

DEĞİŞKEN KATSAYILI EVOLÜSYON DENKLEMLERİN
ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI

AYŞE FİDAN

HAZİRAN 2025

DİYARBAKIR

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞKEN KATSAYILI EVOLÜSYON DENKLEMLERİN
ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI

AYŞE FİDAN

DİCLE ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM-ÖĞRETİM VE SINAV
YÖNETMELİĞİNİN BİR PARÇASI OLARAK
MATEMATİK ANA BİLİM DALINDA
DOKTORA TEZİ
OLARAK HAZIRLANMIŞTIR

HAZİRAN 2025

DİYARBAKIR

DEĞİŞKEN KATSAYILI EVOLÜSYON DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI

Ayşe FİDAN tarafından Dicle Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin bir parçası olarak hazırlanan bu çalışma, aşağıda bilgileri yazılı jüri üyeleri tarafından değerlendirilerek **Matematik Ana Bilim Dalı**'nda **Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Neslihan DALKILIÇ
Müdür, **Fen Bilimleri Enstitüsü**

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN
Danışman, **Matematik Bölümü**

SınavJürisi:

Prof. Dr. Billur KAYMAKÇALAN^(*)
Matematik Bölümü, Türk Hava Kurumu Üniversitesi

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN^(**)
Matematik Bölümü, Dicle Üniversitesi

Prof. Dr. Zeynep KAYAR
Matematik Bölümü, Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi

Prof. Dr. Zehra YÜCEDAĞ
Matematik Bölümü, Dicle Üniversitesi

Prof. Dr. Işık Yeşim ERDAMAR
Fizik Bölümü, Dicle Üniversitesi

ONAY

SavunmaTarihi: 26/ 06/ 2025

(*)Jüri Başkanı.

(**)Tez Danışmanı.



Aileme...

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tez çalışmasında yer alan tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu beyan ederim. Ayrıca, bahse konu bu kural ve ilkelerin gerektirdiği üzere, bu çalışmada özgün olmayan tüm bilimsel içerikleri kurallara uygun biçimde alıntılıyıp kaynak gösterdiğimi beyan ederim. Beyanımınla çelişen herhangi bir delil bulunduğu takdirde tüm sorumluluğu üstleneceğimi kabul ederim.

Ad, Soyad: Ayşe FİDAN

İmza:

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca her türlü desteğini benden esirgemeyen ve her zaman yanımda olan ailem olmak üzere; deneyimi ve sorularıma ışık tutan akademik bilgisiyle tezimin hazırlanmasında bana destek olan danışmanım Prof. Dr. Erhan PİŞKİN' e teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca Tez jürisinde yer alarak çalışmama katkı sağlayan jüri üyelerine teşekkür ederim.

Son olarak, bu çalışmanın yürütülmesinde 2211 Yurt İçi Doktora Bursu kapsamında maddi destek sağlayan Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na (TÜBİTAK) teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	viii
ÖZET.....	ix
ABSTRACT	x
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	3
3. ÖN BİLGİLER.....	20
3.1 Yakınsaklık.....	21
3.2 Lebesgue Uzayı	23
3.3 Sobolev Uzayı	27
3.4 Bazı Önemli Eşitlikler ve Eşitsizlikler	31
3.5 Çözümlerin Varlığı ile İlgili Bazı Lemmalar	38
3.6 Çözümlerin Azalması ile İlgili Bazı Lemmalar	41
3.7 Çözümlerin Patlaması ile İlgili Bazı Lemmalar	43
4. DEĞİŞKEN KATSAYILI GÜÇLÜ SÖNÜM TERİMLİ DALGA DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN PATLAMASI.....	51
4.1 Giriş	51
4.2 Çözümlerin Patlaması.....	56
5. DOĞRUSAL OLMAYAN SÖNÜM VE KAYNAK TERİME SAHİP AĞIRLIKLİ m -BİHARMONİK DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI, AZALMASI VE PATLAMASI.....	64
5.1 Giriş	64
5.2 Global Varlık	65
5.3 Enerjinin Azalması.....	69
5.4 Çözümlerin Patlaması.....	73

6. TEKİL POTANSİYELE SAHİP YÜKSEK MERTEBEDEN BİR REAKSİYON DİFÜZYON DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN GLOBAL VARLIĞI VE PATLAMASI.....	83
6.1 Giriş.....	83
6.2 Global varlık.....	89
6.3 Çözümlerin Patlaması.....	93
6.3.1 Patlama zamanı için üst sınır.....	93
6.3.2 Patlama zamanı için alt sınır.....	99
7. DEĞİŞKEN KATSAYILI GECİKME TERİMLİ PETROVSKY DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN AZALMASI.....	101
7.1 Giriş.....	101
7.2 Çözümlerin Azalması.....	104
8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	111
KAYNAKLAR	112
ÖZGEÇMİŞ.....	118

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

Simge	Açıklama
R^n	n-boyutlu Euclid Uzayı
Ω	R^n de sınırlı bir bölge
$\partial\Omega$	Ω bölgesinin sınırı
$C(\Omega)$	Süreklı Fonksiyonlar Uzayı
$L^p(\Omega)$	Lebesgue İntegrallenebilir Fonksiyonlar Uzayı
$W^{m,p}(\Omega)$	Sobolev Uzayı
$H^m(\Omega)$	Hilbert Uzayı
∇	Nabla operatörü (Gradyent)
Δ	Laplace operatörü

ÖZET

DEĞİŞKEN KATSAYILI EVOLÜSYON DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI

FİDAN, Ayşe

Doktora, Matematik Bölümü

Danışman: Prof. Dr. Erhan PİŞKİN

Haziran 2025, 129 sayfa

Evrendeki olayları anlamak için kısmi türevli denklemler oldukça önemli araçlardır. Örneğin; bir keman telinin titreşimi, ses dalgaları, bir çubuktaki ısı iletimi...gibi bir çok olay kısmi türevli denklem olarak modellenmektedir. Kısmi diferansiyel denklemlerde bağımsız değişkenlerden biri zaman (t) olan denklemlere evolüsyon denklemler denir. Evolüsyon denklemler zamanla değişen fiziksel sistemleri modellemek için kullanılan diferansiyel denklemler sınıfıdır. Bu denklemler, matematiğin yanı sıra fizik, mekanik ve malzeme bilimi gibi diğer disiplinlerde de büyük önem taşır. Ayrıca gerçek hayatta birçok fiziksel süreç, ortam koşullarının zamana veya konuma bağlı olarak değişim göstermesi nedeniyle sabit katsayılı matematiksel modellerle tam olarak ifade edilemez. Bu gibi durumlarda değişken katsayılı diferansiyel denklemler kullanılarak daha gerçekçi modellemeler yapılabilir. Örneğin, ısı iletimi, dalga yayılımı, difüzyon ve akışkanlar dinamiği gibi birçok alanda, ortamın sıcaklık, yoğunluk veya elastikiyet gibi özellikleri zaman veya mekân içinde değişkenlik gösterir. Böyle sistemlerin analizinde değişken katsayılı denklemler kaçınılmaz bir ihtiyaç haline gelir. Bu bağlamda tezin ilk bölümünde diferansiyel denklem teorisine, mühendislik ve fen gibi uygulamalı bilimlerde ortaya çıkan evolüsyon denklemlere ve çözümlerin davranışına kısaca değinilmiştir. İkinci bölümünde tezde geçen denklemlerin fiziksel anlamları ve bu denklemler ile ilgili günümüze kadar yapılan çalışmaların tarihi gelişimi ele alınmıştır. Üçüncü bölümünde tez boyunca kullanılacak olan temel tanım, lemma, teorem, eşitsizlikler ve eşitlikler verilmiştir. Ayrıca çözümlerin varlığı, azalması ve patlaması ile ilgili lemmalar verilmiştir. Dördüncü bölümünde değişken katsayılı güçlü sönüm terimli dalga denkleminin çözümlerinin patlaması ele alınmıştır. Beşinci bölümünde doğrusal olmayan sönüm ve kaynak terime sahip ağırlıklı m -biharmonik denklemin çözümlerinin varlığı, azalması ve patlaması çalışılmıştır. Altıncı bölümünde tekil potansiyele sahip yüksek mertebeden bir reaksiyon difüzyon denkleminin çözümlerinin global varlığı ve patlama zamanı için üst ve alt sınır çalışılmıştır. Yedinci bölümünde değişken katsayılı gecikme terimli Petrovsky denklemi için çözümlerin azalması çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Değişken katsayılı denklemler, Enerji azalması, Gecikmeli terim, Global varlık, Patlama, Petrovsky, Tekil potansiyel.

ABSTRACT

BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF VARIABLE COEFFICIENT EVOLUTION EQUATIONS

FİDAN, Ayşe

PhD in Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Erhan PİŞKİN

June 2025, 129 pages

Partial differential equations are essential tools for understanding phenomena in the universe. For instance, many events such as the vibration of a violin string, sound waves, or heat conduction in a rod can be modeled using partial differential equations. When one of the independent variables in a partial differential equation is time (t), such equations are called evolution equations. Evolution equations constitute a class of differential equations used to model physical systems that change over time. These equations are of great importance not only in mathematics but also in other disciplines such as physics, mechanics, and materials science. Moreover, in real-world scenarios, many physical processes cannot be accurately represented by constant-coefficient mathematical models due to the fact that environmental conditions often vary with time or space. In such cases, variable-coefficient differential equations provide more realistic modeling. For example, in areas like heat conduction, wave propagation, diffusion, and fluid dynamics, properties of the medium such as temperature, density, or elasticity may vary in time or space. Analyzing such systems inevitably requires the use of variable-coefficient equations. In this context, the first part of the thesis briefly introduces the theory of differential equations, the evolution equations arising in applied sciences such as engineering and physics, and the behavior of their solutions. In the second chapter, the physical interpretations of the equations considered in this thesis are discussed, along with a historical overview of the related studies conducted up to the present day. In the third chapter, the fundamental definitions, lemmas, theorems, inequalities, and equalities that will be used throughout the thesis are introduced. In addition, several lemmas regarding the existence, decay, and blow-up of solutions are provided. In the fourth chapter, the blow-up behavior of solutions to a variable coefficient strongly damped wave equation is investigated. In the fifth chapter, the existence, decay, and blow-up of solutions for a weighted m -biharmonic equation with nonlinear damping and source terms are studied. In the sixth chapter, the upper and lower bounds for the global existence and blow-up time of solutions to a higher-order reaction-diffusion equation with singular potential are examined. In the seventh chapter, the decay of solutions to a variable coefficient Petrovsky equation with delay term is analyzed.

Keywords: Blow-up, Delay term, Energy decay, Global existence, Petrovsky, Variable coefficient equations, Singular potential.

1. GİRİŞ

Diferansiyel denklemler ilk olarak 17. yüzyılın sonlarında Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz, Bernoulli kardeşler Jakob ve Johann'ın çalışmalarıyla tanıtılmıştır. Bu denklemler, bu büyük bilim insanlarının kalkülüsün yeniliklerini mekanikteki belirli problemlere uygulama çabalarının doğal bir ürünü olarak ortaya çıkmıştır. Üç yüzyıldan fazla bir süredir, diferansiyel denklemler, birçok bilim dalındaki sorunları tanımlamak ve analiz etmek için vazgeçilmez bir araç olmuştur. Bu denklemlerin önemi, nesiller boyu matematikçileri ve diğer bilim insanlarını, çözümlerinin özelliklerini incelemek için yöntemler geliştirmeye yönlendirmiştir. Bu yöntemler, basit fonksiyonlar üzerinden kesin çözümler bulmaktan, modern analitik ve sayısal yaklaşımlara kadar geniş bir yelpazede yer almaktadır. Ayrıca, diferansiyel denklemler matematiğin ilerlemesinde merkezi bir rol oynamış, bu denklemlerle ilgili sorular yeni matematiksel alanların doğmasına yol açmış analiz, topoloji, cebir ve geometri gibi alanlardaki gelişmeler diferansiyel denklemler için yeni bakış açıları sağlamıştır (Kelly ve Peterson, 2010). Diferansiyel denklemler, gök cisimlerinin hareketlerinin incelenmesi ve bir nesnenin sürtünme olmaksızın P noktasından Q noktasına en kısa sürede ulaşacağı brakistokron eğrisi gibi mekanik problemlerin çözümünde de kullanılmıştır. Günlük yaşamda gözlemlenen temel süreçlerin çoğu, büyük ölçüde diferansiyel denklemler temelinde açıklanabilir.

Uygulamalı bilimlerde, çoğunlukla bir diferansiyel denklemin genel çözümünden ziyade, belirli ek koşulları karşılayan çözümlerin bulunması amaçlanır. Eğer bu ek koşullar bağımlı değişken ve türevleri için yalnızca tek bir noktada tanımlanmışsa bu tür problemler başlangıç-değer problemi olarak adlandırılır. Ancak, ek koşullar en az iki farklı noktada tanımlanmışsa, bu durum sınır-değer problemi olarak ifade edilir (Pişkin, 2024). Sınır değer problemleri sınırdaki verilen fonksiyonun durumuna göre ayrıca sınıflandırılır. Eğer denklemin sınırdaki aldığı değer verilmişse Dirichlet sınır koşulu, sınırdaki fonksiyonun türevinin aldığı değer verilmişse Neumann sınır koşulu, bunların toplamı olarak verilmişse karışık (mixed) sınır koşulu ve bölgenin bir kısmında fonksiyonun aldığı değerler diğer bir kısmında ise fonksiyonun türevinin aldığı değer verilmişse Robin sınır koşulu olur.

Evrendeki olayları anlamak için kısmi türevli denklemler oldukça önemli araçlardır.

Örneğin; bir keman telinin titreşimi, ses dalgaları, bir çubuktaki ısı iletimi...gibi bir çok olay kısmi türevli denklem olarak modellenmektedir. Ayrıca kısmi türevli denklemler, diferansiyel geometri ve analiz gibi matematiğin diğer dallarının gelişmesi için de oldukça önemli araçlardır.

Kısmi diferansiyel denklemlerde bağımsız değişkenlerden biri zaman (t) olan denklemlere evolüsyon denklemler denir. Evolüsyon denklemler zamanla değişen fiziksel sistemleri modellemek için kullanılan diferansiyel denklemler sınıfıdır. Bu denklemler, matematiğin yanı sıra fizik, mekanik ve malzeme bilimi gibi diğer disiplinlerde de büyük önem taşır. Doğrusal olmayan evolüsyon denklemlerinin teorik çalışmalarda zorluğu ve karmaşıklığı matematikçilerin dikkatini çekmiştir. Teorik çalışmalarda sorulan ilk soru, başlangıç verilerine sahip evolüsyon denklemin lokal bir çözümünün olup olmadığıdır. 1960 lardan itibaren çözümlerin global varlığına dikkat çekilmiştir (Zheng, 2004).

Evolüsyon denklemler farklı türlerde sınıflandırılabilir: parabolik ve hiperbolik denklemler. Örneğin, parabolik denklemler ısı yayılımı gibi süreçleri, hiperbolik denklemler dalga hareketleri gibi olayları modellemek için kullanılır.

Parabolik denklemler, çeşitli fen ve mühendislik uygulamalarında önemli bir rol oynar. Bazı temel kullanım alanları şunlardır:

- Isı Transferi: Katı maddeler içinde sıcaklığın zamanla nasıl dağıldığını analiz etmek için kullanılır.
- Madde Yayılımı: Gazların, sıvıların veya kimyasal bileşenlerin farklı ortamlar içinde nasıl yayıldığını modellemek amacıyla uygulanır.
- Finansal Modelleme: Finansal varlıkların gelecekteki değerlerini tahmin etmek için kullanılır. Bu tür modeller, belirsizlik ve rastgele değişimler içeren piyasa koşullarını analiz ederek opsiyon fiyatlarının hesaplanmasına katkı sağlar.
- Görüntü İşleme: Dijital görsellerin kalitesini artırmak amacıyla çeşitli matematiksel teknikler kullanılır.

Parabolik denklemler, fizikteki birçok olgu, reaksiyon-difüzyon, nüfus dinamiği süreçleri ve ısı transferi ile ilgili problemlere yol açar (Jiang vd., 2004).

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Tezin dördüncü, beşinci, altıncı ve yedinci bölümü özgün problemlerden oluşmaktadır.

Tezin dördüncü bölümünde değişken katsayılı güçlü sönüm terimli

$$z_{tt} - \Delta z - \Delta z_t + \mu_1(t) |z_t|^{p-2} z_t = \mu_2(t) |z|^{q-2} z$$

dalga denkleminin çözümlerinin patlaması çalışıldı (Pişkin ve Fidan, 2022).

Tezin beşinci bölümünde doğrusal olmayan sönüm ve kaynak terime sahip

$$z_{tt} + \Delta (k(x) |\Delta z|^{m-2} \Delta z) + \Delta^2 z_t + |z_t|^{p-1} z_t = |z|^{q-1} z$$

ağırlıklı m -biharmonik denklemin çözümlerinin varlığı, azalması ve patlaması çalışıldı (Fidan vd., 2024).

Tezin altıncı bölümünde

$$\frac{z_t}{|x|^{2m}} + \mathcal{A}z = \alpha(t) |z|^{r-1} z$$

tekil potansiyele sahip yüksek mertebeden bir reaksiyon difüzyon denkleminin çözümlerinin global varlığı ve patlaması ele alındı (Fidan ve Pişkin, incelemede). Burada $m > 1$ tamsayısı için $\mathcal{A} = (-\Delta)^m$ dır.

Tezin yedinci bölümünde

$$u_{tt} + \Delta^2 u + \beta_1(t) u_t(x, t) + \beta_2(t) u_t(x, t - \tau) = 0$$

değişken katsayılı gecikme terimli Petrovsky denklemi için çözümlerin azalması çalışıldı (Fidan ve Pişkin, 2025).

2.1 Denklemlerin Fiziksel Anlamları

Bu kısımda çalıştığımız denklemlerin fiziksel anlamlarına yer verdik.

2.1.1 Değişken katsayılı denklemler

Değişken katsayılı denklemlerin fiziksel yorumu, genellikle matematiksel modelleme ve fiziksel sistemlerin analizinde önemli bir rol oynar. Bu katsayılar, bir sistemin özelliklerinin zaman, mekan veya diğer faktörlere bağlı olarak değişmesini temsil eder. Fizikte, değişken katsayılar çeşitli olayların modellenmesinde kullanılır.

Örneğin:

- **Termodinamik ve Isı Transferi:** Isı iletimi denklemlerinde, sıcaklık, yoğunluk, ısı iletkenliği gibi parametreler zaman ve yer bazında değişebilir. Bu değişken katsayılar, malzemenin ısı özelliklerinin heterojenliğini ifade eder.
- **Dalga Denklemleri:** Akustik ve elektromanyetik dalgaların yayılmasını tanımlayan denklemler, ortamın özelliklerine bağlı olarak değişken katsayılar içerir (örneğin, ortamın geçirgenliği veya elastik modül). Bu katsayılar ortamın özelliklerine bağlı olarak değişebilir.
- **Difüzyon ve Akışkanlar Mekaniği:** Akışkanın yoğunluğu veya viskozitesi gibi parametreler, akışkanın hareketine etki eden değişken katsayılardır. Örneğin, bir sıvının viskozitesi sıcaklıkla değişebilir, bu da sıvının akışını etkiler.
- **Yarı iletkenler ve Elektriksel Alanlar:** Elektriksel iletkenlik veya dielektrik katsayıları da değişken olabilir, bu da elektriksel alanların ve akımların farklı ortamlar içinde nasıl dağıldığını belirler.

2.1.1.1 Değişken katsayılı denklemlerin önemi

Gerçek hayatta, ortamlar homojen olmayabilir. Örneğin; bir malzemenin farklı bölgelerinde farklı ısı iletkenliği olabilir. Bu tür sistemlerin davranışını daha gerçekçi şekilde modellemek için değişken katsayılı kısmi türevli denklemler gerekir. Gerçek dünyadaki birçok fiziksel süreç, ortam koşullarının zamana veya konuma bağlı olarak değişim göstermesi nedeniyle sabit katsayılı matematiksel modellerle tam olarak ifade edilemez. Bu gibi durumlarda değişken katsayılı diferansiyel denklemler kullanılarak daha gerçekçi modellemeler yapılabilir. Örneğin, ısı iletimi, dalga yayılımı, difüzyon ve akışkanlar dinamiği gibi birçok alanda, ortamın sıcaklık, yoğunluk veya elastikiyet gibi özellikleri zaman veya mekân içinde değişkenlik gösterir. Böyle sistemlerin analizinde değişken katsayılı denklemler kaçınılmaz bir ihtiyaç haline gelir.

2.1.1.2 Günlük hayattan değişken katsayı örnekleri

Değişken katsayılı modellerin önemini somutlaştırmak için günlük hayattan bazı örnekler aşağıda sunulmuştur:

Örnekler:

- **Açık havada soğuyan cisim örnek olarak verilebilir.** Burada değişken katsayının sebebi hava sıcaklığının zamanla değişmesi

- İpte yayılan dalga örnek olarak verilebilir. Burada değişken katsayının sebebi ipin kalınlığı veya geriliminin konuma göre değişmesi
- Deniz suyunda ısı yayılımı örnek olarak verilebilir. Burada değişken katsayının sebebi su sıcaklığı ve yoğunluğunun derinliğe göre değişmesi
- Elektrik kablosunda akım iletimi örnek olarak verilebilir. Burada değişken katsayının sebebi kablonun yapısal özelliklerinin konuma göre değişmesi
- Atmosferde yayılan ses dalgası örnek olarak verilebilir. Burada değişken katsayının sebebi havanın sıcaklığı ve yoğunluğunun yükseklikle değişmesidir.

Bu örneklerden de görülebileceği gibi, ortam parametrelerindeki değişimler doğrudan sistemin davranışını etkiler. Dolayısıyla değişken katsayılı diferansiyel denklemler, fiziksel olguların daha doğru ve hassas bir şekilde modellenmesi için kritik bir rol üstlenir.

2.1.1.3 Değişken katsayılı bazı temel örnekler

Bu bölümde, değişken katsayılı diferansiyel denklemlere giriş niteliğinde basit bir örnek ele alınacaktır (Pişkin, 2018).

Örnek. $u = u(x, t)$ olmak üzere

$$\begin{cases} u_t + xu_x = u^3, \\ u(x, 0) = \sin x \end{cases}$$

probleminin çözümü için $|u(x_0, T)| \rightarrow \infty$ olacak şekilde (blow up) en küçük $T > 0$ sayısını ve x_0 noktasını bulunuz.

Çözüm. Lagrange yardımcı sistemi

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{x} = \frac{du}{u^3}$$

dır. Buradan

i.

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{x} \Rightarrow xe^{-t} = c_1,$$

ii.

$$\frac{dt}{1} = \frac{du}{u^3} \Rightarrow t + \frac{1}{2u^2} = c_2$$

olur. $u(x, 0) = \sin x$ koşulu verildiğinden

$$c_2 = \frac{1}{2 \sin^2 c_1}$$

bulunur. Böylece çözüm

$$u = \frac{\sin(xe^{-t})}{\sqrt{1 - 2t \sin^2(xe^{-t})}}$$

olur. Çözümlerin patlaması için paydayı sıfır yapacak T zamanı

$$\sqrt{1 - 2t \sin^2(xe^{-t})} = 0,$$

$$\sin^2(xe^{-t}) = \frac{1}{2T}$$

dır. Burada

$$\sin^2(xe^{-t}) \leq 1 \text{ olduğundan } \frac{1}{2T} \leq 1 \Rightarrow T \geq \frac{1}{2}$$

dolayısıyla en küçük zaman $T = \frac{1}{2}$ olur. Buradan

$$\sin^2\left(xe^{-\frac{1}{2}}\right) = 1,$$

$$x_0 = \frac{2n-1}{2} \pi e^{1/2}$$

olur.

Örnek. $z = z(x, y)$ olmak üzere

$$yz_{xx} + (x+y)z_{xy} + xz_{yy} = 0$$

denklemini kanonik hale indirgeyip çözünüz.

Çözüm.

$$yz_{xx} + (x+y)z_{xy} + xz_{yy} = 0$$

denkleminde

$$\begin{cases} A = y, \\ B = x + y, \\ C = x \end{cases}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\Delta &= B^2 - 4AC \\ &= (x + y)^2 - 4xy \\ &= (x - y)^2 > 0\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla verilen denklem hiperboliktir. Karakteristikleri

i.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \\ &= \frac{x + y + \sqrt{(x - y)^2}}{2y} \\ &= \frac{x}{y},\end{aligned}$$

$$x^2 - y^2 = c_1$$

ve

ii.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \\ &= \frac{x + y - \sqrt{(x - y)^2}}{2y} \\ &= 1,\end{aligned}$$

$$x - y = c_2$$

dır. Buradan

$$\begin{cases} \eta = x^2 - y^2 \\ \xi = x - y \end{cases}$$

ve

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2x & -2y \end{vmatrix} = -2y + 2x \neq 0$$

olduğu görülür. Böylece

$$\begin{aligned}z_x &= z_\xi \xi_x + z_\eta \eta_x \\ &= z_\xi + 2xz_\eta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_{xx} &= z_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2z_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + z_{\eta\eta}\eta_x^2 + z_{\xi}\xi_{xx} + z_{\eta}\eta_{xx} \\
&= z_{\xi\xi} + 4xz_{\xi\eta} + 4x^2z_{\eta\eta} + 2z_{\eta},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_{yy} &= z_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2z_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + z_{\eta\eta}\eta_y^2 + z_{\xi}\xi_{yy} + z_{\eta}\eta_{yy} \\
&= z_{\xi\xi} + 4yz_{\xi\eta} + 4y^2z_{\eta\eta} - 2z_{\eta}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
z_{xy} &= z_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + z_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + z_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + z_{\xi}\xi_{xy} + z_{\eta}\eta_{xy} \\
&= -z_{\xi\xi} + z_{\xi\eta}(-2x - 2y) - 4xyz_{\eta\eta}
\end{aligned}$$

olur. Bu ifadeler verilen denklemde yerine yazılırsa

$$\xi z_{\xi\eta} + z_{\eta} = 0$$

kanonik formu elde edilir.

$$z_{\eta} = u$$

dönüşümü uygulanırsa denklem

$$\xi u_{\xi} + u = 0$$

şekline dönüşür. Bu denklemin çözümü ise

$$\begin{aligned}
\frac{du}{d\xi} + \frac{u}{\xi} &= 0, \\
\frac{du}{u} + \frac{d\xi}{\xi} &= 0,
\end{aligned}$$

$$\ln u + \ln \xi = f(\eta),$$

$$u = \frac{1}{\xi} f(\eta),$$

$$z_{\eta} = \frac{1}{\xi} f(\eta)$$

integral alınırsa

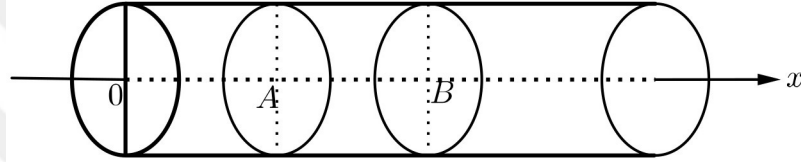
$$\begin{aligned}
z &= \frac{1}{\xi} \int f(\eta) d\eta + c(\xi) \\
&= \frac{1}{\xi} F(\eta) + F_1(\xi) \\
&= \frac{1}{x-y} F(x^2 - y^2) + F_1(x-y)
\end{aligned}$$

olur.

2.1.2 Isı denklemi

Uçları sabit sıcaklıkta tutulan L uzunluğundaki bir tel çubukta ısının yayılması problemi ele alalım. Bu çubuğun başlangıç noktası $x = 0$ ve bitiş noktası $x = L$ olacak şekilde x eksenini boyunca verilsin ve çubuğun herhangi bir t anında x noktasındaki sıcaklığı $z = z(x, t)$ olsun. Ayrıca çubuğun yanal yüzeyi ısı geçirmeyecek şekilde yalıtılmış olsun. Yani sıcaklık x ekseninde hareket etsin.

Bu çubuğun $A(x, 0)$ ve $B(x + \Delta x, 0)$ noktaları arasındaki kesitini alalım. Bu durumda t anında A noktasındaki sıcaklık $z(x, t)$, B noktasındaki sıcaklık $z(x + \Delta x, t)$ olur.



Aşağıdaki fiziksel prensipleri hatırlatalım:

i. Birim zamanda birim alandan geçen ısı akımı

$$q = -k \frac{\partial z}{\partial x}$$

tir. Burada k orantı sabiti materyalin termal geçirgenliğidir. Burada termal geçirgenlik noktadan noktaya göre değişebilir. Yani $k = k(x)$ değişken veya sabit (k) olabilir. $\frac{\partial z}{\partial x}$ ise sıcaklığın gradyentidir.

ii. c materyalin öz ısısı olmak üzere, m kütleli bir nesnenin sıcaklığını Δz kadar arttırmak için gerekli ısı miktarı

$$cm\Delta z$$

dir.

iii. Isı akımı, yüksek sıcaklıktan düşük sıcaklığa doğru ilerler (Pişkin, 2018).

2.1.3 Petrovsky denklemleri

$$u_{tt} + \Delta^2 u = 0$$

denklemine Petrovsky denklemi veya dördüncü mertebeden diferansiyel denklemler denir. İlk olarak Petrovsky tarafından ortaya konan kanonik modele dayanmaktadır

(Petrovsky, 1937; Petrovsky, 1939). Petrovsky denklemleri, sabit üsler içeren kısmi diferansiyel denklemler olarak ta tanımlanır ve tarihsel olarak levha ve kirişlerin incelenmesiyle ilgili Petrovsky modelinden türetilmiştir. Bu denklemler, okyanus akustiği, jeofizik, optik ve akustik gibi çeşitli fiziksel alanlarda uygulama bulur. Petrovsky denklemlerinin bu alanlardaki kullanımı, bu tür denklemlerin çok sayıda disiplinin gerçek dünya problemlerini çözmede pratik önemini ortaya koyar.

2.1.4 m -Biharmonik operatörü içeren denklemler

$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ olmak üzere m -biharmonik (biharmonic, bi-Laplasyen) operatörü

$$\Delta_m^2 u = \Delta (|\Delta u|^{m-2} \Delta u)$$

dır.

m -biharmonik içeren diferansiyel denklemler fiziğin birçok alanında ortaya çıkmaktadır. Örneğin; pseudoplastik Newtonyen olmayan akışkanlar teorisi, faz dönüşümü, araç veya yaya geçişi sırasında köprülerde meydana gelen titreşim dalgaları gibi alanlarda kullanılır.

2.1.5 Singular (tekil) potansiyel tipli denklemler

Singular (tekil) potansiyel tipli denklemler, potansiyel fonksiyonunun belirli noktalarda sonsuz veya tanımsız hale geldiği, yani tekil (singular) olduğu diferansiyel denklemlerdir. Bu tür denklemler özellikle kuantum mekaniği, matematiksel fizik ve potansiyel teorisi gibi alanlarda sıkça karşımıza çıkar.

Genellikle

$$-\Delta u + V(x)u = f(x)$$

şeklinde gösterilir. Burada:

Δ : Laplace operatörü,

u : bilinmeyen fonksiyon,

$V(x)$: potansiyel fonksiyon, tekil olabilir,

$f(x)$: dış kaynak ya da kuvvet terimidir.

Potansiyel fonksiyon $V(x)$, bazı noktalarda sonsuz olabilir. Örneğin:

$$V(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}; 0 \text{ noktasında tekillik vardır.}$$

Bu tür potansiyel, $x = 0$ noktasında sonsuz olur ve orada çözüm davranışı özel dikkat ister.

2.1.6 Yüksek mertebeden denklemler

Bazı matematiksel modellerde, yüksek mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerle karşılaşırız. Örneğin, bu denklemler akışkanlar dinamiği, mekanik, elektromanyetizma, biyoloji ve görüntü işleme gibi alanlarda bulunabilir. Üç boyutlu problemler genellikle yüzeyler üzerinde temsil edilir; örneğin, ince geometriler durumunda, orijinal alanın yapısına bağlı olarak zarlar, plakalar veya kabuklar şeklinde modellenir. Bu durum, genellikle yüksek mertebeden diferansiyel operatörler içeren yüzey kısmi diferansiyel denklemlerin tanınmasına yol açar (Shahrouzi, 2023; Pişkin, 2025).

2.1.7 Gecikmeli terim içeren denklemler

Gecikmeli terim içeren denklemler ilk olarak 18. yüzyılda Bernoulli kardeşler ve Leonard Euler tarafından ele alınmışlardır. Bu denklemlerin sistematik olarak çalışılmaya başlanması ise 1940 da Myshkis ve Bellman tarafından başlanmıştır. Özellikle, 2000 li yıllardan sonra gecikmeli terimli denklemler oldukça aktif bir şekilde çalışılmaktadır (Fridman, 2014).

Gecikmeli terim içeren denklemler, sonradan etkili denklemler, sapma argümanlı denklemler veya diferansiyel fark denklemleri olarak da adlandırılır. Böyle bir denklemin en basit örneği, $x(t) \in R$ için

$$x'(t) = -x(t - \tau)$$

dır. Burada $\tau > 0$ gecikmeli zamanı göstermektedir. Zaman gecikmesi genellikle birçok kontrol sisteminde (iletişim ağları, uçak, veya kimyasal gibi), hem kontrol girişinde hem de ölçüm durumlarında görülür. Böylece, ölçüm, taşıma veya iletişim gecikmeleri olabilir. Kontrol sistemlerinde genellikle, öncelikle karar verme için gereken bilgileri elde etmek, kontrol kararları oluşturmak ve bu kararları uygulamak için gereken süre nedeniyle, gecikmeler görülür. Geri bildirim döngülerine dahil olan aktüatörler, sensörler ve saha ağları genellikle gecikmelere neden olur. Gecikmeler, iletişim ve bilgi teknolojilerinin; ağ bağlantılı kontrol sistemlerinin kararlılığı veya yüksek hızlı iletişim ağları gibi zorlu alanlarında sıkça görülür (Richard, 2003).

