



**MANİFOLDLAR ÜZERİNDE HEMEN HEMEN
HSU-ALTIN YAPILAR**

Büşra AY

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

TEMMUZ 2025

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirim, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarımı kabullendiğimi beyan ederim.

Büşra AY

10/07/2025

MANİFOLDLAR ÜZERİNDE HEMEN HEMEN
HSU-ALTIN YAPILAR
(Doktora Tezi)

Büşra AY

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Temmuz 2025

ÖZET

Bu tez çalışmasında, altın yapı ve Hsu yapı teorisi çerçevesinde hemen hemen Hsu-altın yapısı ve hemen hemen Hsu-altın B -manifoldları incelenmiştir. Çalışmada öncelikle geçmişten günümüze bu alanda yapılan araştırmalar derlenmiş ve temel kavramlar ile notasyonlar ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Daha sonra hemen hemen Hsu-altın yapı ve hemen hemen Hsu-altın B -manifoldu tanımlanmış, bu yapıların temel özellikleri araştırılmıştır. İntegrallenebilirlik ve paralellik koşulları detaylı olarak incelenmiş ve bu yapılarla ilişkili eğrilik özellikleri ortaya konulmuştur. Son olarak araştırma kapsamında elde edilen temel bulgu ve kazanımlar değerlendirilmiştir.

Bilim Kodu : 20402
Anahtar Kelimeler : Hsu yapı, altın yapı, hemen hemen Hsu-altın yapı, hemen hemen Hsu-altın B -manifold
Sayfa Adedi : 59
Danışman : Prof. Dr. Mustafa ÖZKAN

ALMOST HSU-GOLDEN STRUCTURES ON MANIFOLDS

(Ph. D. Thesis)

Büşra AY

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

July 2025

ABSTRACT

In this thesis, almost Hsu-golden structures and almost Hsu-golden B -manifolds have been examined within the framework of golden structure and Hsu structure theory. In the study, the research conducted in this field from the past to the present has been compiled, and the fundamental concepts and notations have been examined in detail. Then, the almost Hsu-golden structures and almost Hsu-golden B -manifolds were defined, and the fundamental properties of these structures were investigated. The conditions for integrability and parallelism have been examined in detail, and the curvature properties associated with these structures have been revealed. Finally, the main findings and achievements obtained within the scope of the research have been evaluated.

Science Code : 20402
Keywords : Hsu-structure, golden structure, almost Hsu-golden structure,
almost Hsu-golden B -manifold
Number of pages : 59
Supervisor : Prof. Dr. Mustafa ÖZKAN

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım süresince akademik bilgi, deneyim ve tavsiyelerinden istifade ettiğim kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Mustafa ÖZKAN'a teşekkürü bir borç bilirim. Öğrenim hayatım boyunca bana inanan, bildiklerini paylaşan ve bilgiyi paylaşmayı öğreten bütün değerli hocalarıma teşekkür ederim. Bu uzun ve zorlu süreçte her zaman yanımda olan, hiçbir fedakârlıktan kaçınmayan değerli aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Özellikle hayatımın her aşamasında olduğu gibi doktora çalışmam boyunca da benden desteğini, sevgisini ve dualarını esirgemeyen, zorlandığım ve kendime olan güvenimi yitirdiğim anlarda bile bana olan inancını kaybetmeyen sevgili anneciğim Sn. Kübra HİÇYILMAZ'a minnet borçluyum. Ailemin sabrı ve cesaretlendirmesi olmasaydı, bu yolda ilerlemem imkansız olurdu. Ayrıca bu süreçte gösterdikleri anlayış ve destekleri için arkadaşlarıma çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Manifoldlar ve İlgili Yapılar	3
2.2. Altın Yapı.....	11
2.3. Hsu Yapı	13
3. MANİFOLDLAR ÜZERİNDE HEMEN HEMEN HSU-ALTIN YAPILAR.....	15
3.1. Hemen Hemen Hsu-Altın Yapı.....	15
3.2. İntegrallenebilirlik ve Paralelizm	21
3.3. Eğrilik Tensör Alanı	47
4. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME	53
KAYNAKLAR.....	55
ÖZGEÇMİŞ	59

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu tez çalışmasında kullanılan simge ve kısaltmalara ait açıklamalar aşağıda listelenmiştir.

Simgeler	Açıklamalar
M	Manifold
TM	M üzerindeki vektör alanlar kümesi
g	Riemann metriği
$[\cdot, \cdot]$	Lie operatörü
$\{\cdot, \cdot\}$	Jordan operatörü
∇	Lineer konneksiyon
Φ	Altın yapı
F	Hsu yapı
J	Hemen hemen Hsu-altın yapı
N_F	F nin Nijenhuis tensörü
R	Riemann eğrilik tensörü
D	Distribüsyon (dağılım)
B – metrik	Norden metrik

1. GİRİŞ

2007 yılında Hreţcanu tarafından ‘‘altın yapı’’ adı verilen bir yapı tanımlanmış; bu yapının Riemann manifoldları üzerindeki uygulamaları ise 2007–2009 yılları arasında Crasmareanu ve Hreţcanu tarafından incelenmiştir [1–4]. Söz konusu çalışmalar, sonraki araştırmalar için bir çerçeve oluşturmuştur. 2013 yılında Gezer, Salimov ve Cengiz, altın Riemann yapılarının integrallenebilirlik koşullarını incelemişlerdir [5]. Özkan, 2014 yılında bir altın yapının horizontal ve vertical liftlerini ve tanjant demetlerindeki geometrisini ele almıştır [6]. Aynı yıl içerisinde Akyol ve şahin, altın Riemann manifoldları arasındaki altın dönüşümleri ve bu dönüşümlerin sabitliğini araştırmışlardır [7]. Özkan ve Yılmaz, altın yapının r -inci dereceden tanjant demetteki r -lifti ve bu yapının integrallenebilirlik koşullarını incelemişlerdir [8]. Etayo, Santamaría ve Upadhyay, hemen hemen altın Riemann yapısına uyarlanmış konneksiyonları incelemişlerdir [9]. Yaşar ve Poyraz, altın yarı-Riemannian manifoldunun lightlike hiper yüzeylelerini tanımlamış ve çeşitli özelliklerini araştırmışlardır [10]. Hreţcanu ve Blaga, altın warped çarpım Riemann manifoldlarını tanımlamış ve bu yapıların eğrilik özelliklerini incelemişlerdir [11]. Erdoğan ve Yıldırım, altın Riemannian manifoldunun yarı-invariant ve tamamen umbilik yarı-invariant alt manifoldları üzerinde çalışmalar yürütmüşlerdir [12, 13]. Bahadır ve Uddin golden Riemann manifoldların slant alt manifoldlarını inceleyerek, bu yapıları karakterize etmişlerdir [14]. Hreţcanu ve Blaga, lokal altın Riemannian manifoldlarındaki warped çarpım noktasal hemi-slant ve semi-slant alt manifoldları incelemişlerdir [15]. şahin, şahin ve Erdoğan, sabit kesitsel eğriliğe sahip Norden altmanifoldu üzerinde araştırmalar yaparak, yeni bir Norden altın kesitsel eğrilik kavramı ortaya koymuş ve Norden altın uzay formunun yarı-invariant alt manifoldlarını incelemişlerdir [16]. Mevcut literatür, bu alandaki araştırmaların sürekli olarak ilerlediğini ve yeni bulgularla zenginleştiğini göstermektedir.

Öte yandan Hsu, 1960 yılında, kendi adıyla anılan Hsu-yapıyı tanımlamış ve bu yapının integrallenebilirliğini araştırmıştır [17, 18]. 2004 yılında Nivas ve Verma, genelleştirilmiş Hsu-yapısına sahip bir manifoldun Nijenhuis tensörü ile integrallenebilirlik koşullarını ele alarak, bu manifold üzerindeki semi-simetrik non-metrik konneksiyonu incelemişlerdir [19]. Daha sonra Singh, 2006 yılında genel cebirsel Hsu-yapısına sahip bir

manifoldun integrallenebilirlik koşullarını değerlendirmiş [20], Nivas ve Verma ise 2011 yılında bu manifoldun alt manifoldlarına odaklanmışlardır [21]. Bisht ve Shanker 2012–2015 yılları arasında, söz konusu manifoldlarda farklı şekilde yenileme ve simetri türlerini tanımlamış, Nijenhuis tensörünü çeşitli formlarla ifade etmiş ve manifoldun düzlüğünü farklı eğrilik tensörleri üzerinden kapsamlı bir şekilde analiz etmişlerdir [22–25]. Son olarak, 2023 yılında De, Gezer ve Karaman, Hsu B -manifoldu tanımlamış ve bu manifolddaki yarı-simetrik F -bağlantının eğrilik tensör alanını ele almışlardır [26]. İlgili çalışmalar, Hsu-yapısına sahip manifoldların integrallenebilirlik koşulları ve geometrik özellikleri üzerine giderek derinleşen ve çeşitlenen bir araştırma çizgisi ortaya koymaktadır.

Altın yapı ile Hsu-yapı arasındaki olası bağlantılar ve ortak uygulamalar henüz yeterince araştırılmadığından, bu tez çalışması literatürdeki mevcut boşluğa odaklanarak özgün bir katkı sağlamayı amaçlamaktadır.

Bu tez çalışmasında, Hsu ve altın yapılardan ilham alınarak hemen hemen Hsu-altın yapı adı verilen yeni bir yapı tanımlanmıştır. Tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm geçmişten günümüze altın yapı ve Hsu-yapı üzerine yapılan çalışmaları özetlerken, ikinci bölüm konunun özümsemesi için ihtiyaç duyulan bazı temel kavramlar hakkında detaylı bilgi sunmaktadır. Üçüncü bölümde hemen hemen Hsu-altın yapı tanımlanmış, çeşitli matematiksel özellikleri incelenmiş ve ardından hemen hemen Hsu-altın B -manifoldun tanımı verilmiştir. Ayrıca bahse konu yapının integrallenebilirlik ve paralellik koşulları araştırılmış ve bazı eğrilik ilişkileri sunulmuştur. Son bölümde ise araştırmanın temel bulguları ve literatüre katkıları özetlenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm, çalışmanın ilerleyen kısımlarında temel teşkil edecek bazı tanım ve teoremleri içermektedir.

2.1. Manifoldlar ve İlgili Yapılar

Manifoldlara dair temel bilgiler ile bu yapılara bağlı temel kavramlar bu kesimde sunulmaktadır. İlk olarak bir topolojik uzay üzerinde daha sonra da bir küme üzerinde bir manifold kavramını vereceğiz.

2.1.1. Tanım

Bir M topolojik uzayının her bir p noktasının \mathbb{R}^n uzayının bir V açık alt kümesine homeomorfik olan bir U açık komşuluğu mevcutsa M kümesine bir topolojik manifolddur denir. Şöyle ki,

$$\forall p \in M \text{ için } p \in U, \exists U \text{ açık komşuluğu var } \ni \varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$$

olur. Ayrıca (φ, U) ikilisi M manifoldunun bir n -boyutlu haritası, φ koordinat dönüşümü ve U kümesi de koordinat komşuluğu olarak adlandırılır [34].

2.1.2. Tanım

Bir M topolojik uzayının n -boyutlu bir haritası (φ, U) olmak üzere, \mathbb{R}^n uzayındaki doğal koordinat fonksiyonları (x_1, x_2, \dots, x_n) ise $u_i = x_i \circ \varphi$ ile tanımlı (u_1, u_2, \dots, u_n) fonksiyonları (φ, U) haritasının koordinat fonksiyonları, $p \in M$ olmak üzere $(u_1(p), u_2(p), \dots, u_n(p))$ ise p noktasının (φ, U) haritasına göre koordinatları olarak isimlendirilir [34].

2.1.3. Tanım

Bir topolojik M manifoldu ve bu manifoldun $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olacak şekilde iki n -boyutlu haritası $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ ve (φ_β, U_β) verilsin. Sırasıyla $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$, $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ kümeleri

$\varphi_\alpha(U_\alpha)$ ve $\varphi_\beta(U_\beta)$ de açık ve

$$\varphi_{\beta\alpha} : \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

dönüşümü bir homeomorfizm ise bu iki haritaya topolojik olarak örtüşürler denir. $\varphi_{\beta\alpha}$ ise haritalar arası dönüşüm fonksiyonu olarak adlandırılır [34].

2.1.4. Tanım

M topolojik uzayının $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ ailesindeki haritalar topolojik olarak örtüşüyor ise bu aile M üzerinde bir topolojik atlas olarak adlandırılır [34].

2.1.5. Tanım

M topolojik manifoldunun iki haritası $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ ve (φ_β, U_β) olmak üzere,

$$\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \text{ ve } \varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$$

dönüşümleri C^∞ - sınıfından (düzgün) ise bu haritalara C^∞ - sınıfındandır (düzgündür) denir [34].

2.1.6. Tanım

Bir topolojik M manifoldu ve bu manifoldun haritalarının ailesi $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ olmak üzere; \mathcal{A} içindeki her iki harita düzgün ve $M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ ise \mathcal{A} atlasına M manifoldunun bir C^∞ -sınıfından atlası veya C^∞ -atlası veya düzgün atlası denir [34].

2.1.7. Tanım

\mathcal{A}_1 ve \mathcal{A}_2 , M topolojik manifoldu üzerinde iki C^∞ -atlas olmak üzere, $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ de M üzerinde bir C^∞ - atlas ise bu atlaslar C^∞ -bağdaşık olarak adlandırılır ve $\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_2$ ile gösterilir. Burada \sim bağıntısı bir denklik bağıntısıdır [34].

2.1.8. Tanım

\mathcal{A} , M topolojik manifoldu üzerinde bir C^∞ -atlas olmak üzere; \mathcal{A} nın denklik sınıfı $[\mathcal{A}] = \{\mathcal{H} \mid \mathcal{H}, M \text{ üzerinde } C^\infty \text{ - atlas ve } \mathcal{A} \sim \mathcal{H}\}$, M üzerinde \mathcal{A} nın doğurduğu C^∞ -diferensiyellenebilir yapı olarak isimlendirilir [34].

2.1.9. Tanım

M topolojik manifoldu üzerinde tanımlı tüm düzgün atlasları içeren en geniş atlası tam (maksimal) atlas adı verilir [34].

2.1.10. Tanım

Farklı her iki elemanın ayrık komşulukları var olan bir topolojik uzaya Hausdorff uzayı denir [34].

2.1.11. Tanım

M Hausdorff uzayı üzerinde tanımlı tam atlas ile birlikte topolojik manifolda düzgün (veya C^∞) manifold adı verilir. Bahse konu tam atlas ise M üzerinde düzgün (C^∞ -sınıfından) yapıdır. Yani,

1. M bir Hausdorff uzay,
2. $\varphi_\alpha : U_\alpha \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ dönüşümü bir homeomorfizmdir,
3. $M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$,
4. $\varphi_{\beta\alpha} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ ve $\varphi_{\alpha\beta} = (\varphi_{\beta\alpha})^{-1}$ dönüşümü düzgün yani $\varphi_{\alpha\beta}$ dönüşümü C^∞ - sınıfından bir diffeomorfizmdir.
 - (a) $\varphi_{\alpha\beta}$ dönüşümü 1-1 ve örtendir,
 - (b) $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ kümesinin koordinatları $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ kümesinin koordinatları $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ise
 - i. y_i fonksiyonların her biri x in C^∞ - sınıfından dönüşümleridir,
 - ii. $\det \left[\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right] \neq 0$ dır,
5. $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ tam atlasır [34].

Yukarıdaki tanımda; M manifoldunun koordinat komşulukları \mathbb{R}^n uzayının bir alt kümesine homeomorfik olduğundan M düzgün manifoldu n -boyuta sahiptir [34].

Şimdi boştan farklı bir küme üzerinde manifold kavramını verelim.

