ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ALİ ARSLAN ÖZKURT

BAZI BÖLÜM UZAYLARININ ESAS GRUPLARI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA 2000

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI BÖLÜM UZAYLARININ ESAS GRUPLARI

ALİ ARSLAN ÖZKURT
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANBİLİM DALI

Bu tez 31/01/2000 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği İle Kabul Edilmiştir.

İmza........Doğan Dönmez........ İmza.......Yusuf Ünlü....... İmza.......T. Önder.......

Doç.Dr.Doğan DÖNMEZ............Prof.Dr.Yusuf ÜNLÜ.....Prof.Dr.Turgut ÖNDER

DANIŞMAN ÜYE ÜYE

Bu tez Enstitümüz matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Kod No: 1696

Prof.Dr MELİH BORAL
Enstitü Müdürü
İmza ve Mühür

İÇİNDEKİLER SAYFA

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI BÖLÜM UZAYLARININ ESAS GRUPLARI

ALİ ARSLAN ÖZKURT

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Doğan DÖNMEZ
Yıl : 2000, Sayfa: 50
Jüri : Doç.Dr.: Doğan DÖNMEZ
: Prof.Dr.: Yusuf ÜNLÜ
: Prof.Dr.: Turgut ÖNDER

Örtü uzaylarında esas gruplar, ve (bazı durumlarda) homoloji grupları arasında bilinen ilişkiler vardır. Bunun benzeri, bazen, bazı grupların etkisi altında oluşan orbit uzayları ile verilen uzayın esas grupları ve homoloji grupları arasında da vardır.

Bu çalışmada önce örtü uzaylarının homoloji grupları arasında ki ilişkiler incelenmiş, daha sonra grup etkileri ve dönüşüm grupları ile ilgili temel bilgiler verilerek bunlarla ilgili bazı problemler çözülmüştür.

Son olarak bir kompakt Lie grup etkisi altında oluşan orbit uzaylarının esas grubu ile verilen uzayın esas grubu arasında ki ilişkilerin örtü uzaylarında ki duruma benzerlikleri tartışılmış, benzer ilişkiler gösterilip, benzemeyenlerede aksi örnekler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Esas Grup, Örtü Uzayları, Lie Grup, Grup Etkisi, Homoloji Grupları

ABSTRACT

MSc THESIS

FUNDAMENTAL GROUPS OF SOME ORBİT SPACES

ALİ ARSLAN ÖZKURT
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF ÇUKUROVA

Supervisor: Doğan DÖNMEZ
Year: 2000, Pages: 50
Jury : Doç.Dr. Doğan DÖNMEZ
: Prof.Dr. Yusuf ÜNLÜ
: Prof.Dr. Turgut ÖNDER

In covering space, there are well-known relations between the homotopy groups of the total and the base space and in some cases the homologies of those spaces. Similar relations sometimes exist between a space with a group action and its orbit space

In this thesis, we first state and prove these relationships for the covering spaces and then the study the group actions and solve some related problems.

Finally the relationships which hold for covering spaces have been investigated for a topological space with a compact Lie group action and its orbit space. Those relationships which remain valid between fundamental groups has been proved and counter examples are given to those which does not hold.

Key Words: Fundamental Groups, Covering Spaces, Lie Groups, Group Actions, Homology Groups

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanması sırasında tüm bilgi ve tecrübeleriyle beni aydınlatan ve bu çalışmanın her aşamasında değerli zamanlarını ayırarak yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Sayın Doç.Dr. Doğan DÖNMEZ`e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

1.GİRİŞ

Bu tezde genel olarak bir topolojik uzayın esas grubu ile bu uzayın bazı bölüm uzaylarının esas grupları arasındaki ilişkiler araştırılmıştır.

Tezin birinci bölümünde çalışmamıza temel oluşturan bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Örtü uzaylarında esas gruplar arasındaki ilişkiler belirtilmiştir. Ayrıca bir topolojik grubun örtü uzayının da bir topolojik grup olduğu gösterilmiştir.

İkinci bölümde örtü uzaylarının homoloji grupları arasındaki ilşikiler incelenmiş, düzenli, sonlu katlı örtü uzaylarında, homolojiler arasındaki ilişkiler Z_p ve Q katsayıları için gösterilmiştir.

Düzenli sonlu katlı örtü uzayları sonlu bir grubun bir uzay üzerinde serbest etkimesi ile oluşur. Üçüncü bölümde grup etkileri ve dönüşüm grupları incelenmiş bunlarla ilgili bazı problemler çözülmüştür.

Dördüncü bölümde tüpler ve dilimler incelenerek, tam regüler uzayların her noktasında tüpün varlığı gösterilmiştir. Ayrıca kompakt Lie grup etkisi altında oluşan orbit uzaylarının esas grubu ile, verilen uzayın esas grubu arasındaki ilşikilerin, örtü uzaylarındaki duruma benzerlikleri tartışılarak, bazı özelliklerin doğru kaldığı gösterilmiş, doğru olmayanlara aksi örnekler verilmiştir. Tek orbit tipinin var olduğu durumlarda asıl uzayın bölüm uzayı üzerinde bir demet uzayı oluşturduğu gösterilmiş ve bu demet uzayın yapı grubu belirlenmiştir.

1.1 TEMEL GRUP

Tanım 1.1.1: X ve Y topolojik uzaylar ve f, g:$X \to Y$ sürekli fonksiyonlar olsun. Eğer her $x \in X$ için

$$F: X \times I \to Y$$
$$F(x, 0) = f(x)$$
$$F(x, 1) = g(x)$$

olacak şekilde sürekli bir F fonksiyonu varsa F'ye bir homotopi, f de g ye homotopiktir denir, ve $f \approx g$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.2: X bir topolojik uzay x_0, X in sabit bir noktası olsun. Başlangıç ve bitim noktası x_0 da olan bütün kapalı eğrilerin kümesini düşünelim x_0 noktasına bu eğrilerin taban noktası denir. Eğer α, x_0 da kapalı bir eğri ise α ya relatif homotop; (relatif homotopi: eğrilerin uç noktalarını sabit bırakan homotopi) x_0 daki bütün kapalı eğrilerin sınıfını $[\alpha]$ ile gösterelim. Eğrilerin bu sınıflarının çarpımını

$[\alpha][\beta] = [\alpha\beta]$ olarak tanımlayalım

(Burada $\alpha\beta$: I$\to X$, $\alpha\beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$ olarak tanımlanır.)

Bu çarpım iyi tanımlı olur. x_0 daki eğrilerin homotopi sınıflarının kümesini $\pi_1(X, x_0)$ ile gösterelim. Bu küme yukarıdaki tanımlanan eğri sınıflarının çarpma işlemi ile bir gruptur. $\pi_1(X, x_0)$ grubuna X'in $x_0$noktasındaki esas (temel) grubu veya X in x_0 tabanlı 1. homotopi grubu denir.

Teorem 1.1.3: X yol bağlantılı bir topolojik uzay; x_0 ve x_1 X in herhangi iki noktası olsun $\pi_1(X,x_0) \cong \pi_1(X,x_1)$ dir. Yani, $\pi_1(X,x_0)$, $\pi_1(X,x_1)$ e izomorftur.

Teorem1.1.4: Eğer f: $X \to Y$ sürekli bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ herhangi bir nokta ise

$$f_*: \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$$
$$f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$$

olarak tanımlanan fonksiyon bir grup homomorfizmasıdır.

Teorem 1.1.5: Top_*: nesneleri, X bir topolojik uzay ve $x_0 \in X$ olmak üzere (X, x_0) sıralı ikilileri; morfizmleri ise f:$(X, x_0) \to (Y, y_0)$ $f(x_0) = y_0$ olacak şekilde sürekli fonksiyonlar olan kategori olmak üzere

π_1: $\mathrm{Top}_* \to$Gruplar kategorisi

$(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ $f \to f_*$ bir kovaryant funktordur.

Tanım 1.1.6: X ve Y iki topolojik uzay olsun. Eğer $f \circ g \simeq 1_Y$ ve $g \circ f \simeq 1_X$ olacak şekilde sürekli f:$X \to Y$ ve g:$Y \to X$ fonksiyonları varsa X ve Y uzaylarına aynı homotopi tipinde uzaylar denir.

Teorem 1.1.7: Aynı homotopi tipindeki uzayların esas grupları izomorftur.

Tanım 1.1.8: Tek elemanlı uzaya homotopik olan uzaya "büzülebilir" uzay denir.

Tanım 1.1.9: Eğer X topolojik uzayı yol bağlantılı ve bir $x_0 \in X$ için $\pi_1(X, x_0) = 0$ (bu durumda her $x_1 \in X$ için $\pi_1(X, x_1) = 0$ olur.)ise X uzayına basit bağlantılı uzay denir.

Tanım 1.1.10: G bir grup ve aynı zamanda bir topolojik uzay ve G üzerindeki grup işlemi $\bullet$ olsun. Eğer,

$$\bullet : G \times G \to G \qquad \text{ve} \qquad f : G \to G$$
$$(g, h) \to g \bullet h \qquad\qquad g \to g^{-1}$$

fonksiyonları sürekliyse G ye topolojik grup denir.

Teorem 1.1.11: G bir topolojik grup; e, G nin birim elemanı f ve g, G de e noktasında kapalı eğriler, $\bullet$ grup işlemi ise;

$fg \approx f \bullet g$ dir. Yani $[fg] = [f \bullet g]$ dir.

İspat 1.1.11: f ve g, G de e noktasında iki kapalı eğri olsun; 1_e e deki sabit eğriyi göstermek üzere $[f] = [f 1_e]$ ve $[g] = [1_e g]$ dir.

$$fg(t) = \begin{cases} f(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

$t \in I$ olsun; $t \in [0, \frac{1}{2}]$ için $fg(t) = f(2t)$, $f 1_e(t) = f(2t)$, $1_e g(t) = e$ olup

$fg(t) = f 1_e(t) \bullet 1_e g(t)$ olur. Eğer $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ ise $fg(t) = g(2t-1)$, $f 1_e(t) = e$, $1_e g(t) = g(2t-1)$

olup, $fg(t) = f 1_e(t) \bullet 1_e g(t)$ olur. Dolayısıyla; $fg = (f 1_e) \bullet (1_e g)$ dir.

Şimdi $(f 1_e) \bullet (1_e g) \approx f \bullet g$ olduğunu gösterelim;

$[f] = [f 1_e]$ olup aradaki homotopi H olsun. $[g] = [1_e g]$ olup aradaki homotopi F olsun;

$$K : I \times I \to G$$
$$K(s, t) = H(s, t) \bullet F(s, t)$$

olarak tanımlanan fonksiyon sürekli olup, bu fonksiyon

$f(t) \bullet g(t)$ ile $f\,1_e(t) \bullet 1_e\,g(t)$ arasındaki uç noktaları sabit bırakan bir homotopidir

O halde;

$$f\,1_e(t) \bullet 1_e g(t) \approx f(t) \bullet g(t) \text{ olup dolayısıyla; } fg \approx f \bullet g \text{ dir.}$$

Teorem 1.1.12: G bir topolojik grup; e, G'nin birim elemanı ise $\pi_1(G, e)$ değişmeli gruptur.

İspat 1.1.12 m $: G\times G \to G$ m(g, h) = gh olsun G'nin topolojik grup olmasından, m süreklidir. Şimdi;

θ: $\pi_1(G, e) \times \pi_1(G, e) \to \pi_1(G\times G, (e,e))$, $\theta([f], [g]) = [(f, g)]$ olarak tanımlanan dönüşüm bir izomorfizmadır. Burada $(f, g): I \to G\times G$ $(f, g)(t) = (f(t), g(t))$ olarak tanımlanır. O halde;

$$[g] = [1_e g] = [1_e g] \text{ olup;}$$

$$[g] = m_* \theta([1_e], [g]) \text{ dir. Benzer şekilde;}$$

$$[f] = m_* \theta([f], [1_e]) \text{ dir.}$$

K ve H herhangi iki grup olsun. İki grubun direkt çarpımında her $x \in K$ ve her $y \in H$ için $(x, 1)(1', y) = (x, y) = (1', y)(x, 1)$ olur. (1,K nın; $1'$,H nin birim elemanı) O halde;

$$[f] \bullet [g] = m_*(\theta([f], [1_e])) \bullet m_*(\theta([1_e], [g]))$$

$$= m_*(\theta([f], [1_e])\,\theta([1_e], [g])) = m_*(\theta(([f], [1_e])\,([1_e], [g])))$$

$$= m_*(\theta(([1_e], [g])\,([f], [1_e]))) = m_*(\theta([1_e], [g])\,\theta([f], [1_e]))$$

$$= (m_*(\theta([1_e], [g]) \bullet m_*(\theta\,([f], [1_e])$$

$= [g] \bullet [f]$ dir. Dolayısıyla $[f][g] = [g][f]$ olup $\pi_1(G, e)$ değişmelidir.

1.2 ÖRTÜ UZAYLARI

Tanım 1.2.1: X bir topolojik uzay olsun aşağıdaki koşulları sağlayan ($\tilde{X}$, p) çiftine X'in bir örtü uzayı denir.

i. $\tilde{X}$ yol bağlantılı ve Hausdorff topolojik uzay

ii. p: $\tilde{X} \rightarrow X$ sürekli

iii. $x \in X$ için; $p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} U_i$ her $i \in I$ için $U_i \subset X$ açık, $U_i \cap U_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ ve $p|_{U_i} : U_i \rightarrow U$ homeomorfizma olacak şekilde x'in bir U açık komşuluğu var. Böyle bir U'ya x'in bir eş örtülü komşuluğu denir. (X, eş örtülü açık kümelerin birleşimidir.)

Teorem 1.2.2: ($\tilde{X}$, p), X in örtü uzayı ise p örten ve açık dönüşümdür.

