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Buradan  $M \cdot P = E$  eşitliğinin sağlandığı kontrol edilirse, yani;

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & (b-a) \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos \theta \\ b \sin \theta \\ 1 \end{bmatrix}$$

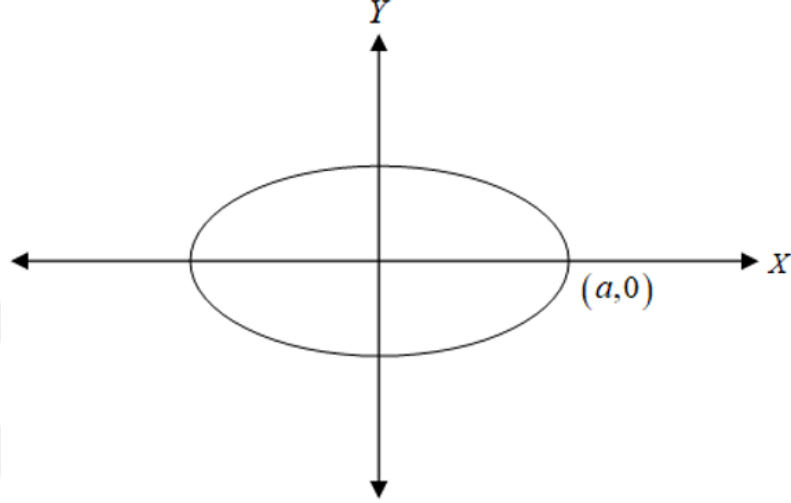
eşitliğinin sağlandığını görelim. Burada matris çarpımından,

$$= (a \cos \theta, a \sin \theta + (b-a) \sin \theta, 1)$$

$$= (a \cos \theta, a \sin \theta + b \sin \theta - a \sin \theta, 1)$$

$$= (a \cos \theta, b \sin \theta, 1)$$

sonucuna ulaşıldığı görülür ki bu da  $a = r$  özel durumu için elde edilen elips eğrisinin denklemdir. Burada  $\varphi = \theta$  ve  $0 < \theta \leq 2\pi$  şeklindedir.



Şekil 4.2  $(a,0)$  noktasından geçen elipsin gösterilmesi.

ii. Verilen nokta özel olarak  $y$ -ekseni üzerinde alınırsa yani  $b = r$  olarak seçilirse  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  olur. O halde koordinatları

$$P = \begin{bmatrix} a \cos(\theta_0) \\ a \sin(\theta_0) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 1 \end{bmatrix}$$

$(0,b)$  olarak ve yörüngesi elips olan matris

$$M = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & (a-b)\cos(\theta_0 + \theta) \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Buradan  $M.P = E$  eşitliğinin sağlandığı kontrol edilirse; Matris çarpımından,

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & (a-b)\cos(\theta_0 + \theta) \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \sin \theta \\ b \cos \theta \\ 1 \end{bmatrix}$$

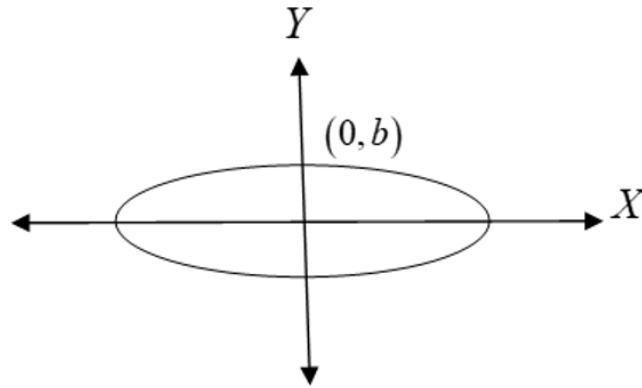
elde edilir. Burada  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  olduğu göz önüne alınarak bazı düzenlemeler yapılırsa

$$E_\theta = \begin{bmatrix} -a \sin \theta \\ b \cos \theta \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos(\frac{\pi}{2} + \theta) \\ b \sin(\frac{\pi}{2} + \theta) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos(\theta_0 + \theta) \\ b \sin(\theta_0 + \theta) \\ 1 \end{bmatrix}$$

eşitliğine ulaşılır ki bu da istenen sonuçtur. Yani  $b = r$  özel durumu için

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & (a-b)\cos(\theta_0 + \theta) \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos(\frac{\pi}{2} + \theta) \\ b \sin(\frac{\pi}{2} + \theta) \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde elips eğrisinin elde edildiği görülür. Burada  $\varphi = \frac{\pi}{2} + \theta$  ve  $0 < \theta \leq 2\pi$  şeklindedir.