Adi ve kısmi diferansiyel denklemler, popülasyon dinamikleri teorisinde önemli roller oynamıştır. Bununla birlikte, diferansiyel denklemler, genellikle kabul edilen gerçek sistemlerin ilk yaklaşımlarıdır. Daha gerçekçi modeller ise, bu sistemlerin geçmişteki bazı durumlarını içermelidir; yani gerçek bir sistem, zaman gecikmeli diferansiyel denklemlerle modellenmelidir.

Peki, gecikmeli terim içermeyen denklemler hakkında pek çok bilgi bulunuyorken, neden gecikmeli diferansiyel denklemlere ihtiyaç duyulur? Cevap; tıp, biyoloji, kimya, fizik, mühendislik, ekonomi vb. hem doğal hem de insan yapımı birçok sürecin zaman gecikmeleri içermesinde saklıdır. Hemen hemen her durumda, zaman gecikmeleri o kadar sık meydana gelir ki, onları görmezden gelmek gerçeği görmezden gelmektir. Doğada basit bir örnek olarak, yeniden ağaçlanma verilebilir. Kesilmiş bir ormanın yeniden dikilmesinden sonra herhangi bir olgunluğa erişmesi en az yirmi yıl alacaktır. Bazı ağaç türleri için bu süre çok daha uzun olacaktır. Bu nedenle, herhangi bir matematiksel orman hasadı ve yenilenmesi modelinin içinde zaman gecikmeleri olabilir. Başka bir örnek olarak, hayvanların daha sonraki faaliyetleri ve tepkileri gerçekleşmeden önce yiyeceklerini sindirmek için zaman ayırması gerektiğidir. Bu nedenle, gecikmeli terim içeren denklemler, herhangi bir tür dinamiği modeli için iyi yaklaşımlardır. Gerçekçi bir model, sistemin geçmiş tarihini içermelidir. Bir model, geçmiş tarihine bir bağımlılık içermediğinde, genellikle adi diferansiyel denklemlerden veya kısmi diferansiyel denklemlerden oluşur. Geçmiş içeren modeller, genellikle gecikmeli diferansiyel denklemleri içerir (Kuang, 1993).

Son yıllarda, kısmi diferansiyel denklemler için çözümlerin davranışlarının zaman gecikmesi etkileri ile kontrolü aktif bir araştırma alanı haline gelmiştir. Genellikle gecikme etkileri, birçok uygulamada ve fiziksel, kimyasal, biyoloji, termal ve ekonomi gibi pratik problemlerde ortaya çıkar. Birçok durumda, gecikme bir kararsızlık kaynağıdır. Gelişigüzel küçük bir gecikme bile, ek koşullar veya kontrol şartları kullanılmadığı sürece, normal bir gecikme olmaksızın da düzgün, asimptotik olarak kararlı olan bir sistemin dengesini bozabilir. Ancak bazı denklemler için gecikmenin varlığı dengeleyici bir etkiye sahip olabilir. Bu nedenle, zaman gecikmeli denklemlerin, kararlılık analizi ve sağlam kontrolü teorik ve pratik öneme sahiptir (Datko vd., 1986).

Gecikmeli terim içeren, denklem olarak modellenen bazı olaylar:

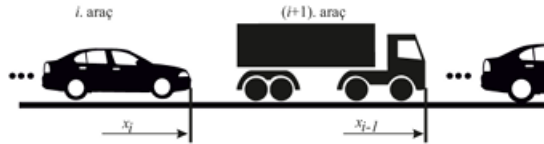
1. Araç trafiği akışları,

2. Su (şofben) sistemi,
3. Salgın hastalıklar,
4. Nöral ağlar,
5. Nüfus dinamikleri,
6. Lazer modeli,
7. Sondaj (delme) sistemi modeli,
8. Tünel diyotlu uzun hat,
9. İletişim ağlarında tıkanıklık kontrolü,
10. Örneklenmiş veri kontrolü ve ağa bağlı kontrol sistemi.

Verilen bazı olayların modellemelerini açıklayalım:

1. Trafik akışları:

Trafik akış modellerinde, sürücülerin; algılama, kavrama, tepki ve seçim unsurlarından oluşan gecikme reaksiyonlarının tümü dikkate alınmalıdır. Bu gecikmeler, insan davranışının öneminde, trafik akış stabilitesinin analiz edilmesinde ve uyarlanabilir hız kontrol cihazları kullanılarak, çarpışmasız trafik akışının tasarlanmasında büyük öneme sahiptir. Araç trafiği akışını modellemek için çok sayıda yaklaşım kullanılmaktadır (Abdallah vd., 2011). Örneğin, şekilde gösterildiği gibi araçların tek bir şeritte birbirini takip ettiğini varsayalım.



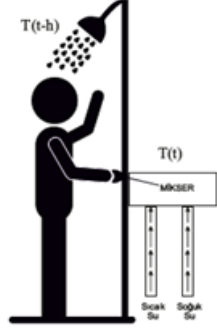
Ortaya çıkan modeller, sürücülerin tepkilerinin gecikmelerinden etkilenirler. Şimdi, gecikmeli zaman içeren basit bir model verelim:

$$x_i''(t) = k [x_{i+1}'(t - \tau) - x_i'(t - \tau)] \quad (2.1)$$

burada, $i = 1, \dots, n$ dir ve n , araçların sayılarını göstermektedir. (2.1) modelinde, x_i'' ve x_i' , sırasıyla, sabit bir v hızına sahip i aracının, ivme ve hız değişimleridir. Bu modelde, k pozitif bir sabit ve τ sürücünün tepki gecikmesidir. Bu modelin kararlılık analizi, ayrıca, trafiğin akış özelliklerini, trafik sıkışıklıklarının nasıl oluştuğunu ve sürücülerin

etkilerini analiz etmek için kullanılabilir. Bu analiz, trafiğin, çevreyi ve ekonomiyi nasıl etkilediği ile ilgilidir.

2. *Su (şofben) sistemi*: Gecikmeli zaman sisteminin basit bir örneği aşağıdaki gibidir. Bir kişi, soğuk ve sıcak su karışımını içeren mikserin kolunu çevirerek istediği T_d su sıcaklığı değerine ulaşmak istesin (Kolmanovskii ve Myshkis, 2012). $T(t)$ mikser çıkışındaki su sıcaklığını gösterebilir.



ve suyun mikser çıkışından sonra ihtiyaç duyduğu gerekli süre τ olsun. Sıcaklık değişiminin tutamacın dönüş açısıyla orantılı olduğunu varsayalım, tutamacın dönüş hızı ise $T(t) - T_d$ ile orantılıdır. t anında kişi, mikserden çıkan suyun sıcaklığını $t - \tau$ zamanında hisseder, bu da sabit τ gecikmeli aşağıdaki denklemle sonuçlanır, $k \in \mathbb{R}$ için,

$$T'(t) = -k [T(t - \tau) - T_d]$$

dır (Fridman, 2014).

2.2 Literatür Taraması

2.2.1 Değişken katsayılı sönüm terim içeren denklemler

Tezimizin dördüncü bölümünde ele aldığımız

$$z_{tt} - \Delta z - \Delta z_t + \mu_1(t) |z_t|^{p-2} z_t = \mu_2(t) |z|^{q-2} z \quad (2.2)$$

değişken katsayılı dalga denkleminin çözümlerinin patlamasının (Pişkin ve Fidan, 2022) literatür taramasına bakalım.

(2.2) probleminde güçlü sönüm teriminin (Δz_t) yokluğunda ve $\mu_1(t) = \mu_2(t) \equiv 1$ olduğunda

$$z_{tt} - \Delta z + |z_t|^{p-2} z_t = |z|^{q-2} z$$

şekline dönüşür. Birçok yazar bu problemin çözümlerin varlığını, patlamasını ve enerji azalmasını çalışmışlardır. [Georgiev Todorova (1994), Levine (1974a), Levine (1974b), Messaoudi (2001), Runzhang (2009), Vitillaro (1999)]. Doğrusal olmayan damping $(|z_t|^{p-2} z_t)$ ve kaynak terimi $(|z|^{q-2} z)$ arasındaki etkileşim problemi daha karmaşık hale getirmektedir. Levine (1974a, 1974b) ilk olarak doğrusal sönümleme $(p = 2)$ ve kaynak terimi arasındaki etkileşimi Konkavlık metodunu kullanarak incelemiştir. Ancak bu yöntem doğrusal olmayan bir sönümleme terimi durumunda uygulanamaz. Georgiev ve Todorova (1974) Levinenin sonucunu doğrusal olmayan duruma $(p > 2)$ genişletmiştir. Negatif başlangıç enerjisine sahip çözümlerin sonlu zamanda patladığını gösterdiler. Daha sonra Vitillaro (1999) bu sonuçları doğrusal olmayan sönümleme ve çözümün pozitif başlangıç enerjisine sahip olduğu durumlara genişletti.

Freitas ve Zuazua (1996)

$$z_{tt} - z_{xx} + 2a(x) z_t = 0$$

değişken katsayılı, sönüm terimli dalga denkleminin çözümlerinin kararlılığını kanıtladı.

Yu (2009)

$$z_{tt} - \Delta z - \Delta z_t + |z_t|^{p-2} z_t = |z|^{q-2} z$$

denkleminin global varlığını, çözümlerin patlamasını ve üstel kararlılığı göstermiştir. Gerbi ve Said-Houari (2012), $p = 2$ için denklemin çözümlerinin üstel azalmasını kanıtlamışlardır.

Zheng vd. (2020)

$$z_{tt} + \Delta^2 z + k_1(t) |z_t|^{m-2} z_t = k_2(t) |z|^{p-2} z$$

Petrovsky terim içeren doğrusal olmayan denklemin sonlu zamanda çözümlerin patlamasını çalıştılar.

Huang ve Chen (2014)

$$z_{tt} - \Delta z + T(x) z + z + |z_t|^{m-2} z_t = |z|^{p-2} z$$

sönüm terimli doğrusal olmayan Klein-Gordon denklemi için potansiyel kuyu yöntemini kullanarak global varlığını ve sonlu zamanda patlamasını çalıştılar.

Tahamtani (2009) da

$$\alpha(x) z_{tt} + \rho \Delta z_t - \operatorname{div}(|\nabla z|^{m-2} \nabla z) = f(z)$$

Lewis fonksiyonu içeren doğrusal olmayan hiperbolik denkleminin çözümlerinin patlamasını çalıştılar.

Al-Gharabli ve Al-Mahdi (2022)

$$z_{tt} + \Delta^2 z + \alpha(t) g(z_t) = z |z|^\beta$$

doğrusal olmayan değişken katsayılı denklemi Faedo-Galerkin yöntemini kullanarak lokal varlığı kanıtlamışlardır.

Guo ve Li (2019)

$$z_{tt} + \Delta^2 z - \Delta z - \Delta z_t + \alpha(t) z_t = |z|^{p-2} z$$

güçlü sönüm terimli Petrovsky denkleminin çözümlerinin sonlu zamanda patlamasını çalıştılar.

Wu (2018)

$$z_{tt} + \Delta^2 z - \Delta z - \omega \Delta z_t + \alpha(t) z_t = |z|^{p-2} z$$

değişken katsayılı Petrovsky denklemi için çözümlerin sonlu zamanda patlaması için alt ve üst sınırı belirlediler.

Philippin (2015)

$$z_t + \Delta^2 z = k(t) u |u|^{p-1}$$

değişken katsayılı dördüncü mertebeden parabolik denklemi için çözümlerin sonlu zamanda patlaması için alt sınırını çalıştı.

2.2.2 m -Biharmonik ve m -Laplasyen tipli denklemler

Tezin beşinci bölümünde doğrusal olmayan sönüm ve kaynak terime sahip

$$z_{tt} + \Delta(k(x) |\Delta z|^{m-2} \Delta z) + \Delta^2 z_t + |z_t|^{p-1} z_t = |z|^{q-1} z$$

ağırlıklı m -biharmonik denklemin çözümlerinin varlığı, azalması ve patlamasının (Fidan vd., 2024) literatür taramasına bakalım.

Messaoudi (2005)

$$z_{tt} - \operatorname{div} (|\nabla z|^{m-2} \nabla z) - \Delta z_t + |z_t|^{q-1} z_t = |z|^{p-1} z$$

denkleminin çözümlerinin enerji azalmasını çalışmıştır. Wu ve Xue (2013) ve Pişkin (2015b) bu denklemin farklı özelliklerini çalışmışlardır.

Mokeddem (2016)

$$z_{tt} - \operatorname{div} (|\nabla z|^{m-2} \nabla z) + \sigma(t) (z_t - \Delta z_t) + \omega |z|^{p-2} z = |z|^{r-2} z$$

denkleminin global varlığını ve enerji azalmasını çalışmıştır.

Bounaama vd. (2023a)

$$z_{tt} - \operatorname{div} (\varphi(x) |\nabla z|^{m-2} \Delta z) - \Delta z_t + |z_t|^{p-1} u_t = \xi |z|^{q-1} z$$

denkleminin enerji azalmasını ve çözümlerin varlığını incelemiştir.

Bounaama vd. (2023b)

$$z_{tt} - |\nabla z| \operatorname{div} \left(\alpha(x) \frac{\nabla z}{|\nabla z|} \right) - \Delta z_t + |z_t|^{q-1} z_t = |z|^{p-1} z$$

denkleminin global varlığını gösterdi.

Pişkin ve Fidan (2023)

$$z_{tt} - \operatorname{div} (|\nabla z|^{m-2} \nabla z) + \Delta^2 z + \mu_1(t) |z_t|^{p-2} z_t = \mu_2(t) |z|^{q-2} z$$

negatif başlangıç enerjisi ile sonlu zamanda çözümlerin patlamasını çalıştılar.

2.2.3 Singular (tekil) potansiyel tipli denklemler

Tezin altıncı bölümünde

$$\frac{z_t}{|x|^{2m}} + \mathcal{A}z = \alpha(t) |z|^{r-1} z$$

tekil potansiyele sahip $m > 1$ tam sayısı için $\mathcal{A} = (-\Delta)^m$ için yüksek mertebeden bir reaksiyon difüzyon denkleminin çözümlerinin global varlığı ve patlamasının (Fidan ve Pişkin, incelemede) literatür taramasına bakalım.

Han (2021)

$$\frac{z_t}{|x|^2} - \Delta z = k(t) |z|^{p-1} z$$

değişken katsayılı parabolik denklem için çözümlerin sonlu zamanda patlamasını çalıştı.

Thanh vd. (2021)

$$\frac{z_t}{|x|^4} + \Delta^2 z = k(t) |z|^{p-1} z$$

değişken katsayılı reaksiyon- difüzyon parabolik probleminin çözümlerin sonlu zamanda patlama zamanı için alt sınır ve üst sınırını çalıştılar.

Do vd. (2023)

$$\frac{z_t}{|x|^4} + \Delta^2 z = k(t) |z|^{p-1} z$$

denkleminin global varlığını, enerji azalmasını ve çözümlerin sonlu zamanda patlamasını çalıştılar.

Thanh vd. (2023)

$$\frac{z_t}{|x|^2} + \Delta (|\Delta|^{m-2} \Delta z) = k(t) |z|^{p-1} z$$

$k(t)$ Newtonyen olmayan filtrasyon denklemi için çözümlerin sonlu zamanda patlama zamanı için alt ve üst sınırını çalıştılar.

2.2.4 Gecikme terim içeren denklemler

Tezin yedinci bölümünde

$$z_{tt} + \Delta^2 z + \beta_1(t) z_t(x, t) + \beta_2(t) z_t(x, t - \tau) = 0$$

değişken katsayılı gecikme terimli Petrovsky denklemi için çözümlerin azalmasının (Fidan ve Pişkin, 2025) literatür taramasına bakalım.

Benaissa vd. (2014)

$$z_{tt} - \Delta z + \mu_1(t) z_t(x, t) + \mu_2(t) z_t(x, t - \tau) = 0$$

gecikme terimli denklem için çözümlerin varlığı ve enerji azalması çalışıldı.

Meyvacı (2021)

$$z_{tt} + \Delta^2 z + z + \sigma_1(t) |z_t(x, t)|^{2m-2} z_t(x, t) + \sigma_2(t) |z_t(x, t - \tau)|^{2m-2} z_t(x, t - \tau) = 0$$

dördüncü mertebeden dalga denkleminin enerji azalmasını çalıştı.



3. ÖN BİLGİLER

3.1 Temel Kavramlar

Bu bölümde, diferansiyel denklemler ve fonksiyonel analiz ile ilgili bazı temel kavramlar verilecektir. Daha sonra, Lebesgue uzayı, Sobolev uzayı ve bunlarla ilişkili önemli eşitlik, eşitsizlikler ve teoremlere yer verilecektir. Daha sonra çözümlerin varlığı, çözümlerin azalması ve çözümlerin patlaması ile ilgili bazı lemmalara yer verilecektir (Adams ve Fournier, 2003; Brezis, 2011; Evans, 1998; Kesavan, 1989; Pişkin, 2018; Pişkin, 2025a; Pişkin ve Okutmuş, 2021).

Tanım 3.1.1 (Normlu uzaylar) X bir reel (veya kompleks) vektör uzayı olsun. $\vec{x} \in X$ vektörünü $\|\vec{x}\|$ reel sayısına dönüştüren ve aşağıdaki şartları sağlayan reel değerli

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonuna X üzerinde bir norm denir. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in X$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için

- i. $\|\vec{x}\| \geq 0$,
- ii. $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0$,
- iii. $\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\|$,
- iv. $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ dır.

Bu durumda X vektör uzayına norm ile birlikte normlu vektör uzayı veya normlu uzay denir. $\|\vec{x}\|$ gösterimine de $\vec{x}$ in normu denir. Yani Normlu uzay, üzerinde norm adı verilen bir uzunluk ölçüsü tanımlanan vektör uzayıdır.

Tanım 3.1.2 X vektör uzayında $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ normları verilsin. $\forall x \in X$ için

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$$

olacak şekilde $c_1, c_2 > 0$ sayıları varsa $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ normlarına denk normlar denir. Dolayısıyla sonlu boyutlu normlu uzaylarda tanımlanan tüm normlar o uzay üzerinde aynı topolojiyi tanımlar; örneğin X normlu uzayındaki bir (x_n) dizisi $\|\cdot\|_1$ ($\|\cdot\|_2$) normuna göre yakınsak, sınırlı veya Cauchy dizisi ise, $\|\cdot\|_2$ ($\|\cdot\|_1$) normuna göre de yakınsak, sınırlı veya Cauchy dizisidir.

Tanım 3.1.3 $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite sahip ise $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayına tam normlu uzay veya Banach uzayı denir.

Tanım 3.1.4 X bir normlu uzay olsun. X üzerindeki tüm sınırlı lineer fonksiyonların kümesi X uzayının dual uzayını oluşturur. X' veya X^* ile gösterilen bu uzay

$$\|f\|_{X'} = \sup_{u \in X, u \neq 0} \frac{|f(u)|}{\|u\|_X} < \infty$$

normuyla bir Banach uzayıdır. X' uzayının duali $(X')' = X''$ şeklindeki lineer vektör uzayıdır ve ikinci dual olarak adlandırılır.

$X = X''$ ise X uzayına refleksif (yansılmalı) uzay denir.

Teorem 3.1.5 Normlu bir X uzayının, X' dual uzayı bir Banach uzayıdır.

Yukarıdaki teorem oldukça önemlidir. Çünkü X normlu uzayının Banach uzayı olup olmaması önemli değildir, her halükarda X' uzayı Banach uzayı olur.

Örnek. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (p ve q eşlenik sayılar da denir) olmak üzere $L^p(\Omega)$ uzayının duali $L^q(\Omega)$ dır.

Şimdi normlu uzaylarda bazı yakınsaklık çeşitlerini tanımlayalım:

Tanım 3.1.6 X normlu uzayında bir dizi (x_n) olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\|_X = 0$$

olacak şekilde bir $x_0 \in X$ varsa (x_n) dizisine yakınsak veya güçlü yakınsak dizi denir ve bu yakınsama

$$x_n \rightarrow x_0$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.7 (x_n) , X normlu uzayında bir dizi olsun. Her $u \in X'$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u(x_n) = u(x_0)$$

olacak şekilde bir $x_0 \in X$ varsa (x_n) dizisine zayıf (weakly) yakınsak dizi denir ve bu yakınsama

$$x_n \rightarrow x_0 \text{ veya } x_n \xrightarrow{z} x_0$$

ile gösterilir.

Tanım 3.1.8 $\forall x \in X$ için

$$u_n(x) \rightarrow u(x)$$

olacak şekilde bir $u \in X'$ varsa (u_n) dizisine zayıf* yakınsaktır (zayıf yıldızl yakınsak) denir.

$$u_n \xrightarrow{z^*} u$$

şeklinde yazılır.

Bu tanımlar sırasıyla kısaca

$$x_n \rightarrow x_0 \Leftrightarrow (x_n) \rightarrow x_0,$$

$$x_n \xrightarrow{z} x_0 \Leftrightarrow \forall u \in X' \text{ için } u(x_n) = u(x_0),$$

$$u_n \xrightarrow{z^*} u \Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } u_n(x) \rightarrow u(x)$$

şeklinde ifade edilir.

Not. Sonlu boyutlu uzaylarda; güçlü, zayıf ve zayıf* yakınsaklıklar eşdeğerdir.

Tanım 3.1.9 X normlu uzayındaki bir dizi (x_n) olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall m, n > n_\varepsilon$ olduğunda

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

olacak şekilde ε na bağlı en az bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir.

Tanım 3.1.10 (İç çarpım uzayları) X bir reel vektör uzayı olsun.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu

i. $\langle u, u \rangle \geq 0$ ve $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

ii. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

iii. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

iv. $\langle cu, v \rangle = \langle u, cv \rangle = c \langle u, v \rangle$

özelliklerini sağlıyorsa bu fonksiyona iç çarpım denir. Yani iç çarpım uzayları, vektörler arasındaki açı ve uzunluk kavramları iç çarpım yardımı ile tanımlanır.

Örnek $\langle \cdot, \cdot \rangle : R^n \times R^n \rightarrow R$,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

fonksiyonu iç çarpım özelliklerini sağlar. Bu iç çarpıma R^n üzerindeki standart iç çarpım denir.

Tanım 3.1.11 (Hilbert uzayı) Bir $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ iç çarpım uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite sahip ise $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir.

Teorem 3.1.12 Her sonlu boyutlu iç çarpım uzayı Hilbert uzayıdır.

3.2 Lebesgue Uzayı ($L^p(\Omega)$)

Tanım 3.2.1 Ω , R^n de ölçülebilir bir bölge, u ölçülebilir bir fonksiyon ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $|z(x)|^p$ Lebesgue anlamında integrallenebilir ise, yani

$$\int_{\Omega} |z(x)|^p dx < \infty$$

ise $z(x)$ fonksiyonları p . kuvvetten integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı olarak adlandırılır ve bu sınıf $L^p(\Omega)$ veya L^p ile gösterilir. Bu şartı sağlayan tüm z fonksiyonlarının uzayına L^p Lebesgue uzayı denir. Burada L^p uzayının elemanları $\int_{\Omega} |z(x)|^p dx < \infty$ şartını sağlayan ölçülebilir fonksiyonların denklik sınıfıdır.

Bu uzaydaki norm

$$\|z\|_{L^p(\Omega)} = \|z\|_p = \left(\int_{\Omega} |z(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanır. $L^p(\Omega)$ uzayı bu norm ile bir Banach uzayıdır.

Örnek. $\Omega = (0, 1)$ ve $z(x) = x^3$ ise $\|z\|_{L^2(\Omega)} = ?$

Çözüm

$$\begin{aligned}\|z\|_{L^2(\Omega)} &= \left(\int_{\Omega} |z(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_0^1 |x^3|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{7}}{7}\end{aligned}$$

olur.

Not. $L^p(\Omega)$ uzayında

i. $p = 1$ alınırsa $L^1(\Omega) = L(\Omega)$ integrallenebilir fonksiyonlar uzayı denir.

Bu uzaydaki norm

$$\|u\|_{L^1(\Omega)} = \|u\|_1 = \int_{\Omega} |u(x)| dx$$

dır.

ii. $p = 2$ alınırsa $L^2(\Omega)$ karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı denir.

Bu uzayda norm

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \|u\|_2 = \|u\| = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

dır.

3.2.1 $L^p(\Omega)$ uzayında gömülme

Teorem 3.2.1.1 $vol(\Omega) = \int_{\Omega} dx < \infty$ (Ω bölgesi sınırlı) ve $1 \leq p \leq q \leq \infty$ olsun.

Eğer $u \in L^q(\Omega)$ ise $u \in L^p(\Omega)$ ve

$$\|u\|_p \leq c \|u\|_q$$

olur. Burada $c = (vol(\Omega))^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$ dır. Yani

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

sürekli gömülmesi geçerlidir.

Not. Ω bölgesinin ölçümü sonlu ve $1 \leq p \leq q \leq \infty$ ise

$$L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$$

Örnek. $\Omega = (1, 3)$ olsun. Eğer $u \in L^2(\Omega)$ ise bu durumda $u \in L^1(\Omega)$ ve

$$\|u\|_1 \leq \sqrt{2} \|u\|_2$$

olduğunu, yani

$$L^2(1, 3) \hookrightarrow L^1(1, 3)$$

gömülmesini gösterelim.

Çözüm. Hölder eşitsizliğinden

$$\left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right) \leq \left(\int_{\Omega} |u|^q dx \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_{\Omega} |1| dx \right)^{1-\frac{p}{q}}$$

olur. $p = 1$, $q = 2$ ve $\Omega = (1, 3)$ olduğundan

$$\begin{aligned} \int_1^3 |u| dx &= \int_1^3 (|u| \cdot 1) dx \\ &\leq \left(\int_1^3 |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_1^3 |1| dx \right)^{1-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\int_1^3 |u| dx \leq 2^{\frac{1}{2}} \left(\int_1^3 |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|u\|_1 \leq \sqrt{2} \|u\|_2$$

bulunur. Böylece

$$L^2(1, 3) \hookrightarrow L^1(1, 3)$$

dır.

3.2.2 Sürekli fonksiyonlar uzayı

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ negatif olmayan α_i lerin n bileşenli ise α ya çoklu indis denir.

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

olsun. Eğer $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ ise bu durumda

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

ve

$$\begin{aligned} D^\alpha u &= \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \\ &= \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \\ &= D^{\alpha_1} u D^{\alpha_2} u \dots D^{\alpha_n} u \end{aligned}$$

olarak yazılır.

Örnek. $\alpha = (1, 2)$ ise $|\alpha| = 1 + 2 = 3$ ve

$$\begin{aligned} D^{(1,2)} u &= \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2} \\ &= D u_1 D^2 u_2 \\ &= u_{x_1 x_2 x_2} \end{aligned}$$

olur.

Örnek. $\alpha = (2, 1, 3)$ ise $|\alpha| = 2 + 1 + 3 = 6$ ve

$$\begin{aligned} D^{(2,1,3)} u &= \frac{\partial^6 u}{\partial x_1^2 \partial x_2 \partial x_3^3} \\ &= D^2 u_1 D u_2 D^3 u_3 \\ &= u_{x_1 x_1 x_2 x_3 x_3 x_3} \end{aligned}$$

olur.

3.2.3 Zayıf türev

$u \in L_{loc}^1(\Omega)$ ve α çoklu indisi verilsin. $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \varphi v dx$$

ise $v \in L_{loc}^1(\Omega)$ fonksiyonuna u nun α . zayıf (genelleştirilmiş) türevi denir ve $v = D^\alpha u$ şeklinde yazılır.

3.3 Sobolev Uzayı ($W^{m,p}(\Omega)$)

Sergey Lvoviç Sobolev (1908-1989), fonksiyonel analiz ve kısmi türevli diferansiyel denklemler alanında önemli katkılarda bulunmuş Sovyet matematikçisidir. En büyük katkılardan biri, günümüzde geniş bir kullanım alanına sahip olan Sobolev uzaylarıdır; bu uzaylar, türevlenebilirlik ve fonksiyonların düzgünlük koşullarını genişleterek matematiksel analizde devrim yaratmıştır. Ayrıca, zayıf türev ve dağılımlar kavramlarının temelini atarak diferansiyel denklemlerin çözüm teorisini büyük ölçüde geliştirmiştir. Sobolev, Steklov Matematik Enstitüsü ve Novosibirsk Devlet Üniversitesi gibi prestijli kurumlarda çalışmış, SSCB Devlet Ödülü ve Lomonosov Altın Madalyası gibi birçok ödüle layık görülmüştür. Onun çalışmaları, modern matematiğin yanı sıra mühendislik, fizik ve görüntü işleme gibi disiplinlerde de geniş bir uygulama alanı bulmuştur.

Sobolev uzayları, Sobolev tarafından 1930 lu yıllarda tanımlanmıştır. $W^{m,p}(\Omega)$ ile gösterilen Sobolev uzayları kendisi ve m . mertebeye kadar bütün genelleştirilmiş türevleri $L^p(\Omega)$ uzayında olan fonksiyonlar uzayıdır (Pişkin, 2025a).

Tanım 3.3.1 $\Omega, \mathbb{R}^N$ de bir bölge, m negatif olmayan herhangi bir tam sayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere

$$W^{m,p}(\Omega) = \{z \in L^p(\Omega) : D^\alpha z \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya Sobolev uzayı denir. Yani kendisi ve m . mertebeye kadar bütün genelleştirilmiş türevleri $L^p(\Omega)$ uzayında olan fonksiyonlar sınıfına Sobolev uzayı denir.

Sobolev uzayında normlar: $1 \leq p < \infty$ için

$$\|z\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|z\|_{m,p} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha z\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ve $p = \infty$ durumunda ise norm,

$$\|z\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \|z\|_{m,\infty} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha z\|_{L^\infty(\Omega)}$$

şeklinde tanımlanır. Bu normlarla birlikte $W^{m,p}(\Omega)$ uzayı bir Banach uzayıdır.

Örnek. $u = u(x)$ olsun. $u \in W^{1,2}(\Omega)$ olması için z nin ve birinci mertebeden türevinin $L^2(\Omega)$ nın elemanı olması gerekir. Yani

$$u \in L^2(\Omega) \text{ ve } u' \in L^2(\Omega)$$

olmalıdır. Burada norm ise

$$\|z\|_{W^{1,2}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u'\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

dır.

Örnek. $\Omega = (0, 2)$ olsun.

$$z(x) = x^2$$

fonksiyonu için z fonksiyonu $W^{1,2}(0, 2)$ uzayının elemanı olup olmadığını gösterelim ve $\|z\|_{L^2(0,2)}$ ve $\|z\|_{W^{1,2}(0,2)}$ normlarını hesaplayalım.

Çözüm. $z = z(x)$ olsun $z \in W^{1,2}(0, 2)$ olması için $z \in L^2(0, 2)$ ve $z' \in L^2(0, 2)$ olduğunu göstereceğiz.

Şimdi $z \in L^2(0, 2)$ olduğunu gösterelim:

$$\int_0^2 |z(x)|^2 dx = \int_0^2 |x^2|^2 dx = \frac{32}{5} < \infty$$

olduğundan $z \in L^2(\Omega)$ dır.

Şimdi de $z' \in L^2(\Omega)$ olduğunu gösterelim:

$$\int_0^2 |z'(x)|^2 dx = \int_0^2 |2x|^2 dx = \frac{32}{3} < \infty$$

olduğundan $z' \in L^2(\Omega)$ dır. Böylece $z \in W^{1,2}(0, 2)$ dır.

Şimdi de $\|z\|_{L^2(0,2)}$ ve $\|z\|_{W^{1,2}(0,2)}$ normlarını hesaplayalım:

$$\begin{aligned} \|z\|_{L^2(\Omega)} &= \left(\int_0^2 |z|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_0^2 |x^2|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{4\sqrt{10}}{5} \end{aligned}$$

dır ve

$$\begin{aligned} \|z\|_{W^{1,2}(\Omega)} &= \left(\int_0^2 |x^2|^2 + \int_0^2 |2x|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{16\sqrt{15}}{15} \end{aligned}$$

olur.

Not. $W^{m,p}(\Omega)$ uzayında

$m=0$ ise $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ ile

$p=2$ ise $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ ile gösterilir.

Not. $W_0^{m,p}(\Omega)$ uzayı, $W^{m,p}(\Omega)$ uzayında bulunan ve $(m-1)$. mertebeye kadar bütün türevleri Ω nın $\partial\Omega$ sınırında sıfır olan fonksiyonların kümesidir.

Yani;

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \{u \in W^{m,p}(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = u'|_{\partial\Omega} = \dots = u^{(m-1)}|_{\partial\Omega} = 0\}$$

dır.

Buradan da görüldüğü gibi $W_0^{m,p}(\Omega)$ uzayı, $W^{m,p}(\Omega)$ uzayının alt uzayıdır.

Yani

$$W_0^{m,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)$$

dır.

3.3.1 Ağırlıklı Sobolev ($W_{\omega}^{m,p}(\Omega)$) uzayları

Tanım 3.3.1.1 Hemen hemen her $x \in R^n$ için $\omega(x) > 0$ olacak şekilde lokal integrelenebilir $\omega(x)$ fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu denir.

Tanım 3.3.1.2 $\Omega \subset R^n$ açık bir bölge $0 < p < \infty$ ve ω ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$\int_{\Omega} \omega(x) |z(x)|^p dx < \infty$$

şartını sağlayan ölçülebilir $z(x)$ fonksiyonlarının oluşturduğu sınıfa ağırlıklı Lebesgue uzayı denir ve $L_{\omega}^p(\Omega)$ ile gösterilir.

Bu uzayda norm

$$\|z\|_{p,\omega} = \left(\int_{\Omega} \omega(x) |z(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

dır.

Tanım 3.3.1.3 Ω , $\mathbb{R}^n$ de bir bölge, m negatif olmayan herhangi bir tam sayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere

$$W_{\omega}^{m,p}(\Omega) = \{z \in L_{\omega}^p(\Omega) : D^{\alpha}z \in L_{\omega}^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya ağırlıklı Sobolev uzayı denir.

Sobolev uzayındaki norm ($1 \leq p < \infty$)

$$\|z\|_{W_{\omega}^{m,p}(\Omega)} = \|z\|_{m,p,\omega} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^{\alpha}z\|_{L_{\omega}^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

olarak tanımlanır.