Teorem 1.2.3(Monodromi Teoremi): ($\tilde{X}$, p), X in örtü uzayı Y bağlantılı ve yerel yol bağlantılı bir uzay olsun $\alpha, \beta : Y \rightarrow \tilde{X}$ sürekli;

i. $p\alpha = p\beta$

ii. Bir $y_0 \in Y$ için $\alpha(y_0) = \beta(y_0)$ koşullarını sağlayan iki sürekli fonksiyon olsun o zaman $\alpha = \beta$ olur.

Sonuç 1.2.4: ($\tilde{X}$,p), Xin örtü uzayı Y bağlantılı uzay, f: $(Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ sürekli $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ ise $\tilde{f} : (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ ve $p \circ \tilde{f} = f$ olacak şekilde en fazla bir tane sürekli $\tilde{f}$ fonksiyonu vardır. Bu fonksiyona $f$nin yükseltilmesi denir.

Teorem 1.2.5(Yükseltme kriteri): Y bağlantılı ve yerel yol bağlantılı bir uzay, f: $(Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ sürekli bir fonksiyon olsun ($\tilde{X}$, p) X'in örtü uzayı $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ ise aşağıdakiler birbirine denktir.

a) bir $\tilde{f}:(Y, y_0)\to(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, f nin yükseltilmesi vardır

b) $f_*(\pi_1(Y, y_0))\subset p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$

Sonuç1.2.6: $(\tilde{X}, p)$, X in örtü uzayı, f: $(I, 0)\to(X, x_0)$ bir eğri, $\tilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$ ise $\tilde{f}:(I, 0)\to(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ ve $p\circ\tilde{f} = f$ olacak şekilde bir tek sürekli $\tilde{f}$ fonksiyonu vardır.

Tanım1.2.7: $(\tilde{X}, p)$, X'in örtü uzayı ise bu örtü uzayının katlılığı herhangi bir $x_0\in X$ için $|p^{-1}(x_0)|$ dır. (X yol bağlantılı olduğundan, bu kardinal sayı x_0 ın seçiminden bağımsızdır.) Eğer $x_0\in X$ için $|p^{-1}(x_0)|$ sonlu ve $|p^{-1}(x_0)| = m$ ise bu örtü uzayına m katlı örtü uzayı denir.

Tanım 1.2.8: $(\tilde{X}, p)$, X in örtü uzayı olsun, eğer $\tilde{X}$ basit bağlantılı ise $(\tilde{X}, p)$'ye X in bir evrensel örtü uzayı denir.

Tanım1.2.9 (Örtü dönüşümleri): $(\tilde{X}, p)$ X in örtü uzayı olsun. Bir örtü dönüşümü h: $\tilde{X}\to\tilde{X}$ $p\circ h = p$ olacak şekilde bir homeomorfizmadır.
$Cov(\tilde{X}/X)$={h: h bir örtü dönüşümü} kümesi fonksiyon bileşkesi altında bir gruptur. Bu gruba **örtü dönüşümleri** grubu denir.

Tanım 1.2.10: $(\tilde{X}, p)$ X in örtü uzayı olsun. Eğer $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$, $\pi_1(X, x_0)$'ın normal alt grubu ise bu örtü uzayına düzenli örtü uzayı denir.

Teorem 1.2.11: X bağlantılı ve yerel yol bağlantılı, $x_0\in X$ olsun, $(\tilde{X}, p)$ X'in örtü uzayı ise aşağıdakiler birbirine denktir.

a) ($\tilde{X}$, p) düzenli örtü uzayıdır.

b) Cov($\tilde{X}/X$), $p^{-1}(x_0)$ üzerine geçişmeli etki eder. (Yani her $\tilde{x}_0$, $x_0' \in p^{-1}(x_0)$ için $h(\tilde{x}_0) = x_0'$ olacak şekilde bir $h \in$ Cov($\tilde{X}/X$) vardır)

Teorem 1.2.12: ($\tilde{X}$, p), X in düzenli örtü uzayı X yerel yol bağlantılı, $x_0 \in X$ ve $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ olsun Cov($\tilde{X}/X$) $\cong$ $\pi_1(X,x_0) / p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))$ dır.

BİR TOPOLOJİK GRUBUN ÖRTÜ UZAYI

Teorem 1.2.13: G bir topolojik grup, yol bağlantılı ve yerel yol bağlantılı olsun ($\widetilde{G}$,p), G nin bir örtü uzayı ise $\widetilde{G}$ de bir topolojik gruptur.

İspat 1.2.13: $\widetilde{G}$ üzerinde $\widetilde{G}$ yı bir topolojik grup yapacak bir ikili işlem tanımlayacağız. e, G'nin birim elemanı ve $\widetilde{e} \in p^{-1}(e)$ olsun

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{G},\widetilde{e} \arrow[d, "p"] \\ (\widetilde{G}\times\widetilde{G},(\widetilde{e},\widetilde{e})) \arrow[r, "f"] & G,e \end{tikzcd}$$

$f(\widetilde{g},\widetilde{h})=p(\widetilde{g})\bullet p(\widetilde{h})$ olarak tanımlayalım. G topolojik grup olduğundan f süreklidir. f'nin yükseltilmesinin var olduğunu gösterelim. Bunun için

$$f_*(\pi_1(\widetilde{G}\times\widetilde{G},(\widetilde{e},\widetilde{e}))) \subset p_*(\pi_1(\widetilde{G},\widetilde{e})) \text{ olduğunu göstermeliyiz.}$$

$$\pi_1((\widetilde{G}\times\widetilde{G}),(\widetilde{e},\widetilde{e})) \cong \pi_1(\widetilde{G},\widetilde{e})\times\pi_1(\widetilde{G},\widetilde{e}) \text{ dır.}$$

$$([\alpha],[\beta]) \in \pi_1((\widetilde{G}\times\widetilde{G}),(\widetilde{e},\widetilde{e})) \text{ olsun}$$

$f_*(\alpha,\beta)=[(p\circ\alpha)\bullet(p\circ\beta)]=[(p\circ\alpha)]\,[(p\circ\beta)]=[p\circ(\alpha\beta)]=p_*([\alpha\beta])$ olup

dolayısıyla $f_*(\pi_1(\widetilde{G}\times\widetilde{G},(\widetilde{e},\widetilde{e}))) \subset p_*(\pi_1(\widetilde{G},\widetilde{e}))$ dir.

Dolayısıyla f nin yükseltilmesi $\widetilde{f}:\widetilde{G}\times\widetilde{G}\to\widetilde{G}$ vardır ve tektir.

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{G},\widetilde{e} \arrow[d, "p"] \\ (\widetilde{G}\times\widetilde{G},(\widetilde{e},\widetilde{e})) \arrow[ur, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"] & G,e \end{tikzcd}$$

Diagram değişmeli ve $\widetilde{f}$ süreklidir.

$\tilde{f}: \tilde{G}\times\tilde{G}\to\tilde{G}$ bir ikili işlemdir. Şimdi $\tilde{G}$`nın bu ikili işlemle bir grup olduğunu gösterelim.

i. Birleşme özelliği: $a,b,c\in\tilde{G}$ olsun $\tilde{f}(a, (\tilde{f}(b, c))=\tilde{f}(\tilde{f}(a, b), c)$ olduğunu gösterelim.

$$p\circ\tilde{f}(a, \tilde{f}(b, c))=f(a, \tilde{f}(b, c))=p(a)\bullet(p(b)\bullet p(c))$$
$$=(p(a)\bullet p(b))\bullet p(c)=p\circ\tilde{f}(\tilde{f}(a, b), c).$$

Şimdi $\tilde{G}\times\tilde{G}\times\tilde{G}\to G$

$(a,b,c)\to(p(a)\bullet p(b))\bullet p(c)$ olarak tanımlanan fonksiyonu düşünelim bu fonksiyonun bir yükseltilmesi

$$g\colon \tilde{G}\times\tilde{G}\times\tilde{G}\to\tilde{G} \quad g(a,b,c)=\tilde{f}(a, (\tilde{f}(b, c))$$

bir başka yükseltilmesi de

$$h\colon \tilde{G}\times\tilde{G}\times\tilde{G}\to\tilde{G} \quad h(a,b,c)=\tilde{f}(\tilde{f}(a, b), c) \text{ dir.}$$

$g(\tilde{e},\tilde{e},\tilde{e})=h(\tilde{e},\tilde{e},\tilde{e})$ olduğundan monodromi teoreminden $h=g$ dir.

Dolayısıyla $\forall\, a,b,c\in\tilde{G}$ için $\tilde{f}(a,\tilde{f}(b, c))=\tilde{f}(\tilde{f}(a, b),c)$ olur.

ii. $\tilde{e}$ birim elemandır.

$$p\circ\tilde{f}(a, \tilde{e})=p(a)\bullet p(\tilde{e})=p(a)$$

$$\begin{tikzcd} & \tilde{G} \arrow[d, "p"] \\ \tilde{G}\times\tilde{G} \arrow[r, "f"] & G \end{tikzcd}$$

$f(a, b)=p(a)\bullet p(\tilde{e})=p(a)$ olarak tanımlanan f nin yükseltilmesi

$$g\colon \tilde{G}\times\tilde{G}\to\tilde{G}$$

$g(a, b)=\tilde{f}(a, \tilde{e})$ olup bir başka yükseltilmesi de

$$h\colon \tilde{G}\times\tilde{G}\to\tilde{G}$$

$h(a, b)=a$ dır $g(\tilde{e},\tilde{e})=h(\tilde{e},\tilde{e})$ olduğundan monodromi teoreminden $g=h$ dir.

Dolayısıyla her $a\in\tilde{G}$ .için $\tilde{f}(a, \tilde{e})=a$ Benzer şekilde $\tilde{f}(\tilde{e}, a)=a$ olduğu gösterilir.

iii $a \in \widetilde{G}$ ise a nın ters elemanını bulalım.

$f : \widetilde{G} \to G$ $f(a)=(p(a))^{-1}$ olarak tanımlanan fonksiyon G nin topolojik grup olmasından dolayı süreklidir.

$$\begin{tikzcd} & (\widetilde{G},\widetilde{e}) \arrow[d, "p"] \\ \widetilde{G},\widetilde{e} \arrow[r, "f"] & (G,e) \end{tikzcd}$$

$f_*(\pi_1(\widetilde{G},\widetilde{e})) \subset p_*(\pi_1(\widetilde{G},\widetilde{e}))$ olduğunu gösterelim.

$[f\circ\alpha]=[(p\circ\alpha(t))^{-1}]$ ise $f\circ\alpha \approx (p\circ\alpha(t))^{-1} \approx p\alpha^{-1}$. Dolayısıyla $f_*(\pi_1(\widetilde{G},\widetilde{e})) \subset p_*(\pi_1(\widetilde{G},\widetilde{e}))$ olup f nin sürekli bir f' yükseltilmesi vardır.

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{G},\widetilde{e} \arrow[d, "p"] \\ f\colon \widetilde{G},\widetilde{e} \arrow[ur, "f'"] \arrow[r] & G,e \end{tikzcd} \qquad p\circ f'=f$$

$a \in \widetilde{G}$ için $f'(a)$ nın a nın tersi olduğunu gösterelim.

$p\circ\widetilde{f}(a, f'(a))=p(a)\bullet p(f'(a)) = p(a)\bullet p(a)^{-1}=e$

$\phi : \widetilde{G}\times\widetilde{G} \to \widetilde{G}$ $\phi(a,b)=e$ olarak tanımlanan sabit fonksiyonun bir yükseltilmesi $\psi : \widetilde{G}\times\widetilde{G} \to \widetilde{G}$ $\psi(a,b)=\widetilde{e}$ dır.Bir diğer yükseltilmesi de

$\varphi : \widetilde{G}\times\widetilde{G} \to \widetilde{G}$ $\varphi(a,b)=\widetilde{f}(a, f'(a))$ dır.

$\psi(\tilde{e},\tilde{e})=\varphi(\tilde{e},\tilde{e})$ olduğundan monodromi teoreminden dolayı. $\psi=\varphi$ dir. Dolayısıyla her $a\in\tilde{G}$ için $\tilde{f}(a,f'(a))=\tilde{e}$ dır.

Dolayısıyla $\tilde{G}$ bir topolojik gruptur.

1.3 HOMOLOJİ

Tanım 1.3.1: X bir topolojik uzay, Δ^n bir standart n-simpleks olsun. $\sigma:\Delta^n\to X$ sürekli fonksiyonuna X de bir singüler n-simpleks denir.

Tanım 1.3.2: X bir topolojik uzay $\forall n\geq 0$ için $S_n(X)$, X deki singüler n-simplekslerin doğurduğu serbest abelyen grup olsun. $S_n(X)$ in elemanlarına (singüler) n-zincirler denir. $S_{-1}(X)=\{0\}$ olarak tanımlayacağız.

$$S_n(X)=\langle \sigma_n : \sigma_n:\Delta^n\to X\rangle$$

Teorem 1.3.3: her $n\geq 1$ için $\partial_n: S_n(X)\to S_{n-1}(X)$

$$\partial_n(\sigma)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma\circ\varepsilon_i^n\in S_{n-1}(X) \quad ,\partial_0=0$$

$\varepsilon_i^n:\Delta^{n-1}\to\Delta^n$ $\varepsilon_i^n([t_0,\ldots,t_{n-1}])=[t_0,\ldots,t_{i-1},0,t_i,\ldots,t_{n-1}]$

olarak tanımlanan sınır dönüşümü bir homomorfizmadır. O halde;

$$\cdots\cdots\longrightarrow S_n(X)\xrightarrow{\partial_n}S_{n-1}(X)\longrightarrow\cdots\longrightarrow S_1(X)\xrightarrow{\partial_1}S_0(X)\xrightarrow{\partial_0}0$$

abelyen gruplarının dizisini oluşturabiliriz. Bu diziye X in singüler kompleksi denir. ve $(S_*(X),\partial)$ veya kısaca $S_*(X)$ ile gösterilir.

Tanım 1.3.4: $S_*(X)$, X in singüler kompleksi olsun her $n\geq 0$ için X in n. tamsayı katsayılı Singüler homoloji grubu

$$H_n(X,Z)=H_n(X)=\frac{Ker\partial_n}{\operatorname{Im}\partial_{n+1}}=\frac{Z_n(X)}{B_n(X)}$$ olarak tanımlanır.

