T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

# ALTIGENSEL BÖLGELER ÜZERİNDE TRİGONOMETRİK YAKLAŞIMIN BAZI PROBLEMLERİ

UĞUR CAN KOÇTÜRK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Ali GÜVEN (Tez Danışmanı)
Prof. Dr. Daniyal İSRAFİLZADE
Dr. Öğr. Üyesi Aykut OR

BALIKESİR, HAZİRAN - 2025

## ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan "**Altıgensel Bölgeler Üzerinde Trigonometrik Yaklaşımın Bazı Problemleri**" başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

**Uğur Can KOÇTÜRK**

**Bu tez çalışması TÜBİTAK-BİDEB 2210-A Yurtiçi Genel Yüksek Lisans Burs Programı tarafından desteklenmiştir.**

# ÖZET


**ALTIGENSEL BÖLGELER ÜZERİNDE TRİGONOMETRİK YAKLAŞIMIN BAZI PROBLEMLERİ**
**YÜKSEK LİSANS TEZİ**
**UĞUR CAN KOÇTÜRK**
**BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**
**(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. ALİ GÜVEN)**

**BALIKESİR, HAZİRAN-2025**

Beş bölümden oluşan bu tez çalışmasında altıgensel Fourier serilerinin $A$ matrisine göre $T$-dönüşümlerinin bazı yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Birinci bölümde, çalışmanın amacı, kapsamı ve yöntemi hakkında genel bir giriş sunulmuştur.

İkinci bölümde, tez boyunca kullanılacak temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, kafes yapıları ile bu yapılar yardımıyla tanımlanan Fourier serileri ele alınmıştır.

Dördüncü bölümde, altıgensel kafesler ile altıgensel Fourier serileri tanıtılmıştır.

Beşinci bölümde, altıgensel Fourier serilerinin $A$ matrisine göre $T-$dönüşümü ile düzgün normda yaklaşım hızı incelenmiştir.



**ANAHTAR KELİMELER:** Altıgensel Fourier serileri, altıgensel kafes, bir $A$ matrisine göre $T-$ dönüşümü, yaklaşım hızı.

Bilim Kod / Kodları : 20404 Sayfa Sayısı : 33

# ABSTRACT


**SOME PROBLEMS OF TRIGONOMETRIC APPROXIMATION ON HEXAGONAL DOMAINS**
**MSC THESIS**
**UĞUR CAN KOÇTÜRK**
**BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE**
**MATHEMATICS**
**(SUPERVISOR: PROF. DR. ALİ GÜVEN )**

**BALIKESİR, JUNE - 2025**

In this thesis consisting of five chapters, some approximation properties of $T$-transforms of hexagonal Fourier series with respect to matrix $A$ have been investigated.

In the first chapter, a general introduction is presented about the purpose, scope and method of the study.

In the second chapter, the basic definitions and concepts that will be used throughout the thesis are given.

In the third chapter, lattice structures and Fourier series defined with the help of these structures are discussed.

In the fourth chapter, hexagonal lattices and hexagonal Fourier series are introduced.

In the fifth chapter, the $T$-transformation of hexagonal Fourier series with respect to matrix $A$ and the speed of approximation in the uniform norm are examined.



**KEYWORDS:** Hexagonal Fourier series, hexagonal lattice, $T-$ transformation with respect to an $A$-matrix, speed of approximation.

Science Code / Codes : 20404 Page Number : 33

# İÇİNDEKİLER

**Sayfa**

# SEMBOL LİSTESİ

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | : Doğal sayılar kümesi |
| $\mathbb{Z}$ | : Tam sayılar kümesi |
| $\mathbb{R}$ | : Reel sayılar kümesi |
| $\mathbb{C}$ | : Kompleks sayılar kümesi |
| $\mathbb{F}$ | : Reel ve Kompleks sayı cismi |
| $\boldsymbol{A}^{\mathbf{tr}}$ | : $A$ matrisinin transpozesi |
| $\boldsymbol{L_A}$ | : $A$ matrisi ile üretilen kafes |
| $\boldsymbol{L_A^\perp}$ | : $A$ matrisi ile üretilen kafesin duali |
| $\boldsymbol{x \lesssim y}$ | : $x \leq cy$ olacak şekilde, $x$ ve $y$ ‘den bağımsız bir sabit $c>0$ sayısı vardır. |
| $\boldsymbol{L^2(\Omega)}$ | : Karesi integrallenebilen fonksiyonların Hilbert uzayı |
| $\boldsymbol{C_H(\bar{\Omega})}$ | : Altıgensel kafese göre periyodik sürekli fonksiyonların uzayı |
| $\boldsymbol{\omega_f}$ | : $f$ fonksiyonun süreklilik modülü |
| $\boldsymbol{S_n(f)}$ | : $f$ fonksiyonun Fourier serisinin kısmi toplamlar dizisi |
| $\boldsymbol{D_n}$ | : $n$ mertebeli Dirichlet çekirdeği |
| $\boldsymbol{T_n^{(A)}}$ | : Bir $f \in C_{\mathrm{H}}(\overline{\Omega})$ fonksiyonunun altıgensel Fourier serisinin $A$ matrisine göre $T-$ dönüşümü |

## ÖNSÖZ

Büyük bir mutlulukla okuduğum ve üzerine çalıştığım Matematik Bölümü'nün bana kazandırdığı ve hayata dair birçok şeyi de kendisinden görüp öğrendiğim değerli tez danışmanım ve hocam Prof. Dr. Ali GÜVEN'e kalbi bir teşekkürü borç bilirim.

Ayrıca, Balıkesir Üniversitesi, Matematik Bölümü'nde görev yapan ve beni bölümüme büyük bir şevk ve samimiyetle bağlayan her bir hocama da teşekkürlerimi sunuyorum.

Son olarak beni her şartta destekleyip bugünlere getiren canım annem, babam ve ağabeylerime minnettarım.

Yüksek Lisans eğitimim süresince sağlamış olduğu maddi destekten ötürü, bursiyeri olmaktan onur duyduğum TÜBİTAK-BİDEB 2210-A Yurt İçi Genel Yüksek Lisans Burs Programı'na gönülden teşekkür ederim.

**Balıkesir, 2025** **Uğur Can Koçtürk**

# 1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisi, doğrudan incelenmesi güç olan, yapısal özellikleri yeterince bilinmeyen fonksiyonların; analiz ve çalışılması daha kolay, özellikleri bilinen fonksiyonlar yardımıyla yaklaşık olarak ifade edilip edilemeyeceğini ve bu yaklaşımın ne şekilde en etkili biçimde gerçekleştirilebileceğini konu alan bir araştırma alanıdır. Örneğin, cebirsel bağlamda cebirsel polinomlar, periyodik bağlamda ise trigonometrik polinomlar bu amaçla sıkça kullanılır.

Tek değişkenli ve periyodik fonksiyonlar söz konusu olduğunda, trigonometrik ve üstel Fourier serilerinin kısmi toplamları ile birlikte Cesàro, Abel-Poisson, Riesz, Nörlund ve De La Vallée-Poussin gibi çeşitli ortalama alma yöntemleri önemli araçlar olarak öne çıkmaktadır. Bu tür ortalamalara dayalı yaklaşım yöntemleri, özellikle 20. yüzyılın ikinci yarısından itibaren çok sayıda matematikçinin ilgisini çekmiş ve araştırmalarına konu olmuştur. Bu alanda L. Leindler, P. Chandra ve S. Prössdorf yaptıkları çalışmalar ile literatüre önemli katkılar sunmuştur.

Birden fazla reel değişkene sahip fonksiyonların, Öklid uzayında tanımlı küpler üzerinde trigonometrik yaklaşıma tabi tutulduğu durumlarda ise, bu fonksiyonların her bir değişken bakımından periyodik olduğu kabul edilmektedir. Bu durumda çoklu Fourier serilerinin çeşitli ortalamaları ve bunların yakınsama hızları farklı yöntemlerle analiz edilmektedir.
Ancak, uzayın, aralıkların Kartezyen çarpımı biçiminde olmayan alt kümeleri üzerinde gerçekleştirilecek trigonometrik yaklaşım çalışmaları ciddi güçlükler içermektedir. Bu gibi bölgelerde klasik periyodiklik tanımı yeterli olmamakta; bunun yerine, kafes yapılarına dayalı olarak geliştirilen alternatif periyodiklik kavramlarının kullanılması önemlidir.
Özellikle iki boyutlu düzlemde klasik periyodiklik tanımının ötesinde, en elverişli yapı altıgensel kafes olarak kabul edilmektedir. Bu yapı üzerinden tanımlanan periyodiklik, trigonometrik yaklaşım açısından oldukça işlevseldir. Altıgensel kafes yapısına dayanarak tanımlanan altıgensel Fourier serileri, düzlemin altıgensel bölgelerinde yaklaşım problemlerinin analizine olanak tanır.

Altıgensel Fourier serileri, ilk olarak H. Li, J. Sun ve Y. Xu tarafından tanımlanmış; daha sonra Y. Xu, sürekli ve altıgensel kafese göre periyodik fonksiyonların, altıgensel Fourier serilerinin Cesàro ve Abel-Poisson ortalamaları düzgün biçimde bu fonksiyonlara yakınsadığını göstermiştir.

2013 yılında A. Güven tarafından yapılan önemli bir çalışmada, bu serilerin Cesàro ve Abel-Poisson ortalamalarıyla olan yaklaşım hızları ayrıntılı olarak incelenmiştir. Daha sonraki araştırmalarda ise A.Güven, altıgensel Fourier serilerinin genelleştirilmiş De La Vallée-Poussin, Riesz, Nörlund ve matris ortalamaları bağlamındaki yaklaşım hızlarını çalışmıştır.

Bu tez çalışmasında ise, sürekli ve altıgensel kafese göre periyodik olan fonksiyonların, altıgensel Fourier serilerinin kısmi toplam dizilerine A-dönüşümü uygulanarak yaklaşım hızlarına dair yeni ve özgün sonuçlar elde edilmiştir.