3.3.2 Sobolev gömme teoremleri

Tanım 3.3.2.1 X ve Y Banach uzayları olsun. Eğer

- i. X in bütün elemanları Y de ise ($X \subset Y$),
- ii. u dan bağımsız bir c sabiti varsa ve her $u \in X$ için

$$\|u\|_Y \leq c \|u\|_X$$

oluyorsa X uzayı Y uzayına sürekli gömülür denir ve $X \hookrightarrow Y$ şeklinde gösterilir.

Ayrıca, herhangi bir m pozitif tam sayısı için

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

gömülmeleri geçerlidir.

Lemma 3.3.2.2 (Sobolev Gagliardo-Nirenberg eşitsizliği) $n \geq 2$, $1 \leq p < n$ ve

$q = \frac{np}{n-p} \left(\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \right)$ olsun. Bu durumda

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$$

dır ve $\forall z \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|z\|_q \leq c \|\nabla z\|_p$$

olacak şekilde $c = c(n, p) > 0$ sabiti vardır.

3.3.3 Gömölme teoremleri

Şimdi çok kullanılan Sobolev-Poincaré eşitsizliğini ifade edelim:

Lemma 3.3.3.1 (Sobolev-Poincaré eşitsizliği)

$$\begin{cases} 2 \leq q < \infty, & n \leq 1, 2, \\ 2 \leq q \leq \frac{2n}{n-2}, & n \geq 3 \end{cases}$$

olsun. Bu durumda $u \in H_0^1(\Omega)$ için

$$\|u\|_q \leq C \|\nabla u\|_2$$

dır. Burada $c = c(\Omega, q)$ dır.

Benzer şekilde yüksek mertebeden Sobolev- Poincaré eşitsizliğini ifade edelim:

Lemma 3.3.3.2 (Sobolev-Poincaré yüksek mertebe için)

$$\begin{cases} 2 \leq r < \infty, & n \leq 2m, \\ 2 \leq r \leq \frac{2n}{n-2m}, & n > 2m \end{cases}$$

olsun. Bu durumda $\forall u \in H_0^m(\Omega)$ için

$$\|u\|_r \leq C \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} u \right\|$$

dır. Burada $\mathcal{A} = (-\Delta)^m$, $m \in \mathbb{N}^+$ ve $c = c(\Omega, p)$ dır.

Şimdi bazı özel durum için eşitsizlik elde edelim.

Lemma 3.3.3.3 (Poincaré eşitsizliği) $u \in W_0^{1,2}(a, b)$ için

$$\|u\|_2 \leq c \|u'\|_2$$

dır. Burada $c = \frac{b-a}{\sqrt{2}}$ dır.

3.4 Bazı Önemli Eşitlik, Eşitsizlik ve Teoremler

Lemma 3.4.1 $a, b \geq 0$ ve $1 \leq p < \infty$ olsun

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1} (a^p + b^p)$$

dır.

Lemma 3.4.2 (Cauchy eşitsizliği) Eğer $\varepsilon > 0$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ ise, o zaman

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} |a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |b|^2$$

eşitsizliği geçerlidir.

Lemma 3.4.3 (Young eşitsizliği) $a, b \geq 0$ ve $p > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}$$

dır.

Not. $\delta > 0$ bir reel sayı olmak üzere, Young eşitsizliğinde $a = \delta X$ ve $b = \frac{Y}{\delta}$ alınırsa

$$XY \leq \frac{\delta^p X^p}{p} + \frac{\delta^{-q} Y^q}{q}$$

eşitsizliği elde edilir.

Not. (ε lu Young Eşitsizliği) Young eşitsizliğinde $a = (\varepsilon p)^{\frac{1}{p}} X$ ve $b = \frac{Y}{(\varepsilon p)^{\frac{1}{q}}}$ alınırsa

$$XY \leq \varepsilon X^p + C(\varepsilon) Y^q$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-\frac{q}{p}} q^{-1}$ dir.

Lemma 3.4.4 (Hölder eşitsizliği) $1 \leq p \leq \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Eğer $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$ ise bu durumda $uv \in L^1(\Omega)$ ve

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_q$$

dır.

Lemma 3.4.5 (Green özdeşliği) $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ olsun. Bu durumda,

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_{\Omega} \nabla v \nabla u dx$$

sağlanır. Burada n dışa doğru yönlendirilmiş birim vektör ve $\frac{\partial u}{\partial n} = n \nabla u$ dir.

Lemma 3.4.6 (Gronwall eşitsizliği (Diferansiyel form)) u_t , $[0, T]$ aralığında negatif olmayan mutlak sürekli bir fonksiyon, $\varphi_1(t)$ ve $\varphi_2(t)$ negatif olmayan $[0, T]$ üzerinde toplanabilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$u'(t) \leq \varphi_1(t) u(t) + \varphi_2(t)$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda $0 \leq t \leq T$ için

$$u(t) \leq e^{\int_0^t \varphi_1(\tau) d\tau} \left(u(0) + \int_0^t \varphi_2(\tau) d\tau \right)$$

dır.

Lemma 3.4.7 (Gronwall eşitsizliği (İntegral form))

i. $v(t)$, hemen hemen her $0 \leq t \leq T$ ve $C_1, C_2 \geq 0$ sabitleri için

$$v(t) \leq C_1 \int_0^t v(\tau) d\tau + C_2$$

integral eşitsizliğini sağlayan, negatif olmayan ve $[0, T]$ üzerinde toplanabilir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$v(t) \leq C_2 (1 + C_1 t e^{C_1 t})$$

olur.

ii. Özel olarak,

$$v(t) \leq C_1 \int_0^t v(\tau) d\tau$$

ise, bu durumda

$$v(t) = 0$$

olur.

Lemma 3.4.8 Eğer v bir pozitif tam sayı ve $\forall \alpha \in [1, \infty)$ için

$$\alpha^q \ln \alpha \leq (ev)^{-1} \alpha^{q+v}$$

dir.

İspat: Her $z \in \mathbb{R}$ için

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla

$$1 + z \leq e^z$$

olur. Bu durumda $z = v \ln \alpha - 1$ dönüşümü eşitsizlikte yerine koyarak

$$\ln \alpha \leq \alpha^v (ev)^{-1}$$

bulunur.

Lemma 3.4.6 ya göre $\alpha \in [1, \infty)$ için

$$\alpha^q \ln \alpha \leq (ev)^{-1} \alpha^{q+v}$$

olduğu görülür ve ispat tamamlanır.

3.5 Zayıf Çözüm

Bazı problemlerde fonksiyonlar yeterince düzgün(sürekli, türevli) olmayabilir bu nedenle klasik çözüm kavramını zayıf çözüm (genelleştirilmiş çözüm) kavramına genişletmeliyiz.

Bu aşamada Sobolev uzayları devreye girmektedir.

Her $r \in W_0^{1,2}(m, n)$ için

$$\int_m^n [p(x) y' r'(x) + q(x) y r(x)] dx = \int_m^n f(x) r(x) dx$$

eşitliği sağlayan $y \in W_0^{1,2}(m, n)$ fonksiyonuna

$$\begin{cases} (-p(x) y')' + q(x) y = f(x), & m < x < n \\ y(m) = y(n) = 0 \end{cases}$$

sınır değer probleminin zayıf (genelleştirilmiş) çözümü denir.

3.5.1 Adi diferansiyel denklemlerde zayıf çözüm

Bir çubukta sıcaklığın zamana bağlı olmayan yani kararlı yayılımını ifade eden

$$(-p(x) y')' + q(x) y = f(x), \quad a < x < b, \quad (3.1)$$

$$y(a) = y(b) = 0 \quad (3.2)$$

sınır değer problemini ele alalım. Burada $p(x)$ ısı geçirgenlik katsayısını, $q(x)$ çubuk ile dış ortamın ısı alışverişini, $f(x)$ ısı kaynağının yoğunluğunu ve $y(x)$ sıcaklık fonksiyonunu göstermektedir.

Tanım 3.5.1.1 $y = y(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli, (a, b) açık aralığında ikinci türevleri sürekli ve (a, b) aralığında (3.1) denklemini, $x = a$ ve $x = b$ noktalarında da (3.2) sınır koşullarını sağlıyorsa, yani

$$y(x) \in C^2(a, b) \cap C[a, b]$$

ise bu $y(x)$ fonksiyonuna (3.1)-(3.2) probleminin *klasik çözümü* denir.

Şimdi bu sınır değer probleminin çözümünün varlık ve tekliğini ifade eden teoremi verelim:

Teorem 3.5.1.2

$$0 < c_0 \leq p(x) \leq c_1, \quad 0 \leq q(x) \leq c_2,$$

$$p(x) \in C^1[a, b] \text{ ve } q(x), f(x) \in C[a, b]$$

ise (3.1), (3.2) probleminin klasik çözümü vardır ve tektir.

Örnek. $p(x) = 1, q(x) = 0, f(x) = e^{-x}$ ve $a = 0, b = 2$ ise

$$\begin{cases} -y'' = e^{-x}, & 0 < x < 2, \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$$

lineer diferansiyel denklemi bulunur.

Bu denklemin çözümü

$$y = -e^{-x} + \left(\frac{1 - e^2}{2e^2} \right) x + 1$$

dir. Ayrıca

$$y \in C^2(0, 2) \cap C[0, 2]$$

olduğundan klasik çözümdür.

Fakat yukarıdaki teoremde ifade edilen süreklilik koşulları her zaman sağlanmayabilir.

Örneğin;

Isı kaynağının yoğunluğu düzgün değil ise;

Örnek. $p(x) = 1, q(x) = 0, a = 0, b = 1$ ve

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < x_0 < 1 \\ 4, & x_0 < x \leq 1 \end{cases}$$

ise

$$-y'' = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < x_0 < 1 \\ 4, & x_0 < x \leq 1 \end{cases}$$

olur.

$$f(x) \notin C[a, b]$$

olduğundan bu problemin klasik çözümü yoktur.

İki farklı malzemeden yapılmış bir çubukta ısı geçirgenlik katsayısı sürekli fonksiyon olmayabilir.

Örnek. $f(x) = 1$, $q(x) = 0$, $a = 0$, $b = 1$ ve

$$p(x) = \begin{cases} 3, & 0 \leq x < x_0 < 1 \\ 4, & x_0 < x \leq 1 \end{cases}$$

ise

$$p(x) \notin C^1[a, b]$$

olduğundan bu problemin klasik çözümü yoktur.

Yukarıdaki örneklerde de görüldüğü gibi pek çok problemde fonksiyonlar yeterince düzgün (sürekli, türevli) olmayabilir bu nedenle klasik çözüm kavramını zayıf çözüm (genelleştirilmiş çözüm) kavramına genişletmeliyiz. Bu aşamada Sobolev uzayları devreye girmektedir.

Şimdi tekrar (3.1)-(3.2) problemini ele alalım, bu aşamada $y \in C^2(a, b)$ koşulunun sağlanması gerekli olmasın. (3.1) denkleminin her iki tarafını sonsuz merteden türevli sürekli $\varphi \in C_0^\infty(a, b)$ fonksiyonu ile çarpıp $[a, b]$ aralığında integrallersek

$$\int_a^b [(-p(x)y')' + q(x)y - f(x)] \varphi(x) dx = 0,$$

$$\int_a^b [(-p(x)y')' \varphi(x) + q(x)y\varphi(x) - f(x)\varphi(x)] dx = 0$$

ilk terimin kısmi integrali alınır

$$-p(x)y'\varphi(x) \Big|_a^b + \int_a^b [p(x)y'\varphi'(x) + q(x)y\varphi(x) - f(x)\varphi(x)] dx = 0$$

olur. Burada $\varphi \in C_0^\infty(a, b)$ olduğundan $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ dır. Böylece

$$\int_a^b [p(x)y'\varphi'(x) + q(x)y\varphi(x)] dx = \int_a^b f(x)\varphi(x) dx \quad (3.3)$$

olur. (3.3) denkleminde $p(x)$ ve $q(x)$ katsayılarının $0 < c_0 \leq p(x) \leq c_1$, $0 \leq q(x) \leq c_2$ koşullarını sağladığını kabul edelim. Bu durumda

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx \leq c_1 \int_a^b y' \varphi'(x) dx + c_2 \int_a^b y \varphi(x) dx$$

olur. Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \varphi(x) dx &\leq c_1 \left(\int_a^b |y'|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b |\varphi'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + c_2 \left(\int_a^b |y|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b |\varphi(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

olur. (3.4) eşitsizliğinin sağ tarafına dikkat edilirse y nin ve genelleştirilmiş türevinin $L^2(a, b)$ uzayında olduğu görülür, yani

$$y \in W^{1,2}(a, b)$$

ve

$$\varphi(x) \in W^{1,2}(a, b)$$

dır. Görüldüğü gibi $p(x)$ ve $q(x)$ katsayılarının sürekli olmasına bile gerek yoktur. Böylece (3.4) denkleminde hem katsayılar hem de çözüm kavramını aşağıdaki gibi genişletebiliriz.

Tanım 3.5.1.3 $\forall \varphi \in W_0^{1,2}(a, b)$ için

$$\int_a^b [p(x) y' \varphi'(x) + q(x) y \varphi(x)] dx = \int_a^b f(x) \varphi(x) dx \quad (3.5)$$

eşitliğini sağlayan $y \in W_0^{1,2}(a, b)$ fonksiyonuna (3.1), (3.2) sınır değer probleminin *zayıf (genelleştirilmiş) çözümü* denir.

Burada (3.5) eşitliğine integral özdeşliği denir.

Şimdi zayıf çözümün varlık ve tekliğini ifade eden teoremi verelim.

Teorem 3.5.1.4

$$0 < c_0 \leq p(x) \leq c_1, \quad 0 \leq q(x) \leq c_2,$$

ve

$$f(x) \in L^2(a, b)$$

ise bu durumda (3.1)-(3.2) sınır değer probleminin zayıf çözümü vardır ve tektir.

3.6 Çözümlerin Varlığı ile İlgili Bazı Lemmalar

Evolüsyon denklemlerde global varlık- teklik sonuçlarını elde etmenin yaygın bir yöntemi, önce lokal varlık- teklik sonuçlarının gösterilmesi, ardından uygun kestirimlerle bu çözümlerin tüm zamanlara genişletilmesidir. Lokal varlık, genellikle problemin doğrusallaştırılmasıyla elde edilir. İlk adımda, doğrusallaştırılmış problem çözülür; ardından bu çözüm kullanılarak orijinal problem bir sabit nokta problemine dönüştürülür. Son adımda ise, uygun bir sabit nokta teoremi (örneğin Banach veya Schauder sabit nokta teoremi) aracılığıyla çözümün varlığı ve tekliği ispatlanır. Ancak bu tür sabit nokta yöntemleri çoğunlukla sadece küçük zaman aralıkları için geçerli olduğundan, elde edilen sonuçlar lokal düzeydedir. Bu nedenle, çözümlerin global varlığı için ayrıca enerji kestirimleri gibi yöntemlerle çözümün uzun vadede kontrol altına alındığı gösterilmelidir. Bu aşama, doğrusal olmayan terimlerin yapısına bağlı olarak ayrı bir analiz gerektirir.

Çözümlerin varlığının ispatında kullanılan bazı önemli metotları verelim:

Tanım 3.6.1(Faedo-Galerkin metodu) H , ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun ve f , aşağıda verilen aksiyomları sağlayan sonlu boyutlu vektör uzaylarının bir ailesi olsun: V nin yoğun bir alt uzayı V_n olmak üzere

1. $V_n \subset V$, $\dim V_n < \infty$,
2. $V_n \subset V$ iken $V_n \rightarrow V$ dir.

Bu durumda, $\forall u \in V$ için aşağıda verildiği gibi bir $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ dizisi bulunabilir: $n \rightarrow \infty$ iken, $\forall n, u_n \in V_n$ için V uzayında $u_n \rightarrow u$ olur.

Böylece, V_n uzayı, n . mertebeden bir Galerkin yaklaşımı olarak adlandırılır.

Faedo-Galerkin metodunun şeması:

Ayrılabilir bir V Hilbert uzayında tanımlı bir fonksiyon uzayında, bir (P) probleminin çözümlerinin varlığını bulmak isteyelim. Bu (P) probleminin tek bir çözümü u olsun. V nin bir V_n Galerkin yaklaşımını seçtikten sonra, sonlu boyutlu (V_n) uzayında, tek bir (u_n) çözümüne sahip yaklaşık bir (P_n) problemini tanımlamamız gerekir. Daha sonra

aşağıdaki adımları uygularız:

Adım 1: (P_n) probleminin çözümü u_n olsun.

Adım 2: u_n nin düzgün sınırlı olduğunu göstermek için u_n üzerinde kestirimler oluştururuz.

Adım 3: u_n nin düzgün sınırlı olmasından dolayı, 2. adımdaki kestirimleri içeren uzayın zayıf topolojisinde, bir limite sahip, $\{u_n\}_{n \in N^*}$ dizisinin bir $\{u'_n\}_{n \in N^*}$ alt dizisini seçmek mümkündür.

Elde edilen limit u olsun.

Adım 4: (P) probleminin çözümünün u olduğunu gösteririz.

Adım 5: Böylece, güçlü yakınsaklık sonuçlarını elde ederiz.

Yaklaşım sürecinin oluşturulmasının esas amacı, bir çözümün varlığının elde edilmesini sağlamaktır, bu süreç $u_n(x, t)$ ya, $(x, t) \in \Omega \times [0; T]$ için

$$u_n(x, t) = \sum_{i=1}^n r_i(t) w_i$$

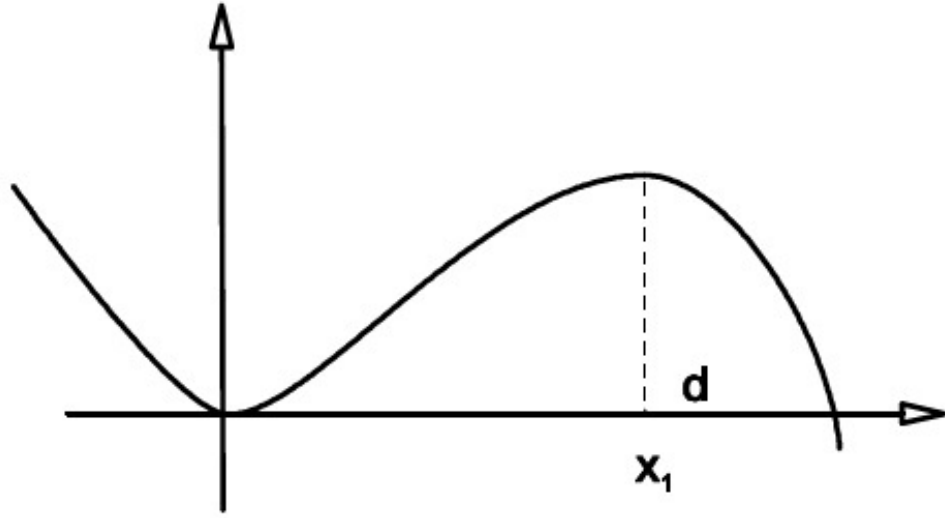
olacak şekilde w_i tabanlarının fonksiyonlarının lineer bir kombinasyonu olarak yaklaştırmaya tekabül eder.

Başka bir deyişle, bir problem için yaklaşık bir problem tanımlanır. Adi diferansiyel denklemler teorisinden bilindiği gibi, ele alınan yaklaşık sistemin, lineer olmayan terimleri düzgün olduğundan Zorn Lemması kullanılarak maksimal bir $[0, t_m)$ aralığına genişletilecek şekilde tek bir lokal çözüme sahiptir. Sonraki adım olarak bazı kestirimler elde edilir. Böylece, tüm $t > 0$ için tanımlı bir çözüm oluşturmak için aralık $[0, t_m)$ dışına genişletilebilir (Lions, 1969).

Lemma 3.6.2 (Potansiyel kuyu metodu) Genel olarak bu metot denklem çözümlerinin varlığının ispatında kullanılan önemli bir metottur. Potansiyel derinlik metodu, Sattinger tarafından (1968) deki çalışmasında

$$u_{tt} - \Delta u + f(x, u) = 0 \tag{3.6}$$

denkleminde ele alınmıştır. Buradaki amaç, problemin global çözümlerinin varlığını ispatlamaktır. Sattinger, (3.6) denkleminin, doğrusal olmayan $f(x, u)$ fonksiyonuna bazı ek koşullar ekleyerek global zayıf çözümün varlığını elde etmiştir. Potansiyel kuyu metodu, denklemlerin enerji integralleri üzerine kurulu bazı analizlere dayanmaktadır.



Şekilden de görüleceği gibi

$$W = \{x : V(x) < d, x < x_1\}$$

kümesi, bir potansiyel derinlik aralığını tanımlar. d potansiyel derinliği

$$d = \inf_{u \in H_0^1} J(\lambda_1 u)$$

olarak tanımlansın. d nin $0 \leq d \leq \infty$ olduğu açıktır. Eğer $d > 0$ ise, potansiyel derinlik

$$W = \{u : u \in H_0^1, 0 \leq J(\lambda u) < d, 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

olarak tanımlanır.

Payne ve Sattinger (1975) tarafından geliştirilen potansiyel derinlik metodu ile kısmi diferansiyel denklemin global varlığı çalışıldı. Diferansiyel denklemlerin toplam enerjisi, kinetik ve potansiyel enerjinin toplamından oluşur. Potansiyel enerjinin skaler fonksiyonları bulunduğu küme boyunca incelenirse, potansiyel enerjide çukur veya derinlik olarak adlandırabileceğimiz bir d yüksekliği olduğu görülür. d yüksekliği pozitif olduğundan, derinlikte yer alan başlangıç verilerine bağlı çözümler için, çözümün potansiyel enerjisinin derinliği aşamayacağı görülür. Genelde, kaynak terimden gelen enerjinin toplam enerjinin büyüklüğünün sonlu zamanda sonsuza gitmesine (patlamasına) yol açabilir. Fakat derinliğin büyük bir bölümü zamanla sınırlı olan potansiyel enerji ile sınırlı kalır. Böylece, çözümün toplam enerjisi herhangi bir zaman aralığında sınırlı kalır ve bu da global varlığını gösterir (Payne and Sattinger, 1975; Sattinger, 1968).

3.7 Çözümlerin Azalması ile İlgili Lemma

Çözümlerin azalması özellikle 1980 lerde incelenmeye başlanmıştır. Bu denklemlerdeki enerjiyi azaltan terime damping terim denir. Azalma, zaman sonsuza ıraksarken ($t \rightarrow \infty$) çözümlerin sifıra yakınsaması (çözüm $\rightarrow 0$) olarak tanımlanır. Yani

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\text{çözüm}) = 0$$

dır. Azalma (decay) kelimesi yerine bazen "enerji azalması (energy decay), asimptotik davranış (asymptotic behavior), asimptotik kararlılık (asymptotic stability), kararlılık (stabilization)" kelimeleri de kullanılmaktadır. Bu kavramlar tam olarak aynı olmamakla beraber çözümlerin sifıra azalması durumunda birbirlerinin yerine kullanılabilir (Pişkin, 2025b).

$E(t)$ denlem sisteminin enerji fonksiyoneli olmak üzere; $\forall t > 0$ ve $\alpha, \beta > 0$ için

- i. $E(t) \leq \beta e^{-\alpha t}$ oluyorsa üstel enerji azalması,
- ii. $E(t) \leq \beta t^{-\alpha}$ oluyorsa polinomal enerji azalması,
- iii. $E(t) \leq \beta (\ln t)^{-\alpha}$ oluyorsa logaritmik enerji azalması vardır.

Çözümün enerji azalmasına adi diferansiyel denklemler için bir örnek verelim; $t > 0$ için

$$\begin{cases} u'(t) = -u^p(t) \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin çözümü

$$\begin{cases} p = 1 \text{ ise } u(t) = e^{-t} \\ p = 2 \text{ ise } u(t) = (1+t)^{-1} \end{cases}$$

dir. Görüldüğü gibi her iki durumda da $t \rightarrow \infty$ iken $u \rightarrow 0$ olur. Burada $p = 1$ için üstel azalma, $p = 2$ için polinomal azalma vardır.

Örnek. $u = u(t)$ olmak üzere

$$\begin{cases} u' = -u, \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

probleminin çözümü

$$u = e^{-t}$$

dır. Böylece $t \rightarrow \infty$ için $u(t) \rightarrow 0$ olur. Burada üstel azalma vardır.

Örnek. $u = u(t)$ olmak üzere

$$\begin{cases} u' = -\frac{u}{t}, \\ u(1) = 1 \end{cases}$$

probleminin çözümü

$$u = t^{-1}$$

dır. Böylece $t \rightarrow \infty$ için $u(t) \rightarrow 0$ olur. Burada polinomal azalma vardır.

Örnek. $u = u(t)$ olmak üzere

$$\begin{cases} u' = -\frac{u}{t \ln t}, \\ u(e) = 1 \end{cases}$$

probleminin çözümü

$$u = (\ln t)^{-1}$$

dır. Böylece $t \rightarrow \infty$ için $u(t) \rightarrow 0$ olur. Burada logaritmik azalma vardır.

Lemma 3.7.1 (Nakao eşitsizliği) $\phi(t)$, $[0, \infty)$ aralığında tanımlı, artmayan ve negatif olmayan bir fonksiyon olmak üzere; $w_0 > 0$, $\alpha \geq 0$ ve $t \geq 0$ için

$$\phi^{1+\alpha}(t) \leq w_0 (\phi(t) - \phi(t+1)) \quad (3.7)$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda $\forall t \geq 0$ için

$$\begin{cases} \phi(t) \leq \phi(0) e^{-w_1 [t-1]^+}, & \alpha = 0, \\ \phi(t) \leq (\phi(0)^{-\alpha} + w_0^{-1} \alpha [t-1]^+)^{-\frac{1}{\alpha}}, & \alpha > 0 \end{cases}$$

dır. Burada $[t-1]^+ = \max\{t-1, 0\}$ ve $w_1 = \ln\left(\frac{w_0}{w_0-1}\right)$ dır (Nakao, 1976; Nakao, 1977).

Lemma 3.7.2 (Komornik eşitsizliği) $h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ artmayan bir fonksiyon olsun, $c > 0$ sabit sayısı ve $\forall t \geq 0$ için

$$\int_t^\infty h(\gamma) d\gamma \leq ch(t)$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda $\forall t \geq c$ için

$$h(t) \leq h(0) e^{1-\frac{t}{c}}$$

dır (Komornik, 1994).

Lemma 3.7.3 (Komornik eşitsizliği) $h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ artmayan bir fonksiyon, $\alpha > 0$ ve $c > 0$ sabit sayıları, $\forall t \geq 0$ için

$$\int_t^\infty h^{\alpha+1}(\gamma) d\gamma \leq ch^\alpha(0) h(t)$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda $\forall t \geq c$ için

$$h(t) \leq h(0) \left(\frac{c + \alpha t}{c + \alpha c} \right)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

geçerlidir (Komornik, 1994).

Lemma 3.7.4 (Genelleştirilmiş Komornik eşitsizliği) $h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ artmayan bir fonksiyon, $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ artan C^1 sınıfından bir fonksiyon,

$$\phi(0) = 0 \text{ ve } t \rightarrow \infty \text{ için } \phi(t) \rightarrow \infty$$

olsun. Ayrıca $\alpha \geq 0$, $\omega > 0$ ve $\forall S \geq 0$ için

$$\int_S^\infty h^{\alpha+1}(t) \phi'(t) dt \leq \frac{1}{\omega} h^\alpha(0) h(S) \quad (3.8)$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda $\forall t \geq 0$ için

$$\text{Eğer } \alpha = 0 \text{ ise } h(t) \leq h(0) e^{1-\omega\phi(t)}, \quad (3.9)$$

$$\text{Eğer } \alpha > 0 \text{ ise } h(t) \leq h(0) \left(\frac{1 + \alpha}{1 + \omega\alpha\phi(t)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (3.10)$$

dır (Martinez, 1999).

Not. Genelleştirilmiş Komornik Eşitsizliğinde $\forall t \geq 0$ için $\phi(t) = t$ alınırsa klasik Komornik Eşitsizlikleri elde edilir.

3.8 Çözümlerin Patlaması ile İlgili Lemmalar

Patlama (Blow up) konusu ilk olarak 1940 lı yıllarda Semenov'un çalışmalarında ortaya çıkmıştır (Galaktionov ve Vazquez, 2002) matematiksel teorisi 1960 larda Kaplan

(1963), Friedman (1965), Fujita (1966) ve diğer bazı yazarlar tarafından genel bir yaklaşım verildikten sonra aktif olarak araştırmacılar tarafından çalışılmıştır.

Bandle ve Brunnuer'a (1998) göre patlamanın fiziksel anlamı genel olarak bir kimyasal reaksiyonun yanmasına yol açan sıcaklıktaki çok büyük artış olarak düşünülmektedir. Tsunami dalgalarında dalganın kırılması, bir bölgede çok kısa sürede salgın hastalığın çok fazla artması, tencerede yemeğin kaynaması sırasında tencerenin patlaması aslında birer blow up olarak düşünülebilir. Blow up olayı sonlu veya sonsuz zamanda olacağı gibi doğrusal ve doğrusal olmayan denklemlerde de meydana gelebilir. Adi diferansiyel denklemlerde çözümlerin patlaması; sonlu bir zamanda ($0 < T < \infty$) çözümlerin sonsuza gitmesi ($u \rightarrow \infty$) olarak düşünülebilir (Pişkin, 2021).

Tanım 3.8.1(Çözümlerin patlaması) $\Omega \subset R^n$ de açık bir bölge ve $T > 0$ olsun. Bir başlangıç sınır değer probleminin çözümü $\Omega \times [0, T)$ de olsun. T lerin supremumuna çözümün varlık aralığının uzunluğu denir ve $T_{\max}$ ile gösterilir. Eğer

- i. $T_{\max} = \infty$ ise global çözüm vardır,
- ii. $T_{\max} < \infty$ ise global çözüm yoktur. Bu durumda çözüm sonlu zamanda patlar (Ball, 1977; Levine ve Todorova, 2001).

Şimdi çözümlerin patlamasına adi ve kısmi diferansiyel denklemlerden bazı basit örnekler verelim:

Örnek. $y = y(t)$ olmak üzere

$$\begin{cases} y' = y^2; \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin çözümü

$$y = \frac{1}{2-t}$$

dır. Burada

$$\lim_{t \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{2-t} \right) = \infty$$

olduğundan $t \rightarrow 2^-$ patlama (blow up) zamanıdır.

Örnek. $p \in R$ olmak üzere

$$\begin{cases} y' = y^p; \\ y(4) = 1 \end{cases}$$

Cauchy probleminin çözümünün varlık ve tekliğini inceleyiniz.

Çözüm.

$$f(x, y) = y^p$$

fonksiyonu $(4, 1)$ noktasını içeren

$$D = \{(x, y) : |x - 4| \leq a, |y - 1| \leq b\}$$

bölgesinde sürekli ve sınırlı olduğundan verilen problemin en az bir çözümü vardır.

Ayrıca

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = py^{p-1}$$

türev fonksiyonu D bölgesinde sürekli ve sınırlı (Lipschitz koşulu da sağlanır) olduğundan bu çözüm tektir. Gerçekten verilen denklem değişkenlerine ayrılırsa

$$y' = y^p,$$
$$\int \frac{dy}{y^p} = \int dx$$

olur. Burada p nin durumlarına göre integral alalım.

$p = 1$ için

$$\ln y = x + c$$

$y(4) = 1$ koşulundan

$$y = e^{x-4}$$

olur. Görüldüğü gibi bu çözüm aynı zamanda globaldir.

$p \neq 1$ için

$$\frac{y^{-p+1}}{-p+1} = x + c$$

$y(4) = 1$ koşulundan

$$y^{-p+1} = x(1-p) + (4p-3)$$

olur.

$p < 1$ ise $-p + 1 > 0$ olacağından

$$y^{-p+1} = x(1-p) + (4p-3)$$

çözüm global,

$p > 1$ ise $-p + 1 < 0$ olacağından

$$y^{p-1} = \frac{1}{x(1-p) + (4p-3)}$$

çözüm global değildir. Burada

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{4p-3}{p-1}\right)^-} \left[\frac{1}{x(1-p) + (4p-3)} \right] = \infty$$

olduğundan blow up olur.

Sonuç olarak

$$y' = y^p$$

denkleminde

$$\begin{cases} p \leq 1 \text{ ise global çözüm,} \\ p > 1 \text{ ise patlama (blow up)} \end{cases}$$

olur.

Not. $u = u(t)$ ve $p > 1$ olmak üzere

$$\begin{cases} u' = f(u), \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin sonlu zamanda blow up olması için gerekli ve yeterli koşul

1898 yılında Osgood tarafından elde edilen

$$\int_1^\infty \frac{ds}{f(s)} < \infty$$

koşulunun sağlanmasıdır (Hu, 2011). Burada f pozitif değerlidir.

Örnek. Değişken katsayılı

$$\begin{cases} u_t + xu_x = u^2, \\ u(x, 0) = \cos x \end{cases}$$

probleminin çözümü için $|u(x_0, T)| \rightarrow \infty$ olacak şekilde (blow up) en küçük $T > 0$ sayısını ve x_0 noktasını bulunuz.

Çözüm. Lagrange yardımcı sistemi

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{x} = \frac{du}{u^2}$$

dır. Buradan

i.

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{x} \rightarrow xe^{-t} = c_1,$$

ii.

$$\frac{dt}{1} = \frac{du}{u^2} \rightarrow t + \frac{1}{u} = c_2$$

olur. $u(x, 0) = \cos x$ koşulu verildiğinden $x = x, t = 0$ ve $u = \cos x$ olduğundan

$$c_2 = \frac{1}{\cos c_1}$$

bulunur. Böylece çözüm

$$u = \frac{\cos(xe^{-t})}{1 - t \cos(xe^{-t})}$$

olur. Çözümlerin patlama zamanı için paydayı sıfır yapacak T zamanı

$$1 - t \cos(xe^{-t}) = 0,$$

$$\cos(xe^{-t}) = \frac{1}{T}$$

dır. Burada

$$\cos(xe^{-T}) \leq 1 \text{ olduğundan } \frac{1}{T} \leq 1 \rightarrow T \geq 1$$

dolayısıyla en küçük zaman $T = 1$ olur. Buradan

$$\cos(xe^{-T}) = 1,$$

$$x_0 = 2n\pi e$$

olur.