2.1.12. Tanım

M boştan farklı bir küme ve M nin bir alt kümesi U olmak üzere, \mathbb{R}^n uzayının bir V açık alt kümesine $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ şeklinde tanımlanmış φ fonksiyonu bire-bir, örten ve V kümesi \mathbb{R}^n de açık ise (φ, U) ikilisine M kümesi üzerinde bir n -boyutlu harita denir [34].

2.1.13. Tanım

Bir M kümesinin n -boyutlu bir haritası (φ, U) olmak üzere, \mathbb{R}^n uzayındaki doğal Öklid koordinat fonksiyonları (x_1, x_2, \dots, x_n) ise $u_i = x_i \circ \varphi$ ile tanımlı (u_1, u_2, \dots, u_n) fonksiyonları (φ, U) haritasının koordinat fonksiyonları, $p \in U$ olmak üzere $(u_1(p), u_2(p), \dots, u_n(p))$ ise p noktasının (φ, U) haritasına göre koordinatları olarak isimlendirilir [34].

2.1.14. Tanım

Bir M kümesi üzerinde tanımlı tüm n -boyutlu $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ haritalarının bir ailesi $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ ve I indis kümesi olmak üzere;

$$M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$$

ise \mathcal{A} ailesine M kümesi üzerinde bir n -boyutlu atlas denir [34].

2.1.15. Tanım

Bir M kümesinin atlası $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ ve bu atladaki iki harita $(\varphi_\alpha, U_\alpha), (\varphi_\beta, U_\beta) \in \mathcal{A}$

olmak üzere $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ için

$$\varphi_{\beta\alpha} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

dönüşümü C^k -difeomorfizm ise bu iki haritaya C^k -uyumludur denir ve $\varphi_{\beta\alpha}$ haritalar arası dönüşüm fonksiyonu olarak adlandırılır [34].

2.1.16. Tanım

M kümesinin $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ ailesindeki haritalar C^k -uyumlu ise bu aile M üzerinde bir C^k -atlas olarak adlandırılır [34].

2.1.17. Tanım

\mathcal{A}_1 ve \mathcal{A}_2 , M kümesi üzerinde iki C^k -atlas olmak üzere, $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ de M üzerinde bir C^k -atlas ise bu atlaslar C^k -bağdaşık olarak adlandırılır ve $\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_2$ ile gösterilir. Burada \sim bağıntısı bir denklik bağıntısıdır [34].

2.1.18. Tanım

\mathcal{A} , M kümesi üzerinde bir C^k -atlas olmak üzere; \mathcal{A} nın denklik sınıfı $[\mathcal{A}]$, M üzerinde \mathcal{A} 'nın doğurduğu C^k -diferensiyellenebilir yapı veya C^k -yapı olarak isimlendirilir [34].

2.1.19. Tanım

$(M, [\mathcal{A}])$ ikilisine n -boyutlu bir C^k -diferensiyellenebilir manifold ya da kısaca C^k -manifold denir [34].

2.1.20. Tanım

Bir C^k -diferensiyellenebilir yapı $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ için C^k -diferensiyellenebilir manifold ise M ye C^∞ -diferensiyellenebilir veya düzgün manifold denir [34].

2.1.21. Tanım

U ve V , \mathbb{R}^n uzayının iki açık alt kümesi olmak üzere, bir $\Psi : U \rightarrow V$ fonksiyonu için; $\Psi \in C^k(U, V)$, $\Psi^{-1} : V \rightarrow U$ var ve $\Psi^{-1} \in C^k(V, U)$ önermeleri doğru ise Ψ fonksiyonuna C^k -sınıfından bir diffeomorfizm ve U ile V kümelerine de k . dereceden diffeomorfiktirler denir [35].

2.1.22. Tanım

$C^\infty(M, \mathbb{R})$, bir M manifoldu üzerindeki diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi olmak üzere; her $a, b \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için aşağıdaki şartları karşılayan $V_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü p noktasında M manifoldunun tanjant vektörü olarak isimlendirilir [36];

- a) $V_p(af + bg) = aV_p f + bV_p g$,
- b) $V_p(fg) = V_p(f)g + fV_p g$.

M manifoldunun p noktasındaki tanjant vektörlerinin kümesi $T_p M$ ile gösterilir. $T_p M$ bir reel vektör uzayıdır. Bu uzaya M nin p noktasındaki tanjant (teğet) uzayı denir [36].

2.1.23. Tanım

Bir M manifoldu için, $T_p M$ tanjant uzayında $\forall p \in M$ noktasına bir tanjant vektör karşılık getiren X diferensiyellenebilir dönüşümüne vektör alanı adı verilir. $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$ olmak üzere M üzerindeki vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ veya $\Gamma(TM)$ ile gösterilir [36].

2.1.24. Tanım

M ve N manifoldları üzerinde bir dönüşüm $F : M \rightarrow N$ olsun. (U, ϕ) ve (V, φ) sırasıyla, $p \in M$ noktasının komşuluğundaki harita ve $F(p) \in N$ noktasının komşuluğundaki harita olmak üzere, $\phi(U) \subset \mathbb{R}^m$ den $\varphi(V) \subset \mathbb{R}^n$ kümesine olan $\varphi \circ F \circ \phi^{-1}$ dönüşümü diferensiyellenebilirse F dönüşümü $p \in M$ noktasında diferensiyellenebilirdir [36].

2.1.25. Tanım

$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\varphi = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ düzgün fonksiyon olmak üzere, $v_q \in T_q(\mathbb{R}^n)$ için;

$$\varphi_{*q} : T_q(\mathbb{R}^n) \rightarrow T_{\varphi(q)}(\mathbb{R}^m), \quad \varphi_{*q}(v_q) = (v_q[f_1], v_q[f_2], \dots, v_q[f_m])_{\varphi(q)}$$

fonksiyonuna, φ nin q noktasındaki türev dönüşümü adı verilir [37].

2.1.26. Tanım

Bir reel vektör uzayı V ve V nin dual uzayı V^* olsun.

$$T : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{k\text{-tane}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{l\text{-tane}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde her bir $(k+l)$ lineer dönüşümüne V üzerinde k -yinci dereceden kontravaryant ve l -yinci dereceden kovaryant (veya kısaca (k, l) tipinden) bir tensör denir [47].

Bir vektör uzayı üzerinde tanımlı (k, l) tipinden tensörlerin kümesi $T_l^k(V)$ ile gösterilir. $T_l^k(V)$, \mathbb{R} üzerinde bir vektör uzayı olup $\text{boy}V = n$ ise $\text{boy}T_l^k(V) = n^{k+l}$ dir.

V vektör uzayı yerine M manifoldunun p noktasındaki tanjant uzayı olan T_pM alınırsa, M nin p noktasındaki bir tensör uzayı olan $T_l^k(T_pM)$ elde edilir ve bu uzayın her bir elemanına p noktasında bir (k, l) tipinden tensör denir.

2.1.27. Tanım

M bir manifold olsun. M nin her bir noktasına (k, l) tipinden bir tensör karşılık getiren bir dönüşüme, M üzerinde (k, l) tipinden bir tensör alanı denir [47].

M üzerinde tanımlı tensör alanlarının kümesi $\mathfrak{S}_l^k(M)$ ile gösterilir. $\mathfrak{S}_l^k(M)$ kümesi $C^\infty(M)$ üzerinde bir modüldür.

2.1.28. Tanım

$\chi(M)$, M düzgün manifoldu üzerinde vektör alanlarının uzayı ve $C^\infty(M, \mathbb{R})$ reel değerli C^∞ fonksiyonların halkası olsun. O halde, $g : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ biçiminde bir iç çarpım tanımlı ise M manifolduna bir Riemann manifoldu denir. g işlemi ise M üzerinde Riemann metriği (iç çarpım, metrik tensör, diferensiyellenebilir metrik) olarak isimlendirilir. Bu durumda (M, g) ikilisi bir Riemann manifoldu olarak isimlendirilir [39].

2.1.29. Tanım

$\chi(M)$, M düzgün manifoldu üzerinde vektör alanlarının kümesi ve $C^\infty(M, \mathbb{R})$ reel değerli C^∞ fonksiyonların halkası olsun. $g : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ fonksiyonu; 2-lineer, simetri ve $\forall X \in \chi(M)$ için $g(X, Y) = 0$ ise $Y = 0 \in \chi(M)$ özelliklerini sağlıyorsa, g ye M manifoldu üzerinde bir yarı-Riemann metriği denir ve (M, g) ikilisi bir yarı-Riemann manifoldu olarak adlandırılır [39].

2.1.30. Tanım

M bir manifold ve

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $\forall f, g \in C^\infty(M)$ ve $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

- a) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ$,
- b) $\nabla_X(fY) = f\nabla_XY + (Xf)Y$,
- c) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ$

ise ∇ ya M üzerinde bir lineer konneksiyon denir [47].

2.1.31. Tanım

(M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ , M manifoldu üzerinde

$$\nabla g = 0$$

şartını sağlayan bir simetrik lineer konneksiyon ise bu durumda ∇ ya M üzerinde Riemann konneksiyonu ya da Levi-Civita konneksiyonu denir [47].

2.2. Altın Yapı

Bu kesimde, altın yapının tanımı ve temel özellikleri hakkında genel bilgiler sunulmaktadır.

2.2.1. Tanım

M bir düzgün manifold, M üzerinde bir I özdeşlik dönüşümü ve $K(1, 1)$ tipinden bir tensör alanı için;

- $\forall p \in M$ için $K^{n-1}(p), K^{n-2}(p), \dots, K(p), I$ lineer bağımsız ve
- K tensör alanı $Q(x) = x^n + a_n x^{n-1} + \dots + a_2 x + a_1 = 0$ denklemini sağlıyorsa

K tensör alanına M üzerinde bir polinom yapısı ve $Q(x)$ polinomuna da yapı polinomu denir [41].

2.2.2. Tanım

$Q(x) = x^2 - I$ yapı polinomuna sahip $(1, 1)$ tipindeki tensör alanı hemen hemen çarpım yapı olarak adlandırılır ve P ile gösterilir. O halde $P^2 = I$ olur [2, 40].

2.2.3. Tanım

M manifoldu üzerinde $(1, 1)$ tipindeki bir Φ tensör alanı

$$\Phi^2 = \Phi + I$$

denklemini sağlıyorsa, bu tensör alanına altın yapı adı verilir [2, 40].

2.2.4. Önerme

$(f_n)_n$ Fibonacci dizisi olmak üzere, M manifoldu üzerinde bir altın yapı

$$\Phi^n = f_n \Phi + f_{n-1} I.$$

biçiminde üslü kuvvetlere sahiptir [2, 40].

2.2.5. Teorem

Herhangi bir hemen hemen çarpım yapısı P den

$$\Phi = \frac{1}{2}(I + \sqrt{5}P)$$

şekilde tanımlanan bir altın yapı elde edilir.

Tersine, herhangi bir altın yapı, kendisine karşılık gelen bir hemen hemen çarpım yapısı üretir. Bu yapı

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\Phi - I)$$

biçiminde verilir [2, 40].

2.2.6. Tanım

Φ ile tanımlanan bir altın yapının Nijenhuis tensörü aşağıdaki biçimde verilir:

$$N_\Phi(U, V) = \Phi^2[U, V] - \Phi[\Phi U, V] + [\Phi U, \Phi V] - \Phi[U, \Phi V].$$

Eğer $N_\Phi = 0$ koşulu sağlanıyorsa, bu durumda Φ altın yapısı integrallenebilirdir [2, 40].

2.2.7. Tanım

Eğer g , M üzerinde tanımlı bir Riemann metriği olup

$$g(\Phi(X), Y) = g(X, \Phi(Y)), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

koşulunu sağlıyorsa, (g, Φ) ikilisine bir altın Riemannian yapı adı verilir. Dolayısıyla, (M, g, Φ) üçlüsü bir altın Riemann manifold olarak adlandırılır [2, 40].

2.3. Hsu Yapı

Hsu yapıya dair temel kavramların anlaşılması amacıyla, bu bölümde yapının tanımı ve bazı özellikleri özetlenmiştir.

2.3.1. Tanım

M çift boyutlu bir C^∞ -diferansiyellenebilir manifold ve F $(1, 1)$ tipli tensör alanı olsun. Eğer

$$F^2 = a^r I$$

cebirsel koşulu sağlıyorsa, F tensör alanına M manifoldunda bir Hsu yapı denir. Burada $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{Z}$ ve I özdeşlik dönüşümüdür [17].

Bu yapı, parametre seçimlerine göre çeşitli özel durumları kapsar [17]:

- Eğer $a = -1$ ve r tek sayı ise *hemen hemen kompleks yapı*,
- Eğer $a = 1$ veya $r = 0$ ($a \neq 0$) ise *hemen hemen çarpım yapı*,
- Eğer $a = 0$ ve $r \neq 0$ ise *hemen hemen tanjant yapı*,
- Eğer $r = 2$ ise GF -yapı ve
 - $a \neq 0$ ise π -yapı,
 - $a = \pm i$ ise *hemen hemen kompleks yapı*,
 - $a = 1$ ise *hemen hemen çarpım yapı*,

- $a = 0$ ise *hemen hemen tanjant yapı*

elde edilir.

2.3.2. Tanım

Eğer g , M üzerinde tanımlı bir Riemann metriği olup,

$$g(X, FY) = g(FX, Y)$$

eşitliği sağlanıyorsa, (M, g, F) üçlüsüne bir *hemen hemen Hsu-B manifold* denir [26]. Bu durumda F , metrikle self-adjoint olur ve g metrik tensörü bir *B-metrik* (Norden metrik) olarak adlandırılır.

2.3.3. Tanım

F Hsu-yapısının Nijenhuis tensörü aşağıdaki gibi tanımlanır [18, 23]:

$$N_F(U, V) = F^2[U, V] + [FU, FV] - F[FU, V] - F[U, FV].$$

Eğer $N_F = 0$ ise, F Hsu yapısı integrallenebilirdir [18].

2.3.4. Önerme

Bir (M, F, g) *hemen hemen Hsu-B manifoldunda* g metriğinin Levi-Civita konneksiyonu ∇ ,

$$\nabla F = 0$$

koşulunu sağlıyorsa, bu durumda (M, F, g) üçlüsü *Hsu-B manifold* olur. [26].

3. MANİFOLDLAR ÜZERİNDE HEMEN HEMEN HSU-ALTIN YAPILAR

Bu bölümde, öncelikle yeni bir yapı olan hemen hemen Hsu-altın yapı tanımlanmış, bazı özellikleri incelenmiş ve ardından hemen hemen Hsu-altın B -manifold tanımlanmıştır. Ayrıca bahse konu yapının integrallenebilirlik ve paralellik koşulları araştırılmış ve bazı eğrilik ilişkileri sunulmuştur.

3.1. Hemen Hemen Hsu-Altın Yapı

3.1.1. Tanım

M düzgün manifold, I özdeşlik dönüşümü, J ise $(1, 1)$ -tipinden bir tensör alanı olsun. $r \in \mathbb{Z}$ ve $a \in \mathbb{C}$ olmak üzere,

$$J^2 = J - \frac{1 - 5a^r}{4}I \quad (3.1)$$

denklemini sağlayan J tensör alanına M manifoldu üzerinde hemen hemen Hsu-altın yapı denir.

(M, J) ikilisi ise hemen hemen Hsu-altın manifold olarak isimlendirilir.

Not

Eş. 3.1 eşitliği ile tanımlanan hemen hemen Hsu-altın yapı [2] numaralı kaynakta verilen yapıların bir genellemesidir. Yani, Eş. 3.1 eşitliğinde;

- $a = 1$ veya $r = 0$ ($a \neq 0$) alınırsa altın yapı ($J^2 - J - I = 0$);
- $a = 0$ ($r \neq 0$) ise tanjant altın yapı ($J^2 - J + \frac{1}{4}I = 0$);
- $a = -1$ ve r bir tek sayı ise kompleks altın yapı ($J^2 - J + \frac{1}{2}I = 0$);
- $r = 2$ için,
 - $a = 0$ ise tanjant altın yapı ($J^2 - J + \frac{1}{4}I = 0$);
 - $a = 1$ ise altın yapı ($J^2 - J - I = 0$);

– $a = \mp i$ ise kompleks altın yapı ($J^2 - J + \frac{1}{2}I = 0$)

elde edilir.