Teorem 1.3.5 (Hurewicz Teoremi): $\varphi : \pi_1(X,x_0) \to H_1(X, Z)$, $\varphi([f])=[f\mu]$ olarak tanımlanan fonksiyon bir homomorfizmadır.

Buradaki $\mu : \Delta^1 \to I$, $(1\text{-}t)e_0 + te_1 \to t$ olarak tanımlanan homeomorfizmdir. φ'ye Hurewicz homomorfizması denir. Eğer X yol bağlantılı ise φ örten homomorfizma olup, çekirdeği $[\pi_1(X,x_0), \pi_1(X,x_0)]$ komütatör alt grubudur. Bu durumda,

$$H_1(X, Z) \cong \pi_1(X,x_0) / [\pi_1(X,x_0), \pi_1(X,x_0)] \text{ dır.}$$

K bir abelyen grup ise $S_*(X, K) = S_*(X) \otimes_Z K$ ve $\partial_n \otimes 1_K$ zincirinin n inci homoloji grubu $H_n(X, K)$ ile gösterilir.

HOMOLOJİ AKSİYOMLARI

Tanım 1.3.6: ζ, nesneleri bir X topolojik uzayıve onun bir A,alt uzayından oluşan (X,A) çiftler, morfizmleri de $f: X \to Y$, $f(A) \subset B$ olacak şekilde sürekli fonksiyonlar olan kategori olsun. ζ üzerinde bir homoloji teorisi;
$H_* : \zeta \to Ab$=Abelyen gruplar kategorisi olan kovaryant funktorlar dizisidir.Yani her $(X,A) \in Obj\zeta$ için $H_*(X,A)$ bir abelyen grup ve $f : (X,A) \to (Y,B)$ morfizması için $H_*(f) : H_*(X,A) \to H_*(Y,B)$ bir homomorfizma olup ayrıca her $n \geq 1$ için aşağıdaki 5 aksiyomu sağlayan
$\partial_n : H_n(X,A) \to H_{n-1}(A) = H_{n-1}(A, \varnothing)$ homomorfizmaları vardır.

i **Homotopi Aksiyomu:**

$f \simeq g : (X,A) \to (Y,B)$ ise $H_*(f) = H_*(g) : H_*(X,A) \to H_*(Y,B)$

ii **Tamlık aksiyomu:**

$i : A \to X$ ve $j : (A, \varnothing) \to (X, A)$ içerme dönüşümleri ise

$$\cdots\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathrm{H}_n(A) \xrightarrow{\mathrm{H}_n(i)} \mathrm{H}_n(X) \xrightarrow{\mathrm{H}_n(j)} \mathrm{H}_n(X,A) \xrightarrow{\partial_n} \mathrm{H}_{n-1}(A) \xrightarrow{\mathrm{H}_{n-1}(i)}$$

$$\cdots\cdots \mathrm{H}_0(X,A) \longrightarrow 0$$

dizisi tamdır.

iii. **Kesme Aksiyomu:**

$(X,A)\in$ Objζ ve $U\subset A\subset X$, U açık ve $\overline{U}\subset \mathrm{Int}\,A$ olsun.

$i:(X-U,A-U)\rightarrow(X,A)$ içerme dönüşümü ise;

$$\mathrm{H}_n(i):\mathrm{H}_n(X-U,A-U)\rightarrow\mathrm{H}_n(X,A) \text{ izomorfizmdir.}$$

iv. **Boyut Aksiyomu:**

X tek noktadan oluşan bir uzay ise her n>0 için $\mathrm{H}_n(X)=0$ dır.

($G=\mathrm{H}_0(X)$ grubuna katsayı grubu denir.)

v. **Toplanabilirlik Aksiyomu:**

$X=\underset{\alpha}{+}X_\alpha$ ayrık birleşim olsun $i_\alpha : X_\alpha : \rightarrow X$ içerme dönüşümü ise

$$\oplus\,\mathrm{H}_n(i_\alpha):\oplus\,\mathrm{H}_n(X_\alpha)\rightarrow\mathrm{H}_n(X) \text{ bir izomorfizmdir.}$$

BÖLÜM 2

2.1.ÖRTÜ UZAYLARININ HOMOLOJİ GRUPLARI

Teorem 2.1.1: X bağlantılı, yerel yol bağlantılı bir uzay G, X üzerine aşağıdaki koşulu sağlayacak şekilde etki etsin:

Her $x \in X$, ve her $g \in G-\{1\}$ için $gV \cap V = \varnothing$ koşulunu sağlayan x in bir V komşuluğu vardır.

O zaman $p: X \rightarrow X/G$ düzenli örtü uzayıdır. ($X/G = X/\equiv$, $x \equiv y$ ancak ve yalnız bir $g \in G$ için $gx = y$)

İspat 2.1.1: U, X içinde açık bir küme ise $p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in G} gU$ olup $p^{-1}(p(U))$ açıktır. Dolayısıyla $p(U)$ açıktır. O halde p açık dönüşümdür.

$x^* \in X/G$, $x \in X$ $p(x) = x^*$ olsun U, x in her $g \in G-\{1\}$ için $gU \cap U = \varnothing$ koşulunu sağlayan açık komşuluğu olsun $p(U)$ nun x^* ın eş örtülü komşuluğu olduğunu gösterelim;

$p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in G} gU$ olup $g \neq h$ için $gU \cap hU = \varnothing$ dır. $p|_{gU}: gU \rightarrow p(U)$ sürekli ve açık olduğunu biliyoruz. $p(u) \in p(U)$ ise $p(gu) = p(u)$ olup p örtendir. Ayrıca $p(gu) = p(gv)$ olsun. Bir $h \in G$ için $gu = hgv$ ise $gU \cap hgU \neq \varnothing$ olur. Dolayısıyla $gu = gv$ olmalıdır. O halde p, 1-1 olup $p|_{gU}: gU \rightarrow p(U)$ bir homeomorfizm olup (X, p), X/G nin örtü uzayıdır. Şimdi bu örtü uzayının düzenli olduğunu gösterelim.

$G \subset \mathrm{Cov}(X/X/G)$ $g \in G$ ise $g \in \mathrm{Cov}(X/X/G)$ olarak düşünebiliriz. Dolayısıyla $\mathrm{Cov}(X/X/G)$, $p^{-1}(x^*)$ üzerine geçişmeli etki eder.

Sonuç 2.1.2: G sonlu bir grup, X bir Hausdorff topolojik uzay, ve G, X üzerinde serbest etki etsin. O halde $p: X \to X/G$ olmak üzere (X, p), X/G nin düzenli örtü uzayıdır.

İspat 2.1.2: $x_0 \in X$ olsun $g \in G - \{1\}$ olsun. O halde $gx_0 \neq x_0$ olur. X, Hausdorff olduğundan $x_0 \in U_1$, $gx_0 \in V_1$ ve $U_1 \cap V_1 = \varnothing$ olacak şekilde U_1, V_1 açık kümeleri vardır. $V_g = U_1 \cap g^{-1} V_1$ olsun $gV_g \cap V_g = \varnothing$ dir. $V = \bigcap_{\substack{g \in G \\ g \neq 1}} V_g$

G, sonlu olduğu için V açık olup $gV \cap V = \varnothing$ dir dolayısıyla (X, p), X/G`nin düzenli örtü uzayıdır.

$(\tilde{X}, p)$, X`in düzenli sonlu m katlı örtü uzayı olsun. Bu bölüm sonuna kadar Cov($\tilde{X}$ /X) grubunu G ile göstereceğiz.

$\tau: S_n(X) \to S_n(\tilde{X})$ bir zincir dönüşümü tanımlayalım. σ, $S_n(X)$`in doğuraylarından biri, $q \in \Delta^n$ için $\sigma(q) = x_0$ olsun. $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X}, \tilde{x}_0 \arrow[d, "p"] \\ \sigma : \Delta^n, q \arrow[ur, dotted, "\tilde{\sigma}"] \arrow[r] & X, x_0 \end{tikzcd}$$

Δ^n basit bağlantılı olduğundan σ`nın $\tilde{x}_0$ de $\tilde{\sigma}$ yükseltilmesi vardır.

Cov($\tilde{X}$ /X) $= G$ diyelim.

$$\tau: S_n(X) \to S_n(\tilde{X}),\ \tau(\sigma) = \sum_{\tilde{\sigma}(q) \in p^{-1}(x_0)} \tilde{\sigma} = \sum_{g \in G} g\tilde{\sigma}$$

Öncelikle τ nun, Δ^n nin seçilen noktasından bağımsız olduğunu gösterelim. $r\in\Delta^n$ ve $\sigma(r)=x_1$ olsun $\tilde{x}_1\in p^{-1}(x_1)$ ve σ nın $\tilde{x}_1$ deki yükseltilmesi $\bar{\sigma}$ olsun tek bir $g\in G$ için $\bar{\sigma}=g\tilde{\sigma}$ dir. O halde $\tau(\sigma)=\sum_{g\in G} g\tilde{\sigma} = \sum_{g\in G} g\bar{\sigma}$ olup τ iyi tanımlıdır.

Şimdi τ nun bir zincir dönüşümü olduğunu gösterelim. Bunun için

$$\begin{tikzcd} S_n(X) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\tau"'] & S_{n-1}(X) \arrow[d, "\tau"] \\ S_n(\tilde{X}) \arrow[r, "\partial_n"] & S_{n-1}(\tilde{X}) \end{tikzcd}$$

Yukarıdaki diagramın değişmeli olduğunu gösterelim.

σ, $S_n(X)$'in doğuraylarından biri olsun. $\tau(\sigma)=\sum_{\tilde{\sigma}(q)\in p^{-1}(x_0)} \tilde{\sigma} = \sum_{g\in G} g\tilde{\sigma}$

$(\partial\circ\tau)(\sigma)=\partial(\sum_{\tilde{\sigma}(q)\in p^{-1}(x_0)} \tilde{\sigma}) = \sum \partial\circ\tilde{\sigma}$ $\quad p(\partial\circ\tilde{\sigma})=\partial\circ\sigma$ olup dolayısıyla

$\sum\partial\circ\tilde{\sigma}=\tau(\partial\circ\sigma)$ olur. Buradan $\partial\circ\tau=\tau\circ\partial$ olur. Dolayısıyla τ bir zincir dönüşümüdür.

Teorem 2.1.3: $(\tilde{X}, p)$, X'in düzenli örtü uzayı olmak üzere

$$\tau_*: H_k(X)\to H_k(\tilde{X})$$

Dönüşümünde her $g\in G$, ve her $z\in H_k(X)$ için $g_*(\tau_*(z))=\tau_*(z)$ dir.

İspat 2.1.3: $\tau_*: H_k(X)\to H_k(\tilde{X})$

$z=[\sum m_i\sigma_i]\in H_k(X)$ olsun. $\sigma_i:\Delta^k\to X$, $q\in\Delta^k$ olsun

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X},\tilde{x}_0 \arrow[d, "p"] \\ \sigma_i:\Delta^k, q \arrow[ur, dotted, "\bar{\sigma}_i"] \arrow[r] & X, x_0 \end{tikzcd}$$

$\tilde{\sigma}_i$, σ_i'nin $\tilde{x}_0$ daki yükseltilmesi olup;

$\tau_*(z) = \tau_*([\sum m_i\sigma_i]) = [\sum_{h\in G} \sum m_i h\circ\tilde{\sigma}_i]$ dır. Şimdi $g\in G$ alalım;

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{X} \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

$$g_*(\tau_*(z)) = [\sum_{h\in G} \sum m_i gh\tilde{\sigma}_i]$$

$(\tilde{X}, p)$, X'in düzenli örtü uzayı olduğundan G nin $p^{-1}(x_0)$ üzerinde geçişmeli etkisi vardır. O halde

$$g_*(\tau_*(z)) = [\sum_{h\in G} \sum m_i gh\tilde{\sigma}_i] = [\sum_{h\in G} \sum m_i h\tilde{\sigma}_i] = \tau_*(z) \text{ bulunur.}$$

Sonuç K abelyen grup olmak üzere benzer şekilde tanımlanan

τ: $S_n(X,K) \to S_n(\tilde{X},K)$ içinde her $g\in G$ için $g_*(\tau_*(z)) = \tau_*(z)$ doğrudur.

Teorem 2.1.4: $(\tilde{X}, p)$, X'in m katlı düzenli örtü uzayı olsun

$$p_*\circ\tau_*: H_n(X) \to H_n(X),\ p_*\circ\tau_* = m1_{H_n(X)} \text{dir}$$

İspat 2.1.4: $p_*\circ\tau_*: H_n(X)\to H_n(X)$; $[\sum m_i\sigma_i]\in H_n(X)$ olsun, $\sigma_i: \Delta^n \to X$

$$p_*\tau_*([\sum m_i\sigma_i]) = p_*([\sum_{h\in G}\sum m_i h\tilde{\sigma}_i]) = [\sum_{h\in G}\sum m_i ph\tilde{\sigma}_i] = [\sum_{h\in G}\sum m_i\sigma_i]$$

$$= \sum_{h\in G}[\sum m_i\sigma_i] = \sum_{j=1}^{m}[\sum m_i\sigma_i] \text{ olur. Dolayısıyla } p_*\circ\tau_* = m1_{H_n(X)} \text{dir.}$$

Benzer şekilde, K bir abelyen grup olsun $p_*\circ\tau_* = m1_{H_n(X,K)}$ olur.

Sonuç 2.1.5: $p_*\circ\tau_*: H_n(X,Z_k) \to H_n(X,Z_k)$, $(k,m) = 1$ ise bir izomorfizma olur.