Lemma 3.8.2 (Georgiev ve Todorova metodu)

Bu metot 1994 yılında Georgiev ve Todorova (Georgiev ve Todorova, 1994) tarafından elde edilmiştir. Bu metodun temel fikri uygun seçilmiş bir $\psi(t)$ fonksiyoneli için

$$\psi'(t) \geq c_1 \psi^{c_2}(t)$$

($c_1 > 0$, $c_2 > 1$, $t \geq 0$) diferansiyel eşitsizliğini elde etmektir. Buradan $(0, t)$ aralığında integral alınırsa

$$\frac{\psi'(t)}{\psi^{c_2}(t)} \geq c_1,$$

$$\frac{\psi^{1-c_2}(t)}{1-c_2} - \frac{\psi^{1-c_2}(0)}{1-c_2} \geq c_1 t$$

olur. Bu ifade düzenlenirse

$$\psi^{c_2-1}(t) \geq \frac{1}{\psi^{1-c_2}(0) - c_1(c_2-1)t}$$

elde edilir. Böylece paydayı sıfır yapan

$$\psi^{1-c_2}(0) - c_1(c_2-1)t = 0,$$

$$t = \frac{\psi^{1-c_2}(0)}{c_1(c_2-1)}$$

zamanında $\psi(t)$ sınırsız olur.

Georgiev ve Todorova çalışmalarında lineer olmayan damping ($|u_t|^{p-1} u_t$) ve kaynak terim ($|u|^{q-1} u$) içeren

$$u_{tt} - \Delta u + |u_t|^{p-1} u_t = |u|^{q-1} u$$

denkleminin lokal varlığını ve negatif başlangıç enerjisi ($E(0) < 0$) için patlamasını çalıştılar. Burada

$$\begin{cases} 1 < q \leq p \text{ ise global çözüm,} \\ 1 < p < q \leq \frac{n}{n-2} \text{ ise blow up} \end{cases}$$

olduğunu gösterdiler. Burada çok önemli husus Levine'nin Konkavlık metodu lineer olmayan damping terim içeren denklemlere uygulanamamaktadır. (Korpusov vd., 2018).

Lemma 3.8.3 (Li ve Tsai metodu)

$\delta > 0$ ve $B(t) \in C^2(0, \infty)$ negatif olmayan fonksiyonu, $t \geq 0$ için

$$B''(t) - 4(\delta + 1)B'(t) + 4(\delta + 1)B(t) \geq 0 \quad (3.12)$$

eşitsizliğini sağlasın. $r_2 = 2(\delta + 1) - 2\sqrt{\delta(\delta + 1)}$ olmak üzere; eğer

$$B'(0) > r_2 B(0) + K_0 \quad (3.13)$$

ise, bu durumda $t > 0$ için $B'(t) > K_0$ dır. Burada K_0 sabit sayıdır (Li ve Tsai, 2003).

Lemma 3.8.4 (Li ve Tsai metodu) Eğer $H(t), [t_0, \infty)$ aralığında artmayan ve $t \geq t_0$ için

$$[H'(t)]^2 \geq a + b[H(t)]^{2+\frac{1}{\delta}} \quad (3.15)$$

diferansiyel eşitsizliğini sağlayan bir fonksiyon ise, bu durumda

$$\lim_{t \rightarrow T^*-} H(t) = 0$$

eşitliğini sağlayacak şekilde sonlu bir T^* zamanı vardır. Burada $a > 0, b \in R$ dır.

T^* in üst sınırları için aşağıdaki kestirimler geçerlidir:

i. Eğer $b < 0$ ve $H(t_0) < \min\{1, \sqrt{-\frac{a}{b}}\}$ ise, bu durumda

$$T^* \leq t_0 + \frac{1}{\sqrt{-b}} \ln \frac{\sqrt{-\frac{a}{b}}}{\sqrt{-\frac{a}{b}} - H(t_0)} \quad (3.16)$$

dır.

ii. Eğer $b = 0$ ise, bu durumda

$$T^* \leq t_0 + \frac{H(t_0)}{\sqrt{a}} \quad (3.17)$$

dır.

iii. Eğer $b > 0$ ise, bu durumda

$$T^* \leq \frac{H(t_0)}{\sqrt{a}} \text{ veya } T^* \leq t_0 + 2^{\frac{3\delta+1}{2\delta}} \frac{\delta c}{\sqrt{a}} \left[1 - (1 + cH(t_0))^{-\frac{1}{2\delta}} \right] \quad (3.18)$$

dır. Burada $c = \left(\frac{a}{b}\right)^{2+\frac{1}{\delta}}$ dır (Li ve Tsai, 2003).

Lemma 3.8.5 (Konkavlık metodu)

$F(t)$ iki kez türevlenebilen ve $t > 0$, $\alpha > 0$ için

$$F''(t) F(t) - (1 + \alpha) (F'(t))^2 \geq 0$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif bir fonksiyon olsun. Eğer $F(0) > 0$ ve $F'(0) > 0$ ise bu durumda $0 < T_c \leq \frac{F(0)}{\alpha F'(0)}$ zamanı vardır ki

$$\lim_{t \rightarrow T_c} F(t) = \infty$$

olur (Levine, 1974a).

Levine (1974a) tarafından elde edilen bu metodun temel düşüncesi; problemin lokal varlık koşulu altında problemi temsil eden pozitif bir $F(t)$ fonksiyonu için $\Phi(t) = F^{-\alpha}(t)$ konkav fonksiyonunu inşa etmektir.

4. DEĞİŞKEN KATSAYILI GÜÇLÜ SÖNÜM TERİMLİ DALGA DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN PATLAMASI

4.1 Giriş

Bu bölümde değişken katsayılar üzerindeki uygun koşullar altında

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t + \mu_1(t) |u_t|^{p-2} u_t = \mu_2(t) |u|^{q-2} u, & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) = u_1(x), & x \in \Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

probleminin çözümlerinin patlamasını çalışacağız (Pişkin ve Fidan, 2022). Burada Ω , R^n ($n \in N$) de $\partial\Omega$ düzgün bir sınıra sahip sınırlı bir bölge, $p \geq 2$, $q > 2$, $\mu_1(t)$ negatif olmayan bir fonksiyon ve $\mu_2(t)$ pozitif bir fonksiyondur. $|u_t|^{p-2} u_t$ sönüm (damping) terim ve $|u|^{q-2} u$ ise kaynak (source) terimdir.

Georgiev ve Todorova (1994) ve Pişkin (2015a) dakilere benzer olarak Faedo Galerkin metodu kullanılarak aşağıdaki teorem ispatlanabilir.

Teorem 4.1.4 (Lokal varlık) Kabul edelim ki

$$\begin{cases} 2 \leq q < \infty, & n \leq 2, \\ 2 < q < \frac{2(n-1)}{n-2}, & n > 2 \end{cases}$$

sağlansın. Bu durumda herhangi bir $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ için (4.1) problemi lokal çözüme sahiptir ve $T > 0$ için

$$\begin{aligned} u &\in C([0, T] : H_0^1(\Omega)), \\ u_t &\in C([0, T] ; L^2(\Omega)) \cap L^p(\Omega, [0, T]) \end{aligned}$$

dır.

Lemma 4.1.1 Kabul edelim ki

$$\begin{cases} 2 \leq q < \infty, & n \leq 2, \\ 2 < q < \frac{2(n-1)}{n-2}, & n > 2 \end{cases} \quad (4.2)$$

olsun. $C > 1$ sabiti sadece Ω ya bağlı olmak üzere, $u \in H_0^1(\Omega)$ ve $2 \leq s \leq q$ ise

$$\|u\|_q^s \leq C \left(\|\nabla u\|^2 + \|u\|_q^q \right) \quad (4.3)$$

dır (Messaoudi, 2001).

İspat.

1. *Durum:* Eğer

$$\|u\|_q \leq 1$$

ise

$$\|u\|_q^s \leq \|u\|_q^2$$

olur. Sobolev gömme teoreminden dolayı

$$\|u\|_q^s \leq \|u\|_q^2 \leq C \|\nabla u\|^2$$

olarak bulunur.

2. *Durum:* Eğer

$$\|u\|_q \geq 1$$

ise, bu durumda

$$\|u\|_q^s \leq \|u\|_q^q$$

olur. Elde edilen eşitsizlikler birlikte göz önüne alınırsa ispat tamamlanır.

Lemma 4.1.2 $p \geq 2, q > 2, \mu_1(t)$ negatif olmayan bir fonksiyon ve $\mu_2(t)$ pozitif bir fonksiyon olsun Ayrıca $\mu_2'(t) \geq 0$ olduğunu varsayalım. Eğer $u(x, t)$, (4.1) probleminin bir çözümü ise o zaman $E(t)$ enerji fonksiyoneli $t \geq 0$ için artmayandır. Yani

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\mu_1(t) \|u_t\|_p^p - \|\nabla u_t\|^2 - \frac{\mu_2'(t)}{q} \|u\|_q^q \leq 0$$

dır.

İspat. (4.1) denklemini u_t ile çarpıp, Ω bölgesi üzerinde x e göre integrali alınırsa

$$\underbrace{\int_{\Omega} u_t u_{tt} dx}_{1.Terim} - \underbrace{\int_{\Omega} u_t \Delta u dx}_{2.Terim} - \underbrace{\int_{\Omega} u_t \Delta u_t dx}_{3.Terim} + \underbrace{\int_{\Omega} u_t \mu_1(t) |u_t|^{p-2} u_t dx}_{4.Terim} = \underbrace{\int_{\Omega} u_t \mu_2(t) |u|^{q-2} u dx}_{5.Terim}$$

yazılır.

1. *Terim:*

Basit matematiksel işlemlerin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} u_t u_{tt} dx &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (u_t^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t\|^2\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

2. *Terim:* Green özdeşliği ve sınır değerlerin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}- \int_{\Omega} u_t \Delta u dx &= \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2\end{aligned}$$

dır.

3. *Terim:* Green özdeşliği ve sınır değerlerin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}- \int_{\Omega} u_t \Delta u_t dx &= \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u_t dx \\ &= \|\nabla u_t\|^2\end{aligned}$$

olur.

4. *Terim:*

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} u_t \mu_1(t) |u_t|^{p-2} u_t dx &= \int_{\Omega} \mu_1(t) |u_t|^p dx \\ &= \mu_1(t) \int_{\Omega} (u_t^p) dx \\ &= \mu_1(t) \|u_t\|_p^p\end{aligned}$$

olur.

5. *Terim:*

$$\begin{aligned}- \int_{\Omega} u_t \mu_2(t) |u|^{q-2} u dx &= - \int_{\Omega} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\mu_2(t) |u|^q}{q} \right) - \frac{\mu_2'(t) |u|^q}{q} \right] dx \\ &= - \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu_2(t)}{q} \int_{\Omega} |u|^q dx \right) + \frac{\mu_2'(t)}{q} \int_{\Omega} |u|^q dx \\ &= - \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu_2(t)}{q} \|u\|_q^q \right) + \frac{\mu_2'(t)}{q} \|u\|_q^q\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak tüm terimler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 - \frac{\mu_2(t)}{q} \|u\|_q^q}_{E(t)} \right) \\ &= -\mu_1(t) \|u_t\|_p^p - \|\nabla u_t\|^2 - \frac{\mu_2'(t)}{q} \|u\|_q^q \end{aligned} \quad (4.4)$$

olur. Böylece (4.4) eşitliğinden

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\mu_1(t) \|u_t\|_p^p - \|\nabla u_t\|^2 - \frac{\mu_2'(t)}{q} \|u\|_q^q \leq 0$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadenin $(0, t)$ aralığında integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \int_0^t E'(\tau) d\tau \leq \int_0^t 0 d\tau, \\ & E(t) - E(0) \leq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $E(t) \leq E(0)$ dır. Burada enerji fonksiyonelinin artmayan olduğunu gösterdik.

Burada enerji fonksiyoneli

$$E(t) = \frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 - \frac{\mu_2(t)}{q} \|u\|_q^q \quad (4.5)$$

şeklindedir ve

$$E(0) = \frac{1}{2} \|u_1\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u_0\|^2 - \frac{\mu_2(0)}{q} \|u_0\|_q^q$$

dır. İşlem kolaylığı olması açısından

$$H(t) = -E(t) \quad (4.6)$$

olarak tanımlayalım.

Lemma 4.1.3 Varsayalım ki

$$\begin{cases} 2 \leq q < \infty, & n \leq 2, \\ 2 < q < \frac{2(n-1)}{n-2}, & n > 2 \end{cases}$$

ve $E(t) < 0$ olsun. Bu durumda, sadece Ω ya bağlı pozitif bir C sabiti vardır, öyle ki herhangi bir $u \in H_0^1(\Omega)$ ve $2 \leq s \leq q$ için

$$\|u\|_q^s \leq C \left(H(t) + \|u_t\|^2 + \left(\frac{\mu_2(t)}{q} + 1 \right) \|u\|_q^q \right) \quad (4.7)$$

dır.

İspat.

1. Durum: Eğer

$$\|u\|_q \leq 1$$

ise

$$\|u\|_q^s \leq \|u\|_q^2$$

olur. Sobolev gömme teoreminden de

$$\|u\|_q^s \leq \|u\|_q^2 \leq C \|\nabla u\|^2$$

$$E(t) = \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 - \frac{\mu_2(t)}{q} \|u\|_q^q \text{ den}$$

$$\frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 = E(t) - \|u_t\|^2 + \frac{\mu_2(t)}{q} \|u\|_q^q$$

bulunur. (4.6) deki $H(t) = -E(t)$ den

$$\frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 = -H(t) - \|u_t\|^2 + \frac{\mu_2(t)}{q} \|u\|_q^q$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \|u\|_q^s &\leq \|u\|_q^2 \\ &\leq C_1 \|\nabla u\|^2 \\ &= \frac{C_1}{2} \left(-H(t) - \|u_t\|^2 + \frac{\mu_2(t)}{q} \|u\|_q^q \right) \\ &\leq \frac{C_1}{2} \left(H(t) + \|u_t\|^2 + \frac{\mu_2(t)}{q} \|u\|_q^q \right) \end{aligned}$$

elde edilir.

2. Durum: Eğer

$$\|u\|_q > 1$$

ise, bu durumda

$$\|u\|_q^s \leq \|u\|_q^q$$

olur. Elde edilen eşitsizlikler birlikte göz önüne alınırsa ispat tamamlanır.

4.2 Çözümün Patlaması

Teorem 4.2.1 Lemma 4.1.1 in varsayımları geçerli olsun. Kabul edelim ki $\mu_1(t)$ negatif olmayan bir fonksiyon, $\mu_2(t)$ pozitif bir fonksiyon, $\mu_2'(t) \geq 0$ ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_1(t) \mu_2(t)^{\alpha(p-1)}$$

mevcut olsun. Burada

$$0 < \alpha \leq \min \left\{ \frac{q-2}{2q}, \frac{q-p}{q(p-1)} \right\}$$

olsun. Ayrıca, başlangıç enerji fonksiyonu

$$E(0) < 0$$

ve

$$L(0) = [H(0)]^{1-\alpha} + \epsilon \int_{\Omega} u_0 u_1 dx > 0$$

olsun. Bu durumda (4.1) denkleminin çözümü sonlu bir T^* zamanında patlar. Burada

$$T^* \leq \frac{1-\alpha}{\alpha \gamma L^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(0)}$$

dır.

İspat. Çözümün bütün zamanlar için var olduğunu kabul edip buradan çelişki elde edeceğiz. Lemma 4.1.2, (4.6) ve $E(0) < 0$ kabulünden

$$H(t) = -E(t)$$

ifadesinin her iki tarafının türevi alınırsa ve $\mu_1(t) \geq 0$, $\mu_2'(t) \geq 0$ den

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(t) &= - \frac{d}{dt} E(t) \\ &= \mu_1(t) \|u_t\|_p^p + \frac{\mu_2'(t)}{q} \|u\|_q^q \\ &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

dır. Buradan

$$0 < H(0)$$

$$\leq H(t)$$

$$\begin{aligned} &= - \left[\frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 - \frac{\mu_2(t)}{q} \|u\|_q^q \right] \\ &= - \frac{1}{2} \|u_t\|^2 - \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 + \frac{\mu_2(t)}{q} \|u\|_q^q \\ &\leq \frac{\mu_2(t)}{q} \|u\|_q^q \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$H(t) \leq \frac{\mu_2(t)}{q} \|u\|_q^q \quad (4.9)$$

olduğu görülür. $\epsilon > 0$ daha sonra belirlenecek yeterince küçük bir sayı olmak üzere

$$L(t) = H^{1-\alpha}(t) + \epsilon \int_{\Omega} uu_t dx + \frac{\epsilon}{2} \|\nabla u\|^2 \quad (4.10)$$

ve

$$0 < \alpha \leq \min \left\{ \frac{q-2}{2q}, \frac{q-p}{q(p-1)} \right\} \quad (4.11)$$

şeklinde tanımlansın. Amacımız $\zeta > 1$ için

$$L'(t) \geq \gamma L^{\zeta}(t)$$

olduğunu göstermektir.

(4.10) un türevini alır ve (4.1) denklemini kullanırsak

$$\begin{aligned} L'(t) &= \left[H^{1-\alpha}(t) + \epsilon \int_{\Omega} uu_t dx + \frac{\epsilon}{2} \|\nabla u\|^2 \right]' \\ &= (1-\alpha) H^{-\alpha}(t) H'(t) + \epsilon \int_{\Omega} (uu_{tt} + u_t^2) dx \\ &= (1-\alpha) H^{-\alpha}(t) H'(t) \\ &\quad + \epsilon \left(\int_{\Omega} u_t^2 dx + \int_{\Omega} u (\Delta u + \Delta u_t - \mu_1(t) |u_t|^{p-1} + \mu_2(t) u^{q-1}) dx \right) \\ &= (1-\alpha) H^{-\alpha}(t) H'(t) + \epsilon \|u_t\|^2 - \epsilon \|\nabla u\|^2 \\ &\quad - \epsilon \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx + \epsilon \mu_2(t) \|u\|_q^q - \epsilon \mu_1(t) \int_{\Omega} u |u_t|^{p-1} dx \end{aligned} \quad (4.12)$$

ifadesi elde edilir. (4.12) in son terimiyle ilgili bir kestirim yapabilmek için Hölder eşitsizliği ve $X, Y \geq 0, \delta > 0, k, l \in R^+$ ve $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} = 1$ olmak üzere

$$XY \leq \frac{\delta^k X^k}{k} + \frac{\delta^{-l} Y^l}{l}$$

şeklinde ifade edilen Young eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left| \mu_1(t) \int_{\Omega} |u_t|^{p-1} u dx \right| &\leq \left(\int_{\Omega} \mu_1(t) |u_t|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\Omega} \mu_1(t) |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{p-1}{p} \mu_1(t) \delta^{-\frac{p}{p-1}} \|u_t\|_p^p + \frac{\delta^p}{p} \mu_1(t) \|u\|_p^p \end{aligned} \quad (4.13)$$

yazılabilir. Burada δ daha sonra belirlenecek t ye bağlı sabitlerdir. $H(t)$ tanımından

$$\begin{aligned} H'(t) &= -E'(t) \\ &= \mu_1(t) \|u_t\|_p^p + \frac{\mu_2'(t)}{q} \|u\|_q^q \\ &\geq \mu_1(t) \|u_t\|_p^p \end{aligned} \quad (4.14)$$

olur. (4.14) ifadesi (4.13) te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \left| \mu_1(t) \int_{\Omega} |u_t|^{p-1} u dx \right| &\leq \frac{p-1}{p} \mu_1(t) \delta^{-\frac{p}{p-1}} \|u_t\|_p^p + \frac{\delta^p}{p} \mu_1(t) \|u\|_p^p \\ &\leq \frac{p-1}{p} \delta^{-\frac{p}{p-1}} H'(t) + \frac{\delta^p}{p} \mu_1(t) \|u\|_p^p \end{aligned}$$

bulunur. Elde edilen ifadeyi (4.12) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} L'(t) &= (1 - \alpha) H^{-\alpha}(t) H'(t) + \epsilon \|u_t\|^2 - \epsilon \|\nabla u\|^2 \\ &\quad - \epsilon \int \nabla u \nabla u_t dx + \epsilon \mu_2(t) \|u\|_q^q \\ &\quad - \epsilon \left(\frac{p-1}{p} \delta^{-\frac{p}{p-1}} H'(t) + \frac{\delta^p}{p} \mu_1(t) \|u\|_p^p \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

ifadesine dönüşür.

$m > 0$ daha sonra belirlenecek bir sabit olmak üzere

$$\delta^{-\frac{p}{p-1}} = m H^{-\alpha}(t)$$

olsun. Böylece,

$$\delta^p = m^{1-p} H^{\alpha(p-1)}(t)$$

olarak yazılabilir. Elde edilen ifadeler (4.15) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
L'(t) \geq & \left[(1 - \alpha) - \frac{p-1}{p} \epsilon m \right] H^{-\alpha}(t) H'(t) \\
& + \epsilon \left(\frac{q}{2} + 1 \right) \|u_t\|^2 + \epsilon \left(\frac{q}{2} - 1 \right) \|\nabla u\|^2 \\
& + \epsilon \left[q H(t) - \frac{m^{1-p}}{p} \mu_1(t) H^{\alpha(p-1)}(t) \|u\|_p^p \right]
\end{aligned} \tag{4.16}$$

elde edilir. Teorem 4.2.1.deki kabulümüzden

$$0 < \alpha \leq \min \left\{ \frac{q-2}{2q}, \frac{q-p}{q(p-1)} \right\}$$

dır. Buradan

$$\frac{q-p}{q(p-1)} > 0$$

$$q-p > 0$$

$$q > p$$

olduğundan

$$H(t) \leq \frac{\mu_2(t)}{q} \|u\|_q^q$$

eşitsizliğinin $\alpha(p-1)$. kuvvetini alır $\|u\|_p^p$ ile çarparsak ve $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ gömülmesi uygularsak

$$H^{\alpha(p-1)}(t) \|u\|_p^p \leq \left(\frac{\mu_2(t)}{q} \right)^{\alpha(p-1)} \|u\|_q^{p+q\alpha(p-1)}$$

şeklinde ifade edilir. Bu ifade (4.16) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
L'(t) \geq & \left[(1 - \alpha) - \frac{p-1}{p} \epsilon m \right] H^{-\alpha}(t) H'(t) \\
& + \epsilon \left(\frac{q}{2} + 1 \right) \|u_t\|^2 + \epsilon \left(\frac{q}{2} - 1 \right) \|\nabla u\|^2 \\
& + \epsilon \left[q H(t) - \frac{C m^{1-p}}{p} \left(\frac{\mu_2(t)}{q} \right)^{\alpha(p-1)} \mu_1(t) \|u\|_q^{p+q\alpha(p-1)} \right]
\end{aligned} \tag{4.17}$$

olur. (4.11) den dolayı $0 < \alpha \leq \min \left\{ \frac{q-2}{2q}, \frac{q-p}{q(p-1)} \right\}$

$$\alpha \leq \frac{q-p}{q(p-1)}$$

$$\alpha q(p-1) \leq q-p$$

$$p + q\alpha(p-1) \leq q$$

ve

$$p \geq 2,$$

$$p + q\alpha(p-1) \geq 2$$

olur. Bu eşitsizliklerin birlikte ele alınmasıyla

$$2 \leq p + q\alpha(p-1) \leq q$$

olur. Böylece $\|u\|_q^{p+q\alpha(p-1)}$ terimine Lemma 4.1.3 uygulanırsa

$$\begin{aligned} L'(t) &\geq \left[(1-\alpha) - \frac{p-1}{p} \epsilon m \right] H^{-\alpha}(t) H'(t) \\ &\quad + \epsilon \left(\frac{q}{2} + 1 \right) \|u_t\|^2 + \epsilon \left(\frac{q}{2} - 1 \right) \|\nabla u\|^2 \\ &\quad + \epsilon \left[qH(t) - C_1 m^{1-p} \mu_2(t)^{\alpha(p-1)} \mu_1(t) \left(H(t) + \|u_t\|_2^2 + \frac{\mu_2(t)}{q} + 1 \right) \|u\|_q^q \right] \\ &\geq \left[(1-\alpha) - \frac{p-1}{p} \epsilon m \right] H^{-\alpha}(t) H'(t) \\ &\quad + \epsilon \left(\frac{q+2}{2} - C_1 m^{1-p} \mu_2(t)^{\alpha(p-1)} \mu_1(t) \right) H(t) \\ &\quad + \epsilon \left[\frac{q+6}{4} - C_1 m^{1-p} \mu_2(t)^{\alpha(p-1)} \mu_1(t) \right] \|u_t\|^2 \\ &\quad + \epsilon \left[\frac{q-2}{2q} \mu_2(t) - C_1 m^{1-p} \mu_2(t)^{\alpha(p-1)} \mu_1(t) \left(\frac{\mu_2(t)}{q} + 1 \right) \right] \|u\|_q^q \end{aligned} \quad (4.18)$$

elde edilir. Burada $C_1 = \frac{C}{pq^{\alpha(p-1)}}$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_1(t) \mu_2(t)^{\alpha(p-1)}$ sınırlı olduğundan $\forall t > 0$ için $\mu_1(t) \mu_2(t)^{\alpha(p-1)}$ sınırlıdır. Ayrıca $H(t)$, $\|u_t\|^2$ ve $\|u\|_q^q$ katsayıları pozitif olduğundan

$$\begin{aligned} L'(t) &\geq \left[(1-\alpha) - \frac{p-G1}{p} \epsilon m \right] H^{-\alpha}(t) H'(t) \\ &\quad + \epsilon \beta \left[H(t) + \|u_t\|_2^2 + \left(\frac{\mu_2(t)}{q} + 1 \right) \|u\|_q^q \right] \end{aligned} \quad (4.19)$$

şeklinde bir ifade elde edilir. Burada $\beta > 0$

$$\beta = \min \left\{ \frac{q+2}{2} - C_1 m^{1-p} \mu_2(t)^{\alpha(p-1)} \mu_1(t), \right. \\ \left. \frac{q+6}{4} - C_1 m^{1-p} \mu_2(t)^{\alpha(p-1)} \mu_1(t), \right. \\ \left. \frac{q-2}{2q} \mu_2(t) - C_1 m^{1-p} \mu_2(t)^{\alpha(p-1)} \mu_1(t) \right\}$$

olarak alınmıştır. ϵ yeterince küçük alınırsa

$$1 - \alpha - \frac{p-1}{p}\epsilon m \geq 0$$

dır. Ayrıca her $t > 0$ için

$$H'(t) = -E'(t) \geq 0$$

eşitsizliğin her iki tarafının integrali alınırsa

$$H(t) \geq H(0)$$

dır. Buradan

$$H^{-\alpha}(t) \leq H^{-\alpha}(0)$$

elde edilir. Ayrıca teoremin koşullarından $E(0) < 0$ dan

$$0 < -E(0) < -E(t) = H(t)$$

dır. Buradan

$$0 < H^{-\alpha}(t)$$

elde edilir. İki eşitsizlikten

$$0 < H^{-\alpha}(t) \leq H^{-\alpha}(0)$$

elde edilir. $H^{-\alpha}(t)$ pozitif ve sınırlı bir fonksiyon olduğundan (4.19) ifadesinin Ω bölgesi üzerinde integrali alınırsa $\forall t \geq 0$ için

$$L(t) \geq L(0) = H^{1-\alpha}(0) + \epsilon \int_{\Omega} u_0 u_1 dx > 0 \quad (4.20)$$

dır.

Şimdi $L^{\frac{1}{1-\alpha}}(t)$ yi elde etmek için $L(t)$ tanımından $\int_{\Omega} uu_t dx$ terimine Hölder eşitsizliğini ve $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ gömülmesini uygularsak ($q > p$)

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} uu_t dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} &\leq \|u\|^{\frac{1}{1-\alpha}} \|u_t\|^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ &\leq C \left(\|u\|_q^{\frac{1}{1-\alpha}} \|u_t\|^{\frac{1}{1-\alpha}} \right) \end{aligned} \quad (4.21)$$

olur.

$$\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\theta} = 1$$

olacak şekilde (4.21) terimine Young eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} uu_t dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} &\leq C \left(\|u\|_q^{\frac{1}{1-\alpha}} \|u_t\|^{\frac{1}{1-\alpha}} \right) \\ &\leq C \left(\|u\|_q^{\frac{\mu}{1-\alpha}} + \|u_t\|^{\frac{\theta}{1-\alpha}} \right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

olur. Burada

$$\theta = 2(1 - \alpha)$$

olarak alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\theta} &= 1 \\ \frac{1}{\mu} &= 1 - \frac{1}{2(1 - \alpha)} \\ \mu &= \frac{2(1 - \alpha)}{(1 - 2\alpha)} \end{aligned}$$

olarak yazılır. Elde edilen ifadeler (4.22) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} uu_t dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} &\leq C \left(\|u\|_q^{\frac{\mu}{1-\alpha}} + \|u_t\|^{\frac{\theta}{1-\alpha}} \right) \\ &= C \left(\|u\|_q^{\frac{2(1-\alpha)}{(1-2\alpha)(1-\alpha)}} + \|u_t\|^{\frac{2(1-\alpha)}{1-\alpha}} \right) \\ &= C \left(\|u\|_q^{\frac{2}{1-2\alpha}} + \|u_t\|^2 \right) \end{aligned}$$

olur. Burada $\|u\|_q^{\frac{2}{1-2\alpha}}$ terimine Lemma 4.1.3 uygulanırsa

$$\left| \int_{\Omega} uu_t dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq C \left(H(t) + \|u_t\|_2^2 + \left(\frac{\mu_2(t)}{q} + 1 \right) \|u\|_q^q \right) \quad (4.23)$$

şeklinde yazılır. (4.10) ifadesine

$$(X + Y)^p \leq 2^{p-1} (X^p + Y^p)$$

eşitsizliği uygulanır ve (4.23) te elde edilen eşitsizlik kullanılırsa

$$\begin{aligned}
L^{\frac{1}{1-\alpha}}(t) &= \left[H^{1-\alpha}(t) + \epsilon \int_{\Omega} uu_t dx \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \\
&\leq 2^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(H(t) + \left| \epsilon \int_{\Omega} uu_t dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \right) \\
&\leq C \left(H(t) + \|u_t\|_2^2 + \left(\frac{\mu_2(t)}{q} + 1 \right) \|u\|_q^q \right)
\end{aligned} \tag{4.24}$$

ifadesine dönüşür. (4.19) ve (4.24) ten

$$L'(t) \geq \gamma L^{\frac{1}{1-\alpha}}(t) \tag{4.25}$$

olur. Burada $\gamma > 0$ şeklindeki bir sabittir. (4.25) in $(0, t)$ aralığında integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{dL}{dt} &\geq \gamma L^{\frac{1}{1-\alpha}}(t), \\
\int_0^t \frac{dL}{L^{\frac{1}{1-\alpha}}(t)} &\geq \int_0^t \gamma dt, \\
\frac{L^{-\frac{1}{1-\alpha}+1}}{-\frac{1}{1-\alpha}+1} \Big|_0^t &\geq \gamma t \Big|_0^t, \\
L^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}(t) - L^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}(0) &\leq -\frac{\alpha}{1-\alpha} \gamma t, \\
L^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}(t) &\leq L^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}(0) - \frac{\alpha}{1-\alpha} \gamma t, \\
L^{\frac{1}{1-\alpha}}(t) &\geq \frac{1}{L^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}(0) - \frac{\alpha}{1-\alpha} \gamma t}
\end{aligned} \tag{4.26}$$

bulunur. Buradan

$$L^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}(0) - \frac{\alpha}{1-\alpha} \gamma t \rightarrow 0 \text{ ise } t \rightarrow \left[\frac{1-\alpha}{\alpha \gamma L^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(0)} \right]^-$$

dır. Böylece çözüm sonlu bir T^* zamanında patlar ve

$$T^* \leq \frac{1-\alpha}{\alpha \gamma L^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(0)}$$

dır. Böylece ispatımız tamamlanmıştır.

5. DOĞRUSAL OLMAYAN SÖNÜM VE KAYNAK TERİM SAHİP AĞIRLIKLI m -BİHARMONİK DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI, AZALMASI VE PATLAMASI

Bu bölümde (5.1) probleminin çözümlerinin global varlığını, enerji azalmasını ve patlamasını elde edeceğiz.

5.1 Giriş

Bu bölümde doğrusal olmayan sönüm ve kaynak terim içeren m -biharmonik

$$\begin{cases} z_{tt} + \Delta (k(x) |\Delta z|^{m-2} \Delta z) + \Delta^2 z_t + |z_t|^{p-1} z_t = |z|^{q-1} z, & x \in \Omega, t > 0, \\ z(x, t) = \Delta z(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ z(x, 0) = z_0(x), z_t(x, 0) = z_1(x), & x \in \Omega \end{cases} \quad (5.1)$$

başlangıç-sınır değer problemi ele alınmıştır (Fidan vd., 2024). Burada Ω, R^n ($n \geq 1$) de $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahip sınırlı bir bölgedir. Ayrıca $p, q \geq 1, m \geq 2$ olup $k(x), \Omega$ üzerinde pozitif ve sürekli diferansiyellebilir bir fonksiyondur.

Bu bölümde, çalışmanın temelini oluşturan çözüm uzaylarının belirlenmesi ve analizlerin gerçekleştirilmesi için gerekli olan normlar tanımlanacaktır. Çalışmada kullanılan $\|\cdot\|, \|\cdot\|_p$ ve $\|\cdot\|_{D_0^{2,m}(\Omega)}$ normları sırasıyla klasik $L^2(\Omega), L^p(\Omega)$ ve ağırlıklı Sobolev uzayı $D_0^{2,m}(\Omega, \varphi)$ normlarını ifade etmektedir (Adams ve Fournier, 2003; Pişkin ve Okutmuş, 2021; Pişkin, 2025a).

