

**T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**CAUCHY UZAYLARIN KATEGORİSİNDE
İNDİRGENEMEZLİK, URYSOHN LEMMASI VE
TİETZE GENİŞLEME TEOREMİ**

**Hazırlayan
Nihal POLATDEMİR**

**Danışman
Prof. Dr. Muammer KULA**

Yüksek Lisans Tezi

**Temmuz 2025
KAYSERİ**

T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİMDALI

CAUCHY UZAYLARIN KATEGORİSİNDE
İNDİRGENEMEZLİK, URYSOHN LEMMASI VE
TİETZE GENİŞLEME TEOREMİ
(Yüksek Lisans Tezi)

Hazırlayan
Nihal POLATDEMİR

Danışman
Prof. Dr. Muammer KULA

Temmuz 2025
KAYSERİ

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Nihal POLATDEMİR

“Cauchy Uzayların Kategorisinde İndirgenemezlik, Urysohn Lemması ve Tietze Genişleme Teoremi” adlı Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesine uygun olarak hazırlanmıştır.

Hazırlayan

Nihal POLATDEMİR

Danışman

Prof. Dr. Muammer KULA

Matematik Anabilim Dalı Başkanı

Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

TEŞEKKÜR

Bu tez sürecinde yolumu aydınlatan, bilgisi ve sabrıyla bana rehberlik eden değerli danışmanım Prof. Dr. Muammer KULA' ya içtenlikle teşekkür ederim. Her aşamada gösterdiği özen ve yönlendirmeleri, çalışmamın sağlam bir zemine oturmasını sağladı.

Akademik yolculuğum boyunca beni destekleyen, sabır ve sevgileriyle güç veren aileme, dostlarıma ve katkı sunan tüm hocalarıma teşekkür ederim.

Nihal POLATDEMİR

Temmuz 2025, KAYSERİ

CAUCHY UZAYLARIN KATEGORİSİNDE İNDİRGENEMEZLİK, URYSOHN LEMMASI VE TİETZE GENİŞLEME TEOREMİ

Nihal POLATDEMİR

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Temmuz 2025
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Muammer KULA

ÖZET

Birinci bölümde diğer bölümlerde kullanılacağımız kategori, fanktor, topolojik fanktor, başlangıç ve bitiş kaldırmaları, öz süzgeç, diskre ve indiskre obje kavramları verildi. İkinci bölümde, kapalı alt nesneler verilmiştir. Üçüncü bölümde indirgenemez Cauchy uzaylarını karakterize edilmiş ve indirgenemez, bağlantılı Cauchy uzaylarının her biri arasındaki ilişkiyi incelenmiştir. Dördüncü bölümde Cauchy uzayları için Urysohn Lemması ve Tietze Genişleme Teoremi verilmiştir. Beşinci bölümde sonuç ve değerlendirmelere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Cauchy uzay, kapanış operatörü, T_i uzay, indirgenemezlik, Urysohn Lemması, Tietze Teoremi, kategori

IRREDUCIBILITY IN THE CATEGORY OF CAUCHY SPACES WITH APPLICATIONS OF URYSOHNS LEMMA AND TIETZE EXTENSION THEOREM

Nihal POLATDEMİR

Erciyes University, Institute of Natural and Applied Sciences
Masters Thesis, July 2025
Supervisor: Prof. Dr. Muammer KULA

ABSTRACT

In the first chapter, the concepts of category, functor, topological functor, initial and final lifts, proper filter, discrete and indiscrete objects, which will be used in the following chapters, are given. In the second chapter, closed subobjects are discussed. In the third chapter, irreducible Cauchy spaces are characterized and the relationships among each of the irreducible and connected Cauchy spaces are examined. In the fourth chapter, Urysohns Lemma and the Tietze Extension Theorem are given for Cauchy spaces. In the fifth chapter, results and evaluations are presented.

Keywords: Cauchy space, closure operator, T_1 space, irreducibility, Urysohns Lemma, Tietzes Theorem, Topological Category

İÇİNDEKİLER

CAUCHY UZAYLARIN KATEGORİSİNDE İNDİRGENEMEZLİK, URYSOHN LEMMASI VE TİETZE GENİŞLEME TEOREMİ

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK	iii
YÖNERGEYE UYGUNLUK SAYFASI	iii
KABUL VE ONAY SAYFASI	iv
TEŞEKKÜR	v
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
İÇİNDEKİLER	viii
KISALTMALAR	x
ŞEKİLLER LİSTESİ	xii
GİRİŞ	1

1. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

1.1. Bazı Temel Tanımlar	2
1.2. Topolojik Funktorlar	8
1.3. Topolojik Kategoriler	9
1.4. Süzgeçler	12
1.5. Cauchy Uzayları Kategorisi	15

2. BÖLÜM

KAPALI ALT NESNELER	17
---------------------------	----

3. BÖLÜM

İNDİRGENEMEZ CAUCHY UZAYLARI

3.1. İndirgenemez Cauchy Uzayları	29
3.2. Tanımsal Açıklamalar ve Kategori İlişkileri	32

4. BÖLÜM

URYSOHN LEMMALARI VE TİETZE GENİŞLEME TEOREMİ

4.1. Cauchy Uzayları İçin Urysohn Lemması ve Tietze Genişleme Teoremi	34
--	-----------

5. BÖLÜM

SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

5.1. Sonuç ve Değerlendirme	38
--	-----------

KAYNAKLAR	40
------------------------	-----------

ÖZGEÇMİŞ.....	43
----------------------	-----------



KISALTMALAR

SET	: Kümeler Kategorisi
TOP	: Topolojik uzaylar kategorisi
$\mathcal{U}$	: Fanktor
$\mathcal{E}$	: Kategori
$\text{Ob}(\mathcal{E})$	: Objeler sınıfı
$\text{Mor}(\mathcal{E})$	: Morfizmler sınıfı
PCHY	: Pre Cauchy uzayları kategorisi
CHY	: Cauchy uzayları kategorisi
A_p	: p de temel eksen dönüşümü
S_p	: p de Skewed eksen dönüşümü
∇_p	: p de katlama dönüşümü
FCO	: Süzgeç yakınsak uzaylar

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.	Değişmeli diyagram	4
Şekil 2.	Çarpım diyagramı.....	5
Şekil 3.	Değişmeli diyagram	5
Şekil 4.	Değişmeli diyagram	6
Şekil 5.	Pullback diyagramı.....	6
Şekil 6.	Pushout diyagram.....	8
Şekil 7.	Doğal dönüşüm diyagram	9
Şekil 8.	Başlangıç kaldırma.....	10
Şekil 9.	Bitiş Kaldırma	11

GİRİŞ

Matematik bilim dalının değişik branşlarındaki farklılaşma ve uzmanlaşmanın artması matematikçileri, bu çok sayıdaki farklı branşların ortak bir alan üzerinde düşünmelerini zorunlu kılmıştır. İşte kategori teorisi bu ortak alanlardan bir tanesidir ki, farklı alanlardaki araştırmacıların daha kolay bir iletişim kurmaları için ortak bir dil sağlamaktadır. Genel topoloji matematiğinin cebir, analiz, fonksiyonel analiz, olasılık teorisi, lattice teorisi gibi pek çok teoride uygulamalara sahip olduğundan, topoloji ile uğraşanların çoğu topolojik fikirleri kategori diline çevirmeyi tercih ederler.

Topolojide ki bazı önemli kavramlar (Kompaktlık, Bağlantılılık, İndirgenemezlik, Ayrılma Aksiyomları, Kapalılık, vb.) değişik yollarla topolojik kategoriye genişletilmiştir. Bu genişlemelerin çoğu kapanış operatörleri kullanılarak yapılmıştır.

Cauchy isim olarak, reel analizdeki Cauchy dizileri bir genelleştirilmesine dayanmaktadır. Süzgeçlerin var olması ve düzgün uzayların ortaya çıkması neticesinde, Cauchy süzgeçleri topolojik teoride Cauchy dizilerine genelleştirilmiştir. Yakınsak teoride ise, Cauchy yakınsaklık anlamında kullanılmıştır. Ancak Cauchy uzaylarının aksiyomatik tanımını 1968 tarihinde Keller [1] tarafından yapılmıştır.

Bu tezin amacı, cümle tabanlı topolojik kategorilerde kapalı ve kuvvetli kapalılık kavramlarını kullanarak özellikle [10] makaleden yararlanarak Cauchy Uzayların topolojik kategorisinde iki tane kapanış operatörünü tanımlamak ve bu kapanış operatörlerinden yararlanarak her bir T_i , $i = 0, 1, 2$ Cauchy Uzaylarının alt kategorilerini tanımlamaktır. Ayrıca, indirgenemez Cauchy uzaylarını karakterize ediyor ve indirgenemez, bağlantılı Cauchy uzaylarının her biri arasındaki ilişkiyi inceliyoruz. Son olarak, Cauchy uzayları için Urysohn Lemmasını ve Tietze Genişleme Teoremi ifade ediyor.

1. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanacağımız bazı temel kategori tanımları ve topolojik kavramlara yer verilmiştir [11- 34].

1.1. Bazı Temel Tanımlar

1940 lardan sonra Samuel Eilenberg ve Saunders Mac Lane tarafından temelleri atılan ve kısa sürede matematiğin diğer dallarında birçok kullanım alanı bulan kategori teorisi, aynı tip nesneler ve bunlar arasındaki dönüşümler olarak düşünülebilir.

Biraz daha ayrıntılı olarak, kümeler arasındaki fonksiyonların bileşkesinin birleşme özelliğine sahip olduğunu ve her küme için birim fonksiyonu bulunduğunu biliyoruz. Burada daha genel olarak kümeler yerine nesneler ve fonksiyonların yerine morfizmler alındığında kategori kavramı elde edilmiş olur.

Tanım 1.1.1. (Kategori) Nesnelerin bir sınıfı olan $Ob(\mathcal{E})$ ve her bir $M, N \in Ob(\mathcal{E})$ nesne çifti için M dan N ye tüm morfizmlerin sınıfı $\mathcal{E}(M, N)$ için,

$$Mor(\mathcal{E}) = \bigcup \mathcal{E}(M, N)$$

olsun. $Mor(\mathcal{E})$ üzerinde şu şekilde kısmi işlem tanımlansın:

Her $M, N, K \in Ob(\mathcal{E})$ için

$$\mathcal{E}(N, K) \times \mathcal{E}(M, N) \longrightarrow \mathcal{E}(M, K)$$

$$(g, f) \longrightarrow gf$$

İşlemi bulunsun.

Bu şekilde tanımlanan tanımlanan aşağıdaki özellikleri sağlasın.

1. Eğer $f \in \mathcal{E}(M, N)$, $g \in \mathcal{E}(N, K)$ ve $h \in \mathcal{E}(K, L)$ ise $(hg)f = h(gf)$ olsun.
 2. Her $M \in Ob(\mathcal{E})$ için $f \in \mathcal{E}(M, -)$ ve $g \in \mathcal{E}(-, M)$ iken $f1_M = f$ ve $1_M g = g$ olacak şekilde birim morfizm olarak adlandırılan $1_M \in \mathcal{E}(M, M)$ morfizmi bulunsun.
- Bu şekildeki yapıya kategori denir.

Burada morfizimler fonksiyonlar ve morfizimlerin bileşkesi ise fonksiyonların bileşkesi gibi yazılmasına rağmen kategorideki morfizimlerin her zaman fonksiyon olmadığına dikkat edelim. Bundan dolayı morfizimler bazen oklar olarak da adlandırılır [11-34]

Önerme 1.1.2. [11- 34] $\mathcal{E}$ kategorisinde her $M \in Ob(\mathcal{E})$ nesnesi için birim morfizm olarak adlandırılan $1_M \in \mathcal{E}(M, M)$ morfizmi tektir.

İspat: $M \in Ob(\mathcal{E})$ nesnesi için 1_M ve $1'_M$ iki tane birim morfizm olduğunu kabul edelim. 1_M nın birim morfizm olmasından $1'_M 1_M = 1'_M$ ve $1'_M$ nın birim morfizm olmasından $1'_M 1_M = 1_M$ olacağından $1_M = 1'_M$ elde edilir.

Örnek 1.1.3. [11-34] Tüm kümelerin sınıfı kategori oluşturur. Bu kategorinin nesneleri kümeler ve morfizimleri ise kümeler arasındaki fonksiyonlardır. M, N kümeleri için $\mathcal{E}(M, N)$ sınıfı M den N ye tüm fonksiyonların sınıfıdır. Burada tanımlanan fonksiyonların bileşkesi olarak tanımlanır. Her M kümesi için birim morfizm $1_M : M \rightarrow M$ birim fonksiyonudur.

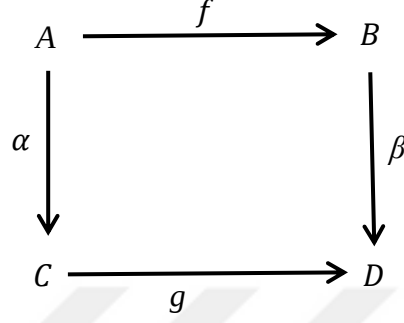
O halde tüm kümelerin sınıfı kategori oluşturur. Bu kategoriye kümelerin kategorisi denir ve **Set** ile gösterilir.