İspat 2.1.5: (k,m) = 1 olduğundan ak + bm = 1 olacak şekilde a,b∈Z vardır. Dolayısıyla bm ≡ 1 (Mod k) dır.

$$h_* : H_n(X,Z_k) \to H_n(X,Z_k)$$

$[\sum m_i\sigma_i] \to b[\sum m_i\sigma_i]$ olarak tanımlayalım

$(p_* \circ \tau_*) \circ h_*([\sum m_i\sigma_i]) = bm[\sum m_i\sigma_i] \equiv [\sum m_i\sigma_i]$ dolayısıyla $p_* \circ \tau_*$ bir izomorfizma olur. Kısaca (k,m) = 1 ise $\tau_* : H_n(X,Z_k) \to H_n(\tilde{X},Z_k)$ monomorfizm, $p_* : H_n(\tilde{X},Z_k) \to H_n(X,Z_k)$ epimorfizmdir. Benzer şekilde katsayılar, karakteristiği sıfır olan bir F cismi olduğunda aynı şeyler doğrudur. A, üzerinde G nin etkidiği bir küme ise {a∈A: her g∈G için ga = a} kümesi A^G ile gösterilir.

Teorem 2.1.6: ($\tilde{X}$, p) X'in n katlı düzenli örtü uzayı olsun.

$(S_k(\tilde{X}))^G$ = {z∈$S_k(\tilde{X})$: her g∈G $g_*z = z$ } olsun. O zaman

$\tau: S_k(X) \to (S_k(\tilde{X}))^G$ örtendir.

İspat 2.1.6: z = $\sum n_i\sigma_i \in (S_k(\tilde{X}))^G$ olsun

$$z = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{g\in G} n_{i,g}\, g\sigma_i)$$

$$g_*z = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{g\in G} n_{i,g}\, g\sigma_i) = z$$

$\bar{\sigma}_i$: σ_i'lerden izdüşümleri farklı olanlar olsun yani $p\sigma_i \neq p\sigma_j$, $i \neq j$

z = $\sum_{i=1}^{m}(\sum_{g\in G} n_{i,g}\, g\bar{\sigma}_i)$ her $g\in G$ için $g\bar{\sigma}_i \neq \bar{\sigma}_j$ i≠j dir. Çünkü $g\bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}_j$ olsaydı izdüşümleri aynı olurdu Bu ise $\bar{\sigma}_i$'lerin seçimiyle çelişir.

z = $\sum_{i=1}^{m}(\sum_{g\in G} n_{i,g}\, g\bar{\sigma}_i)$ idi I∈G olup $n_{i,g} = n_{i,I} = n_i$ olduğunu gösterelim.

$z = n_{1,I}\bar{\sigma}_1 + n_{1,g}\, g\bar{\sigma}_1 + n_{1,h}\, h\bar{\sigma}_1 + \ldots\ldots + n_{m,1}\bar{\sigma}_m + n_{m,g}\, g\bar{\sigma}_m + \ldots\ldots$

$g_*z = n_{1,I}\, g\bar{\sigma}_1 + n_{1,g}\, gg\bar{\sigma}_1 + n_{1,h}\, gh\bar{\sigma}_1 + \ldots\ldots + n_{m,1}\, g\bar{\sigma}_m + n_{m,g}\, gg\bar{\sigma}_m + \ldots\ldots = z$

$n_{i,g}\, g\overline{\sigma}_i = n_{i,1}\, g\overline{\sigma}_i$ olup, $n_{i,g} = n_{i,1}$ dır. $n_{i,1} = n_i$ diyelim

$z = \sum_{i=1}^{m} n_i \sum_{g\in G} g\overline{\sigma}_i \qquad \sum_{g\in G} g\overline{\sigma}_i = \tau(p\overline{\sigma}_i)$ olup

$z = \sum_{i=1}^{m} n_i\, \tau(p\overline{\sigma}_i) = \tau(\sum_{i=1}^{m} n_i\, p\overline{\sigma}_i)$ dolayısıyla $\tau : S_k(X) \to (S_k(\tilde{X}))^G$ örtendir.

Sonuç 2.1.7: $H_k(X) \to (H_k(\tilde{X}))^G$, örtendir.

İspat 2.1.7: $\tau_* : Z_k(X) \to (Z_k(\tilde{X}))^G$ örten olduğunu göstermek yeterlidir.

$z \in (Z_k(\tilde{X}))^G$ olsun, $z \in (S_k(\tilde{X}))^G$ olup bir $w \in S_k(X)$ için $\tau(w) = z$ dir.

$\partial\tau(w) = \partial z = 0$ dolayısıyla, $\partial\tau(w) = \tau(\partial w) = 0$ olur.

$\tau: S_k(X) \to S_k(\tilde{X})$, 1-1 olduğundan $\partial w = 0$, bu nedenle $w \in Z_k(X)$ olur. Dolayısıyla $\tau_* : H_k(X) \to (H_k(\tilde{X}))^G$ örtendir.

Teorem 2.1.8: $(\tilde{X}, p)$, X'in m katlı düzenli örtü uzayı ($m = |G|$ olur), $i : (S_*(\tilde{X}))^G \to S_*(\tilde{X})$ içerme dönüşümü $(m, k) = 1$ ise $i_* : H_n\ (S_*(\tilde{X}))^G, Z_k) \to (H_n(\tilde{X}, Z_k))^G$ izomorfizmdir. Veya F, karakteristiği 0 olan bir cisim ise yine i_* izomorfizmdir.

İspat 2.1.8: $(S_*(\tilde{X}))^G, \partial|(S_*(\tilde{X}))^G$) kompleksini göz önüne alalım

$(S_{n+1}(\tilde{X}))^G \to (S_n(\tilde{X}))^G \to (S_{n-1}(\tilde{X}))^G \to$ ....

dizisini düşünelim.

$$H_n((S_*(\tilde{X}))^G) = \frac{Ker((S_n(\tilde{X}))^G \to (S_{n-1}(\tilde{X}))^G)}{Im((S_{n+1}(\tilde{X}))^G \to (S_n(\tilde{X}))^G)}$$

$$H_n(\tilde{X}) = \frac{Ker(S_n(\tilde{X}) \to S_{n-1}(\tilde{X}))}{Im(S_{n+1}(\tilde{X}) \to S_n(\tilde{X}))}$$

$$i_* : H_n((S_*(\tilde{X}))^G) \to (H_n(\tilde{X}))^G$$

$j: S_n(\tilde{X}) \to (S_n(\tilde{X}))^G$, $j(\sigma) = \sum_{g\in G} g\sigma$ olarak tanımlayalım.

$$j_*: (H_n(\tilde{X}))^G \to H_n((S_*(\tilde{X}))^G)$$

$$j_*(\sum m_i\,\sigma_i + B_n(\tilde{X})) = \sum_{g\in G} m_i g\sigma_i + (B_n(\tilde{X}))^G \qquad (\sum_{g\in G} m_i g\sigma_i \in (Z_n(\tilde{X}))^G)$$

$j_* i_* = m 1_{H_n((S_*(\tilde{X}))^G}$ olur. O halde, (m, k) = 1 ise i_* monomorfizm olur.

Öte yandan; $i_* j_* = m 1_{(H_n(\tilde{X}))^G}$ olduğundan (m, k)=1 ise i_* epimorfizm olur. Dolayısıyla (m, k)=1 ise i_*: $H_n((S_*(\tilde{X}))^G, Z_k) \to (H_n(\tilde{X}, Z_k))^G$ bir izomorfizm olur.

Sonuç 2.1.9: ($\tilde{X}$, p), X'in m katlı düzenli örtü uzayı Cov($\tilde{X}$/X) = G olsun (m=$|G|$ olur) (m, k) = 1 ise her n≥0 için $H_n(X, Z_k) \cong (H_n(\tilde{X}, Z_k))^G$ olur.

Yukarıda belirtilen sonuçlar katsayılar, karakteristiği 0 olan bir F cismi için de doğrudur.

BÖLÜM 3

3.1 : GRUP ETKİLERİ VE DÖNÜŞÜM GRUPLARI

Tanım 3.1.1: G bir topolojik grup, X Hausdorff uzay olsun.

Bir $\theta: G \times X \to X$ sürekli dönüşümü;

i) Her g, $h \in G$ ve her $x \in X$ için $\theta(g, \theta(h, x)) = \theta(\theta(g, h), x)$

ii) Her $x \in X$ için $\theta(e, x) = x$ (e, G'nin birim elemanı)

özelliklerini sağlıyorsa (G, X, θ) üçlüsüne bir dönüşüm grubu denir. θ'ya G'nin X üzerine etkisi, X'e de bir G uzayı denir. $\theta(g, x)$, gx ile gösterilir. $C \subset G$ ve $A \subset X$ için $C(A) = \{gx: g \in C,\ x \in A\}$ dir. Buna göre eğer $G(A) = A$ oluyorsa A'ya X'in invaryant alt kümesi denir. $G(x)$ kümesine $x \in X$'in orbiti;

$X/G = \{G(x): x \in X\}$'ye üzerinde tanımlanan bölüm topolojisi ile birlikte orbit uzayı denir. $x \in X$ olmak üzere $G_x = \{g \in G: gx = x\}$, x in izotropi alt grubudur. Eğer G kompakt bir grup ise her $x \in X$ için $\alpha_x : G/G_x \to G(x)$ $\alpha_x(gG_x) = gx$ olarak tanımlanan fonksiyon bir homeomorfizmdir.

Tanım 3.1.2: G bir topolojik grup, $f: G \to R$ bir fonksiyon $h \in G$ olsun $R_h(f), L_h(f): G \to R$, $R_h(f)(g) = f(gh)$ ve $L_h(f)(g) = f(h^{-1}g)$ olarak tanımlanır.

Teorem 3.1.3: G kompakt grup, G'de sürekli reel değerli fonksiyonlar üzerinde tanımlı ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir tek reel değerli I fonksiyonu vardır.

a) $I(f_1 + f_2) = I(f_1) + I(f_2)$

b) $I(cf) = cI(f)$, $c \in R$

c) Her $g \in G$ için $f(g) \geq 0$ ise $I(f) \geq 0$

d) $I(1) = 1$

e) Her $h \in G$ için $I(R_h(f)) = I(L_h(f)) = I(f)$.

Bu fonksiyona Haar integrali denir.

Teorem 3.1.4: G kompakt topolojik grup θ, G'nin X üzerine etkisi ise θ kapalı dönüşümdür.

İspat 3.1.4: $C \subset G \times X$ ve C kapalı olsun $y \in \overline{(\theta(C))}$ olsun o halde C içinde (g_α, x_α) ağı vardır öyle ki $\theta(g_\alpha, x_\alpha) = g_\alpha x_\alpha \to y$ olur. G kompakt olduğundan g_α'nın yakınsak bir alt ağı vardır. O halde $g_\alpha \to g$ farzedebiliriz. Bu durumda

$x_\alpha = \theta(g_\alpha^{-1}, g_\alpha x_\alpha) \to \theta(g^{-1}, y) = g^{-1} y$ olur.Buradan

$(g_\alpha, x_\alpha) \to (g, g^{-1} y) \in C$ olup dolayısıyla $y = \theta(g, g^{-1} y) \in \theta(C)$ olup θ kapalıdır.

Tanım 3.1.5: X ve Y, G-uzayları olsun $\varphi: X \to Y$, $\varphi(gx) = g\varphi(x)$ özelliğini sağlayan sürekli φ: $X \to Y$ fonksiyonuna G-uzayları arasında bir grup etkisini koruyan (equivariant) dönüşüm denir.

Tanım 3.1.6: π: $X \to X/G$'nin bir kesiti, $\pi\sigma = 1|_{X/G}$ koşulunu sağlayan

σ: $X/G \to X$ sürekli bir fonksiyondur. $U \subset X/G$'de tanımlı (U: açık) yerel kesit;

$\pi|_{\pi^{-1}(U)} : \pi^{-1}(U) \to U$'nun kesitidir

Teorem 3.1.7: X bir G-uzayı, G kompakt, $C \subset X$, C kapalı ve C her orbiti tek noktada kesiyor olsun. O zaman, $\sigma: X/G \to X$, $\{\sigma(x^*)\} = G(x) \cap C$ bir kesittir. Tersine bir kesitin görüntüsü kapalıdır.

İspat 3.1.7: A, C'de kapalı ise $\sigma^{-1}(A) = \pi(A)$ olup, $\sigma^{-1}(A)$ kapalıdır. Dolayısıyla σ süreklidir. Tersi için, $C = \sigma(X/G)$ olsun

$C = \{x \in X: x = \sigma\pi(x)\}$ olup C kapalıdır.

Teorem 3.1.8: G kompakt grup H ve K, g`nin kapalı alt grupları olsunlar.
o halde;

1) $G/H \to G/K$ grup etkisini koruyan dönüşümün var olması için gerek ve yeter koşul H nin, K nın eşlenik alt grubu olmasıdır.
2) $a \in G$ ve $aHa^{-1} \subset K$ ise $R_a^{K,H} : G/H \to G/K$, $R_a^{K,H}(gH) = ga^{-1}K$ olarak tanımlanan $R_a^{K,H}$ iyi tanımlı grup etkisini koruyan bir dönüşümdür.
3) Her $G/H \to G/K$ ~~grup etkisini koruyan dönüşüm~~ bir $a \in G$ için $R_a^{K,H}$ formundadır ve $aHa^{-1} \subset K$ dır.
4) $R_a^{K,H} = R_b^{K,H}$ olması için gerek ve yeter koşul $ab^{-1} \in K$ olmasıdır.

Teorem 3.1.9 (Tietze-Gleason): G kompakt grup, X normal G-uzayı, A, X`in kapalı invaryant alt uzayı, $\eta : G \to Gl(n,R)$, $G$`nin bir temsili, $\varphi : A \to R^n$ grup etkisini koruyan dönüşüm olsun. O halde φ`nin, $\Psi : X \to R^n$ bir genişlemesi vardır.