Şekil 4.3  $(0, b)$  noktasından geçen elipsin gösterilmesi.

iii.  $a = b = r$  ise; yani  $P = (r \cos \theta_0, r \sin \theta_0)$  olup

$$M = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

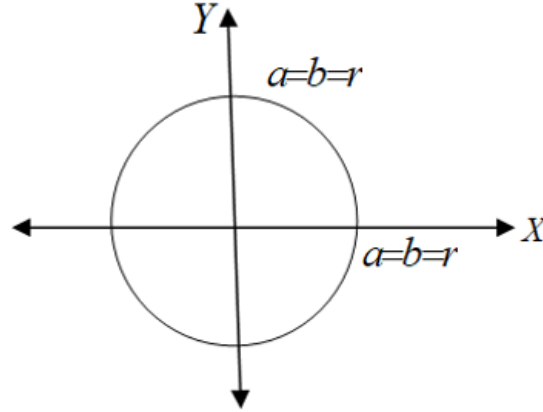
elde edilir. Buradan

$$MP = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos \theta_0 \\ r \sin \theta_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos(\theta_0 + \theta) \\ r \sin(\theta_0 + \theta) \\ 1 \end{bmatrix}$$

sonucunda

$$E_\theta = \begin{bmatrix} r \cos(\theta_0 + \theta) \\ r \sin(\theta_0 + \theta) \\ 1 \end{bmatrix}$$

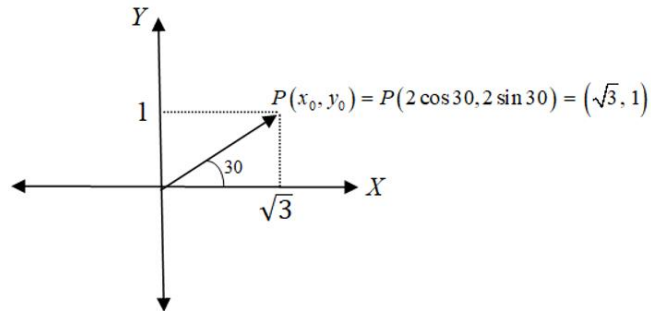
çember eğrisinin elde edildiği görülür.



Şekil 4.4 Çemberin koordinat sisteminde gösterilmesi.

şeklinde bir çember eğrisi oluşturur.

#### Örnek 4.1



Şekil 4.5 Bir P noktasının koordinat sisteminde gösterilmesi.

$P(\sqrt{3}, 1)$  noktası için uygulama yapılırsa,  $MP$  matrisi;

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & (a-2)\cos\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right) \\ \sin \theta & \cos \theta & (b-2)\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\cos\frac{\pi}{6} \\ 2\sin\frac{\pi}{6} \\ 1 \end{bmatrix} = E_\theta$$

$$2\cos\frac{\pi}{6}\cos\theta - 2\sin\frac{\pi}{6}\sin\theta + (a-2)\cos\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right) + a\cos\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)$$

$$= a\cos\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)$$

$$2\cos\frac{\pi}{6}\sin\theta + 2\sin\frac{\pi}{6}\cos\theta + (b-2)\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)$$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right) + b\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)$$

$$= b\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)$$

elde edilir. Buradan istenilen elips;

$$E_\theta = \begin{bmatrix} a\cos\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right) \\ b\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right) \\ 1 \end{bmatrix} \text{ olarak bulunur.}$$

Burada  $\varphi = \frac{\pi}{6} + \theta$  ve  $0 < \theta \leq 2\pi$ ,  $\frac{\pi}{6} < \varphi \leq 2\pi + \frac{\pi}{6}$  için

$$E_\varphi = \begin{bmatrix} a\cos\varphi \\ b\sin\varphi \\ 1 \end{bmatrix} \text{ şeklinde elips yörüngesi elde edilir.}$$

Burada  $a$  ve  $b$  arasında  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ilişkisi olup  $(x, y) = (r \cos \theta_0, r \sin \theta_0)$  olduğu göz önüne alınarak

$$\frac{\cos^2 \theta_0}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta_0}{b^2} = \frac{1}{r^2}$$

eşitliğini sağlayan tüm  $a$  ve  $b$  değerleri seçilebilir.