Örnek 1.1.4. [11-34] Topolojik uzayların sınıfı kategori oluşturur. Bu kategorinin nesneleri topolojik uzaylar, morfizimleri topolojik uzaylar arasındaki sürekli fonksiyonlar ve tanımlanan fonksiyonların bileşkesidir. Sürekli fonksiyonların bileşkeleri de sürekli olduğundan böyle kısmi işlem tanımlıdır. Bu kategori kısaca **Top** ile gösterilir.

Örnek 1.1.5. [11-34] Nesneleri gruplar, morfizimleri grup homomorfizimleri ve tanımlanan grup homomorfizimlerin bileşkesi olarak alındığında kategori elde edilir. Bu kategori **Grup** olarak yazılır.

Benzer olarak halkalar ve halka homomorfizimleri de kategori oluşturur. Bu kategori **Ring** ile gösterilir.

Tanım 1.1.6. [11-34] Bir $\mathcal{E}$ kategorisinde morfizmlerin bir diyagramı aşağıdaki gibi verilsin.



Şekil 1. Değişmeli diyagram

Başlangıç ve bitişleri aynı olan bileşke morfizimleri eşit ise yani $\beta f = g\alpha$ ise bu diyagram **değişmelidir** denir.

Tanım 1.1.7. [11-34] $\mathcal{E}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise $\mathcal{E}$ kategorisine $\mathcal{D}$ nin alt kategorisi denir.

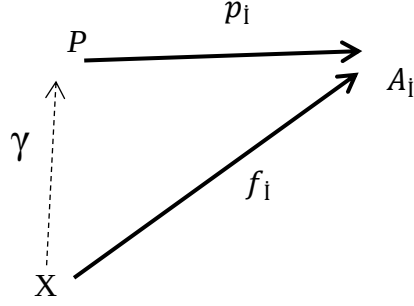
1. $\text{Ob}(\mathcal{E}) \subseteq \text{Ob}(\mathcal{D})$ dir.
2. Her $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{E})$ için $\mathcal{E}(A, B) \subseteq \mathcal{D}(A, B)$ dir.
3. $\mathcal{E}$ kategorisindeki morfizimlerin kısmi bileşke işlemi, $\mathcal{D}$ kategorisindeki morfizimlerin kısmi bileşke işlemi ile aynıdır.
4. Her $A \in \text{Ob}(\mathcal{E})$ için $\mathcal{E}$ deki 1_A birim morfizmi, $\mathcal{D}$ deki birim morfizim ile aynıdır.

$\mathcal{E}$ kategorisi $\mathcal{D}$ kategorisinin alt kategorisi olsun. Her $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{E})$ nesne çifti için $\mathcal{E}(A, B) = \mathcal{D}(A, B)$ ise $\mathcal{E}$ alt kategorisine dolu alt kategori, $\text{Ob}(\mathcal{E}) = \text{Ob}(\mathcal{D})$ ise $\mathcal{E}$ ye geniş alt kategori denir.

Tanım 1.1.8. [11-34] $\mathcal{E}$ kategorisinde $A \in \text{Ob}(\mathcal{E})$ nesnesi verilsin. Her $X \in \text{Ob}(\mathcal{E})$ nesnesi için $\text{Mor}_{\mathcal{E}}(X, A)$ tek morfizme sahip ise $A \in \text{Ob}(\mathcal{E})$ nesnesine **başlangıç nesnesi** denir.

Benzer olarak her $X \in \text{Ob}(\mathcal{E})$ nesnesi için $\text{Mor}_{\mathcal{E}}(X, A)$ tek morfizme sahip ise $A \in \text{Ob}(\mathcal{E})$ nesnesine **final nesnesi** veya **bitiş nesnesi** denir.

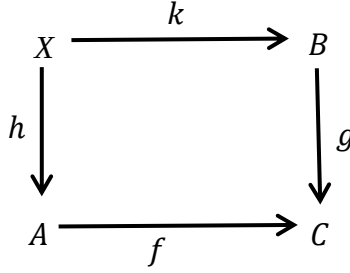
Tanım 1.1.9. [11-34] $\mathcal{E}$ kategorisinde $\{A_i : i \in I\}$ nesnelerin bir sınıfı, $P \in \text{Ob}(\mathcal{E})$ ve her $i \in I$ için $p_i : P \rightarrow A_i$ morfizmi verilsin. $X \in \text{Ob}(\mathcal{E})$ olmak üzere eğer $f_i : X \rightarrow A_i$ ($i \in I$) morfizimleri verildiğinde



Şekil 2. Çarpım diyagramı

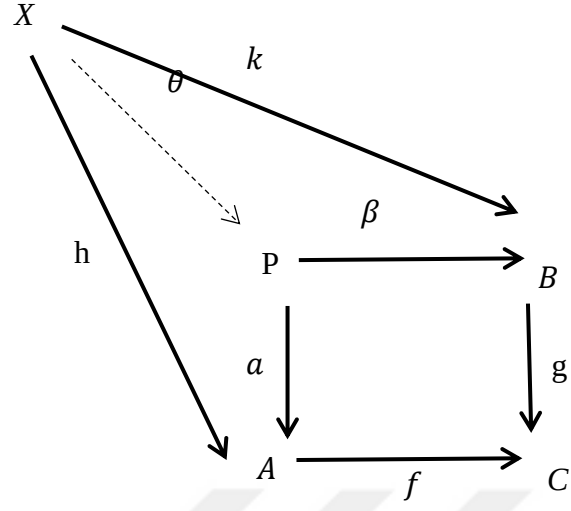
diyagramı değişmeli olacak şekilde tek $\gamma : X \rightarrow P$ morfizmi varsa $\{P \rightarrow A_i : i \in I\}$ ye **çarpım diyagramı** ve P ye $\{A_i : i \in I\}$ nesne sınıfının **çarpımı** denir.

Tanım 1.1.10. [11-34] $\mathcal{E}$ kategorisinde $A \rightarrow C \leftarrow B$ morfizimler olmak üzere bir değişmeli diyagramı verilsin. Eğer herhangi bir



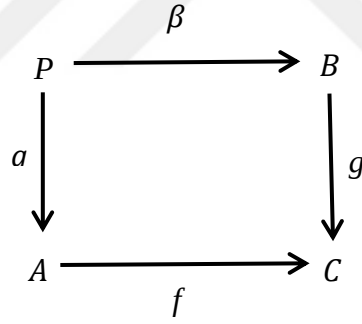
Şekil 3. Değişmeli diyagram

değişmeli diyagramı verildiğinde



Şekil 4. Değişmeli diyagram

diyagramı değişmeli, yani $\alpha\theta = h$ ve $\beta\theta = k$ olacak şekilde tek $\theta: X \rightarrow P$ morfizmi varsa

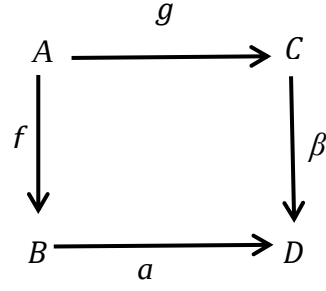


Şekil 5. Pullback diyagramı

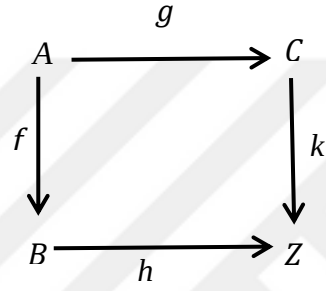
diyagramına f ve g nin **pullback diyagramı** denir.

Tanım 1.1.11.

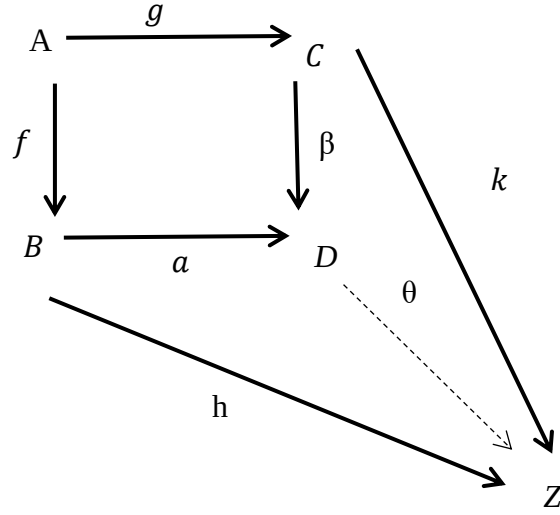
[11-34] $\mathcal{E}$ kategorisinde $B \leftarrow A \rightarrow C$ morfizimler olmak üzere bir



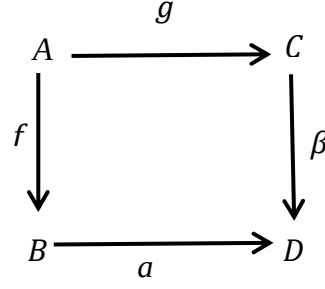
değişmeli diyagramı verilsin. Eğer herhangi bir



değişmeli diyagramı verildiğinde



diyagramı değişmeli yani $\theta\alpha = h$ ve $\theta\beta = k$ olacak şekilde tek $\theta: D \rightarrow Z$ morfizmi varsa



Şekil 6. Pushout diyagram

diyagramına f ve g nin **pushoutu** denir.

1.2. Topolojik Fanktorlar

Tanım 1.2.1. [11-34] $\mathcal{E}$ ve $\mathcal{D}$ kategoriler olmak üzere $\mathcal{E}$ nin her A nesnesini $\mathcal{D}$ nin $F(A)$ nesnesine, $\mathcal{E}$ nin her bir $f : A \rightarrow B$ morfizmini ise $\mathcal{D}$ deki bir $F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$ morfizmine dönüştüren ve aşağıdaki şartları sağlayan F dönüşümüne $\mathcal{E}$ den $\mathcal{D}$ ye **fanktor** denir ve $F : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$ olarak yazılır.

1. $\mathcal{E}$ kategorisinde $g \circ f$ bileşkesi tanımlı olacak şekilde f ve g morfizimleri için $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ dır.

2. Her $A \in Ob(\mathcal{E})$ için $F(1_A) = 1_{F(A)}$ dır.

Tanım 1.2.2. [11-34] $\mathcal{E}$ ve $\mathcal{D}$ kategoriler ve $F : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$ olsun.

1. Her $A, B \in Ob(\mathcal{E})$ ve her $f : A \rightarrow B$ için $F(g) = f$ olacak şekilde en az bir $g : A \rightarrow B$ varsa F ye **dolgun (full) fanktor** denir.

2. $A, B \in Ob(\mathcal{E})$ ve her $f, g : A \rightarrow B$ için $F(f) = F(g)$ iken $f = g$ oluyorsa F ye **düzenli (faithful) fanktor** denir.

3. $f : A \rightarrow A$ için $F(f) = 1_{F(A)}$ ve f izomorfizm iken $f = 1_A$ oluyorsa F **amnestik fanktor** dur.

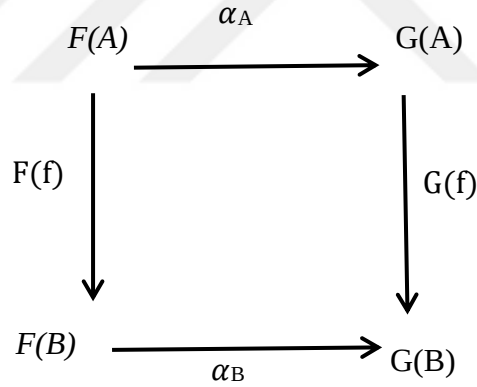
4. F düzenli ve amnestik ise F ye **belirli (concrete) fanktor** denir.

Örnek 1.2.3. [11-34] **TOP** da $\forall (X, \mathcal{T})$ topolojik uzayını, $\mathcal{U}(X, \mathcal{T}) = X$ yani üzerindeki topoloji yapısını bırakarak $\mathcal{U}(f) = f$ dönüştüren fanktoruna **unutkan fanktor** denir.

Örnek 1.2.4. [11-34] **SET** de her X kümesini, üzerine diskre topoloji yapısını ekleyerek $(X, P(X))$ diskre topolojik uzayına $\mathcal{D}: \mathbf{SET} \rightarrow \mathbf{TOP}$ dönüşümüne **diskre fanktor** denir.

Örnek 1.2.5. [11-34] **SET** de $(X, \{\emptyset, X\})$ indiskre obje ve her bir $f: X \rightarrow Y$ nı topolojik uzaylar arasındaki $\mathcal{D}^*(f) = f: (X, \{\emptyset, X\}) \rightarrow (Y, \{\emptyset, Y\})$ fonksiyonuna çeviren $\mathcal{D}^*: \mathbf{SET} \rightarrow \mathbf{TOP}$ ya fanktor **indiskre fanktor** denir.