3.1.2. Önerme

J bir hemen hemen Hsu-altın yapı olmak üzere,

- J yapısının özdeğerleri $\sigma = \frac{1+\sqrt{5a^r}}{2}$ ve $1 - \sigma$ olur.
- $\forall p \in M$ için $1 - 5a^r \neq 0$ olmak üzere, M manifoldunun tanjant uzayı T_pM üzerinde J bir izomorfizmdir.
- $1 - 5a^r \neq 0$ için J yapısının tersi mevcuttur. Ayrıca J^{-1} , ($\hat{J} = J^{-1}$ için) $\hat{J}^2 = \frac{4}{1-5a^r}(\hat{J} - I)$ denklemini sağlar.

İspat

J bir hemen hemen Hsu-altın yapı olsun.

- J yapısının özdeğeri λ ise $\forall X \in \Gamma(TM)$ için $J(X) = \lambda X$ olur. Eş. 3.1 eşitliğinden;

$$\begin{aligned} 0 &= J^2(X) - J(X) + \frac{1-5a^r}{4}I(X) \\ &= J(\lambda X) - \lambda X + \frac{1-5a^r}{4}X \\ &= \lambda(\lambda X) + \frac{1-5a^r}{4}X - \lambda X \\ &= \left(\lambda^2 + \frac{1-5a^r}{4} - \lambda \right) X \end{aligned}$$

elde edilir. $\forall X \in \Gamma(TM)$ için bu eşitlik doğrudur ve buradan

$$\lambda^2 = \lambda - \frac{1-5a^r}{4}$$

denklemi elde edilir. Denklem kökleri ise;

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5a^r}}{2} = \sigma \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5a^r}}{2} = 1 - \sigma$$

olarak bulunur. Sonuç olarak J yapısının özdeğerleri $\lambda_1 = \sigma$ ve $\lambda_2 = 1 - \sigma$ olur.

- b) J bir lineer dönüşüm olduğundan, çekirdeği $\{\vec{0}\}$ ise bire-birdir. $\forall p \in M$ için $1 - 5a^r \neq 0$ olmak üzere, $\mathcal{Çek}J = \{X \in \Gamma(TM) \mid J(X) = \vec{0}\}$ ve Eş. 3.1 eşitliğinden;

$$\begin{aligned} 0 &= J(J(X)) - J(X) + \frac{1-5a^r}{4}I(X) \\ &= J(\vec{0}) - \vec{0} + \frac{1-5a^r}{4}X \\ &= \vec{0} + \frac{1-5a^r}{4}X \\ &= X \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $\mathcal{Çek}J = \{\vec{0}\}$ olur. Dolayısıyla J bire-birdir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} 0 &= \text{boy}TM - \text{rank}J - \text{boy}(\mathcal{Çek}J) \\ &= \text{boy}TM - \text{boy}J(TM) \end{aligned}$$

olur. Yani $TM = J(TM)$ olup J örtendir. Sonuç olarak J bire-bir ve örten olup izomorfizmdir.

- c) J bir izomorfizmdir, o halde tersi mevcuttur. $\forall p \in M$ için $1 - 5a^r \neq 0$ olmak üzere, Eş. 3.1 eşitliğinden;

$$\begin{aligned} 0 &= J^2 - J + \frac{1-5a^r}{4}I \\ &= J^2J^{-1} - JJ^{-1} - \frac{5a^r-1}{4}J^{-1} \\ &= J + \frac{1-5a^r}{4}J^{-1} - I \\ &= \frac{1-5a^r}{4}J^{-1}J^{-1} + I - J^{-1} \\ &= I - \hat{J} + \frac{1-5a^r}{4}\hat{J}^2 \end{aligned}$$

olur. O halde $\hat{J}, \hat{J}^2 = \frac{4}{1-5a^r}(\hat{J} - I)$ denklemini sağlar.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Not

$a = 1$ özel halinde Önerme 3.1.2 deki ifadeler [2] numaralı kaynakta verilen ifadeler ile çakışmaktadır.

3.1.3. Önerme

J bir hemen hemen Hsu-altın yapı ise $\tilde{J} = I - J$ yapısı da bir hemen hemen Hsu-altın yapı olur.

İspat

J hemen hemen Hsu-altın yapı olsun. $I - J = \tilde{J}$ için;

$$\begin{aligned}
 \tilde{J}^2 &= (I - J)^2 \\
 &= (I - J) \circ (I - J) \\
 &= (I - J + J^2 - J) \\
 &= \left(I - 2J + J - \frac{1 - 5a^r}{4} I \right) \\
 &= I - J - \frac{1 - 5a^r}{4} I \\
 &= (I - J) - \frac{1 - 5a^r}{4} I \\
 &= \frac{5a^r - 1}{4} I + \tilde{J}
 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde \tilde{J} , Eş. 3.1 eşitliğini sağlar ve böylece hemen hemen Hsu-altın yapı olur.

3.1.4. Teorem

F bir Hsu-yapı olsun. Bu yapıdan

$$J = \frac{1}{2} (I + \sqrt{5}F) \tag{3.2}$$

eşitliği ile verilen bir hemen hemen Hsu-altın yapı elde edilir.

Diğer taraftan, bir J hemen hemen Hsu-altın yapısından

$$F = \sqrt{a^r} \frac{2J - I}{2\sigma - 1} \quad (3.3)$$

eşitliği ile verilen bir Hsu-yapı elde edilir.

İspat

F bir Hsu-yapı olsun. O halde

$$\begin{aligned} J^2 &= (J \circ J) \\ &= \frac{1}{4} \left[(I + \sqrt{5}F) \circ (I + \sqrt{5}F) \right] \\ &= \frac{1}{4} (I + \sqrt{5}F + \sqrt{5}F + 5F^2) \\ &= \frac{1}{4} (I + 2\sqrt{5}F + 5a^r I) \\ &= \frac{1}{4} (2I - I + 2\sqrt{5}F + 5a^r I) \\ &= \frac{1}{4} (2I + 2\sqrt{5}F) - \frac{1}{4} (1 - 5a^r) I \\ &= \frac{1}{4} (I + \sqrt{5}F) - \frac{1}{4} (1 - 5a^r) I \\ &= J - \frac{1 - 5a^r}{4} I \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $J^2 = J - \frac{1 - 5a^r}{4} I$ eşitliği sağlanır. Dolayısıyla J bir hemen hemen Hsu-altın yapısıdır.

Diğer taraftan, J bir hemen hemen Hsu-altın yapısı olsun. O halde;

$$\begin{aligned} F^2 &= F \circ F \\ &= \frac{a^r}{(2\sigma - 1)^2} [(2J - I) \circ (2J - I)] \\ &= \frac{a^r}{(2\sigma - 1)^2} (4J^2 - 4J + I) \\ &= \frac{a^r}{(2\sigma - 1)^2} \left(4 \left(J - \frac{1 - 5a^r}{4} I \right) - 4J + I \right) \\ &= \frac{a^r}{(2\sigma - 1)^2} (4J - (1 - 5a^r)I - 4J + I) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{5(a^r)^2}{(2\sigma - 1)^2} I \\
&= \frac{5(a^r)^2}{(\pm\sqrt{5a^r})^2} I \\
&= a^r I
\end{aligned}$$

olur. Böylece $F^2 = a^r I$ denklemi sağlanır. Sonuç olarak F bir Hsu-yapıdır.

Not

$a = 1$ özel halinde Teorem 3.1.4 deki ifadeler [2] numaralı kaynakta verilen ifadeler ile çakışmaktadır.

3.1.5. Tanım

M manifoldu üzerinde, her $X, Y \in \Gamma(TM)$ alındığında g ;

$$g(JX, Y) = g(X, JY) \quad (3.4)$$

olacak şekilde bir B -metriği ise, (g, J) ikilisine bir hemen hemen Hsu-altın B -yapı ve (M, g, J) üçlüsüne de bir hemen hemen Hsu-altın B -manifold denir.

Eş. 3.4 eşitliğinden

$$\begin{aligned}
g(JX, JY) &= g(X, J^2Y) \\
&= g\left(X, \left(J - \frac{1-5a^r}{4}I\right)Y\right) \\
&= g\left(X, JY - \frac{1-5a^r}{4}Y\right) \\
&= g(X, JY) - \frac{1-5a^r}{4}g(X, Y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$g(X, JY) - \frac{1-5a^r}{4}g(X, Y) = g(JX, JY) \quad (3.5)$$

denklemini elde edilir.

3.2. İntegrallenebilirlik ve Paralelizm

Bir M manifoldu üzerindeki (g, J) hemen hemen Hsu-altın B -yapısı için; g metriğinin Levi-Civita konneksiyonu ∇ olmak üzere, J ile tanımlanan Hsu-altın yapının özelliklerini karakterize eden bazı tensör alanları aşağıdaki şekilde tanımlanır.

a) $[\cdot, \cdot]$ Lie parantez operatörü olmak üzere, J yapısının Nijenhuis tensörü

$$N_J(U, V) = J^2[U, V] - J[U, JV] + [JU, JV] - J[JU, V], \quad (3.6)$$

b) $\{\cdot, \cdot\}$ Jordan parantez operatörü ve $\{U, V\}_J = \{JU, V\} - J(\{U, V\}) + \{U, JV\}$ olmak üzere, J yapısının Jordan tensörü

$$M_J(U, V) = -\{JU, JV\} + J(\{U, V\}_J), \quad (3.7)$$

c) $2H_J = N_J + M_J$ eşitliğini sağlayan J yapısının deformasyon tensörü

$$H_J(U, V) = (J \circ \nabla_U J - \nabla_{JU} J)(V) \quad (3.8)$$

olur [27, 28].

M manifoldu üzerinde tümleyen dağılımlar R, S ; bunlarla ilişkili projeksiyonlar ise sırasıyla r, s olsun. O halde aşağıdaki bağıntılar mevcuttur:

$$r^2 = r, s^2 = s, r + s = I, rs = sr = 0. \quad (3.9)$$

Önerme 3.1.2 (a) ve Eş. 3.9 eşitliğinde yer alan bağıntılardan;

$$r = \frac{\sigma - 1}{2\sigma - 1}I + \frac{1}{2\sigma - 1}J \quad (3.10)$$

ve

$$s = \frac{\sigma}{2\sigma - 1}I - \frac{1}{2\sigma - 1}J \quad (3.11)$$

elde edilir.

3.2.1. Önerme

(M, g, J) hemen hemen Hsu-golden B -manifold olmak üzere, M üzerindeki herhangi U ve V vektör alanları için;

$$N_F(U, V) = \frac{4}{5}N_J(U, V) \quad (3.12)$$

olur.

İspat

U ve V , M manifoldu üzerinde herhangi iki vektör alanı olsun. Eş. 3.1, Eş. 3.6 eşitlikleri ve Teorem (3.1.4)'den;

$$\begin{aligned} N_F(U, V) &= a^r[U, V] + \frac{1}{5}[(2J - I)U, (2J - I)V] - \frac{1}{5}(2J - I)[(2J - I)U, V] \\ &\quad - \frac{1}{5}(2J - I)[U, (2J - I)V] \\ &= a^r[U, V] + \frac{2}{5}[J(U), (2J - I)V] - \frac{1}{5}[U, (2J - I)V] - \frac{2}{5}(2J - I)[J(U), V] \\ &\quad + \frac{1}{5}(2J - I)[U, V] - \frac{2}{5}(2J - I)[U, J(V)] + \frac{1}{5}(2J - I)[U, V] \\ &= a^r[U, V] + \frac{4}{5}[J(U), J(V)] - \frac{2}{5}[J(U), V] - \frac{2}{5}[U, J(V)] + \frac{1}{5}[U, V] \\ &\quad - \frac{2}{5}(2J - I)[J(U), V] + \frac{1}{5}(2J - I)[U, V] - \frac{2}{5}(2J - I)[U, J(V)] + \frac{1}{5}(2J - I)[U, V] \\ &= \left(a^r + \frac{1}{5} + \frac{2}{5}(2J - I) \right) [U, V] + \left(-\frac{2}{5} - \frac{2}{5}(2J - I) \right) [JU, V] \\ &\quad + \left(-\frac{2}{5} - \frac{2}{5}(2J - I) \right) [U, JV] + \frac{4}{5}[J(U), J(V)] \\ &= \frac{1}{5}(5a^r + 1 + 2(2J - I))[U, V] + \frac{1}{5}(-2 - 2(2J - I))[J(U), V] \\ &\quad + \frac{1}{5}(-2 - 2(2J - I))[U, J(V)] + \frac{4}{5}[J(U), J(V)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{5}(5a^r + 1 + 4J - 2)[U, V] + \frac{1}{5}(-2 - 4J + 2)[J(U), V] \\
&\quad + \frac{1}{5}(-2 - 4J + 2)[U, J(V)] + \frac{4}{5}[J(U), J(V)] \\
&= \frac{1}{5}(5a^r - 1 + 4J)[U, V] - \frac{4}{5}J[J(U), V] - \frac{4}{5}J[U, J(V)] + \frac{4}{5}[J(U), J(V)] \\
&= \frac{4}{5} \left(\frac{5a^r - 1}{4} + J \right) [U, V] - \frac{4}{5}J[J(U), V] - \frac{4}{5}J[U, J(V)] + \frac{4}{5}[J(U), J(V)] \\
&= \frac{4}{5} \left(J - \frac{1 - 5a^r}{4} \right) [U, V] - \frac{4}{5}J[J(U), V] - \frac{4}{5}J[U, J(V)] + \frac{4}{5}[J(U), J(V)] \\
&= \frac{4}{5}N_J(U, V)
\end{aligned}$$

olur. O halde

$$N_F(U, V) = \frac{4}{5}N_J(U, V)$$

bulunur.

Not

Bir (M, g, J) hemen hemen Hsu-altın B -manifoldu için;

a) $N_J = 0 \Rightarrow J$ hemen hemen Hsu-altın B -yapısı integrallenebilir. Önerme (3.2.1)'den $N_F = \frac{4}{5}N_J$ dir. O halde J integrallenebilir $\Leftrightarrow F$ Hsu-yapısı integrallenebilir.

b) M manifoldu üzerinde her X ve Y vektör alanı için;

- $s[rX, rY] = 0 \Rightarrow R$ dağılımı integrallenebilir,
- $r[sX, sY] = 0 \Rightarrow S$ dağılımı integrallenebilir.