İspat 3.1.9: Tietze genişleme teoreminden, $\varphi' : X \to R^n$, $\varphi'|_A = \varphi$ olacak şekilde φ' vardır. $\int_G dg$, G üzerindeki Haar integrali olmak üzere

$\psi : X \to R^n$, $\psi(x) = \int_G \eta(g^{-1})\varphi'(gx)dg$ olarak tanımlayalım

$$\psi(hx) = \int_G \eta(g^{-1})\varphi'(ghx)dg = \int_G \eta(h(gh)^{-1})\varphi'(ghx)dg = \int_G \eta(h)\eta((gh)^{-1})\varphi'(ghx)dg$$

$= \eta(h)\int_G \eta(k^{-1})\varphi'(kx)dk = \eta(h)\psi(x)$ dir. Dolayısıyla ψ grup etkisini koruyan dönüşümdür. Şimdi $\psi|_A = \varphi$ olduğunu gösterelim. $a \in A$ olsun

$\psi(a) = \int_G \eta(g^{-1})\varphi'(ga)dg = \int_G \eta(g^{-1})\varphi(ga)dg = \int_G \varphi(a)dg = \varphi(a)$ olup, ψ, φ`nin bir genişlemesidir.

Teorem 3.1.10: X bir G-uzayı, G, kompakt grup, X/G orbit uzayı ise

1) X/G Hausdorff uzaydır.

2) $\pi: X \to X/G$ kapalı dönüşümdür.

3) $\pi: X \to X/G$ düzgün ($U \subset X/G$ ve U kompakt ise $\pi^{-1}(U)$ kompakt)

4) X in kompakt olması için gerek ve yeter koşul X/G nin kompakt olmasıdır.

~~5) X in yerel kompakt olması için gerek~~ ve yeter koşul X/G nin yerel kompakt olmasıdır.

G-orbitlerin kategorisini denkliklere göre ayırırsak G-orbit tiplerinin kategorisini elde ederiz. G kompakt bir grup, H ve K, G'nin kapalı alt grupları olsun

$\mathrm{Tip}(G/H) = \mathrm{Tip}(G/K)$ olması için gerek ve yeter koşul H ve K, G'de birbirine eşlenik olmasıdır.

$\mathrm{Tip}(G/H) \to \mathrm{Tip}(G/K)$ morfizmasının var olması için gerek ve yeter koşul $G/H \to G/K$ grup etkisini koruyan bir dönüşümün var olmasıdır.

X ve Y, G-orbitler ve $\mathrm{Tip}(X) \to \mathrm{Tip}(Y)$ bir morfizm var ise

$\mathrm{Tip}(X) \geq \mathrm{Tip}(Y)$ dir deriz. Dolayısıyla orbit tipleri üzerinde kısmi sıralama vardır.

$\mathrm{Tip}(*) = \mathrm{Tip}(G/G)$ minimum orbit tipi, Tip(G) maksimum orbit tipidir.

3.2. : Bazı Problemler

3.2.1: G kompakt bir grup, τ_G, G-orbit tiplerinin kümesi olsun. τ_G üzerinde her $H < G$ için;

$F_H = \{\mathrm{Tip}G(x) : \mathrm{Tip}G(x) \leq \mathrm{Tip}\, G/H\}$, kümelerini kapalı küme kabul eden en küçük topolojiyi verelim. O halde

$\tau: X/G \to \tau_G \quad \tau(G(x)) = \mathrm{Tip}G(x)$ fonksiyonu süreklidir.

İspat 3.2.1: $H < G$ için $F_H = \{\mathrm{Tip}G(x) : \mathrm{Tip}G(x) \leq \mathrm{Tip}\, G/H\}$, τ_G içinde kapalı bir küme olup, ($\pi : X \to X/G$ olmak üzere) $\tau^{-1}(F_H) = \pi(X^H)$ olduğunu gösterelim. $X^H = \{x \in X : \text{her } h \in H \text{ için } hx = x\}$ dir. $x \in X^H$ ise $H \subset G_x$ olup dolayısıyla

$G/H \to G/G_x$ grup etkisini koruyan dönüşüm vardır. O halde

$\mathrm{Tip}(G/G_x) = \mathrm{Tip}G(x) \leq \mathrm{Tip}\, G/H$ olup, $\tau(G(x)) = \mathrm{Tip}G(x) \in F_H$ olur.

Dolayısıyla, $\pi(X^H) \subset \tau^{-1}(F_H)$ olur.

Şimdi, $G(x) \in \tau^{-1}(F_H)$ olsun, o halde $\mathrm{Tip}G(x) \leq \mathrm{Tip}\, G/H$ olup bir $g \in G$ için $gHg^{-1} \subset G_x$ olur. $G(x) = G(g^{-1}x)$ olup, her $h \in H$ için $ghg^{-1}x = x$ olur. Dolayısıyla her $h \in H$ için $hg^{-1}x = g^{-1}x$ olup, $g^{-1}x \in X^H$ dır. $G(x) = G(g^{-1}x) \in \pi(X^H)$ olup Dolayısıyla, $\tau^{-1}(F_H) \subset \pi(X^H)$ olur. O halde, $\tau^{-1}(F_H)$ kapalıdır. Dolayısıyla τ süreklidir.

3.2.2: Tietze-Gleason teoreminin tam regüler uzaylar ve onun kompakt invaryant alt uzayı için de gerçeklendiğini gösteriniz.

İspat 3.2.2: X tam regüler uzay, A, X'in kompakt invaryant alt uzayı olsun βX, X'in Stone-Cech kompaktlaması olsun, βX de bir G- uzayıdır.

$\eta : G \to \mathrm{Gl}(n,R)$, G'nin bir temsili

$\varphi : A \to R^n$ grup etkisini koruyan dönüşüm olsun, $A \subset X \subset \beta X$, ayrıca A kompakt olduğundan kapalıdır. βX kompakt olduğundan βX normal olup Tietze-Gleason teoreminden dolayı φ'nin βX'e genişlemesi Ψ vardır. $\Psi : \beta X \to R^n$ grup etkisini koruyan dönüşüm ve, $\Psi\big|_A = \varphi$ dir. O halde $\Psi\big|_X$, φ'nin X'e genişlemesi olup Tietze-Gleason teoremi tam regüler uzaylar ve onların kompakt invaryant alt uzayları içinde doğrudur.

3.2.3: X bir G-uzayı, G kompakt grup ise her orbitin bir komşuluğunun içinde kalan ve invaryant olan bir komşuluğu vardır.

İspat 3.2.3: U, $G(x)$'in bir komşuluğu olsun

$G \times X \to X$ sürekli olup, U, her $g \in G$ için $g.x$'in X içindeki komşuluğudur. Dolayısıyla her $g \in G$ için $U_g V_{g_x} \subset U$ olacak şekilde g'nin bir U_g ve x'in bir V_{g_x} komşuluğu vardır.

$\{U_g : g \in G\}$, G'nin açık örtüsü olup G kompakt olduğundan, $G = \bigcup_{i=1}^{n} U_{g_i}$ şeklinde yazılabilir. $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{g_{i_x}}$ x'in komşuluğu olup, $G(V) \subset U$ dur ve $G(V)$, $G(x)$'in, U içnde kalan invaryant açık komşuluğudur.

3.2.4: $H, K \subset G$ kompakt gruplar olsun. O halde;

$$({}^{G}\!/\!_{K})^{H} \to \mathrm{Map}^{G}({}^{G}\!/\!_{H}, {}^{G}\!/\!_{K})$$

$a^{-1}K \to R_a^{K,H}$, olarak tanımlanan fonksiyon bir homeomorfizmdir. Burada $\mathrm{Map}^{G}({}^{G}\!/\!_{H}, {}^{G}\!/\!_{K})$ üzerindeki kompakt açık topolojiyle, ${}^{G}\!/\!_{H} \to {}^{G}\!/\!_{K}$, grup etkisini koruyan dönüşümlerin uzayıdır.

Çözüm 3.2.4: $\alpha:({}^{G}\!/\!_{K})^{H} \times {}^{G}\!/\!_{H} \to {}^{G}\!/\!_{K}$, $\alpha(aK, gH) = gaK$ olarak tanımlayalım.

α'nın iyi tanımlı olduğunu gösterelim.

$aK = bK \in ({}^{G}\!/\!_{K})^{H}$, $gH = lH \in {}^{G}\!/\!_{H}$ olsun, $aK = bK \in ({}^{G}\!/\!_{K})^{H}$ olduğundan

$a^{-1}Ha \subset K$ ve, $b^{-1}Hb \subset K$ dır. Ayrıca, $a^{-1}b \in K$ ve $g^{-1}l \in H$ dır.

$(ga)^{-1}lb = a^{-1}g^{-1}lb = a^{-1}bb^{-1}g^{-1}lb \in K$ olup, $gaK = lbK$ dır. Dolayısıyla α iyi tanımlıdır.

α'nın sürekli olduğunu gösterelim:

$N = \{a \in G: a^{-1}Ha \subset K\}$, G içinde kapalı olup

$$\begin{tikzcd} N \arrow[d] & \times & G \arrow[d] \arrow[rr] & & G \arrow[d] \\ (G/K)^H & \times & G/H \arrow[rr, "\alpha"] & & G/K \end{tikzcd}$$

Diagram değişmeli olup düşey oklarla gösterilen fonksiyonlar kapalı dönüşümler olduğundan, α süreklidir.

$$\overline{\alpha} : (G/K)^H \to \mathrm{Map}^G(G/H, G/K)$$

$a^{-1}K \to \alpha_{a^{-1}K} : G/H \to G/K \qquad \alpha_{a^{-1}K}(gH) = ga^{-1}K = R_a^{K,H}(gH)$, fonksiyonu sürekli olup dolayısıyla

$$\overline{\alpha} : (G/K)^H \to \mathrm{Map}^G(G/H, G/K)$$

$a^{-1}K \to R_a^{K,H}$, süreklidir. Tersine;

$\alpha' : \mathrm{Map}^G(G/H, G/K) \to (G/K)^H$ şöyle tanımlayalım

$f: G/H \to G/K$ grup etkisini koruyan dönüşüm olsun. O halde bir $a \in G$ için

$f = R_a^{K,H}$, ve $aHa^{-1} \subset K$ dır. Dolayısıyla, $aK \in (G/K)^H$ dır.

$$\alpha' : \mathrm{Map}^G(G/H, G/K) \to (G/K)^H$$

$R_a^{K,H} \to a^{-1}K$, olarak tanımlarsak α' sürekli olup, $\overline{\alpha}\,\alpha' = 1_{\mathrm{Map}^G(G/H, G/K)}$

ve $\alpha'\,\overline{\alpha} = 1_{(G/K)^H}$ olup $\overline{\alpha}$ bir homeomorfizmdir.

3.2.5: G bir kompakt grup, X kompakt metrik G-uzayı olsun. O halde, G etkisi altında invaryant kalan bir denk metrik vardır.

İspat 3.2.5: (X, d) kompakt metrik G-uzayı olsun

$$d' : X \times X \to \mathbb{R}$$

$d'(x,y) = \int_G d(gx,gy)dg$ olarak tanımlayalım d', X üzerinde bir metriktir.

Gerçekten;

$$d'(x,y) \geq 0 \text{ ve, } d'(x,x) = 0 \text{ ve, } d'(x,y) = 0 \text{ ise } x=y \text{ dir}$$

$$d'(x,z) = \int_G d(gx,gz)dg \text{ olup}$$

Her $g \in G$ için, $d(gx,gz) \leq d(gx,gy) + d(gz,gy)$ olduğundan

$$\int_G d(gx,gz)dg \leq \int_G (d(gx,gy) + d(gy,gz))dg$$

$$= \int_G d(gx,gy)dg + \int_G d(gy,gz)dg \text{ olup}$$

$d'(x,z) \leq d'(x,y) + d'(y,z)$ dir. d' metriği G-etkisi altında invaryanttır.

Çünkü, $h \in G$ için,

$$d'(hx,hy) = \int_G d(ghx,ghy)dg = \int_G d(gx,gy)dg = d(x,y) \text{ dir.}$$

$$d' : X \times X \to \mathbb{R},\quad d'(x,y) = \int_G d(gx,gy)dg \text{ sürekli olduğundan}$$

$1 : (X,d) \to (X,d')$, özdeşlik dönüşümü süreklidir. Ayrıca, $F \subset X$ d-metriğine göre kapalı ise F kompakt olup $1(F) = F$, d'-metriğine göre kompaktır. Dolayısıyla F, d'-metriğine göre kapalıdır. O halde özdeşlik dönüşümü (X,d) ile (X,d') arasında bir homeomorfizma olup bu iki metrik birbirine denktir

BÖLÜM 4

4.1 Tüpler Ve Dilimler

Tanım 4.1.1: G kompakt topolojik grup, X bir G-uzayı, $P \subset X$, G/H ile aynı orbit tipinde bir orbit olsun. A, H'nin etki ettiği bir uzay olmak üzere P civarında bir tüp; P'nin, X içindeki bir açık komşuluğuna homeomorfizma olan bir $\varphi : G \times_H A \to X$, fonksiyonudur ($H$, G'nin kompakt alt grubu ve A, H'nin etki ettiği bir uzay olsun, o halde $H \times (G \times A) \to G \times A$, $(h, (g, a)) \to (gh^{-1}, ha)$ olarak etki eder .Bu H-etkisinin orbit uzayı, $G \times_H A$ ile gösterilir.)

$G \times_H A$'daki her G-orbiti her $a \in A$ için $[e, a]$'dan geçer. O halde $\varphi([e, a]) \in P$, ve $x = \varphi([e, a])$, ve $P = G(x)$ dir. o halde $G_x = G_{[e,a]} = H_a \subset H$

P ile G/H aynı orbit tipinde olduklarından G_x, H'ye eşlenik olup $G_x = H_a = H$ dır.

O halde G bir kompakt topolojik grup X bir G-uzayı ve $P = G(x)$ olmak üzere $G(x)$ civarında bir tüp $G(x)$'in, X içindeki bir komşuluğuna homeomorfizma olan ve grup etkisini koruyan bir $\varphi : G \times_{G_x} A \to X$, fonksiyonudur.

Tanım 4.1.2: G kompakt topolojik grup X bir G-uzayı, $x \in S \subset X$ ve, $G_x(S)=S$ olsun $\varphi : G \times_{G_x} S \to X$, $\varphi([g, s]) = gs$ olarak tanımlanan fonksiyon $G(x)$ civarında bir tüp ise; S ye x de bir dilim denir.