Yukarıdaki örnekte  $(x, y) = (r \cos \theta_0, r \sin \theta_0) = (2 \cos \frac{\pi}{6}, 2 \sin \frac{\pi}{6})$  şeklinde olup  $r = 2$

ve  $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$  olduğundan,

$$\frac{\cos^2 \frac{\pi}{6}}{a^2} + \frac{\sin^2 \frac{\pi}{6}}{b^2} = \frac{1}{2^2}$$

eşitliğinde verilen değerler yerine yazılıp düzenlendiğinde,  $a$  ve  $b$  için

$$\frac{3}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$$

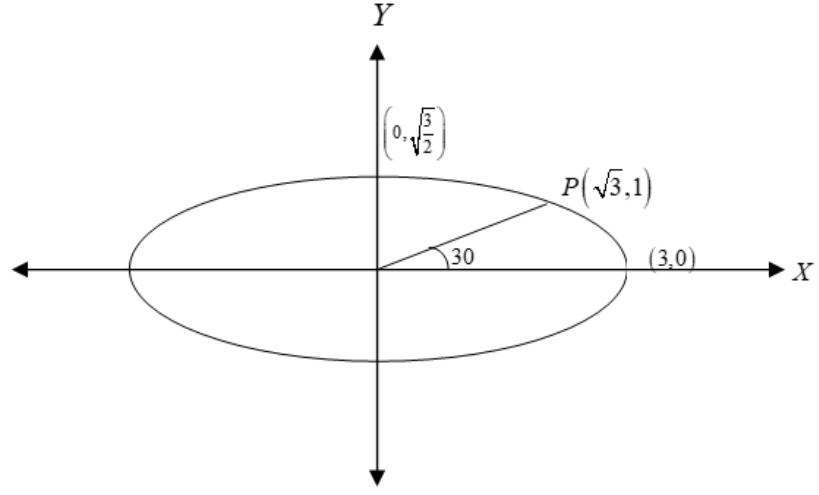
bağıntısı elde edilir. Özel olarak  $a = 3$  seçilirse,  $(\sqrt{3}, 1)$  ve  $(3, 0)$  noktalarından geçen elips için  $b = \sqrt{\frac{3}{2}}$  olarak bulunur. Dolayısıyla,

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & (3-2)\cos\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right) \\ \sin \theta & \cos \theta & \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 2\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \cos \frac{\pi}{6} \\ 2 \sin \frac{\pi}{6} \\ 1 \end{bmatrix} = E_\theta$$

eşitliğini veren  $E_\varphi$  elipsi,  $\frac{\pi}{6} < \varphi \leq 2\pi + \frac{\pi}{6}$  için

$$E_\varphi = \begin{bmatrix} 3 \cos \varphi \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \sin \varphi \\ 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.



**Şekil 4.6** Bir P noktasından geçen elipsin gösterilmesi.

## **BÖLÜM 5**

### **TARTIŞMA VE SONUÇ**

Bu tez çalışması, odağında iki temel unsur bulundu. Birincisi 3. bölümde yer alan kinematik analizin temel taşlarından olan dönme ve öteleme hareketlerini içeren katı cisim dönüşümleri altında, helis, çember, elips ve parabol gibi özel eğrilerin geometrik karakterizasyonlarının stabilitesini ortaya koyarak önemli bir teorik çerçeve sundu. Diferansiyel geometri prensipleri ve eğrilerin parametrik temsilleri kullanılarak yapılan analizler neticesinde, bu eğrilerin eğrilik ve burulma gibi temel tanımlayıcı özelliklerinin, uygulanan transformasyonlar altında korunduğu matematiksel olarak kanıtlandı. Bu kritik bulgu, söz konusu eğrilerin içsel geometrik yapılarının, kinematik hareketler sonucu uzaydaki konum ve yönelimleri değişse dahi, bozulmadan sabit kaldığını ve bunun da özellikle kinematik modelleme ve yörünge analizlerinde öngörülebilirlik sağladığını gösterdi.

Çalışmanın literatüre başlıca katkısı, seçilen bu dört özel ve sık kullanılan eğri türü için transformasyon altındaki geometrik değişmezliği kapsamlı bir şekilde gösterildi, detaylı uygulamalarla desteklendi ve böylece kinematik ile diferansiyel geometri arasındaki ilişkiye dair mevcut bilgi birikimine katkı sağlandı.

Ek olarak çalışmanın diğer odak noktası 4. bölümde yer aldı. Burada belirli bir noktanın yörüngesini bir elips olarak tanımlayan bir dönüşüm matrisi oluşturuldu ve bazı özel durumları incelendi. Kinematik analizler ve özellikle robotik uygulamalar için değerli ve pratik bir araç sundu.

Sonuç olarak, bu çalışma, temel kinematik dönüşümlerin bazı özel eğrilerin geometrik yapısı üzerindeki etkisini ayrıntılı bir şekilde inceledi. Elde edilen bulgular ve elde edilen elips yörüngeli dönüşüm matrisi, robot kolu yörünge planlaması, mekanizma sentezi ve tasarımı, animasyon ve sanal gerçeklik gibi çeşitli pratik mühendislik ve bilimsel uygulamalarda önemli bir potansiyel oluşturdu.