(M, g, J) bir hemen hemen Hsu-altın B -manifold olmak üzere;

$$\begin{aligned}
Jr = rJ &= \frac{1}{\sqrt{5a^r}}((\sigma - 1)I + J)J \\
&= \frac{1}{\sqrt{5a^r}}(\sigma - 1)J + \frac{1}{\sqrt{5a^r}}J^2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{5a^r}}(\sigma - 1)J + \frac{1}{\sqrt{5a^r}} \left(J - \frac{1 - 5a^r}{4}I \right) \\
&= \frac{(\sigma - 1)}{\sqrt{5a^r}}J + \frac{1}{\sqrt{5a^r}}J - \frac{1 - 5a^r}{4\sqrt{5a^r}}I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sigma}{\sqrt{5a^r}}J - \frac{1}{\sqrt{5a^r}}J + \frac{1}{\sqrt{5a^r}}J - \frac{1-5a^r}{4\sqrt{5a^r}}I \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{5a^r}}J - \frac{1-5a^r}{4\sqrt{5a^r}}I \\
&= \frac{1}{\sqrt{5a^r}} \left(\sigma J - \frac{1-5a^r}{4}I \right) \\
&= \sigma r
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
Js = sJ &= \frac{1}{\sqrt{5a^r}}(\sigma I - J)J \\
&= \frac{1}{\sqrt{5a^r}}\sigma J - \frac{1}{\sqrt{5a^r}}J^2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{5a^r}}\sigma J - \frac{1}{\sqrt{5a^r}} \left(J - \frac{1-5a^r}{4}I \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5a^r}} \left(\sigma J - J + \frac{1-5a^r}{4}I \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5a^r}} \left((\sigma - 1)J + \frac{1-5a^r}{4}I \right) \\
&= (1 - \sigma)s
\end{aligned}$$

olur. O halde

$$\begin{cases} Jr = rJ = \sigma r = \frac{1}{\sqrt{5a^r}} \left(\sigma J - \frac{1-5a^r}{4}I \right) \\ Js = sJ = (1 - \sigma)s = \frac{1}{\sqrt{5a^r}} \left((\sigma - 1)J + \frac{1-5a^r}{4}I \right) \end{cases} \quad (3.13)$$

elde edilir. $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için, bu eşitliklerin yardımıyla

$$\begin{aligned}
N_J(rX, rY) &= J^2[rX, rY] + [JrX, JrY] - J[JrX, rY] - J[rX, JrY] \\
&= J^2[rX, rY] + \sigma^2[rX, rY] - 2\sigma J[rX, rY] \\
&= \left(J - \frac{1-5a^r}{4} \right) [rX, rY] + \left(\sigma - \frac{1-5a^r}{4} \right) [rX, rY] - 2\sigma J[rX, rY] \\
&= J[rX, rY] - \frac{1-5a^r}{4} [rX, rY] + \sigma [rX, rY] - \frac{1-5a^r}{4} [rX, rY] - 2\sigma J[rX, rY] \\
&= (1 - 2\sigma)J[rX, rY] + \left(\sigma - \frac{1-5a^r}{4} \right) [rX, rY] \\
&= (1 - 2\sigma)J[rX, rY] + \sigma(2\sigma - 1)[rX, rY]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 sN_J(rX, rY) &= (1 - 2\sigma)sJ[rX, rY] + \sigma(2\sigma - 1)s[rX, rY] \\
 &= (1 - 2\sigma)(1 - \sigma)s[rX, rY] + \sigma(2\sigma - 1)s[rX, rY] \\
 &= (2\sigma - 1)^2s[rX, rY] \\
 &= 5a^r s[rX, rY]
 \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\frac{1}{5a^r} sN_J(rX, rY) = s[rX, rY]$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
 rN_J(sX, sY) &= (2\sigma - 1)rJ[sX, sY] + (\sigma - 1)(2\sigma - 1)r[sX, sY] \\
 &= (2\sigma - 1)\sigma r[sX, sY] + (\sigma - 1)(2\sigma - 1)r[sX, sY] \\
 &= (2\sigma - 1)^2r[sX, sY] \\
 &= 5a^r r[sX, sY]
 \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\frac{1}{5a^r} rN_J(sX, sY) = r[sX, sY]$$

elde edilir. O halde

$$\begin{cases} \frac{1}{5a^r} sN_J(rX, rY) = s[rX, rY] \\ \frac{1}{5a^r} rN_J(sX, sY) = r[sX, sY] \end{cases} \quad (3.14)$$

olur. Eş. 3.13, Eş. 3.14 eşitlikleri ve yukarıda yer alan Not yardımıyla aşağıdaki önerme elde edilir.

3.2.2. Önerme

M manifoldu üzerinde tamamlayıcı dağılımlar R, S ; bunlarla ilişkili projeksiyonlar ise r, s olsun. Bir (M, g, J) hemen hemen Hsu-altın B -manifoldu için, $\forall K, T \in \Gamma(TM)$ alındığında;

- a) R integrallenebilirdir $\Leftrightarrow sN_J(rK, rT) = 0$,
- b) S integrallenebilirdir $\Leftrightarrow rN_J(sK, sT) = 0$,
- c) J integrallenebilir $\Rightarrow R$ ve S dağılımları da integrallenebilirdir.

3.2.3. Önerme

J bir hemen hemen Hsu-altın yapı olmak üzere; r ve s projeksiyon operatörleri için

$$N_r = N_s = \frac{1}{5a^r} N_J = M_r = M_s$$

ve

$$H_r = H_s = \frac{1}{5a^r} H_J$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat

J hemen hemen Hsu-altın yapı olsun. $\forall K, T \in \Gamma(TM)$ için, Eş. 3.6-Eş. 3.12 eşitliklerinden:

$$\begin{aligned} N_r(K, T) &= -r[rK, T] - r[K, rT] + r^2[K, T] + [rK, rT] \\ &= -r[rK, T] - r[K, rT] + r[K, T] + [rK, rT] \\ &= -r \left[\left(\frac{\sigma-1}{2\sigma-1} I + \frac{J}{2\sigma-1} \right) K, T \right] - r \left[K, \left(\frac{\sigma-1}{2\sigma-1} I + \frac{J}{2\sigma-1} \right) T \right] \\ &\quad + r[K, T] + \left[\left(\frac{\sigma-1}{2\sigma-1} I + \frac{J}{2\sigma-1} \right) K, \left(\frac{\sigma-1}{2\sigma-1} I + \frac{J}{2\sigma-1} \right) T \right] \\ &= -r \left[\frac{\sigma-1}{2\sigma-1} K, T \right] - r \left[\frac{1}{2\sigma-1} J(K), T \right] - r \left[K, \frac{\sigma-1}{2\sigma-1} T \right] \\ &\quad - r \left[K, \frac{1}{2\sigma-1} J(T) \right] + r[K, T] + \left[\frac{\sigma-1}{2\sigma-1} K, \left(\frac{\sigma-1}{2\sigma-1} I + \frac{J}{2\sigma-1} \right) T \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{1}{2\sigma-1} J(K), \left(\frac{\sigma-1}{2\sigma-1} I + \frac{J}{2\sigma-1} \right) T \right] \\
= & - \frac{\sigma-1}{2\sigma-1} r[K, T] - \frac{1}{2\sigma-1} r[J(K), T] - \frac{\sigma-1}{2\sigma-1} r[K, T] - \frac{1}{2\sigma-1} r[K, J(T)] \\
& + r[K, T] + \frac{\sigma-1}{2\sigma-1} \left[K, \frac{\sigma-1}{2\sigma-1} T \right] + \frac{\sigma-1}{2\sigma-1} \left[K, \frac{1}{2\sigma-1} J(T) \right] \\
& + \frac{1}{2\sigma-1} \left[J(K), \frac{\sigma-1}{2\sigma-1} T \right] + \frac{1}{2\sigma-1} \left[J(K), \frac{1}{2\sigma-1} J(T) \right] \\
= & - \frac{2(\sigma-1)}{2\sigma-1} r[K, T] - \frac{1}{2\sigma-1} r[J(K), T] - \frac{1}{2\sigma-1} r[K, J(T)] + r[K, T] \\
& + \left(\frac{\sigma-1}{2\sigma-1} \right)^2 [K, T] + \frac{\sigma-1}{(2\sigma-1)^2} [K, J(T)] + \frac{\sigma-1}{(2\sigma-1)^2} [J(K), T] \\
& + \frac{1}{(2\sigma-1)^2} [J(K), J(T)] \\
= & - \frac{2(\sigma-1)}{2\sigma-1} \left(\frac{\sigma-1}{2\sigma-1} I + \frac{J}{2\sigma-1} \right) [K, T] \\
& - \frac{1}{2\sigma-1} \left(\frac{\sigma-1}{2\sigma-1} I + \frac{J}{2\sigma-1} \right) [J(K), T] \\
& - \frac{1}{2\sigma-1} \left(\frac{\sigma-1}{2\sigma-1} I + \frac{J}{2\sigma-1} \right) [K, J(T)] + \left(\frac{\sigma-1}{2\sigma-1} I + \frac{J}{2\sigma-1} \right) [K, T] \\
& + \left(\frac{\sigma-1}{2\sigma-1} \right)^2 [K, T] + \frac{\sigma-1}{(2\sigma-1)^2} [K, J(T)] + \frac{\sigma-1}{(2\sigma-1)^2} [J(K), T] \\
& + \frac{1}{(2\sigma-1)^2} [J(K), J(T)] \\
= & - 2 \left(\frac{\sigma-1}{2\sigma-1} \right)^2 [K, T] - 2 \frac{\sigma-1}{(2\sigma-1)^2} J[K, T] - \frac{\sigma-1}{(2\sigma-1)^2} [J(K), T] \\
& - \frac{1}{(2\sigma-1)^2} J[J(K), T] - \frac{\sigma-1}{(2\sigma-1)^2} [K, J(T)] - \frac{1}{(2\sigma-1)^2} J[K, J(T)] \\
& + \frac{\sigma-1}{2\sigma-1} [K, T] + \frac{1}{2\sigma-1} J[K, T] + \left(\frac{\sigma-1}{2\sigma-1} \right)^2 [K, T] + \frac{\sigma-1}{(2\sigma-1)^2} [K, J(T)] \\
& + \frac{\sigma-1}{(2\sigma-1)^2} [J(K), T] + \frac{1}{(2\sigma-1)^2} [J(K), J(T)] \\
= & - \frac{\sigma(1-\sigma)}{(2\sigma-1)^2} [K, T] + \frac{1}{(2\sigma-1)^2} J[K, T] - \frac{1}{(2\sigma-1)^2} J[J(K), T] \\
& - \frac{1}{(2\sigma-1)^2} J[K, J(T)] + \frac{1}{(2\sigma-1)^2} [J(K), J(T)] \\
= & \frac{1}{(2\sigma-1)^2} ((J - \sigma(1-\sigma))[K, T] - J[J(K), T] - J[K, J(T)] + [J(K), J(T)]) \\
= & \frac{1}{(2\sigma-1)^2} \left(\left(J - \frac{1-5a^r}{4} I \right) [K, T] - J[J(K), T] - J[K, J(T)] + [J(K), J(T)] \right) \\
= & \frac{1}{(2\sigma-1)^2} (J^2[K, T] - J[J(K), T] - J[K, J(T)] + [J(K), J(T)])
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\sigma-1)^2} N_J(K, T) \\
&= \frac{1}{5a^r} N_J(K, T)
\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan;