Teorem 4.1.3: X bir G-uzayı, $x \in S \subset X$ ve, $H=G_x$ olsun aşağıdaki önermeler birbirine denktir.

1. $G \times_{G_x} A \to X$, $G(x)$ civarında, $\varphi([e, a]) = S$ olacak şekilde bir tüp vardır.
2. S, x de bir dilimdir.
3. $G(S)$, $G(x)$ in açık komşuluğu ve $f : G(S) \to G(x)$, $f^{-1}(x) = S$

olacak şekilde grup etkisini koruyan retrakt vardır

İspat 4.1.3: 1⇒2 açıktır. Çünkü, A yerine S yazarsak S, x de bir dilim olur.

2 ⇒ 3

$$\begin{tikzcd} G\times_{G_x} S \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\cong"] & G(S) \arrow[d, "f"] \\ G/G_x \arrow[r, "\cong"] & G(x) \end{tikzcd}$$

f(gs) = gx olarak tanımlarsak f tüm özellikleri sağlar.

3 ⇒ 1 $\varphi : G\times_{G_x} S \to X$, $\varphi([g, s]) = gs$, $G(x)$ civarında bir tüptür.

Teorem 4.1.4: S, x'de bir dilim ise $g\in G$ olmak üzere, gS, gx'de bir dilimdir.

İspat 4.1.4: Öncelikle $G_{gx}(g\mathrm{S}) = g\mathrm{S}$ olduğunu göstermeliyiz.

$$g\mathrm{S} \subset G_{gx}(g\mathrm{S}) \text{ dir.}$$

Şimdi; $k(gs)\in G_{gx}(g\mathrm{S})$ olsun, $k\in G_{gx}$, $s\in \mathrm{S}$, $k\in G_{gx}$ ise $k = gmg^{-1}$, $m\in G_x$

$k(gs) = (gmg^{-1})(gs) = g(ms)\in g\mathrm{S}$ dir. O halde, $G_{gx}(g\mathrm{S}) = g\mathrm{S}$ dir. Şimdi;

$f : G\times_{G_x} \mathrm{S}\to G\times_{G_{gx}}(g\mathrm{S})$, $f([h, s]) = [hg^{-1}, gs]$ olarak tanımlayalım

f iyi tanımlıdır :

$[h, s] = [h', s']$ olsun, bir $k\in G_x$ için, $h' = hk^{-1}$ ve $s' = ks$ dir.

$h'g^{-1} = hk^{-1}g^{-1} = hg^{-1}gk^{-1}g^{-1}$ ve, $gs' = gkg^{-1}gs = (gk^{-1}g^{-1})gs$ olup ;

$[hg^{-1}, gs] = [h'g^{-1}, gs']$ olur. Dolayısıyla f iyi tanımlıdır.

$$\begin{tikzcd} G\times \mathrm{S} \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & G\times_{G_x} \mathrm{S} \arrow[d, "f"] \\ & G\times_{G_{gx}}(g\mathrm{S}) \end{tikzcd}$$

$\varphi(h, s) = [hg^{-1}, gs]$, olup diagram değişmelidir. φ sürekli ve π açık dönüşüm olduğundan f, süreklidir.

$$\phi : G \times_{G_{gx}} (gS) \to G \times_{G_x} S, \quad \phi([h, gs]) = [hg, s], \text{ olarak tanımlayalım}$$

ϕ iyi tanımlıdır :

$[h, gs] = [h', gs']$ olsun, bir $k \in G_{gx}$ için, $h' = hk^{-1}$ ve, $gs' = kgs$ dir.

$k \in G_{gx}$ olduğundan bir $m \in G_x$ için $k = gmg^{-1}$,

$h'g = hk^{-1}g = hgm^{-1}g^{-1}g = hgm^{-1}$

$s' = g^{-1}kgs = g^{-1}gmg^{-1}gs = ms$, olup, $[hg, s] = [h'g, s']$ dir. Dolayısıyla ϕ iyi tanımlıdır.

$$\begin{tikzcd}
G \times S \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & G \times_{G_{gx}} (gS) \arrow[d, "\phi"] \\
& G \times_{G_x} S
\end{tikzcd}$$

$\psi(g, s) = [hg^{-1}, gs]$ olup, ψ sürekli ve açık dönüşüm olup, ϕ süreklidir.

$f\phi = 1_{G \times_{G_{gx}} gS}$, ve, $\phi f = 1_{G \times_{G_x} S}$ olup, ϕ bir homeomorfizmdir.

$$\begin{tikzcd}
G \times_{G_{gx}} (gS) \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & X \\
G \times_{G_x} S \arrow[ur, "\eta"'] &
\end{tikzcd}$$

Diagramının değişmeli olmasından $\eta\phi$, $G(gx)$'in açık bir U komşuluğuna homeomorfizmadır. Dolayısıyla gS, gx'de bir dilimdir.

Teorem 4.1.5: X bir G-uzayı, $x \in S \subset X$ olsun

1. S, $G(S)$'de kapalı
2. $G(S)$, $G(x)$'in açık komşuluğu

3. $G_x S = S$

4. $gS \cap S \neq \emptyset$ ise $g \in G_x$ dir.

Eğer yukarıdaki koşullar sağlanırsa ; S, x de bir dilimdir. Tersine S, x de bir dilim ise yukarıdaki koşullar sağlanır.

Teorem 4.1.6: X bir G-uzayı, $\varphi: G \times_H A \to X$, $G(x)$ civarında bir tüp; $a \in A$ $\varphi([e, a]) = y$ ve, $\psi: H \times_K B \to A$, H(a) civarında bir tüp ise ;

$$\begin{array}{llllllll} \theta: & G \times_K B & \xrightarrow{\approx} & G \times_H (H \times_K B) & \xrightarrow{G \times_H \psi} & G \times_H A & \xrightarrow{\varphi} & X \\ & [g,b] & \longmapsto & [g,[e,b]] & \longmapsto & [g,\psi([e,b])] & \longmapsto & \varphi([g,\psi([e,b])]) \end{array}$$

olarak tanımlanan θ bileşke fonksiyonu X de, $G(y)$ civarında bir tüptür.

Sonuç 4.1.7: X bir G-uzayı, S, x de bir dilim; S', $s \in S'$ de, S içinde bir dilim olsun. O halde, S', X içinde, s de bir dilim olur.

Sonuç 4.1.8: X bir G-uzayı, S, x'de bir dilim;

$$S/G_x \to X/G$$

$G_x(s) \to G(s)$ olarak tanımlanan fonksiyon,

GS/G içine bir homeomorfizmadır.

4.2 TÜPÜN VARLIĞI

Teorem 4.2.1: G, R^n üzerinde ortogonal etkisi olan kompakt bir Lie grup, $v_0 \in R^n$ ve, $G_{v_0} = H$ olsun $V \subset R^n$, $G(v_0)$'a, v_0'da normal uzayı olsun. O halde eH'nin G/H içinde bir U komşuluğu, $\sigma: U \to G$ bir yerel kesit ve bir $\varepsilon > 0$ var öyleki; V_ε= V içinde v_0 civarında ε-yuvar olmak üzere, $G \times R^n \to R^n$'in

Sonuç 4.2.2: Yukarıdaki teoremdeki şartlar altında yeterince küçük $\varepsilon>0$ için

$$G\times_H V\rightarrow R^n$$

$[g, v]\rightarrow gv$, dönüşümü

$G\times_H V_\varepsilon\rightarrow G(V_\varepsilon)$ homeomorfizma belirler. ($G(V_\varepsilon)$, $G(v_0)$`ın R^n deki açık komşuluğudur.)

İspat 4.2.2: $U\subset G/_H$ Teorem 4.2.1 deki şartları sağlasın, $K = G\text{-}\sigma(U)H$ kompakt olup $K(v_0)\subset R^n\text{-}\{v_0\}$, $K(v_0)=\bigcap_C K(C)$, C, v_0`ın kompakt komşuluklarıdır.

$K(v_0)$`ın her komşuluğu $K(C)$ lerden biri tarafından içerilir. $C$`yi yeterince küçülterek, $K(C)\cap C=\varnothing$ varsayabiliriz. Yani yeterince küçük $\varepsilon>0$ için $K(V_\varepsilon)\cap V_\varepsilon=\varnothing$ dir. Şimdi, $gv = g'v'$ olsun, v, $v'\in V_\varepsilon$, $g^{-1}g'v' = v$ olup $g^{-1}g'\notin K$ olur. O halde $g^{-1}g'\in\sigma(U)H$ dolayısıyla $g' = g\sigma(u)h$, $u\in U$, $h\in H$, olup, $g\sigma(u)hv' = gv$ olur. Dolayısıyla, $\sigma(u)hv' = v$, $H = G_{v_0}$, V üzerinde ortogonal etkidiğinden $H(V_\varepsilon) = V_\varepsilon$ O halde, Teorem 4.2.1 den dolayı, $\sigma(u)hv' = ev$, eşitliği bize $\sigma(u) = e$ ve, $hv' = v$ olduğunu gösterir. Böylelikle;
$[g, v] = [g\sigma(u), hv'] = [g\sigma(u)h, v'] = [g', v']$, olup; $G\times_H V_\varepsilon\rightarrow G(V_\varepsilon)$ dönüşümü 1-1 dir. Ayrıca $G\times V_\varepsilon\rightarrow G(V_\varepsilon)$, sürekli ve kapalı olduğundan $G\times_H V_\varepsilon\rightarrow G(V_\varepsilon)$, sürekli ve kapalıdır. Dolayısıyla, $G\times_H V_\varepsilon\rightarrow G(V_\varepsilon)$ bir homeomorfizmdir.

Sonuç 4.2.3: Sonuç 4.2.2 şartları altında, $G(V_\varepsilon)\rightarrow G(v_0)$, $gv\rightarrow gv_0$ olarak tanımlanan fonksiyon iyi tanımlı grup etkisini koruyan retraktdır.

Teorem 4.2.4: G kompakt Lie grup, X tam regüler G-uzayı ise; X'in her orbiti civarında bir tüp vardır.

İspat 4.2.4: X tam regüler G-uzayı, $x_0 \in X$, $G_{x_0} = H$ olsun. O halde

G'nin, R^n üzerinde bir temsili vardır ve, $\exists v_0 \in R^n$ için, $G_{v_0} = H$ dır.

$\varphi : G(x_0) \to G(v_0) \subset R^n$, $\varphi(gx_0) = gv_0$ olarak tanımlanan fonksiyon,bir homeomorfizmdir. O halde Tietze-Gleason teoreminden φ'nin, $\psi : X \to R^n$ grup etkisini koruyan dönüşüm genişlemesi var. ε, Sonuç 4.2.3 deki şartları sağlasın $W = \psi^{-1}(G(V_\varepsilon))$ ise $G(W) = W$, X içinde açık ve;

$$W \xrightarrow{\psi} G(V_\varepsilon) \longrightarrow G(v_0) \xrightarrow{\varphi^{-1}} G(x_0)$$

Bileşke fonksiyonu, grup etkisini koruyan retraktdır.

Sonuç 4.2.5: X tam regüler G-uzayı ve G kompakt Lie grup ise, X'in her noktasında bir dilim vardır.

Şimdi dilim tanımını başka şekilde yapalım

Tanım 4.2.6: G kompakt Lie grup, G, X üzerinde etki etsin, $p \in X$ olmak üzere p'de bir dilim aşağıdaki koşulları sağlayan kapalı bir K kümesidir.

1. $p \in K$
2. $G_p(K) = K$
3. Her $y \in K$ için, $G_y \subset G_p$ ve $G_p(y) = K \cap G(y)$
4. G'de, G/G_p 'nin, e'deki yerel kesiti olan bir R kompakt-hücre var öyleki;

$R \times K \to R(K)$ homeomorfizm olup $R(K)$, p'nin, X içindeki komşuluğudur.

Şimdi bu tanımla daha önce yaptığımız tanımın uyuştuğunu gösterelim. Yani eğer bu tanıma göre herhangi bir noktada bir dilim varsa daha önce yaptığımız tanıma göre de aynı noktada bir dilimin var olduğunu gösterelim.

K, bu tanıma göre $p\in X$'de bir dilim olsun. G(K), $G(p)$'nin komşuluğudur. Çünkü, R(K) p'nin komşuluğu olduğundan $p\in$ V $\subset$ R(K) olacak şekilde açık bir V kümesi vardır. O halde, $G(p)\in G$(V) $\subset$ G(R(K)) $\subset G$(K) olup
G(K), $G(p)$'nin komşuluğudur. Ayrıca açıkça görülür ki

$$G(\mathrm{Int}(G(K))) = \mathrm{Int}(G(K)) \text{ dır.}$$

Şimdi, $K' = \mathrm{Int}(G(K))\cap K$ olsun K''nün, $p\in X$'de daha önce yaptığımız tanıma göre bir dilim olduğunu gösterelim.

1. $P\in K'$ dür. Çünkü, G(K), $G(p)$'nin komşuluğu olup bir V, açık kümesi için $G(p) \subset V \subset G(K)$ dır. Buradan $p\in V \subset G(K)$ olup $p\in \mathrm{Int}(G(K))$ dolayısıyla $p\in K'$ olur.

2. $G_p(K') = K'$ dür.

$y\in K' = \mathrm{Int}(G(K))\cap K$ olsun $G_p(K) = K$ olduğundan $gy\in K$ dır.

$y\in \mathrm{Int}(G(K))$ ve $G(\mathrm{Int}(G(K))) = \mathrm{Int}(G(K))$ olduğundan $gy\in \mathrm{Int}(G(K))$ dır. O halde $G_p(K') = K'$ dür.

3. $y\in K'$ ise $y\in K$ dolayısıyla $G_y \subset G_p$

$gy\in K'$ ise $g\in G_p$ olur. Dolayısıyla $gK'\cap K' \neq \varnothing$ ise $g\in G_p$ olur.