# 2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde temel tanım ve teoremler verilecektir.

## 2.1 Hilbert Uzayları

**Tanım 2.1.1.** $X$ $\mathbb{F}$ üzerinde bir vektör uzayı olsun. Bir

$\mathrm{p}: X \to \mathbb{R}, \mathrm{p}(x) = \|x\|$

fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu fonksiyona $X$ üzerinde bir norm denir:

$(\mathrm{N}_1) \forall x \in X$ için $\|x\| \geq 0$

$(\mathrm{N}_2) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0(0_X)$

$(\mathrm{N}_3) \forall x \in X$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{F}$ için $\|\lambda x\| \leq |\lambda| \|x\|$

$(\mathrm{N}_4) \forall x, y \in X$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Bir vektör uzayı, eğer üzerinde bir norm tanımlanmış ise normlu uzay adını alır.

**Tanım 2.1.2.** $X$ bir normlu uzay, $(x_n)$ bu uzayda bir dizi ve $x \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için,

$n \geq N \Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon$

koşulunu sağlayan bir $N \in \mathbb{N}$ varsa $(x_n)$ dizisi $x$ noktasına yakınsıyor denir ve $x_n \to x$ yazılır.

**Tanım 2.1.3.** $X$ normlu bir uzay ve $(x_n)$ bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için,

$n, m \geq N \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon$

koşulunu sağlayan bir $N \in \mathbb{N}$ varsa $(x_n)$ dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Normlu bir uzayda her yakınsak dizi bir Cauchy dizisidir.

**Tanım 2.1.4.** $X$ normlu bir uzay olsun. $X$ uzayındaki her $(x_n)$ Cauchy dizisi yakınsak ve yakınsadığı nokta uzayın içinde kalıyor ise $X$ normlu uzayına bir Banach uzayı denir.

**Teorem 2.1.5.** $(X, \mathcal{M}, \mu)$ bir ölçüm uzayı $1 \leq p < \infty$ olsun. Ölçülebilir ve

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty$$

koşulunu sağlayan $f: X \to \mathbb{F}$ fonksiyonlarının kümesini $L^p(X)$ ile gösterelim.

$L^p(X)$ kümesi fonksiyonların toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayıdır ve

$$\|f\|_p = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

fonksiyonu $L^p(X)$ üzerinde bir normdur (hemen hemen her yerde eşit olan fonksiyonlar eşit kabul edilmektedir). Ayrıca $L^p(X)$ normlu uzayı bu norma göre bir Banach uzayıdır.

**Tanım 2.1.6.** $H$ bir vektör uzay olsun. Bir

$u: H \times H \to \mathbb{F}, u(x,y) = \langle x,y \rangle$

fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu fonksiyona $H$ üzerinde bir iç çarpım denir:

$(\mathrm{I}_1)\forall x,y \in H$ için $\overline{\langle x,y \rangle} = \langle y,x \rangle$

$(\mathrm{I}_2)$ $\forall x, \in H$ için $\langle x,y \rangle \geq 0$ ve $\langle x,x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0(0_H)$

$(\mathrm{I}_3)\forall x,y \in H$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{F}$ için $\langle \lambda x,y \rangle = \lambda \langle x,y \rangle$

$(\mathrm{I}_4)\forall x,y,z \in H$ için $\langle x,y+z \rangle = \langle x,y \rangle + \langle x,z \rangle$.

Vektör uzayı üzerinde bir iç çarpım tanımlanmış ise bu uzaya iç çarpım uzayı denir.

**Örnek 2.1.7.** $H$ bir iç çarpım uzayı olsun.

$\|x\| = \langle x,x \rangle^{\frac{1}{2}}, x \in H$

fonksiyonu $H$ üzerinde bir norm olur.

**Tanım 2.1.8.** $H$ bir iç çarpım uzayı olsun. Eğer $H$ uzayı $\|x\| = \langle x,x \rangle^{\frac{1}{2}}$ normu ile bir Banach uzayı ise bu uzaya bir Hilbert uzayı denir.

**Teorem 2.1.9.** $(X, \mathcal{M}, \mu)$ bir ölçüm uzayı olsun.

$$\langle f,g \rangle = \int_X f\bar{g} d\mu$$

fonksiyonu $L^2(X)$ üzerinde bir iç çarpımdır ve $L^2(X)$ bu iç çarpıma göre bir Hilbert uzayıdır.

**Tanım 2.1.10.** $H$ bir iç çarpım uzayı ve $x,y \in H$ olsun. Eğer $\langle x,y \rangle = 0$ ise $x$ ve $y$ birbirine dikeydir denir ve $x \perp y$ yazılır.

**Tanım 2.1.11.** $H$ bir iç çarpım uzayı ve $A \subset H(A \neq \emptyset)$ olsun. $x \neq y$ biçimindeki her $x,y \in A$ için $x \perp y$ ise $A$ kümesine dikey küme denir.

$A$ dikey bir küme ve her $x \in A$ için $\|x\| = 1$ ise $A$ kümesine ortonormal küme denir.

**Tanım 2.1.12.** $H$ bir Hilbert uzayı ve $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ bu uzayın ortonormal bir alt kümesi olsun. Her $x \in H$ için

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$$

ise $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesine $H$ uzayının bir ortonormal tabanı denir.

## 2.2 Fourier Serileri

$H$ bir Hilbert uzayı ve $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ bu uzayın ortonormal bir alt kümesi olsun. Bir $x \in H$ vektörünün $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ortonormal kümesine göre Fourier katsayıları

$\langle x, e_n \rangle, n = 1,2, \dots$

ve Fourier serisi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$$

olarak tanımlanır. Eğer $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi $H$ uzayının bir ortonormal tabanı ise her $x \in H$ için

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$$

olur.

**Teorem 2.1.9**' dan görüleceği gibi

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx \,, f, g \in L^2([-\pi, \pi])$$

fonksiyonu $L^2([-\pi, \pi])$ üzerinde bir iç çarpımdır ve $L^2([-\pi, \pi])$ bu iç çarpıma göre bir Hilbert uzayıdır.

**Teorem 2.2.1.** [12]$e_k : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}, e_k(x) = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}, \; k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ kümesi $L^2([-\pi, \pi])$ uzayının bir ortonormal tabanıdır.

$L^2([-\pi, \pi])$ Hilbert uzayının $\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormal tabanını göz önüne alalım. Bu ortonormal tabana göre bir $f \in L^2([-\pi, \pi])$ fonksiyonunun Fourier katsayıları

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

ve Fourier serisi

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{c}_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$$

olur. Fakat sadelik açısından $f$ fonksiyonun Fourier katsayıları

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

ve Fourier serisi

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

olarak baz alınır. Bu seriye $f$ fonksiyonunun kompleks veya üstel Fourier serisi denir.

$f$ fonksiyonunun Fourier serisinin kısmi toplamlar dizisi

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, n \in \mathbb{N}$$

olarak tanımlanır. $n$ mertebeli Dirichlet çekirdeği

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}, n = 1,2, \dots$$

olmak üzere kısmi toplamlar dizisinin integral gösterimi

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt$$

olarak elde edilir.

# 3. KAFESLER VE FOURIER SERİLERİ

$d \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$\mathbb{R}^d = \{\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_d): x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}\}$

kümesini göz önüne alalım. Bu küme

$x = (x_1, \dots, x_d), y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için,

$x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_d + y_d)$

ve

$\lambda x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_d)$

işlemleri ile bir vektör uzayıdır. $\mathbb{R}^d$ vektör uzayına $d$-boyutlu Euclid uzayı denir.

Bu uzayda standart iç çarpım (Euclid iç çarpımı), $x = (x_1, \dots, x_d), y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ için

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{d} x_k \, y_k$$

ve standart norm (Euclid normu), $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ için

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} = \left( \sum_{k=1}^{d} x_k{}^2 \right)^{1/2}$$

biçiminde tanımlanır.

$x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ vektörleri için,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix}_{d \times 1}$$

sütun matris gösterimi de kullanılır.

Euclid iç çarpımını $\langle x, y \rangle = x^{tr} y$ bu şekilde matris çarpımı olarak düşünebiliriz.

$\mathbb{Z}^d = \{k = (k_1, \dots, k_d): k_1, \dots, k_d \in \mathbb{Z}\}$ kümesi

$\mathbb{R}^d$ uzayının ayrık bir alt kümesidir.

$$a_1 = \begin{bmatrix} a_1^{(1)} \\ a_2^{(1)} \\ \vdots \\ a_d^{(1)} \end{bmatrix}_{d \times 1}, a_2 = \begin{bmatrix} a_1^{(2)} \\ a_2^{(2)} \\ \vdots \\ a_d^{(2)} \end{bmatrix}_{d \times 1}, \dots, a_d = \begin{bmatrix} a_1^{(d)} \\ a_2^{(d)} \\ \vdots \\ a_d^{(d)} \end{bmatrix}_{d \times 1}$$

lineer bağımsız vektörler olmak üzere,

$A = [a_1 a_2 \quad \cdots \quad a_d]_{d\times d}$

matrisini göz önüne alalım.

Her $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ için,

A. $k = k_1 a_1 + \cdots + k_d a_d \in \mathbb{R}^d$

olur.

$L_A := A \cdot \mathbb{Z}^d = \{A.k : k \in \mathbb{Z}^d\} \subset \mathbb{R}^d$

kümesine $A$ matrisi ile üretilen kafes, $A$ matrisine de $L_A$ kafesinin üreteç matrisi denir.

$$a_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}_{d\times 1}, a_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}_{d\times 1}, \dots, a_d = \begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}_{d\times 1}$$

alınırsa $A = I_d$ ve $L_A = \mathbb{Z}^d$ elde edilir (standart kafes).

$a_1, a_2, \cdots, a_d \in \mathbb{R}^d$ lineer bağımsız vektörler olmak üzere,

$A = [a_1 a_2 \quad \cdots \quad a_d]_{d\times d}$

matrisini göz önüne alalım. $A^{-tr}$ matrisi ile üretilen kafese $L_A$ kafesinin dual kafesi denir ve $L_A^{\perp}$ ile gösterilir.

$L_A^{\perp} = L_{A^{-tr}} = A^{-tr}\mathbb{Z}^d$

olur.

$L_A^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^d : \forall y \in L_A \text{ için } \langle x, y\rangle \in \mathbb{Z}\}$ olduğu

kolayca görülebilir.