$$\begin{aligned}
N_s(K, T) &= -s[sK, T] - s[K, sT] + s^2[K, T] + [sK, sT] \\
&= -s[sK, T] - s[K, sT] + s[K, T] + [sK, sT] \\
&= -s \left[\left(\frac{\sigma}{2\sigma-1} - \frac{J}{2\sigma-1} \right) K, T \right] - s \left[K, \left(\frac{\sigma}{2\sigma-1} - \frac{J}{2\sigma-1} \right) T \right] + s[K, T] \\
&\quad + \left[\left(\frac{\sigma}{2\sigma-1} - \frac{J}{2\sigma-1} \right) K, \left(\frac{\sigma}{2\sigma-1} I - \frac{J}{2\sigma-1} \right) T \right] \\
&= -s \left[\frac{\sigma}{2\sigma-1} K, T \right] + s \left[\frac{1}{2\sigma-1} JK, T \right] - s \left[K, \frac{\sigma}{2\sigma-1} T \right] + s \left[K, \frac{1}{2\sigma-1} JT \right] \\
&\quad + s[K, T] + \left[\frac{\sigma}{2\sigma-1} K, \left(\frac{\sigma}{2\sigma-1} I - \frac{J}{2\sigma-1} \right) T \right] \\
&\quad - \left[\frac{1}{2\sigma-1} JK, \left(\frac{\sigma}{2\sigma-1} I - \frac{J}{2\sigma-1} \right) T \right] \\
&= -\frac{\sigma}{2\sigma-1} s[K, T] + \frac{1}{2\sigma-1} s[JK, T] - \frac{\sigma}{2\sigma-1} s[K, T] + \frac{1}{2\sigma-1} s[K, JT] + s[K, T] \\
&\quad + \frac{\sigma}{2\sigma-1} \left[K, \left(\frac{\sigma}{2\sigma-1} I - \frac{J}{2\sigma-1} \right) T \right] - \frac{1}{2\sigma-1} \left[JK, \left(\frac{\sigma}{2\sigma-1} I - \frac{J}{2\sigma-1} \right) T \right] \\
&= -\frac{2\sigma}{2\sigma-1} s[K, T] + \frac{1}{2\sigma-1} s[JK, T] + \frac{1}{2\sigma-1} s[K, JT] + s[K, T] \\
&\quad + \left(\frac{\sigma}{2\sigma-1} \right)^2 [K, T] - \frac{\sigma}{(2\sigma-1)^2} [K, JT] - \frac{\sigma}{(2\sigma-1)^2} [JK, T] \\
&\quad + \frac{1}{(2\sigma-1)^2} [JK, JT] \\
&= -\frac{2\sigma}{2\sigma-1} \left(\frac{\sigma}{2\sigma-1} I - \frac{J}{2\sigma-1} \right) [K, T] + \frac{1}{2\sigma-1} \left(\frac{\sigma}{2\sigma-1} I - \frac{J}{2\sigma-1} \right) [JK, T] \\
&\quad + \frac{1}{2\sigma-1} \left(\frac{\sigma}{2\sigma-1} I - \frac{J}{2\sigma-1} \right) [K, JT] + s[K, T] + \left(\frac{\sigma}{2\sigma-1} \right)^2 [K, T] \\
&\quad - \frac{\sigma}{(2\sigma-1)^2} [K, JT] - \frac{\sigma}{(2\sigma-1)^2} [JK, T] + \frac{1}{(2\sigma-1)^2} [JK, JT] \\
&= -\frac{2\sigma^2}{2\sigma-1} [K, T] + \frac{2\sigma}{(2\sigma-1)^2} J[K, T] + \frac{\sigma}{(2\sigma-1)^2} [JK, T] - \frac{1}{(2\sigma-1)^2} J[JK, T] \\
&\quad + \frac{\sigma}{(2\sigma-1)^2} [K, JT] - \frac{1}{(2\sigma-1)^2} J[K, JT] + \frac{\sigma}{2\sigma-1} [K, T] - \frac{1}{2\sigma-1} J[K, T] \\
&\quad + \frac{\sigma^2}{(2\sigma-1)^2} [K, T] - \frac{\sigma}{(2\sigma-1)^2} [K, JT] - \frac{\sigma}{(2\sigma-1)^2} [JK, T] + \frac{1}{(2\sigma-1)^2} [JK, JT]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\sigma(1-\sigma)}{(2\sigma-1)^2}[K, T] + \frac{1}{(2\sigma-1)^2}J[K, T] - \frac{1}{(2\sigma-1)^2}J[J(K), T] \\
&\quad - \frac{1}{(2\sigma-1)^2}J[K, J(T)] + \frac{1}{(2\sigma-1)^2}[J(K), J(T)] \\
&= \frac{1}{(2\sigma-1)^2}((J-\sigma(1-\sigma))[K, T] - J[J(K), T] - J[K, J(T)] + [J(K), J(T)]) \\
&= \frac{1}{(2\sigma-1)^2}(J^2[K, T] - J[J(K), T] - J[K, J(T)] + [J(K), J(T)]) \\
&= \frac{1}{(2\sigma-1)^2}N_J(K, T) \\
&= \frac{1}{5a^r}N_J(K, T)
\end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$N_r[K, T] = \frac{1}{5a^r}N_J[K, T] = N_s[K, T]$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
M_r(K, T) &= r\{rK, T\} + r\{K, rT\} - r^2\{K, T\} - \{rK, rT\} \\
&= r\{rK, T\} + r\{K, rT\} - r\{K, T\} - \{rK, rT\} \\
&= r\left\{\left(\frac{\sigma-1}{2\sigma-1}I + \frac{J}{2\sigma-1}\right)K, T\right\} + r\left\{K, \left(\frac{\sigma-1}{2\sigma-1}I + \frac{J}{2\sigma-1}\right)T\right\} \\
&\quad - r\{K, T\} - \left\{\left(\frac{\sigma-1}{2\sigma-1}I + \frac{J}{2\sigma-1}\right)K, \left(\frac{\sigma-1}{2\sigma-1}I + \frac{J}{2\sigma-1}\right)T\right\} \\
&= r\left\{\frac{\sigma-1}{2\sigma-1}K, T\right\} + r\left\{\frac{1}{2\sigma-1}J(K), T\right\} + r\left\{K, \frac{\sigma-1}{2\sigma-1}T\right\} \\
&\quad + r\left\{K, \frac{1}{2\sigma-1}J(T)\right\} - r\{K, T\} - \left\{\frac{\sigma-1}{2\sigma-1}K, \left(\frac{\sigma-1}{2\sigma-1}I + \frac{J}{2\sigma-1}\right)T\right\} \\
&\quad - \left\{\frac{1}{2\sigma-1}J(K), \left(\frac{\sigma-1}{2\sigma-1}I + \frac{J}{2\sigma-1}\right)T\right\} \\
&= \frac{\sigma-1}{2\sigma-1}r\{K, T\} + \frac{1}{2\sigma-1}r\{J(K), T\} + \frac{\sigma-1}{2\sigma-1}r\{K, T\} + \frac{1}{2\sigma-1}r\{K, J(T)\} \\
&\quad - r\{K, T\} - \frac{\sigma-1}{2\sigma-1}\left\{K, \frac{\sigma-1}{2\sigma-1}T\right\} - \frac{\sigma-1}{2\sigma-1}\left\{K, \frac{1}{2\sigma-1}J(T)\right\} \\
&\quad - \frac{1}{2\sigma-1}\left\{J(K), \frac{\sigma-1}{2\sigma-1}T\right\} - \frac{1}{2\sigma-1}\left\{J(K), \frac{1}{2\sigma-1}J(T)\right\} \\
&= \frac{2(\sigma-1)}{2\sigma-1}r\{K, T\} + \frac{1}{2\sigma-1}r\{J(K), T\} + \frac{1}{2\sigma-1}r\{K, J(T)\} - r\{K, T\} \\
&\quad - \left(\frac{\sigma-1}{2\sigma-1}\right)^2\{K, T\} - \frac{\sigma-1}{(2\sigma-1)^2}\{K, J(T)\} - \frac{\sigma-1}{(2\sigma-1)^2}\{J(K), T\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{(2\sigma-1)^2}\{J(K),J(T)\} \\
& =\frac{2(\sigma-1)}{2\sigma-1}\left(\frac{\sigma-1}{2\sigma-1}I+\frac{J}{2\sigma-1}\right)\{K,T\} \\
& \quad +\frac{1}{2\sigma-1}\left(\frac{\sigma-1}{2\sigma-1}I+\frac{J}{2\sigma-1}\right)\{J(K),T\} \\
& \quad +\frac{1}{2\sigma-1}\left(\frac{\sigma-1}{2\sigma-1}I+\frac{J}{2\sigma-1}\right)\{K,J(T)\}-\left(\frac{\sigma-1}{2\sigma-1}I+\frac{J}{2\sigma-1}\right)\{K,T\} \\
& \quad -\left(\frac{\sigma-1}{2\sigma-1}\right)^2\{K,T\}-\frac{\sigma-1}{(2\sigma-1)^2}\{K,J(T)\}-\frac{\sigma-1}{(2\sigma-1)^2}\{J(K),T\} \\
& \quad -\frac{1}{(2\sigma-1)^2}\{J(K),J(T)\} \\
& =2\left(\frac{\sigma-1}{2\sigma-1}\right)^2\{K,T\}+2\frac{\sigma-1}{(2\sigma-1)^2}J\{K,T\}+\frac{\sigma-1}{(2\sigma-1)^2}\{J(K),T\} \\
& \quad +\frac{1}{(2\sigma-1)^2}J\{J(K),T\}+\frac{\sigma-1}{(2\sigma-1)^2}\{K,J(T)\}+\frac{1}{(2\sigma-1)^2}J\{K,J(T)\} \\
& \quad -\frac{\sigma-1}{2\sigma-1}\{K,T\}-\frac{1}{2\sigma-1}J\{K,T\}-\left(\frac{\sigma-1}{2\sigma-1}\right)^2\{K,T\}-\frac{\sigma-1}{(2\sigma-1)^2}\{K,J(T)\} \\
& \quad -\frac{\sigma-1}{(2\sigma-1)^2}\{J(K),T\}-\frac{1}{(2\sigma-1)^2}\{J(K),J(T)\} \\
& =\frac{\sigma(1-\sigma)}{(2\sigma-1)^2}\{K,T\}-\frac{1}{(2\sigma-1)^2}J\{K,T\}+\frac{1}{(2\sigma-1)^2}J\{J(K),T\} \\
& \quad +\frac{1}{(2\sigma-1)^2}J\{K,J(T)\}-\frac{1}{(2\sigma-1)^2}\{J(K),J(T)\} \\
& =\frac{1}{(2\sigma-1)^2}\left((-J+\sigma(1-\sigma))\{K,T\}+J\{J(K),T\}+J\{K,J(T)\}-\{J(K),J(T)\}\right) \\
& =\frac{1}{(2\sigma-1)^2}\left(\left(-J+\frac{1-5a^r}{4}I\right)\{K,T\}+J\{J(K),T\}+J\{K,J(T)\}\right. \\
& \quad \left.-\{J(K),J(T)\}\right) \\
& =\frac{1}{(2\sigma-1)^2}\left(-J^2\{K,T\}+J\{J(K),T\}+J\{K,J(T)\}-\{J(K),J(T)\}\right) \\
& =\frac{1}{(2\sigma-1)^2}M_J(K,T) \\
& =\frac{1}{5a^r}M_J(K,T)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
M_s(K,T) & =s\{sK,T\}+s\{K,sT\}-s^2\{K,T\}-\{sK,sT\} \\
& =s\{sK,T\}+s\{K,sT\}-s\{K,T\}-\{sK,sT\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= +s \left\{ \left(\frac{\sigma}{2\sigma-1} - \frac{J}{2\sigma-1} \right) K, T \right\} + s \left\{ K, \left(\frac{\sigma}{2\sigma-1} - \frac{J}{2\sigma-1} \right) T \right\} - s \{K, T\} \\
&\quad - \left\{ \left(\frac{\sigma}{2\sigma-1} - \frac{J}{2\sigma-1} \right) K, \left(\frac{\sigma}{2\sigma-1} I - \frac{J}{2\sigma-1} \right) T \right\} \\
&= s \left\{ \frac{\sigma}{2\sigma-1} K, T \right\} - s \left\{ \frac{1}{2\sigma-1} JK, T \right\} + s \left\{ K, \frac{\sigma}{2\sigma-1} T \right\} - s \left\{ K, \frac{1}{2\sigma-1} JT \right\} \\
&\quad - s \{K, T\} - \left\{ \frac{\sigma}{2\sigma-1} K, \left(\frac{\sigma}{2\sigma-1} I - \frac{J}{2\sigma-1} \right) T \right\} \\
&\quad + \left\{ \frac{1}{2\sigma-1} JK, \left(\frac{\sigma}{2\sigma-1} I - \frac{J}{2\sigma-1} \right) T \right\} \\
&= \frac{\sigma}{2\sigma-1} s \{K, T\} - \frac{1}{2\sigma-1} s \{JK, T\} + \frac{\sigma}{2\sigma-1} s \{K, T\} - \frac{1}{2\sigma-1} s \{K, JT\} \\
&\quad - s \{K, T\} - \frac{\sigma}{2\sigma-1} \left\{ K, \left(\frac{\sigma}{2\sigma-1} I - \frac{J}{2\sigma-1} \right) T \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2\sigma-1} \left\{ JK, \left(\frac{\sigma}{2\sigma-1} I - \frac{J}{2\sigma-1} \right) T \right\} \\
&= \frac{2\sigma}{2\sigma-1} s \{K, T\} - \frac{1}{2\sigma-1} s \{JK, T\} - \frac{1}{2\sigma-1} s \{K, JT\} - s \{K, T\} \\
&\quad - \left(\frac{\sigma}{2\sigma-1} \right)^2 \{K, T\} + \frac{\sigma}{(2\sigma-1)^2} \{K, JT\} + \frac{\sigma}{(2\sigma-1)^2} \{JK, T\} \\
&\quad - \frac{1}{(2\sigma-1)^2} \{JK, JT\} \\
&= \frac{2\sigma}{2\sigma-1} \left(\frac{\sigma}{2\sigma-1} I - \frac{J}{2\sigma-1} \right) \{K, T\} - \frac{1}{2\sigma-1} \left(\frac{\sigma}{2\sigma-1} I - \frac{J}{2\sigma-1} \right) \{JK, T\} \\
&\quad - \frac{1}{2\sigma-1} \left(\frac{\sigma}{2\sigma-1} I - \frac{J}{2\sigma-1} \right) \{K, JT\} - s \{K, T\} - \left(\frac{\sigma}{2\sigma-1} \right)^2 \{K, T\} \\
&\quad + \frac{\sigma}{(2\sigma-1)^2} \{K, JT\} + \frac{\sigma}{(2\sigma-1)^2} \{JK, T\} - \frac{1}{(2\sigma-1)^2} \{JK, JT\} \\
&= \frac{2\sigma^2}{2\sigma-1} \{K, T\} - \frac{2\sigma}{(2\sigma-1)^2} J \{K, T\} - \frac{\sigma}{(2\sigma-1)^2} \{JK, T\} + \frac{1}{(2\sigma-1)^2} J \{JK, T\} \\
&\quad - \frac{\sigma}{(2\sigma-1)^2} \{K, JT\} + \frac{1}{(2\sigma-1)^2} J \{K, JT\} - \frac{\sigma}{2\sigma-1} \{K, T\} + \frac{1}{2\sigma-1} J \{K, T\} \\
&\quad - \frac{\sigma^2}{(2\sigma-1)^2} \{K, T\} + \frac{\sigma}{(2\sigma-1)^2} \{K, JT\} + \frac{\sigma}{(2\sigma-1)^2} \{JK, T\} \\
&\quad - \frac{1}{(2\sigma-1)^2} \{JK, JT\} \\
&= \frac{\sigma(1-\sigma)}{(2\sigma-1)^2} \{K, T\} - \frac{1}{(2\sigma-1)^2} J \{K, T\} + \frac{1}{(2\sigma-1)^2} J \{J(K), T\} \\
&\quad + \frac{1}{(2\sigma-1)^2} J \{K, J(T)\} - \frac{1}{(2\sigma-1)^2} \{J(K), J(T)\} \\
&= \frac{1}{(2\sigma-1)^2} ((-J + \sigma(1-\sigma)) \{K, T\} + J \{J(K), T\} + J \{K, J(T)\} \\
&\quad - \{J(K), J(T)\})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\sigma - 1)^2} (-J^2\{K, T\} + J\{J(K), T\} + J\{K, J(T)\} - \{J(K), J(T)\}) \\
&= \frac{1}{(2\sigma - 1)^2} M_J(K, T) \\
&= \frac{1}{5a^r} M_J(K, T)
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$M_r[K, T] = \frac{1}{5a^r} M_J[K, T] = M_s[K, T]$$

olduğu kolayca görülebilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
H_J(K, T) &= \frac{N_J + M_J}{2} \\
&= \frac{5a^r}{2} (N_r[K, T] + M_r[K, T]) \\
&= 5a^r H_r(K, T)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
H_J(K, T) &= \frac{N_J + M_J}{2} \\
&= \frac{5a^r}{2} (N_s[K, T] + M_s[K, T]) \\
&= 5a^r H_s(K, T)
\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak

$$H_r(K, T) = \frac{1}{5a^r} H_J(K, T) = H_s(K, T)$$

elde edilir.

3.2.4. Sonuç

J bir hemen hemen Hsu-altın B -yapı olmak üzere;

a) r ve s projeksiyonları g -simetrik,

- b) R ve S dağılımları g -ortogonal,
 c) J, N_J -simetriktir.

İspat

J bir hemen hemen Hsu-altın B -yapı olsun. $\forall K, T \in \Gamma(TM)$ için;

- a) $r = \frac{\sigma-1}{\sqrt{5a^r}}I + \frac{1}{\sqrt{5a^r}}J$ olduğundan $J = \sqrt{5a^r}r + (1 - \sigma)I$ olur. O halde

$$\begin{aligned}
 0 &= g(J(K), T) - g(K, J(T)) \\
 &= g((\sqrt{5a^r}r + (1 - \sigma)I)(K), T) - g(K, (\sqrt{5a^r}r + (1 - \sigma)I)(T)) \\
 &= g(\sqrt{5a^r}r(K), T) + g((1 - \sigma)I(K), T) - g(K, \sqrt{5a^r}r(T)) + g(K, (1 - \sigma)I(T)) \\
 &= (1 - \sigma)g(K, T) + \sqrt{5a^r}g(r(K), T) - (1 - \sigma)g(K, T) + \sqrt{5a^r}g(K, r(T)) \\
 &= g(r(K), T) - g(K, r(T))
 \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde $s = \frac{\sigma}{\sqrt{5a^r}}I - \frac{1}{\sqrt{5a^r}}J$ olduğundan $J = \sigma I - \sqrt{5a^r}s$ olur. O halde

$$\begin{aligned}
 0 &= g(J(K), T) - g(K, J(T)) \\
 &= g((\sigma I - \sqrt{5a^r}s)(K), T) - g(K, (\sigma I - \sqrt{5a^r}s)(T)) \\
 &= -g(\sqrt{5a^r}s(K), T) + g(\sigma I(K), T) + g(K, \sqrt{5a^r}s(T)) + g(K, \sigma I(T)) \\
 &= \sigma g(K, T) - \sqrt{5a^r}g(s(K), T) - \sigma g(K, T) + \sqrt{5a^r}g(K, s(T)) \\
 &= g(s(K), T) - g(K, s(T))
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç olarak r ve s projeksiyonları g -simetriktir.

- b) R ve S dağılımları tümleyen dağılım olduğundan $T_x M = R_x \oplus S_x$ olur. g metriği M manifoldu üzerinde tanımlandığı için $(R_x)^\perp = S_x$ ve $(S_x)^\perp = R_x$ olur. Dolayısıyla $g(r(K), s(T)) = 0$ olur.

Sonuç olarak R ve S dağılımları g -ortogondur.

c) J yapısının Nijenhuis tensörü N_J olmak üzere;

$$\begin{aligned}
N_J(J(K), T) &= J^2([J(K), T]) + [J^2(K), J(T)] - J[J^2(K), T] - J[J(K), J(T)] \\
&= \left(J - \frac{1-5a^r}{4}I \right) ([J(K), T]) + \left[\left(J - \frac{1-5a^r}{4}I \right) (K), J(T) \right] \\
&\quad - J \left[\left(J - \frac{1-5a^r}{4}I \right) (K), T \right] - J[J(K), J(T)] \\
&= J[J(K), T] - \frac{1-5a^r}{4}[J(K), T] + [J(K), J(T)] - \frac{1-5a^r}{4}[K, J(T)] \\
&\quad - J[J(K), T] + \frac{1-5a^r}{4}J[K, T] - J[J(K), J(T)] \\
&= (I - J)[J(K), J(T)] - \frac{1-5a^r}{4}([J(K), T] + [K, J(T)] - J[K, T])
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
N_J(K, J(T)) &= J^2([K, J(T)]) + [J(K), J^2(T)] - J[K, J^2(T)] - J[J(K), J(T)] \\
&= \left(J - \frac{1-5a^r}{4}I \right) [K, J(T)] + \left[J(K), \left(J - \frac{1-5a^r}{4}I \right) (T) \right] \\
&\quad - J \left[K, \left(J - \frac{1-5a^r}{4}I \right) (T) \right] - J[J(K), J(T)] \\
&= J[K, J(T)] - \frac{1-5a^r}{4}[K, J(T)] + [J(K), J(T)] - \frac{1-5a^r}{4}[J(K), T] \\
&\quad - J[K, J(T)] + \frac{1-5a^r}{4}J[K, T] - J[J(K), J(T)] \\
&= (I - J)[J(K), J(T)] - \frac{1-5a^r}{4}([J(K), T] + [K, J(T)] - J[K, T])
\end{aligned}$$

olur.