## KAYNAKLAR

- Ateş, M. (2022). *Dört boyutlu Öklid uzayında çatılandırılmış genel ve çatılandırılmış  $\eta^3$ -slant helisler* (Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı).
- Baydaş, Ş. (2006). *2x3R sabit çatı değişimli robotik modelleme* (Doktora Tezi, Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü).
- Bektaş, Ö., & Yüce, S. (2013). Special Smarandache curves according to Darboux frame in  $E^3$ . *Romanian Journal of Mathematics and Computer Science*, 3(1), 48-59.
- Bottema, O., & Roth, B. (1979). *Theoretical kinematics*. North-Holland Publishing Company.
- Corke, P. (2017). *Robotics, vision and control: Fundamental algorithms in MATLAB* (2nd ed.). Springer.
- Cox, D., Little, J., & O'Shea, D. (2010). *Ideals, varieties, and algorithms: An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*. Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-16721-3>
- Dalbudak, H. (2009). *Konveks düzlem eğrilerinin evölüsyonu* (Yüksek Lisans Tezi, Beykent Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik-Bilgisayar Ana Bilim Dalı).
- Değirmen, C. (2017). *Üç boyutlu kompakt Lie gruplarında eğriler üzerine* (Yüksek Lisans Tezi, Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı).
- Ergün, S. (2014). *Uzay eğrileri ve küresel eğriler üzerine* (Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı).
- Hacısalıhoğlu, H. H. (1998). *Diferansiyel geometri* (3. baskı). Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü.
- Millman, R. S., & Parker, G. D. (1977). *Elements of differential geometry*. Prentice-Hall.

- Muhurcu, A. (2005). Solution of forward kinematic for five axis robot arm using ANN. *Electronics Letters on Science and Engineering*, 1(1), 55-59.
- Mumcu, G. (2018). *Öklidyen 3-uzayda rektifiyan-doğrultu eğriler* (Yüksek Lisans Tezi, Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı).
- Oral, S. (2014). *Dual uzaylarda küresel slant eğrilerin geometrisi* (Doktora Tezi, Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı).
- Önder, H. (2021). *Kuaterniyonlar ve geometrik uygulamaları* (Yüksek Lisans Tezi, Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü).
- Parkin, R. E. (1991). *Applied robotics analysis*. PrenticeHall.
- Rocha, J. G., de Albuquerque, V. H. C., Cunha, J. P. P. S., & Rodrigues, J. J. P. C. (2012). A novel approach for inverse kinematics of robot manipulators using PSO with global and local exploration. In *2012 International Conference on Information and Communication Technology, Electronics and Microelectronics (ITC-CSCC 2012)*(pp. S2-5-S2-10). IEEE. <https://doi.org/10.1109/ITC-CSCC.2012.6402704>
- Schilling, R. J. (1990). *Fundamentals of robotics*. Prentice Hall.
- Sy, S. (2001). *General helices and other topics in the differential geometry of curves* [Yayımlanmamış yüksek lisans tezi]. Michigan Technological University.
- Yılmaz, D. (2010). *Bir Robot Kolunun Bilgisayar Destekli Kinematik Analizi* (Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü).
- Zembat, İ. Ö. (2015). Geometrik dönüşümlerden öteleme ve farklı anlamları. İçinde İ. Ö. Zembat, M. F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır ve A. Delice (Edtr.), *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* (s. 665-680). PegemA Yayıncılık.

## ÖZGEÇMİŞ

"Eğitim hayatına Osmaniye'nin Kadirli ilçesinde başlayan İbrahim SARIER, ilkokul, ortaokul ve lise öğrenimini burada tamamlamıştır. 2008 yılında Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden mezun olmuştur. Mezuniyetinin ardından çeşitli Özel Öğretim Kurumlarında Matematik ve Geometri Öğretmeni olarak görev alan İbrahim SARIER, 2015 yılında Erciyes Üniversitesi Eğitim Fakültesi'nden Pedagojik Formasyon sertifikası almıştır. Eğitim alanındaki gelişimini sürdürerek, 2020 yılında Yakın Doęu Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümünden de mezun olmuştur. Bu ikinci mezuniyet sonrası, 2022 yılında özel sektördeki görevini bırakarak Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı 23 Nisan Ortaokulu'nda Matematik Öğretmeni olarak göreve başlamış ve halen aynı okulda görevine devam etmektedir."