Bu bağlamda, aşağıdaki tanım verilerek, çözüm fonksiyonlarının yer aldığı fonksiyonel uzay belirlenmiş olur. Özellikle, (5.1) numaralı denklemin çözümü için ağırlıklı Sobolev uzayı, $D_0^{2,m}(\Omega, \varphi)$ test fonksiyonlarının bulunduğu $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının aşağıdaki norma göre kapanışı

$$\|z\|_{D_0^{2,m}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} k(x) |\Delta z|^m dx \right)^{\frac{1}{m}}$$

şeklinde tanımlanır. Verilen norm, yüksek mertebeden türevleri ve ağırlık fonksiyonunu dikkate alarak çözümün düzenliliğini ve enerji düzeyini ölçmede kullanılır. Özellikle yüksek mertebeden diferansiyel denklemlerin analizinde önemli bir rol oynar.

Şimdi lokal varlık teoremini ifade edelim. Georgiev ve Todorova (1994) ve Ye (2013) dekilere benzer olarak Faedo Galerkin metodu kullanılarak aşağıdaki teorem ispatlanabilir.

Teorem 5.1.1 (Lokal varlık) $2 \leq m < q + 1 < \frac{nm}{n-m+\gamma} < n$, $z_0 \in \mathcal{D}_0^{2,m}(\Omega)$, $z_1 \in L^2(\Omega)$ sağlansın ve aşağıdaki koşulları sağlıyorsa (5.1) probleminin zayıf lokal çözümü

$$z \in C([0, T]; \mathcal{D}_0^{2,m}(\Omega)),$$

$$z_t \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^{p+1}([0, T] \times \Omega)$$

dır.

5.2 Global Varlık

Bu kısımda (5.1) probleminin çözümlerinin global varlığını göstereceğiz. Bunun için aşağıdaki fonksiyonelleri tanımlayalım:

$$J(t) = \frac{1}{m} \int_{\Omega} k(x) |\Delta z|^m dx - \frac{1}{q+1} \|z\|_{q+1}^{q+1} \quad (5.2)$$

ve

$$I(t) = \int_{\Omega} k(x) |\Delta z|^m dx - \|z\|_{q+1}^{q+1} \quad (5.3)$$

olsun. Enerji fonksiyoneli

$$E(t) = \frac{1}{2} \|z_t\|^2 + \frac{1}{m} \int_{\Omega} k(x) |\Delta z|^m dx - \frac{1}{q+1} \|z\|_{q+1}^{q+1} \quad (5.4)$$

dır. Ayrıca Nehari fonksiyonelimiz

$$W = \{z \in \mathcal{D}_0^{2,m}(\Omega), I(z) > 0\} \cup \{0\} \quad (5.5)$$

olsun.

Lemma 5.2.1 $t \geq 0$ için $E(t)$ artmayan bir fonksiyondur. Yani

$$E'(t) = - \left(\|\Delta z_t\|^2 + \|z_t\|_{p+1}^{p+1} \right) \leq 0 \quad (5.6)$$

dır.

İspat. (5.1) denklemini z_t ile çarpıp, Ω bölgesi üzerinde integral alınırsa,

$$\underbrace{\int_{\Omega} z_t z_{tt} dx}_{1.Terim} + \underbrace{\int_{\Omega} z_t \Delta (k(x) |\Delta z|^{m-2} \Delta z) dx}_{2.Terim} + \underbrace{\int_{\Omega} z_t \Delta^2 z_t dx}_{3.Terim} + \underbrace{\int_{\Omega} z_t |z_t|^{p-1} z_t dx}_{4.Terim} = \underbrace{\int_{\Omega} z_t |z|^{q-1} z dx}_{5.Terim}$$

yazılır.

1. Terim:

Basit matematiksel işlemlerin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} z_t z_{tt} dx &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (z_t^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z_t\|^2\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

2. Terim: Green özdeşliği ve sınır değerlerin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} z_t \Delta (k(x) |\Delta z|^{m-2} \Delta z) dx &= \int_{\Omega} z_t \Delta (k(x) |\Delta z|^{m-1}) dx \\ &= \frac{d}{dt} \frac{1}{m} \int_{\Omega} k(x) |\Delta z|^m dx\end{aligned}$$

dır.

3. Terim: Green özdeşliği ve sınır değerlerin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} z_t \Delta^2 z_t dx &= \int_{\Omega} z_t \Delta^2 z_t dx \\ &= \|\Delta z_t\|^2\end{aligned}$$

olur.

4. Terim:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} z_t |z_t|^{p-1} z_t dx &= \int_{\Omega} |z_t|^{p+1} dx \\ &= \|z_t\|_{p+1}^{p+1}\end{aligned}$$

olur.

5. Terim:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} z_t |z|^{q-1} z dx &= \int_{\Omega} z_t |z|^q dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \frac{1}{q+1} |z|^{q+1} dx \\ &= \frac{d}{dt} \frac{1}{q+1} \|z\|_{q+1}^{q+1}\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak tüm terimler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\frac{1}{2} \|z_t\|^2 + \frac{1}{m} \int_{\Omega} k(x) |\Delta z|^m dx - \frac{1}{q+1} \|z\|_{q+1}^{q+1}}_{E(t)} \right) \\ &= - \|\Delta z_t\|^2 - \|z_t\|_{p+1}^{p+1} \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\frac{d}{dt} E(t) = - \|\Delta z_t\|^2 - \|z_t\|_{p+1}^{p+1} \leq 0$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadenin $(0, t)$ aralığında integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \int_0^t E'(\tau) d\tau \leq \int_0^t 0 d\tau, \\ & E(t) - E(0) \leq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $E(t) \leq E(0)$ dır. Burada enerji fonksiyonelinin artmayan olduğunu gösterdik. Ayrıca $t \geq 0$ için

$$E(t) - E(0) = - \int_0^t \|\Delta z_{\tau}\|^2 d\tau - \int_0^t \|z_{\tau}\|_{p+1}^{p+1} d\tau \quad (5.7)$$

dır.

Burada enerji fonksiyoneli

$$E(t) = \frac{1}{2} \|z_t\|^2 + \frac{1}{m} \int_{\Omega} k(x) |\Delta z|^m dx - \frac{1}{q+1} \|z\|_{q+1}^{q+1}$$

şeklindedir.

Lemma 5.2.2 Kabul edelim ki $q+1 > m$ ve

$$\begin{cases} q \geq 3, & n = 1, 2, \\ q = 3 & n = 3 \end{cases} \quad (5.8)$$

olsun. Ayrıca $z_0 \in W, z_1 \in L^2(\Omega)$ için

$$\beta = C^* \left(\frac{m(q+1)}{q+1-m} E(0) \right)^{\frac{q+1-m}{m}} < 1 \quad (5.9)$$

olsun. Bu durumda her $t \geq 0$ için $z \in W$ olur.

İspat. $I(0) > 0$ olduğundan, $z(t)$ nin sürekliliğinden sıfıra yakın t ler için

$$I(t) > 0$$

dır. $T_m > 0$ maksimal zaman olmak üzere (5.3) ifadesi $[0, T_m]$ aralığında sağlanır.

(5.2) ve (5.3) den

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{1}{m} \int_{\Omega} k(x) |\Delta z|^m dx - \frac{1}{q+1} \|z\|_{q+1}^{q+1} \\ &= \frac{1}{q+1} I(t) + \frac{q+1-m}{m(q+1)} \int_{\Omega} k(x) |\Delta z|^m dx \end{aligned} \quad (5.10)$$

elde edilir. $I(t) > 0$ dan

$$J(t) \geq \frac{q+1-m}{m(q+1)} \|z\|_{\mathcal{D}_0^{2,m}(\Omega)}^m \quad (5.11)$$

olur. (5.4), (5.11) ve Lemma 5.2.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|z\|_{\mathcal{D}_0^{2,m}(\Omega)}^m &\leq \frac{m(q+1)}{q+1-m} J(t) \\ &\leq \frac{m(q+1)}{q+1-m} E(t) \\ &\leq \frac{m(q+1)}{q+1-m} E(0) \end{aligned} \quad (5.12)$$

elde edilir. Sobolev-Poincaré eşitsizliği ve (5.12) den

$$\begin{aligned} \|z\|_{q+1}^{q+1} &\leq C^* \|z\|_{\mathcal{D}_0^{2,m}(\Omega)}^{q+1} \\ &= C^* \|z\|_{\mathcal{D}_0^{2,m}(\Omega)}^{q+1-m} \|z\|_{\mathcal{D}_0^{2,m}(\Omega)}^m \\ &\leq C^* \left(\frac{m(q+1)}{q+1-m} E(0) \right)^{\frac{q+1-m}{m}} \|z\|_{\mathcal{D}_0^{2,m}(\Omega)}^m \\ &= \beta \|z\|_{\mathcal{D}_0^{2,m}(\Omega)}^m \\ &< \|z\|_{\mathcal{D}_0^{2,m}(\Omega)}^m \end{aligned} \quad (5.13)$$

olur. Böylece (5.3) ten tüm $t \in [0, T_m]$ için $I(t) > 0$ olur. Benzer işlemler tekrarlanılırsa T_m, T ye genişletilebilir. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 5.2.3 Lemma 5.2.2 deki koşullar altında $\eta = 1 - \beta$ için

$$\|z\|_{q+1}^{q+1} \leq (1 - \eta) \|z\|_{\mathcal{D}_0^{2,m}(\Omega)}^m$$

şeklinde olur.

İspat. (5.13) ten

$$\|z\|_{q+1}^{q+1} \leq \beta \|z\|_{\mathcal{D}_0^{2,m}(\Omega)}^m$$

dır. $\eta = 1 - \beta$ yazılırsa istenen elde edilir.

Not. Lemma 5.2.3 ten

$$\|z\|_{\mathcal{D}_0^{2,m}(\Omega)}^m \leq \frac{1}{\eta} I(t) \quad (5.14)$$

yazılabilir.

Teorem 5.2.4 $z_0 \in W$ ve (5.9) sağlansın. Bu durumda (5.1) probleminin çözümü $2 \leq m < q+1 < \frac{nm}{n-m+\gamma} = m_\gamma^*$, $n > m$ için globaldir.

İspat. $\|z_t\|^2 + \|z\|_{\mathcal{D}_0^{2,m}(\Omega)}^m$ ifadesinin t den bağımsız olarak sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir. Bu da (5.3) ve (5.4) ü kullanarak elde edilir. $I(t) \geq 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} E(0) \geq E(t) &= \frac{1}{2} \|z_t\|^2 + \frac{1}{m} \int_{\Omega} k(x) |\Delta z|^m dx - \frac{1}{q+1} \|z\|_{q+1}^{q+1} \\ &= \frac{1}{2} \|z_t\|^2 + \frac{q+1-m}{m(q+1)} \int_{\Omega} k(x) |\Delta z|^m dx + \frac{1}{q+1} I(t) \\ &\geq \frac{1}{2} \|z_t\|^2 + \frac{q+1-m}{m(q+1)} \|z\|_{\mathcal{D}_0^{2,m}(\Omega)}^m \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\|z_t\|^2 + \|z\|_{\mathcal{D}_0^{2,m}(\Omega)}^m \leq CE(0)$$

dır. Burada $C = \max \left\{ 2, \frac{m(q+1)}{q+1-m} \right\}$ dır. Böylece çözüm globaldir.

5.3 Enerjinin Azalması

Teorem 5.3.1 (5.9) koşulu sağlansın ve $z_0 \in W$, $z_1 \in L^2(\Omega)$ olsun. $2 \leq m < q+1 < \frac{nm}{n-m+\gamma}$, $n > m$ ve $\beta = C^* \left(\frac{m(q+1)}{q+1-m} E(0) \right)^{\frac{q+1-m}{m}}$ olsun. Bu durumda

$$E(t) = \begin{cases} E(0) e^{-w_0[t-1]^+}, & p = 1, \\ \left(E(0)^{-\lambda} + C_7^{-1} \lambda [t-1]^+ \right)^{-\frac{1}{\lambda}}, & p > 1 \end{cases}$$

dır. Burada w_0 , λ ve C_7 daha sonra tanımlanacak pozitif sabitlerdir.

İspat. (5.6) ifadesinin $t > 0$ için $[t, t+1]$ aralığında integrali alınır

$$E(t) - E(t+1) = D^{p+1}(t) \quad (5.15)$$

elde edilir. Burada

$$D^{p+1}(t) = \int_t^{t+1} \left(\|\Delta z_\tau\|^2 + \|z_\tau\|_{p+1}^{p+1} \right) d\tau \quad (5.16)$$

dır. Ayrıca (5.16) ve Hölder eşitsizliğinden

$$\int_t^{t+1} \int_\Omega |z_t|^2 dx dt \leq |\Omega|^{\frac{p+1}{p+2}} D^2(t) = CD^2(t) \quad (5.17)$$

olur. Buradan $t_1 \in [t, t + \frac{1}{4}]$ ve $t_2 \in [t + \frac{3}{4}, t + 1]$ mevcuttur. Öyle ki

$$\|z_t(t_i)\| \leq CD(t), \quad i = 1, 2 \quad (5.18)$$

dır. (5.1) denklemini z ile çarpıp $\Omega \times [t_1, t_2]$ üzerinde integral alınırsa

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt = & - \left[\int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega z z_{tt} dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega \Delta z \Delta z_t dx dt \right. \\ & \left. + \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega |z_t|^{p-1} z_t z dx dt \right] \end{aligned} \quad (5.19)$$

elde edilir. (5.19) un sağ tarafındaki ilk terime kısmi integral sonra Hölder eşitsizliği ve ikinci terime de Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt \leq & \|z_t(t_1)\| \|z(t_1)\| + \|z_t(t_2)\| \|z(t_2)\| \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \|z_t(t)\|^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} \|\Delta z_t\| \|\Delta z\| dt \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega |z_t|^{p-1} z_t z dx dt \end{aligned} \quad (5.20)$$

elde edilir. Şimdi, amacımız eşitsizliğin sağ tarafındaki son terim için kestirim elde etmektir. Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega |z_t|^{p-1} z_t z dx dt \leq \int_{t_1}^{t_2} \|z_t(t)\|_{p+1}^p \|z(t)\|_{p+1} dt \quad (5.21)$$

elde edilir. Sobolev- Poincaré ve (5.12) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \|z_t(t)\|_{p+1}^p \|z(t)\|_{p+1} dt & \leq C_* \int_{t_1}^{t_2} \|z_t\|_{p+1}^p \|z\|_{\mathcal{D}_0^{2,m}(\Omega)} dt \\ & \leq C_* \int_{t_1}^{t_2} \|z_t\|_{p+1}^p \|z\|_{\mathcal{D}_0^{2,m}(\Omega)}^m dt \\ & \leq C_* \left(\frac{m(q+1)}{q+1-m} \right)^{\frac{1}{m}} \int_{t_1}^{t_2} \|z_t\|_{p+1}^p E^{\frac{1}{m}}(s) dt \\ & \leq C_* \left(\frac{m(q+1)}{q+1-m} \right)^{\frac{1}{m}} \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{m}}(s) D^p(t) \end{aligned} \quad (5.22)$$

bulunur. (5.20) nin sağ tarafının dördüncü terimine gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned}
\int_t^{t_2} \|\Delta z_t(t)\| \|\Delta z(t)\| dt &\leq C_* \int_t^{t+1} \|\Delta z_t\| \|z\|_{\mathcal{D}_0^{2,m}(\Omega)}^m dt \\
&\leq C_* \left(\frac{m(q+1)}{q+1-m} \right)^{\frac{1}{m}} \int_t^{t_2} \|\Delta z_t\| E^{\frac{1}{m}}(s) dt \\
&\leq C_* \left(\frac{m(q+1)}{q+1-m} \right)^{\frac{1}{m}} \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{m}}(s) \int_t^{t_2} \|\Delta z_t\| dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\int_t^{t_2} \|\Delta z_t\| dt &\leq \left(\int_t^{t+1} 1 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_t^{t_2} \|\Delta z_t\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq k D(t)
\end{aligned}$$

dır. Böylece

$$\int_t^{t_2} \|\Delta z_t(t)\| \|\Delta z(t)\| dt \leq k C_* \left(\frac{m(q+1)}{q+1-m} \right)^{\frac{1}{m}} \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{m}}(s) D^p(t) \quad (5.23)$$

elde edilir. (5.6), (5.12) ve Sobolev-Poincaré eşitsizliğinden

$$\|z_t(t_i)\| \|z(t_i)\| \leq C_1 D(t) \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{m}}(s) \quad (5.24)$$

olur. Burada $C_1 = k C_* \left(\frac{m(q+1)}{q+1-m} \right)^{\frac{1}{m}}$ dır. Sonra (5.20)-(5.24) ten

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} I(t) dt &\leq C_1 \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{m}}(s) D(t) + D^2(t) \\
&\quad + k C_* \left(\frac{m(q+1)}{q+1-m} \right)^{\frac{1}{m}} \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{m}}(s) D(t) \\
&\quad + C_* \left(\frac{m(q+1)}{q+1-m} \right)^{\frac{1}{m}} \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{m}}(s) D^p(t)
\end{aligned} \quad (5.25)$$

olur. Diğer taraftan (5.3), (5.4) ve (5.14) ten

$$E(t) \leq \frac{1}{2} \|z_t\|^2 + C_3 I(t) \quad (5.26)$$

elde edilir. Burada $C_3 = \frac{1}{\eta} \frac{q+1-m}{m(q+1)} + \frac{1}{q+1}$ dır.

Şimdi (5.26) nın $[t_1, t_2]$ aralığında integrali alınırsa

$$\int_{t_1}^{t_2} E(t) dt \leq \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \|z_t\|^2 dt + C_3 \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt \quad (5.27)$$

elde edilir. Sonra (5.25) ve (5.27) den

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} E(t) dt &\leq \frac{1}{2} C_{\Omega} D^2(t) + C_3 \left[C_1 D(t) \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{m}}(s) + D^2(t) \right. \\ &\quad + k C_* \left(\frac{m(q+1)}{q+1-m} \right)^{\frac{1}{m}} \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{m}}(s) D(t) \\ &\quad \left. + k C_* \left(\frac{m(q+1)}{q+1-m} \right)^{\frac{1}{m}} \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{m}}(s) D^p(t) \right] \end{aligned} \quad (5.28)$$

elde edilir. $\frac{d}{dt} E(t)$ nin $[t, t_2]$ aralığında integrali alınır

$$E(t) = E(t_2) + \int_t^{t_2} \left(\|\Delta z_{\tau}\|^2 + \|z_{\tau}\|_{p+1}^{p+1} \right) d\tau \quad (5.29)$$

elde edilir. Ayrıca $t_2 - t_1 \geq \frac{1}{2}$ olduğundan

$$\int_{t_1}^{t_2} E(t) dt \geq (t_2 - t_1) E(t_2) \geq \frac{1}{2} E(t_2)$$

elde edilir. Bu da

$$E(t_2) \leq 2 \int_{t_1}^{t_2} E(t) dt \quad (5.30)$$

dır. Sonuç olarak (5.15), (5.28)-(5.30) kullanılarak ve $t_1, t_2 \in [t, t+1]$ den

$$\begin{aligned} E(t) &\leq 2 \int_{t_1}^{t_2} E(t) dt + \int_t^{t+1} \left(\|\Delta z_{\tau}\|^2 + \|z_{\tau}\|_{p+1}^{p+1} \right) d\tau \\ &= 2 \int_{t_1}^{t_2} E(t) dt + D^{p+1}(t) \end{aligned} \quad (5.31)$$

elde edilir. Sonra, (5.28) den

$$E(t) \leq \left(\frac{1}{2} C_{\Omega} + C_3 C_2 \right) D^2(t) + D^{p+1}(t) + C_4 [D(t) + D^p(t)] E^{\frac{1}{m}}(t) \quad (5.32)$$

elde edilir. Young eşitsizliğinden,

$$E(t) \leq C_5 \left[D^2(t) + D^{p+1}(t) + D^{\frac{m}{m-1}}(t) + D^{\frac{m}{m-1}p}(t) \right] \quad (5.33)$$

elde edilir. $E(t)$ artmayan bir fonksiyondur ve $[0, \infty)$ üzerinde $E(t) \geq 0$ dır. Buradan

$$D^{p+1}(t) = E(t) - E(t+1) \leq E(0) \quad (5.34)$$

elde edilir. Daha sonrasında

$$D(t) \leq E^{\frac{1}{p+1}}(0) \quad (5.35)$$

dır. Buradan,

$$\begin{aligned} E(t) &\leq C_5 \left[D^2(t) + D^{p+1}(t) + D^{\frac{m}{m-1}}(t) + D^{\frac{m}{m-1}p}(t) \right] \\ &\leq C_5 D^{\frac{m}{m-1}}(t) \left[D^{\frac{m-2}{m-1}}(t) - D^{p-\frac{1}{m-1}}(t) + 1 + D^{\frac{m(p-1)}{m-1}}(t) \right] \\ &= C_6 D^{\frac{m}{m-1}}(t) \end{aligned}$$

dır. Buradan

$$E^{1+\frac{(m-1)p-1}{m}}(t) \leq C_7 D^{p+1}(t)$$

elde edilir.

1. Durum: $p = 1$ ve $m = 2$ olduğunda (5.33) ten

$$E(t) \leq C_7 D^2(t) = C_7 [E(t) - E(t+1)]$$

olur. Nakao eşitsizliğinden

$$E(t) \leq E(0) e^{-w_0[t-1]^+}$$

elde edilir. Burada $w_0 = \ln\left(\frac{C_7}{C_7-1}\right)$ dır.

2. Durum: $(m-1)p > 1$ olduğunda (5.33), (5.4) ve Nakao eşitsizliğinden

$$E(t) \leq \left(E(0)^{-\lambda} + C_7^{-1} \lambda [t-1]^+ \right)^{-\frac{1}{\lambda}},$$

elde edilir. Burada $\lambda = \frac{(m-1)p-1}{m}$ dır.

5.4 Çözümün Patlaması

Bu kısımda (5.1) probleminin $p = 1$ için çözümünün patlaması ile ilgileneceğiz.

Eğer (5.1) probleminde $p = 1$ alınırsa

$$\begin{cases} z_{tt} + \Delta(k(x)|\Delta z|^{m-2}\Delta z) + \Delta^2 z_t + z_t = |z|^{q-1}z, & x \in \Omega, t > 0, \\ z(x, t) = \Delta z(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ z(x, 0) = z_0(x), \quad z_t(x, 0) = z_1(x), & x \in \Omega \end{cases} \quad (5.36)$$

denklemini elde edilir.

Tanım 5.4.1 (5.36) probleminin z çözümü için

$$\lim_{t \rightarrow T^*-} \left[\int_{\Omega} z^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} (|z|^2 + |\Delta z|^2) dx d\tau \right] = \infty \quad (5.37)$$

şartını sağlayan sonlu bir T^* zamanı varsa buna çözümün patlaması denir.

$t \geq 0$ için

$$\mathcal{B}(t) = \int_{\Omega} z^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} (|z|^2 + |\Delta z|^2) dx d\tau \quad (5.38)$$

olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

Lemma 5.4.2 Kabul edelim ki $m < q + 1 < nm$, $n > m$, $p = 1$ sağlansın ve $m - 2 \leq 4\delta \leq q - 1$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathcal{B}''(t) \geq & 4(\delta + 1) \int_{\Omega} z_t^2 dx - 4(2\delta + 1) E(0) \\ & + 4(2\delta + 1) \int_0^t (\|z_{\tau}\|^2 + \|\Delta z_{\tau}\|^2) d\tau \end{aligned} \quad (5.39)$$

dır.

İspat. (5.37) ün birinci ve ikinci türevleri sırasıyla

$$\begin{aligned} \mathcal{B}'(t) &= 2 \int_{\Omega} z z_t dx + \int_{\Omega} |z|^2 dx + \int_{\Omega} |\Delta z|^2 dx \\ &= 2 \int_{\Omega} z z_t dx + \|z\|^2 + \|\Delta z\|^2 \end{aligned}$$

ve

$$\mathcal{B}''(t) = 2 \int_{\Omega} z_t^2 dx + 2 \int_{\Omega} z z_{tt} dx + 2 \int_{\Omega} |z| z_t dx + 2 \int_{\Omega} \Delta z \Delta z_t dx$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} \mathcal{B}''(t) &= 2 \int_{\Omega} z_t^2 dx + 2 \int_{\Omega} |z| z_t dx + 2 \int_{\Omega} \Delta z \Delta z_t dx \\ &\quad + 2 \int_{\Omega} (-\Delta(k(x) |\Delta z|^{m-2} \Delta z) - \Delta^2 z_t - z_t + |z|^{q-1} z) z dx \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} \mathcal{B}''(t) &= 2 \int_{\Omega} z_t^2 dx + 2 \int_{\Omega} |z| z_t dx + 2 \int_{\Omega} \Delta z \Delta z_t dx \\ &\quad + 2 \int_{\Omega} (-\Delta(k(x) |\Delta z|^{m-1})) z dx \\ &\quad - 2 \int_{\Omega} z \Delta^2 z_t dx - 2 \int_{\Omega} z z_t dx + 2 \int_{\Omega} |z|^{q+1} dx \\ &= 2 \|z_t\|^2 - 2 \int_{\Omega} k(x) |\Delta z|^m dx + 2 \|z\|_{q+1}^{q+1} \end{aligned} \quad (5.40)$$

elde edilir. Diğer taraftan (5.6) denkleminde

$$E'(t) = -\|\Delta z_t\|^2 - \|z_t\|_{p+1}^{p+1}$$

dır. Bu ifadenin 0 dan t ye integrali alınırsa

$$\begin{aligned} \int_0^t E'(\tau) d\tau &= - \int_0^t \left(\|\Delta z_\tau\|^2 + \|z_\tau\|_{p+1}^{p+1} \right) d\tau, \\ E(t) - E(0) &= - \int_0^t \left(\|\Delta z_\tau\|^2 + \|z_\tau\|_{p+1}^{p+1} \right) d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(0) &= E(t) + \int_0^t \left(\|\Delta z_\tau\|^2 + \|z_\tau\|_{p+1}^{p+1} \right) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \|z_t\|^2 + \frac{1}{m} \int_\Omega k(x) |\Delta z|^m dx - \frac{1}{q+1} \|z\|_{q+1}^{q+1} \\ &\quad + \int_0^t \left(\|\Delta z_\tau\|^2 + \|z_\tau\|_{p+1}^{p+1} \right) d\tau \end{aligned} \quad (5.41)$$

olur. Şimdi $4(2\delta + 1) E(0)$ ifadesini bulalım

$$\begin{aligned} 4(2\delta + 1) E(0) &= 4(2\delta + 1) \left(\frac{1}{2} \|z_t\|^2 \right) + 4(2\delta + 1) \int_0^t \left(\|\Delta z_\tau\|^2 + \|z_\tau\|_{p+1}^{p+1} \right) d\tau \\ &\quad + \frac{4(2\delta + 1)}{m} \int_\Omega k(x) |\Delta z|^m dx - \frac{4(2\delta + 1)}{q+1} \|z\|_{q+1}^{q+1} \\ &= 2(2\delta + 1) (\|z_t\|^2) + 4(2\delta + 1) \int_0^t \left(\|\Delta z_\tau\|^2 + \|z_\tau\|_{p+1}^{p+1} \right) d\tau \\ &\quad + \frac{4(2\delta + 1)}{m} \int_\Omega k(x) |\Delta z|^m dx - \frac{4(2\delta + 1)}{q+1} \|z\|_{q+1}^{q+1} \end{aligned} \quad (5.42)$$

olur. (5.40) denkleminde $4(2\delta + 1) E(0)$ ifadesini ekleyip-çıkarırsak

$$\begin{aligned} \mathcal{B}''(t) &= (-8\delta - 4) E(0) + (8\delta + 4) E(0) \\ &\quad + 2 \|z_t\|^2 - 2 \int_\Omega k(x) |\Delta z|^m dx + 2 \|z\|_{q+1}^{q+1} \end{aligned}$$

olur. (5.41) ifadesi göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}''(t) &= (-8\delta - 4) E(0) + 2(2\delta + 1) (\|z_t\|^2) \\
&\quad + 4(2\delta + 1) \int_0^t (\|\Delta z_\tau\|^2 + \|z_\tau\|_{p+1}^{p+1}) d\tau \\
&\quad + \frac{4(2\delta + 1)}{m} \int_\Omega k(x) |\Delta z|^m dx - \frac{4(2\delta + 1)}{q+1} \|z\|_{q+1}^{q+1} \\
&\quad + 2\|z_t\|^2 - 2 \int_\Omega k(x) |\Delta z|^m dx + 2\|z\|_{q+1}^{q+1} \\
&= (-8\delta - 4) E(0) + (4\delta + 4) \|z_t\|^2 \\
&\quad + 4(2\delta + 1) \int_0^t (\|\Delta z_\tau\|^2 + \|z_\tau\|_{p+1}^{p+1}) d\tau \\
&\quad + \left(\frac{8\delta + 4}{m} - 2 \right) \int_\Omega k(x) |\Delta z|^m dx + \left(2 - \frac{4(2\delta + 1)}{q+1} \right) \|z\|_{q+1}^{q+1}
\end{aligned}$$

yazılır. Lemma 5.4.2 deki kabulümüzden $m - 2 \leq 4\delta \leq q - 1$ ve $m \geq 2$ olduğundan

$$\begin{cases} 4\delta \geq 0, \\ \frac{8\delta + 4}{m} - 2 \geq 0, \\ 2 - \frac{4(2\delta + 1)}{q+1} \geq 0 \end{cases}$$

olur. Böylece (5.39) elde edilir.

Lemma 5.4.3 $m < q + 1 < \frac{mn}{n-m}$, $n > m$ olsun ve aşağıdaki durumlardan biri sağlansın:

i. $E(0) < 0$ ve $\int_\Omega z_0 z_1 dx > 0$,

ii. $E(0) = 0$ ve $\int_\Omega z_0 z_1 dx > 0$

olsun. Bu durumda $t > t^*$ için $\mathcal{B}'(t) > \|z_0\|^2$ bulunur.

Burada, (i) durumunda $t_0 = t^*$ ve (ii) durumunda da $t_0 = 0$ dir. Burada t^* (5.42) de tanımlanmıştır.

İspat.

i. Eğer $E(0) < 0$ ise, (5.39) dan

$$\mathcal{B}''(t) \geq -4(1 + 2\delta) E(0)$$

olur. Burada 0 dan t ye integral alınırsa

$$\int_0^t \mathcal{B}''(\tau) d\tau \geq \int_0^t -4(1 + 2\delta) E(0) d\tau,$$

$$\mathcal{B}'(t) - \mathcal{B}'(0) \geq -4(1 + 2\delta) E(0) t,$$

$$\mathcal{B}'(t) \geq \mathcal{B}'(0) - 4(1 + 2\delta) E(0) t \tag{5.43}$$

olur.

$$\mathcal{B}'(t) = 2 \int_{\Omega} z z_t dx + \|z\|^2 + \|\Delta z\|^2$$

ifadesinde t yerine 0 yazılırsa

$$\mathcal{B}'(0) = 2 \int_{\Omega} z_0 z_1 dx + \|z_0\|^2 + \|\Delta z_0\|^2$$

elde edilir. Burada $\mathcal{B}'(0)$ ifadesi (5.43) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\mathcal{B}'(t) \geq 2 \int_{\Omega} z_0 z_1 dx + \|z_0\|^2 + \|\Delta z_0\|^2 - 4(1 + 2\delta) E(0) t$$

olur. Böylece $E(0) < 0$ ve $\int_{\Omega} z_0 z_1 dx > 0$ olduğundan, $t > t^*$ için

$$\mathcal{B}'(t) \geq \|z_0\|^2 + \|\Delta z_0\|^2$$

bulunur. Bu ifade ve (5.43) ten

$$4(1 + 2\delta) E(0) t_1 = \mathcal{B}'(0) - \|z_0\|^2 - \|\Delta z_0\|^2$$

olacak şekilde t_1 vardır. Bu eşitlikten t_1 çekilirse

$$t_1 = \frac{\mathcal{B}'(0) - \|z_0\|^2 - \|\Delta z_0\|^2}{4(1 + 2\delta) E(0)}$$

olur. Burada

$$t^* = \max \left\{ 0, \frac{\mathcal{B}'(0) - \|z_0\|^2 - \|\Delta z_0\|^2}{(8\delta + 4) E(0)} \right\}$$

dır.

ii. Eğer $E(0) = 0$ ve $\int_{\Omega} z_0 z_1 dx > 0$ ise, bu durumda (5.39) dan $t \geq 0$ için $\mathcal{B}'' \geq 0$ dır.

Buradan integral alınır

$$\mathcal{B}'(t) \geq \mathcal{B}'(0)$$

olur. Ayrıca

$$\mathcal{B}'(t) = 2 \int_{\Omega} z z_t dx + \|z\|^2 + \|\Delta z\|^2$$

ve

$$\mathcal{B}'(0) = 2 \int_{\Omega} z_0 z_1 dx + \|z_0\|^2 + \|\Delta z_0\|^2$$

elde ederiz. Böylece $t \geq 0$ için $\int_{\Omega} z_0 z_1 dx > 0$ kabulünden

$$\mathcal{B}'(t) \geq \|z_0\|^2 + \|\Delta z_0\|^2$$

olur.

Teorem 5.4.4 Kabul edelim ki $m < q + 1 < \frac{mn}{n-m}$ ve $m < n$ olsun. Aşağıdaki durumlarda

i. $E(0) < 0$ ve $\int_{\Omega} z_0 z_1 dx > 0$,

ii. $E(0) = 0$ ve $\int_{\Omega} z_0 z_1 dx > 0$ sağlandığında

z çözümü (5.37) anlamında sonlu bir T^* zamanında patlar.

i. durumunda

$$T^* \leq t_0 - \frac{\mathcal{L}(t_0)}{\mathcal{L}'(t_0)} \quad (5.44)$$

dır. Ayrıca, eğer $\mathcal{L}(t_0) < \min \left\{ 1, \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}} \right\}$ ise,

$$T^* \leq t_0 + \frac{1}{\sqrt{-\beta}} \ln \frac{\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}}{\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}} - \mathcal{L}(t_0)} \quad (5.45)$$

dır. Burada

$$\alpha = \delta^2 \mathcal{L}^{2+\frac{2}{\delta}}(t_0) \left[(\mathcal{F}'(t_0))^2 - 8E(0) \mathcal{L}^{-\frac{1}{\delta}}(t_0) \right] > 0, \quad (5.46)$$

$$\beta = 8\delta^2 E(0) \quad (5.47)$$

dır.

ii. durumunda

$$T^* \leq t_0 - \frac{\mathcal{L}(t_0)}{\mathcal{L}'(t_0)} \quad (5.48)$$

dır.