Dolayısıyla $N_J(J(K), T) = N_J(K, J(T))$ elde edilir. O halde J hemen hemen Hsu-altın B -yapısı N_J -simetriktir.

Böylece ispat tamalanmış olur.

3.2.5. Lemma

(M, g, J) bir hemen hemen Hsu-altın B -manifold olsun. O halde M üzerinde $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$

için;

$$N_J(X, Y) = (\nabla_{JX}J)Y - (\nabla_{JY}J)X + J(\nabla_YJ)X - J(\nabla_XJ)Y \quad (3.15)$$

olur.

İspat

Lie parantez operatörü $[X, Y] = \nabla_XY - \nabla_YX$ ve J yapısının kovaryant türevi $(\nabla_XJ)Y = \nabla_XJY - J\nabla_XY$ dikkate alındığında,

$$\begin{aligned} N_J(X, Y) &= J^2[X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] \\ &= J(\nabla_XY) - J(\nabla_YX) - \frac{1-5a^r}{4}\nabla_XY + \frac{1-5a^r}{4}\nabla_YX \\ &\quad + (\nabla_{JX}J)Y + J(\nabla_{JX}Y) - (\nabla_{JY}J)X - J(\nabla_{JY}X) \\ &\quad - J(\nabla_{JX}Y) + J(\nabla_YJ)X + J(\nabla_YX) - \frac{1-5a^r}{4}\nabla_XY \\ &\quad - J(\nabla_XJ)Y - J(\nabla_XY) + \frac{1-5a^r}{4}\nabla_XY + J(\nabla_{JY}X) \\ &= (\nabla_{JX}J)Y - (\nabla_{JY}J)X + J(\nabla_YJ)X - J(\nabla_XJ)Y. \end{aligned}$$

elde edilir.

$N_J = 0$ için, J hemen hemen Hsu-golden yapısı integrallenebilirdir denir ve (M, g, J) üçlüsü Hsu-altın B -manifold olarak adlandırılır.

3.2.6. Sonuç

Bir (M, g, J) hemen hemen Hsu-altın B -manifoldunu ele alalım. $\nabla J = 0$ koşulu sağlandığında, J Hsu-altın yapısı integrallenebilirdir denir ve (M, g, J) üçlüsü bir Hsu-altın B -manifold olarak adlandırılır.

Eş. 3.15 eşitliğine dayanarak, Codazzi tipi bir denklem cinsinden ifade edilen aşağıdaki integrallenebilirlik koşulu elde edilir:

3.2.7. Teorem

M manifoldu üzerinde herhangi iki vektör alanı X ve Y olmak üzere; bir (M, g, J) hemen hemen Hsu-altın B -manifoldu için, J yapısının integrallenebilirliği aşağıdaki Codazzi tipi denklemin sağlanmasına eşdeğerdir:

$$(\nabla_{JX}J)Y - J(\nabla_XJ)Y = 0.$$

$(0, l)$ tipinden bir Ω pür tensörü için, J ye göre tanımlanan ϕ operatörü aşağıdaki bağıntı ile verilir:

$$(\phi_J\Omega)(X, Y_1, \dots, Y_l) = (JX)\Omega(Y_1, \dots, Y_l) - X\Omega(JY_1, \dots, Y_l) \\ + \sum_{\lambda=1}^a \Omega(Y_1, \dots, (L_{Y_\lambda}J)X, \dots, Y_l).$$

Burada $X, Y_1, \dots, Y_l \in \Gamma(TM)$ ve L_Y, Y ye göre Lie türevini ifade eder [5].

Aşağıdaki teorem, J Hsu-altın yapısının integrallenebilirlik özelliğiyle ϕ operatörünün ilişkisini ifade eder.

3.2.8. Teorem

Bir (M, g, J) hemen hemen Hsu-altın B -manifoldu verilsin. J yapısının integrallenebilirliği ϕ_Jg nin sıfırlanması ile karakterize edilir. Yani $\phi_Jg = 0$ ise J integrallenebilirdir.

İspat

(M, g, J) hemen hemen Hsu-altın B -manifold olsun. $\forall V, K, T \in \Gamma(TM)$ için Eş. 3.4 eşitliğinden;

$$\nabla_Vg(JK, T) = \nabla_Vg(K, JT)$$

eld edilir. Ayrıca $\nabla g = 0$ olduğundan;

$$\begin{aligned}
\nabla_V g(JK, T) &= (\nabla_V g)(JK, T) + g(\nabla_V JK, T) + g(JK, \nabla_V T) \\
&= g(\nabla_V JK, T) + g(JK, \nabla_V T) \\
&= g((\nabla_V J)K + J(\nabla_V K), T) + g(JK, \nabla_V T) \\
&= g((\nabla_V J)K, T) + g(J(\nabla_V K), T) + g(JK, \nabla_V T)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

ve

$$\begin{aligned}
\nabla_V g(K, JT) &= (\nabla_V g)(K, JT) + g(\nabla_V K, JT) + g(K, \nabla_V JT) \\
&= g(\nabla_V K, JT) + g(K, \nabla_V JT) \\
&= g(\nabla_V K, JT) + g(K, (\nabla_V J)T + J(\nabla_V T)) \\
&= g(\nabla_V K, JT) + g(K, (\nabla_V J)T) + g(Y, J(\nabla_V T))
\end{aligned} \tag{3.17}$$

olur. Eş. 3.16 ve Eş. 3.17 eşitliklerinden

$$g((\nabla_V J)K, T) = g(K(\nabla_V J)T)$$

elde edilir. g metriğinin Levi-Civita konneksiyonu ∇ ve $L_K T = [K, T] = \nabla_K T - \nabla_T K$ olmak üzere, $\forall W, K, T \in \Gamma(TM)$ için;

$$\begin{aligned}
(\phi_J g)(W, K, T) &= (JW)g(K, T) - Wg(JK, T) + g((L_K J)W, T) + g(K, (L_T J)W) \\
&= (JW)g(K, T) - Wg(JK, T) + g([K, JW] - J[K, W], T) \\
&\quad + g(K, [T, JW] - J[T, W]) \\
&= (JW)g(K, T) - Wg(JK, T) + g([K, JW], T) - g(J[K, W], T) \\
&\quad + g(K, [T, JW]) - g(K, J[T, W]) \\
&= (JW)g(K, T) - Wg(JK, T) + g(\nabla_K JW - \nabla_{JW} K, T) \\
&\quad - g(J(\nabla_K W - \nabla_W K), T) + g(K, \nabla_T JW - \nabla_{JW} T) \\
&\quad - g(K, J(\nabla_T W - \nabla_W T)) \\
&= (JW)g(K, T) - Wg(JK, T) + g(\nabla_K JW, T) - g(\nabla_{JW} K, T)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -g(J(\nabla_K W), T) + g(J(\nabla_W K), T) + g(K, \nabla_T J W) \\
& -g(K, \nabla_{JW} T) - g(K, J(\nabla_T W)) + g(K, J(\nabla_W T)) \\
= & (JW)g(K, T) - Wg(JK, T) + g(\nabla_K J W, T) - g(\nabla_{JW} K, T) \\
& -g(\nabla_K J W - (\nabla_K J)W, T) + g(\nabla_W J K - (\nabla_W J)K, T) \\
& + g(K, \nabla_T J W) - g(K, \nabla_{JW} T) - g(K, \nabla_T J W - (\nabla_T J)W) \\
& + g(K, \nabla_W J T - (\nabla_W J)T) \\
= & (JW)g(K, T) - Wg(JK, T) + g(\nabla_K J W, T) - g(\nabla_{JW} K, T) \\
& -g(\nabla_K J W, T) + g((\nabla_K J)W, T) + g(\nabla_W J K, T) \\
& -g((\nabla_W J)K, T) + g(K, \nabla_T J W) - g(K, \nabla_{JW} T) \\
& -g(K, \nabla_T J W) + g(K, (\nabla_T J)W) + g(K, \nabla_W J T) - g(K, (\nabla_W J)T) \\
= & g((\nabla_K J)W, T) + g(K, (\nabla_T J)W) - g(K, (\nabla_W J)T) \\
& + (JW)g(K, T) - Wg(JK, T) - g(\nabla_{JW} K, T) + g(\nabla_W J K, T) \\
& -g((\nabla_W J)K, T) - g(K, \nabla_{JW} T) + g(K, \nabla_W J T) \\
= & g((\nabla_K J)W, T) + g(K, (\nabla_T J)W) - g(K, (\nabla_W J)T) \\
& + (JW)g(K, T) - Wg(JK, T) - g(\nabla_{JW} K, T) + g(\nabla_W J K, T) \\
& + g(K, J(\nabla_W T)) - g(K, \nabla_{JW} T) \\
= & g((\nabla_K J)W, T) + g(K, (\nabla_T J)W) - g(K, (\nabla_W J)T) \\
& + (JW)g(K, T) - (\nabla_W g)(JK, T) - g(\nabla_W J K, T) - g(JK, \nabla_W T) \\
& -g(\nabla_{JW} K, T) + g(\nabla_W J K, T) + g(K, J(\nabla_W T)) - g(K, \nabla_{JW} T) \\
= & g((\nabla_K J)W, T) + g(K, (\nabla_T J)W) - g(K, (\nabla_W J)T) \\
& + (JW)g(K, T) - (JW)g(K, T) - g(\nabla_W J K, T) - g(JK, \nabla_W T) \\
& + g(\nabla_W J K, T) + g(K, J(\nabla_W T)) \\
= & g((\nabla_K J)W, T) + g(K, (\nabla_T J)W) - g(K, (\nabla_W J)T) \tag{3.18}
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde;

$$\begin{aligned}
(\phi_J g)(T, K, W) &= (JT)g(K, W) - Tg(JK, W) + g((L_K J)T, W) + g(K, (L_W J)T) \\
&= (JT)g(K, W) - Tg(JK, W) + g([K, JT] - J[K, T], W)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + g(K, [W, JT] - J[W, T]) \\
= & (JT)g(K, W) - Tg(JK, W) + g([K, JT], W) - g(J[K, T], W) \\
& + g(K, [W, JT]) - g(K, J[W, T]) \\
= & (JT)g(K, W) - Tg(JK, W) + g(\nabla_K JT - \nabla_{JT} K, W) \\
& - g(J(\nabla_K T - \nabla_T K), W) + g(K, \nabla_W JT - \nabla_{JT} W) - g(K, J(\nabla_W T - \nabla_T W)) \\
= & (JT)g(K, W) - Tg(JK, W) + g(\nabla_K JT, W) - g(\nabla_{JT} K, W) \\
& - g(J(\nabla_K T), W) + g(J(\nabla_T K), W) + g(K, \nabla_W JT) \\
& - g(K, \nabla_{JT} W) - g(K, J(\nabla_W T)) + g(K, J(\nabla_T W)) \\
= & (JT)g(K, W) - Tg(JK, W) + g(\nabla_K JT, W) - g(\nabla_{JT} K, W) \\
& - g(\nabla_K JT - (\nabla_K J)T, W) + g(\nabla_T JK - (\nabla_T J)K, W) \\
& + g(K, \nabla_W JT) - g(K, \nabla_{JT} W) - g(K, \nabla_W JT - (\nabla_W J)T) \\
& + g(K, \nabla_T JW - (\nabla_T J)W) \\
= & (JT)g(K, W) - Tg(JK, W) + g(\nabla_K JT, W) - g(\nabla_{JT} K, W) \\
& - g(\nabla_K JT, W) + g((\nabla_K J)T, W) + g(\nabla_T JK, W) - g((\nabla_T J)K, W) \\
& + g(K, \nabla_W JT) - g(K, \nabla_{JT} W) - g(K, \nabla_W JT) + g(K, (\nabla_W J)T) \\
& + g(K, \nabla_T JW) - g(K, (\nabla_T J)W) \\
= & g((\nabla_K J)T, W) + g(K, (\nabla_W J)T) - g(K, (\nabla_T J)W) \\
& + (JT)g(K, W) - Tg(JK, W) - g(\nabla_{JT} K, W) + g(\nabla_T JK, W) \\
& - g((\nabla_T J)K, W) - g(K, \nabla_{JT} W) + g(K, \nabla_T JW) \\
= & g((\nabla_K J)T, W) + g(K, (\nabla_W J)T) - g(K, (\nabla_T J)W) \\
& + (JT)g(K, W) - Tg(JK, W) - g(\nabla_{JT} K, W) + g(\nabla_T JK, W) \\
& - g(K, (\nabla_T J)W) - g(K, \nabla_{JT} W) + g(K, \nabla_T JW) \\
= & g((\nabla_K J)T, W) + g(K, (\nabla_W J)T) - g(K, (\nabla_T J)W) \\
& + (JT)g(K, W) - Tg(JK, W) - g(\nabla_{JT} K, W) + g(\nabla_T JK, W) \\
& + g(K, J(\nabla_T W)) - g(K, \nabla_{JT} W) \\
= & g((\nabla_K J)T, W) + g(K, (\nabla_W J)T) - g(K, (\nabla_T J)W) \\
& + (JT)g(K, W) - (\nabla_T g)(JK, W) - g(\nabla_T JK, W)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -g(JK, \nabla_T W) - g(\nabla_{JT} K, W) + g(\nabla_T JK, W) \\
& + g(K, J(\nabla_T W)) - g(K, \nabla_{JT} W) \\
= & g((\nabla_K J)T, W) + g(K, (\nabla_W J)T) - g(K, (\nabla_T J)W) \\
& + (JT)g(K, W) - (JT)g(K, W) - g(\nabla_T JK, W) - g(JK, \nabla_T W) \\
& + g(\nabla_T JK, W) + g(K, J(\nabla_T W)) \\
= & g((\nabla_K J)T, W) + g(K, (\nabla_W J)T) - g(K, (\nabla_T J)W) \tag{3.19}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 3.18 ve Eş. 3.19 eşitlikleri toplanırsa;

$$(\phi_J g)(W, K, T) + (\phi_J g)(T, K, W) = 2g((\nabla_K J)T, W)$$

olur. $\phi_J g = 0$ bu eşitlikte yerine yazılırsa $\nabla J = 0$ bulunur. O halde J integrallenebilir.

Schouten–Van Kampen konneksiyonu 1930 yılında tanımlanmış, Vranceanu konneksiyonu ise 1931’de literatüre kazandırılmış olup bu konneksiyonları tanımlayan bilim insanlarının adıyla anılmaktadırlar [29, 30]. Bahse konu konneksiyonlar için koordinat bağımsız ifadeler Ianus tarafından verilmiş, isimlendirmeleri ise Bejancu tarafından yapılmıştır [31, 32].

Schouten-Van Kampen ve Vranceanu konneksiyonları, $K, T \in \Gamma(TM)$ için aşağıdaki şekilde karakterize edilir [33]:

a) Schouten-Van Kampen konneksiyonu

$$\overset{Sc}{\nabla}_K T = r(\nabla_K rT) + s(\nabla_K sT), \tag{3.20}$$

b) Vranceanu konneksiyonu

$$\overset{V}{\nabla}_K T = r(\nabla_{rK} rT) + s(\nabla_{sK} sT) + r[sK, rT] + s[rK, sT]. \tag{3.21}$$

3.2.9. Önerme

∇ , M üzerinde herhangi bir konneksiyon olmak üzere; r , s projeksiyonları ve J , Schouten-Van Kampen ve Vranceanu konneksiyonlarına göre paraleldir.