Tanım 1.2.6. [11-34] $\mathcal{E}$ ve $\mathcal{D}$ kategoriler ve $F, G: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$ fanktorlar olsun. Her $A \in Ob(\mathcal{E})$ yı $\mathcal{D}$ nin bir $\alpha_A: F(A) \rightarrow G(A)$ ne dönüştüren bir $\alpha: Ob(\mathcal{E}) \rightarrow Mor(\mathcal{D})$ verilsin. $\mathcal{E}$ deki $\forall f: A \rightarrow B$ morfizmi için



Şekil 7. Doğal dönüşüm diyagram

diyagramı değişmeli ise α , F den G ye **doğal dönüşüm** dür ve $\alpha: F \rightarrow G$ şeklinde gösterilir.

1.3. Topolojik Kategori

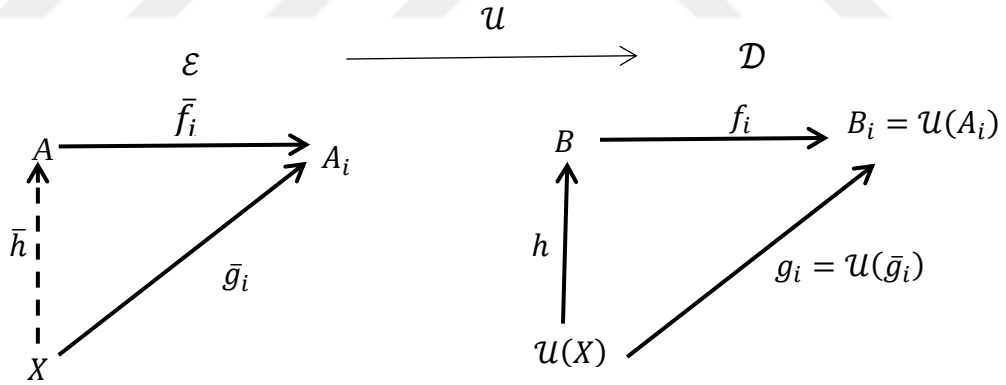
Tanım 1.3.1. [11-34] $\mathcal{E}$ kategori ve I indis kümesi için her $i \in I$ için A ve $A_i \in Ob(\mathcal{E})$ için $f_i: A \rightarrow A_i$ verilsin. $(A, (f_i)_{i \in I})$ ye bir kaynak (source) denir.

Tanım 1.3.2. [11-34] $\mathcal{E}$ kategori ve I bir indis kümesi olmak üzere $\forall i \in I$ için A ve $A_i \in Ob(\mathcal{E})$ olmak üzere $f_i : A_i \rightarrow A$ verilsin. $((f_i)_{i \in I}, A)$ **kavşak (sink)** denir.

Tanım 1.3.3. [11-34] $\mathcal{E}$ ve $\mathcal{D}$ kategorileri ve $\mathcal{U} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$ bir fanktoru verilsin.

1. $i \in I$ için $A_i \in Ob(\mathcal{E})$ ve $f_i : B \rightarrow B_i = \mathcal{U}(A_i)$ leri $\mathcal{D}$ de bir $\mathcal{U}$ –kaynağı olsun. $\{f_i\}_{i \in I}$ ailesinin bir başlangıç kaldırmasının **(initial lift)** $A \in Ob(\mathcal{E})$, $\mathcal{U}(A) = B$ ve $\mathcal{U}(\bar{f}_i) = f_i$ olacak şekilde $\bar{f}_i : A \rightarrow A_i$ olması için şu şartlar sağlanmalıdır:

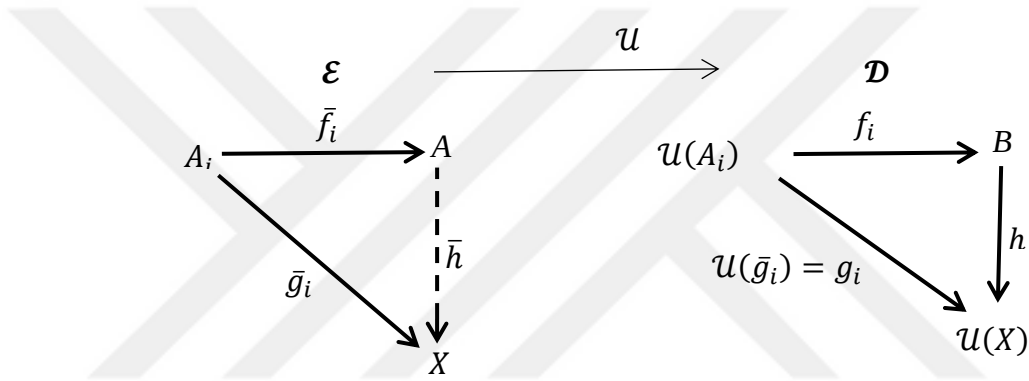
$\bar{g}_i : X \rightarrow A_i$, nin bir ailesi ve $\mathcal{U}(\bar{g}_i) = g_i$ olmak üzere $\forall i \in I$ için $f_i \circ h = g_i$ olacak şekilde bir $h : \mathcal{U}(X) \rightarrow B$ varsa $\forall i \in I$ için $\bar{f}_i \circ \bar{h} = \bar{g}_i$ olacak şekilde $\exists \bar{h} : X \rightarrow A$ vardır. Eğer $\bar{f}_i : A \rightarrow A_i$ başlangıç kaldırma ise A daki yapıya $\bar{f}_i$ lere A_i lerden elde edilen yapı denir.



Şekil 8. Başlangıç kaldırma

2. $i \in I$ için $A_i \in Ob(\mathcal{E})$ ve $f_i : \mathcal{U}(A_i) = B_i \rightarrow B$ leri $\mathcal{D}$ de bir $\mathcal{U}$ -kavşağı olsun. $\{f_i\}_{i \in I}$ nin bitiş kaldırmasının **(final lift)** $A \in Ob(\mathcal{E})$, $\mathcal{U}(A) = B$ ve $\mathcal{U}(\bar{f}_i) = f_i$ olacak şekilde $\bar{f}_i : A_i \rightarrow A$ morfizmler ailesi olması için aşağıdaki şartlar sağlanmalıdır:

$\bar{g}_i : A_i \rightarrow X$, $\mathcal{E}$ de morfizmlerin bir ailesi ve $\mathcal{U}(\bar{g}_i) = g_i$ olmak üzere $\forall i \in I$ için $h \circ f_i = g_i$ olacak şekilde bir $h : B \rightarrow \mathcal{U}(X)$ varsa $\forall i \in I$ için $\bar{h} \circ \bar{f}_i = \bar{g}_i$ olacak şekilde $\exists \bar{h} : A \rightarrow X$ vardır.



Şekil 9. Bitiş Kaldırma

$\bar{f}_i : A_i \rightarrow A$ bir bitiş kaldırma ise A daki yapıya $\bar{f}_i$ ler tarafından A_i den elde edilen yapı denir.

Not 1.3.4. [11-34] Topolojik kategorilerde keyfi bir $\mathcal{U}$ - kaynağının başlangıç kaldırmasının varlığı, keyfi $\mathcal{U}$ - kavşağının bitiş kaldırmasının varlığına denktir.

Tanım 1.3.5. (Topolojik Kategori) [11-34] $\mathcal{E}$ ve $\mathcal{D}$ kategorileri ve $\mathcal{U} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$ fanktoru verilsin. Aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise $\mathcal{U}$ ya **topolojik fanktor** veya $\mathcal{E}$ kategorisine $\mathcal{D}$ de **topolojik kategori** denir.

1. $\mathcal{U}$ belirli (düzenli ve amnestik) dir.
2. $\mathcal{U}$ küçük demetlere sahiptir.
3. Her $\mathcal{U}$ - kaynağı bir başlangıç kaldırmaya (initial lift) sahiptir.

1.4. Süzgeçler

Süzgeç kavramı ilk olarak 1937 yılınca Cartan tarafından ortaya konmuş [20, 21], ardından 1940 yılında Bourbaki [22] tarafından çeşitli çalışmalarda kullanılmıştır. Bu kavram üzerine daha sonra 1961 yılında Kowalsky [23] tarafından da önemli çalışmalar yapılmıştır.

Tanım 1.4.1 $N \neq \emptyset$ cümle, $\alpha \neq \emptyset$ ve $\alpha \subset P(N)$ olsun. Aşağıdaki üç şart sağlanıyorsa, α ya N üzerinde bir öz süzgeç denir.

1. $\emptyset \notin \alpha$ dır.
2. Her $U, V \in \alpha$ için $U \cap V \in \alpha$ dır.
3. $U \in \alpha$ ve $U \subset V$ ise $V \in \alpha$ dır.

1 ve 2 şartlarından α süzgecine ait sonlu sayıda cümlelerin kesişiminin boş olamayacağı ve 3 şartından α süzgecine ait her sayıda cümlelerin birleşiminin α süzgecine ait olduğu anlaşılır. Ayrıca 1 şartından $P(N)$ cümlesinin kendisi bir süzgeç değildir. 3 şartından ise süzgeçlerin artan bir yapıda olduğu anlaşılır [22]. $\emptyset \in \alpha$ ve 2 ve 3 şartları sağlanırsa $\alpha = P(N)$ dir. Bu durumda α ya N üzerinde bir öz olmayan süzgeç denir. N üzerindeki tüm süzgeçlerin cümlesi $F(N)$ ile gösterilir [22].

Örnek 1.4.2 1. $X = \{a\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X\} = P(X)$ tek bir topoloji ve süzgeç $[a] = \{X\}$ vardır.

2. $X = \{a, b\}$ kümesi verilsin.

i. X üzerindeki topolojiler şunlardır:

$$\tau_1 = \{\emptyset, X\}, \tau_2 = \{\emptyset, \{a\}, X\}, \tau_3 = \{\emptyset, \{b\}, X\}, \tau_4 = P(X)$$

ii. X üzerindeki üç süzgeç vardır:

$$[a] = \{\{a\}, X\}, [b] = [b] = \{\{b\}, X\}, [X] = \{\{X\}\}$$

Tanım 1.4.3. $\alpha, \beta \in F(B)$, $\gamma \in F(A)$ ve $f: B \rightarrow A$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde ;

1. $\alpha \cap \beta = \{U \subset B : U \in \alpha \text{ ve } U \in \beta\}$,
2. $\alpha \cup \beta = \{U \subset B : \exists V \in \alpha \text{ ve } \exists W \in \beta \text{ için } U \supset V \cap W\}$,
3. $f(\alpha) = \{V \subset A : \exists C \in \alpha \text{ için } f(C) \subset V\}$,
4. $f^{-1}(\gamma) = \{U \subset B : \exists C \in \gamma \text{ vardır öyle ki } \emptyset \neq f^{-1}(C) \subset U\}$ şeklinde tanımlanır. Bunların her biri birer öz süzgeçtirler [2].

Burada $[\alpha \cap \beta] = \alpha \cap \beta$ dır. $\alpha \cap \beta \subset [\alpha \cap \beta]$ olduğu öz süzgecin tanımından açıktır. Şimdi $[\alpha \cap \beta] \subset \alpha \cap \beta$ olduğunu gösterelim. $U \in [\alpha \cap \beta]$ alalım. En az bir $V \in \alpha \cap \beta$ vardır öyle ki $V \subset U$ dur. $V \in \alpha \cap \beta$ olduğundan $V \in \alpha$ ve $V \in \beta$ dır. α ve β ve öz süzgeç olduğundan $U \in \alpha$ ve $U \in \beta$ dır. Dolayısıyla $U \in \alpha \cap \beta$ dır. Ayrıca süzgeçlerin birleşim işleminin cümlelerin birleşim işleminden farklı olduğu unutulmamalıdır. Çünkü normal birleşim işlemi alınsa iki süzgecin birleşimi süzgeç olmayabilirdi.

Tanım 1.4.4 $\alpha, \beta \in F(A)$ ve $f: A \rightarrow B$ bir fonksiyon olsun [24].

1. $f(\alpha \cap \beta) = f(\alpha) \cap f(\beta)$,
2. $f(\alpha \cup \beta) \supset f(\alpha) \cup f(\beta)$,
3. $f^{-1}f(\alpha) \subset \alpha$ dır,
4. $\beta \subset f(f^{-1}(\beta))$ dır.

İspat: 1. $U \in f(\alpha \cap \beta)$ olsun. Bu takdirde en az bir $V \in \alpha \cap \beta$ vardır, öyle ki $f(V) \subset U$ dur. $f(V) \in \alpha$ ve $f(V) \in \beta$ demektir. Böylece $U \in f(\alpha) \cap f(\beta)$ dır.

Dolayısıyla, $f(\alpha \cap \beta) \subset f(\alpha) \cap f(\beta)$ dır. Diğer taraftan, $U \in f(\alpha) \cap f(\beta)$ ise $U \in f(\alpha)$ ve $U \in f(\beta)$ dır. $f(V) \subset U$ ve $f(W) \subset U$ olacak şekilde $V \in \alpha$ ve $W \in \beta$ vardır. Buradan $U \supset f(V) \cap f(W) = f(V \cap W) \in (\alpha \cap \beta)$ olduğundan $U \in f(\alpha \cap \beta)$ ve $f(\alpha) \cap f(\beta) \subset f(\alpha \cap \beta)$ dır. O halde eşitlik sağlanır.