$A$ sütunları lineer bağımsız $d \times d$ tipinde bir matris ve $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ sınırlı ve açık bir küme olsun. Hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^d$ için

$$\sum_{\alpha \in L_A} \chi_\Omega(x + \alpha) = 1$$

ise $\Omega$ kümesi $L_A$ kafesi ile $\mathbb{R}^d$ uzayını döşüyor denir ve

$\Omega + L_A = \mathbb{R}^d$

yazılır.

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ Lebesgue ölçülebilir ve sınırlı bir küme olsun.

$$\mathrm{L}^2(\Omega) = \left\{\Omega \xrightarrow{f} \mathbb{C} : f \text{ } ölçülebilir \text{ } ve \int_\Omega |f(x)|^2 dx < \infty\right\}$$

kümesi fonksiyonların toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzaydır.

$L^2(\Omega)$, Teorem 2.1.9.' dan

$$\langle f,g\rangle_\Omega := \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(x)\overline{g(x)}dx\,, f,g \in \mathrm{L}^2(\Omega)$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayı olur.

**Teorem 3.1.** [1] $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ sinırlı ve açık bir küme ve $L_A \subset \mathbb{R}^d$ bir kafes olsun. $\Omega + L_A = \mathbb{R}^d$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\{e^{2\pi i\langle\alpha,x\rangle}: \alpha \in L_A^\perp\}$ kümesinin $L^2(\Omega)$ Hilbert uzayının bir ortonormal tabanı olmasıdır.

**Tanım 3.1.1.** $\Omega + L_A = \mathbb{R}^d$ ise $\Omega$ kümesine $L_A$ kafesi için bir spektral küme denir.
$\Omega + L_A = \mathbb{R}^d$ ise $|\Omega| = |\det A|$ olur.
$\varphi_\alpha(x) := e^{2\pi i\langle\alpha,x\rangle}, \varphi_\beta(x) := e^{2\pi i\langle\beta,x\rangle}, \alpha,\beta \in L_A^\perp$ olsun. Ortonormallik bağıntısı

$$\langle\varphi_\alpha,\varphi_\beta\rangle = \begin{cases}1, \alpha = \beta \\ 0, \alpha \neq \beta\end{cases}$$

biçiminde tanımlanır.

$$\langle\varphi_\alpha,\varphi_\beta\rangle_\Omega = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \varphi_\alpha\overline{\varphi_\beta}dx = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega e^{2\pi i\langle\alpha,x\rangle}e^{-2\pi i\langle\beta,x\rangle}dx = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega e^{2\pi i\langle\alpha-\beta,x\rangle}dx$$

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega e^{2\pi i\langle\alpha-\beta,x\rangle}dx = \begin{cases}1, \alpha = \beta \\ 0, \alpha \neq \beta\end{cases}$$

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega e^{2\pi i\langle\alpha,x\rangle}dx = \begin{cases}1, \alpha = 0 \\ 0, \alpha \neq 0\end{cases}$$

$$\alpha \in L_A^\perp \Leftrightarrow \alpha \in L_{A^{-tr}} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}^d: \alpha = A^{-tr}k \; (\alpha = 0 \Leftrightarrow k = 0)$$

$$\langle\alpha,x\rangle = \alpha^{tr}x = (A^{-tr}k)^{tr}x = k^{tr}A^{-1}x$$

Böylece ortonormallik bağıntısı

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega e^{2\pi i\langle A^{-tr}\boldsymbol{k},x\rangle}dx = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega e^{2\pi i\boldsymbol{k}^{tr}A^{-1}x}dx = \begin{cases}1, k = 0 \\ 0, k \neq 0\end{cases}, (k \in \mathbb{Z}^d)$$

biçimini alır.

$L_A \subset \mathbb{R}^d$ bir kafes ve $\Omega + L_A = \mathbb{R}^d$ olsun. $f \in L^2(\Omega)$ alalım. $f$ fonksiyonunun $L^2(\Omega)$ uzayının

$\{\varphi_\alpha: \alpha \in L_A^\perp\}\ (\varphi_\alpha(x) = e^{2\pi i\langle\alpha,x\rangle})$

ortonormal tabanına göre Fourier katsayıları

$$c_\alpha(f) = \langle f, \varphi_\alpha \rangle_\Omega = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(x)e^{-2\pi i\langle \alpha,x\rangle}dx \quad (\alpha \in L_A^\perp)$$

ve Fourier serisi

$f(x) \sim \sum_{\alpha\in L_A^\perp} c_\alpha(f)e^{2\pi i\langle \alpha,x\rangle}$

olur.

$\alpha \in L_A^\perp \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}^d : \alpha = A^{-tr}k$

olduğundan, $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ fonksiyonun Fourier katsayıları

$$c_k(f) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(x)e^{-2\pi i\langle A^{-tr}k,x\rangle}dx \; (k \in \mathbb{Z}^d)$$

ve Fourier serisi de

$$f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k(f)e^{2\pi i\langle A^{-tr}k,x\rangle}$$

biçimini alır.

Bir $L_A \subset \mathbb{R}^d$ kafesi için $\Omega$ spektral kümesi tek değildir. $\Omega$ bir spektral küme ise her $k \in \mathbb{Z}^d$ için $\Omega + A.k$ kümesi de bir spektral kümedir.

$\Omega$ spektral kümesi, 0 noktasını iç nokta kabul edecek ve $\mathbb{R}^d$ uzayını üst üste binmeden ve boşluk bırakmadan döşeyecek şekilde seçilir:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} X_\Omega(x + A\cdot k) = 1, \forall x \in \mathbb{R}^d$$

Örneğin, $\mathbb{Z}^d$ standart kafesi için spektral küme olarak

$\Omega_A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^d$ alınır.

$f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $L_A = A\mathbb{Z}^d \subset \mathbb{R}^d$ bir kafes olsun.

Her $k \in \mathbb{Z}^d$ için

$f(x + Ak) = f(x)$

ise f fonksiyonu $L_A$ kafesine göre periyodiktir ( $A$ - periyodiktir ) denir.

$x, y \in \mathbb{R}^d$ olsun. Eğer $x - y \in L_A$ ise x ve y noktaları $L_A$ kafesine göre denktir denir ve

$x \equiv y(\mathrm{mod}A)$

yazılır.

# 4. ALTIGENSEL FOURIER SERİLERİ

**Tanım 4.1.** $\mathbb{R}^2$ uzayında

$$H = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisi ile üretilen kafese altıgensel kafes denir:

$$L_H = H\mathbb{Z}^2 = \{Hk : k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Bu kafesin spektral kümesi

$$\Omega_H = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x_2, \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 \pm \frac{1}{2}x_2 < 1\right\}$$

altıgeni olarak alınır.

$\Omega_H$ altıgeninin alanı (Lebesgue ölçümü)

$$\det H = |\Omega_H| = 2\sqrt{3}$$

ve ayrıca

$$H^{-\mathrm{tr}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

olur.

$\mathbb{R}_H^3 := \{\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3 : t_1 + t_2 + t_3 = 0\}$ olmak üzere,

$\mathbb{R}_H^3$ düzleminin elemanlarına homojen koordinatlar denir.

$\mathbb{R}^3$ uzayında

$$t_1 := -\frac{x_2}{2} + \frac{\sqrt{3}x_1}{2}, t_2 := x_2, t_3 := -\frac{x_2}{2} - \frac{\sqrt{3}x_1}{2},$$

dönüşümü ile $\Omega_H$ spektral kümesi

$$\Omega = \{(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}_H^3 : -1 \le t_1, t_2, -t_3 < 1\}$$

kümesine dönüşür.

Bu küme $\mathbb{R}_H^3$ düzlemi ile $[-1,1]^3$ küpünün arakesiti olan altıgendir.

$\mathbb{R}_H^3$ düzleminin bileşenleri tam sayı olan noktalarının kümesi için $\mathbb{Z}_H^3$ gösterimini kullanacağız:

$$\mathbb{Z}_H^3 := \mathbb{Z}^3 \cap \mathbb{R}_H^3 = \{\mathrm{k} = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3 : k_1 + k_2 + k_3 = 0\}.$$

Homojen koordinatlar altında altıgen üzerindeki iç çarpım

$f, g \in L^2(\Omega)$ fonksiyonlarının iç çarpımı homojen koordinatlar altında

$$\langle f, g\rangle_{\Omega_H} = \frac{1}{|\Omega_H|}\int_{\Omega_H} f(x_1, x_2)\overline{g(x_1, x_2)}dx_1dx_2 = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} f(\boldsymbol{t})\overline{g(\boldsymbol{t})}d\boldsymbol{t}$$

olur.

$k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ için $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, -k_1 - k_2) \in \mathbb{Z}_H^3$ ve $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ noktasına karşılık gelen homojen koordinatlar $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}_H^3$ olmak üzere

$$\langle H^{-tr}k, x\rangle = \frac{1}{3}\langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{t}\rangle$$

olacaktır.

Böylece Teorem 3.1. 'in sonucu olarak

$\varphi_j(\boldsymbol{t}) := e^{\frac{2\pi i}{3}\langle \boldsymbol{j}, \boldsymbol{t}\rangle}, \boldsymbol{j} \in \mathbb{Z}_H^3$

olmak üzere $\{\varphi_j : \boldsymbol{j} \in \mathbb{Z}_H^3\}$ kümesi $L^2(\Omega_H)$ Hilbert uzayının ortonormal tabanı olur.

$x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ noktalarına karşılık gelen homojen koordinatlar sırasıyla $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}_H^3$ ve $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}_H^3$ olsun.

Homojen koordinatlar altında $x \equiv y(\mathrm{mod}H)$ olması için gerekli yeterli koşul

$\boldsymbol{t} \equiv \boldsymbol{s}$(mod3), yani $t_1 - s_1 \equiv t_2 - s_2 \equiv t_3 - s_3(\mathrm{mod}3)$

olmasıdır .

$\varphi_j(\boldsymbol{t})$ fonksiyonlarının $H$-periyodik olduğu açıktır.

Ayrıca $f$ $H$-periyodik bir fonksiyon ise her $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}_H^3$ için

$\int_\Omega f(\boldsymbol{t} + \boldsymbol{s})d\boldsymbol{t} = \int_\Omega f(\boldsymbol{t})d\boldsymbol{t}$

olur [11].