4. $R\times K' \to R(K')$ homeomorfizm ve $R(K')$ p'nin komşuluğudur.

$G(K') = \mathrm{Int}(G(K))$ olduğunu gösterelim.

$gk'\in G(K')$ olsun $k'\in \mathrm{Int}(G(K))$ ise $gk'\in \mathrm{Int}(G(K))$ olur. O halde $G(K') \subset \mathrm{Int}(G(K))$ olur.

$gk\in \mathrm{Int}(G(K))$, $k\in K$ olsun o halde, $gk\in U \subset G(K)$ olacak şekilde açık bir U vardır. $k\in g^{-1}U \subset G(K)$ ise $k\in K'$ dür. Dolayısıyla $gk\in G(K')$ olup $\mathrm{Int}(G(K)) \subset G(K')$ elde edilir. O halde $G(K') = \mathrm{Int}(G(K))$ elde edilmiş olur.

5. $K' = \mathrm{Int}(G(K))\cap K = G(K')\cap K$ olduğundan K', $G(K')$'de kapalıdır.

Dolayısıyla K', $p\in X$'de daha önce yaptığımız tanıma göre bir dilim olur.

Sonuç 4.2.7: X tam regüler G-uzayı, G kompakt Lie grup ve P herhangi bir orbit ise P'nin öyle bir komşuluğu vardır ki bu komşulukta ki her Q orbiti için TipQ≥TipP dir.

İspat 4.2.7: P = $G(x)$, S, x de bir dilim olsun. O halde $f: G(S) \to G(x)$ ve $f^{-1}(x) = S$ olacak şekilde grup etkisini koruyan retraktı vardır. O halde f, $G(S)$'deki her orbiti $G(x)$'e taşır. O halde $G(S)$'deki her $G(y)$ orbiti için Tip($G(y)$)≥Tip($G(x)$) dir. Daha kesin olarak; U, e'nin G içindeki komşuluğu
V = US olsun, V, x'in komşuluğu olup y = us∈US = V için, $G_y = \mathrm{u}G_s\mathrm{u}^{-1}$ ve $G_s \subset G_{f(s)} = G_x$ olduğundan $\mathrm{u}^{-1}G_y\mathrm{u} \subset G_x$ olur.

Tanım 4.2.8 (Demet Uzayları): K, bir topolojik grup ve F, efektive sağ K-uzayı, X ve B Hausdorff uzaylar olsun. B üzerinde lifleri F ve yapı grubu K olan bir demet uzayı;
p:$X \to$B bir dönüşümdür öyle ki B'nin bir Ω açık örtüsü ve U∈Ω için aşağıda ki koşulları sağlayan φ_U: F×U→p^{-1}(U) homeomorfizması vardır. (Burada φ_U'ya U üzerinde bir harita denir.)

i)

$$\begin{tikzcd} F\times U \arrow[rr, "\varphi_U"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & & p^{-1}(U) \arrow[dl, "p"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

U∈Ω ve φ_U, U üzerinde bir harita olmak üzere yukarıda ki diyagram değişmelidir.

ii) φ ve ψ, U üzerinde iki harita θ:U→K sürekli bir fonksiyon vardır öyle ki ψ(f, u)=φ(fθ(u), u) dur. (f∈F, u∈U) θ'ya geçişme fonksiyonu denir

Teorem 4.2.9 : G kompakt Lie grup X tek tip orbit tipine sahip tam regüler bir G-uzayı olsun. Bu durumda $\pi : X \to X/G$ dönüşümü lifleri G nin X deki orbitleri olan bir demet uzayıdır.

İspat 4.2.9 : X tam regüler olduğundan her $x \in X$ için x'te bir S_x dilimi vardır. $G(S_x)$, x in açık komşuluğudur. Şimdi, sabit bir $x_0 \in X$ noktası alalım ve $F = G(x_0)$ diyelim. O halde her $x \in X$ için $G_{x_0} = hG_x h^{-1}$ olacak şekilde bir $h \in G$ vardır. $x \in X$ alalım ve ;

$f_x : G(S_x) \to S_x \times F$ $\quad f_x(gs) = (s,\ hgh^{-1}x_0)$ olarak tanımlayalım. f_x: iyi tanımlıdır:

$gs = ks'$ olsun öncelikle $s = s'$ olduğunu gösterelim. $s \neq s'$ olduğunu varsayalım X tek tip orbitten meydana geldiği için her $s \in S_x$ için $G_x = G_s$ olur. Dolayısıyla G_x'in S_x üzerine aşikar etkisi vardır. O halde;

$G_x(s) = \{s\}$ ve $G_x(s') = \{s'\}$ dir. O halde $G_x(s) \neq G_x(s')$ olur.

$$S_x/G_x \to X/G$$

$G_x(s) \to G(s)$ olarak tanımlanan fonksiyon, $G(S_x)/G$ içine bir homeomorfizmadır. Dolayısıyla $G(s) \neq G(s')$ olur. Bu ise $gs = ks'$ olmasıyla çelişir.

Dolayısıyla $s = s'$ olmak zorundadır. O halde $gs = ks$ olduğundan $g^{-1}k \in G_s = G_x$ olup. $hgh^{-1}hkh^{-1} \in G_{x_0}$ dır. Dolayısıyla f_x iyi tanımlı ve süreklidir. Şimdi;

$\varphi_x : S_x \times F \to G(S_x)$ $\quad \varphi_x(s,\ gx_0) = h^{-1}ghs$ olarak tanımlayalım. φ_x iyi tanımlı ve süreklidir. Ayrıca;

$\varphi_x f_x = 1_{G(S_x)}$, ve $f_x \varphi_x = 1_{S_x \times F}$ olup f_x grup etkisini koruyan bir homeomorfizmadır. Şimdi f_x'in grup etkisini koruduğunu gösterelim.

$$\alpha_x : G \times_{G_x} S \to S_x \times F$$

$$\alpha_x([g, s]) = (s,\ hgh^{-1}x_0)$$

olarak tanımlayalım α_x, iyi tanımlı ve sürekli olup α_x grup etkisini koruyan homeomorfizmdir. O halde;

$$\begin{tikzcd} G\times_{G_x} S_x \arrow[rr, "\approx", "\varphi"'] \arrow[dr, "\alpha_x"'] & & G(S_x) \arrow[dl, "f_x"] \\ & S_x\times F & \end{tikzcd}$$

α_x ve φ grup etkisini koruyan homeomorfizmler ve diagram değişmeli olduğundan f_x grup etkisini koruyan homeomorfizmadır.

$G(x)\in X/G$, olsun $G(S_x)/G$, $G(x)$`in açık komşuluğu olup; $S_x/G_x \approx G(S_x)/G$ dir.

Ayrıca, $S_x/G_x \approx S_x$ olup, $S_x \approx G(S_x)/G$ dir. Dolayısıyla, $G(S_x)/G \times F \approx G(S_x)$ olur.

$$\begin{tikzcd} G(S_x)/G\times F \arrow[rr, "\approx"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & G(S_x) \arrow[dl, "\pi"] \\ & G(S_x)/G & \end{tikzcd}$$

Yukarıda ki diagram değişmeli olup $\pi:X\to X/G$ lifleri F olan demet uzayıdır.

Şimdi yapı grubunu belirleyelim. $U\in\Omega$, φ ve ψ, U üzerinde iki harita olsun, o halde K, $\varphi^{-1}\psi$ ile tek türlü bellidir. Ayrıca $\varphi^{-1}\psi$;

$$U\to \mathrm{Map}(F, F\times U) \approx \mathrm{Map}(F,F)\times \mathrm{Map}(F, U)$$

$$u\to(\theta_u, \varepsilon_u)$$

fonksiyonunu belirler. Burada $\varepsilon_u : F\to U$ sabit fonksiyondur. O halde K, $\mathrm{Aut}(F) = \{f: f:F\to F \text{ bir homeomorfizm}\}$ grubunun bir alt grubudur. Şimdi $G(x)=G(y)$ olsun. O halde bir $k\in G$ için $G_y = kG_x k^{-1}$ olur. X tek orbit tipine sahip olduğundan bir $h\in G$ için $G_{x_0} = hG_x h^{-1}$ ve bir $t\in G$ için $G_{x_0} = tG_y t^{-1}$ olur. S_x, x`de bir dilim, $S_y$, $y$`de bir dilim, ve $G(S_x) = G(S_y)$ olsun

$\mathrm{U} = {G(S_x)}/{G} = {G(S_y)}/{G}$ olsun O halde $p^{-1}(\mathrm{U}) = G(S_x) = G(S_y)$ olur. Ayrıca $\mathrm{U} \approx S_x$ olup

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & p^{-1}(\mathrm{U}) = G(S_x) = G(S_y) \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "\lambda"] & \\
S_x \times G(x) \arrow[d, "\mu"] & & S_x \times G(y) \arrow[d, "\sigma"] \\
S_x \times F \arrow[rr, dotted, "\psi"] & & S_x \times F \\
(s,f) \arrow[rr, dotted] & & (s,\ f') = (s, \theta_s(f))
\end{tikzcd}$$

$$\eta(gs) = (s, gx)$$

$$\lambda(gs) = (s, \mathrm{kgk}^{-1} y_0)$$

$$\mu(s, gx) = (s, \mathrm{hgh}^{-1} x_0)$$

$$\sigma(s, gy) = (s, \mathrm{tgt}^{-1} x_0)$$

η, λ, μ, σ homeomorfizmler olup;

$$\psi(s, gx_0) = (s, \mathrm{tkh}^{-1}\mathrm{ghk}^{-1}\mathrm{t}x_0)$$

olarak tanımlanırsa yukarıdaki diagram değişmeli olup, θ iyi tanımlı, grup etkisini koruyan bir homeomorfizma olur. O halde K`nın her elemanı grup etkisini koruyan bir homeomorfizm olup

K = $\mathrm{Map}^G(F,F) = \{f: f: F \to F,$ grup etkisini koruyan bir homeomorfizma$\}$ olup;

$$\mathrm{K} \approx {N_G(G_x)}/{G_x} \text{ dir.}$$

Sonuç 4.2.10: G kompakt Lie grup, H, G`nin kapalı alt grubu, e`nin her U komşuluğu içinaşağıdaki özelliklere sahip e`nin bir W komşuluğu vardır

i. $W \subset \mathrm{U}$

ii. G nin $\mathrm{K} \subset WH$ şeklindeki her alt grubu için $\mathrm{uKu}^{-1} \subset H$ olacak şekilde bir $\mathrm{u} \in \mathrm{U}$ vardır.

İspat 4.2.10: X, G/H \`nin tüm kapalı alt kümelerinden oluşan uzay olsun $X$ üzerinde $d'(A, B) = \max d(a, B) + \max d(A, b)$, $a \in A$, $b \in B$ olarak tanımlanan Hausdorff metriği vardır. $x = \{eH\} \in X$ olsun. $G$, $X$ üzerine etki eder ve $G_x = H$ dır. U, e\`nin komşuluğu V\`de, $X$\`in sonuç 4.2.7 deki şartları sağlayan bir komşuluğu olsun, $W \subset U$ ve, WH/H tarafından içerilen herhangi bir kapalı küme; V\`nin elemanı olacak şekilde; $W$\`yu küçük seçebiliriz.

$K \subset WH$ ise $y = KH/H$, V\`nin bir elemanı olup $K \subset G_y$ olur.

Dolayısıyla bir $u \in U$ için, $u^{-1}Ku \subset u^{-1}G_y u \subset G_x = H$ olur.

Sonuç 4.2.11: G kompakt Lie grup X bir G-uzayı ve $p \in X$ olsun p\`nin öyle bir U komşuluğu vardır ki, her $y \in U$ için, $\mathrm{Tip}(G(y)) \geq \mathrm{Tip}(G(p))$ olur.

İspat 4.2.11: U, e\`nin komşuluğu, $H$, $G$\`nin kapalı alt grubu olsun o halde sonuç 4.2.8 den $e \in W \subset U$ ve $K \subset WH$ ise bir $u \in U$ için $u^{-1}Ku \subset H$ olacak şekilde e\`nin U içinde kalan bir W komşuluğu vardır.

$g \in G\text{-}WG_p$ ise $p \neq gp$ dir.

$p \in U_p$, $gp \in V_{gp}$ ve $U_p \cap V_{gp} = \varnothing$ olacak şekilde p\`nin $U_p$, $gp$\`nin V_{gp} komşulukları vardır.

$$G \times X \to X$$

$(g,x) \to gx$, sürekli olduğundan her $g \in G\text{-}WG_p$ için $g \in O_g \subset G$, $p \in U'_{p,g} \subset X$ ve

$O_g U'_{p,g} \subset V_{gp}$ olacak şekilde açık, O_g ve $U'_{p,g}$ kümeleri vardır.

$\{O_g : g \in G\text{-}WG_p\}$, $G\text{-}WG_p$\`nin açık örtüsü olup $G\text{-}WG_p$ kompakt olduğundan

$G\text{-}WG_p = \bigcup_{i=1}^{n} O_{g_i}$ şeklindedir. O halde, $V = \bigcap_{i=1}^{n} U'_{p,g_i}$, p\`nin bir komşuluğu olup

Her $y \in V$ ve her $g \in G\text{-}WG_p$ için $gy \neq y$ olup $G\text{-}WG_p \subset G\text{-}G_y$ dolayısıyla $G_y \subset WG_p$ olup bir $u \in U$ için, $u^{-1}G_y u \subset G_p$ dir. Dolayısıyla her $y \in V$ için

$$\mathrm{Tip}(G(y)) \geq \mathrm{Tip}(G(p)) \text{ dir.}$$

4.3 Eğrilerin Yükseltilmesi

Teorem 4.3.1: G bir kompakt Lie grup ve X, $X/G \approx I = [0,1]$ şeklinde bir G uzayı olsun. O halde ;

$\pi : X \to X/G$ dönüşümünün bir kesiti vardır.