2. $U \in f(\alpha) \cup f(\beta)$ olsun. $U \in f(\alpha)$ veya $U \in f(\beta)$ dır. $f(V) \subset U$ ve $f(W) \subset U$ olacak şekilde $V \in \alpha$ ve $W \in \beta$ vardır.

Buradan $U \supset f(V) \cap f(W) = f(V \cap W) \in f(\alpha \cup \beta)$ olur ki $U \in f(\alpha \cup \beta)$ dır. Dolayısıyla, $f(\alpha \cup \beta) \supset f(\alpha) \cup f(\beta)$ dır.

3. $U \in f^{-1}f(\alpha)$ ise bazı $V \in f(\alpha)$ için $f^{-1}(V) \subset U$ dur. Sonuç olarak $f(W) \subset V$ olacak şekilde $W \in \alpha$ vardır. Buradan $W \subset f^{-1}(W) \subset f^{-1}(V) \subset U$ dur. Dolayısıyla, $U \in \alpha$ dır. Yani $f^{-1}f(\alpha) \subset \alpha$ dır.

4. $U \in \beta$ ise, $f(f^{-1}(U)) \in f(f^{-1}(\beta))$ ve $f(f^{-1}(U))U$ olduğundan sonuç olarak $U \in f(f^{-1}(\beta))$ dır. Buradan $\beta \subset f(f^{-1}(\beta))$ dır.

Tanım 1.4.5. (N, τ) bir topolojik uzay, $R \subseteq N \times N$ bir denklik bağıntısı olsun. $[x] = \{y \in N \mid (x, y) \in R\}$ cümlesine $x \in N$ nin denklik sınıfı, $N/R = \{[x] \mid x \in N\}$ cümlesine bölüm cümlesi ve $q: (N, \tau) \rightarrow N/R$ bölüm fonksiyonuna göre N/R üzerinde ki bitiş topolojisi bölüm topolojisi ve bu topoloji ile birlikte N/R bölüm uzayı olarak bilinir. Burada q bölüm fonksiyonu örten ve süreklidir [25].

Tanım 1.4.6. $q: N \rightarrow N/M$ epi dönüşümü N nin boş olmayan bir alt cümlesi M yi $*$ a eşleyen bölüm fonksiyonu olarak alalım. $\alpha \in N$ ve α, N üzerinde bir öz süzgeç olsun [26].

Tanım 1.4.7. $q: N \rightarrow N/F$ epi dönüşümü N nin boş olmayan bir alt cümlesi F yi $*$ a eşleyen bölüm fonksiyonu olarak alalım. α ve β , N üzerinde öz süzgeç olsun. O halde $q(\alpha) \cup q(\beta)$ öz süzgeçtir ancak ve ancak $\alpha \cup \beta$ öz süzgeç veya $\alpha \cup [F]$ ve $\beta \cup [F]$ öz süzgeçtir [26].

Lemma 1.4.8 α, β N üzerinde öz süzgeçler ve $q: N \rightarrow N/M$, N nin boş olmayan bir alt cümlesi M yi $*$ a eşleyen bölüm fonksiyonu olsun.

1. $\alpha \cup [M]$ öz süzgeç değil ise, $q(N) \subset [q(\alpha)]$ dır ancak ve ancak $\beta \subset \alpha$ dır [26].

2. $\alpha \cup [M]$ öz süzgeç ise, $q(N) \subset [q(\alpha)]$ dır ancak ve ancak $\beta \cap [M] \subset \alpha$ ve $\alpha \cup [M]$ öz süzgeçtir [26].

Tanım 1.4.9 $N \neq \emptyset$ ve α, N de bir süzgeç olmak üzere her $U \subset N$ için $U \in \alpha$ veya $A = U^c \in \alpha$ ise α ya ultra (maximal) süzgeç denir [26].

Tanım 1.4.10 $N \neq \emptyset$ ve α ve β de iki öz süzgeç olmak üzere $\alpha \subset \beta$ ise α öz süzgeci β dan daha kalındır veya β öz süzgeci α dan daha incedir [26].

Tanım 1.4.11 (N, τ) bir topolojik uzay olmak üzere, $x \in N$ ve x noktasının bütün komşuluklarını ihtiva eden aile B_x olsun. B_x sınıfı N üzerinde tanımlı öz süzgeç olup bu öz süzgece x in komşuluk süzgeci adı verilir [26,34].

Tanım 1.4.12 $\alpha, (N, \tau)$ topolojik uzayında öz süzgeç ve $x \in N$ olsun. α öz süzgeci x noktasının B_x komşuluklar öz süzgecinden daha ince ise, yani $B_x \subset \alpha$ ise α öz süzgecine x noktasına yakınsıyor denir ve $\alpha \rightarrow x$ veya $\lim \alpha = x$ şeklinde gösterilir [27].

Tanım 1.4.13 $N \neq \emptyset$ ve $\beta \subset P(N), \beta \neq \emptyset$ olsun. β aşağıdaki şartları sağlarsa β ya süzgeç bazı (tabanı) denir.

1. $\emptyset \notin \beta$ dir.
2. Her $U, V \in \beta$ için $W \subset U \cap V$ olacak şekilde $W \in \beta$ vardır. Yani β ya ait herhangi iki cümlemin arakesiti β ya ait bir cümleyi kapsar.

Tanım 1.4.14 (N, τ) bir topolojik uzay ve β ailesi B üzerinde bir süzgeç bazı olsun. β süzgeç bazının ürettiği α süzgeci bir x noktasına yakınsıyorsa, β süzgeç bazı da x noktasına yakınsar ya da x noktasına β süzgeç bazının limit noktasıdır denir ve $\beta \rightarrow x$ ile gösterilir [28].

Önerme 1.4.15 (N, τ) ve (M, μ) topolojik uzaylar ve $f: (N, \tau) \rightarrow (M, \mu)$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonu bir x noktasında süreklidir ancak ve ancak N üzerindeki her α öz süzgeci için $\alpha \rightarrow x$ olduğunda M üzerinde $f(\alpha) \rightarrow f(x)$ dir [29].

1.5. Cauchy Uzayları Kategorisi

Tanım 1.5.1. A bir küme ve $F(A)$ da A üzerinde süzgeçlerin kümesi ve $K \subset F(A)$ olsun.

1. Her $x \in A$ için $[x] = [\{x\}] \in K$ ve $[x] = \{B \subset A : x \in B\}$ dir.
2. $\alpha, \beta \in K$ ve $\alpha \cup \beta$ öz süzgeç (proper) ise $\alpha \cap \beta \in K$ dir.
3. α ve β, N üzerindeki süzgeçler ve $\alpha \subset \beta$ olsun. $\alpha \in L(x)$ ise $\beta \in L(x)$ dir.

K yukarıdaki şartları sağlarsa K ya Cauchy yapısı, (A, K) ya da Cauchy Uzayı denir. Sadece (1) ve (2) şartları sağlanıyorsa (A, K) uzayına pre-Cauchy uzayı denir. K da ki elemanlarına da Cauchy süzgeci adı verilir.

$(A, K), (B, N)$ Cauchy uzayları olmak üzere $f: (A, K) \rightarrow (B, N)$ Cauchy uzayları arasındaki morfizmin Cauchy sürekli fonksiyon olması için gerek ve yeter şart $f: A \rightarrow B$ bir fonksiyon olmak üzere her $\alpha \in K$ için $f(\alpha) \in N$ dir.

Nesneleri Cauchy uzayları, morfizmleri yukarıdaki gibi tanımlanan Cauchy sürekli fonksiyonlar ve işlem olarak da fonksiyonlardaki bileşke işlemi olan kategoriye sırasıyla pre- Cauchy uzayları kategorisi ve Cauchy uzayların kategorisi denir. Sırasıyla **PCHY** ve **CHY** ile gösterilir.

Teorem 1.5.2. **CHY** kategorisinde $\{f_i: (N, K) \rightarrow (N_i K_i), i \in I\}$ kaynağı bir başlangıç kaldırmadık ancak ve ancak her $i \in I$ için $\alpha \in K$ iken $f_i(\alpha) \in K_i$ dir [12-14].

Teorem 1.5.3. **CHY** kategorisinde ki $f: (A, K) \rightarrow (B, N)$ epimorfizması bitiş kaldırmadık. (final lift) ancak ve ancak her $\alpha \in N$ için K da $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ olacak şekilde sonlu tane Cauchy süzgeci vardır öyle ki $i \leq n$ için α_i nin elemanları α_{i+1} de ki elemanlarla kesişir ve $\bigcap_{i=1}^n f(\alpha_i) \subset \alpha$ olur [12-14].

Teorem 1.5.4. (A, K) uzayı **CHY** de nesne olsun.

1. (A, K) uzayının diskre obje olması için gerek ve yeter şart her $a \in A$ için $K = \{[a], P(A) = [\emptyset]\}$ olmasıdır.
2. (A, K) uzayının indiskre obje olması için gerek ve yeter şart $K = F(A)$ olmasıdır [12-13].

2. BÖLÜM

KAPALI ALT NESNELER

Bu bölümde kalıtım, ayrılabilirlik ve idempotentlik koşullarını sağlayan, Cauchy uzayları kategorisinde iki kapanış kavramı tanıtılmakta ve bu kapanış operatörleri kullanılarak $T_i, i = 0, 1, 2$ Cauchy uzayları karakterize edilmektedir. Ayrıca, bu alt kategorilerin birbiriyle izomorf olduğu gösterilmektedir.

2.1. p Noktasında Wedge Çarpımı ve Dönüşümler

Tanım 2.1.1. N bir cümle, $p \in N$ ve $N^2 = N \times N, N$ nin kartezyen çarpımı olsun. Ayrıca $N \sqcup N, N$ nin ayrık iki kopyası olsun. N nin p de wedge çarpımı $N \sqcup N$ nin p de çakışmasıdır ve $N \vee_p N$ şeklinde gösterilir. $N \vee_p N$ de ki bir x noktası birinci bileşende ise x_1 ikinci bileşende ise x_2 ile gösterilecektir. Ayrıca $x = p$ ise $x_1 = x_2$ dir.

Not: 2.1.2. N bir cümle, $p \in N$ ve $N \vee_p N$ de N cümlesinin p noktasında ki wedge çarpımı olsun. $i_1, i_2: N \rightarrow N \vee_p N$ dönüşümleri de sırasıyla birinci ve ikinci içirme dönüşümleri olmak üzere,

$$\begin{array}{ccc} \{p\} & \xrightarrow{f} & N \\ f \downarrow & & \downarrow i_1 \\ B & \xrightarrow{i_2} & N \vee_p N \end{array}$$

değişmeli diyagramı bir pushout diyagramıdır.

$id : N \rightarrow N$ birim dönüşüm ve $f: N \rightarrow N$ de p ye giden sabit dönüşüm olmak üzere,

$$A_p i_1 = (id, f) : N \rightarrow N^2, A_p i_2(f, id): N \rightarrow N^2, S_p i_1 = (id, id): N \rightarrow N^2,$$

$S_p i_2 = (f, id) : N \rightarrow N^2$ ve $\Delta_p i_1 = \Delta_p i_2 = id_N: N \rightarrow N$ dönüşümleri yukarıda verilen pushout diyagramına uygulandığında aşağıda verilen A_p, S_p ve Δ_p dönüşümleri elde edilir.

1. p de Temel Eksen Dönüşümü

$$A_p: N \vee_p N \rightarrow N^2, A_p(x_i) = \begin{cases} (x, p), & i = 1 \\ (p, x), & i = 2 \end{cases}$$

2. p de Eğik Eksen Dönüşümü

$$S_p: N \vee_p N \rightarrow N^2, S_p(x_i) = \begin{cases} (x, x), & i = 1 \\ (p, x), & i = 2 \end{cases}$$

3. p de Katlama Dönüşümü

$$\nabla_p: N \vee_p N \rightarrow N, i = 1, 2 \text{ için } \nabla_p(x_i) = x$$

olarak tanımlanır [2-3].

Tanım 2.1.3 N bir küme $p \in N$ olsun. $V_p^\infty N$ sonsuz wedge çarpım N nin sayılabilir adetteki ayrık kopyalarının alınması ve bunların p noktasında çakıştırılması ile elde edilir. $N^\infty = N \times N \times \dots$ nin sayılabilir kartezyen çarpımı olsun.

$$A_p^\infty : V_p^\infty N \rightarrow N^\infty \text{ dönüşümü } A_p^\infty(x_i) = (p, p, \dots, p, x, p, \dots) \text{ ve}$$

$$\nabla_p^\infty: V_p^\infty N \rightarrow N \text{ dönüşümü } \nabla_p^\infty(x_i) = x \text{ şeklinde tanımlanır [30].}$$

Teorem 2.1.4 $U : E \rightarrow Set$ topolojik bir fanktor, $U(x) = B$ olmak üzere $X \in E$ bir nesne ve $p \in B$ ve $F \subseteq B$ boş olmayan bir alt küme olsun. $q, (B/F)$ üzerinde birim ve F yi $\{*\}$ noktasına dönüştüren örten fonksiyon olmak üzere $q: U(x) = B \rightarrow B \setminus F \cup \{*\}$ epi U -kavşağının bitiş kaldırması X/F ile gösterilir [2].