$f: \mathbb{R}_H^3 \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $H$-periyodik ve $f \in L^2(\Omega)$ olsun. $f$ fonksiyonunun Fourier katsayıları

$$c_j = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(\boldsymbol{t})e^{-\frac{2\pi i}{3}\langle \boldsymbol{t}, \boldsymbol{j}\rangle}d\boldsymbol{t}, \boldsymbol{j} \in \mathbb{Z}_H^3$$

ve Fourier serisi (altıgensel Fourier serisi)

$f(\boldsymbol{t}) \sim \sum_{\boldsymbol{j} \in \mathbb{Z}_H^3} c_{\boldsymbol{j}}\varphi_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{t})$

olur.

Her $n$ doğal sayısı için, $\mathbb{H}_n := \{\boldsymbol{j} = (j_1, j_2, j_3) \in \mathbb{Z}_H^3 : -n \leq j_1, j_2, j_3 \leq n\}$ kümesi $n\bar{\Omega}$ altıgenine ait ve bileşenleri tamsayı olan noktaların kümesidir.

**Tanım 4.2.** $f \in L^2(\Omega)$ fonksiyonun Fourier serisinin kısmi toplamları (altıgensel kısmi toplamları)

$$S_n(f)(\boldsymbol{t}) := \sum_{\boldsymbol{j} \in \mathbb{H}_n} c_{\boldsymbol{j}} \varphi_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{t}), n \in \mathbb{N}$$

olarak tanımlanır.

**Tanım 4.3.** $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $n$ mertebeli Dirichlet çekirdeği

$$D_n(\boldsymbol{t}) := \sum_{\boldsymbol{j} \in \mathbb{H}_n} \varphi_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{t})$$

olarak tanımlanır.

$f \in L^2(\Omega)$ fonksiyonunun altıgensel Fourier serisinin kısmi toplamları için

$$S_n(f)(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{s}) D_n(\boldsymbol{s}) d\boldsymbol{s}$$

integral gösterimi geçerlidir .

Dirichlet çekirdeği, $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}_H^3$ için

$$\Theta_n(\boldsymbol{t}) := \frac{\sin \frac{(n+1)(t_1 - t_2)\pi}{3} \sin \frac{(n+1)(t_2 - t_3)\pi}{3} \sin \frac{(n+1)(t_3 - t_1)\pi}{3}}{\sin \frac{(t_1 - t_2)\pi}{3} \sin \frac{(t_2 - t_3)\pi}{3} \sin \frac{(t_3 - t_1)\pi}{3}},$$

olmak üzere

$$D_n(\boldsymbol{t}) = \Theta_n(\boldsymbol{t}) - \Theta_{n-1}(\boldsymbol{t}), n \in \mathbb{N}$$

biçiminde ifade edilebilir [11].

# 5. ALTIGENSEL FOURIER SERİLERİNİN MATRİS ORTALAMALARI İLE YAKLAŞIM

$H$-periyodik ve sürekli $f\colon \mathbb{R}_H^3 \to \mathbb{C}$ fonksiyonlarının kümesini $C_H(\overline{\Omega})$ ile gösterelim:

$$C_H(\overline{\Omega}) := \left\{\mathbb{R}_H^3 \xrightarrow{f} \mathbb{C} \; : f\; H \; - \; periyodik\; ve\; sürekli\right\}.$$

$C_H(\overline{\Omega})$ bir vektör uzayıdır ve

$$\|f\|_{C_{\mathbf{H}}(\overline{\Omega})} := \sup\{|f(\mathbf{t})| : \mathbf{t} \in \overline{\Omega}\}$$

normu ile (düzgün norm) bir Banach uzayı olur.

**Tanım 5.1.** $f \in C_{\mathbf{H}}(\overline{\Omega})$ olsun .

$$\omega_f(\delta) := \sup_{0<\|\mathbf{t}\|\le\delta} \|f - f(\cdot + \mathbf{t})\|_{C_H(\overline{\Omega})}$$

biçiminde tanımlanan $\omega_f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonuna $f$ fonksiyonunun süreklilik modülü denir . Süreklilik modülü artan bir fonksiyondur ve c > 0 için

$\omega_f(\mathrm{c}\delta) \;\le\; (1 \;+\; \mathrm{c})\omega_f(\delta)$ sağlanır.

**Tanım 5.2.** $A = (a_{n,k})(n, k = 0,1, \ldots)$ reel sayıların aşağıdaki koşulları sağlayan bir matrisi olsun:

$$a_{n,k} \ge 0,$$

$$k > n \; için \; a_{n,k} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} = 1,$$

Bir $f \in C_{\mathrm{H}}(\overline{\Omega})$ fonksiyonunun altıgensel Fourier serisinin $A$ matrisine göre

$T -$ dönüşümü

$$T_n^{(A)}(f)(\mathbf{t}) := \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} S_k(f)(\mathbf{t}) \; (n \in \mathbb{N})$$

olarak tanımlanır.

**Teorem 5.3.** $f \in C_{\mathrm{H}}(\overline{\Omega})$ olsun. $F \geq 0$ biçiminde bir $F$ fonksiyonu için,

$$\int_{\delta}^{1} \frac{\omega_f(u)}{u^2} du \lesssim F(\delta)(\delta \to 0^+) \tag{5.1}$$

ve

$$\int_{0}^{\delta} F(u)du \lesssim \delta F(\delta)(\delta \to 0^+) \tag{5.2}$$

olduğunu varsayalım.

$$\alpha_{n,k} := \sum_{v=0}^{k} \left|a_{n,v} - a_{n,v+1}\right|$$

olmak üzere

$$\left\|f - T_n^{(A)}(f)\right\|_{C_H(\overline{\Omega})} \lesssim \alpha_{n,n} F\left(\alpha_{n,n}\right) \log\left(\frac{n+1}{\alpha_{n,n}}\right) \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

olur.

**Lemma 5.4.** [13] $f \in C_{\mathbf{H}}(\overline{\Omega})$ ve $F$ fonksiyonu (5.1),(5.2) koşullarını sağlıyor olsun. $\delta \to 0^+$ için

$$\frac{\omega_f(\delta)}{\delta} \lesssim F(\delta) \tag{5.3}$$

ve

$$\int_{0}^{\delta} \frac{\omega_f(u)}{u} du \lesssim \delta F(\delta) \tag{5.4}$$

olur.

Teorem 5.3.'ün ispatında aşağıdaki lemma kullanılacaktır.

**Lemma 5.5** $A = \left(a_{n,k}\right)(n, k = 0,1, \dots)$ negatif olmayan reel sayılardan oluşan alt üçgensel sonsuz bir matris olsun. O halde

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \cos(2k+1)t\right| \lesssim \frac{\alpha_{n,n}}{\sin t} \ , \quad 0 < t < \pi \tag{5.5}$$

elde edilir.

**İspat.** Bilinen bazı trigonometrik eşitsizliklerden ,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \sin kt\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{t}{2}\right|}, \left|\sum_{k=0}^{n} \cos kt\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{t}{2}\right|} (t \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

Buradan,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \cos(2k+1)t\right| \leq \frac{2}{|\sin t|} (t \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

elde edilir.

Abel dönüşümünden,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\cos(2k+1)t\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left|\sum_{m=0}^{k} \cos(2k+1)t\right| \left|a_{n,k} - a_{n,k+1}\right| + a_{n,n}\left|\sum_{k=0}^{n} \cos(2k+1)t\right|$$

$$\leq \frac{2}{|\sin t|} \sum_{k=0}^{n-1} \left|a_{n,k} - a_{n,k+1}\right| + a_{n,n}\frac{2}{|\sin t|} (t \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

$$= \frac{2}{|\sin t|}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \left|a_{n,k} - a_{n,k+1}\right| + \left|a_{n,n} - a_{n,n+1}\right|\right) (t \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

$$= \frac{\alpha_{n,n}}{\sin t}, 0 < t < \pi$$

**Teorem 5.3.'ün ispatı.**

$$\left|f(\mathbf{t}) - T_n^{(A)}(f)(\mathbf{t})\right| \leq \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} |f(\mathbf{t}) - f(\mathbf{t}-\mathbf{u})| \left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}D_k(\mathbf{u})\right| d\mathbf{u}$$

$$\lesssim \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} \omega_f(\|\mathbf{u}\|) \left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}D_k(\mathbf{u})\right| d\mathbf{u}$$

olduğu açıktır.

$\Theta_{-1}(\mathbf{t}) := 0$ olmak üzere

$$\int_{\Omega} \left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}D_k(\mathbf{t})\right| d\mathbf{t} = \int_{\Omega} \left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}(\Theta_k(\mathbf{t}) - \Theta_{k-1}(\mathbf{t}))\right| d\mathbf{t}$$

yazılabilir.

$$\mathbf{t} \to \left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\big(\Theta_k(\mathbf{t}) - \Theta_{k-1}(\mathbf{t})\big)\right| (\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3) \in \Omega),$$

Bu fonksiyon, $t_1, t_2$ ve $t_3$ değişkenlerine göre simetriktir.

$$\Delta := \{\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3_{\mathrm{H}}: 0 \leq t_1, t_2, -t_3 \leq 1\}$$
$$= \{(t_1, t_2): t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, t_1 + t_2 \leq 1\}$$

Bu bölge $\bar{\Omega}$ içindeki altı eşkenar üçgenden biri olup, integrali bu bölge üzerinde hesaplamamız yeterlidir.

$$\int_\Delta \left| \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} (\Theta_k(\mathbf{t}) - \Theta_{k-1}(\mathbf{t})) \right| d\mathbf{t}$$
$$= \int_\Delta \left| \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \left( \frac{\sin\frac{(k+1)(t_1-t_2)\pi}{3} \sin\frac{(k+1)(t_2-t_3)\pi}{3} \sin\frac{(k+1)(t_3-t_1)\pi}{3}}{\sin\frac{(t_1-t_2)\pi}{kin} \frac{(t_2-t_3)\pi}{3} \sin\frac{(t_3-t_1)\pi}{3}} - \frac{\sin\frac{k(t_2-t_2)\pi}{3} \sin\frac{k(t_2-t_3)\pi}{3} \sin\frac{k(t_3-t_1)\pi}{3}}{3} \right) \right| d\mathbf{t}.$$

olur.

$$s_1 := \frac{t_1 - t_3}{3} = \frac{2t_1 + t_2}{3}, s_2 := \frac{t_2 - t_3}{3} = \frac{t_1 + 2t_2}{3}$$

değişken dönüşümü yapılırsa bu integral

$$3 \int_{\widetilde{\Delta}} \left| \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \left( \frac{\sin((k+1)(s_1 - s_2)\pi) \sin((k+1)s_2\pi) \sin\big((k+1)(-s_1\pi)\big)}{\sin\big((s_1 - s_2)\big) \sin(s_2\pi) \sin(-s_1\pi)} - \frac{\sin(k(s_1 - s_2)\pi) \sin(ks_2\pi) \sin\big(k(-s_1\pi)\big)}{\sin\big((s_1 - s_2)\pi\big) \sin(s_2\pi) \sin(-s_1\pi)} \right) \right| ds_1 ds_2$$

bu integrale dönüşür.

$$s_1 := \frac{t_1 - t_3}{3} = \frac{2t_1 + t_2}{3}, s_2 := \frac{t_2 - t_3}{3} = \frac{t_1 + 2t_2}{3},$$

dönüşümü altında $\Delta$ üçgeninin görüntüsü ,

$$\widetilde{\Delta} := \{(s_1, s_2): 0 \leq s_1 \leq 2s_2, 0 \leq s_2 \leq 2s_1, s_1 + s_2 \leq 1\},$$

kümesidir.