İspat

$\forall K, T \in \Gamma(TM)$ için r projeksiyonunun Schouten-Van Kampen ve Vranceanu konneksiyonlarına göre paralelliği Eş. 3.20 ve Eş. 3.21 eşitliklerinden:

$$\begin{aligned}
 (\overset{Sc}{\nabla}_K r)T &= \overset{Sc}{\nabla}_K rT - r(\overset{Sc}{\nabla}_K T) \\
 &= r(\nabla_K r^2 T) + s(\nabla_K s(rT)) - r[r(\nabla_K rT) + s(\nabla_K sT)] \\
 &= r((\nabla_K rT) - r^2(\nabla_K rT)) \\
 &= r((\nabla_K rT) - r(\nabla_K rT)) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 (\overset{V}{\nabla}_K r)T &= \overset{V}{\nabla}_K rT - r(\overset{V}{\nabla}_K T) \\
 &= r(\nabla_{rK} r(rT)) + s(\nabla_{sK} s(rT)) + r[sK, r(rT)] + s[rK, s(rT)] \\
 &\quad - r(r(\nabla_{rK} rT) + s(\nabla_{sK} sT) + r[sK, rT] + s[rK, sT]) \\
 &= (\nabla_{rK} rT) + r[sK, r(rT)] - r(\nabla_{rK} rT) - r[sK, rT] = 0
 \end{aligned}$$

biçiminde gösterilir. Benzer şekilde s projeksiyonunun Schouten-Van Kampen ve Vranceanu konneksiyonlarına göre paralelliği Eş. 3.20 ve Eş. 3.21 eşitliklerinden:

$$\begin{aligned}
 (\overset{Sc}{\nabla}_K s)T &= \overset{Sc}{\nabla}_K sT - s(\overset{Sc}{\nabla}_K T) \\
 &= s(\nabla_K s^2 T) + r(\nabla_K r(sT)) - s[r(\nabla_K rT) + s(\nabla_K sT)] \\
 &= s(\nabla_K sT) - s^2(\nabla_K sT) - sr(\nabla_K rT) \\
 &= s((\nabla_K sT) - s(\nabla_K sT)) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(\overset{V}{\nabla}_K s)T &= \overset{V}{\nabla}_K sT - s(\overset{V}{\nabla}_K T) \\
&= r(\nabla_{rK}r(sT)) + s(\nabla_{sK}s(sT)) + r[sK, r(sT)] + s[rK, s(sT)] \\
&\quad - s(r(\nabla_{rK}rT) + s(\nabla_{sK}sT) + r[sK, rT] + s[rK, sT]) \\
&= (\nabla_{sK}sT) + s[rK, sT] - s(\nabla_{sK}sT) - s[rK, rT] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

olur. J Hsu-altın yapısının Schouten-Van Kampen ve Vrănceanu konneksiyonlarına göre paralelliği ise Eş. 3.20 ve Eş. 3.21 eşitliklerinden:

$$\begin{aligned}
(\overset{Sc}{\nabla}_K J)T &= \overset{Sc}{\nabla}_K JT - J(\overset{Sc}{\nabla}_K T) \\
&= r(\nabla_{rK}r(JT)) + s(\nabla_{sK}s(JT)) - J[r(\nabla_{rK}rT) + s(\nabla_{sK}sT)] \\
&= r(\nabla_{rK}\sigma(rT)) + s(\nabla_{sK}(1 - \sigma)sT) - \sigma r(\nabla_{rK}rT) - (1 - \sigma)s(\nabla_{sK}sT) \\
&= \sigma r(\nabla_{rK}(rT)) + (1 - \sigma)s(\nabla_{sK}(sT)) - \sigma r(\nabla_{rK}rT) - (1 - \sigma)s(\nabla_{sK}sT) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(\overset{V}{\nabla}_K J)T &= \overset{V}{\nabla}_K JT - J(\overset{V}{\nabla}_K T) \\
&= r(\nabla_{rK}r(JT) + s(\nabla_{sK}s(JT))) + r[sK, r(JT)] + s[rK, s(JT)] \\
&\quad - Jr(\nabla_{rK}rT) - Js(\nabla_{sK}sT) - Jr[sK, sT] - Jr[rK, sT] \\
&= r(\nabla_{rK}\sigma(rT)) + s(\nabla_{sK}(1 - \sigma)sT) + r[sK, \sigma(rT)] + s[rK, (1 - \sigma)sT] \\
&\quad - \sigma r(\nabla_{rK}rT) - (1 - \sigma)s(\nabla_{sK}sT) - \sigma r[sK, rT] - (1 - \sigma)s[rK, sT] \\
&= \sigma r(\nabla_{rK}rT) + (1 - \sigma)s(\nabla_{sK}sT) + \sigma r[sK, rT] + (1 - \sigma)s[rK, sT] \\
&\quad - \sigma r(\nabla_{rK}rT) - (1 - \sigma)s(\nabla_{sK}sT) - \sigma r[sK, rT] - (1 - \sigma)s[rK, sT] \\
&= 0
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

3.2.10. Tanım

M manifoldu üzerinde bir D dağılımı verilsin. Herhangi bir $X \in \Gamma(TM)$ ve $Y \in \Gamma(D)$ için $\nabla_X Y \in \Gamma(D)$ koşulu gerçekleşiyorsa, D dağılımı ∇ lineer konneksiyonuna göre paralel olarak adlandırılır [2].

3.2.11. Önerme

∇ , M üzerinde herhangi bir lineer konneksiyon olmak üzere; R ve S dağılımları Schouten-Van Kampen ve Vrănceanu konneksiyonlarına göre paraleldir.

İspat

$K \in \Gamma(TM)$ ve $T \in \Gamma(R)$ olsun. $T \in \Gamma(R) \Rightarrow s(T) = 0$ ve $r(T) = T$ olur. O halde Eş. 3.20 ve Eş. 3.21 eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} \overset{Sc}{\nabla}_K T &= r(\nabla_K rT) + s(\nabla_K sT) \\ &= r(\nabla_K T) \in R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overset{V}{\nabla}_K T &= r(\nabla_K rT) + s(\nabla_K sT) + r[sK, rT] + s[rK, sT] \\ &= (r(\nabla_K T) + r[sK, T]) \in R \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan, $K \in \Gamma(TM)$ ve $T \in \Gamma(S)$ olsun. $T \in \Gamma(S) \Rightarrow r(T) = 0$ ve $s(T) = T$ olur. Dolayısıyla Eş. 3.20 ve Eş. 3.21 eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} \overset{Sc}{\nabla}_K T &= r(\nabla_K rT) + s(\nabla_K sT) \\ &= s(\nabla_K T) \in S \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overset{V}{\nabla}_K T &= r(\nabla_K rT) + s(\nabla_K sT) + r[sK, rT] + s[rK, sT] \\ &= (s(\nabla_K T) + s[rK, T]) \in S \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak R ve S dağılımları Schouten-Van Kampen ve Vrănceanu konneksiyonlarına göre paraleldir.

3.2.12. Teorem

$\tilde{\nabla}$ herhangi bir lineer konneksiyon olsun. Q bir $(1,2)$ -tipinden tensör alanı olmak üzere, hemen hemen Hsu-altın yapıya karşılık gelen Obata operatörü:

$$O_F Q(X, Y) = \frac{1}{2} \left[Q(X, JY) + \frac{F}{\sqrt{a^r}} Q \left(X, \frac{F}{\sqrt{a^r}} JY \right) \right] \quad (3.22)$$

olsun. O halde $\nabla J = 0$ koşulunu sağlayan lineer konneksiyonların kümesi

$$\nabla_X Y = \frac{1}{5a^r} \left[\frac{5a^r + 1}{2} \tilde{\nabla}_X Y + 2J(\tilde{\nabla}_X JY) - J(\tilde{\nabla}_X Y) - \tilde{\nabla}_X JY \right] + O_F Q(X, Y). \quad (3.23)$$

olur.

İspat

$\tilde{\nabla}$ sabit bir lineer konneksiyon ve Q , ilişkili Obata operatörü $O_F Q$ olan bir $(1,2)$ -tensör alanı olmak üzere, $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için ∇ lineer konneksiyonlar kümesine Eş. 3.1 ve Eş. 3.3 eşitliklerinin uygulanmasıyla;

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \frac{1}{2} \left[\check{\nabla}_X Y + \frac{F}{\sqrt{a^r}} \left(\check{\nabla}_X \frac{F}{\sqrt{a^r}} Y \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\check{\nabla}_X Y + \frac{2J - I}{2\sigma - 1} \left(\check{\nabla}_X \frac{2J - I}{2\sigma - 1} Y \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\check{\nabla}_X Y + \frac{2J}{2\sigma - 1} \left(\check{\nabla}_X \frac{2J - I}{2\sigma - 1} Y \right) - \frac{I}{2\sigma - 1} \left(\check{\nabla}_X \frac{2J - I}{2\sigma - 1} Y \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\check{\nabla}_X Y + \frac{4}{(2\sigma - 1)^2} J(\check{\nabla}_X JY) - \frac{2}{(2\sigma - 1)^2} J(\check{\nabla}_X Y) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{(2\sigma - 1)^2} \check{\nabla}_X JY + \frac{1}{(2\sigma - 1)^2} \check{\nabla}_X Y \right] \\ &= \frac{1}{2(2\sigma - 1)^2} \left[(5a^r + 1) \check{\nabla}_X Y + 4J(\check{\nabla}_X JY) - 2J(\check{\nabla}_X Y) - 2\check{\nabla}_X JY \right] \\ &= \frac{1}{5a^r} \left[\frac{5a^r + 1}{2} \check{\nabla}_X Y + 2J(\check{\nabla}_X JY) - J(\check{\nabla}_X Y) - \check{\nabla}_X JY \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$(\nabla_X J)Y = \underbrace{\nabla_X JY}_I - \underbrace{J(\nabla_X Y)}_{II}$$

olur. Burada I ifadesi açılırsa Eş. 3.23 eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
\nabla_X JY &= \frac{1}{5a^r} \left[\frac{5a^r + 1}{2} (\check{\nabla}_X JY) + 2J (\check{\nabla}_X J^2 Y) - J (\check{\nabla}_X JY) - \check{\nabla}_X J^2 Y \right] \\
&\quad + O_F Q(X, JY) \\
&= \frac{1}{5a^r} \left[\frac{5a^r + 1}{2} (\check{\nabla}_X JY) + 2J \left(\check{\nabla}_X \left(J - \frac{1-5a^r}{4} I \right) Y \right) - J (\check{\nabla}_X JY) \right. \\
&\quad \left. - \check{\nabla}_X \left(J - \frac{1-5a^r}{4} I \right) Y \right] + O_F Q(X, JY) \\
&= \frac{1}{5a^r} \left[\frac{5a^r + 1}{2} (\check{\nabla}_X JY) + 2J (\check{\nabla}_X JY) - \frac{1-5a^r}{4} J (\check{\nabla}_X Y) - J (\check{\nabla}_X JY) \right. \\
&\quad \left. - (\check{\nabla}_X JY) + \frac{1-5a^r}{4} \check{\nabla}_X Y \right] + O_F Q(X, JY) \\
&= \frac{1}{5a^r} \left[\left(\frac{5a^r + 1}{2} - 1 \right) (\check{\nabla}_X JY) + J (\check{\nabla}_X JY) - \frac{1-5a^r}{4} J (\check{\nabla}_X Y) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1-5a^r}{4} \check{\nabla}_X Y \right] + O_F Q(X, JY) \\
&= \frac{1}{5a^r} \left[\frac{5a^r - 1}{2} (\check{\nabla}_X JY) + J (\check{\nabla}_X JY) - \frac{1-5a^r}{4} J (\check{\nabla}_X Y) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1-5a^r}{4} \check{\nabla}_X Y \right] + O_F Q(X, JY)
\end{aligned}$$

elde edilir. II ifadesi açılırsa Eş. 3.23 eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
\nabla_X JY &= \frac{1}{5a^r} \left[\frac{5a^r + 1}{2} J (\check{\nabla}_X Y) + 2J^2 (\check{\nabla}_X JY) - J^2 (\check{\nabla}_X Y) - J (\check{\nabla}_X JY) \right] \\
&\quad + J(O_F Q(X, Y)) \\
&= \frac{1}{5a^r} \left[\frac{5a^r + 1}{2} J (\check{\nabla}_X Y) + 2 \left(J - \frac{1-5a^r}{4} I \right) (\check{\nabla}_X JY) - J (\check{\nabla}_X JY) \right. \\
&\quad \left. - \left(J - \frac{1-5a^r}{4} I \right) (\check{\nabla}_X Y) \right] + J(O_F Q(X, Y)) \\
&= \frac{1}{5a^r} \left[\frac{5a^r + 1}{2} J (\check{\nabla}_X Y) + 2J (\check{\nabla}_X JY) - \frac{1-5a^r}{4} (\check{\nabla}_X JY) - J (\check{\nabla}_X Y) \right. \\
&\quad \left. - J (\check{\nabla}_X JY) + \frac{1-5a^r}{4} (\check{\nabla}_X Y) \right] + J(O_F Q(X, Y)) \\
&= \frac{1}{5a^r} \left[\left(\frac{5a^r + 1}{2} - 1 \right) J (\check{\nabla}_X Y) + J (\check{\nabla}_X JY) - \frac{1-5a^r}{2} \check{\nabla}_X JY \right. \\
&\quad \left. + \frac{1-5a^r}{4} \check{\nabla}_X Y \right] + J(O_F Q(X, Y)) \\
&= \frac{1}{5a^r} \left[\frac{5a^r - 1}{2} J (\check{\nabla}_X Y) + J (\check{\nabla}_X JY) - \frac{1-5a^r}{2} \check{\nabla}_X JY \right. \\
&\quad \left. + \frac{1-5a^r}{4} \check{\nabla}_X Y \right] + J(O_F Q(X, Y))
\end{aligned}$$

$$+\frac{1-5a^r}{4}\check{\nabla}_X Y \Big] + J(O_F Q(X, Y))$$

olur. Eş. 3.22 eşitliğinden;

$$O_F Q(X, JY) = \frac{1}{2} \left[Q(X, JY) + \frac{F}{\sqrt{a^r}} Q \left(X, \frac{F}{\sqrt{a^r}} JY \right) \right]$$

olur. Ayrıca Eş. 3.2 eşitliğinden $FJ = \frac{1}{2}(F + \sqrt{5}a^r)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} O_F Q(X, JY) &= \frac{1}{2} \left[Q(X, JY) + \frac{F}{\sqrt{a^r}} Q \left(X, \frac{F}{2\sqrt{a^r}} Y + \frac{\sqrt{5}a^r}{2\sqrt{a^r}} Y \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[Q(X, JY) + \frac{F}{2a^r} Q(X, FY) + \frac{\sqrt{5}a^r}{2a^r} FQ(X, Y) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[Q \left(X, \frac{I + \sqrt{5}F}{2} Y \right) + \frac{F}{2a^r} Q(X, FY) + \frac{\sqrt{5}}{2} FQ(X, Y) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} Q(X, Y) + \frac{\sqrt{5}}{2} Q(X, FY) + \frac{F}{2a^r} Q(X, FY) + \frac{\sqrt{5}}{2} FQ(X, Y) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{I}{2} + \frac{\sqrt{5}F}{2} \right) Q(X, Y) + \left(\frac{F}{2a^r} + \frac{\sqrt{5}I}{2} \right) Q(X, FY) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[(JQ(X, Y) + \frac{1}{a^r} FJQ(X, FY)) \right] \end{aligned}$$

bulunur.

$$J(O_F Q(X, Y)) = \frac{1}{2} \left[JQ(X, Y) + \frac{F}{\sqrt{a^r}} JQ \left(X, \frac{F}{\sqrt{a^r}} Y \right) \right]$$

olup $O_F Q(X, JY) = J(O_F Q(X, Y))$ elde edilir. Sonuç olarak,

$$(\nabla_X J)Y = \nabla_X JY - J(\nabla_X Y) = I - II = 0$$

bulunur. Böylece $\nabla J = 0$ olur.

3.3. Eğrilik Tensör Alanı

(M, J, g) hemen hemen Hsu-altın B -manifold olmak üzere; $U, V, K, T \in \Gamma(TM)$ için g metriğinin Riemann eğrilik tensörü R ,

$$R(U, V)K = \nabla_V \nabla_U K - \nabla_U \nabla_V K + \nabla_{[U, V]} K \quad (3.24)$$

ve

$$R(U, V, K, T) = g(R(U, V)K, T). \quad (3.25)$$

biçiminde ifade edilebilir.