1. X objesinin p de T_1 olması için gerek ve yeter şart $\{S_p: N \vee_p N \rightarrow U(X^2) = N^2 \text{ ve } \nabla_p: N \vee_p N \rightarrow UD(N) = N\}$, U - kaynağının başlangıç kaldırmasının diskre olmasıdır [31].

2. p nin N de kapalı olması için gerek ve yeter şart $\{A_p^\infty : V_p^\infty N \rightarrow U(X^\infty) = N^\infty \text{ ve } V_p^\infty : V_p^\infty N \rightarrow UD(N) = N\}$, U -başılangıç kaldırmasının diskre olmasıdır. Burada D, U nun sol adjointi olan diskre fanktordur [2,3].

3. $F \subset X$ nin kapalı olması için gerek ve yeter şart F nin $\{*\}$ görüntüsünün X/F de kapalı veya $F = \emptyset$ olmasıdır [2,3].

4. $F \subset X$ nin kuvvetli kapalı olması için gerek ve yeter şart X/F in $\{*\}$ da T_1 veya $F = \emptyset$ olmasıdır [2,3].

Açıklama 2.1.5 ([15], s.106) α ve β , A üzerinde süzgeçler olsun. $f: A \rightarrow B$ bir fonksiyon olmak üzere,

$$f(\alpha \cap \beta) = f(\alpha) \cap f(\beta) \text{ dır.}$$

Lemma 2.1.6. ([3]) $q: B \rightarrow B/F$ yi $*$ noktasıyla özdeşlik dönüşümü, σ B üzerinde bir süzgeç ve $a \in B$ ile $a \notin F$ olsun. O halde, σ, B üzerinde bir süzgeç olmak üzere $a \in B$ ve $a \notin F, F \subseteq B$ boş olmayan bir alt küme olsun. $q, (B/F)$ üzerinde birim ve F yi $\{*\}$ noktasına dönüştüren örten fonksiyon olmak üzere $\sigma \cup [F]$ öz süzgeç ve $\sigma \subseteq [a]$ olması için gerek ve yeter şart $[a] \cap [*] = q([a] \cap [F]) \supseteq q(\sigma)$ dır.

Lemma 2.1.7. $f: A \rightarrow B$ bir dönüşüm olsun,

1. α ve β süzgeçler olmak üzere,

$$f(\alpha) \cup f(\beta) \subseteq f(\alpha \cup \beta)$$

2. δ , B üzerinde bir süzgeç ise,

$$\delta \subseteq f f^{-1}(\delta),$$

burada $f^{-1}(\delta)$ süzgeci $\{f^{-1}(D): D \in \delta\}$ ile üretilendir [16].

Teorem 2.1.8 (A, K) bir Cauchy uzayı ve $p \in A$ ise (A, K) p noktasında T_1 dir ancak ve ancak $\alpha \in K$ ve $a \neq p$ için, $U \in \alpha$ olacak şekilde $p \notin U$ vardır [8].

Teorem 2.1.9 (A, K) bir Cauchy uzayı, $p \in A$ ve $\emptyset \neq M \subset A$ olsun. O halde,

1. $\{p\} \subset A$, (A, K) içinde kapalıdır ancak ve ancak $\alpha \in K$ ve $a \neq p$ için $U \in \alpha$ olacak şekilde $p \notin U$ vardır.

2. Aşağıdakiler denktir.

(a) M kuvvetli kapalıdır.

(b) M kapalıdır.

(c) Her $a \in A$ ve $a \notin M$ için ve her $\alpha \in K$ için $a \cup [M]$ öz süzgeçtir ya da $\alpha \not\subset [a]$ dır.

3. Aşağıdakiler denktir.

(a) M kuvvetli açıktır.

(b) M açıktır.

(c) Her $a \in A$ ve $a \notin M^c$ için ve her $\alpha \in K$ için $\alpha \cup [M^c]$ öz olmayan süzgeçtir ya da $\alpha \not\subset [a]$ dır [8].

Teorem 2.1.10. (A, K) ve (B, L) Cauchy uzayları ve $f: (A, K) \rightarrow (B, L)$ bir Cauchy dönüşümü olsun.

1. $M \subseteq B$ kapalı(kuvvetli) ise, $f^{-1}(M) \subseteq A$ kapalıdır (kuvvetli).

2. $M \subseteq N \subseteq B$ ve N kapalı(kuvvetli) ise, $M \subseteq B$ kapalıdır (kuvvetli) [10].

İspat: 1. $M \subset B$ (kuvvetli) kapalı olsun. $a \in A$ ve $a \notin f^{-1}(M)$ ve $\alpha \in K$ herhangi bir Cauchy süzgeç olsun. Yani $f(a) \notin M$, $f(a) \in L$ ve $f(a) \notin [f(a)]$ ya da $f(a) \cup [M]$ öz süzgeçtir. $a \in K$ herhangi bir Cauchy süzgeci olsun. $f(a) \in L$ veya $f(a) \notin [f(a)]$ ya da $f(a) \cup [M]$ öz süzgeçtir. (Çünkü M kapalıdır). Tanım 2.1.4. e göre $f(a) \cup [M] \subseteq f(a) \cup [f(f^{-1}(M))] \subseteq f(a \cup [f^{-1}(M)])$ dır.

Eğer $\alpha \cup [f^{-1}(M)]$ öz süzgeç ise, f sürekliliğinden dolayı $f(\alpha \cup [f^{-1}(M)])$ de öz süzgeç olurdu; ama bu durumda $\exists U \in \alpha$ öyle ki $\emptyset \supset U \cup [f^{-1}(M)]$ olur, bu çelişki yaratır.

Dolayısıyla $a \cup [f^{-1}(M)]$ öz olmayan süzgeçtir ve bu durumda $f(a) \cup [M]$ de öz olmayan süzgeçtir. Ayrıca, eğer $a \subseteq [a]$ olsaydı, $f(a) \subseteq [f(a)]$ olurdu; bu da $M \subset B$ nin kapalı oluşuna aykırıdır. Sonuç olarak $a \not\subseteq [a]$ ve Teorem 2.1.4 den $f^{-1}(M) \subset A$ (kuvvetli) kapalıdır.

2. $M \subset N$ ve $N \subset B$ (kuvvetli) kapalı olsun. $a \notin M$, $a \in B$ ve $\alpha \in K$ olsun. Eğer $a \notin N$ ise Teorem 2.1.4 e göre $a \not\subseteq [a]$ veya $N \subset B$ (kuvvetli) kapalı olduğunda $a \cup [N]$ öz olmayan süzgeçtir. Eğer $a \cup [N]$ öz olmayan süzgeç ise $M \subset [N]$ olduğundan $\alpha \cup [M] \subset \alpha \cup [N]$ olur. Sonuç olarak $\alpha \cup [M]$ öz olmayan süzgeçtir. Eğer $a \in N$ ise $i: (N \rightarrow L_N) \rightarrow (B, L)$ dönüşümü ile oluşturulan altuzay yapısı L_N alınır. $i^{-1}(a) = a \cup [N]$, Tanım 2.1.4 e göre $a \subseteq i(i^{-1}(a))$ ve $a \in L$ olduğu için $i(i^{-1}(a)) \in L$ sonuç olarak $i^{-1}(a) \in L_N$ olur. Bu durumda da $i^{-1}(a) \not\subseteq [a]$ veya $i^{-1}(a) \cup [M]$ öz olmayan süzgeçtir. Çünkü $M \subseteq N$ (kuvvetli) kapalıdır. Sonuç olarak $a \not\subseteq [a]$ veya $a \cup [M]$ öz olmayan süzgeçtir. Bu da Teorem 2.1.4 e göre $M \subseteq B$ nin (kuvvetli) kapalı olduğunu gösterir.

$\mathcal{E}$ küme tabanlı bir topolojik kategori olsun. $\mathcal{E}$ kategorisinde tanımlı bir kapanış operatörü (closure operator), her nesne X in (küme olarak ele alınan) herhangi bir alt kümesi K ye, yine X in bir alt kümesi olan $c(K)$ yı eşleyen bir işlemdir. Bu işlem aşağıdaki koşulları sağlar.

1. $K \subset c(K)$ dır,
2. $L \subset K$ ise $c(L) \subset c(K)$ olur,
3. Her $f: X \rightarrow Y$ morfizması ve her $K \subset Y$ için, $cf^{-1}((K)) \subset f^{-1}(c(K))$ ya da eşdeğer olarak, $f(c(K)) \subset c(f(K))$ dır (süreklilik şartı) [32, 33].

c , $\mathcal{E}$ kategorisinde tanımlı bir kapanış operatörü olsun. Bu durumda:

1. $\mathcal{E}_{0c} = \{X \in \mathcal{E} | x \in c(\{y\}) \text{ ve } y \in c(\{x\}) \Rightarrow x, y \in X \text{ iken } x = y\}$ [32].
2. $\mathcal{E}_{1c} = \{X \in \mathcal{E} | \text{her } x \in X \text{ için } c(\{x\}) = \{x\}\}$ [32].
3. $\mathcal{E}_{2c} = \{X \in \mathcal{E} | c(\Delta) = \Delta\}$ (Burada Δ, X üzerindeki diagonal (çapraz) kümedir) [32].

Not: 2.1.11 $\mathcal{E} = Top$ (topolojik uzayların kategorisi) ve c kapanış operatörü olmak üzere, her Top_{ic} altkategorisi $i = 0, 1, 2$ için T_i uzaylar sınıfına indirgenir [32].

Tanım 2.1.12. [10] (A, K) bir Cauchy uzayı ve $M \subset A$ olsun.

$c_A(M) = \cap \{U \subseteq A \mid M \subseteq U \text{ ve } U \text{ kapalıdır}\}$ ifadesi M nin kapanışı olarak adlandırılır.

$sc_A(M) = \cap \{U \subseteq A \mid M \subseteq U \text{ ve } U \text{ kuvvetli kapalı}\}$ ifadesi M nin kuvvetli kapanışı olarak adlandırılır.

Topolojik kategorilerde, kapalılık kavramının bir kapanış operatörü oluşturduğu gösterilmiştir [32].

Teorem 2.1.13. c ve sc , CHY kategorisi üzerinde (zayıf) kalıtsal, çarpımsal ve idempotent kapanış operatörleridir.

İspatı Teorem 2.1.5, Teorem 2.1.4, ve Teorem 1.5.3 ten elde edilir.

Teorem 2.1.14. Bir Cauchy uzayı (A, K) için aşağıdakiler denktir.

1. $(A, K) \in CHY_{0c}$,
2. $(A, K) \in CHY_{0sc}$,
3. Her $x, y \in A$ ve $x \neq y$ için aşağıdaki durumlardan en az biri sağlanır:
 - $x \notin M, y \in M$ olacak şekilde A kümesinin (kuvvetli) kapalı bir alt kümesi $M \subset A$ vardır ve her $\alpha \in K$ için ya $\alpha \not\subseteq [x]$ ya da $\alpha \cup [M]$ öz olmayan süzgeçtir (improper),

veya

- $x \in N, y \notin N$ olacak şekilde A kümesinin (kuvvetli) kapalı bir altkütmesi $N \subset A$ vardır ve her $\alpha \in K$ için ya $\alpha \not\subseteq [y]$ ya da $\alpha \cup [N]$ öz olmayan süzgeçtir (improper).

İspat: Tanım 2.1.4 e göre, $(A, K) \in CHY_{0c}$ olması ancak ve ancak $(A, K) \in CHY_{0sc}$ olması ile mümkündür. Bu da (1) ile (2) nin denk olduğunu gösterir.

Varsayalım ki $(A, K) \in CHY_{0sc}$ ve $x, y \in A$ öyle ki $x \neq y$ olsun.

$(A, K) \in CHY_{0sc}$ olduğundan, $x \notin c_A(\{y\})$ veya $y \notin c_A(\{x\})$ olur.

İlk olarak, $x \notin c_A(\{y\})$ olduğunu varsayalım.

Tanım 2.1.4 e göre, $x \notin M, y \in M$ olacak şekilde A nın (kuvvetli) kapalı bir altkümesi $M \subset A$ vardır.

Teorem 2.1.4 e göre ise, her $\alpha \in K$ için ya $\alpha \not\subseteq [x]$ ya da $\alpha \cup [M]$ öz olmayan süzgeçtir (improper).

Benzer şekilde, $y \notin c_A(\{x\})$ olduğunu varsayalım.

Tanım 2. 1. 4 e göre, $x \in N, y \notin N$ olacak şekilde A nın (kuvvetli) kapalı bir altkümesi $N \subset A$ vardır.