İspat 4.3.1: X kompakt olduğundan tam regülerdir. Dolayısıyla her noktada dilim vardır. π'nin, X/G'nin, her noktası civarında yerel kesiti olduğunu göstermek yeterlidir. Çünkü eğer ;

σ_i: $[\, i/n, (i+1)/n \,] \to X$ çapraz kesit (i=0,1,2,.......,n-1) ise ve $g_i \in G$

$g_0 = e$, ve $g_i \sigma_i(i/n) = \sigma_{i-1}(i/n)$, $1 \le i \le n-1$, olsun. O halde;

$\sigma: I \to X$, $\sigma(t) = g_0 g_1 .... g_i \sigma_i(t)$ $\quad i/n \le t \le (i+1)/n$, global kesittir.

Şimdi yerel çapraz kesitin (dolayısıyla global kesitin) varlığını G'nin boyutu ve bileşenlerinin sayısı üzerinde çifte tümevarımla gösterelim.

E: e'nin G'deki yol bileşeni olsun. E kapalı normal alt gruptur.

$\dim G = 0$ ve $|G/E| = 1$ olsun.Bu durumda $G = \{e\}$ olup, $X/G \approx X$ dir. Dolayısıyla global kesit vardır. Şimdi, hipotezimizin;

$\dim G < n$, ve $|G/E|$ ne olursa olsun, ve;

$|G/E| < t$, ve $\dim G = n$ iken doğru olduğunu varsayalım.

$$\dim G = n, \text{ ve } |G/E| = t \text{ olsun}$$

$F = X^G$ ve $F^* = \pi(F) \subset I = X/G$ olup, F^* kapalıdır. G, X-F üzerine etki eder ve $(X-F)/G$ = I-F^* dır. $y \in X$-F olsun, X-F, tam regüler G-uzayı olduğundan y'de X-F içinde kalan S dilimi vardır. O halde G_y'nin S üzerine etkisi vardır.

$$\dim G_y \leq \dim G \text{ dir.}$$

$\dim G_y = \dim G = n$ ise $|G/E| < t$ olup varsayımımızdan $S \to S/G_y$ dönüşümünün yerel kesiti (dolayısıyla global kesiti)vardır.

$\dim G_y < n$ ise varsayımımızdan, $S \to S/G_y$ dönüşümünün global kesiti vardır.

O halde, $X\text{-}F \to I\text{-}F^*$ dönüşümünün global kesiti vardır. Bu kesite $C' \subset X\text{-}F$, diyelim C', $X\text{-}F$'de kapalı olup $C = C' \cup F$, X'de kapalıdır ve X'deki her orbitle tek noktada kesişir. O halde C global kesittir.

Şimdi, $\dim G = n$, ve $|G/E| = t+1$ olsun. Benzer şekilde, $y \in X\text{-}F$ için

$\dim G_y = \dim G = n$ ise $|G/E| \leq t$ olup, $S \to S/G_y$ dönüşümünün global kesiti vardır.

$\dim G_y < n$ ise varsayımımızdan, $S \to S/G_y$ dönüşümünün global çapraz kesiti vardır.

Şimdi;

$\dim G = n+1$ ve $|G/E| = t$ olsun, $y \in X\text{-}F$ için;

$\dim G_y = \dim G = n+1$ ise $|G/E| < t$ olup varsayımımızdan, $S \to S/G_y$ dönüşümünün global kesiti vardır.

$\dim G_y < \dim G < n+1$ ise $\dim G_y \leq n$ olup, $S \to S/G_y$ dönüşümünün global kesiti vardır. O halde ;

$\dim G < n+1$, ve $|G/E|$ ne olursa olsun doğru ve;

$|G/E| < t$, ve $\dim G$ ne olursa olsun hipotezimizin doğru olduğu sonucunu elde ettik.

O halde $\pi : X \to X/G$ dönüşümünün kesiti vardır.

Teorem 4.3.2: G bir kompakt Lie grup X bir G-uzayı ve $f : I \to X/G$ herhangi bir eğri ise f nin bir f', yükseltilmesi vardır.

İspat 4.3.2: X'in f tarafından geri çekilmesi olan f^*X'i düşünelim

$$f^*X/G \approx I$$

$$\begin{tikzcd} f^*X \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, shift left, "\pi'"] & X \arrow[d, "\pi_X"] \\ I \arrow[u, shift left, "\sigma"] \arrow[r] & X/G \end{tikzcd}$$

π''nün, global kesiti σ vardır. $f' = f_1 \circ \sigma$, f nin bir yükseltilmesi olur.

Sonuç 4.3.3: G kompakt Lie grup X yol bağlantılı G-uzayı, ve bağlantılı bir G-orbit varsa, $\pi_*: \pi_1(X) \to \pi_1(X/G)$ örtendir. Dolayısıyla, X, basit bağlantılı ise X/G de basit bağlantılıdır.

İspat 4.3.3: $G(x)$ bağlantılı olsun, $\pi(x) = x^*$ ve $f: I \to X/G$, x^*'da kapalı bir eğri, yani $f(0) = f(1) = x^*$ olsun. $f': I \to X$, f nin yükseltilmesi $f'(0) = x$ varsayabiliriz. $k: I \to G(x)$ $k(0) = f'(1)$ ve $k(1) = x$ olan bir eğri olsun
G(x) bağlantılı olduğundan böyle bir eğri vardır. $f'k: I \to X$, x'de kapalı bir eğri olup, $\pi_*([f'k]) = [f1_{x^*}] = [f]$ olur. Dolayısıyla, π_* örtendir.

Sonuç 4.3.4: X yol bağlantılı ve yerel basit bağlantılı tam regüler G-uzayı G kompakt Lie grup ise X/G yerel yarı basit bağlantılıdır.

İspat 4.3.4: $x \in X$, V^*, x^*`ın $X/G$`de bir komşuluğu, $V = \pi^{-1}(V^*)$ olsun; U, x`in V içinde kalan basit bağlantılı komşuluğu için $\pi_1(U, x) \to \pi_1(V, x)$ sıfır dönüşümüdür. $S$, $x$`de bir dilim olsun. $S \subset U$ varsayabiliriz. x, G_x`in $S$ üzerine etkisi altında sabit kaldığından, $S$`de bağlantılı bir G_x-orbit vardır. O halde ;

$$\pi_1(S, x) \to \pi_1(S/G_x, x^*) = \pi_1(GS/G, x^*) \text{ örten olup}$$

$$\begin{tikzcd} \pi_1(S, x) \arrow[r, "0"] \arrow[d] & \pi_1(V, x) \arrow[d] \\ \pi_1(GS/G, x^*) \arrow[r] & \pi_1(V^*, x^*) \end{tikzcd}$$

alttaki dönüşüm sıfır dönüşümüdür. O halde, x^*`ın, $x^* \in GS/G \subset V^*$ olacak şekilde basit bağlantılı GS/G komşuluğu vardır. O halde, X/G yerel yarı basit bağlantılıdır.

Sonuç 4.3.5: X yol bağlantılı G-uzayı, G kompakt Lie grup ise

$$H_1(X, Q) \to H_1(X/G, Q) \text{ örtendir.}$$

İspat 4.3.5: $H_1(X, Q) \approx H_1(X, Z) \otimes Q$ dur. (evrensel katsayı teoreminden)

$\alpha \in H_1(X/G, Z)$ olsun. Hurewicz teoreminden $\alpha = \varphi([f])$dir.

($f: I \to X/G$, kapalı eğri) $f$nin bir f' yükseltilmesi vardır. Şimdi, $f'(0)$ ve $f'(1)$`in aynı bileşende olmadığını varsayalım; bir $g \in G$ için $f'(1) = g\, f'(0)$ olup bir $n \neq 0$ için g^n birim elemanın bileşeninin elemanı olur.

O halde $g^{n-1} f'(1) = g^n f'(0)$ ile $f'(0)$, $G(f'(0))$`ın aynı bileşeninin içinde olur. $k$, $g^{n-1} f'(1)$`den $f'(0)$`a bir eğri olsun; $f' g f' g^2 f' \ldots\ldots\ldots\ldots g^{n-1} f' k$, X içinde kapalı bir eğri olup;

$$\pi_*([f'gf'g^2f'\ldots\ldots\ldots\ldots g^{n-1}f'k]) = [\underbrace{ff\quad f}_{n-defa}1] = [f^n]\text{ olur.}$$

O halde, $n\alpha$, $H_1(X, Z)$'nin görüntüsünde olup;

$\alpha\otimes q = n\alpha\otimes\frac{q}{n}$, $H_1(X, Z)\otimes Q\to H_1(X/G, Z)\otimes Q$ dönüşümünün görüntüsündedir.

Dolayısıyla, $H_1(X, Q)\to H_1(X/G, Q)$ homomorfizmi örtendir.

SONUÇLAR

X bir G-uzayı G kompakt Lie grup olsun; $p : X \to X/G$, $p(x) = G(x)$ olarak tanımlanan kanonik dönüşüm ise örtü uzaylarının aksine

$p_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(X/G, x^*)$ dönüşümü genel durumda, 1-1 değildir. Buna bir örnek verelim. $X = S^1$, $G = Z_2$ olsun $G \times S^1 \to S^1$

$$(g, e^{i\theta}) \to ge^{i\theta} = \begin{cases} e^{i\theta} & g = e \ \text{ise} \\ e^{-i\theta} & g \neq e \ \text{ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanan fonksiyon sürekli olup G'nin X üzerine bir etkisidir. Bu etkinin orbit uzayı; $X/G \approx I$ olup dolayısıyla basit bağlantılıdır. $\pi_1(X, x) \cong Z$ olup

$p_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(X/G, x^*)$ dönüşümü 1-1 olamaz.

Teorem 4.3.6: G kompakt Lie grup, X bir G-uzayı, $p : X \to X/G$; $x \in X$ ve $p(x) = x^*$ olsun. O halde, $p_*(\pi_1(X, x))$, $\pi_1(X/G, x^*)$'ın normal alt grubudur.

İspat 4.3.6: $[g] \in \pi_1(X/G, x^*)$, $[f] \in \pi_1(X, x)$ olsun

$[g]p_*([f])[g]^{-1} \in p_*(\pi_1(X, x))$ olduğunu gösterelim.

$[g] \in \pi_1(X/G, x^*)$ olup g nin x den başlayan bir $\bar{g}$ yükseltilmişi vardır.

$$\begin{tikzcd} & X, x \arrow[d, "p"] \\ g : I \arrow[ur, dotted, "\bar{g}"] \arrow[r] & X/G, x^* \end{tikzcd}$$

$p\bar{g} = g$, ve $\bar{g}(0) = x$, $\bar{g}(1) = hx$, $h \in G$, olup, $\bar{g}hf\bar{g}^{-1}$, x de kapalı bir eğri olur.

$[g]p_*([f])[g]^{-1} = p_*([\bar{g}hf\bar{g}^{-1}]) \in p_*(\pi_1(X, x))$ olur. Dolayısıyla;

$p_*(\pi_1(X, x))$, $\pi_1(X/G, x^*)$'nin normal alt grubudur.

Teorem 4.3.7: G bir kompakt Lie grup X bir G-uzayı, $p : X \to X/G$ kanonik dönüşüm $x \in X$ ve $p(x) = x^*$; n bileşenli bir orbit ise $\pi_1(X/G, x^*) \big/ p_*(\pi_1(X, x))$`in her a elemanı için $a^k = e$ ve $k \leq n$ olacak şekilde bir k vardır.

İspat 4.3.7: $[f]p_*(\pi_1(X, x)) \in \pi_1(X/G, x^*) \big/ p_*(\pi_1(X, x))$ olsun

$[f] \in \pi_1(X/G, x^*)$ olup, f, x^*`da kapalı bir eğridir

$$\begin{tikzcd} & X, x \arrow[d, "p"] \\ f: I \arrow[ur, dotted, "\bar{f}"] \arrow[r] & X/G, x^* \end{tikzcd}$$

f nin x`de başlayan bir $\bar{f}$ yükseltilmişi vardır. $\bar{f}(0) = x$, $\bar{f}(1) = gx$, $g \in G$ olsun o zaman bir $k \in N$, ve $k \leq n$ için $x$ ile $g^k x$ aynı bileşende olur. O halde bu bileşen içinde kalan ve $x$ ile $g^k x$`i birleştiren bir h eğrisi vardır. Bu durunda, $\bar{f}\, g\, \bar{f}\ ....g^{k-1}\, \bar{f}\, h$, x`de kapalı bir eğri olup ;

$p_*([\bar{f}\, g\, \bar{f}\ ....g^{k-1}\, \bar{f}\, h]) = [\underbrace{ff \qquad f}_{k-defa}] = [f]^k \in p_*(\pi_1(X, x))$ dir. Dolayısıyla

her $[f]p_*(\pi_1(X, x)) \in \pi_1(X/G, x^*) \big/ p_*(\pi_1(X, x))$ için ve bir $k \in N$,

$([f]p_*(\pi_1(X, x)))^k = p_*(\pi_1(X, x))$ dir. ve $k \leq n$ dir.

Sonuç 4.3.8: X basit bağlantılı bir G-uzäyı, G kompakt Lie grup, x^*; n, bileşenli Bir orbit ise, $\pi_1(X/G, x^*)$`nin her elemanının derecesi n`den küçük veya n`ye eşittir.

KAYNAKLAR

1. Spainer.E, "Algebraic Topology", McGraw-Hill, (1966)

2. Massey.W, "Algebraic Topology, an Introduction", Springer-Verlag, (1977)

3. Bredon.G, "Geometry and Topology", Springer-Verlag, (1993)

4. Bredon.G, "Introduction to Compact Transformation Groups", Academic Press, (1972)

5. Montgomery.D, Yang.C.T (1957), "The Existence of a Slice", Annals of Mathematics, vol.65, No.1, 108-116

ÖZGEÇMİŞ

1974 yılında Adana`da doğdum ilk-orta ve lise eğitimimi Adana`da tamamladıktan sonra 1992`de Çukurova Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne girdim. 1997 yılında mezun olup aynı yıl Çukurova Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak göreve başladım. Halen aynı görevde bulunmaktayım.