İspat. $t \in [0, T_1]$ için

$$\mathcal{L}(t) = [\mathcal{B}(t) + (T_1 - t) \|z_0\|^2]^{-\delta} \quad (5.49)$$

olsun. Burada $T_1 > 0$ daha sonra belirlenecek olan bir sabittir. Buradan

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(t) &= -\delta [\mathcal{B}(t) + (T_1 - t) \|z_0\|^2]^{-\delta-1} [\mathcal{B}'(t) - \|z_0\|^2] \\ &= -\delta \mathcal{L}^{1+\frac{1}{\delta}}(t) [\mathcal{B}'(t) - \|z_0\|^2] \end{aligned} \quad (5.50)$$

ve

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}''(t) &= -\delta(-\delta-1) [\mathcal{B}(t) + (T_1 - t) \|z_0\|^2]^{-\delta-2} [\mathcal{B}'(t) - \|z_0\|^2]^2 \\
&\quad - \delta [\mathcal{B}(t) + (T_1 - t) \|z_0\|^2]^{-\delta-1} \mathcal{B}''(t) \\
&= -\delta \mathcal{L}^{1+\frac{2}{\delta}}(t) \mathcal{B}''(t) [\mathcal{B}(t) + (T_1 - t) \|z_0\|^2] \\
&\quad + \delta \mathcal{L}^{1+\frac{2}{\delta}}(t) (1+\delta) [\mathcal{B}'(t) - \|z_0\|^2]^2,
\end{aligned} \tag{5.51}$$

$$\mathcal{L}''(t) = -\delta \mathcal{L}^{1+\frac{2}{\delta}}(t) \mathcal{C}(t) \tag{5.52}$$

dır. Burada

$$\mathcal{C}(t) = \mathcal{B}''(t) [\mathcal{B}(t) + (T_1 - t) \|z_0\|^2] - (1+\delta) [\mathcal{B}'(t) - \|z_0\|^2]^2 \tag{5.53}$$

dır. Hesaplamalarda kolaylık olsun diye

$$\begin{aligned}
A_z &= \int_{\Omega} z^2 dx, & B_z &= \int_{\Omega} z_t^2 dx, \\
C_z &= \int_0^t \|z\|^2 dt, & D_z &= \int_0^t \|z_t\|^2 dt
\end{aligned}$$

gösterimlerini kullanalım.

Not.

$$\begin{aligned}
2 \int_0^t \int_{\Omega} z z_t dx dt &= \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\partial z^2}{\partial t} dx dt \\
&= \int_{\Omega} z^2 dx \Big|_0^t \\
&= \|z\|^2 - \|z_0\|^2
\end{aligned}$$

dır. Buradan

$$\|z\|^2 = 2 \int_0^t \int_{\Omega} z z_t dx dt + \|z_0\|^2$$

elde edilir. (5.40) ifadesinde yukarıda ifade ettiğimiz Not ve Hölder eşitsizliği kul-

lanılırsa

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}'(t) &= 2 \int_{\Omega} z z_t dx + \|z\|^2 + \|\Delta z\|^2 \\
&= 2 \int_{\Omega} z z_t dx + 2 \int_0^t \int_{\Omega} z z_{\tau} dx d\tau + \|z_0\|^2 \\
&= 2 \left(\int_{\Omega} z^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} z_t^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \left(\int_0^t \int_{\Omega} z^2 dx d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_{\Omega} z_{\tau}^2 dx d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \|z_0\|^2 \\
&= 2 \left(\int_{\Omega} z^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} z_t^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \left(\int_0^t \|z\|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \|z_{\tau}\|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \|z_0\|^2 \\
&\leq 2 \left((A_z B_z)^{\frac{1}{2}} + (C_z D_z)^{\frac{1}{2}} \right) + \|z_0\|^2 \\
&= 2 \left(\sqrt{A_z B_z} + \sqrt{C_z D_z} \right) + \|z_0\|^2 \tag{5.54}
\end{aligned}$$

olur. Eğer (i) durumu sağlanıyorsa ve Lemma 5.4.2 den

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}''(t) &\geq 4(\delta + 1) \int_{\Omega} z_t^2 dx - 4(2\delta + 1) E(0) + 4(2\delta + 1) \int_0^t (\|z_{\tau}\|^2 + \|\Delta z_{\tau}\|^2) d\tau \\
&\geq -4(2\delta + 1) E(0) + 4(\delta + 1) \left(\int_{\Omega} z_t^2 dx + \int_0^t (\|z_{\tau}\|^2 + \|\Delta z_{\tau}\|^2) d\tau \right) \\
&\geq -4(2\delta + 1) E(0) + 4(\delta + 1) \left(\int_{\Omega} z_t^2 dx + \int_0^t \|z_{\tau}\|^2 d\tau \right) \\
&\geq -4(2\delta + 1) E(0) + 4(\delta + 1) (B_z + D_z) \tag{5.55}
\end{aligned}$$

yazılır. Böylece (5.49) ve (5.53)-(5.55) ten

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(t) &= \mathcal{B}''(t) [\mathcal{B}(t) + (T_1 - t) \|z_0\|^2] - (1 + \delta) [\mathcal{B}'(t) - \|z_0\|^2]^2 \\
&\geq \left[-4(2\delta + 1) E(0) + 4(\delta + 1) \left(\int_{\Omega} z_t^2 dx + \int_0^t \|z_{\tau}\|^2 d\tau \right) \right] \mathcal{L}^{-\frac{1}{\delta}}(t) \\
&\quad - (1 + \delta) \left[\begin{aligned} &2 \left(\int_{\Omega} z^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} z_t^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ 2 \left(\int_0^t \|z\|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \|z_{\tau}\|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right]^2 \\
&\geq \left[-4(2\delta + 1) E(0) + 4(\delta + 1) \left(\int_{\Omega} z_t^2 dx + \int_0^t \|z_{\tau}\|^2 d\tau \right) \right] \mathcal{L}^{-\frac{1}{\delta}}(t) \\
&\quad - 4(1 + \delta) \left[\sqrt{\int_{\Omega} z^2 dx \int_{\Omega} z_t^2 dx} + \sqrt{\int_0^t \|z\|^2 d\tau \int_0^t \|z_{\tau}\|^2 d\tau} \right]^2
\end{aligned}$$

dır. Yani

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(t) &\geq [-4(2\delta + 1) E(0) + 4(\delta + 1) (B_z + D_z)] \mathcal{L}^{-\frac{1}{\delta}}(t) \\
&\quad - (4\delta + 4) \left[\sqrt{A_z B_z} + \sqrt{C_z D_z} \right]^2
\end{aligned}$$

yazılabilir. (5.38) $\mathcal{B}(t)$ den

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(t) &= \int_{\Omega} z^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} (|z|^2 + |\Delta z|^2) dx d\tau \\ &\geq \int_{\Omega} z^2 dx + \int_{\Omega} \int_0^t z^2 d\tau dx \\ &= A_z + C_z\end{aligned}$$

dır. Yukarıdaki eşitsizlik ve (5.49) dan

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(t) &\geq -4(2\delta + 1) E(0) \mathcal{L}^{-\frac{1}{\delta}}(t) \\ &\quad + 4(\delta + 1) \left(\int_{\Omega} z_t^2 dx + \int_0^t \|z_{\tau}\|^2 d\tau \right) (T_1 - t) \|z_0\|^2 + \mathcal{Q}(t)\end{aligned}$$

dir. Yani

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(t) &\geq (-4 - 8\delta) E(0) \mathcal{L}^{-\frac{1}{\delta}}(t) \\ &\quad + 4(1 + \delta) [(B_z + D_z) (T_1 - t) \|z_0\|^2 + \mathcal{Q}(t)]\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(t) &= \left(\int_{\Omega} z_t^2 dx + \int_0^t \|z_{\tau}\|^2 d\tau \right) \left(\int_{\Omega} z^2 dx + \int_0^t \|z\|^2 d\tau \right) \\ &\quad - \left[\sqrt{\int_{\Omega} z^2 dx \int_{\Omega} z_t^2 dx} + \sqrt{\int_0^t \|z\|^2 d\tau \int_0^t \|z_{\tau}\|^2 d\tau} \right]^2\end{aligned}$$

olur. Yani

$$\mathcal{Q}(t) = (B_z + D_z) (A_z + C_z) - \left(\sqrt{B_z A_z} + \sqrt{C_z D_z} \right)^2$$

olur. $a, b, c, d \geq 0$ olmak üzere

$$(ab + cd)^2 \leq (a^2 + c^2) (b^2 + d^2)$$

formundaki Schwarz eşitsizliğinden $\mathcal{Q}(t)$ negatif değildir. Böylece $t \geq t_0$ için

$$\mathcal{C}(t) \geq (-4 - 8\delta) E(0) \mathcal{L}^{-\frac{1}{\delta}}(t) \quad (5.56)$$

dır. Ayrıca, (5.52) ve (5.56) dan

$$\begin{aligned}\mathcal{L}''(t) &\leq -\delta \mathcal{L}^{1+\frac{2}{\delta}}(t) \mathcal{C}(t) \\ &\leq -\delta \mathcal{L}^{1+\frac{2}{\delta}}(t) (-4 - 8\delta) E(0) \mathcal{L}^{-\frac{1}{\delta}}(t) \\ &= 4\delta (1 + 2\delta) E(0) \mathcal{L}^{1+\frac{1}{\delta}}(t)\end{aligned} \quad (5.57)$$

dır. (5.50) ve Lemma 5.4.3 ten, $t \geq t_0$ için $\mathcal{L}'(t) < 0$ olduğunu biliyoruz. (5.57) yi $\mathcal{L}'(t)$ ile çarpıp t_0 dan t ye integral alırsak, $t \geq t_0$ için

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \mathcal{L}'(t) \mathcal{L}''(t) dt &\geq \int_{t_0}^t 4\delta(1+2\delta) E(0) \mathcal{L}^{1+\frac{1}{\delta}}(t) \mathcal{L}'(t) dt, \\ \frac{\mathcal{L}'(t)}{2} \Big|_{t_0}^t &\geq 4\delta^2 E(0) \mathcal{L}^{2+\frac{1}{\delta}}(t) \Big|_{t_0}^t, \\ \frac{\mathcal{L}'^2(t) - \mathcal{L}'^2(t_0)}{2} &\geq 4\delta^2 E(0) \left(\mathcal{L}^{2+\frac{1}{\delta}}(t) - \mathcal{L}^{2+\frac{1}{\delta}}(t_0) \right), \\ (\mathcal{L}'^2(t) - \mathcal{L}'^2(t_0)) &\geq 8\delta^2 E(0) \mathcal{L}^{2+\frac{1}{\delta}}(t) - 8\delta^2 E(0) \mathcal{L}^{2+\frac{1}{\delta}}(t_0) \end{aligned}$$

den

$$\mathcal{L}'^2(t) \geq 8\delta^2 E(0) \mathcal{L}^{2+\frac{1}{\delta}}(t) - 8\delta^2 E(0) \mathcal{L}^{2+\frac{1}{\delta}}(t_0) + \mathcal{L}'^2(t_0)$$

olur. Bu ifade

$$\mathcal{L}'^2(t) \geq \alpha + \beta \mathcal{L}^{2+\frac{1}{\delta}}(t),$$

şeklinde yazılabilir. Burada α ve β sırasıyla (5.46) ve (5.47) deki gibidir.

Böylece Lemma 5.1.3 ten

$$\lim_{t \rightarrow T^{*-}} \mathcal{L}(t) = 0$$

şartını sağlayan sonlu bir T^* zamanı vardır ki T^* ın üst sınırları $E(0)$ ın işaretine göre belirlenir.

6. TEKİL POTANSİYELE SAHİP YÜKSEK MERTEBEDEN BİR REAKSİYON DİFÜZYON DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN GLOBAL VARLIĞI VE PATLAMASI

Bu bölümde (6.1) probleminin çözümlerinin zayıf global çözümün varlığı ve patlamasını elde edeceğiz.

6.1 Giriş

Bu bölümde, aşağıdaki tekil potansiyele sahip yüksek mertebeden denklem için:

$$\begin{cases} \frac{z_t}{|x|^{2m}} + \mathcal{A}z = \alpha(t) |z|^{r-1} z, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial^i z(x, t)}{\partial \nu^i} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ z(x, 0) = z_0(x) \in H^m(\Omega) \cap L^{r+1}(\Omega), \quad x \in \Omega \end{cases} \quad (6.1)$$

başlangıç-sınır değer problemini ele alacağız. Burada $m > 1$ tam sayısı için $\mathcal{A} = (-\Delta)^m$ ve Ω , R^n ($n \geq 1$) düzgün sınırlı bir bölgedir. Ayrıca $T > 0$, $r > 1$, ve ν dışa doğru yönlendirilmiş birim vektör ve $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ için $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ dir. $\alpha(t)$ değişken katsayısı $\forall t \in [0, \infty)$ için

$$\alpha \in C^1[0, \infty), \quad \alpha(0) > 0 \text{ ve } \alpha'(t) \geq 0 \quad (6.2)$$

dır.

Bu kısımda teoreminin ispatı için kullanılacak bazı tanımlar ve lemmalar ifade edilecektir

Tanım 6.1.1 (6.1) problemi $\Omega \times [0, T)$ da $z(x, t)$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa

$$z \in L^2(0, T; H_0^m(\Omega) \cap L^{r+1}(\Omega))$$

ve

$$\frac{z_t}{|x|^{2m}} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$$

bir zayıf çözümdür. Ayrıca

$$\left\langle \frac{z_t}{|x|^{2m}}, \varphi \right\rangle + \langle (-\Delta)^m z, \Delta \varphi \rangle = \alpha(t) \langle |z|^{r-1} z, \varphi \rangle \quad (6.3)$$

sağlanır. Burada $t \in [0, \infty)$ için $\varphi \in H_0^m(\Omega) \cap L^{r+1}(\Omega)$ dir.

Tanım 6.1.2 $z(t)$ fonksiyonu (6.1) problemin bir zayıf çözümü olsun. Bu durumda $z(t)$, tüm $t \in [0, T^*)$ için

$$\lim_{t \rightarrow T^*} \left\| \frac{z_t}{|x|^{2m}} \right\|^2 = \infty \quad (6.4)$$

ise, $z(t)$ sonlu bir zamanında patlar (blow up). Böyle bir T^* , $z(t)$ için maksimum varlık zamanı ve patlama zamanı olarak adlandırılır. Eğer (6.4) herhangi bir sonlu T^* zamanında gerçekleşmezse, bu durumda $z(t)$ global bir çözüm olarak adlandırılır ve $z(t)$ için maksimum varlık zamanı sonsuz olur.

Şimdi, her $z \in H_0^m(\Omega) \cap L^{r+1}(\Omega)$ ve $t \in [0, \infty)$ için aşağıdaki fonksiyonelleri tanımlayalım:

Enerji fonksiyoneli

$$J(z, t) = \frac{1}{2} \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^2 - \frac{\alpha(t)}{r+1} \|z\|_{r+1}^{r+1}$$

dır. Nehari fonksiyoneli

$$I(z, t) = \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^2 - \alpha(t) \|z\|_{r+1}^{r+1}$$

dır. Bu iki fonksiyonel $2 < r+1 < 2^*$ olduğunda Lemma 2.2 den dolayı iyi tanımlıdır.

Burada

$$2^* = \begin{cases} \infty, & n \leq 2m, \\ \frac{2d}{d-2m} = 2 + \frac{2m}{d-2m}, & n \geq 2m+1 \end{cases}$$

dır.

Her $t \geq 0$ için aşağıdaki tanımları verelim:

Nehari manifoldu:

$$\mathcal{N}(t) = \{z \in H_0^m(\Omega) \setminus \{0\} : I(z, t) = 0\}$$

dır. Payne ve Sattinger (1975) deki çalışmasına benzer şekilde, potansiyel kuyu derinliği

$$d(t) = \inf_{z \in H_0^m(\Omega) \setminus \{0\}} \sup_{\lambda > 0} J(\lambda z, t) = \inf_{z \in \mathcal{N}(t)} J(z, t) \quad (6.5)$$

dır. $\mathcal{N}(t)$ nin her $t \geq 0$ için boş küme olmadığı açıktır. Ayrıca (6.5) deki ikinci eşitliği gösterelim:

$$\begin{aligned}
d(t) &= \inf_{z \in H_0^m(\Omega) \setminus \{0\}} \sup_{\lambda > 0} J(\lambda z, t) \\
&= \inf_{z \in H_0^m(\Omega) \setminus \{0\}} \sup_{\lambda > 0} \left[\frac{\lambda^2}{2} \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^2 - \frac{\alpha(t) \lambda^{r+1}}{r+1} \|z\|_{r+1}^{r+1} \right] \\
&= \inf_{z \in H_0^m(\Omega) \setminus \{0\}} \left[\frac{\lambda_0^2}{2} \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^2 - \frac{\alpha(t) \lambda_0^{r+1}}{r+1} \|z\|_{r+1}^{r+1} \right] \\
&= \inf_{z \in H_0^m(\Omega) \setminus \{0\}} J(\lambda_0 z, t) \\
&= \inf_{\lambda_0 z \in H_0^m(\Omega) \setminus \{0\}} J(\lambda_0 z, t) \\
&= \inf_{v \in \mathcal{N}(t)} J(v, t)
\end{aligned}$$

burada $\lambda_0 > 0$ için $\lambda_0 \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^2 - \alpha(t) \lambda_0^r \|z\|_{r+1}^{r+1} = 0 \Leftrightarrow I(\lambda_0 z, t) = 0$ dır.

Potansiyel kuyu metoduna uygun olarak iki küme tanımlayalım. Kararlı küme

$$\sum_1(t) = \{z \in H_0^m(\Omega) : J(z, t) < d_\infty \text{ ve } I(z, t) > 0\},$$

kararsız küme ise

$$\sum_2(t) = \{z \in H_0^m(\Omega) : J(z, t) < d_\infty \text{ ve } I(z, t) < 0\}$$

olarak tanımlansın. Burada

$$d_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} d(t)$$

dır. Aşağıdaki Lemma 6.1.7 den d_∞ nun pozitif sonlu sayı olduğu anlaşılmaktadır.

$J, I, \mathcal{N}, d, \sum_1$ ve $\sum_2$ nin tümü zamana bağlıdır. Bu (6.1) probleminde $\alpha(t)$ den kaynaklanmaktadır.

$1/|x|^{2m}$ katsayının varlığı nedeniyle $0 \in \Omega$ ve $0 \notin \Omega$ durumları arasındaki farkı vurgulamak önemlidir.

1. Durum: Eğer $0 \in \Omega$ ise $1/|x|^{2m}$ bir tekillik meydana gelir. Bu durum, ana sonuçlarımızın ispatında $d \geq 2m + 1$ için geçerli olan Rellich eşitsizliğinin kullanılmasını gerektirmektedir.

2. *Durum:* Öte yandan, $0 \notin \Omega$ ise tekillik yoktur ve (6.1) probleminin Han (2021) deki modelin küçük bir uzantısı olarak düşünülebilir. Bu durumda sonuçlarımız tüm $d \geq 2m + 1$ için geçerlidir. Bu iki durumu aynı anda ele almak için

$$d_\Omega = \begin{cases} 2m + 1, & 0 \in \Omega, \\ 1, & 0 \notin \Omega \end{cases}$$

yazılabilir.

Şimdi Rellich eşitsizliğini verelim.

Lemma 6.1.3 $d \geq d_\Omega$ ve $\Omega \subset R^n$ açık sınırlı bir bölge olsun. $z \in H_0^m(\Omega)$ ve $\frac{z}{|x|^{2m}} \in L^2(\Omega)$ için

$$\int_\Omega \frac{|z|^2}{|x|^{2m}} dx \leq \left(\frac{m^2}{n(m-1)(n-2m)} \right)^2 \int_\Omega \left| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right|^2 dx = C \int_\Omega \left| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right|^2 dx$$

dır.

İspat. Önce $0 \in \Omega$ olduğunu varsayalım. Buradan $d \geq 2m + 1$ dir. $z \in H_0^m(\Omega)$ ve $\tilde{z}$, R^n de sıfır uzantısı olsun. Buradan $\tilde{z} \in H^m(R^n)$ (Adams, 2003) dir ve

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{|z|^2}{|x|^{2m}} dx &\leq \int_{R^n} \frac{|\tilde{z}|^2}{|x|^{2m}} dx \\ &\leq \left(\frac{m^2}{n(m-1)(n-2m)} \right)^2 \int_{R^n} \left| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} \tilde{z} \right|^2 dx \\ &\leq \left(\frac{m^2}{n(m-1)(n-2m)} \right)^2 \int_{R^n} \left| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right|^2 dx \end{aligned}$$

burada ikinci adımda (Balinsky vd., 2015) kullanılmıştır. Dolayısıyla iddia geçerlidir.

Sonra $0 \notin \Omega$ olduğunu varsayalım. Buradan $d \geq 1$ dir.

$$\kappa_0 = \inf_{x \in \Omega} \frac{1}{|x|^{2m}} > 0$$

için

$$\int_\Omega \frac{|z|^2}{|x|^{2m}} dx \leq \left(\inf_{x \in \Omega} \frac{1}{|x|^{2m}} \right) \int_\Omega |z|^2 dx \leq \kappa_0 C(\Omega, d) \int_\Omega \left| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right|^2 dx$$

dir. Burada son iki adımda sırasıyla Friedrich eşitsizliği (Nečas, 2012) ve (Stein, 1970) kullanılmıştır.

Bir sonraki lemmamız Gagliardo-Nirenberg eşitsizliğidir.

Lemma 6.1.4 Kabul edelimki $d \geq 2m + 1$, $\Omega \subset R^n$ açık sınırlı bir bölge ve $1 < r < 1 + \frac{4m}{n-2m}$ ise bütün $z \in H^m(\Omega)$ için

$$\|z\|_{L^{r+1}(\Omega)}^{r+1} \leq C_0 \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^{\beta(r+1)} \|z\|^{(1-\beta)(r+1)}$$

dır. Burada $C_0 = C_0(\Omega, d, r) > 0$ öyleki

$$\beta = \frac{d(r-1)}{4(r+1)} \in (0, 1) \quad (6.6)$$

dır.

İspat. $z \in H_0^m(\Omega)$ olsun. Gagliardo-Nirenberg eşitsizliğinden (Adams, 2003)

$$\|z\|_{L^{r+1}(\Omega)}^{r+1} \leq C(\Omega, d, r) \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^{\beta(r+1)} \|z\|^{(1-\beta)(r+1)}$$

elde edilir. Burada

$$\|\nabla^2 z\| \leq C(\Omega, d) \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|$$

dır (Stein, 1970).

Aşağıdaki Lemmamız, Lemma 6.1.4 ve Friedrich eşitsizliğinden elde edilir (Necas, 2012).

Lemma 6.1.5 $d \geq 1$, $z \in H_0^m(\Omega)$ ve $2 < r+1 < 2^*$ olsun. Bu durumda sabit bir $S_r = S_r(d, r) > 0$ vardır ki öyle ki

$$\|z\|_{L^{r+1}(\Omega)} \leq S_r \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|$$

dır.

Lemma 6.1.6 $d \geq d_\Omega$ ve $2 < r+1 < 2^*$ olsun. $\alpha \in C^1[0, \infty)$, $\alpha(0) > 0$ ve tüm $t \in [0, \infty)$ için $\alpha'(t) \geq 0$ koşullarını sağladığını varsayalım. z , (6.1) probleminin zayıf bir çözümü olsun. O zaman aşağıdaki özdeşlikler geçerlidir.

i. $t_0 \in [0, T)$ için

$$J(z(t_0), t_0) + \int_0^{t_0} \left(\left\| \frac{z_t(s)}{|x|^m} \right\|^2 - \frac{\alpha'(s)}{r+1} \|z\|_{L^{r+1}(\Omega)}^{r+1} \right) ds = J(z_0, 0)$$

dır.

ii. $t_0 \in [0, T)$ için

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \left\| \frac{z(t_0)}{|x|^m} \right\|^2 \right) = \left(\frac{z(t_0)}{|x|^{2m}}, z_t(t_0) \right) = -I(z(t_0), t_0)$$

dır.

İspat. (i) nin ispatı için öncelikle $z_t \in L^2(0, T; H_0^m(\Omega) \cap L^{r+1}(\Omega))$ olduğunu varsayalım. (6.3) den test fonksiyonunu z_t olarak alırsak

$$\left\| \frac{z_t}{|x|^m} \right\|^2 + \left\langle \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z, \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z_t \right\rangle = \alpha(t) \langle |z|^{r-1} z, z_t \rangle$$

elde ederiz. Diğer taraftan, her $t \in (0, T)$ için

$$\frac{d}{dt} J(z(t), t) = \left\langle \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z, \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z_t \right\rangle - \alpha(t) \langle |z|^{r-1} z, z_t \rangle - \frac{\alpha'(s)}{r+1} \|z\|_{L^{r+1}(\Omega)}^{r+1}$$

dır. Bu iki ifadenin birleştirilmesiyle

$$\frac{d}{dt} J(z(t), t) = - \left\| \frac{z_t}{|x|^m} \right\|^2 - \frac{\alpha'(s)}{r+1} \|z\|_{L^{r+1}(\Omega)}^{r+1} \quad (6.7)$$

elde edilir. (6.7) un her iki tarafının $t_0 \in (0, T)$ için $(0, t_0)$ üzerinde t ye göre integrali alınır (i) elde edilir.

Son olarak, (6.7) ifadesi $z_t \in L^2(0, T; H_0^m(\Omega) \cap L^{r+1}(\Omega))$ varsayımı olmadan da geçerli olduğu görülür.

(ii) nin ispatı (i) deki gibi yapılabilir.

Aşağıdaki lemma, potansiyel kuyu derinliği için açık bir ifadedir.

Lemma 6.1.7 Kabul edelimki $d \geq 2m+1$ ve $2 < r+1 < 2^*$ olsun. Ayrıca $\alpha \in C^1[0, \infty)$ üzerinde her $t \in [0, \infty)$ için $\alpha(0) > 0$ ve $\alpha'(t) \geq 0$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

i. Her $t \in [0, \infty)$ için

$$d(t) = \frac{r-1}{2(r+1)} \alpha(t)^{\frac{2}{(1-r)}} S_r^{\frac{-2(r+1)}{r-1}}$$

dır. Burada S_r , Lemma 6.1.5 de verilmiştir.

ii. Potansiyel kuyu derinliği d , $[0, \infty)$ üzerinde t nin bir fonksiyonu olarak azalmaktadır. Bununla beraber,

$$d_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} d(t) \in [0, d(0)]$$

dır.

İspat.

i. $t \geq 0$ için $w \in H_0^m(\Omega) / \{0\}$ olsun. Her $\lambda \geq 0$ için

$$F(\lambda) = J(\lambda w, t) = \frac{\lambda^2}{2} \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^2 - \frac{\alpha(t) \lambda^{r+1}}{r+1} \|z\|_{r+1}^{r+1}$$

dır. F nin $[0, \infty)$ üzerinde λ nın bir fonksiyonu olarak tam bir kritik noktaya sahip olduğunu kontrol etmek basittir.

$$\lambda_0(w) = \left(\frac{\left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^2}{\alpha(t) \|z\|_{r+1}^{r+1}} \right)^{\frac{1}{r-1}}$$

dır. Bu aynı zamanda maksimum noktadır. Bunu göz önüne alarak

$$\begin{aligned} d(t) &= \inf_{z \in H_0^m(\Omega)/\{0\}} \sup_{\lambda > 0} J(\lambda z, t) = \inf_{z \in H_0^m(\Omega)/\{0\}} F(\lambda_0(z)) \\ &= \inf_{z \in H_0^m(\Omega)/\{0\}} \left\{ \frac{\lambda_0(z)^2}{2} \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^2 - \frac{\alpha(t)}{r+1} \lambda_0(z)^{r+1} \|z\|_{r+1}^{r+1} \right\} \\ &= \frac{r-1}{2(r+1)} \alpha(t)^{\frac{2}{1-r}} \left(\inf_{z \in H_0^m(\Omega)/\{0\}} \frac{\left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^2}{\|z\|_{r+1}^{r+1}} \right)^{\frac{2(r+1)}{r-1}} \\ &= \frac{r-1}{2(r+1)} \alpha(t)^{\frac{2}{1-r}} S_r^{-\frac{2(r+1)}{r-1}} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada son adımda Lemma 6.1.5 i kullandık.

ii. Hipotez gereği a , $[0, \infty)$ üzerinde artmaktadır. Bu i) ile birlikte ii) yi ispatlamış olur.

6.2 Global varlık

Bu kısımda (6.1) probleminin zayıf global çözümünün varlığını Faedo-Galerkin metoduyla göstereceğiz. Gösterim kolaylığı için, bu kısımda

$$\dot{z}_k = (z_k)_t = \frac{\partial z_k}{\partial t}$$

ve

$$a \wedge b = \min \{a, b\} \quad \text{ve} \quad a \vee b = \max \{a, b\}$$

şeklinde alacağız. Ayrıca

$$d_\Omega = \begin{cases} 2m+1 & 0 \in \Omega \\ 1 & 0 \notin \Omega \end{cases} \quad \text{ve} \quad 2^* = \begin{cases} \infty & d \leq 2m, \\ \frac{2d}{d-2m} & d \geq 2m+1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştı. Her $t \geq 0$ için

$$\sum_1(t) = \{z \in H_0^m(\Omega) : J(z, t) < n_\infty \text{ ve } I(z, t) > 0\}$$

ve

$$\sum_2(t) = \{z \in H_0^m(\Omega) : J(z, t) < n_\infty \text{ ve } I(z, t) > 0\}$$

olsun.

İspata geçmeden önce bir yaklaşım problemi tanımlayalım:

Lemma 6.2.1 $d \geq d_\Omega$ ve $2 < r + 1 < 2^*$ olsun. $k \in N$, $T > 0$ ve $z_{k0} \in C_c^\infty(\Omega)$ olsun.

O halde problem

$$\begin{cases} \rho_k(x) \dot{z}_k + \mathcal{A}z_k = \beta_k(z_k), & (x, t) \in \Omega \times (0, T], \\ \frac{\partial^i z_k(0, t)}{\partial \nu^i} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1, & (x, t) \in \Omega \times (0, T], \\ z_k(x, 0) = z_{k0}, & x \in \Omega \end{cases} \quad (6.8)$$

$z_k \in C([0, T]; H_0^m(\Omega))$ için global bir çözüme sahiptir. Öyleki $\dot{z}_k \in L^2(0, T; H_0^m(\Omega))$ dır. Burada

$$\rho_k(x) = |x|^{-2m} \wedge k \quad \text{ve} \quad \beta_k(z_k) = \alpha(t) [(-k) \vee (|z_k|^{r-1} z_k) \wedge k]$$

dır (Do vd., 2023).

Teorem 6.2.2 $d \geq d_\Omega$ ve $\Omega \subset R^n$ Lipschitz sınırı ile açık sınırlı bir bölge ve $2 < r + 1 < 2^*$ olsun. $z_0 \in \sum_1(0)$ ve $\alpha \in C^1[0, \infty)$ nin her $t \in [0, \infty)$ için $\alpha(0) > 0$ ve $\alpha'(t) \geq 0$ ı sağladığını varsayalım. Ayrıca $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = 1$ olduğunu varsayalım. O zaman (6.1) probleminin global zayıf bir çözümü vardır.

İspat. $z_0 \in \sum_1(0)$ olduğundan, öyle bir $\epsilon_0 > 0$ sabiti vardır ki

$$J(z_0, 0) + \epsilon_0 < d_\infty$$

dır.

Lemma 6.2.1 ile her $k \in N$ için (6.8) probleminin $z_k \in C([0, T]; H_0^m(\Omega))$ şeklinde bir zayıf çözümü vardır, öyle ki $\dot{z}_k \in L^2(0, T; H_0^m(\Omega))$ dır. Burada $z_{k0} \in C_c^\infty(\Omega)$ dır, öyle ki $H_0^m(\Omega)$ de

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_{k0} = z_0$$

dır. Yeterince büyük $k \in N$ seçersek

$$J(z_{k0}, 0) \leq J(z_0, 0) + \epsilon_0 < d_\infty \quad (6.9)$$

elde ederiz.