Teorem 2.1.4 e göre, her $\alpha \in K$ için ya $\alpha \not\subseteq [y]$ ya da $\alpha \cup [N]$ öz olmayan süzgeçtir.

Bu, (2) nin (3) ü sağladığını gösterir.

Şimdi, (3) ün sağlandığını ve $x, y \in A$ ve $x \neq y$ olduğunu varsayalım. Eğer (3) teki birinci durum sağlanıyorsa, Teorem 2.1.4 e göre $M \subseteq A$ kuvvetli kapalıdır ve Tanım 2.1.4 e göre $y \in c_A(\{x\})$ olur.

Eğer (3) teki ikinci durum sağlanıyorsa, Teorem 2.1.4 e göre $N \subseteq A$ kuvvetli kapalıdır ve Tanım 2.1.4 e göre $x \in c_A(\{y\})$ olur.

Dolayısıyla, $(A, K) \in CHY_{0sc}$ olur ve bu da (3) ün (2) yi sağladığını gösterir.

Teorem 2.1.15. Bir Cauchy uzayı (A, K) için aşağıdakiler denktir.

1. $(A, K) \in CHY_{1c}$,
2. $(A, K) \in CHY_{1sc}$,
3. Tüm $x \neq y \in A$ için $[x] \cap [y] \notin K$ dır.

Teorem 2.1.4 e göre, $(A, K) \in CHY_{1c}$ ancak ve ancak $(A, K) \in CHY_{1sc}$ olduğunda, bu durum (1) ile (2) nin birbirine denk olduğunu gösterir.

Tanım 2.1.4 e göre, $(A, K) \in CHY_{1c}$ olması, $(A, K) \in CHY_{1sc}$ olmasıyla eşdeğerdir. Bu durum, (1) ile (2) nin denk olduğunu gösterir.

Şimdi $(A, K) \in CHY_{1sc}$ olduğunu ve $x \in A$ olduğunu varsayalım. $sc_A(\{x\}) = x$ olduğu görülmektedir; yani, $\{x\}$ kuvvetli kapalıdır (sc -kapalıdır). Tanım 2.1.4 e göre, $x \neq y$ olmak üzere tüm $x, y \in A$ için $[x] \cap [y] \notin K$ bağıntısı sağlanır.

Tersine, tüm $x, y \in A$ için $x \neq y$ olmak üzere $[x] \cap [y] \notin K$ olduğunu varsayalım. Tanım 2.1.4 e göre, özellikle $\{x\}$ kümesi kuvvetli kapalıdır, yani $sc_A(\{x\}) = [x]$ olur. Dolayısıyla $(A, K) \in CHY_{1sc}$ olur ve bu da (3) ün (2) yi sağladığını gösterir.

Teorem 2.1.16. Bir Cauchy uzayı (A, K) için aşağıdakiler denktir.

1. $(A, K) \in CHY_{2c}$,
2. $(A, K) \in CHY_{2sc}$,
3. Tüm $x \neq y \in A$ için $a, \beta \in K$ için, eğer $a \subseteq [x]$ ve $\beta \subseteq [y]$ ise $a \cup \beta$ öz olmayan süzgeçtir.

Tanım 2.1.4 e göre, $(A, K) \in CHY_{2c}$ olması, $(A, K) \in CHY_{2sc}$ olmasıyla tam olarak eşdeğerdir. Bu durum, (1) in (2) ye denk olduğunu gösterir.

Şimdi $(A, K) \in CHY_{2sc}$ olduğunu varsayalım ve $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in A$ ve $\alpha, \beta \in K$ olsun. Ayrıca $\alpha \subseteq [x]$ ve $\beta \subseteq [y]$ olduğunu kabul edelim.

Şöyle tanımlayalım:

$$\sigma = \pi_1^{-1}\alpha \cup \pi_2^{-1}\beta ,$$

burada π_1 ve π_2 , birinci ve ikinci bileşenlere ait izdüşüm fonksiyonlarıdır.

$$\pi_1 \sigma = \alpha \in K \text{ ve } \pi_2 \sigma = \beta \in K$$

Tanım 1.5.2 ye göre $\sigma \in K^2$ yani B^2 üzerindeki çarpım yapısına aittir.

Şimdi, $V \in \sigma$ alınsın. O halde $V_1 \in \alpha$ ve $V_2 \in \beta$ olmak üzere $V \supset V_1 \times V_2$ mevcuttur. $\alpha \subseteq [x]$ ve $\beta \subseteq [y]$ olduğundan, $x \in V_1$ ve $y \in V_2$ olur. Dolayısıyla, $\alpha \cup \beta \subseteq [(x, y)]$ dir.

Δ , B^2 uzayında kapalı olduğundan ve Teorem 2.1.4 e göre, $\alpha \cup [\Delta]$ öz olmayan süzgeç (improper) olmak zorundadır. Bu nedenle, σ da öyle bir V vardır ki $V \cap \Delta = \emptyset$ dir.

Bu da şunu gösterir:

$$(V_1 \times V_2) \cap \Delta = \emptyset \Leftrightarrow V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

yani $\alpha \cup \beta$ öz olmayan süzgeçtir. Böylece (2) ifadesi (3) ü sağlar.

Şimdi tersini ele alalım: Tüm $x, y \in A$ için $x \neq y$ ve $\alpha, \beta \in K$ alındığında, $\alpha \subseteq [x], \beta \subseteq [y]$ ise, $\alpha \cup \beta$ öz olmayan süzgeç olsun.

Amacımız $(A, K) \in CHY_{2sc}$ olduğunu göstermek, yani Δ nın kuvvetli kapalı (sc –kapalı) olduğunu ortaya koymaktır. Teorem 2.1.4 e göre, her $(x, y) \in B^2$, $(x, y) \notin \Delta$ ve her $\sigma \in K^2$ için, ya $\alpha \cup [\Delta]$ öz olmayan süzgeçtir ya da $\sigma \not\subseteq [(x, y)]$ olmalıdır. $\sigma \in K^2$ olduğundan, Tanım 1.5.2 gereği $\pi_1\sigma, \pi_2\sigma \in K$ ve ayrıca $x \neq y$ dir. Aşağıdaki şekilde tanımlanan σ_0 ı ele alalım:

$$\sigma = \pi_1^{-1}\alpha \cup \pi_2^{-2}\beta ,$$

Lemma 2.1.4 e göre:

$\sigma_0 \subseteq \sigma$, $\pi_1\sigma_0 = \pi_1\sigma \in K$, $\pi_2\sigma_0 = \pi_2\sigma \in K$ ve yine Tanım 1.5.2 ye göre $\sigma_0 \in K^2$ ve $\sigma_0 \subseteq [(x, y)]$ dir. Varsayım gereği $\pi_1\sigma_0 \cup \pi_2\sigma_0$ öz olmayan süzgeçtir yani $\pi_1\sigma_0$ den bir V_1 ve $\pi_2\sigma_0$ den bir V_2 vardır ki $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ olur.

Böylece,

$$(V_1 \times V_2) \cap \Delta = \emptyset$$

olur. Bu da $\sigma_0 \cup \Delta$ nın öz olmayan süzgeç olduğunu gösterir.

Teorem 2.1.4 e göre bu durumda Δ kuvvetli kapalıdır, dolayısıyla $(A, K) \in CHY_{2sc}$ olur.

Teorem 2.1.17. Bir Cauchy uzayı $(A, K) \in CHY_{0c} \Leftrightarrow (A, K) \in CHY_{ic} (i = 1, 2)$ dir.

İspat: $(A, K) \in CHY_{0c}$ olduğunu ve $x, y \in A$ olmak üzere $x \neq y$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, A nın kapalı bir altkümesi M vardır ve $x \notin M, y \in M$ olup, her $\alpha \in K$ için ya $\alpha \not\subseteq [x]$ ya da $\alpha \cup [M]$ öz olmayan süzgeçtir; veya A nın kapalı bir altkümesi N vardır ve $x \in N, y \notin N$ olup, her $\alpha \in K$ için ya $\alpha \not\subseteq [y]$ ya da $\alpha \cup [N]$ öz olmayan süzgeçtir.

Birinci durumun geçerli olduğunu ve $M = \{y\}$ olduğunu varsayalım. $M = \{y\}$ kapalı olduğundan, Teorem 2.1.4 (2) gereği, $a \notin M$ olan her $a \in A$ ve her $\alpha \in K$ için, ya $\alpha \cup [M]$ öz olmayan süzgeçtir ya da $\alpha \not\subseteq [a]$ olur.

Bundan, Teorem 2.1.8 ve Teorem 2.1.9 a göre $(A, K) \in CHY_{ic} (i = 1, 2)$ olduğu sonucuna ulaşılır.

İkinci durum gerçekleşirse, benzer şekilde $(A, K) \in CHY_{ic} (i = 1, 2)$ olduğu gösterilir.

Tersine, $\{x\}$ ve $\{y\}$ kapalı kümeler olsun. $M = \{y\}$ veya $N = \{x\}$ alalım.

Bu durumda $x \notin M$ ve $y \in M$ ya da $x \in N$ ve $y \notin N$ olur.

Dolayısıyla, Teorem 2.1.7 ye göre $(A, K) \in CHY_{0c}$ elde edilir.

Teorem 2.1.18. [10] (A, K) bir Cauchy uzayı olsun. O halde $(i = 1, 2)$ için

$$(A, K) \in CHY_{ic} \Leftrightarrow (A, K) \in CHY_{isc}$$

sağlanır.

Bu sonuç Teorem 2.1.4 ve Teorem 2.1.12 den elde edilir.

Not 2.1.19. T-CHY, CHY kategorisinin, tüm T nesnelerinden oluşan full (tam) alt kategorisidir.

Burada T , [2] de tanımlanan T_0 (sırasıyla (T_0, T_1, T_2) ayrılma aksiyomlarından birini ifade eder.

Teorem 2.1.20. Bir Cauchy uzayı $(A, K), T_0(T'_0, T_1)$ dir ancak ve ancak her $x \neq y$ için $[x] \cap [y] \notin K$ dir [8].

Teorem 2.1.21 (A, K) Cauchy uzayı $\overline{T_2}$ dir ancak ve ancak her farklı $x, y \in A$ için $[x] \cap [y] \notin K$ dir [8].

Teorem 2.1.22. [10] Aşağıdaki kategoriler birbirine izomorftur:

1. $CHY_{ik}, i = 0, 1, 2, k = c$ veya sc

2. $T-CHY, T = \overline{T_0}, T'_0, T_1, \overline{T_2}$

Sonuç Teorem 2.1.17, 2.1.18, 2.1.12, 2.1.13 den doğrudan çıkar.

NOT 2.1.23 Teorem 2.1.17, 2.1.18, 2.1.12, 2.1.13 den elde edilir ki:

1. Aşağıdaki eşitlik geçerlidir[10].

$$CHY_{2c} = CHY_{2sc} = CHY_{1c} = CHY_{1sc} = CHY_{0c} = CHY_{0sc}$$

2. **Top** için

$$Top_{2c} = Top_{2sc} \subset Top_{1c} = Top_{1sc} \subset Top_{0c} = Top_{0sc}$$

3. **Prord** için

$$Prord_{2c} = Prord_{2sc} \subset Prord_{0c} = Prord_{0sc}$$

$$Prord_{1c} = Prord_{1sc} \subset Prord_{0c} = Prord_{0sc}$$

4. **Born** için

$$Born_{0c} = Born_{1c} = Born_{2c} \subset Born_{0sc} = Born_{1sc} = Born_{2sc}$$

5. **FCO** için:

$$FCO_{2sc} \subset FCO_{2c} = FCO_{1sc} = FCO_{1c} \subset FCO_{0sc} = FCO_{0c}$$

6. ConFCO için

$$ConFCO_{2c} = ConFCO_{2sc} \subset ConFCO_{1c} = ConFCO_{1sc} \subset ConFCO_{0c} = ConFCO_{0sc}$$

7. pqsMet için

$$pqsMet_{1sc} = pqsMet_{2sc} \subset pqsMet_{1c} = pqsMet_{2c} \text{ ve } pqsMet_{0sc} \subset pqsMet_{0c}$$

8. SUConv için

$$SUConv_{1c} = SUConv_{1sc} = SUConv_{0c}$$

9. CApp için

$$CApp_{2sc} \subset CApp_{1sc} \subset CApp_{0sc}$$

$$CApp_{2c} \subset CApp_{1c} \subset CApp_{0c}$$

10. RRel ve PBorn için

$$RRel_{2c} = RRel_{2sc} = RRel_{1sc} \subset RRel_{1c}$$

$$PBorn_{0c} = PBorn_{1c} = PBorn_{2c} \subset PBorn_{0sc} = PBorn_{1sc} = PBorn_{2sc}$$

3. BÖLÜM

İNDİRGENEMEZ CAUCHY UZAYLARI

3.1. İndirgenemez Cauchy Uzayları

Tanım 3.1.1 [17] $U: E \rightarrow Set$ topolojik bir fanktör ve X, E' de bir nesne olsun.

1. X in kapalı alt nesneleri A ve B için $X = A \cup B$ olduğunda $A = X$ ya da $B = X$ oluyorsa X indirgenemez (irreducible) olarak tanımlanır.
2. A ve B X in kuvvetli kapalı (strongly closed) alt nesneleri olmak üzere $X = A \cup B$ olduğunda $A = X$ veya $B = X$ oluyorsa X kuvvetli indirgenemez (strongly irreducible) olarak adlandırılır.

İndirgenemezlik kavramı cebirsel geometri açısından önemli bir rol oynar. Örneğin klasik cebirsel geometrinin temel bir teoremine göre, her cebirsel küme, sonlu sayıda indirgenemez bileşenin birleşimi olarak yalnızca bir şekilde ifade edilebilir. Ayrıca, Zariski topolojileri indirgenemezdir.

Top kategorisinde, indirgenemezlik kavramı klasik indirgenemezlik kavramı ile örtüşmektedir [17].

Ayrıca, eğer (X, τ) bir topolojik uzay olup indirgenemezse, o zaman bu uzay bağlantılıdır. Ve eğer (X, τ) T_1 ayırdedici aksiyomuna sahipse, o zaman indirgenemezlik ile kuvvetli indirgenemezlik kavramları çakışır. [17] Buna ek olarak, eğer (X, τ) boş olmayan, indirgenemez ve T_2 bir uzaysa, o zaman bu uzay yalnızca bir noktadan oluşan bir uzay olmalıdır [17].

Teorem 3.1.2. Bir Cauchy uzayı (A, K) (kuvvetli) indirgenemezdir ancak ve ancak A nın her boş olmayan öz altkümresi F (yani ne boş ne de tüm A olan) için aşağıdaki koşullardan en az biri sağlanıyor olmasıdır.

1. K içinde; $\alpha \cup [F]$ öz süzgeç ve $\alpha \subseteq [a]$ olacak şekilde en az bir öz süzgeç α ve en az bir $a \in F^c$ vardır.
2. K içinde; $\alpha \cup [F^c]$ öz süzgeçtir ve $\alpha \subseteq [b]$ olacak şekilde en az bir öz süzgeç α ve en az bir $b \in F$ vardır.

İspat: Varsayalım ki (A, K) kuvvetli indirgenemezdir ancak A nın öz altkümresi F için yukarıdaki koşullardan hiçbirini sağlamıyor olsun.

Koşul (1) in sağlanmadığını kabul edersek, $F \subset A$ ve $\alpha \in F$ için her $\alpha \in K$ süzgeci ya $\alpha \cup [F]$ öz olmayan süzgeçtir ya da $\alpha \subseteq [a]$ değildir. Bu da F nin kuvvetli kapalı olduğunu gösterir.

Benzer şekilde koşul (2) nin sağlanmadığını kabul edersek, F^c kuvvetli kapalı olur. Böylece $X = F \cup F^c$ olur ancak $X = F$ ya da $X = F^c$ değildir. Bu, (A, K) nın kuvvetli indirgenemez olduğu varsayımıyla çelişir.

Tersine, (1) koşulunun sağlandığını varsayalım. O hâlde, Teorem 2.1.4 (2) gereğince F (kuvvetli) kapalı değildir. Benzer şekilde, (2) koşulunun sağlandığını varsayalım. Bu durumda F^c (kuvvetli) kapalı değildir. Dolayısıyla, X in hem (kuvvetli) açık hem de (kuvvetli) kapalı olan tek alt kümeleri $\emptyset$ ve X tir. Buradan, A ve B , X in kapalı alt kümeleri olup $X = A \cup B$ eşitliği sağlarsa, ya $A = X$ ya da $B = X$ olduğu sonucu çıkar. Böylece, (A, K) (kuvvetli) indirgenemezdir.

Teorem 3.1.3. Bir Cauchy uzayı (A, K) indirgenemezdir ancak ve ancak (A, K) kuvvetli indirgenemezdir.

İspat: teorem 2.1.4(2) ve Tanım 3.1.1den elde edilir.

Örnek 3.1.4

$A = R$ reel sayılar kümesi,

$$K_1 = F(A),$$

$$K_2 = \{[a] \mid a \in A\} \cup \{[\emptyset]\} \text{ olsun.}$$

Bu durumda (A, K_1) (kuvvetli) indirgenemezdir, ancak (A, K_2) (kuvvetli) indirgenemez değildir. Çünkü Teorem 3.1.2 de verilen iki koşul da $F = \{5\}$ için sağlanmamaktadır.

Teorem 3.1.5. $(A, K) \in CHY$ bir Cauchy uzayı olsun.

(A, K) nın $PreT'_2$ olması için gerek ve yeter şart A da ki her bir farklı x ve y noktaları için $[x] \cap [y] \in K$ (denk olarak A nın her bir sonlu alt kümesi F için $[F] \in K$) olmasıdır [8].

Teorem 3.1.6. $(A, K) \in CHY$ bir Cauchy uzayı olsun.

(A, K) nın T'_2 olması için gerek ve yeter şart A da ki her bir farklı x ve y noktaları için $[x] \cap [y] \in K$ (denk olarak A nın herhangi bir sonlu alt kümesi için $[F] \in K$) olmasıdır [8].

Teorem 3.1.7. (A, K) Cauchy uzayının (kuvvetli) indirgenemez olması için gerek ve yeter şart (A, K) nın (kuvvetli) bağlantılı olmasıdır.

İspat. Teorem 3.1.2, 3.1.3 ve [8] deki Teorem 3.6 dan elde edilir.

Teorem 3.1.8. (A, K) boştan farklı (kuvvetli) indirgenemez Cauchy uzayı olsun.

1. $(A, K) \in CHYi_k$ ve $i = 0, 1, 2, k = c$ veya sc için (A, K) tek noktalı bir uzay olmalıdır.
2. Eğer $(A, K) \bar{T}_0$ (veya $T_0, T_1, \bar{T}_2$) ise, bu taktirde (A, K) tek noktalı bir uzay olmalıdır.
3. Eğer $(A, K) PreT'_2$ veya T'_2 ise bu taktirde (A, K) tek noktalı bir uzay olmak zorunda değildir.

İspat: 1. Kabul edelim ki (A, K) boştan farklı, (kuvvetli) indirgenebilir ve $(A, K) \in CHYi_k$ ve $i = 0, 1, 2, k = c$ veya sc ve A da en az iki noktalı x ve y içeren bir küme bulunsun. Teorem 2.1.17, 2.1.18 ve açıklama 2.1.6, 2.1.7 e göre, A nın tüm alt kümeleri (kuvvetli) kapalıdır. Bu durumda $\{x\}$ ve $\{y\}$ hem öz hem de (kuvvetli) kapalıdır ve $A = \{x\} \cup \{x\}^c$ olur. Bu, (A, K) nin (kuvvetli) indirgenemez olmasıyla çelişir.

2. (1) in ispatı ile benzer şekilde yapılır, yalnızca Teorem 2.1.12, 2.1.13, 2.1.14 ve Açıklama 2.1.6, 2.1.7 kullanılır.

3. Teorem 3.1.3 ve Örnek 3.1.4 den bir Cauchy uzayı $PreT'_2$ ve T'_2 olsun. Örnek 3.1.1 de tanımlanan (A, K_1) Cauchy uzayı, (kuvvetli) indirgenebilir ve $PreT'_2$ ya da T'_2 dir, ancak tek noktalı bir uzay değildir.

3.2. Tanımsal Açıklamalar ve Kategori İlişkileri

IR $\mathcal{E}$: $\mathcal{E}$ kategorisindeki tüm indirgenemez nesnelerden oluşan full (tam) alt kategoridir.

$T \in \mathcal{E}$ kategorisinde T aksiyomlarını sağlayan tüm nesnelerden oluşan full (tam) altkategoridir. Burada $T_0, \bar{T}_0, T'_0, T_1, \bar{T}_2, T'_2$ olarak alınır.

Açıklama 3.2.1

1. Teorem 3.1.6 ya göre $i = 1, 2$ ve $k = c$ veya sc için:

$$IRCHYi_k = \bar{T}_0IRCHY = T_1IRCHY = \bar{T}_2IRCHY = T'_2IRCHY \subset T'_0IRCHY.$$

2. Topolojik uzaylar kategorisi için [6] daki Açıklama 3.5 ve Teorem 2.1.14 e göre:

$$T_2IRTop = IRTop_{2cl} = IRTop_{2scl} \subset T_2Top \cap IRTop \subset T_0Top.$$

3. PBorn da [10] daki Teorem 3.6, 3.9 ve [7] deki Teorem 3.7 ye göre, $i = 1, 2$ için:

$$PBorn_{icl} = T_0PBorn = T'_2PBorn \subset \bar{T}_2PBorn \subset IR PBorn = \bar{T}_0PBorn = T'_0PBorn = T_1PBorn = PBorn_{iscl}.$$

4. CP de [5] ve [18] daki Teorem 3.7, 3.10 a göre, $i = 0, 1, 2$ için:

$$T_0CP = IRCP \subset \bar{T}_0CP = T'_0CP = T_1CP = \bar{T}_2CP = T'_2CP = CP_{icl}.$$

5. $RRel$ de [18] daki Teorem 3.8, 3.11 ve [5] deki Teorem 3.7 ye göre, $i = 1, 2$ için:

$$IRRRel_{iscl} = T_1IRRel = T_2IRRel = T'_2IRRRel \subset T_0RRel \subset T_0RRel = RRel_{icl} \subset T'_0RRel$$

6. $PqsMet$ de [5] ve [17] deki Teorem 3.10 a göre, $i = 1, 2$ için:

$$IRpqsMet_{iscl} = T_1IRpqsMet = T_2IRpqsMet = T'_2IRpqsMet \subset T'_0IRpqsMet.$$

7. $Prox$ de [19] teki Teorem 4.7 ve Açıklama 4.8 e göre, $k = c$ veya sc :

$$IRProx_{ik} = T_0IRProx = T_1IRProx = T_2IRProx = T'_2IRProx \subset T'_0IRProx.$$

4. BÖLÜM

URYSOHN LEMMASI VE TİETZE GENİŞLEME TEOREMİ

4.1. Cauchy Uzayları İçin Urysohn Lemması ve Tietze Genişleme Teoremi

Bu bölümde Cauchy uzayları için Urysohn Lemması ve Tietze Genişleme Teoremini vereceğiz.

Teorem 4.1. (Urysohn Lemması) (A, K) Cauchy uzayı ve $M, N \subset A$, A nın boştan farklı, ayrık, kapalı alt kümeleri olsun. Bu taktirde en az bir,

$$f: (A, K) \rightarrow ([0,1], L)$$

şeklinde bir Cauchy dönüşümü vardır; burada $L, [0,1]$ üzerinde tanımlı herhangi bir Cauchy yapısıdır ve

$$f(M) = 0, f(N) = 1$$

sağlanır [10].

İspat: Kabul edelim ki $f: (A, K) \rightarrow ([0,1], L)$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in M \\ 1, & x \notin M \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

Buna göre, $f(M) = 0, f(N) = 1$ olur. Şimdi f nin bir Cauchy dönüşümü olduğunu gösterelim.

- $\alpha \in K$ olsun. α öz olmayan süzgeç ise, $f(\alpha)$ de öz olmayan süzgeçtir.
- Kabul edelim ki α öz süzgeç olsun. $M \subset A$ kapalı olduğu için, Teorem 2.1.4 e göre $x \notin M$ olmak üzere $x \in A$ ve $a \in K$ için ya $\alpha \cup [M]$ öz olmayan süzgeçtir ya da $\alpha \not\subset [x]$ olur.

Şu iki durumdan biri geçerlidir:

1. $\alpha \cup [M]$ öz olmayan süzgeç ise bu taktirde $\exists V \in \alpha$ öyle ki $V \cap M = \emptyset$ olur. Bu durumda $f(\alpha) = [1] \in L$ çünkü $V \subset M^c \Rightarrow f(V) = \{1\} \in f(\alpha)$.
2. Eğer $\alpha \not\subset [x]$ ($x \notin M$ ve $x \in A$) olsun. Bu taktirde $f(\alpha) \not\subset [f(x)] = [1]$ buradan $f(\alpha) \subset [0]$ ve $f(\alpha) \cup [[0,1]] \subseteq [0] \cup [[0,1]] = [0]$. Buradan $f(\alpha) \cup [[0,1]] \in L$ öz süzgeçtir. L $[0,1]$ üzerinde Cauchy yapısı olduğundan, $f(\alpha) \cap [[0,1]] \in L$ dir bu da $f(\alpha) \in L$ demektir.

Sonuç olarak f Cauchy dönüşümüdür.

Teorem 4.2. (A, K) yı $\bar{T}_0$ (veya T_0, T_1, T_2) Cauchy uzayı ve $M, N \subset A$ ayrık, boş olmayan alt kümeler olsun. Bu taktirde,

$$f(M) = \{0\}, f(N) = \{1\}$$

olacak şekilde en az bir

$$f: (A, K) \rightarrow ([0,1], L)$$

şeklinde bir Cauchy dönüşümü vardır ve burada $L, [0,1]$ üzerinde tanımlı herhangi bir Cauchy yapısıdır [10].

İspat. Teorem 4.1 in ispatına benzer şekilde yapılır; ayrıca Teorem 2.1.4, 2.1.12, 2.1.13 kullanılır.

Tanım 4.3. (Cauchy Genişlemesi) (A, K) ve (B, L) Cauchy dönüşümleri, $M \subset A$ ve

$g: (M, K_M) \rightarrow (B, L)$ Cauchy dönüşümü olsun; burada $K_M, i: M \rightarrow (A, K)$ şeklinde ki içine dönüşümler tarafından üretilmiş başlangıç (initial) Cauchy yapısı olsun.

$f: (A, K) \rightarrow (B, L)$ ye tüm $x \in M$ için $g(x) = f(x)$ olacak şekilde en az bir $f: (A, K) \rightarrow (B, L)$ ye Cauchy dönüşümü mevcutsa bu taktirde f e g nin **Cauchy genişlemesi** denir [10].

Teorem 4.4. (Tietze Genişleme Teoremi) (A, K) bir Cauchy uzayı ve $M \subset A$ boştan farklı kapalı bir altkümesi olsun. Bu taktirde $f: (M, K_M) \rightarrow ([0,1], L)$ ye her bir Cauchy dönüşümü $L, [0,1]$ üzerindeki herhangi bir Cauchy yapısı ve K_M, M üzerinde bir başlangıç Cauchy yapısı olmak üzere;

$$g: (A, K) \rightarrow ([0,1], L)$$

Cauchy genişleme dönüşümü tarafından üretilmiş olur [10].

İspat. Kabul edelim ki (A, K) Cauchy uzayı, $M \subset A$ boştan farklı kapalı bir alt kümesi olsun.

Bu taktirde $f: (M, K_M) \rightarrow ([0,1], L)$ ye her bir Cauchy dönüşümü ve K_M de M üzerinde bir başlangıç Cauchy yapısı olmak üzere $i: M \rightarrow (A, K)$ şeklinde ki içine dönüşümler tarafından üretilmiş olan başlangıç Cauchy yapısı olsun.

$g: (A, K) \rightarrow ([0,1], L)$ dönüşümü, tüm $x \in M$ için $g(x) = f(x)$

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in M \\ 0, & x \notin M \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

- $\alpha \in K$ bir süzgeç olsun. Eğer öz olmayan süzgeç ise, $g(\alpha)$ da öz olmayan süzgeçtir. Eğer öz süzgeç ise ve $x \in A$ dır.
- M kapalı olduğu için, ya $\alpha \cup [M]$ öz olmayan süzgeçtir ya da $\alpha \not\subset [x]$ olur.

Şu iki durum incelenir:

1. $\alpha \cup [M]$ öz olmayan süzgeç ise: $\exists V \in \alpha$ öyle ki $V \cap M = \emptyset$ olur. Bu durumda $g(V) = \{0\}$ dolayısıyla $g(\alpha) = [0] \in L$ olur.
 2. $\alpha \not\subset [x]$: $\exists U \in \alpha$ öyle ki $x \in U$. O hâlde $U \cup M \in \alpha$ olur.
- $g(U \cup M) = \{0\} \cup f(M) \subset [f(x)] \cap [0] \Rightarrow g(\alpha) \subset [0] \cap [f(x)] \in L$ dir.

L bir Cauchy yapısı olduğundan g dönüşümü de bir Cauchy dönüşümüdür.

Teorem 4.5. (A, K) bir $\overline{T_0}$ Cauchy uzayı ve $M \subset A$ boştan farklı A nın bir alt uzayı olsun. Bu taktirde $f: (M, K_M) \rightarrow ([0,1], L)$ ye her Cauchy dönüşümü ki burada $L, [0,1]$ üzerindeki herhangi bir Cauchy yapısı ve K_M, M üzerinde üretilmiş bir başlangıç Cauchy yapısı olmak üzere

$$g: (A, K) \rightarrow ([0,1], L)$$

bir Cauchy genişletilmiş dönüşümüne sahiptir [10].

İspat.

Teorem 4.4 ün ispatına benzerdir. Ek olarak Teorem 2.1.4, 2.1.12 ve 2.1.13 kullanılır.

5. BÖLÜM

SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

5.1. Sonuç ve Değerlendirme

Bu çalışmada, Cauchy uzayları kategorisi bağlamında iki farklı kapanış operatörü tanımlanmıştır. Söz konusu operatörler, (zayıf anlamda) kalıtsal olma, üretkenlik (productivity) ve idempotentlik gibi önemli yapısal özellikleri sağlamaktadır. Bu kapanış kavramları aracılığıyla, her bir T_i ayrıklık aksiyomuna ($i = 0, 1, 2$) sahip Cauchy uzayları ayrı ayrı incelenmiş; bu uzaylar, söz konusu kapanış operatörleri kullanılarak karakterize edilmiştir. Ayrıca, bu ayrıklık sınıflarının oluşturduğu alt kategorilerin birbirleriyle izomorfik olduğu da gösterilmiştir. Bu sonuç, farklı ayrıklık düzeylerine sahip Cauchy uzaylarının, uygun kapanış operatörleri perspektifinden yapısal olarak denk olduğunu ortaya koymaktadır.

Çalışmada bununla birlikte, indirgenemez (irreducible) Cauchy uzayları özel olarak ele alınmış, bu uzayların yapısal özellikleri belirlenmiş ve bağlantılılık (connectedness) kavramıyla olan ilişkileri ayrıntılı biçimde incelenmiştir. Bu bağlamda, indirgenemezliğin bağlantılılıkla koşutluk gösterdiği durumlar ortaya konmuş ve bu kavramların birbirine dönüştürülebilirliği analiz edilmiştir.

Elde edilen teorik bulgular, yalnızca Cauchy uzaylarıyla sınırlı kalmamış, aynı zamanda farklı topolojik kategorilerdeki kapanış operatörleri ve ayrıklık aksiyomları ile karşılaştırmalı olarak değerlendirilmiştir. Bu karşılaştırmalar, önerilen yaklaşımın kategorik topoloji çerçevesinde evrensel bir bakış açısına katkı sunduğunu göstermektedir.

Son olarak, klasik topolojinin temel taşlarından olan Urysohn Lemmaları ile Tietze Uzantı Teoremi, ilk kez Cauchy uzayları bağlamında sunulmuş ve bu uzaylar üzerinde

sürekli fonksiyonların genişletilebilmesi gibi önemli yapıların varlığı ispatlanmıştır. Bu sonuçlar, Cauchy uzaylarının yalnızca soyut teorik yapılar değil, aynı zamanda analize ve fonksiyonel genişletmelere elverişli yapılar olduğunu göstermektedir.

Gelecek çalışmalar için öneriler

İlerleyen araştırmalarda, aşağıdaki özel tür Cauchy uzaylarının da tanımlanması ve karakterizasyonu amaçlanmaktadır:

- Kalıtsal olarak ayırık (hereditarily disconnected) uzaylar,
- Tamamen ayırık (totally disconnected) uzaylar,
- Sober (ayırt edilebilir temsilcisi olan) Cauchy uzayları.

Bu tür çalışmalar, Cauchy uzayları kuramını daha da derinleştirecek ve genel topolojiyle olan ilişkisini daha güçlü biçimde ortaya koyacaktır.

KAYNAKLAR

1. Keller, H. H. 1968. Die limes-uniformisierbarkeit der limesräume. **Mathematische Annalen**, **176** (4): 334-341.
2. Baran, M., 1992. Separation properties. **Indian Journal of Pure & Applied Mathematics**, **23** (5): 333-341.
3. Baran, M. 1993. The notion of closedness in topological categories. **Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae**, **34** (2): 383-395.
4. Baran, M., 2002. Compactness, perfectness, separation, minimality and closedness with respect to closure operators. **Applied Categorical Structures**, **10**(4): 403-415.
5. Baran, M., 2023. Separation, connectedness, and disconnectedness. **Turkish Journal of Mathematics**, **47**(1): 279-295.
6. Baran, T. M., Erciyes, A. 2021. T_4 Urysohn lemma, and Tietze extension theorem for constant filter convergence spaces. **Turkish Journal of Mathematics**, **45**(2): 843-855.
7. Baran, T. M., Kula, M., 2022. Separation axioms, Urysohn lemma and Tietze extension theorem for extended pseudo-quasi-semi metric spaces. **Filomat**, **36** (2): 703-713.
8. Kula, M., 2011. A note on Cauchy spaces. **Acta Mathematica Hungarica**, **133**(1-2): 14-32.
9. Kula, M., 2012. Separation properties at p for the topological category of Cauchy Spaces. **Acta Mathematica Hungarica**, **136** (1-2): 1-15.
10. Kula, S. M., 2023. Separation, irreducibility, Urysohn lemma and Tietze extension theorem for Cauchy spaces. **Filomat**, **37** (19): 6417-6426.
11. Mucuk O., 2023. Topoloji ve Kategori Teorisi (Geliştirilmiş 3. Basım). Ankara: Nobel Basım Yayın Dağıtım, 588 s.
12. Lowen-Colebunders, E., 1989. Function Classes of Cauchy Continuous Maps. New York: M. Dekker, 390 p.

13. Preuss, G., 1991. Improvement of Cauchy spaces. **Q and A in General Topology**, **9**: 159-166.
14. Rath, N., 1994. Precauchy Spaces. Washington State University, Ph. D. Thesis, Washington, 126 p.
15. Baran, M., Stacks and filters, *Turkish J. of Math.*-Doğa **16**(1992).95-108.
16. Baran, M., 2000. Closure operators in convergence spaces. **Acta Mathematica Hungarica**, **87** (1-2): 33-45.
17. Baran, T. M. 2020. Closedness, separation and connectedness in pseudo-quasi-semi metric spaces. **Filomat**, **34** (14): 4757-4766.
18. Baran, M., Abughalwa, H., 2022. Sober spaces. **Turkish Journal of Mathematics**, **46** (1): 299-310.
19. Özkan, S., Kula, M., Kula, S., Baran, T. M., 2023. Closure operators, irreducibility, Urysohn lemma, and Tietze extension theorem for proximity spaces. **Turkish Journal of Mathematics**, **47** (2): 870-882.
20. Cartan, H., 1937. Filtres et ultrafiltres. **CR acad. Paris**, **205**: 777-779.
21. Cartan, H., 1937. The orie des filtres. **CR acad. paris**, **205**: 595-598.
22. Bourbaki, N., 1940. Topologie generale. Chapitre 1 et 2. Actualites Sci. Ind., 858 s.
23. Kowalsky, H. J., 1964. Topologische Raume. Basel-Stuttgart New York.
24. Baran, M., 1990. Seperation Properties in Topological Categories. Unpublished Ph.D. Thesis, Mathematica Balkanica.
25. Mucuk, O., 2010. Topoloji ve Kategori. Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.
26. Baran, M., 1992. Stacks and filters. **Turkish J. of Math.-Doga**, **16**: 95-108.
27. Preuss, G., 2002. Foundations of topology. An approach to Convenient Topology, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
28. Baran, M., 1996. T_2 Objects in Categories of Filter and Local Filter Convergence Spaces. **Turkish Journal of Mathematics**, **20** (2): 159-168.
29. Koçak, M., 2009. Genel Topolojiye Giriş, Eskişehir, 534 s.

30. Kula, M., 2016. T3 and T4-Objects at p in the Category of Cauchy Spaces. **Mathematical Sciences and Applications E-Notes**, 4(1): 6-14.
31. Clementino, M. M., Giuli, E., Tholen, W. 2004. A functional approach to general topology. **Encyclopedia of Mathematics and its Applications**: 103-164.
32. Giuli, E., Dikranjan, D., 1987. Closure operators I. **Topology Appl**, 27: 129-143.
33. Dikranjan, D., Tholen, W. 1995. Categorical structure of closure operators. With applications to topology, algebra and discrete mathematics, **Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht**.
34. Baran, M., 2024. Topoloji, Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı: Nihal POLATDEMİR

Uyruğu: Türkiye (T.C)

Doğum Tarihi ve Yeri:

EĞİTİM

Derece	Kurum	
Lisans	ERCIYES Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü	
Ortaöğretim	Mustafa Eminoglu Anadolu Lisesi, Merkez / KAYSERİ	

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görev
2015	Kavram kurs merkezi	Öğretmen
2020-2023	Açı Eğitim Kurumları (Ankara)	
2023-halen	Limit Eğitim Kurumları (Kayseri)	

YABANCI DİL

İNGİLİZCE

SERTİFİKALAR

TOKYO 9. ULUSLARARASI YENİLİKÇİ ÇALIŞMALAR VE MODERN
BİLİMSEL ARAŞTIRMALAR KONGRESİ
(THE NOTIONS OF CLOSURE OPERATORS IN THE TOPOLOGICAL
CATEGORY OF CAUCHY SPACES)