İntegrallenen fonksiyonlar $s_1$ ve $s_2$ değişkenlerine göre simetrik olduğundan

$$\Delta^* := \big\{(s_1, s_2) \in \widetilde{\Delta}: s_1 \leq s_2\big\} = \{(s_1, s_2): s_1 \leq s_2 \leq 2s_1, s_1 + s_2 \leq 1\}$$

bu bölgesi üzerinde integrali değerlendirmek yeterlidir.

$$s_1 := \frac{u_1 - u_2}{2}, s_2 := \frac{u_1 + u_2}{2} \tag{5.6}$$

Değişken dönüşümü ile de $\Delta^*$ bölgesi,

$$\Gamma := \left\{(u_1, u_2): 0 \leq u_2 \leq \frac{u_1}{3}, 0 \leq u_1 \leq 1\right\}$$

üçgenine dönüşür. Bu nedenle

$$D_k^*(u_1,u_2) = \frac{\sin((k+1)(u_2)\pi)\sin\left((k+1)\frac{u_1+u_2}{2}\pi\right)\sin\left((k+1)\left(\frac{u_1-u_2}{2}\pi\right)\right)}{\sin\left((u_2)\pi\right)\sin\left(\frac{u_1+u_2}{2}\pi\right)\sin\left(\frac{u_1-u_2}{2}\pi\right)} - \frac{\sin(k(u_2)\pi)\sin\left(k\frac{u_1+u_2}{2}\pi\right)\sin\left(k\left(\frac{u_1-u_2}{2}\pi\right)\right)}{\sin\left((u_2)\pi\right)\sin\left(\frac{u_1+u_2}{2}\pi\right)\sin\left(\frac{u_1-u_2}{2}\pi\right)}$$

olmak üzere,

$$I_n := \int_\Gamma \omega_f(u_1)\left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}D_k^*(u_1,u_2)\right| du_1 du_2$$

integralini değerlendirmek yeterlidir.

Bazı trigonometrik eşitliklerden

$$D_{k,1}^*(u_1,u_2) := 2\cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)u_2\pi\right) \frac{\sin\left(\frac{1}{2}u_2\pi\right)\sin\left((k+1)\frac{u_1+u_2}{2}\pi\right)\sin\left((k+1)\frac{u_1-u_2}{2}\pi\right)}{\sin(u_2\pi)\sin\left(\frac{u_1+u_2}{2}\pi\right)\sin\left(\frac{u_1-u_2}{2}\pi\right)}$$

$$D_{k,2}^*(u_1,u_2) := 2\cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{u_1+u_2}{2}\pi\right) \frac{\sin(ku_2\pi)\sin\left(\frac{1}{2}\frac{u_1+u_2}{2}\pi\right)\sin\left((k+1)\frac{u_1-u_2}{2}\pi\right)}{\sin(u_2\pi)\sin\left(\frac{u_1+u_2}{2}\pi\right)\sin\left(\frac{u_1-u_2}{2}\pi\right)}$$

$$D_{k,3}^*(u_1,u_2) := 2\cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{u_1-u_2}{2}\pi\right) \frac{\sin(ku_2\pi)\sin\left(k\frac{u_1+u_2}{2}\pi\right)\sin\left(\frac{1}{2}\frac{u_1-u_2}{2}\pi\right)}{\sin(u_2\pi)\sin\left(\frac{u_1+u_2}{2}\pi\right)\sin\left(\frac{u_1-u_2}{2}\pi\right)}$$

olmak üzere,

$$D_k^*(u_1,u_2) = D_{k,1}^*(u_1,u_2) + D_{k,2}^*(u_1,u_2) + D_{k,3}^*(u_1,u_2)$$

elde edilir.

$\Gamma$ üçgeni

$$\Gamma_1 := \{(u_1,u_2) \in \Gamma : u_1 \le \alpha_{n,n}\},$$
$$\Gamma_2 := \left\{(u_1,u_2) \in \Gamma : u_1 \ge \alpha_{n,n}, u_2 \le \frac{\alpha_{n,n}}{3}\right\},$$
$$\Gamma_3 := \left\{(u_1,u_2) \in \Gamma : u_1 \ge \alpha_{n,n}, u_2 \ge \frac{\alpha_{n,n}}{3}\right\},$$

olmak üzere

$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$

biçiminde yazılabilir.

Böylece

$$I_{n,j} := \int_{\Gamma_j} \omega_f(u_1) \left| \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} D_k^*(u_1, u_2) \right| du_1 du_2 \,, (j = 1,2,3) \qquad (5.7)$$

olmak üzere

$I_n = I_{n,1} + I_{n,2} + I_{n,3}$ .

olur.

İntegralleri değerlendirmek için

$$\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right| \leq n, (n \in \mathbb{N}) \qquad (5.8)$$

$$\sin t \geq \frac{2}{\pi} t, \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right) \qquad (5.9)$$

eşitsizliklerinden yararlanacağız.

$I_{n,1}$ integralini değerlendirmek için $\Gamma_1$ üçgenini

$$\Gamma_1' := \left\{(u_1, u_2) \in \Gamma_1 : u_1 \leq \frac{\alpha_{n,n}}{n+1}\right\},$$

$$\Gamma_1'' := \left\{(u_1, u_2) \in \Gamma_1 : u_1 \geq \frac{\alpha_{n,n}}{n+1}, u_2 \leq \frac{\alpha_{n,n}}{3(n+1)}\right\},$$

$$\Gamma_1''' := \left\{(u_1, u_2) \in \Gamma_1 : u_1 \geq \frac{\alpha_{n,n}}{n+1}, u_2 \geq \frac{\alpha_{n,n}}{3(n+1)}\right\}$$

biçiminde üç bölgeye ayıralım.

$(u_1, u_2) \in \Gamma_1'$ için (5.8) denkleminden

$\left|D_{k,j}^*(u_1, u_2)\right| \lesssim (k+1)^2 (j = 1,2,3)$ olur. Buradan (5.10)

$$\int_{\Gamma_1'} \omega_f(u_1) \left| \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} D_k^*(u_1, u_2) \right| du_1 du_2$$

$$\lesssim (n+1)^2 \int_0^{\frac{\alpha_{n,n}}{3(n+1)}} \int_{3u_2}^{\frac{\alpha_{n,n}}{n+1}} \omega_f(u_1) du_1 du_2 \leq \omega_f(\alpha_{n,n}).$$

$(u_1, u_2) \in \Gamma$ için

$$\sin \frac{u_1 \pi}{2} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{u_1 + u_2}{2} \pi\right) \text{ ve } \sin \frac{u_1 \pi}{3} \leq \sin\left(\frac{u_1 - u_2}{2} \pi\right) \qquad (5.11)$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

(5.9) ve (5.10) dan

$$\left|D_{k,1}^{*}(u_1,u_2)\right| \lesssim \frac{1}{u_1^2}, (u_1,u_2) \in \Gamma_1'' \tag{5.12}$$

(5.8), (5.9) ve (5.10) denklemlerinden ise

$$\left|D_{k,j}^{*}(u_1,u_2)\right| \lesssim \frac{k}{u_1} (j=2,3), (u_1,u_2) \in \Gamma_1'' \tag{5.13}$$

elde edilir. Bu nedenle

$$\int_{\Gamma_1''} \omega_f(u_1) \left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} D_{k,1}^{*}(u_1,u_2)\right| du_1 du_2$$
$$\lesssim \int_0^{\frac{\alpha_{n,n}}{3(n+1)}} \int_{\frac{\alpha_{n,n}}{n+1}}^{\alpha_{n,n}} \frac{\omega_f(u_1)}{u_1^2} du_1 du_2 \leq \omega_f(\alpha_{n,n}) \log(n+1)$$

ve $j=2,3$ için

$$\int_{\Gamma_1''} \omega_f(u_1) \left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} D_{k,j}^{*}(u_1,u_2)\right| du_1 du_2$$
$$\lesssim n \int_0^{\frac{\alpha_{n,n}}{3(n+1)}} \int_{\frac{\alpha_{n,n}}{n+1}}^{\alpha_{n,n}} \frac{\omega_f(u_1)}{u_1} du_1 du_2 \leq \omega_f(\alpha_{n,n}) \log(n+1)$$

bulunur.