(6.8) de bir test fonksiyonu $\dot{z}_k$ yi kullanarak

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_\Omega \rho_k \dot{z}_k(s)^2 dx ds + \int_0^t \int_\Omega \mathcal{A} z_k(s) \dot{z}_k(s) dx ds \\ &= \int_0^t \int_\Omega \beta_k(z_k) \dot{z}_k(s) dx ds \leq \int_0^t \int_\Omega |z_k(s)|^{r-1} z_k(s) \dot{z}_k(s) dx ds \end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan

$$\int_\Omega \mathcal{A} z_k \dot{z}_k dx = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_\Omega \|\mathcal{A}^{1/2} z_k\|^2 \right)$$

ve

$$\int_\Omega |z_k|^{r-1} z_k \dot{z}_k dx = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r+1} \int_\Omega \|z_k\|_{L^{r+1}(\Omega)}^{r+1} dx \right)$$

dır. Buradan yukarıdaki eşitsizliği

$$\int_0^t \int_\Omega \rho_k \dot{z}_k(s)^2 dx ds + J(z_k(t), t) \leq J(z_{k0}, 0) < d_\infty \quad (6.10)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada son adımda (6.9) u kullandık. Bu, her $t \in [0, T]$ için $z_k(t) \in \sum_1$ anlamına gelir. Aslında, çelişki yoluyla zıt ifadenin geçerli olduğunu varsayıyoruz. $t^*, z_k(t^*) \notin \sum_1$ olacak şekilde minimum bir zaman olsun. Buradan $z_k \in C([0, T]; H_0^m(\Omega))$ gerçeğini kullanarak $z_k(t^*) \in \partial \sum_1$ çıkarırız. Yani, ya $J(z_k(t^*), t^*) = d_\infty$ ya da $I(z_k(t^*), t^*) = 0$ dır. İlki (6.9) nedeniyle imkansızdır. Sonuç olarak $I(z_k(t^*), t^*) = 0$ veya eş değer olarak

$$\left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z(t^*) \right\|^2 = \alpha(t^*) \|z_k(t^*)\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{r+1}$$

dır. Bu yüzden

$$\begin{aligned} J(z_k(t^*), t^*) &= \frac{r-1}{2(r+1)} \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z_k(t^*) \right\|^2 \\ &\geq \frac{r-1}{2(r+1)} S_r^{-2} \|z_k(t^*)\|_{L^{r+1}(\Omega)}^2 \\ &= \frac{r-1}{2(r+1)} S_r^{-2} \left(\frac{\alpha(t^*)^{-1/2} \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z_k(t^*) \right\|}{\|z_k(t^*)\|_{L^{r+1}(\Omega)}} \right)^{\frac{2}{r+1} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r+1} \right)^{-1}} \\ &\geq \frac{r-1}{2(r+1)} \alpha(t^*)^{2/(1-r)} S_r^{-2(r+1)/(r-1)} \\ &= d(t^*) \geq d_\infty \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durum (6.10) ile çelişir. Dolayısıyla her $t \in [0, T]$ için $z_k(t) \in \Sigma_1$ dır. $t \in [0, T]$ olsun. Bu durumda $z_k(t) \in \Sigma_1$ ifadesi

$$\left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z(t) \right\|^2 > \alpha(t) \|z_k(t)\|_{L^{r+1}(\Omega)}^{r+1}$$

anlamına gelir. (6.10) kullanılarak

$$\int_0^t \int_{\Omega} \rho_k \dot{z}_k(s)^2 dx ds + \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha(t)}{r+1} \right) \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z_k(t) \right\|^2 < J(z_{k0}, 0) < d_{\infty} \quad (6.11)$$

elde ederiz. Özellikle buradan

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r+1} \right) \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z_k(t) \right\|^2 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha_{\infty}}{r+1} \right) \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z_k(t) \right\|^2 \\ &< \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha(t)}{r+1} \right) \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z_k(t) \right\|^2 \\ &< J(z_{k0}, 0) \end{aligned} \quad (6.12)$$

dır. Burada hipotezden $\alpha_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = 1$ dır. Lemma 6.1.6, (6.9) ve (6.12) dan

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |z_k(t)|^{r+1} dx &< S_r^{r+1} \left(\left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z_k(t) \right\|^2 \right)^{\frac{r+1}{2}} \\ &= S_r^{r+1} \left(\left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z_k(t) \right\|^2 \right)^{\frac{r+1}{2}-1} \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z_k(t) \right\|^2 \\ &< S_r^{r+1} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r+1} \right)^{-1} J(z_{k0}, 0) \right]^{\frac{r+1}{2}-1} \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z_k(t) \right\|^2 \\ &< S_r^{r+1} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r+1} \right)^{-1} (J(z_0, 0) + \epsilon_0) \right]^{\frac{r+1}{2}-1} \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z_k(t) \right\|^2 \\ &= \delta \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z_k(t) \right\|^2 \end{aligned} \quad (6.13)$$

elde edilir. Burada

$$0 < \delta < S_r^{r+1} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r+1} \right)^{-1} d_{\infty} \right]^{\frac{r+1}{2}-1} = \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r+1} \right)^{-1} \frac{r-1}{2(r+1)} \right]^{\frac{r-1}{2}} = 1$$

dır. Daha sonra (6.10) da z_k yi bir test fonksiyonu olarak kullanarak

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_k z_k^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} \left| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z_k(s) \right|^2 dx ds &\leq \int_0^t \int_{\Omega} |z_k(s)|^{r+1} dx ds + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_k z_{k0}^2 dx \\ &< \delta \int_0^t \int_{\Omega} \left| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z_k(s) \right|^2 dx ds + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_k z_{k0}^2 dx \end{aligned}$$

olur. Burada ikinci adımda (6.13) kullanıldı.

Buradan

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_k z_k^2 dx + (1 - \delta) \int_0^t \int_{\Omega} \left| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z_k(s) \right|^2 dx ds < \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_k z_{k0}^2 dx < C \quad (6.14)$$

dır. Burada $C > 0$, k ve T den bağımsızdır. Sonuç olarak, $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $L^2(0, T; H^m(\Omega))$ bölgesi üzerinde düzgün sınırlıdır

(6.11) ve (6.14) e göre, aşağıdaki özellikler geçerlidir: Her $T > 0$ için

$$\begin{cases} z_k \rightarrow z & (0, T) \times \Omega, \\ \rho_k^{1/2} z_k \xrightarrow{\omega} \frac{z_t}{|x|^{2m}} & L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\ \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z_k \xrightarrow{\omega} \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z & L^2(0, T; L^2(\Omega)) \\ z_k \xrightarrow{\omega} z & L^2(0, T; L^{r+1}(\Omega)), \\ z_k \xrightarrow{\omega} z & L^2(0, T; L^{r+1}(\Omega)) \end{cases}$$

(6.8) da $k \rightarrow \infty$ olduğunda limitler olarak $T > 0$ keyfi olduğundan çözüm globaldir.

6.3 Çözümlerin Patlaması

Bu kısımda çözümlerin patlama zamanı için alt sınır ve üst sınır elde edeceğiz. Kolaylık olması açısından, her $t \in [0, T)$ için

$$\mathcal{L}(t) = \frac{1}{2} \left\| \frac{z(t)}{|x|^m} \right\|^2$$

olsun.

6.3.1 Patlama zamanı için üst sınır

Başlangıç enerjisinin negatif olduğu durumda (6.1) probleminin patlama zamanı için üst sınır elde edilmiştir.

Teorem 6.3.1.1 $d \geq 2m + 1$ ve $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nin Lipschitz açık sınırlı bölge olduğunu varsayalım. $r > 1$ ve α , (6.2) deki koşulları sağlasın. $0 \neq z_0 \in H_0^m(\Omega) \cap L^{r+1}(\Omega)$ durumunda

$$J(z_0, 0) = \frac{1}{2} \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z_0 \right\|^2 - \frac{\alpha(0)}{r+1} \|z_0\|_{L^{r+1}(\Omega)}^{r+1} < 0$$

dır. z , (6.1) probleminin zayıf çözümü olsun. O zaman z , T^* sonlu bir zamanda patlar ve patlama zamanı

$$T^* \leq \frac{\left\| \frac{z_0}{|x|^{2m}} \right\|^2}{(1 - r^2) J(z_0, 0)}$$

dır.

İspat. $T^* \geq 0$, z nin maksimum varlık zamanı olsun. Amacımız $T^* < \infty$ olduğunu göstermek ve ardından T^* için bir üst sınır bulmaktır. Bu amaçla, her $t \in [0, T^*)$ için

$$\mathcal{K}(t) = -J(z(t), t)$$

şeklinde tanımlayalım. Hipotez gereği $\mathcal{L}(0) > 0$ ve $\mathcal{K}(0) > 0$ dır. Ayrıca Lemma 6.1.5 ten

$$\mathcal{K}'(t) = -\frac{d}{dt} J(z(t), t) = \left\| \frac{z_t(t)}{|x|^m} \right\|^2 + \frac{\alpha'(t)}{r+1} \|z(t)\|_{L^{r+1}(\Omega)}^{r+1} \geq 0 \quad (6.15)$$

elde edilir. Ayrıca her $t \in [0, T^*)$ için, dolayısıyla $\mathcal{K}$, $[0, T^*)$ üzerinde artmaktadır. Sonuç olarak, tüm $t \in [0, T^*)$ için $\mathcal{K}(t) \geq \mathcal{K}(0) > 0$ dır.

Aynı şekilde,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(t) &= \left(\frac{z(t)}{|x|^{2m}}, z_t(t) \right) = -I(z(t), t) \\ &= \frac{r-1}{2} \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z(t) \right\|^2 - (r+1) J(z(t), t) \\ &\geq (r+1) \mathcal{K}(t) \end{aligned} \quad (6.16)$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t) \mathcal{K}'(t) &\geq \frac{1}{2} \left\| \frac{z(t)}{|x|^m} \right\|^2 \left\| \frac{z_t(t)}{|x|^m} \right\|^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\frac{z(t)}{|x|^{2m}}, z_t(t) \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} (\mathcal{L}'(t))^2 \\ &\geq \frac{r+1}{2} \mathcal{L}'(t) \mathcal{K}(t) \end{aligned}$$

dır. Yukarıdakileri göz önünde bulundurarak

$$\left(\mathcal{K}(t) \mathcal{L}^{-\frac{r+1}{2}}(t) \right)' = \mathcal{L}^{-\frac{r+3}{2}}(t) \left(\mathcal{K}'(t) \mathcal{L}(t) - \frac{r+1}{2} \mathcal{K}(t) \mathcal{L}'(t) \right) \geq 0$$

yazılabilir. Burada $\mathcal{K} \mathcal{L}^{-\frac{r+1}{2}}$, $[0, T^*)$ bölgesinde kesin artandır ve buradan

$$\begin{aligned} 0 &< \xi_0 = \mathcal{K}(0) \mathcal{L}^{-\frac{r+1}{2}}(0) \\ &< \mathcal{K}(t) \mathcal{L}^{-\frac{r+1}{2}}(t) \\ &\leq \frac{1}{r+1} \mathcal{L}'(t) \mathcal{L}^{-(r+1)/2}(t) \\ &= \frac{2}{1-r^2} \left(\mathcal{L}^{\frac{1-r}{2}}(t) \right)' \end{aligned}$$

dır. Sonndan ikinci adımda (6.16) kullanıldı. Bu son ifadeyi $\tau \in (0, T^*)$ olmak üzere $(0, \tau)$ bölgesinde integral alırsak

$$\xi_0 \tau \leq \frac{2}{1-r^2} (\mathcal{L}^{(1-r)/2}(\tau) - \mathcal{L}^{(1-r)/2}(0))$$

elde ederiz. Buradan $T^* < \infty$ sonucu çıkar ve bu eşitsizlik sonlu bir zaman için geçerlidir. Ayrıca tüm $\tau \in (0, T^*)$ için

$$0 \leq \mathcal{L}^{(1-r)/2}(\tau) \leq \mathcal{L}^{(1-r)/2}(0) - \frac{(r^2-1)\xi_0}{2}\tau$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} T^* &\leq \frac{2}{(r^2-1)\xi_0} \mathcal{L}^{(1-r)/2}(0) \\ &= \frac{2\mathcal{L}(0)}{(1-r^2)J(z_0, 0)} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Aşağıdaki Teorem başlangıç enerjisinin pozitif olduğu durumda (6.1) probleminin zayıf çözümü için patlama zamanının bir üst sınırı ile ilgilidir.

Teorem 6.3.1.2 $d \geq 2m+1$ ve $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nin Lipschitz sınırlı bir bölge olsun. $r > 1$ ve α , (6.2) daki koşulları sağlasın. Ayrıca $0 \neq z_0 \in H_0^m(\Omega) \cap L^{r+1}(\Omega)$ ve

$$0 \leq C_1 J(z_0, 0) < \frac{1}{2} \left\| \frac{z_0}{|x|^{2m}} \right\|^2 = L(0)$$

olsun. Burada

$$C_1 = \frac{(r+1)\mathcal{C}}{r-1} \text{ ve } \mathcal{C} = \left(\frac{m^2}{n(m-1)(n-2m)} \right)^2$$

dır. Bu durumda z , sonlu bir T^* zamanında patlar ve

$$T^* \leq \frac{4rC_1L(0)}{(r-1)^2(r+1)(L(0) - C_1J(z_0, 0))}$$

dır.

İspat. $T^* \geq 0$, z nin maksimum varlık zamanı olsun. Amacımız $T^* < \infty$ olduğunu göstermek ve ardından T^* için bir üst sınır elde etmektir.

(6.16) den her $t \in (0, T^*)$ için

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'(t) &\geq \frac{r-1}{2} \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z(t) \right\|^2 - (r+1) J(z(t), t) \\ &\geq \frac{r-1}{2\mathcal{C}} \left\| \frac{z(t)}{|x|^m} \right\|^2 - (r+1) J(z(t), t) \\ &= \frac{r-1}{\mathcal{C}} [\mathcal{L}(t) - C_1 J(z(t), t)] \\ &= \frac{r-1}{\mathcal{C}} \mathcal{M}(t)\end{aligned}$$

olur. İkinci adımda Rellich eşitsizliği kullanıldı.

Yukarıdaki eşitsizliği göz önünde bulundurarak, her $t \in (0, T^*)$ için

$$\begin{aligned}\mathcal{M}'(t) &= \mathcal{L}'(t) - C_1 \frac{d}{dt} J(z(t), t) \\ &\geq \mathcal{L}'(t) \\ &\geq \frac{r-1}{\mathcal{C}} \mathcal{M}(t)\end{aligned}$$

elde ederiz. İkinci adımda (6.15) kullanıldı. Ayrıca

$$\mathcal{M}(0) = \mathcal{L}(0) - C_1 J(z_0, 0) > 0$$

dır. Sonuç olarak, Gronwall eşitsizliğinin bir uygulamasından

$$\mathcal{M}(t) \geq \mathcal{M}(0) \exp\left(\frac{r-1}{\mathcal{C}} t\right) > 0$$

elde edilir. Bu da her $t \in (0, T^*)$ için $\mathcal{L}'(t) > 0$ anlamına gelir. Diğer bir deyişle $\mathcal{L}$, $[0, T^*)$ üzerinde kesin olarak artmaktadır ve dolayısıyla her $t \in [0, T^*)$ için

$$\mathcal{L}(t) > \mathcal{L}(0) \tag{6.17}$$

dır.

Şimdi bu teoremin ifadesinde verilen C_1 ve C sabitlerinden $\tau \in [0, T^*)$ için

$$\beta \in \left(0, \frac{r+1}{rC_1}\right) \mathcal{M}(0) \text{ ve } \sigma \in \left(\frac{\mathcal{L}(0)}{(r-1)\beta}, \infty\right) \tag{6.18}$$

dır. β ve σ seçimleri sırasıyla (6.20) ve (6.21) ile belirtilmiştir.

Negatif olmayan fonksiyoneli tanımlayalım: $h \in [0, \tau]$ için

$$G(h) = \int_0^h \mathcal{L}(s) ds + (\tau - h) \mathcal{L}(0) + \beta (h + \sigma)^2$$

dır. Ayrıca her $h \in [0, \tau]$ için

$$\begin{aligned} G'(h) &= \mathcal{L}(h) - \mathcal{L}(0) + 2\beta(h + \sigma) \\ &= 2 \int_0^h \left(\frac{z(s)}{|x|^m}, z_t(s) \right) ds + 2\beta(h + \sigma) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} G''(h) &= 2 \left(\frac{z(h)}{|x|^m}, z_t(h) \right) + 2\beta \\ &= -2I(z(h), h) + 2\beta \\ &\geq -2(r+1)J(z(h), h) + (r-1) \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z(h) \right\|^2 + 2\beta \\ &\geq -2(r+1) \left[J(z_0, 0) - \int_0^h \left(\left\| \frac{z_t(s)}{|x|^m} \right\|^2 + \frac{\alpha'(s)}{r+1} \|z(s)\|_{L^{r+1}(\Omega)}^{r+1} \right) ds \right] \\ &\quad + (r-1) \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z(h) \right\|^2 + 2\beta \\ &\geq -2(r+1) \left[J(z_0, 0) - \int_0^h \left(\left\| \frac{z_t(s)}{|x|^m} \right\|^2 + \frac{\alpha'(s)}{r+1} \|z(s)\|_{L^{r+1}(\Omega)}^{r+1} \right) ds \right] \\ &\quad + \frac{2(r-1)}{\mathcal{C}} \mathcal{L}(h) + 2\beta \end{aligned} \tag{6.19}$$

dır. Burada dördüncü ve beşinci adımlarda sırasıyla Lemma 6.1.5 ve Lemma 6.1.3 kullanıldı.

Ayrıca her $h \in [0, \tau]$ için

$$\begin{aligned} \theta(h) &= \left(2 \int_0^h \mathcal{L}(s) ds + \beta(h + \sigma)^2 \right) \left(\int_0^h \left\| \frac{z_t(s)}{|x|^m} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \beta \right) \\ &\quad - \left(\int_0^h \left(\frac{z(s)}{|x|^m}, z_t(s) \right) ds + \beta(h + \sigma) \right)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

dır. Burada son adımda Cauchy- Schwartz eşitsizliği kullanıldı.

Lemma 3.8.5 i gözönünde bulundurarak her $h \in [0, \tau]$ için

$$\begin{aligned}
& G(h) G''(h) - \frac{r+1}{2} (G'(h))^2 \\
&= G(h) G''(h) - 2(r+1) \left[\int_0^h \left(\frac{z(s)}{|x|^m}, z_t(s) \right) ds + \beta(h + \sigma) \right]^2 \\
&= G(h) G''(h) + 2(r+1) \left[\theta(h) - (G(h) - (\tau - h) \mathcal{L}(0)) \left(\int_0^h \left\| \frac{z_t(s)}{|x|^m} \right\|^2 ds + \beta \right) \right] \\
&\geq G(h) G''(h) - 2(r+1) G(h) \left(\int_0^h \left\| \frac{z_t(s)}{|x|^m} \right\|^2 ds + \beta \right) \\
&\geq G(h) \left[G''(h) - 2(r+1) \left(\int_0^h \left\| \frac{z_t(s)}{|x|^m} \right\|^2 ds + \beta \right) \right] \\
&\geq G(h) \left[-2(r+1) J(z_0, 0) + \frac{2(r-1)}{\mathcal{C}} \mathcal{L}(h) - 2r\beta \right] \\
&\geq G(h) \left[-2(r+1) J(z_0, 0) + \frac{2(r-1)}{\mathcal{C}} \mathcal{L}(0) - 2r\beta \right] \\
&= 2(r+1) G(h) \left[-J(z_0, 0) + \frac{1}{C_1} \mathcal{L}(0) - \frac{r\beta}{r+1} \right] \\
&\geq 0
\end{aligned} \tag{6.20}$$

dır. Beşinci ve altıncı adımlarda sırasıyla (6.19) ve (6.17) kullanıldı.

Ayrıca

$$G(0) = \tau \mathcal{L}(0) + \beta \sigma^2 > 0$$

ve

$$G'(0) = 2\beta\sigma > 0$$

dır. Sonuç olarak, Lemma 3.8.5 den

$$\begin{aligned}
\tau &\leq \frac{2G(0)}{(r-1)G'(0)} \\
&= \frac{2(\tau \mathcal{L}(0) + \beta \sigma^2)}{2(r-1)\beta\sigma} \\
&= \frac{\mathcal{L}(0)}{(r-1)\beta\sigma} \tau + \frac{\sigma}{r-1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da sonuç olarak şunu verir:

$$\tau \left(1 - \frac{\mathcal{L}(0)}{(r-1)\beta\sigma} \right) \leq \frac{\sigma}{r-1}$$

veya eşdeğer olarak

$$\begin{aligned}\tau &\leq \frac{\sigma}{r-1} \left(1 - \frac{\mathcal{L}(0)}{(r-1)\beta\sigma}\right)^{-1} \\ &= \frac{\beta\sigma^2}{(r-1)\beta\sigma - \mathcal{L}(0)}\end{aligned}\quad (6.21)$$

dır. Bu son ifadeyi en sade halde yazmak için (6.18) deki σ aralığı kullanılırsa

$$\tau \leq \frac{4\mathcal{L}(0)}{(r-1)^2\beta} \quad (6.22)$$

elde edilir. Burada β yerine (6.18) deki aralığı yazılırsa

$$\tau \leq \frac{4rC_1\mathcal{L}(0)}{(r-1)^2(r+1)\mathcal{M}(0)} \quad (6.23)$$

dır. Son olarak, tüm $\tau \in (0, T^*)$ için (6.23) geçerlidir. Buradan

$$T^* \leq \frac{4rC_1\mathcal{L}(0)}{(r-1)^2(r+1)\mathcal{M}(0)}$$

dır.

6.3.2 Patlama zamanı için alt sınır

Bu kısımda, Teorem 6.3.2.1 de çözümlerinin patlama zamanı için alt sınır elde edilmiştir.

Teorem 6.3.2.1 $d \geq 2m + 1$ ve $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nin Lipschitz sınırlı bir bölge olsun. α , (6.2) daki koşulları sağlansın ve

$$\alpha_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) < \infty$$

olsun. $1 < r < 1 + \frac{4m}{d}$ olduğunu varsayalım. $T > 0$ ve $0 \neq z_0 \in H_0^m(\Omega)$, $z(t)$ için (6.1) denkleminin zayıf çözümü olsun. Bu durumda $z(t)$, T^* zamanında patlar ve patlama zamanı

$$T^* \geq \frac{L^{1-\gamma}(0)}{C^*(\gamma-1)}$$

dır. Burada

$$\beta = \frac{d(r-1)}{4(r+1)} \in (0, 1), \quad \gamma = \frac{(1-\beta)(r+1)}{2-\beta(r+1)} > 1,$$

$$C^* = \frac{2-\beta(r+1)}{2} \left(\frac{2}{\alpha_\infty C_0 \beta(r+1)} \right)^{-\frac{\beta(r+1)}{2-\beta(r+1)}} \left(\sup_{x \in \Omega} |x| \right)^{4\gamma}$$

ve $C_0 = C_0(\Omega, d, r) > 0$ dır.

Not. Teorem 6.3.1 de $r, 1 < r < 1 + \frac{4m}{d}$ aralığındadır. Bu nedenle, $z_0 \in H_0^m(\Omega)$ koşulu Lemma 6.1.4 deki Gagliardo- Nirenberg eşitsizliği ile $z_0 \in L^{r+1}(\Omega)$ koşulunu sağlar.

Teorem 6.3.2.1 in İspatı $1 < r < 1 + \frac{4m}{d}$ varsayımı gereği

$$0 < \beta(r+1) = \frac{d(r-1)}{4} < m$$

şeklindedir. Bu durum, sonraki adımlarda Young eşitsizliğini uygulamamıza olanak tanır.

Bu teoremin ifadesinde tanımlanan sabitlerden bütün $h \in (0, T^*)$ için

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(h) &= \left(\frac{z(h)}{|x|^m}, z_t(h) \right) \\ &= -I(z(h), h) \\ &= \alpha(h) \|z(h)\|_{L^{r+1}(\Omega)}^{r+1} - \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z(h) \right\|^2 \\ &\leq C_0 \alpha_\infty \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^{\beta(r+1)} \|z\|^{(1-\beta)(r+1)} - \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^2 \\ &\leq \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^2 + \frac{2 - \beta(r+1)}{2} \left(\frac{2}{\alpha_\infty C_0 \beta(r+1)} \right)^{-\frac{\beta(r+1)}{2-\beta(r+1)}} \|z\|^{2\gamma} - \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^2 \\ &= \frac{2 - \beta(r+1)}{2} \left(\frac{2}{\alpha_\infty C_0 \beta(r+1)} \right)^{-\frac{\beta(r+1)}{2-\beta(r+1)}} \|z\|^{2\gamma} \\ &\leq \frac{2 - \beta(r+1)}{2} \left(\frac{2}{\alpha_\infty C_0 \beta(r+1)} \right)^{-\frac{\beta(r+1)}{2-\beta(r+1)}} \left(\sup_{x \in \Omega} |z| \right)^{4\gamma} \mathcal{L}(t)^\gamma \\ &= C^* \mathcal{L}(t)^\gamma \end{aligned}$$

dır. Burada dördüncü adımda Lemma 6.1.4 ve beşinci adımda Young eşitsizliği uygulanmıştır.

Eşdeğer olarak

$$\frac{\mathcal{L}'(t)}{\mathcal{L}(t)^\gamma} \leq C^*$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{1}{1-\gamma} (\mathcal{L}^{1-\gamma}(t) - \mathcal{L}^{1-\gamma}(0)) \leq C^* t$$

elde edilir. Son olarak, $\gamma > 1$ ve $\lim_{t \rightarrow T^*} \mathcal{L}(t) = \infty$ olduğundan, yukarıdaki eşitsizlikte $t \rightarrow T^*$ olarak alındığında

$$T^* \geq \frac{\mathcal{L}^{1-\gamma}(0)}{C^*(\gamma-1)}$$

elde edilerek ispat tamamlanır.

7. DEĞİŞKEN KATSAYILI GECİKME TERİMLİ PETROVSKY DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN AZALMASI

Bu bölümde (7.1) probleminin çözümlerinin enerji azalmasını elde edeceğiz.

7.1 Giriş

Bu kısımda zamana bağlı değişken katsayı ve gecikmeli terim içeren Petrovsky

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u + \beta_1(t) u_t(x, t) + \beta_2(t) u_t(x, t - \tau) = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x, t) = \Delta u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \\ u_t(x, t - \tau) = f_0(x, t - \tau), & x \in \Omega, t > 0 \end{cases} \quad (7.1)$$

problemini inceleyeceğiz (Fidan ve Pişkin, 2025). Burada $\Omega \subset R^n$ ($n \geq 1$) de $\partial\Omega$ düzgün sınıra sahip sınırlı bir bölgedir. Ayrıca, $\tau > 0$ gecikmeli zaman terimidir. u_0, u_1 ve f_0 başlangıç verileridir. β_1 ve β_2 pozitif fonksiyonlardır.

$\beta_1(t)$ ve $\beta_2(t)$ üzerinde şu varsayımları yapalım:

(H1) $\beta_1 : R^+ \rightarrow (0, +\infty)$, $C^1(R^+)$ üzerinde artmayan bir fonksiyon olmak üzere

$$\left| \frac{\beta_1'(t)}{\beta_1(t)} \right| \leq M \quad (7.2)$$

olsun.

(H2) $\beta_2 : R^+ \rightarrow R$, $C^1(R^+)$ üzerinde pozitif veya monoton olmayan bir fonksiyon olmak üzere, $0 < \mu < 1$ ve $\eta > 0$ için

$$|\beta_2(t)| \leq \mu \beta_1(t), \quad (7.3)$$

$$|\beta_2'(t)| \leq \eta \beta_1(t) \quad (7.4)$$

olsun.

Öncelikle, Nicaise ve Pignotti'nin (2006) çalışmasına benzer olarak (7.1) problemi için $x \in \Omega$, $\rho \in (0, 1)$, $t > 0$ olmak üzere

$$z(x, \rho, t) = u_t(x, t - \tau\rho) \quad (7.5)$$

fonksiyonu tanımlayalım. Burada $t - \tau\rho = y$ alınırsa $z = z_t(x, y)$ olur. Zincir kuralı uygulanırsa

$$z_t = \frac{\partial z(x, y)}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}$$

ve

$$z_\rho = \frac{\partial z(x, y)}{\partial \rho} = \frac{\partial y}{\partial \rho} \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = -\tau \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}$$

bulunur. Böylece $x \in \Omega$, $\rho \in (0, 1)$, $t > 0$ için

$$\tau z_t(x, \rho, t) + z_\rho(x, \rho, t) = 0 \quad (7.6)$$

olur.

(7.6) dönüşümü kullanılarak (7.1) problemi

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u + \beta_1(t) u_t(x, t) + \beta_2(t) z(x, 1, t) = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ \tau z_t(x, \rho, t) + z_\rho(x, \rho, t) = 0, & x \in \Omega, \rho \in (0, 1), t > 0, \\ u(x, t) = \Delta u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ z(x, 0, t) = u_t(x, t), & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \\ z(x, \rho, 0) = f_0(x, -\tau\rho), & x \in \Omega, \rho \in (0, 1) \end{cases} \quad (7.7)$$

formunda yazılabilir. $\bar{\xi}$ sabit bir pozitif değer olacak şekilde

$$\tau\mu < \bar{\xi} < \tau(2 - \mu) \quad (7.8)$$

olsun. (7.1) probleminin enerji fonksiyoneli

$$E(t) = \frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u\|^2 + \frac{\xi(t)}{2} \int_{\Omega} \int_0^1 z^2(x, \rho, t) d\rho dx \quad (7.9)$$

dır. Burada $\xi(t) = \bar{\xi}\beta_1(t)$ dır.

Lemma 7.1.1 Varsayalımki (u, z) , (7.7) probleminin çözümü olsun. Bu durumda

$$E'(t) \leq - \left(\beta_1(t) - \frac{\xi(t)}{2\tau} - \frac{|\beta_2(t)|}{2} \right) \|u_t\|^2 - \left(\frac{\xi(t)}{2\tau} - \frac{|\beta_2(t)|}{2} \right) \|z(x, 1, t)\|^2 \leq 0 \quad (7.10)$$

dır.

İspat. (7.7) probleminin, birinci denklemini u_t ile çarpıp, Ω üzerinde integralini alırsak ve Green eşitsizliğinden

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta u\|^2 + \beta_1(t) \|u_t\|^2 + \beta_2(t) \int_{\Omega} u_t(x, t - \tau) u_t(x, t) dx = 0 \quad (7.11)$$

olur. (7.7) in ikinci denklemini ise $\xi(t)$ z ile çarpıp $\Omega \times (0, 1)$ üzerinde integralini alırsak

$$\xi(t) \tau \int_{\Omega} \int_0^1 z_t(x, \rho, t) z(x, \rho, t) d\rho dx + \xi(t) \int_{\Omega} \int_0^1 z_{\rho}(x, \rho, t) z(x, \rho, t) d\rho dx = 0,$$

$$\frac{\xi(t) \tau}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_0^1 z^2(x, \rho, t) d\rho dx + \frac{\xi(t)}{2} \int_{\Omega} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \rho} z^2(x, \rho, t) d\rho dx = 0$$

ve

$$\begin{aligned} & \frac{\tau}{2} \left[\frac{d}{dt} \left(\xi(t) \int_{\Omega} \int_0^1 z^2(x, \rho, t) d\rho dx \right) - \xi'(t) \int_{\Omega} \int_0^1 z^2(x, \rho, t) d\rho dx \right] \\ & + \frac{\xi(t)}{2} \int_{\Omega} z^2(x, 1, t) dx - \frac{\xi(t)}{2} \int_{\Omega} u_t^2(x, t) dx = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} & \frac{\tau}{2} \frac{d}{dt} \left(\xi(t) \int_{\Omega} \int_0^1 z^2(x, \rho, t) d\rho dx \right) \\ & = \frac{\tau}{2} \xi'(t) \int_{\Omega} \int_0^1 z^2(x, \rho, t) d\rho dx \\ & \quad - \frac{\xi(t)}{2} \int_{\Omega} z^2(x, 1, t) dx + \frac{\xi(t)}{2} \int_{\Omega} u_t^2(x, t) dx \end{aligned} \quad (7.12)$$

olur. (7.11) ve (7.12) den

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u\|^2 + \frac{\xi(t)}{2} \int_{\Omega} \int_0^1 z^2(x, \rho, t) d\rho dx \right] \\ & = -\beta_1(t) \|u_t(x, t)\|^2 - \beta_2(t) \int_{\Omega} z(x, 1, t) u_t(x, t) dx \\ & \quad + \frac{1}{2} \xi'(t) \int_{\Omega} \int_0^1 z^2(x, \rho, t) d\rho dx - \frac{\xi(t)}{2\tau} \int_{\Omega} z^2(x, 1, t) dx + \frac{\xi(t)}{2\tau} \|u_t(x, t)\|^2 \end{aligned}$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned} E'(t) & = - \left(\beta_1(t) - \frac{\xi(t)}{2\tau} \right) \|u_t\|^2 - \beta_2(t) \int_{\Omega} z(x, 1, t) u_t(x, t) dx \\ & \quad + \frac{1}{2} \xi'(t) \int_{\Omega} \int_0^1 z^2(x, \rho, t) d\rho dx - \frac{\xi(t)}{2\tau} \int_{\Omega} z^2(x, 1, t) dx \\ & \leq - \left(\beta_1(t) - \frac{\xi(t)}{2\tau} \right) \|u_t\|^2 - \beta_2(t) \int_{\Omega} z(x, 1, t) u_t(x, t) dx \\ & \quad - \frac{\xi(t)}{2\tau} \int_{\Omega} z^2(x, 1, t) dx \end{aligned} \quad (7.13)$$

elde edilir. Young eşitsizliği kullanılırsa

$$\int_{\Omega} z(x, 1, t) u_t(x, t) dx \leq \frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} \|z(x, 1, t)\|^2 \quad (7.14)$$

olur. (7.14) ü (7.13) de yerine yazarsak

$$\begin{aligned} & E'(t) \\ & \leq - \left(\beta_1(t) - \frac{\xi(t)}{2\tau} - \frac{|\beta_2(t)|}{2} \right) \|u_t\|^2 - \left(\frac{\xi(t)}{2\tau} - \frac{|\beta_2(t)|}{2} \right) \|z(x, 1, t)\|^2 \\ & \leq - \beta_1(t) \left(1 - \frac{\bar{\xi}}{2\tau} - \frac{\mu}{2} \right) \|u_t\|^2 - \beta_1(t) \left(\frac{\bar{\xi}}{2\tau} - \frac{\mu}{2} \right) \|z(x, 1, t)\|^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (7.15)$$

elde edilir.

7.2 Enerjinin Azalması

Teorem 7.2.1 Varsayalım ki, $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, $u_1 \in H^2(\Omega)$, (H1)-(H2) varsayımları geçerli olsun. Ayrıca, c, ω pozitif sabitler ise $\forall t \geq 0$ için

$$E(t) \leq cE(0) e^{-\omega \int_0^t \beta_1(s) ds} \quad (7.16)$$

dır.