3.3.1. Lemma

(M, J, g) hemen hemen Hsu-golden B -manifold olmak üzere, $\forall U, V \in \Gamma(TM)$ için;

$$R(JU, JV) = R(U, JV) - \frac{1-5a^r}{4} R(U, V) \quad (3.26)$$

olur.

İspat

Her $U, V, K, T \in \Gamma(TM)$ için; R nin bilinen özellikleri ile Eş. 3.25 ve Eş. 3.5 eşitlikleri kullanılarak;

$$\begin{aligned} g(R(JU, JV)K, T) &= g(R(K, T)JU, JV) \\ &= g(JR(K, T)U, JV) \\ &= g(R(K, T)U, JV) - \frac{1-5a^r}{4} g(R(K, T)U, V) \\ &= g(R(U, JV)K, T) - \frac{1-5a^r}{4} g(R(U, V)K, T) \\ &= g((R(U, JV) - \frac{1-5a^r}{4} R(U, V))K, T) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$R(JU, JV) = R(U, JV) - \frac{1-5a^r}{4}R(U, V)$$

olur.

3.3.2. Önerme

(M, J, g) bir hemen hemen Hsu-altın B -manifold ise, $\forall U, V, K, T \in \Gamma(TM)$ için g nin Riemann eğrilik tensörü R aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

- $R(JU, V, K, T) = R(U, JV, K, T)$,
- $R(U, V, JK, T) = R(U, V, K, JT)$,
- $R(JU, JV, K, T) = R(U, JV, K, T) - \frac{1-5a^r}{4}R(U, V, K, T)$,
- $R(U, V, JK, JT) = R(U, V, K, JT) - \frac{1-5a^r}{4}R(U, V, K, T)$,
- $R(U, JV, JK, T) = R(JU, V, JK, T) = R(JU, V, K, JT) = R(U, JV, K, JT)$.

İspat

(M, J, g) hemen hemen Hsu-altın B -manifold olmak üzere, her $U, V, K, T \in \Gamma(TM)$ için Eş. 3.24 eşitliğinden;

$$\begin{aligned} R(U, V)JK &= J(R(U, V)K) + \nabla_U(\nabla_V J)K - \nabla_V(\nabla_U J)K - (\nabla_{[U, V]}J)K \\ &\quad + (\nabla_U J)\nabla_V K - (\nabla_V J)\nabla_U K \end{aligned}$$

olur. O halde,

$$R(U, V)JK = J(R(U, V)K)$$

elde edilir. Buradan, Eş. 3.25 ve Eş. 3.26 eşitlikleri kullanılarak;

$$\begin{aligned} \text{a) } R(JU, V, K, T) &= g(R(JU, V)K, T) \\ &= g(R(K, T)JU, V) \\ &= g(J(R(K, T)U), V) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= g(R(K, T)U, JV) \\
&= g(R(U, JV)K, T) \\
&= R(U, JV, K, T)
\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
\text{b) } R(U, V, JK, T) &= g(R(U, V)JK, T) \\
&= g(JR(U, V)K, T) \\
&= g(R(U, V)K, JT) \\
&= R(U, V, K, JT)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\text{c) } R(JU, JV, K, T) &= g(R(JU, JV)K, T) \\
&= g\left(\left(R(U, JV) - \frac{1-5a^r}{4}R(U, V)\right)K, T\right) \\
&= g\left(\left(R(U, JV)K, T\right) - \frac{1-5a^r}{4}g(R(U, V)K, T)\right) \\
&= R(U, JV, K, T) - \frac{1-5a^r}{4}R(U, V, K, T)
\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
\text{d) } R(U, V, JK, JT) &= g(R(U, V)JK, JT) \\
&= g(R(JK, JT)U, V) \\
&= g\left(\left(R(K, JT)U, V\right) - \frac{1-5a^r}{4}g(R(K, T)U, V)\right) \\
&= g\left(\left(R(U, V)K, JT\right) - \frac{1-5a^r}{4}g(R(U, V)K, T)\right) \\
&= R(U, V, K, JT) - \frac{1-5a^r}{4}R(U, V, K, T)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\text{e) } R(U, JV, JK, T) &= g(R(U, JV)JK, T) \\
&= g(R(JK, T)U, JV)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= g(JR(JK, T)U, V) \\
&= g(R(JK, T)JU, V) \\
&= g(R(JU, V)JK, T) \\
&= R(JU, V, JK, T),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(U, JV, K, JT) &= g(R(U, JV)K, JT) \\
&= g(JR(U, JV)K, T) \\
&= g(R(U, JV)JK, T) \\
&= R(U, JV, JK, T)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
R(JU, V, K, JT) &= g(R(JU, V)K, JT) \\
&= g(JR(JU, V)K, T) \\
&= g(R(JU, V)JK, T) \\
&= R(JU, V, JK, T)
\end{aligned}$$

olur. O halde

$$R(JU, V, K, JT) = R(JU, V, JK, T) = R(U, JV, JK, T) = R(U, JV, K, JT)$$

bulunur.

3.3.3. Lemma

(M, J, g) bir hemen hemen Hsu-altın B -manifold ve R de (M, J, g) manifoldunun eğrilik tensörü olsun. O halde $\forall K, T, V \in \Gamma(TM)$ için;

- a) $R(K, JK, JK, K) = 0$,
- b) $R(K, JK, T, JT) = 0$,
- c) $R(K, JK, T, V) = 0$

olur.

İspat

(M, J, g) bir hemen hemen Hsu-altın B -manifold ve R de (M, J, g) manifoldunun eğrilik tensörü olsun. $\forall K, T, V \in \Gamma(TM)$ için Önerme 3.3.2'den;

$$\begin{aligned}
 \text{a) } R(K, JK, JK, K) &= g(R(K, JK)JK, K) \\
 &= g(JR(K, JK)K, K) \\
 &= g(R(K, JK)K, JK) \\
 &= -g(R(K, JK)JK, K)
 \end{aligned}$$

olur. Buradan $R(K, JK, JK, K) = 0$ bulunur.

$$\begin{aligned}
 \text{b) } R(K, JK, T, JT) &= g(R(K, JK)T, JT) \\
 &= -g(R(K, JK)JT, T) \\
 &= -g(JR(K, JK)T, T) \\
 &= -g(R(K, JK)T, JT)
 \end{aligned}$$

bulur. O halde $R(K, JK, T, JT) = 0$ olur.

$$\begin{aligned}
 \text{c) } R(K, JK, T, V) &= g(R(K, JK)T, JV) \\
 &= g(R(T, V)K, JK) \\
 &= g(JR(T, V)K, K) \\
 &= -g(JR(T, V)K, K)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $R(K, JK, T, V) = 0$ olur.



4. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu çalışma öncelikle, altın ve Hsu yapıların tarihsel sürecinden hareketle güncel yaklaşımlar ve mevcut literatür bulgularının senteziyle temellendirilmiştir. Daha sonra hemen hemen Hsu-altın yapı adı verilen özgün bir yapı tanımlanmıştır. Bu yapının diğer altın yapı türleriyle etkileşimi, özdeğerleri, inversi ve Hsu-yapı ile ilişkisi incelenmiş ve B -metriği yardımıyla hemen hemen Hsu-altın B -yapısı tanımlanmıştır.

Çalışmanın devamında bahse konu yapının özelliklerini karakterize eden tensör alanları, tamamlayıcı dağılımlar, bunlara karşılık gelen projeksiyonlar ve çeşitli konneksiyonların tanımlarına yer verilmiş, bunlarla ilgili önerme ve teoremler ifade edilerek ispatlanmıştır. Ardından integrallenebilirlik koşulları, paralelizm ve simetri özellikleri incelenmiştir.

Bu incelemeyi takiben, Riemann eğrilik tensörü tanımı verilerek bahse konu yapının bazı eğrilik ilişkileri ispatlarıyla sunulmuştur. Bu tez çalışması ile elde edilen kazanımlar, hemen hemen Hsu-altın yapı özelinde daha fazla araştırma yapılabilmesi için bir çerçeve oluşturacak ve literatüre özgün bir katkı sunacaktır.



KAYNAKLAR

1. Hreţcanu, C. E. (2007). *Submanifolds in Riemannian manifold with golden structure*. In Workshop on Finsler Geometry and Its Applications, Budapest, Hungary.
2. Crasmareanu, M., Hreţcanu, C. E. (2008). Golden differential geometry. *Chaos Solitons Fractals*, 38, 1229–1238.
3. Hreţcanu, C. E., Crasmareanu, M. (2007). On some invariant submanifolds in a Riemannian manifold with golden structure. *Analele Ştiinţifice ale Universităţii. Seria Matematică*, 53, 199–211.
4. Hreţcanu, C. E., Crasmareanu, M. (2009). Applications of the golden ratio on Riemannian manifolds. *Turkish Journal of Mathematics*, 33, 179–191.
5. Gezer, A., Cengiz, N., Salimov, A. (2013). On integrability of golden Riemannian structures. *Turkish Journal of Mathematics*, 37, 693–703.
6. Özkan, M. (2014). Prolongations of golden structures to tangent bundles. *Differential Geometry Dynamical Systems*, 16, 227–238.
7. Şahin, B., Akyol, M. A. (2014). Golden maps between golden Riemannian manifolds and constancy of certain maps. *Mathematical Communications*, 19, 333–342.
8. Özkan, M., Yılmaz, F. (2016). Prolongations of golden structures to tangent bundles of order r . *Communications of the Faculty of Sciences of Ankara University, Series A1 Mathematics and Statistics*, 65, 35–48.
9. Etayo, F., Santamaría, R., Upadhyay, A. (2017). On the geometry of almost golden Riemannian manifolds. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 14, 1–14.
10. Poyraz, N. Ö., Yaşar, E. (2017). Lightlike hypersurfaces of a golden semi-Riemannian manifold. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 14, 1–20.
11. Blaga, A. M., Hreţcanu, C. E. (2018). Golden warped product Riemannian manifolds. *Liber Mathematicae (New Series)*, 37, 39–50.
12. Erdoğan, F. E., Yıldırım, C. (2018). On a study of the totally umbilical semi-invariant submanifolds of golden Riemannian manifolds. *Politeknik Dergisi*, 21, 967–970.
13. Erdoğan, F. E., Yıldırım, C. (2017). Semi-invariant submanifolds of golden Riemannian manifolds. *AIP Conference Proceedings*, 1833(1), 020044.
14. Bahadır, O., Uddin, S. (2018). Slant submanifolds of golden Riemannian manifolds. *International Journal of Mathematics Extensions*, 13, 23–39.
15. Hreţcanu, C. E., Blaga, A. M. (2021). Warped Product Submanifolds in Locally golden Riemannian Manifolds with a Slant Factor. *Mathematics*, 9(17), 2125.

16. Şahin, F., Şahin, B., Erdoğan, F. E. (2023). Norden golden manifolds with constant sectional curvature and their submanifolds. *Mathematics*, 11(15), 3301.
17. Hsu, C. J. (1960). On some structures which are similar to the quaternion structure. *Tohoku Mathematical Journal*, 12(3), 403–428.
18. Hsu, C. J. (1960). Note on the integrability of a certain structure on differentiable manifold. *Tohoku Mathematical Journal*, 12(2), 349–360.
19. Nivas, R., Verma, G. (2004). Semi Symmetric Non-Metric Connection on a Manifold with Generalised Hsu-structure. *Nepalese Mathematical Sciences Reports*, 23, 27–34.
20. Singh, K. (2006). On integrability conditions of a manifold admitting the general algebraic Hsu-structure. *Journal of the Rajasthan Academy of Physical Sciences*, 5, 377–382.
21. Nivas, R., Verma, N. K. (2011). Certain Submanifolds of Hsu-structure Manifolds. *International Journal of Mathematical Sciences and Applications*, 1, 41–46.
22. Bisht, L., Shanker, S. (2012). On Recurrent Hsu-structure Manifold. *International Journal of Engineering Research and Applications*, 2, 1323–1328.
23. Bisht, L. (2013). On Hsu-structure Manifold, Nijenhuis Tensor. *International Journal of Advanced Research in Technology*, 2, 87–96.
24. Bisht, L., Shanker, S. (2013). Nijenhuis Tensor on Hyperbolic Hsu-structure Manifold. *International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology*, 2, 6214–6220.
25. Bisht, L., Shanker, S. (2015). Flat H-Curvature Tensors On Hsu-structure Manifold. *International Journal of Mathematical Archive*, 6, 174–180.
26. De, U., Gezer, A., Karaman, C. (2023). Results concerning semi-symmetric metric F-connections on the Hsu-B manifolds. *Communications of the Korean Mathematical Society*, 38(3), 837–846.
27. Blaga, A. M., Nannicini, A. (2019). Foliations induced by metallic structures. *New York Journal of Mathematics*, 29, 771–791.
28. Holm, M. (1998). New insights in brane and Kaluza-Klein theory through almost product structures: arXiv preprint. URL: <https://arxiv.org/abs/hep-th/9812168>, Son Erişim Tarihi: 30.07.2025.
29. Schouten, J. A., Van Kampen, E. R. (1930). Zur Einbettungs-und Krümmungstheorie nichtholonomer Gebilde. *Mathematische Annalen*, 103, 752–783.
30. Vranceanu, G. (1931). Sur quelques points de la théorie des espaces non holonomes. *Buletinul Facultății de Științe din Cernăuți*, 5, 177–205.

31. Ianus, S. (1971). Some almost product structures on manifolds with linear connection. *Kodai Mathematical Seminar Reports*, 23, 305–310.
32. Bejancu, A. (2006). Schouten-Van Kampen and Vranceanu connections on foliated manifolds. *Analele Ştiinţifice ale Universităţii Seria Matematică*, 52, 37–60.
33. Gök, M., Keleş, S., Kılıç, E. (2019). Schouten and Vranceanu connections on golden manifolds. *International Electronic Journal of Geometry*, 12(2), 169–181.
34. Vanlı, A. T. (2022). *Diferensiyel Geometri ve Mathematica Uygulamaları*. (1. Baskı). Ankara: Öz Baran Ofset Matbaacılık, 47-51, 63-66.
35. Hacısalihoğlu, H. H. (1998). *Diferensiyel Geometri*, (3. Baskı). 1. Cilt. Ankara: Ertem Matbaa, 20.
36. Şahin, B. (2012). *Manifoldların Diferensiyel Geometrisi*, (1. Baskı). Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık, 27-31.
37. Sabuncuoğlu, A. (2004). *Diferensiyel Geometri*, (4. Baskı). Ankara: Nobel Yayın Dağıtım, 13-14.
38. Hacısalihoğlu, H. H., Ekmekçi, N. (2003). *Tensör Geometri*. Ankara: Hacısalihoğlu Yayınları, 13.
39. Hacısalihoğlu, H. H. (2012). *Diferensiyel Geometri Cilt II*. (4. Baskı). Ankara: Hacısalihoğlu Yayınları, 19-20.
40. Yardımcı, E. H. (2009). *Altın Diferensiyel Geometri*. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
41. Goldberg, S. I., Yano, K. (1970). Polynomial Structures on Manifolds. *Kodai Mathematical Journal*, 22(2).
42. Greub, W., Halperin, S., Vanstone, R. (1972). *Connection, Curvature and Cohomology*. New York: Academic Press, 92.
43. Saunders, D. J. (1989). *The Geometry of Jet Bundles*. Cambridge: Cambridge University Press, 28.
44. Civelek, Ş. (1988). *İkinci Mertebeden Genişletilmiş Manifoldlar Üzerinde Liftler*. Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
45. do Carmo, M. P. (2012). *Diferansiyel Geometri: Eğriler ve Yüzeyler*. Ankara: Türkiye Bilimler Akademisi, 30.
46. Tu, L. W. (2007). *An Introduction to Manifolds*. New York: Springer, 135.
47. Okubo, T. (1987). *Differential Geometry*. New York: Marcel Dekker Incorporated, 788.





Gazili olmak ayrıcalıktır