(5.9) ve (5.10) dan, $(u_1,u_2) \in \Gamma_1'''$ için

$$\left|D_{k,1}^{*}(u_1,u_2)\right| \lesssim \frac{1}{u_1^2} \tag{5.14}$$

ve

$$\left|D_{k,j}^{*}(u_1,u_2)\right| \lesssim \frac{1}{u_1 u_2} (j=2,3) \tag{5.15}$$

olur. Buradan

$$\int_{\Gamma_1'''} \omega_f(u_1) \left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} D_{k,1}^{*}(u_1,u_2)\right| du_1 du_2$$
$$\lesssim \int_{\frac{\alpha_{n,n}}{3(n+1)}}^{\frac{\alpha_{n,n}}{3}} \int_{3u_2}^{\alpha_{n,n}} \frac{\omega_f(u_1)}{u_1^2} du_1 du_2 \leq \omega_f(\alpha_{n,n}) \log(n+1)$$

ve

$$\int_{\Gamma_1'''} \omega_f(u_1) \left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} D_{k,j}^{*}(u_1,u_2)\right| du_1 du_2 \lesssim \int_{\frac{\alpha_{n,n}}{3(n+1)}}^{\frac{\alpha_{n,n}}{3}} \int_{3u_2}^{\alpha_{n,n}} \frac{\omega_f(u_1)}{u_1 u_2} du_1 du_2$$

$$\le \log(n+1)\int_0^{\alpha_{n,n}} \frac{\omega_f(u_1)}{u_1}du_1 (j=2,3)$$

bulunur.

(5.4) kullanılarak

$$\int_{\Gamma_1'''} \omega_f(u_1)\left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}D_{k,j}^*(u_1,u_2)\right|du_1du_2 \lesssim \alpha_{n,n}F(\alpha_{n,n})\log(n+1),(j=2,3)$$

olduğu görülür.

Buradan

$I_{n,1} \lesssim \alpha_{n,n}F(\alpha_{n,n})\log(n+1)$

elde edilir.

$I_{n,2}$ integralini değerlendirmek için $\Gamma_2$ üçgenini

$$\Gamma_2' := \left\{(u_1,u_2) \in \Gamma_2 : u_2 \le \frac{\alpha_{n,n}}{3(n+1)}\right\}$$

ve

$$\Gamma_2'' := \left\{(u_1,u_2) \in \Gamma_2 : u_2 \ge \frac{\alpha_{n,n}}{3(n+1)}\right\}$$

$\Gamma_2 = \Gamma_2' \cup \Gamma_2''$ olacak biçimde iki bölgeye ayıralım.

$(u_1,u_2) \in \Gamma_2'$ için

$\left|D_{k,1}^*(u_1,u_2)\right| \lesssim \frac{1}{u_1^2}, \left|D_{k,j}^*(u_1,u_2)\right| \lesssim \frac{k}{u_1}(j=2,3)$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu nedenle

$$\int_{\Gamma_2'} \omega_f(u_1)\left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}D_{k,1}^*(u_1,u_2)\right|du_1du_2$$

$$\lesssim \int_0^{\frac{\alpha_{n,n}}{3(n+1)}}\int_{\alpha_{n,n}}^{1} \frac{\omega_f(u_1)}{u_1^2}du_1du_2 \lesssim \alpha_{n,n}F(\alpha_{n,n})$$

elde edilir.

Diğer taraftan

$$\frac{\omega_f(\delta_2)}{\delta_2} \le 2\frac{\omega_f(\delta_1)}{\delta_1}(\delta_1 < \delta_2) \tag{5.16}$$

eşitsizliğinden

$$\int_{\Gamma_2'} \omega_f(u_1)\left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} D_{k,j}^*(u_1,u_2)\right| du_1 du_2$$
$$\lesssim n\int_0^{\frac{\alpha_{n,n}}{3(n+1)}} \int_{\alpha_{n,n}}^{1} \frac{\omega_f(u_1)}{u_1} du_1 du_2 \lesssim \alpha_{n,n} F(\alpha_{n,n}) \quad , \qquad (j=2,3)$$

elde edilir.

$(u_1,u_2) \in \Gamma_2'' \cup \Gamma_3$ için $D_k^*$ fonksiyonunun başka bir ifadesini kullanacağız.

$x+y+z=0$ için

$\sin(2x)+\sin(2y)+\sin(2z) = -4\sin x \sin y \sin z$

sağlandığından

$$H_{k,1}^*(u_1,u_2) := \frac{1}{2}\frac{\cos((2k+1)u_2\pi)}{\sin\left(\frac{u_1+u_2}{2}\pi\right)\sin\left(\frac{u_1-u_2}{2}\pi\right)},$$
$$H_{k,2}^*(u_1,u_2) := -\frac{1}{2}\frac{\cos\left((2k+1)\frac{u_1+u_2}{2}\pi\right)}{\sin(u_2\pi)\sin\left(\frac{u_1-u_2}{2}\pi\right)}, \tag{5.17}$$
$$H_{k,3}^*(u_1,u_2) := \frac{1}{2}\frac{\cos\left((2k+1)\frac{u_1-u_2}{2}\pi\right)}{\sin(u_2\pi)\sin\left(\frac{u_1+u_2}{2}\pi\right)},$$

olmak üzere

$D_k^*(u_1,u_2) = H_{k,1}^*(u_1,u_2) + H_{k,2}^*(u_1,u_2) + H_{k,3}^*(u_1,u_2),$

elde edilir.

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\cos(2k+1)t\right| \lesssim \frac{\alpha_{n,n}}{t}\left(0<t\le\frac{\pi}{2}\right) \tag{5.18}$$

olduğundan

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} H_{k,j}^*(u_1,u_2)\right| \lesssim \frac{\alpha_{n,n}}{u_1^2 u_2} (j=1,2,3) \tag{5.19}$$

elde edilir. Buradan da

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} D_k^*(u_1,u_2)\right| \lesssim \frac{\alpha_{n,n}}{u_1^2 u_2}, (u_1,u_2) \in \Gamma_2'' \cup \Gamma_3 \tag{5.20}$$

elde edilir.

Buradan

$$
\int_{\Gamma_2''} \omega_f(u_1)\left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} D_k^*(u_1,u_2)\right| du_1 du_2
$$
$$
\lesssim \alpha_{n,n}\int_{\frac{\alpha_{n,n}}{3(n+1)}}^{\frac{\alpha_{n,n}}{3}} \int_{\alpha_{n,n}}^{1} \frac{\omega_f(u_1)}{u_1^2 u_2} du_1 du_2 \lesssim \alpha_{n,n} F(\alpha_{n,n}) \int_{\frac{\alpha_{n,n}}{3(n+1)}}^{\frac{\alpha_{n,n}}{3}} \frac{1}{u_2} du_2
$$
$$
= \alpha_{n,n} F(\alpha_{n,n}) \log(n+1).
$$
olur.

Sonuç olarak

$I_{n,2} \lesssim \alpha_{n,n} F(\alpha_{n,n}) \log(n+1)$

elde edilir.

(5.1), (5.20) den

$$
I_{n,3} = \int_{\Gamma_3} \omega_f(u_1)\left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} D_k^*(u_1,u_2)\right| du_1 du_2 \lesssim \alpha_{n,n}\int_{\alpha_{n,n}}^{1}\int_{\frac{\alpha_{n,n}}{3}}^{\frac{u_1}{3}} \frac{\omega_f(u_1)}{u_1^2 u_2} du_2 du_1
$$
$$
\leq \alpha_{n,n} \log\left(\frac{1}{\alpha_{n,n}}\right) \int_{\alpha_{n,n}}^{1} \frac{\omega_f(u_1)}{u_1^2} du_1 \lesssim \alpha_{n,n} F(\alpha_{n,n}) \log\left(\frac{1}{\alpha_{n,n}}\right).
$$

Bütün sonuçlar toplandığında

$$
I_n \lesssim \alpha_{n,n} F(\alpha_{n,n}) \log\left(\frac{n+1}{\alpha_{n,n}}\right)
$$

elde edilir.

**Teorem 5.6.** $f \in C_{\mathbf{H}}(\overline{\Omega})$ olsun. $F \geq 0$ biçiminde bir $F$ fonksiyonu için,

$$
\int_{\delta}^{1} \frac{\omega_f(u)}{u^2} du \lesssim F(\delta) \ (\delta \to 0^+)
$$

olduğunu varsayalım.

$$
\alpha_{n,k} := \sum_{v=0}^{k} \left|a_{n,v} - a_{n,v+1}\right|
$$

olmak üzere

$$
\left\| f - T_n^{(A)}(f) \right\|_{C_H(\overline{\Omega})} \lesssim \omega_f(\alpha_{n,n}) (\log(n+1))^2 + \alpha_{n,n} F(\alpha_{n,n}) \log\left(\frac{n+1}{\alpha_{n,n}}\right) \ (\forall n \in \mathbb{N})
$$

olur.

**İspat.**

$$\left|f(\mathbf{t})-T_n^{(A)}(f)(\mathbf{t})\right| \leq \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} |f(\mathbf{t})-f(\mathbf{t}-\mathbf{u})| \left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}D_k(\mathbf{u})\right| d\mathbf{u}$$

$$\lesssim \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} \omega_f(\|\mathbf{u}\|) \left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}D_k(\mathbf{u})\right| d\mathbf{u}$$

(5.7) denkleminden

$$I_{n,j} := \int_{\Gamma_j} \omega_f(u_1) \left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}D_k^*(u_1,u_2)\right| du_1 du_2 (j=1,2,3),$$

$$I_n = I_{n,1} + I_{n,2} + I_{n,3}$$

integrallerini hesaplamak yeterlidir.

$(u_1,u_2) \in \Gamma_1'$ için

$$\int_{\Gamma_1'} \omega_f(u_1) \left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}D_k^*(u_1,u_2)\right| du_1 du_2$$

$$\lesssim (n+1)^2 \int_0^{\frac{\alpha_{n,n}}{3(n+1)}} \int_{3u_2}^{\frac{\alpha_{n,n}}{n+1}} \omega_f(u_1) du_1 du_2 \leq \omega_f(\alpha_{n,n})$$

olur.

$$\int_{\Gamma_1''} \omega_f(u_1) \left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}D_{k,1}^*(u_1,u_2)\right| du_1 du_2$$

$$\lesssim \int_0^{\frac{\alpha_{n,n}}{3(n+1)}} \int_{\frac{\alpha_{n,n}}{n+1}}^{\alpha_{n,n}} \frac{\omega_f(u_1)}{u_1^2} du_1 du_2 \leq \omega_f(\alpha_{n,n}) \log(n+1)$$

ve

$j = 2,3$ için,

$$\int_{\Gamma_1''} \omega_f(u_1) \left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}D_{k,j}^*(u_1,u_2)\right| du_1 du_2$$

$$\lesssim n \int_0^{\frac{\alpha_{n,n}}{3(n+1)}} \int_{\frac{\alpha_{n,n}}{n+1}}^{\alpha_{n,n}} \frac{\omega_f(u_1)}{u_1} du_1 du_2 \leq \omega_f(\alpha_{n,n}) \log(n+1)$$

bulunur.

$$\int_{\Gamma_1'''} \omega_f(u_1) \left| \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} D_{k,1}^*(u_1, u_2) \right| du_1 du_2$$

$$\lesssim \int_{\frac{\alpha_{n,n}}{3(n+1)}}^{\frac{\alpha_{n,n}}{3}} \int_{3u_2}^{\alpha_{n,n}} \frac{\omega_f(u_1)}{u_1^2} du_1 du_2 \leq \omega_f(\alpha_{n,n}) \log(n+1)$$

ve

$$\int_{\Gamma_1'''} \omega_f(u_1) \left| \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} D_{k,j}^*(u_1, u_2) \right| du_1 du_2$$

$$\lesssim \int_{\frac{\alpha_{n,n}}{(n+1)}}^{\alpha_{n,n}} \int_{\frac{\alpha_{n,n}}{(n+1)}}^{\frac{u_1}{3}} \frac{\omega_f(u_1)}{u_1 u_2} du_2 du_1$$

$$\leq \log(n+1) \int_{\frac{\alpha_{n,n}}{(n+1)}}^{\alpha_{n,n}} \frac{\omega_f(u_1)}{u_1} du_1 \lesssim \omega_f(\alpha_{n,n}) (\log(n+1))^2 \ (j = 2,3)$$

olur.

Buradan

$$I_{n,1} \lesssim \omega_f(\alpha_{n,n}) (\log(n+1))^2$$

elde edilir.

$$\int_{\Gamma_2'} \omega_f(u_1) \left| \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} D_{k,1}^*(u_1, u_2) \right| du_1 du_2$$

$$\lesssim \int_0^{\frac{\alpha_{n,n}}{3(n+1)}} \int_{\alpha_{n,n}}^{1} \frac{\omega_f(u_1)}{u_1^2} du_1 du_2 \lesssim \alpha_{n,n} F(\alpha_{n,n})$$

ve

$$\int_{\Gamma_2'} \omega_f(u_1) \left| \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} D_{k,j}^*(u_1, u_2) \right| du_1 du_2 \qquad , j = 2,3$$

$$\lesssim n \int_0^{\frac{\alpha_{n,n}}{3(n+1)}} \int_{\alpha_{n,n}}^{1} \frac{\omega_f(u_1)}{u_1} du_1 du_2 \lesssim \omega_f(\alpha_{n,n})$$

bulunur.

$$\int_{\Gamma_2''} \omega_f(u_1) \left| \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} D_k^*(u_1, u_2) \right| du_1 du_2$$

$$\lesssim \alpha_{n,n} \int_{\frac{\alpha_{n,n}}{3(n+1)}}^{\frac{\alpha_{n,n}}{3}} \int_{\alpha_{n,n}}^{1} \frac{\omega_f(u_1)}{u_1^2 u_2} du_1 du_2 \lesssim \alpha_{n,n} F(\alpha_{n,n}) \int_{\frac{\alpha_{n,n}}{3(n+1)}}^{\frac{\alpha_{n,n}}{3}} \frac{1}{u_2} du_2$$

$$= \alpha_{n,n} F(\alpha_{n,n}) \log(n+1)$$

buradan da

$$I_{n,2} \lesssim \omega_f(\alpha_{n,n}) + \alpha_{n,n}F(\alpha_{n,n})\log(n+1)$$

elde edilir. Son olarak

$$I_{n,3} = \int_{\Gamma_3} \omega_f(u_1)\left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}D_k^*(u_1,u_2)\right| du_1du_2 \lesssim \alpha_{n,n}\int_{\alpha_{n,n}}^{1}\int_{\frac{\alpha_{n,n}}{3}}^{\frac{u_1}{3}} \frac{\omega_f(u_1)}{u_1^2u_2}du_2du_1$$
$$\leq \alpha_{n,n}\log\left(\frac{1}{\alpha_{n,n}}\right)\int_{\alpha_{n,n}}^{1}\frac{\omega_f(u_1)}{u_1^2}du_1 \lesssim \alpha_{n,n}F(\alpha_{n,n})\log\left(\frac{1}{\alpha_{n,n}}\right).$$

ve buradan

$$I_n \lesssim \omega_f(\alpha_{n,n})(\log(n+1))^2 + \alpha_{n,n}F(\alpha_{n,n})\log\left(\frac{n+1}{\alpha_{n,n}}\right)(\forall n \in \mathbb{N})$$

bulunur.

**Teorem 5.7.** $f \in C_{\mathbf{H}}(\overline{\Omega})$ olsun.

$$A_{n,m} := \sum_{v=0}^{m} a_{n,v} \quad \text{ve} \quad \gamma_{n,m} := \sum_{k=m}^{n}\left|a_{n,k} - a_{n,k+1}\right|$$

olmak üzere

$$\left\|f - T_n^{(A)}(f)\right\|_{C_H(\overline{\Omega})} \lesssim \log(n+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{\omega_H\left(f,\frac{1}{k}\right)}{k}(A_{n,k} + k\gamma_{n,k})$$

olur.

Bu teoremin ispatında aşağıdaki lemmadan yararlanılacaktır.

**Lemma 5.8.** [6] $A = (a_{n,k})(n,k = 0,1,\dots)$ negatif olmayan reel sayılardan oluşan alt üçgensel sonsuz bir matris olsun. O halde

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\cos(2k+1)t\right| \lesssim A_n\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{\pi\gamma_{n,m}}{t}\left(0 < t \leq \frac{\pi}{2}\right)(0 \leq m \leq n) \qquad (5.21)$$

olur.

Ek olarak

$$A_{n,k} := \sum_{\nu=0}^{k} a_{n,\nu}(0 \leq k \leq n), A_n(u) := A_{n,[u]}, (u > 0)$$

olarak tanımlanır.

**Teorem 5.7.'nin ispatı.** $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ olmak üzere $\Gamma$ üçgenini aşağıdaki şekilde üç bölgeye ayırırsak,

$$\Gamma_1 := \left\{(u_1, u_2) \in \Gamma : u_1 \leq \frac{1}{n+1}\right\}$$

$$\Gamma_2 := \left\{(u_1, u_2) \in \Gamma : u_1 \geq \frac{1}{n+1}, u_2 \leq \frac{1}{3(n+1)}\right\}$$

$$\Gamma_3 := \left\{(u_1, u_2) \in \Gamma : u_1 \geq \frac{1}{n+1}, u_2 \geq \frac{1}{3(n+1)}\right\}$$

(5.7) den

$I_n = I_{n,1} + I_{n,2} + I_{n,3}$ için

$$I_{n,j} := \int_{\Gamma_j} \omega_H(f, u_1) \left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} D_k^*(u_1, u_2)\right| du_1 du_2 (j = 1,2,3)$$

integralini değerlendirmek yeterlidir.

$$\begin{aligned} I_{n,1} &= \int_{\Gamma_1} \omega_H(f, u_1) \left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} D_k^*(u_1, u_2)\right| du_1 du_2 \\ &\lesssim \int_{\Gamma_1} \omega_H(f, u_1) \left(\sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 a_{n,k}\right) du_1 du_2 \\ &\leq (n+1)^2 \int_0^{\frac{1}{3(n+1)}} \int_{3u_2}^{\frac{1}{n+1}} \omega_H(f, u_1) du_1 du_2 \leq \omega_H\left(f, \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

$\Gamma_2$ bölgesini şu şekilde ayıracak olursak

$$\Gamma_2' := \left\{(u_1, u_2) \in \Gamma_2 : u_2 \leq \frac{a_{n,0}}{3(n+1)}\right\}$$

$$\Gamma_2'' := \left\{(u_1, u_2) \in \Gamma_2 : u_2 \geq \frac{a_{n,0}}{3(n+1)}\right\}'$$

bu bölgedeki integraller sırasıyla

$$I_{n,2}' := \int_{\Gamma_2'} \omega_H(f, u_1) \left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} D_k^*(u_1, u_2)\right| du_1 du_2$$

ve

$$I_{n,2}'' := \int_{\Gamma_2''} \omega_H(f, u_1) \left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} D_k^*(u_1, u_2)\right| du_1 du_2$$

olmak üzere

$I_{n,2} = I_{n,2}' + I_{n,2}''$

olur.

Buradan

$$\int_{\Gamma_2'} \omega_H(f,u_1)\left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}D_{k,1}^{*}(u_1,u_2)\right| du_1du_2$$

$$\lesssim \int_0^{\frac{a_{n,0}}{3(n+1)}} \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} \frac{\omega_H(f,u_1)}{u_1^2} du_1du_2 = \frac{a_{n,0}}{3(n+1)} \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} \frac{\omega_H(f,u_1)}{u_1^2} du_1$$

$$\leq 2\frac{a_{n,0}}{3(n+1)}(n+1)\omega_H\left(f,\frac{1}{n+1}\right)\int_{\frac{1}{n+1}}^{1} \frac{du_1}{u_1} \lesssim \log(n+1)\omega_H\left(f,\frac{1}{n+1}\right)$$

ve

$$\int_{\Gamma_2'} \omega_H(f,u_1)\left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}D_{k,j}^{*}(u_1,u_2)\right| du_1du_2$$

$$\lesssim n\int_0^{\frac{a_{n,0}}{3(n+1)}} \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} \frac{\omega_H(f,u_1)}{u_1} du_1du_2 = n\frac{a_{n,0}}{3(n+1)} \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} \frac{\omega_H(f,u_1)}{u_1} du_1, j = 2,3$$

$$\leq \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} \frac{\omega_H(f,u_1)}{u_1^2} du_1 \lesssim \log(n+1)\omega_H\left(f,\frac{1}{n+1}\right)$$

olur.

Sonuç olarak

$$I_{n,2}' \lesssim \log(n+1)\omega_H\left(f,\frac{1}{n+1}\right)$$

elde edilir.

$$\int_{\Gamma_2''} \omega_H(f,u_1)\left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}H_{k,1}(u_1,u_2)\right| du_1du_2$$

$$\lesssim \int_{\frac{a_{n,0}}{3(n+1)}}^{\frac{1}{3(n+1)}} \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} \frac{\omega_H(f,u_1)}{u_1^2} du_1du_2 \leq 2(n+1)\omega_H\left(f,\frac{1}{n+1}\right)\int_{\frac{a_{n,0}}{3(n+1)}}^{\frac{1}{n+1}} \frac{du_1du_2}{u_1}$$

$$\leq \log(n+1)\omega_H\left(f,\frac{1}{n+1}\right).$$

elde edilir.

(5.21) denkleminden , $(u_1,u_2) \in \Gamma_2'' \cup \Gamma_3$ için

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}H_{k,1}(u_1,u_2)\right| \lesssim \frac{1}{u_1^2}\left(A_n\left(\frac{1}{\pi u_2}\right) + \frac{\gamma_{n,m}}{u_2}\right) \tag{5.22}$$

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}H_{k,j}(u_1,u_2)\right| \lesssim \frac{1}{u_1u_2}(A_n\left(\frac{3}{\pi u_1}\right)+\frac{3\gamma_{n,m}}{u_1}),(j=2,3) \quad (5.23)$$

olur.

(5.23) den, $j = 2,3$ için

$$\int_{\Gamma_2''} \omega_f(u_1)\left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}H_{k,j}(u_1,u_2)\right| du_1du_2\text{w}$$

$$\lesssim \int_{\frac{a_{n,0}}{3(n+1)}}^{\frac{1}{3(n+1)}} \int_{\frac{1}{(n+1)}}^{1} \frac{\omega_f(u_1)}{u_1u_2}(A_n\left(\frac{3}{\pi u_1}\right)+\frac{3\gamma_{n,m}}{u_1})du_1du_2$$

$$= \log\left(\frac{1}{a_{n,0}}\right)\int_{\frac{1}{(n+1)}}^{1} \frac{\omega_f(u_1)}{u_1}(A_n\left(\frac{3}{\pi u_1}\right)+\frac{3\gamma_{n,m}}{u_1})du_1$$

$$= \log\left(\frac{1}{a_{n,0}}\right)\int_{\frac{3}{\pi}}^{\frac{3}{\pi}(n+1)} \frac{\omega_f\left(\frac{3}{\pi t}\right)}{t}(A_n(t)+\pi t\gamma_{n,m})dt$$

$$= \log\left(\frac{1}{a_{n,0}}\right)\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{\frac{3}{\pi}k}^{\frac{3}{\pi}(k+1)} \frac{\omega_f\left(\frac{3}{\pi t}\right)}{t}(A_n(t)+\pi t\gamma_{n,k})dt\right)$$

$$\leq \log\left(\frac{1}{a_{n,0}}\right)\sum_{k=1}^{n} \frac{\omega_f\left(\frac{1}{k}\right)}{k}(A_n\left(\frac{3}{\pi}(k+1)\right)+k\gamma_{n,k})$$

$$\leq \log\left(\frac{1}{a_{n,0}}\right)\sum_{k=1}^{n} \frac{\omega_H\left(f,\frac{1}{k}\right)}{k}(A_{n,k+1}+k\gamma_{n,k})$$

$$\lesssim \log(n+1)\sum_{k=1}^{n} \frac{\omega_H\left(f,\frac{1}{k}\right)}{k}(A_{n,k}+k\gamma_{n,k}), j=2,3$$

$$I_{n,2}'' \lesssim \log(n+1)\left\{\omega_H\left(f,\frac{1}{n+1}\right)+\sum_{k=1}^{n} \frac{\omega_H\left(f,\frac{1}{k}\right)}{k}(A_{n,k}+k\gamma_{n,k})\right\}$$

elde edilir.

(5.22) den,

$$\int_{\Gamma_3} \omega_f(u_1)\left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}H_{k,1}(u_1,u_2)\right| du_1du_2$$

$$\lesssim \int_{\frac{1}{3(n+1)}}^{\frac{1}{3}} \int_{3u_2}^{1} \frac{\omega_f(u_1)}{u_1^2}(A_n\left(\frac{1}{\pi u_2}\right) + \frac{\gamma_{n,m}}{u_2})du_1 du_2$$

$$\leq \frac{2}{3}\int_{\frac{1}{3(n+1)}}^{\frac{1}{3}} \int_{3u_2}^{1} \frac{\omega_f(3u_2)}{u_1 u_2}(A_n\left(\frac{1}{\pi u_2}\right) + \frac{\gamma_{n,m}}{u_2})du_1 du_2$$

$$= \frac{2}{3}\int_{\frac{1}{3(n+1)}}^{\frac{1}{3}} \frac{\omega_H(f, 3u_2)}{u_2}\log\left(\frac{1}{3u_2}\right)(A_n\left(\frac{1}{\pi u_2}\right) + \frac{\gamma_{n,m}}{u_2})du_2$$

$$\leq \log(n+1)\int_{\frac{1}{3(n+1)}}^{\frac{1}{3}} \frac{\omega_f(3u_2)}{u_2}(A_n\left(\frac{1}{\pi u_2}\right) + \frac{\gamma_{n,m}}{u_2})du_2$$

$$\leq \log(n+1)\int_{\frac{3}{\pi}}^{\frac{3}{\pi}(n+1)} \frac{\omega_f\left(\frac{3}{\pi t}\right)}{t}(A_n(t) + \pi t\gamma_{n,m})dt$$

$$\leq \log(n+1)\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{\frac{3}{\pi}k}^{\frac{3}{\pi}(k+1)} \frac{\omega_f\left(\frac{3}{\pi t}\right)}{t}(A_n(t) + t\gamma_{n,k})dt\right)$$

$$\leq \log(n+1)\sum_{k=1}^{n} \frac{\omega_f\left(\frac{1}{k}\right)}{k}(A_n\left(\frac{3}{\pi}(k+1)\right) + k\gamma_{n,k})$$

$$\lesssim \log(n+1)\sum_{k=1}^{n} \frac{\omega_H\left(f, \frac{1}{k}\right)}{k}(A_{n,k} + k\gamma_{n,k})$$

bulunur.

$j = 2{,}3$ için

$$\int_{\Gamma_3} \omega_f(u_1)\left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}H_{k,j}(u_1, u_2)\right| du_1 du_2$$

$$\lesssim \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} \int_{\frac{1}{3(n+1)}}^{\frac{u_1}{3}} \frac{\omega_f(u_1)}{u_1 u_2}(A_n\left(\frac{3}{\pi u_1}\right) + \frac{3\gamma_{n,m}}{u_1})du_2 du_1$$

$$= \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} \frac{\omega_f(u_1)}{u_1}\log\left(\frac{u_1}{\alpha_{n,n}}\right)(A_n\left(\frac{3}{\pi u_1}\right) + \frac{3\gamma_{n,m}}{u_1})du_1$$

$$\lesssim \log(n+1)\sum_{k=1}^{n} \frac{\omega_H\left(f, \frac{1}{k}\right)}{k}(A_{n,k} + k\gamma_{n,k})$$

elde edilir.

$$\omega_H\left(f,\frac{1}{n+1}\right)\leq \omega_H\left(f,\frac{1}{n}\right)=\frac{n\omega_H\left(f,\frac{1}{n}\right)}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\omega_H\left(f,\frac{1}{n}\right)}{n}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\omega_H\left(f,\frac{1}{n}\right)\frac{A_{n,n}}{n}\leq\sum_{k=1}^{n}\omega_H\left(f,\frac{1}{k}\right)\frac{A_{n,k}}{k}$$

olduğundan,

sonuç olarak

$$I_n \lesssim \log(n+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{\omega_H\left(f,\frac{1}{k}\right)}{k}(A_{n,k}+k\gamma_{n,k})$$

bulunur.

## 6. KAYNAKLAR


[1] **Fuglede, B.,** Commuting self-adjoint partial differential operators and a group theoretic problem. J. Funct. Anal. 16, 101-121, (1974).

[2] **Guven, A.,** Approximation by means of hexagonal Fourier series in Hölder norms., J. Class. Anal. 1, 43-52, (2012).

[3] **Guven, A.,** Approximation by (C, 1) and Abel-Poisson means of Fourier series on hexagonal domains. Math. Inequal. Appl. 16, 175-191, (2013).

[4] **Guven, A.,** Approximation by Riesz means of hexagonal Fourier series., Z. Anal. Anwend. 36, 1-16, (2017).

[5] **Guven, A.,** Approximation of Continuous Functions by Matrix Means of Hexagonal Fourier Series, Results in Math. 73, (2018).

[6] **Guven, A.,** Degree of approximation by means of hexagonal Fourier series, Turk J Math 44, 970 – 985, (2020).

[7] **Leindler, L.,** On the degree of approximation of continuous functions. Acta Math. Hung. 104, 105-113, (2004).

[8] **Leindler, L.,** On the degree of approximation of continuous functions. Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. 29, 93-99, (2008).

[9] **Li, H., Sun, J., Xu, Y.,** Discrete Fourier analysis, cubature and interpolation on a hexagon and a triangle. SIAM J. Numer. Anal. 46, 1653-1681, (2008).

[10] **Timan, A.F.,**Theory of Approximation of Functions of a Real Variable. Pergamon Press, New York , (1963).

[11] **Xu, Y.,** Fourier series and approximation on hexagonal and triangular domains. Constr. Approx. 31, 115-138, (2010).

[12] **Zygmund, A.,** Trigonometric Series, vol. I-II, 2nd edn. Cambridge University Press, Cambridge, (1959).

[13] **P. Chandra,** “A note on the degree of approximation of contınuous functions”, Acta Math. Hung. vol.62, pp. 21-23, (1993).

# ÖZGEÇMİŞ

**Kişisel Bilgiler**

Adı Soyadı : Uğur Can KOÇTÜRK

Doğum tarihi ve yeri :

e-posta :

**Öğrenim Bilgileri**

| **Derece** | **Okul/Program** | **Yıl** |
|---|---|---|
| Lisans | Balıkesir Üniversitesi/ Matematik Bölümü | 2018-2022 |
| Lise | Namık Kemal Anadolu Lisesi | 2014-2018 |