İspat. ϕ , Lemma 7.1.1 de belirtilen tüm varsayımları sağlayan sınırlı bir fonksiyon olmak üzere (7.7) in ilk denklemini $\phi_t E^q u$ ile çarparsak

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S^T E^q \phi' \int_{\Omega} u (u_{tt} + \Delta^2 u + \beta_1(t) u_t + \beta_2(t) z(x, 1, t)) dx dt \\ &= \underbrace{\int_S^T E^q \phi' \int_{\Omega} u u_{tt} dx dt}_{A_1} + \underbrace{\int_S^T E^q \phi' \int_{\Omega} u \Delta^2 u dx dt}_{A_2} \\ &\quad + \int_S^T E^q \phi' \int_{\Omega} \beta_1(t) u u_t dx dt + \int_S^T E^q \phi' \int_{\Omega} \beta_2(t) u z(x, 1, t) dx dt \end{aligned}$$

bulunur. Burada herbir ifadeyi ayrı ayrı bulalım:

A_1 ifadesi için

$$\begin{aligned}
& \int_S^T E^q \phi' \int_{\Omega} uu_{tt} dx dt \\
&= \int_S^T E^q \phi' \int_{\Omega} \left(\frac{d}{dt} (uu_t) - u_t^2 \right) dx dt \\
&= \int_S^T E^q \phi' \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (uu_t) dx dt - \int_S^T E^q \phi' \int_{\Omega} u_t^2 dx dt \\
&= \frac{d}{dt} \left(\int_S^T E^q \phi' \int_{\Omega} uu_t dx dt \right) - \int_S^T (qE' E^{q-1} \phi' + E^q \phi'') \int_{\Omega} uu_t dx dt \\
&\quad - \int_S^T E^q \phi' \|u_t\|^2 dt \\
&= E^q \phi' \int_{\Omega} uu_t dx dt \Big|_S^T - \int_S^T (qE' E^{q-1} \phi' + E^q \phi'') \int_{\Omega} uu_t dx dt - \int_S^T E^q \phi' \|u_t\|^2 dt
\end{aligned}$$

burada

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\int_S^T E^q \phi' \int_{\Omega} uu_t dx dt \right) &= \int_S^T (qE' E^{q-1} \phi' + E^q \phi'') \int_{\Omega} uu_t dx dt \\
&\quad + \int_S^T E^q \phi' \frac{d}{dt} \int_{\Omega} uu_t dx dt
\end{aligned}$$

eşitliği kullanıldı.

A_2 ifadesi için, Green özdeşliğinden

$$\int_S^T E^q \phi' \int_{\Omega} u \Delta^2 u dx dt = \int_S^T E^q \phi' \|\Delta u\|^2 dt$$

elde edilir.

Buradan A_1 ve A_2 ifadelerini yerlerine yazarsak

$$\begin{aligned}
0 &= E^q \phi' \int_{\Omega} uu_t dx dt \Big|_S^T - \int_S^T (qE' E^{q-1} \phi' + E^q \phi'') \int_{\Omega} uu_t dx dt \\
&\quad - 2 \int_S^T E^q \phi' \|u_t\|^2 dt + \int_S^T E^q \phi' \|u_t\|^2 dt + \int_S^T E^q \phi' \|\Delta u\|^2 dt \\
&\quad + \int_S^T E^q \phi' \beta_1(t) \int_{\Omega} uu_t dx dt + \int_S^T E^q \phi' \beta_2(t) \int_{\Omega} uz(x, 1, t) dx dt \\
&= E^q \phi' \int_{\Omega} uu_t dx dt \Big|_S^T - \int_S^T qE' E^{q-1} \phi' \int_{\Omega} uu_t dx dt \\
&\quad - \int_S^T E^q \phi'' \int_{\Omega} uu_t dx dt - 2 \int_S^T E^q \phi' \|u_t\|^2 dt \\
&\quad + \int_S^T E^q \phi' \|u_t\|^2 dt + \int_S^T E^q \phi' \|\Delta u\|^2 dt \\
&\quad + \int_S^T E^q \phi' \beta_1(t) \int_{\Omega} uu_t dx dt + \int_S^T E^q \phi' \beta_2(t) \int_{\Omega} uz(x, 1, t) dx dt
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde, (7.7) in ikinci denklemini $E^q \phi' \xi(t) e^{-2\tau\rho} z(x, \rho, t)$ ile çarparsak

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S^T E^q \phi' \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-2\tau\rho} \xi(t) z(\tau z_t + z_{\rho}) dx d\rho dt \\ &= \underbrace{\int_S^T E^q \phi' \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-2\tau\rho} \xi(t) \tau z z_t dx d\rho dt}_{A_3} + \underbrace{\int_S^T E^q \phi' \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-2\tau\rho} \xi(t) z z_{\rho} dx d\rho dt}_{A_4} \end{aligned}$$

eşitliğin ilk ifadesi A_3 için

$$\begin{aligned} &\int_S^T E^q \phi' \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-2\tau\rho} \xi(t) \tau z z_t dx d\rho dt \\ &= \int_S^T E^q \phi' \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-2\tau\rho} \xi(t) \tau \left(\frac{1}{2} \frac{d}{dt} z^2 \right) dx d\rho dt \\ &= \frac{1}{2} E^q \phi' \xi(t) \tau \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-2\tau\rho} z^2 dx d\rho \Big|_S^T - \frac{1}{2} \int_S^T \int_{\Omega} \int_0^1 (E^q \phi' \xi(t) \tau e^{-2\tau\rho})' z^2 dx d\rho dt \end{aligned}$$

elde edilir. İlk satırda

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \int_S^T E^q \phi' \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-2\tau\rho} \xi(t) \tau z^2 dx d\rho dt \\ &= \int_S^T \int_{\Omega} \int_0^1 (E^q \phi' \xi(t) \tau e^{-2\tau\rho})' z^2 dx d\rho dt \\ &\quad + \int_S^T E^q \phi' \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-2\tau\rho} \xi(t) \tau \left(\frac{d}{dt} z^2 \right) dx d\rho dt \end{aligned}$$

eşitliği kullanıldı.

Eşitliğin ikinci ifadesi A_4 için

$$\begin{aligned} &\int_S^T E^q \phi' \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-2\tau\rho} \xi(t) z z_{\rho} dx d\rho dt \\ &= \int_S^T E^q \phi' \int_{\Omega} \int_0^1 \xi(t) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} (e^{-2\tau\rho} z^2) + \tau e^{-2\tau\rho} z^2 \right) dx d\rho dt \\ &= \int_S^T E^q \phi' \int_{\Omega} \int_0^1 \xi(t) \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} (e^{-2\tau\rho} z^2) dx d\rho dt + \int_S^T E^q \phi' \int_{\Omega} \int_0^1 \xi(t) \tau e^{-2\tau\rho} z^2 dx d\rho dt \\ &= \frac{1}{2} E^q \phi' \xi(t) z \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-2\tau\rho} z^2 dx d\rho \Big|_S^T - \frac{\tau}{2} \int_S^T (E^q \phi' \xi(t))' \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-2\tau\rho} z^2 dx d\rho dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_S^T E^q \phi' \xi(t) \int_{\Omega} (e^{-2\tau} z^2(x, 1, t) - z^2(x, 0, t)) dx dt \\ &\quad + \int_S^T E^q \phi' \xi(t) \tau \int_0^1 \int_{\Omega} e^{-2\tau\rho} z^2 dx d\rho dt \end{aligned}$$

bulunur. Buradan A_3 ve A_4 ifadelerini yerlerine yazarsak

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2} E^q \phi' \xi(t) \tau \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-2\tau\rho} z^2 dx d\rho \Big|_S^T - \frac{1}{2} \int_S^T \int_{\Omega} \int_0^1 (E^q \phi' \xi(t) \tau e^{-2\tau\rho})' z^2 dx d\rho dt \\
&+ \frac{1}{2} E^q \phi' \xi(t) z \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-2\tau\rho} z^2 dx d\rho \Big|_S^T - \frac{\tau}{2} \int_S^T (E^q \phi' \xi(t))' \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-2\tau\rho} z^2 dx d\rho dt \\
&+ \frac{1}{2} \int_S^T E^q \phi' \xi(t) \int_{\Omega} (e^{-2\tau} z^2(x, 1, t) - z^2(x, 0, t)) dx dt \\
&+ \int_S^T E^q \phi' \xi(t) \tau \int_0^1 \int_{\Omega} e^{-2\tau\rho} z^2 dx d\rho dt
\end{aligned}$$

elde edilir. (7.7) in ilk denklemini $\phi' E^q u$ ile çarparak (7.7) in ikinci denklemini $E^q \phi' \xi(t) e^{-2\tau\rho} z(x, \rho, t)$ ile çarparak elde ettiğimiz sonuçları taraf tarafa toplarsak

$$\begin{aligned}
&\int_S^T E^q \phi' \|u_t\|^2 dt + \int_S^T E^q \phi' \|\Delta u\|^2 dt + \int_S^T E^q \phi' \xi(t) \tau \int_0^1 \int_{\Omega} e^{-2\tau\rho} z^2 dx d\rho dt \\
&= - E^q \phi' \int_{\Omega} u u_t dx dt \Big|_S^T + \int_S^T (q E' E^{q-1} \phi' + E^q \phi'') \int_{\Omega} u u_t dx dt + 2 \int_S^T E^q \phi' \|u_t\|^2 dt \\
&- \int_S^T \beta_1(t) E^q \phi' \int_{\Omega} u u_t dx dt - \int_S^T \beta_2(t) E^q \phi' \int_{\Omega} u z(x, 1, t) dx dt \\
&- \frac{1}{2} E^q \phi' \xi(t) z \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-2\tau\rho} z^2 dx d\rho \Big|_S^T + \frac{\tau}{2} \int_S^T (E^q \phi' \xi(t))' \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-2\tau\rho} z^2 dx d\rho dt \\
&- \frac{1}{2} \int_S^T E^q \phi' \xi(t) \int_{\Omega} (e^{-2\tau} z^2(x, 1, t) - z^2(x, 0, t)) dx dt
\end{aligned}$$

eşitliğin sol tarafı için enerji denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\int_S^T E^q \phi' \|u_t\|^2 dt + \int_S^T E^q \phi' \|\Delta u\|^2 dt + \int_S^T E^q \phi' \xi(t) \tau \int_0^1 \int_{\Omega} e^{-2\tau\rho} z^2 dx d\rho dt \\
&= \left\{ \|u_t\|^2 dt + \|\Delta u\|^2 dt + \xi(t) \tau \int_0^1 \int_{\Omega} e^{-2\tau\rho} z^2 dx d\rho dt \right\} \int_S^T E^q \phi' dt \\
&= 2 \min \{1, e^{-2\tau}\} \int_S^T E^q \phi' dt \\
&= A \int_S^T E^{q+1} \phi' dt
\end{aligned}$$

dır. Burada $A = 2\min\{1, e^{-2\tau}\}$ dır. O halde toplamış olduğumuz eşitlik

$$\begin{aligned}
& A \int_S^T E^{q+1} \phi' dt \\
&= - \underbrace{E^q \phi' \int_{\Omega} uu_t dx dt \Big|_S^T}_{B_1} + \underbrace{\int_S^T q E' E^{q-1} \phi' \int_{\Omega} uu_t dx dt}_{B_2} \\
&+ \underbrace{\int_S^T E^q \phi'' \int_{\Omega} uu_t dx dt}_{B_3} + \underbrace{2 \int_S^T E^q \phi' \|u_t\|^2 dt}_{B_4} \\
&- \underbrace{\int_S^T \beta_1(t) E^q \phi' \int_{\Omega} uu_t dx dt}_{B_5} - \underbrace{\int_S^T \beta_2(t) E^q \phi' \int_{\Omega} uz(x, 1, t) dx dt}_{B_6} \\
&- \underbrace{\frac{1}{2} E^q \phi' \xi(t) \tau \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-2\tau t \rho} z^2 dx d\rho \Big|_S^T}_{B_7} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_S^T (E^q \phi' \xi(t))' \tau \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-2\tau \rho} z^2 dx d\rho dt}_{B_8} \\
&- \underbrace{\frac{1}{2} \int_S^T E^q \phi' \xi(t) \int_{\Omega} (e^{-2\tau} z^2(x, 1, t) - z^2(x, 0, t)) dx dt}_{B_9} \tag{7.17}
\end{aligned}$$

şekline dönüşür.

B_1 ifadesi için Cauchy-Schwarz, Young-Poincaré eşitsizliklerini kullanırsak ve ϕ' nin sınırlı olduğunu ve E nin R^+ üzerinde artan bir fonksiyon olduğunu göz önünde bulundurursak, aşağıdaki sonuca ulaşırız:

$$\begin{aligned}
\left(E^q \phi' \int_{\Omega} uu_t dx dt \right)_S^T &\leq E^q \phi' \left[\frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{1}{2} \|u_t\|^2 \right]_S^T \\
&\leq c E^q \phi' \left[\frac{1}{2} \|u_x\|^2 + \frac{1}{2} \|u_t\|^2 \right]_S^T \\
&\leq c E^q E(S) \\
&= c E^{q+1}(S)
\end{aligned}$$

elde edilir.

B_2 ifadesi için (7.10) dan

$$\begin{aligned}
\int_S^T \left| q E' E^{q-1} \phi' \int_{\Omega} uu_t dx \right| dt &\leq c \int_S^T E^q(t) |E'(t)| dt \\
&\leq c \int_S^T E^q(t) (-E'(t)) dt \\
&\leq c E^{q+1}(S)
\end{aligned}$$

dır.

B_3 ifadesi için

$$\begin{aligned}
\int_S^T E^q \phi'' \int_{\Omega} u u_t dx dt &\leq c \int_S^T E^{q+1}(t) (-\phi'') dt \\
&\leq c E^{q+1}(S) \int_S^T (-\phi'') dt \\
&\leq c E^{q+1}(S) (-\phi'(T) + \phi'(S)) \\
&\leq c E^{q+1}(S),
\end{aligned}$$

şekline dönüşür.

B_4 ifadesi için

$$\begin{aligned}
\int_S^T E^q(t) \phi' \int_{\Omega} u_t^2 dx dt &\leq c \int_S^T E^q \phi' \frac{1}{\beta_1(t)} \int_{\Omega} \beta_1(t) u_t^2 dx dt \\
&\leq \int_S^T E^q \frac{\phi'}{\beta_1(t)} (-E'(t)) dt
\end{aligned} \tag{7.18}$$

elde edilir.

$$\phi(t) = \int_0^t \beta_1(s) ds \tag{7.19}$$

olsun. Buradan $\phi(t)$ nin $C^1(R)$ de azalmayan ve sınırlı olduğu açıktır. Ayrıca

$$t \rightarrow +\infty \text{ için } \phi(t) \rightarrow +\infty \tag{7.20}$$

dır. Böylece, (7.18) ile aşağıdaki sonuca

$$\int_S^T E^q \phi' \int_{\Omega} u_t^2 dx dt \leq c \int_S^T E^q (-E') dt \leq c E^{q+1}(S) \tag{7.21}$$

varılır.

B_5 ifadesi için **(H1)** varsayımı, Hölder, Young, Poincaré eşitsizliği ve (7.10) dan,

$$\begin{aligned}
\left| \int_S^T E^q \phi' \int_{\Omega} u u_t dx dt \right| &\leq c \int_S^T E^q \phi' \|u\| \|u_t\| dt \\
&\leq c \varepsilon' \int_S^T E^q \phi' \|u\|^2 dt + c(\varepsilon') \int_S^T E^q \phi' \|u_t\|^2 dt \\
&\leq \varepsilon' c_* \int_S^T E^q \phi' \|\Delta u\|^2 dt + c(\varepsilon') \int_S^T E^q \phi' \|u_t\|^2 dt \\
&\leq \varepsilon' c_* \int_S^T E^{q+1} \phi' dt + c E^{q+1}(S)
\end{aligned}$$

elde edilir. B_6 ve B_7 ihmal edildi.

B_8 ifadesi için $\xi' \leq 0$ ve E nin tanımından, ε' i yeterince küçük seçersek

$$\begin{aligned} \int_S^T (E^q \xi(t))' \tau \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-2\tau\rho} z^2 dx d\rho dt &\leq \int_S^T (E^q)' \xi(t) \tau \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-2\tau\rho} z^2 dx d\rho dt \\ &\leq c \int_S^T E^q |E'| dt \\ &\leq c \int_S^T E^q (-E'(t)) dt \\ &\leq c E^{q+1}(S) \end{aligned}$$

dır.

B_9 ifadesi için

$$\begin{aligned} \int_S^T E^q \xi(t) \int_{\Omega} e^{-2\tau} z^2(x, 1, t) dx dt &\leq c \int_S^T E^q \xi(t) \int_{\Omega} z^2(x, 1, t) dx dt \\ &\leq c \int_S^T E^q (-E') dt \\ &\leq c E^{q+1}(S) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \int_S^T E^q \xi(t) \int_{\Omega} z^2(x, 0, t) dx dt &= \int_S^T E^q \xi(t) \int_{\Omega} u_t^2(x, t) dx dt \\ &\leq c E^{q+1}(S) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan (7.17) den ve elde ettiğimiz önceki tahminlerden

$$\int_S^T E^q \phi' dt \leq C E^{q+1}(S)$$

elde edilir.

8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

8.1 Sonuçlar

Tezin dördüncü bölümünde değişken katsayılı güçlü sönüm terimli

$$z_{tt} - \Delta z - \Delta z_t + \mu_1(t) |z_t|^{p-2} z_t = \mu_2(t) |z|^{q-2} z \quad (8.1)$$

dalga denkleminin çözümlerinin patlamasını ele aldık.

Tezin beşinci bölümünde doğrusal olmayan sönüm ve kaynak terime sahip

$$z_{tt} + \Delta (k(x) |\Delta z|^{m-2} \Delta z) + \Delta^2 z_t + |z_t|^{p-1} z_t = |z|^{q-1} z \quad (8.2)$$

ağırlıklı m -biharmonik denklemin çözümlerinin varlığı, azalması ve patlamasını çalıştık.

Tezin altıncı bölümünde

$$\frac{z_t}{|x|^{2m}} + \mathcal{A}z = \alpha(t) |z|^{r-1} z \quad (8.3)$$

tekil potansiyele sahip yüksek mertebeden bir reaksiyon difüzyon denkleminin çözümlerinin global varlığı ve patlaması ele alındı. Burada $m > 1$ için $\mathcal{A} = (-\Delta)^m$ dır.

Tezin yedinci bölümünde

$$u_{tt} + \Delta^2 u + \beta_1(t) u_t(x, t) + \beta_2(t) u_t(x, t - \tau) = 0 \quad (8.4)$$

değişken katsayılı gecikme terimli petrovsky denklemi için çözümlerin azalması çalışıldı.

8.2 Öneriler

Elde edilen sonuçlarımız daha farklı koşullar altında çalışılabilir. Ayrıca (8.1) probleminin enerji azalması ve global varlığı çalışılabilir. (8.3) problemlerinin çözümlerinin enerji azalması çalışılabilir. (8.4) probleminin çözümlerinin patlaması çalışılabilir.

KAYNAKLAR

- Abdallah, C. T., Sipahi, R., Niculescu, S. J., Michiels, W., Gu, K. (2011). Stability and stabilization of systems with time delay: limitations and opportunities. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 31(1), 38.
- Adams, R.A. and Fournier, J.J.F. (2003). *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York.
- Al-Gharabli, M. M. and Al- Mahdi, M. (2022). Existence and stability results of a plate equation with nonlinear damping and source term. *Electronic Research Archive*, 30(11), 4038-4065.
- Ball, J. M. (1977). Remarks on blow-up and nonexistence theorems for nonlinear evolution equations. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 28(4), 473-486.
- Balinsky, A.A., Evans, W.D., Lewis, R.T. (2015). *The Analysis and Geometry of Hardy's Inequality*. Universitext. Springer, Geneva.
- Bandle, C., and Brunner, H. (1998). Blow up in diffusion equations: a survey. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 97(1-2), 3-22.
- Benaissa A., Benguessoum A., Messaoudi S.A. (2014). Energy decay of solutions for wave equation with a constant weak delay and a weak internal feedback. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 11, 1-13.
- Boonaama, A., Maouni, M., Ouaoua, A. (2023a). On the existence, decay and blow up of solutions for a quasilinear hyperbolic equations involving the weighted p-Laplacian with source terms. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 20(78).
- Boonaama, A., Maouni, M., Ouaoua, A. (2023b). Global existence, decay and blow up of solutions for a quasilinear hyperbolic equations with source terms. *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, 14(1), 1977-1988.
- Brezis, H. (2011). *Functional analysis, Sobolev Spaces and partial differential equations*, Springer, New York.
- Datko, R., Lagnese, J., Polis, M. (1986). An example on the effect of time delays in boundary feedback stabilization of wave equations. *SIAM journal on control and optimization*, 24(1), 152-156.
- Do, T. D., Trong, N. N., Thanh, B. L. T. (2023). On a Higher-order Reaction-diffusion Equation with a Special Medium Void via Potential Well Method. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 27(1), 53-79.
- Evans, L. C. (1998). *Partial differential equations*. Graduate Studies in Mathematics, 19(2).
- Fidan, A. and Pişkin, E. (2025). Global existence and decay of solutions for a variable coefficients Petrovsky equation with delay term. *JMSCM*, 6(1) 120-133.

- Fidan, A., Pişkin, E., Çelik, E. (2024). Existence, decay and blow-up of solutions for a weighted m -biharmonic equation with nonlinear damping and source terms. *Journal of Function Spaces*, 2024(1), 5866792.
- Freitas, P. and Zuazua, E. (1996). Stability results for the wave equation with indefinite damping. *Journal of Differential Equations*, 132(2), 338-352.
- Friedman, A. (1965). Remarks on nonlinear parabolic equations, *Applications of Nonlinear Partial Differential Equations in Mathematical Physics*, American Mathematical Society, Providence, RI, 3–23.
- Fridman, E. (2014). *Introduction to time-delay systems*, Analysis and Control, Birkhäuser, 75.
- Fujita, H. (1966). On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$. *Journal of the faculty of science, the University of Tokyo, Sect. IA, Math.*, 13: 109 124.
- Galaktionov, V. A., and Vázquez, J. L. (2002). The problem of blow-up in nonlinear parabolic equations. *Discrete and continuous dynamical systems*, 8(2), 399-434.
- Georgiev, V. and Todorova, G. (1994). Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and source terms. *Journal of Differential Equations*, 109(2) 295-308.
- Gerbi, S. and Said-Houari, B. (2012). Exponential decay for solutions to semilinear damped wave equation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S (DCDS-S)*, 5(3), 559-566.
- Guo, B. and Li, X. (2019). Bounds for the lifespan of solutions to fourth-order hyperbolic equations with initial data at arbitrary energy level. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 23, 1461-1477.
- Han, Y. (2021). Blow-up phenomena for a fourth-order parabolic equation with a general nonlinearity. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 27, 261-270.
- Hu, B. (2011). Blow-up theories for semilinear parabolic equations, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer.
- Huang, W.Y. and Chen, W.L. (2014). Global existence and blow-up of solutions for nonlinear Klein-Gordon equation with damping term and nonnegative potentials. *Abstract and Applied Analysis*, Hindawi Publishing Corporation *Abstract and Applied Analysis*, 9, Article ID 142892.
- Jiang, Y., Zheng, P. and Song, P. (2004). Blow up analysis for a nonlinear diffusion equation with nonlinear boundary conditions. *Applied Mathematics Letters*, 17, 193-199.
- Kaplan, S. (1963). On the growth of solutions of quasilinear parabolic equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 16, 305-330.

- Kelley, W. G. and Peterson, A. C. (2010). *The theory of differential equations*. Springer-Verlag, 423, New York.
- Kesavan, Y.(1989). *Topics in functional analysis and applications*, Wiley-Blackwell, 267, India.
- Kolmanovskii, V. and Myshkis, A. (2012). *Applied theory of functional differential equations*, 85, Springer Science and Business Media.
- Komornik, V. (1994). *Exact controllability and stabilization: the multiplier method*. Elsevier Masson.
- Korpusov, M. O., Ovchinnikov, A. V. E., Sveshnikov, A. G., Yushkov, E. V. (2018). *Blow-up in nonlinear equations of mathematical physics: theory and methods* (Vol. 27). Walter de Gruyter GmbH & Co KG.
- Kuang, Y. (Ed.). (1993). *Delay differential equations: with applications in population dynamics*. Academic press.
- Levine, H.A. (1974a). Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_t = -\Delta u + F(u)$, Transactions of the American mathematical society, 192, 1-21.
- Levine, H.A. (1974b). Some additional remarks on the nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations, SIAM Journal on Mathematical Analysis, 5 138-146.
- Levine, H. and Todorova, G. (2001). Blow up of solutions of the Cauchy problem for a wave equation with nonlinear damping and source terms and positive initial energy. Proceedings of the American Mathematical Society, 129(3), 793-805.
- Li, M.R. and Tsai, L.Y. (2003). Existence and nonexistence of global solutions of same system of semi linear wave equations. Nonlinear Analysis, 54(8), 1397-1415.
- Lions, J. L. (1969). *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod.
- Martinez, P. (1999). A new method to obtain decay rate estimates for dissipative systems. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 4, 419-444.
- Messaoudi, S.A. (2001). Blow up in a nonlinearly damped wave equation. Mathematische Nachrichten, 231 105-111.
- Messaoudi, S.A. (2005). On the decay of solutions for a class of quasilinear hyperbolic equations with nonlinear damping and source terms. Mathematical methods in the applied sciences, 28, 1819-1828.
- Meyvacı, M. (2021). Decay Estimate for the Time-Delayed Fourth- Order Wave Equations. Mathematical Sciences and Applications E-Notes, 9(3), 142-150.

- Mokeddem, S. (2016). On behaviors of the energy of solutions for some damped nonlinear hyperbolic equations with p-laplacian. *International Journal of Advanced Research in Mathematics*, 6, 13-20.
- Nakao, M. (1976). Convergence of solutions of the wave equation with a nonlinear dissipative term to the steady state. *Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University. Series A, Mathematics*, 30(2), 257-265.
- Nakao, M. (1977). Asymptotic stability of the bounded or almost periodic solution of the wave equation with nonlinear dissipative term. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 58(2), 336-343.
- Nečas, J. (2012). *Direct Methods in the Theory of Elliptic Equations*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Heidelberg.
- Nicaise, S. and Pignotti, C. (2006). Stability and instability results of the wave equation with a delay term in the boundary or internal feedbacks. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 45(5), 1561-1585.
- Payne, L. E. and Sattinger, D. H. (1975). Saddle points and instability of nonlinear hyperbolic equations. *Israel Journal of Mathematics*, 22(3), 273-303.
- Petrovsky, I. G. (1937). Über das Cauchysche Problem für Systeme von partiellen Differential-gleichungen. *Mathematical collection*, 44(8), 15-870.
- Petrovsky, I. G. (1939). Sur l'analyticité des solutions des systèmes d'équations différentielles. *Mathematical collection*, 5(1), 3-70.
- Philippin, G.A. (2015). Blow-up phenomena for a class of fourth-order parabolic problems. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 143(6), 2507-2513.
- Pişkin, E. (2015a) . Existence, decay and blow up of solutions for the extensible beam equation with nonlinear damping and source terms. *Open Mathematics*, 13 408-420.
- Pişkin, E. (2015b). On the decay and blow up of solutions for a quasilinear hyperbolic equations with nonlinear damping and source terms. *Boundary Value Problems*, 2015, 1-14.
- Pişkin, E. (2018). *Kısmi Türevli Denklemler*, Seçkin Yayıncılık, Ankara.
- Pişkin, E. (2021). *Evolüsyon Denklemlerin Çözümlerinin Patlaması*, Pegem Akademi.
- Pişkin, E. (2024). *Diferansiyel Denklemler*, Seçkin Yayıncılık, Ankara.
- Pişkin, E. (2025a). *Sobolev Uzayları*, Seçkin Yayıncılık, Ankara.
- Pişkin, E. (2025b). *Evolüsyon Denklemlerin Enerji Azalması*, Pegem Akademi.
- Pişkin, E. and Fidan, A. (2022). Nonexistence of global solutions for the strongly damped wave equation with variable coefficients, *Universal Journal of Mathematics and Applications*, 5(2), 51-56.

- Pişkin, E. and Fidan, A. (2023). Finite time blow up of solutions for the m -Laplacian equation with variable coefficients, *Al-Qadisiyah Journal of Pure Science*, 28(1).
- Pişkin, E. and Okutmuşur, B. (2021). *An introduction to Sobolev spaces*, Bentham Science.
- Richard, J. P. (2003). Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. *automatica*, 39(10), 1667-1694.
- Runzhang, X. and Jihong, S. (2009). Some generalized results for global well-posedness for wave equations with damping and source terms, *Mathematics and Computers in Simulation*, 80(4), 804-807.
- Sattinger, N. (1968). Stability of nonlinear hyperbolic equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 28, 226-244.
- Shahrouzi, M. (2023). Asymptotic behavior of solutions for a nonlinear viscoelastic higher-order $p(x)$ -Laplacian equation with variable-exponent logarithmic source term. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, 29(3), 77.
- Stein, E. M. (1970). *Singular integrals and differentiability properties of functions* (No. 30). Princeton university press.
- Tahamtani F. (2009). Blow-up results for a nonlinear hyperbolic equation with Lewis function, *Boundary Value Problems*, 2009, 1-9.
- Thanh, B. L. T., Trong, N. N., Do, T. D. (2021). Blow-up estimates for a higher-order reaction-diffusion equation with a special diffusion process. *Journal of Elliptic and Parabolic Equations*, 7, 891-904.
- Thanh, B. L. T., Trong, N. N., Do, T. D. (2023). Bounds on blow-up time for a higher-order non-Newtonian filtration equation. *Mathematica Slovaca*, 73(3), 749-760.
- Vitillaro, E. (1999). Global nonexistence theorems for a class of evolution equations with dissipation. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 149(2), 155-182.
- Wu Y. and Xue X. (2013). Uniform decay rate estimates for a class of quasilinear hyperbolic equations with nonlinear damping and source terms. *Applicable Analysis*, 92(6), 1169-1178.
- Wu S. (2018). Lower and Upper Bounds for the Blow- Up Time of a Class of Damped Fourth-Order Nonlinear Evolution Equations, *Springer*, 24 287-295.
- Yu S. (2009). On the strongly damped wave equation with nonlinear damping and source terms. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 39, 1-18.

Ye Y.(2013). Existence and decay estimate of global solutions to system of nonlinear wave equations with damping and source terms. *Abstract and Applied Analysis*, 2013 1-9.

Zheng, N. (2004). *Nonlinear Evolution Equations*, Chapman Hall/CRC.

Zheng, X., Shang, Y., Peng, X. (2020). Blow up of Solutions for a Nonlinear Petrovsky Type Equation with Time-dependent Coefficients. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, 36(4), 836-846.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyad, Ad	FİDAN, Ayşe
Web sayfası (ResearchGate, Academia, vs.)	

Eğitim Bilgileri

Derece	Kurum	Mezuniyet Yılı
Yüksek Lisans	Dicle Üniversitesi	2017
Lisans	Dicle Üniversitesi	2014
Lise	Fatih Lisesi	2007

İş Deneyimi

Dönem (Yıl)	Şirket, Kurum	Görev
2017-2018	MEB	Öğretmen
2018-2021	Özel Kurumlar	Öğretmen

Yayınlar

1. Pişkin, E. and Fidan, A. (2022). Nonexistence of global solutions for the strongly damped wave equation with variable coefficients. Universal Journal of Mathematics and Applications, 5(2), 51-56.
2. Pişkin, E. and Fidan, A. (2023). Finite time blow up of solutions for the m-Laplacian equation with variable coefficients. Al-Qadisiyah Journal of Pure Science, 28:1.
3. Fidan, A., Pişkin, E. (2025). Global existence and decay of solutions for a variable coefficients Petrovsky equation with delay term. JMSCM, 6(1) 120-133.
4. Fidan, A., Pişkin, E. and Çelik, E. (2024). Existence, Decay, and Blow-up of Solutions for a Weighted m-Biharmonic Equation with Nonlinear Damping and Source Terms. Journal of Function Spaces, 2024(1), 5866792 (SCI).
5. Fidan, A. and Pişkin, E. (2023). Upper and lower bounds for the blow up time for sixth-order parabolic-type equations with time dependent coefficient. The Aligarh Bulletin of Mathematics, 42(2) 69- 80.
6. Fidan, A., Pişkin E., Saad, S. A. A., Alkhalifa, L. and Abdalla, M. (2025). Existence and blow up of solution for a Petrovsky equations of Hartree type. Discrete and Continuous Dynamical Systems-S, 0-0 (SCI).
7. Fidan, A. and Pişkin, E. (2024). Decay of solutions for a singular parabolic m-biharmonic equation with logarithmic nonlinearity. Turkey Mathematical Sciences, 1(1).
8. Fidan, A. and Pişkin, E. (2025). Decay and blow up of solutions for a singular m-triharmonic with logarithmic nonlinearity. Miskolc Mathematical Notes (inpress) (SCI).

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ BENZERLİK BİLDİRİMİ FORMU

Öğrencinin Adı, Soyadı	Ayşe FİDAN		
Öğrenci No	19804505		
Ana Bilim Dalı	Matematik		
Program Türü	Proje ☐	Yüksek Lisans ☐	Doktora ☒
Tez Danışmanı (Ünvanı, Adı, Soyadı)	Prof. Dr. Erhan PİŞKİN		
(Varsa)II. TezDanışmanı (Ünvanı, Adı, Soyadı)			
Tez Başlığı	Değişken Katsayılı Evolüsyon Denklemlerin Çözümlerinin Davranışı		
RAPOR BİLGİLERİ			
Raporlama Aşaması	Tez Savunma Sınavı Sonrası		
Sayfa Sayısı	129		
Raporlama Tarihi	03/07/2025		
Benzerlik Oranı(%)	%12		

Yukarıda bilgileri verilen tez çalışmamın toplam 129 sayfalık kısmına ilişkin, 03/07/2025 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından Turnitin isimli intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı %12 olarak tespit edilmiştir. Uygulanan filtrelemeler:

- ☒Başlangıç Bölümleri(Kabul ve Onay sayfası, Teşekkür sayfası, Özet/Abstract)hariç
☒Kaynaklar hariç
☐Alıntılar hariç/dâhil
☐Diğer(Açıklayınız)

Tezimin benzerlik oranı, Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İntihal Raporu Uygulama Esaslarında belirtilen üst sınır benzerlik oranını aşmamaktadır. Benzerlik oranım üst sınır benzerlik oranının altında olsa dahi aksinin tespit edilmesi durumunda her türlü yasal sorumluluğu kabul ettiğimi ve hukuki sonuçlarına razı olduğumu bildirir,
Gereğini arz ederim.

Öğrenci: Ayşe FİDAN

Tarih: 03/07/2025

İmza:

Danışman: Prof. Dr. Erhan PİŞKİN Tarih: 03/07/2025	İmza:
Ana Bilim Dalı Başkanı: Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY Tarih: 03/07/2025	İmza: