ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

FERMI-WALKER TÜREVİ VE GEOMETRİK UYGULAMALARI

Fatma KARAKUŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2012

ÖZET

Doktora Tezi

FERMI-WALKER TÜREVİ VE GEOMETRİK UYGULAMALARI

Fatma KARAKUŞ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Yusuf YAYLI

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde temel tanım ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde Frenet çatısı, Darboux çatısı ve Bishop çatısına göre Fermi-Walker türevi incelenmiştir.

Dördüncü bölümde Lie grupları üzerinde Fermi-Walker türevi ifade edilmiştir.

Beşinci bölümde hiperyüzeyler üzerinde Fermi türevi incelenmiş ve genellemeler yapılmıştır.

2012, 62 sayfa

Anahtar Kelimeler : Fermi-Walker türevi, Non-rotating çatı, Lie grubu, Hiperyüzey, Bishop çatısı, Fermi türevi

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

FERMI-WALKER DERIVATIVE AND GEOMETRIC APPLICATIONS

Fatma KARAKUŞ

Ankara University
Graduate School of Natural And Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

The second chapter, definitions which are needed in the further chapters are given.

In the third chapter, the Fermi-Walker derivative is expressed according to Frenet frame, Darboux frame and Bishop frame.

In the fourth chapter, the Fermi-Walker derivative is expressed on Lie groups.

In the fifth chapter, the Fermi derivative is examined on the hypersurfaces and generalized for n dimensional space.

November 2012, 62 pages

Key Words: Fermi-Walker derivative, Non-rotating frame, Lie group, Hypersurface, Bishop frame, Fermi derivative

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans ve doktora çalışmalarımın her aşamasında benden yardım ve bilgilerini esirgemeyen, bugüne ulaşmamdaki en önemli destekçim, değerli hocam Sayın Prof. Dr. H.Hilmi HACISALİHOĞLU 'na (Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi) en derin saygılarımla teşekkürlerimi sunarım.

Bana bu çalışmayı vererek çalışmam boyunca sorduğum her soruyu sabırla cevaplayan hocam Sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI 'ya (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi) teşekkürlerimi sunarım.

Her daim yanımda olan, beni destekleyen, bugünlere gelmemdeki emeklerini hiçbir zaman ödeyemeyeceğim canım aileme sonsuz teşekkürler. İyi ki varsınız.

Doktora çalışmamı maddi olarak destekleyen TÜBİTAK' a teşekkürlerimi sunarım.

Fatma KARAKUŞ

Ankara, Kasım 2012

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

E^n	n-boyutlu Öklid uzayı
α	E^n uzayında birim hızlı eğri
$\kappa(s)$	$\alpha(s)$ eğrisinin s-noktasındaki eğriliği
$\tau(s)$	$\alpha(s)$ eğrisinin s-noktasındaki burulması
G	Lie grubu
∇	Levi-Civita koneksiyonu
$\widetilde{\nabla}_T X$	Fermi-Walker türevi
$\frac{\delta X}{\delta s}$	Fermi türevi
w^*	Fermi-Walker anlamında Darboux vektörü

1. GİRİŞ

Bu çalışmada Fermi-Walker türevi ele alınarak, bu türevin diferensiyel geometri açısından uygulamalarını araştırdık. Bunun için önce Öklid uzayında, daha sonra da herhangi bir yüzey üzerinde bir eğri ele alıp bu eğri boyunca Fermi-Walker türevini ve bu türeve göre, Fermi-Walker parelel olmayı inceledik. Daha sonra, Fermi türevine göre bu eğrinin Frenet çatısının değişimini elde ettik. Bu çatı için Darboux vektörünün geometrik yorumunu vermeye çalışıp benzer işlemleri yüzey üzerindeki çatılar için tekrar ettik.

Paralel vektör alanlarının diferensiyel geometride önemli uygulamaları vardır.∇, E^n in koneksiyonu ve T, α eğrisinin teğeti olmak üzere T,nin α boyunca paralel olması $\nabla_T T = 0$ demektir. Bu bize E^n de geodezik olmayı veriyor. Benzer şekilde $\overline{\nabla}$yüzeyinin koneksiyonu T, α boyunca M de paralel ise $\overline{\nabla}_T T = 0$ sağlanır. Bu bize M de yani yüzey üzerinde geodezik olmayı verir.

E^n nin bütün doğruları geodeziklerdir. Acaba E^n de bütün eğriler geodezik olur mu? Bunun cevabı Fermi türevi ile elde edilen koneksiyonda saklıdır.Gerçekten α, E^nde bir eğri olmak üzere ve $\widetilde{\nabla}$ de Fermi türevi ise $\widetilde{\nabla}_T T = 0$ çözümü E^n de bütün eğriler için sağlanıyor. Yani bir cins eğriler ile doğrular aynı anlamda oluyor.

Fermi- Walker türevi ve geometrik uygulamalarının verdiğimiz bu tez, diferensiyel geometride bildiğimiz birçok kavramın yeniden bu türeve göre tanımlanması ile geometriye sağlayacağı yararlar bakımından önemlidir. Fermi-Walker paralel vektör alanlarının hareketlerde önemli bir uygulaması vardır. Örneğin Bishop çatısı Fermi-Walker paralel çatıdır. Hareketlerin modellenmesinde Frenet çatısı yerine Fermi- Walker paralel çatı kullanılır.

Son zamanlarda bu türevin fiziksel uygulamaları da çok çalışılan konulardandır. Bu bakımdan bu tez fizikte ve matematikte uygulamaları olduğundan bu konuda çalışanlar için önemli bir kaynak olacaktır.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan temel tanımlar ve kavramlar açıklanmıştır. Diğer bölümlerde kullanılan kavramlarla ilgili bazı teorem ve önermeler verilmiştir.

2.1 n-Boyutlu Öklid Uzayı

Tanım 2.1.1. A boş olmayan bir cümle ve bir K cismi üzerindeki vektör uzayı V olsun. Aşağıda verilen önermeleri doğrulayan bir

$$f : A \times A \longrightarrow V$$

fonksiyonu varsa, A ya V ile birleşen **Afin Uzay** denir.

(i) $\forall P, Q, R \in A$ için

$$f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

(ii) $\forall P \in A$ ve $\alpha \in V$ için

$$f(P, Q) = \alpha$$

olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.2. Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen bir vektör uzayı da V olsun. V vektör uzayında, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ olmak üzere,

$$\begin{array}{ccc} \langle , \rangle & : & V \times V \longrightarrow IR \\ (x, y) & \longrightarrow & \langle x, y \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \end{array}$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlanırsa, A afin uzayına **Öklid Uzayı** denir ve E^n ile gösterilir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.3. n-boyutlu Öklid uzayı E^n ve I, IR nin irtibatlı açık alt cümlesi olmak üzere,

$$\alpha : I \subset R \longrightarrow E^n$$

dönüşümü diferensiyellenebilir ise $\alpha(I)$ cümlesine E^n de bir **eğri** ve $t \in I$ değişkenine de **eğrinin parametresi** denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.4. M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Eğer $\forall s \in I$ için

$$\left\| \alpha^{'}(s) \right\| = 1$$

ise M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğuna göre **birim hızlı eğri**, denir. Bu durumda eğrinin $s \in I$ parametresine **yay parametresi** denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.5. M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Bu durumda $\psi = \left\{\alpha^{'}, \alpha^{''}, ..., \alpha^{(r)}\right\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}, k > r$ için $\alpha^{(k)} \in Sp\{\psi\}$ olmak üzere ψ den elde edilen $\{V_1, ..., V_r\}$ ortonormal sistemine, M eğrisinin **Frenet r-ayaklı alanı** ve $m \in M$ için $\{V_1(m), ..., V_r(m)\}$ ye ise $m \in M$ noktasındaki **Frenet r-ayaklısı** denir. Her bir $V_i, 1 \leq i \leq r$ ye **Frenet vektörü** denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.6. $\alpha : I \subset IR \longrightarrow E^3$ eğrisi, $t \in I$ için eğrinin teğet vektör alanı

$$T(t) = \frac{1}{\|\alpha^{'}(t)\|}\alpha^{'}(t)$$

eğrinin asli normal vektör alanı

$$N(t) = \frac{\alpha^{''}(t)}{\|\alpha^{''}(t)\|}$$

ve eğrinin binormal vektör alanı

$$B(t) = \frac{\alpha^{'}(t) \wedge \alpha^{''}(t)}{\|\alpha^{'}(t) \wedge \alpha^{''}(t)\|}$$

olmak üzere bu vektörlerden oluşan $\{T, N, B\}$ sistemine **Frenet 3-ayaklısı** denir. $\{T, N, B\}$ Frenet 3-ayaklısı ortonormal bir çatıdır (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.7. M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), ..., V_r(s)\}$ olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} k_i &: \quad I \longrightarrow IR, 1 \leq i \leq r \\ s &\longrightarrow \quad k_i(s) = \left\langle V_i^{'}(s), V_{i+1}(s) \right\rangle \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin **i-yinci eğrilik fonksiyonu** ve $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasında M nin **i-yinci eğriliği** denir (Hacısalihoğlu 2000).

Teorem 2.1.1. $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere, $\alpha(s)$ noktasındaki i-yinci eğrilik $k_i(s)$ ve Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), ..., V_r(s)\}$ ise

$$\begin{aligned} V_1^{'}(s) &= k_i(s).V_2(s) \\ V_i^{'}(s) &= -k_{i-1}(s).V_{i-1}(s) + k_i(s).V_{i+1}(s), 1 < i < r \\ V_r^{'}(s) &= -k_{r-1}(s).V_{r-1}(s) \end{aligned}$$

olur (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.8. $\alpha : I \subset IR \longrightarrow E^3$

$$s \longrightarrow \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$$

s yay parametresi ile verilen bir eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3- ayaklısı $\{T, N, B\}$ olsun.

$$\begin{aligned} T^{'}(s) &= k_1(s).N(s) \\ N^{'}(s) &= -k_1(s).T(s) + k_2(s).B(s) \\ B^{'}(s) &= -k_2(s)N(s) \end{aligned}$$

denklemlerine **Frenet formülleri** denir (Hacısalihoğlu 2000). Burada $k_1 = \kappa, k_2 = \tau$ alınabilir.

Tanım 2.1.9. $\alpha : I \subset IR \longrightarrow E^3$ eğrisi için

$$\kappa(s) = k_1(s) = \left\| \alpha^{''}(s) \right\|$$

değerine $\alpha\,(s)$ eğrisinin **s−noktasındaki eğriliği** denir (Carmo ve Monfedo 1976).

Tanım 2.1.10. $\alpha : I \subset IR \longrightarrow E^3$ eğrisi yay parametresi ile verilmiş olsun. $\alpha^{''}(s) \neq 0$ olmak üzere

$$B^{'}(s) = \tau\,(s)\,.N(s)$$

eşitliği ile tanımlı $\tau\,(s)$ sayısına $\alpha\,(s)$ eğrisinin $s-$**noktasındaki burulması** denir. $k_2\,(s) = \tau\,(s)$ burulması, eğrinin düzlemden ne kadar saptığını ölçer (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.11. M, E^n Öklid uzayında bir hiperyüzey ve $\alpha : I \subset IR \longrightarrow M$ regüler bir eğri olsun. Her $t \in I$ için $\alpha^{'}\,(t)$ hız vektörü, $\alpha\,(t)$ noktasında M hiperyüzeyinin bir eğrilik vektörü ise α eğrisine, M hiperyüzeyi üzerinde bir **eğrilik çizgisi** denir (Sabuncuoğlu 2006).

Tanım 2.1.12. E^n Öklid uzayında yay parametresi ile verilen $\alpha\,(s)$ eğrisinin $s-$noktasındaki burulması $\tau\,(s) = 0$ ise $\alpha\,(s)$ eğrisine **düzlemsel eğri** denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.13. M, E^n Öklid uzayında bir hiperyüzey ve $\alpha : I \subset IR \longrightarrow M$ regüler bir eğri olsun. Her $t \in I$ için $\alpha^{'}\,(t)$ hız vektörü, $\alpha\,(t)$ noktasında M hiperyüzeyinin bir asimptotik vektörü ise α eğrisine, M hiperyüzeyi üzerinde bir **asimptotik eğri** denir (Sabuncuoğlu 2006).

Tanım 2.1.14. E^{n+1} de M hiperyüzeyi üzerindeki parametre eğrisi $\alpha : I \subset IR \longrightarrow M$ olsun. $\alpha : I \subset IR \longrightarrow M$ eğrisinin her noktasındaki ivme vektörü M hiperyüzeyine ortogonal ise α eğrisine M hiperyüzeyinde **geodezik eğri** denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.15. 4-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir eğri $\alpha : I \subset IR \longrightarrow E^4$ ve

α eğrisinin Frenet elemanları $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ olsun $\alpha' = \frac{d\alpha}{ds}$ olmak üzere

$$\left\langle \alpha'', \alpha'' \right\rangle \neq 0$$

ise α eğrisine **Frenet eğrisi**, denir (Inoguchi 2002).

Tanım 2.1.16. E^n Öklid uzayında birim hızlı bir eğri $\alpha : I \subset R \longrightarrow E^n$, α eğrisinin Frenet çatısı $\{V_1, V_2, ..., V_n\}$ ve Frenet eğrilikleri $\{k_1, k_2, ..., k_{n-1}\}$ olsun. α eğrisinin Frenet eğrilikleri sabit ise α eğrisine **w-eğrisi** denir (Klein ve Lie 1871, Chen vd. 1992).

Tanım 2.1.17. E^3 Öklid uzayında bir $\alpha(s)$ eğrisinin birim teğet vektör alanı $T = \alpha'(s)$ olsun. T vektör alanı belirli bir u vektörü ile sabit açı yapıyorsa $\alpha(s)$ eğrisine **genel helis** denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.18. E^n uzayında yay parametresi ile verilen $\alpha(s)$ eğrisinin $s-$noktasındaki burulması

$$\tau(s) \neq 0$$

ve $s-$noktasındaki eğriliği

$$\kappa(s) = sabit$$

ise $\alpha(s)$ eğrisine **Salkowski eğrisi** denir (Salkowski 1909).

Tanım 2.1.19. E^n uzayında yay parametresi ile verilen $\alpha(s)$ eğrisinin $s-$noktasındaki burulması

$$\tau(s) = sabit$$

ve $s-$noktasındaki eğriliği

$$\kappa(s) \neq 0$$

ise $\alpha(s)$ eğrisine **anti Salkowski eğrisi** denir (Salkowski 1909).

Tanım 2.1.20. M bir diferensiyellenebilir (C^∞) manifold olsun. M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M den IR ye C^∞ fonksiyonların uzayı $C^\infty(M, IR)$

olmak üzere, M üzerinde;

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow C^{\infty}(M, R)$$

şeklinde tanımlanan pozitif, simetrik ve 2-lineer g Riemann metriği ile birlikte M ye bir **Riemann manifoldu** denir ve (M, g) şeklinde gösterilir (Kobayashi vd. 1996).

Tanım 2.1.21. M, n boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve M üzerindeki C^{∞} vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere;

$$\begin{array}{rcl} \nabla & : & \chi(M) \times \chi(M) \overset{2-lineer}{\longrightarrow} \chi(M) \\ (X, Y) & \longrightarrow & \nabla(X, Y) = \nabla_X Y \end{array}$$

dönüşümü, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall f, g \in C^{\infty}(M, IR)$ için

i) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

ii) $\nabla_{fX+gY} Z = f(\nabla_X Z) + g(\nabla_Y Z)$

iii) $\nabla_X (fY) = f(\nabla_X Y) + X(f) Y$

özelliklerini sağlıyor ise ∇ ya M üzerinde bir **Afin Koneksiyon** adı verilir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.22. (M, g) $n-$boyutlu bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde tanımlanan bir afin koneksiyon olmak üzere $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$

ii) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ şartlarını sağladığında ∇ ya M üzerinde sıfır torsiyonlu Riemann Koneksiyonu veya M nin **Levi-Civita Koneksiyonu** denir (Hacısalihoğlu 2000).

Teorem 2.1.2. E^n deki α eğrisinin ∇ Levi-Civita koneksiyonuna göre eğrilikleri $k_i \, (1 \leq i \leq n)$ ve $\{V_1, V_2, ..., V_{n-1}\}$ tanjant uzayının Levi-Civita türevleri $\nabla_T V_i$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\nabla_{V_1} V_1 &= k_1(s).V_2(s) \\
\nabla_{V_1} V_i &= -k_{i-1}(s).V_{i-1}(s) + k_i(s).V_{i+1}(s), 1 < i < r \\
\nabla_{V_1} V_r &= -k_{r-1}(s).V_{r-1}(s)
\end{aligned}$$

olur(Hacısalihoğlu 2000, Monterde 2007).

Önerme 2.1.1. 3-boyutlu reel uzay formu M de bir eğri $\alpha : I \subset IR \longrightarrow M$ ve kabul edelim ki $M = S^3$ olsun. Bu nedenle S^3 üzerindeki herhangibir eğri IR^4 de olarak düşünebilir. 4-boyutlu Öklid uzayındaki eğrinin $\{e_1, e_2, e_3, e_4, k_1, k_2, k_3\}$ Frenet elemanları ile $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ içsel Frenet elemanları arasındaki bağıntı $t = e_1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\nabla_T T &= k_1 (e_2 - \langle e_2, \alpha \rangle \alpha) \\
N &= \frac{1}{\sqrt{1 - \langle e_2, \alpha \rangle^2}} (e_2 - \langle e_2, \alpha \rangle \alpha) \\
\kappa &= \sqrt{k_1^2 - 1} \\
B &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{k_1}\right)^2}} \alpha \wedge e_1 \wedge e_2
\end{aligned}$$

dir (Monterde 2007).

Uyarı 2.1.1. 4-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir eğri $\alpha : I \subset IR \longrightarrow E^4$ ve α eğrisinin Frenet elemanları $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ olsun. α Frenet eğrisinin geodezik olması için gerek ve yeter şart $\kappa = 0$ olmasıdır (Inoguchi 2002).

Tanım 2.1.23. E^3 Öklid uzayında birim hızlı $\alpha : I \subset IR \longrightarrow E^3$ eğrisinin teğet vektör alanı T olsun. Eğri boyunca

$$\langle T, N_1 \rangle = \langle T, N_2 \rangle = \langle N_1, N_2 \rangle = 0$$

şartını sağlayan vektör alanları N_1 ve $N_2 = T \wedge N_1$ olmak üzere T, N_1, N_2vektör alanları hareketli α eğrisi byunca ortonormal bir çatı oluşturur. Bu $\{T, N_1, N_2\}$ çatısına **Bishop çatısı** denir (Bishop 1975).

Teorem 2.1.3. Birim hızlı $\alpha : I \subset IR \longrightarrow E^4$ eğrisi boyunca eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B_1, B_2\}$ ve $\{T(s), M_1(s), M_2(s), M_3(s)\}$ birim hızlı $\alpha(s)$ eğrisinin Bishop çatısı olsun. Buna göre çatı denklemleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ M_1' \\ M_2' \\ M_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 & k_3 \\ -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 & 0 \\ -k_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde verilir. Burada k_1, k_2, k_3 Bishop çatısına göre $\alpha(s)$ eğrisinin eğrilik fonksiyonlarıdır ve

$$\begin{aligned} k_1 &= \overline{k_1} \cos\theta \cos\psi \\ k_2 &= \overline{k_1} \left(-\cos\phi \sin\psi + \sin\phi \sin\theta \cos\psi\right) \\ k_3 &= \overline{k_1} \left(\sin\phi \sin\psi + \cos\phi \sin\theta \cos\psi\right) \end{aligned}$$

eşitlikleriyle verilirler (Yaylı vd. 2012).

2.2 Öklid Uzayı ve Fermi-Walker Türevi

Tanım 2.2.1. $n-$boyutlu Öklid uzayı E^n de $\alpha : I \subset IR \longrightarrow E^n$ parametre eğrisi boyunca bir X vektör alanı için Öklid türevi $\frac{dX}{dt}$ olmak üzere

$$\dot{X} = \frac{dX}{dt} = 0$$

ise X vektör alanına α eğrisi boyunca **Öklid anlamında paraleldir**, denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.2.2. X, s yay parametreli $\alpha : I \subset IR \longrightarrow E^n$ uzay eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olmak üzere

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \langle T, X\rangle A + \langle A, X\rangle T$$

şeklinde tanımlanan $\widetilde{\nabla}_T X$ türevine $\alpha(s)$ uzay eğrisi boyunca vektör alanının **Fermi-Walker Türevi** denir. Burada $T = \frac{d\alpha}{ds}, A = \frac{dT}{ds}$ (Benn and Tucker 1989).

Tanım 2.2.3. X, s yay parametreli $\alpha(s)$ uzay eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olmak üzere eğri boyunca vektör alanının Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_T X = 0$$

ise X vektör alanına $\alpha(s)$ uzay eğrisi boyunca **Fermi-Walker anlamında paraleldir**, denir (Benn ve Tucker 1989).

Tanım 2.2.4. s yay parametreli $\alpha(s)$ uzay eğrisi boyunca U, V ve W ortonormal vektörler olmak üzere

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_T U &= 0\\ \widetilde{\nabla}_T V &= 0\\ \widetilde{\nabla}_T W &= 0\end{aligned}$$

ise bu vektörlerin oluşturduğu $\{U, V, W\}$ çatısına **non-rotating çatı** denir (Balakrishnan 2005).

Tanım 2.2.5. s yay parametreli $\alpha(s)$ uzay eğrisi boyunca

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_T T &= \omega^* \wedge T\\ \widetilde{\nabla}_T N &= \omega^* \wedge N\\ \widetilde{\nabla}_T B &= \omega^* \wedge B\end{aligned}$$

olacağından

$$\omega^* = \tau T$$

vektörüne $\{T, N, B\}$ **Frenet çatısına göre Fermi-Walker anlamında darboux vektörü** denir (Karakuş ve Yaylı, 2012).

s den $s + ds$ e kadar hareket, $\{N, B\}$ düzleminin T ekseni etrafında τds açısı kadar dönmesidir. Yani $\{N, B\}$ düzlemi τ açısal hızıyla döner.

Tanım 2.2.6. $n-$boyutlu Öklid uzayı E^nde bir yüzey M, M yüzeyi üzerinde bir eğri $\alpha : I \subset IR \longrightarrow M$ olsun. α eğrisinin teğet vektör alanı $T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}$ve yüzeyin birim normal vektör alanı n olmak üzere

$$Y = n \wedge T$$

eşitliğiyle tanımlanan Y vektör alanını alalım. Vektörel çarpımın özeliklerinden dolayı $\{T(s), Y(s), n(s)\}$ kümesi, $T_{\alpha(s)}E^n$ uzayının ortonormal bir çatısı olur. Bu çatıya (α, M) **eğri-yüzey ikilisinin çatısı** ya da **Darboux çatısı** denir (Gray vd. 2006, Sabuncuoğlu 2006).

Tanım 2.2.7. M E^3te herhangi bir yüzey, $\{T, Y, N\}$ darboux çatısı ve yüzey üzerindeki s yay parametreli $\alpha : I \subset E^3 \longrightarrow M$ eğrisi boyunca

$$\begin{aligned}
\widetilde{\widetilde{\nabla}}_T T &= \omega_* \wedge T \\
\widetilde{\widetilde{\nabla}}_T Y &= \omega_* \wedge Y \\
\widetilde{\widetilde{\nabla}}_T N &= \omega_* \wedge N
\end{aligned}$$

olacağından

$$\omega_* = t_r T$$

vektörüne $\{T, Y, N\}$ **Darboux çatısına göre Fermi-Walker anlamında darboux vektörü** denir (Karakuş ve Yaylı 2012).

s den $s + ds$ e kadar hareket, $\{Y, N\}$ düzleminin T ekseni etrafında $t_r ds$ açısı kadar dönmesidir. Yani $\{Y, N\}$ düzlemi t_r açısal hızıyla döner.

2.3 Lie Grubu ve Fermi-Walker Türevi

Tanım 2.3.1. G diferensiyellenebilir bir manifold olsun.

$$\mu : G \times G \longrightarrow G, \mu(a, b) = ab$$

ve G deki inversiyon operatörü olan

$$\xi : G \longrightarrow G, \xi(a) = a^{-1}$$

dönüşümlerinin her ikisi de diferensiyellenebilir ise G ye **Lie grubu** denir(Boothby 1975).

Tanım 2.3.2. $\langle , \rangle$ bi-invaryant metrik ile G bir Lie grubu ve X, $\alpha : I \longrightarrow G$ Frenet eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olsun. Eğer X, vektör alanının Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_T X = 0$$

ise X vektör alanına $\alpha(s)$ Frenet eğrisi boyunca **Fermi-Walker anlamında paraleldir**, denir (Karakuş ve Yaylı 2012).

Tanım 2.3.3. G Lie grubu $\alpha : I \subset IR \longrightarrow G$, Lie grubu üzerinde bir Frenet eğrisi, $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ ve ∇, Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_T T &= \widetilde{\omega}^* \wedge T \\
\widetilde{\nabla}_T N &= \widetilde{\omega}^* \wedge N \\
\widetilde{\nabla}_T B &= \widetilde{\omega}^* \wedge B
\end{aligned}$$

olur. $\alpha : I \subset IR \longrightarrow G$ Frenet eğrisi boyunca

$$\widetilde{\omega}^* = (\tau - \tau_G)(s) T$$

vektörüne **Lie grubunda Fermi-Walker anlamında darboux vektörü** denir (Karakuş ve Yaylı 2012).

Önerme 2.3.1. G Lie grubu $\alpha : I \subset IR \longrightarrow G$, Lie grubu üzerinde bir eğri, V eğrinin hız vektör alanı ve eğri boyunca herhangibir vektör alanı W olsun. ∇, Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere

$$\nabla_V W = \dot{W} - \frac{1}{2}[W, V]$$

dir (Crouch ve Silva Leite 1995).

Tanım 2.3.4. G bir Lie grubu $\alpha : I \subset IR \longrightarrow G$, Lie grubu üzerinde birim hızlı eğri ve α eğrisinin Frenet elemanları $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ olmak üzere V eğrinin hız vektör alanı ve eğri boyunca herhangibir vektör alanı W olsun. ∇, Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere

$$\tau_G = \frac{1}{2}\langle [T, N], B\rangle$$

şeklinde tanımlanır (Çiftçi 2009).

Teorem 2.3.1. (Lancert) G bir Lie grubu olsun. c bir sabit sayı olmak üzere G de bir eğrinin genel helis olması için gerek ve yeter şart

$$\tau = c\kappa + \tau_G$$

olmasıdır (Çiftçi 2009).

Önerme 2.3.2. G bir Lie grubu, $\alpha : I \subset IR \longrightarrow G$ Lie grubu üzerinde birim hızlı eğri ve α eğrisinin Frenet elemanları $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} [T, N] &= 2\tau_G B \\ [T, B] &= -2\tau_G N \end{aligned}$$

eşitlikleri vardır (Çiftçi 2009).

Uyarı 2.3.1. $\langle , \rangle$ bi-invaryant metrik ile G bir Lie grubu olsun. Farklı Lie grupları için aşağıdaki eşitlikler verilebilir.

i) Eğer G bir Abel grubu ise $\tau_G = 0$,

ii) Eğer $G = SO^3$ ise $\tau_G = \frac{1}{2}$,

iii) Eğer $G = SU^2$ ise $\tau_G = 1$ (Fornari et al. 2003).

2.4 Hiperyüzeyler ve Fermi Türevi

Tanım 2.4.1. M, IR^3 uzayının bir alt kümesi olsun. M nin her bir p noktası için $p \in \varphi(U)$ ve $\varphi(U) \subset M$ olacak biçimde $\varphi : U \longrightarrow IR^3$ düzgün ve regüler dönüşümü bir homeomorfizm ise M kümesine, IR^3 uzayında bir **yüzey** denir (Sabuncuoğlu 2006).

Tanım 2.4.2. E^n, n-boyutlu Öklid uzayında $(n-1)$ boyutlu yüzeye **Hiperyüzey** denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.4.3. E^{n+1} de bir hiperyüzey M ve M hiperyüzeyi üzerinde bir parametre eğrisi $\alpha : I \subset IR \rightarrow M$ olsun. α eğrisi boyunca M ye teğet olan bir X vektör alanının Levi-Civita türevi $\nabla_T X$ olmak üzere

$$\nabla_T X = 0$$

ise X vektör alanına **Levi-Civita anlamında paraleldir**, denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.4.4. M hiperyüzeyi üzerinde $\alpha : I \subset IR \rightarrow M$ birim hızlı bir eğri, X her yerde α eğrisine dik ve eğri boyunca yüzeye teğet differensiyellenebilir bir vektör alanı olsun. ∇, M nin Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere

$$\frac{\delta X}{\delta s} = \nabla_T X - \langle \nabla_T X, T \rangle T$$

şeklinde tanımlanan $\frac{\delta X}{\delta s}$ türevine eğri boyunca vektör alanının **Fermi türevi** denir (Thorpe 1979).

Tanım 2.4.5. M hiperyüzeyi üzerinde $\alpha : I \subset R \rightarrow M$ birim hızlı bir eğri, X her yerde α eğrisine dik ve eğri boyunca yüzeye teğet differensiyellenebilir bir vektör alanı olsun. ∇, M nin Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere

$$\frac{\delta X}{\delta s} = 0$$

ise X vektör alanına yüzey üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisi boyunca **Fermi-Walker anlamında paraleldir**, denir (Thorpe 1979).

Tanım 2.4.6. M hiperyüzeyi üzerinde $\alpha : I \subset IR \to M$ birim hızlı bir eğri ve $\alpha(s)$ eğrisi boyunca U, V ve W ortonormal vektörler olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{\delta U}{\delta s} &= 0 \\ \frac{\delta V}{\delta s} &= 0 \\ \frac{\delta W}{\delta s} &= 0 \end{aligned}$$

ise bu vektörlerin oluşturduğu $\{U, V, W\}$ çatısına **non-rotating çatı** denir (Karakuş ve Yaylı 2012).

3. FERMI-WALKER TÜREVİ VE NON-ROTATING ÇATI

Bu bölümde Fermi-Walker türevi Öklid uzayında alınan herhangi bir eğri boyunca incelenmiştir. İlk önce Öklid uzayında Frenet çatısına göre ifade edilen herhangibir vektör alanı alınmıştır. Bu vektör alanının eğri boyunca Fermi-Walker türevi ve türevle ilgili elde edilen sonuçlar incelenmiştir.

3.1 Frenet Çatısı ve Fermi-Walker Türevi

Lemma 3.1.1. X, s yay parametreli $\alpha(s)$ uzay eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olmak üzere, vektör alanının eğri boyunca Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \kappa\,(B \wedge X)$$

şeklinde ifade edilir (Balakrishnan 2005).

İspat :

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \langle T, X\rangle\, \nabla_T T + \langle \nabla_T T, X\rangle\, T$$

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \langle T, X\rangle\, (\kappa N) + \langle \kappa N, X\rangle\, T$$

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \kappa\,\langle T, X\rangle\, N + \kappa\,\langle N, X\rangle\, T$$

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \kappa\,(\langle X, T\rangle\, N - \langle X, N\rangle\, T)$$

olur. Vektörel çarpımın

$$(u \wedge v) \wedge w = \langle w, u\rangle\, v - \langle w, v\rangle\, u$$

özeliğini kullanırsak

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \kappa\,((T \wedge N) \wedge X)$$

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \kappa\,(B \wedge X)$$

elde edilir.

Sonuç 3.1.1. X vektör alanının s yay parametreli $\alpha(s)$ uzay eğrisi boyunca Fermi-

Walker türevi ile X vektör alanının $\alpha(s)$ uzay eğrisi boyunca Öklid türevinin çakışması için gerek ve yeter şart

$$X = \lambda B$$

olmasıdır. Burada B binormal vektör ve λ sabittir (Karakuş ve Yaylı 2012).

İspat : Lemma 3.1.1. den

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \kappa\,(B \wedge X)$$

olup

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X$$

olması için

$$X = \lambda B$$

olmalıdır.

Teorem 3.1.1. λ_1, λ_2 ve λ_3; s e bağlı fonksiyonlar olmak üzere $X = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B$ vektör alanı s yay parametreli $\alpha(s)$ uzay eğrisi boyunca Fermi-Walker anlamında paraleldir ancak ve ancak

$$\begin{aligned}
\lambda_1(s) &= sabit. \\
\lambda_2(s) &= c_1 \cos\left(\int_1^s \tau(s)\,ds\right) + c_2 \sin\left(\int_1^s \tau(s)\,ds\right) \\
\lambda_3(s) &= c_2 \cos\left(\int_1^s \tau(s)\,ds\right) - c_1 \sin\left(\int_1^s \tau(s)\,ds\right)
\end{aligned}$$

dır (Karakuş ve Yaylı 2012).

İspat :

$(\Longrightarrow)$ X, s yay parametreli $\alpha(s)$ uzay eğrisi boyunca Fermi-Walker anlamında parelel olsun. Buna göre

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \kappa\,(B \wedge X)$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_T X &= \left(\frac{d\lambda_1}{ds}\right) T + \lambda_1 \left(\nabla_T T\right) + \left(\frac{d\lambda_2}{ds}\right) N + \lambda_2 \left(\nabla_T N\right) \\ &\quad + \left(\frac{d\lambda_3}{ds}\right) B + \lambda_3 \left(\nabla_T B\right) - \kappa \left(B \wedge \left(\lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B\right)\right)\end{aligned}$$

olup gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\widetilde{\nabla}_T X = \left(\frac{d\lambda_1}{ds}\right) T + \left(\frac{d\lambda_2}{ds} - \tau(s)\lambda_3\right) N + \left(\frac{d\lambda_3}{ds} + \tau(s)\lambda_2\right) B$$

elde edilir. X vektör alanı $\alpha(s)$ uzay eğrisi boyunca Fermi-Walker anlamında parelel olduğundan

$$\widetilde{\nabla}_T X = 0$$

olup,

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda_1}{ds} &= 0 \\ \frac{d\lambda_2}{ds} - \tau(s)\lambda_3 &= 0 \\ \frac{d\lambda_3}{ds} + \tau(s)\lambda_2 &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Denklem sisteminin çözümünden,

$$\lambda_1(s) = sabit$$

$$\lambda_2(s) = c_1 \cos\left(\int_1^s \tau(s)\, ds\right) + c_2 \sin\left(\int_1^s \tau(s)\, ds\right)$$

$$\lambda_3(s) = c_2 \cos\left(\int_1^s \tau(s)\, ds\right) - c_1 \sin\left(\int_1^s \tau(s)\, ds\right)$$

bulunur.

$(\Longleftarrow)$ $X = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\lambda_1(s) &= sabit \\ \lambda_2(s) &= c_1 \cos\left(\int_1^s \tau(s)\, ds\right) + c_2 \sin\left(\int_1^s \tau(s)\, ds\right) \\ \lambda_3(s) &= c_2 \cos\left(\int_1^s \tau(s)\, ds\right) - c_1 \sin\left(\int_1^s \tau(s)\, ds\right)\end{aligned}$$

olsun.

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \kappa \left(B \wedge X \right)$$

den

$$\widetilde{\nabla}_T X = \left(\frac{d\lambda_1}{ds} \right) T + \left(\frac{d\lambda_2}{ds} - \tau \left(s \right) \lambda_3 \right) N + \left(\frac{d\lambda_3}{ds} + \tau \left(s \right) \lambda_2 \right) B$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemde

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_1}{ds} &= 0 \\ \frac{d\lambda_2}{ds} &= -c_1 \tau \left(s \right) \sin \left(\int_1^s \tau \left(s \right) ds \right) + c_2 \tau \left(s \right) \cos \left(\int_1^s \tau \left(s \right) ds \right) \\ \frac{d\lambda_3}{ds} &= -c_2 \tau \left(s \right) \sin \left(\int_1^s \tau \left(s \right) ds \right) - c_1 \tau \left(s \right) \cos \left(\int_1^s \tau \left(s \right) ds \right) \end{aligned}$$

yazılırsa

$$\widetilde{\nabla}_T X = 0$$

olur.

Teorem 3.1.2. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sabitler olmak üzere s yay parametreli düzlemsel $\alpha(s)$ uzay eğrisi boyunca $X = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B$ vektör alanı Fermi-Walker anlamında paraleldir (Karakuş ve Yaylı 2012).

İspat :

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \kappa \left(B \wedge X \right)$$

$$\widetilde{\nabla}_T X = \left(\lambda_1 \nabla_T T + \lambda_2 \nabla_T N + \lambda_3 \nabla_T B \right) - \kappa \left(B \wedge \left(\lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B \right) \right)$$

ifadesinden

$$\widetilde{\nabla}_T X = \tau \left(s \right) \left(\lambda_2 B - \lambda_3 N \right)$$

olur.

s yay parametreli $\alpha(s)$ uzay eğrisi düzlemsel olduğundan

$$\tau \left(s \right) = 0$$

olup

$$\widetilde{\nabla}_T X = 0$$

elde edilir.

Sonuç 3.1.2. Bütün Frenet vektörleri s yay parametreli düzlemsel eğri boyunca Fermi-Walker anlamında paraleldir (Karakuş ve Yaylı 2012).

İspat : Teorem 3.1.2. de

a) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ alınırsa

$$X \ = T$$

ve

$$\widetilde{\nabla}_T T = 0$$

olur.

b) $\lambda_1 = \lambda_3 = 0, \lambda_2 = 1$ alınırsa

$$X \ = N$$

ve

$$\widetilde{\nabla}_T N = \tau\left(s\right) B$$

elde edilir.

c) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1$ alınırsa

$$X \ = B$$

ve

$$\widetilde{\nabla}_T B = -\tau\left(s\right) N$$

olur.

s yay parametreli düzlemsel eğrilerde

$$\tau(s) = 0$$

olduğundan

$$\widetilde{\nabla}_T N = 0$$

$$\widetilde{\nabla}_T B = 0$$

olacaktır.

Sonuç 3.1.3. Düzlemsel eğriler boyunca $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı non-rotating çatıdır (Karakuş ve Yaylı 2012).

Sonuç 3.1.4. Frenet çatısının $\omega = \tau T + \kappa B$ darboux vektörü ile $\omega^* = \tau T$ Frenet çatısına Fermi-Walker anlamında darboux vektörü birbirinden farklıdır ve çakışmazlar (Karakuş ve Yaylı 2012).

Teorem 3.1.3. s yay parametreli $\alpha(s)$ uzay eğrisi anti-Salkowski eğrisidir ancak ve ancak $\omega^* = \tau T$ Fermi-Walker anlamında darboux vektörü Fermi-Walker anlamında pareleldir (Karakuş ve Yaylı 2012).

İspat :

$$\widetilde{\nabla}_T \omega^* = \nabla_T \omega^* - \kappa \left(B \wedge \omega^*\right)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_T \omega^* &= \left(\frac{d\tau}{ds}\right) T + \tau \left(\nabla_T T\right) - \kappa \left(B \wedge \tau T\right) \\ &= \left(\frac{d\tau}{ds}\right) T + \left(\tau\kappa\right) N - \left(\tau\kappa\right) N \end{aligned}$$

$$\widetilde{\nabla}_T \omega^* = \frac{d\tau}{ds} T$$

olacaktır. $\alpha(s)$ uzay eğrisi anti-Salkowski eğrisi ise

$$\begin{aligned} \tau\left(s\right) &= sabit \\ \kappa\left(s\right) &\neq 0 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\widetilde{\nabla}_T \omega^* = \frac{d\tau}{ds} T$$

$$\widetilde{\nabla}_T \omega^* = 0$$

olup $\omega^* = \tau T$ darboux vektörü Fermi-Walker pareleldir.

Benzer şekilde $\omega^* = \tau T$ Frenet çatısına göre Fermi-Walker anlamında Darboux vektörü Fermi-Walker paralel ise

$$\widetilde{\nabla}_T \omega^* = 0$$

ve

$$\frac{d\tau}{ds} = 0$$

dan

$$\begin{aligned} \tau(s) &= sabit \\ \kappa(s) &\neq 0 \end{aligned}$$

olacaktır. Buna göre $\alpha(s)$ uzay eğrisi anti-Salkowski eğrisidir.

3.2 Darboux Çatısı ve Fermi-Walker Türevi

Bu bölümde vektör alanı Darboux çatısına göre tanımlanmıştır. Eğri-yüzey çatısına göre alınan vektör alanının Fermi -Walker türevi incelenmiştir. Vektör alanının hangi eğriler boyunca Fermi-Walker paralel olduğu açıklanmıştır.

Lemma 3.2.1. $\alpha : I \longrightarrow M$ herhangi bir eğri, M E^3 te herhangi bir yüzey, $\{T, Y, n\}$ Darboux çatısı ve X, $\alpha(s)$ eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olmak üzere, yüzey üzerindeki eğri boyunca vektör alanının Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - [(\kappa_g n - \kappa_n Y) \wedge X]$$

şeklinde ifade edilir (Karakuş ve Yaylı 2012).

İspat :

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \langle T, X \rangle A + \langle A, X \rangle T$$

ifadesinde

$$T = \frac{d\alpha}{ds}$$

$$A = \nabla_T T = \kappa_g Y + \kappa_n n$$

dir. Buna göre

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \langle T, X \rangle (\kappa_g Y + \kappa_n n) + \langle \kappa_g Y + \kappa_n n, X \rangle T$$

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \kappa_g \langle T, X \rangle Y - \kappa_n \langle T, X \rangle n + \kappa_g \langle Y, X \rangle T + \kappa_n \langle n, X \rangle T$$

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \kappa_g (\langle T, X \rangle Y - \langle Y, X \rangle T) - \kappa_n (\langle T, X \rangle n - \langle n, X \rangle T)$$

olur. Vektörel çarpımın

$$(u \wedge v) \wedge w = \langle w, u \rangle v - \langle w, v \rangle u$$

özeliğini kullanırsak ve

$$\begin{aligned} T \wedge Y &= n \\ T \wedge n &= -Y \end{aligned}$$

olduğundan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - ((\kappa_g n - \kappa_n Y) \wedge X)$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.1. X, yüzey üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olsun. X, vektör alanının $\alpha(s)$ eğrisi boyunca Fermi-Walker türevi ile X, vektör alanının Öklid türevinin çakışması için gerek ve yeter şart

$$X = \lambda (\kappa_g n - \kappa_n Y)$$

olmasıdır. Burada λ sabittir (Karakuş ve Yaylı 2012).

İspat : Lemma 3.2.1. den

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - ((\kappa_g n - \kappa_n Y) \wedge X)$$

olup

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X$$

olması için

$$X = \lambda\left(\kappa_g n - \kappa_n Y\right)$$

olmalıdır.

Teorem 3.2.1. λ_1, λ_2 ve λ_3; s e bağlı fonksiyonlar olmak üzere yüzey üzerindeki s yay parametreli $\alpha : I \longrightarrow M$ eğrisi boyunca $X = \lambda_1 T + \lambda_2 Y + \lambda_3 n$ vektör alanı Fermi-Walker anlamında paraleldir ancak ve ancak

$$\begin{aligned}
\lambda_1(s) &= sabit \\
\lambda_2(s) &= c_1 \cos\left(\int_1^s t_r(s)\,ds\right) + c_2 \sin\left(\int_1^s t_r(s)\,ds\right) \\
\lambda_3(s) &= c_2 \cos\left(\int_1^s t_r(s)\,ds\right) - c_1 \sin\left(\int_1^s t_r(s)\,ds\right)
\end{aligned}$$

dir (Karakuş ve Yaylı 2012).

İspat :

$(\Longrightarrow)$ X, yüzey üzerindeki s yay parametreli $\alpha(s)$ eğrisi boyunca Fermi-Walker anlamında paralel olsun.

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - ((\kappa_g n - \kappa_n Y) \wedge X)$$

ifadesinden

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_T X = {} & \left(\frac{d\lambda_1}{ds}\right) T + \lambda_1\left(\nabla_T T\right) + \left(\frac{d\lambda_2}{ds}\right) Y + \lambda_2\left(\nabla_T Y\right) + \left(\frac{d\lambda_3}{ds}\right) N + \lambda_3\left(\nabla_T N\right) \\
& - \kappa_g\left[N \wedge \left(\lambda_1 T + \lambda_2 Y + \lambda_3 N\right)\right] + \kappa_n\left[Y \wedge \left(\lambda_1 T + \lambda_2 Y + \lambda_3 N\right)\right]
\end{aligned}$$

olur.Bu denklemde

$$\nabla_T T = \kappa_g Y + \kappa_n n$$

$$\nabla_T Y = -\kappa_g T + t_r n$$

$$\nabla_T n = -\kappa_n T - t_r Y$$

yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\widetilde{\nabla}_T X = \left(\frac{d\lambda_1}{ds}\right) T + \left(\frac{d\lambda_2}{ds} - t_r\left(s\right)\lambda_3\right) Y + \left(\frac{d\lambda_3}{ds} + t_r\left(s\right)\lambda_2\right) n$$

elde edilir.

X vektör alanı yüzey üzerindeki s yay parametreli $\alpha(s)$ eğrisi boyunca Fermi-Walker anlamında paralel olduğundan

$$\widetilde{\nabla}_T X = 0$$

olup

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_1}{ds} &= 0 \\ \frac{d\lambda_2}{ds} - t_r\left(s\right)\lambda_3 &= 0 \\ \frac{d\lambda_3}{ds} + t_r\left(s\right)\lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

olacaktır. Denklem sisteminin çözümünden,

$$\lambda_1\left(s\right) = sabit$$

$$\lambda_2\left(s\right) = c_1 \cos\left(\int_1^s t_r\left(s\right)ds\right) + c_2 \sin\left(\int_1^s t_r\left(s\right)ds\right)$$

$$\lambda_3\left(s\right) = c_2 \cos\left(\int_1^s t_r\left(s\right)ds\right) - c_1 \sin\left(\int_1^s t_r\left(s\right)ds\right)$$

olur.

$(\Longleftarrow)$ $X=\lambda_1 T+\lambda_2 Y+\lambda_3 N$ vektör alanı olmak üzere

$$\begin{aligned}
\lambda_1(s) &= sabit \\
\lambda_2(s) &= c_1\cos\left(\int_1^s t_r(s)\,ds\right)+c_2\sin\left(\int_1^s t_r(s)\,ds\right) \\
\lambda_3(s) &= c_2\cos\left(\int_1^s t_r(s)\,ds\right)-c_1\sin\left(\int_1^s t_r(s)\,ds\right)
\end{aligned}$$

olsun.

$$\widetilde{\nabla}_T X=\nabla_T X-((\kappa_g n-\kappa_n Y)\wedge X)$$

denkleminden

$$\widetilde{\nabla}_T X=\left(\frac{d\lambda_1}{ds}\right)T+\left(\frac{d\lambda_2}{ds}-t_r(s)\lambda_3\right)Y+\left(\frac{d\lambda_3}{ds}+t_r(s)\lambda_2\right)n$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\frac{d\lambda_1}{ds} &= 0 \\
\frac{d\lambda_2}{ds} &= -c_1 t_r(s)\sin\left(\int_1^s t_r(s)\,ds\right)+c_2 t_r(s)\cos\left(\int_1^s t_r(s)\,ds\right) \\
\frac{d\lambda_3}{ds} &= -c_2 t_r(s)\sin\left(\int_1^s t_r(s)\,ds\right)-c_1 t_r(s)\cos\left(\int_1^s t_r(s)\,ds\right)
\end{aligned}$$

yazılırsa

$$\widetilde{\nabla}_T X=0$$

elde edilir.

Teorem 3.2.2. $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ sabitler olmak üzere s yay parametreli $\alpha(s)$ eğrisi eğrilik çizgisi ise $X=\lambda_1 T+\lambda_2 Y+\lambda_3 n$ vektör alanı $\alpha(s)$ eğrisi boyunca Fermi-Walker anlamında paraleldir (Karakuş ve Yaylı 2012).

İspat :

$$\widetilde{\nabla}_T X=\nabla_T X-((\kappa_g n-\kappa_n Y)\wedge X)$$

ifadesinden

$$\widetilde{\nabla}_T X = [\lambda_1 (\nabla_T T) + \lambda_2 (\nabla_T Y) + \lambda_3 (\nabla_T n)] - \kappa_g (n \wedge X) + \kappa_n (Y \wedge X)$$

elde edilir. Bu denklemde

$$\nabla_T T = \kappa_g Y + \kappa_n n$$

$$\nabla_T Y = -\kappa_g T + t_r n$$

$$\nabla_T n = -\kappa_n T - t_r Y$$

yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\widetilde{\nabla}_T X = t_r (\lambda_2 n - \lambda_3 Y)$$

elde edilir.

s yay parametreli $\alpha(s)$ eğrisi eğrilik çizgisi olduğundan

$$t_r = 0$$

olup

$$\widetilde{\nabla}_T X = 0$$

olur.

Örnek 3.2.1. $M = S^2$ ve $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sabitler olmak üzere küre üzerindeki bütün eğriler boyunca $X = \lambda_1 T + \lambda_2 Y + \lambda_3 n$ vektör alanı Fermi-Walker anlamında paraleldir.

Çünkü küre üzerindeki bütün eğriler eğrilik çizgisidir.

Sonuç 3.2.2. Darboux çatı vektörleri yüzey üzerindeki s yay parametreli $\alpha(s)$ eğrilik çizgileri boyunca Fermi-Walker anlamında paraleldir (Karakuş ve Yaylı 2012).

İspat : Teorem 3.2.2. de

a) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ alınırsa

$$X = T$$

ve

$$\widetilde{\nabla}_T T = 0$$

olur.

b) $\lambda_1 = \lambda_3 = 0, \lambda_2 = 1$ alınırsa

$$X = Y$$

ve

$$\widetilde{\nabla}_T Y = t_r n$$

elde edilir.

c) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1$ alınırsa

$$X = n$$

ve

$$\widetilde{\nabla}_T n = -t_r Y$$

olur.

s yay parametreli $\alpha(s)$ eğrisi eğrilik çizgisi olduğundan

$$t_r(s) = 0$$

olup

$$\widetilde{\nabla}_T Y = 0$$

$$\widetilde{\nabla}_T n = 0$$

olacaktır.

Sonuç 3.2.3. Yüzey üzerindeki s yay parametreli $\alpha(s)$ eğrilik çizgileri boyunca $\{T, Y, n\}$ eğri-yüzey çatısı non-rotating çatıdır (Karakuş ve Yaylı 2012).

Teorem 3.2.3. Yüzey üzerindeki s yay parametreli $t_r = sabit$ olan $\alpha(s)$ eğrileri boyunca darboux çatısına göre Fermi-Walker anlamında darboux vektörü $\omega_* = t_r T$ Fermi-Walker anlamında pareleldir (Karakuş ve Yaylı 2012).

İspat :

$$\widetilde{\nabla}_T \omega_* = \nabla_T \omega_* - [(\kappa_g n - \kappa_n Y) \wedge \omega_*]$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_T \omega_* &= \left(\frac{dt_r}{ds} T + t_r \nabla_T T \right) - [(\kappa_g n - \kappa_n Y) \wedge t_r T] \\
\widetilde{\nabla}_T \omega_* &= \frac{dt_r}{ds} T + t_r \nabla_T T - \kappa_g t_r (n \wedge T) + \kappa_n t_r (Y \wedge T)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\nabla_T T &= \kappa_g Y + \kappa_n n \\
n \wedge T &= Y \\
Y \wedge T &= -N
\end{aligned}$$

yazılırsa,

$$\widetilde{\nabla}_T \omega_* = \frac{dt_r}{ds} T + t_r \kappa_g Y + t_r \kappa_n n - \kappa_g t_r Y - \kappa_n t_r n$$

den

$$\widetilde{\nabla}_T \omega_* = \frac{dt_r}{ds} T$$

olacaktır. $\omega_* = t_r T$ darboux vektörü Fermi-Walker anlamında parelel olduğundan

$$\widetilde{\nabla}_T \omega_* = 0$$

olup

$$t_r = sabit$$

olacaktır.

3.3 Bishop Çatısı ve Fermi-Walker Türevi

Bu bölümde de Fermi-Walker türevi Bishop çatısına göre ifade edilen herhangi bir vektör alanı için incelenmiştir.

Lemma 3.3.1. $\{T, N_1, N_2\}$ Bishop çatısı, s yay parametreli $\alpha(s)$ uzay eğrisi ve eğri boyunca herhangi bir vektör alanı X olmak üzere, Bishop çatısındaki eğri boyunca vektör alanının Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - k_1 \left(N_2 \wedge X\right) + k_2 \left(N_1 \wedge X\right)$$

şeklinde ifade edilir (Karakuş ve Yaylı 2012).

İspat :

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \langle T, X \rangle A + \langle A, X \rangle T$$

ifadesinde

$$\begin{aligned} T &= \frac{d\alpha}{ds} \\ A &= \nabla_T T = k_1 N_1 + k_2 N_2 \end{aligned}$$

yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \left(\left(k_1 N_2 - k_2 N_1\right)\right) \wedge X$$

den

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X + k_1 \left(\langle X, N_1 \rangle T - \langle X, T \rangle N_1\right) - k_2 \left(\langle X, T \rangle N_2 - \langle X, N_1 \rangle T\right)$$

elde edilir. Vektörel çarpımın

$$(u \wedge v) \wedge w = \langle w, u \rangle v - \langle w, v \rangle u$$

özeliğini kullanırsak

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X + k_1 ((N_1 \wedge T) \wedge X) - k_2 ((T \wedge N_2) \wedge X)$$

olur. Burada

$$N_1 \wedge T = -N_2$$

$$T \wedge N_2 = -N_1$$

yazılırsa

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - k_1 (N_2 \wedge X) + k_2 (N_1 \wedge X)$$

elde edilir.

Sonuç 3.3.1. X vektör alanının Bishop çatısındaki eğri boyunca Fermi-Walker türevi ile Öklid türevinin çakışması için gerek ve yeter şart

$$X = \lambda (k_1 N_2 - k_2 N_1)$$

olmasıdır. Burada λ sabittir (Karakuş ve Yaylı 2012).

İspat : Lemma 3.3.1. den

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - k_1 (N_2 \wedge X) + k_2 (N_1 \wedge X)$$

olup

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X$$

olması için

$$X = \lambda (k_1 N_2 - k_2 N_1)$$

olmalıdır.

Teorem 3.3.1. $\{T, N_1, N_2\}$ Bishop çatısı ve $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sabitler olmak üzere s yay parametreli bütün $\alpha(s)$ uzay eğrileri boyunca $X = \lambda_1 T + \lambda_2 N_1 + \lambda_3 N_2$ vektör alanı Fermi-Walker anlamında paraleldir (Karakuş ve Yaylı 2012).

İspat :

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - k_1 \left(N_2 \wedge X\right) + k_2 \left(N_1 \wedge X\right)$$

ifadesinden

$$\widetilde{\nabla}_T X = \left[\lambda_1 \left(\nabla_T T\right) + \lambda_2 \left(\nabla_T N_1\right) + \lambda_3 \left(\nabla_T N_2\right)\right] - k_1 \left(N_2 \wedge X\right) + k_2 \left(N_1 \wedge X\right)$$

elde edilir. Bu denklemde

$$\nabla_T T = k_1 N_1 + k_2 N_2$$

$$\nabla_T N_1 = -k_1 T$$

$$\nabla_T N = -k_2 T$$

yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\widetilde{\nabla}_T X = 0$$

elde edilir.

Sonuç 3.3.2. Bishop çatı vektörleri bütün $\alpha(s)$ eğrileri boyunca Fermi-Walker anlamında paraleldir (Karakuş ve Yaylı 2012).

İspat : Teorem 3.3.1. de

a) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ alınırsa

$$X \ = T$$

ve

$$\widetilde{\nabla}_T T = 0$$

olur.

b) $\lambda_1 = \lambda_3 = 0, \lambda_2 = 1$ alınırsa

$$X \ = N_1$$

ve

$$\widetilde{\nabla}_T N_1 = 0$$

elde edilir.

c) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1$ alınırsa

$$X \ = N_2$$

ve

$$\widetilde{\nabla}_T N_2 = 0$$

olur.

Sonuç 3.3.3. s yay parametreli bütün $\alpha(s)$ eğrileri boyunca $\{T, N_1, N_2\}$ Bishop çatısı non-rotating çatıdır (Karakuş ve Yaylı 2012).

4. LİE GRUPLARI ÜZERİNDE FERMI-WALKER TÜREVİ

Bu bölümde önceki bölümden farklı olarak 4-boyutlu E^4 Öklid uzayında bir Lie grubu aldık. Fermi-Walker türevini ile ilgili tanım ve kavramları Lie grupları için inceledik.

Lemma 4.1. E^4 te bir Lie grubu G, ve ∇, Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere, X vektör alanının $\alpha : I \subset IR \longrightarrow G$ Frenet eğrisi boyunca Fermi-Walker türevi,

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \frac{1}{2}[T, X] - \kappa (B \wedge X)$$

şeklinde ifade edilir.

İspat :

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \langle T, X \rangle A + \langle A, X \rangle T$$

ifadesinde

$$\nabla_V W = \dot{W} - \frac{1}{2}[W, V]$$

ve Lie çarpımının

$$[u, v] = -[v, u]$$

özeliğini kullanırsak

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \frac{1}{2}[T, X] - \langle T, X \rangle \nabla_T T + \langle \nabla_T T, X \rangle T$$

olur. Frenet denklemlerinden

$$\begin{aligned} T &= \frac{d\alpha}{ds} \\ A &= \nabla_T T = \kappa N \end{aligned}$$

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \frac{1}{2}[T, X] - \langle T, X \rangle (\kappa N) + \langle \kappa N, X \rangle T$$

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \frac{1}{2}[T, X] - \kappa \langle T, X \rangle N + \kappa \langle N, X \rangle T$$

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \frac{1}{2}[T, X] - \kappa (\langle X, T \rangle N - \langle X, N \rangle T)$$

olur. Vektörel çarpımın

$$(u \wedge v) \wedge w = \langle w, u \rangle v - \langle w, v \rangle u$$

özeliğini kullanırsak

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \frac{1}{2}[T, X] - \kappa((T \wedge N) \wedge X)$$

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \frac{1}{2}[T, X] - \kappa(B \wedge X)$$

elde edilir.

Teorem 4.1. E^4 te bir Lie grubu G ve ∇, Levi-Civita konneksiyonu olsun. λ_1, λ_2 ve λ_3; s e bağlı fonksiyonlar olmak üzere $X = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B$ vektör alanı $\alpha : I \subset IR \longrightarrow G$ Frenet eğrisi boyunca Fermi-Walker anlamında paraleldir ancak ve ancak

$$\begin{aligned}
\lambda_1(s) &= sabit. \\
\lambda_2(s) &= c_1 \cos\left(\int_1^s (\tau - \tau_G)(s)\, ds\right) + c_2 \sin\left(\int_1^s (\tau - \tau_G)(s)\, ds\right) \\
\lambda_3(s) &= c_2 \cos\left(\int_1^s (\tau - \tau_G)(s)\, ds\right) - c_1 \sin\left(\int_1^s (\tau - \tau_G)(s)\, ds\right)
\end{aligned}$$

dır.

İspat :

$(\Longrightarrow)$ $X = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B$ vektör alanı $\alpha : I \subset IR \longrightarrow G$ Frenet eğrisi boyunca Fermi-Walker anlamında paralel olsun. Buna göre

$$\nabla_T X = \frac{d\lambda_1}{ds} T + \lambda_1 \nabla_T T + \frac{d\lambda_2}{ds} N + \lambda_2 \nabla_T N + \frac{d\lambda_3}{ds} B + \lambda_3 \nabla_T B$$

olup $\{T, N, B\}$ Frenet çatısının Levi-Civita türevleri

$$\begin{aligned}
\nabla_T T &= \kappa N \\
\nabla_T N &= -\kappa T + \tau B \\
\nabla_T B &= -\tau N
\end{aligned}$$

yazılırsa

$$\nabla_T X = \frac{d\lambda_1}{ds}T + \lambda_1 (\kappa N) + \frac{d\lambda_2}{ds}N + \lambda_2 (-\kappa T + \tau B) + \frac{d\lambda_3}{ds}B + \lambda_3 (-\tau N)$$

$$\nabla_T X = \left(\frac{d\lambda_1}{ds} - \kappa\lambda_2\right) T + \left(\frac{d\lambda_2}{ds} + \kappa\lambda_1 - \tau\lambda_3\right) N + \left(\frac{d\lambda_3}{ds} + \tau\lambda_2\right) B$$

olur.

$$[T, X] = [T, \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B]$$

$$[T, X] = [T, \lambda_1 T] + [T, \lambda_2 N] + [T, \lambda_3 B]$$

$$[T, X] = \lambda_1 [T, T] + \lambda_2 [T, N] + \lambda_3 [T, B]$$

denkleminde

$$[T, T] = 0$$

$$[T, N] = 2\tau_G B$$

$$[T, B] = -2\tau_G N$$

yazılırsa

$$[T, X] = -2 (\lambda_3 \tau_G) N + 2 (\lambda_2 \tau_G) B$$

elde edilir.

$$B \wedge X = \lambda_1 N - \lambda_2 T$$

olup

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \frac{1}{2} [T, X] - \kappa (B \wedge X)$$

ifadesinden

$$\widetilde{\nabla}_T X = \left(\frac{d\lambda_1}{ds}\right) T + \left(\frac{d\lambda_2}{ds} - (\tau - \tau_G)(s)\,\lambda_3\right) N + \left(\frac{d\lambda_3}{ds} + (\tau - \tau_G)(s)\,\lambda_2\right) B$$

elde edilir. X vektör alanı $\alpha(s)$ Frenet eğrisi boyunca Fermi-Walker anlamında paralel olduğundan

$$\widetilde{\nabla}_T X = 0$$

olup,

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_1}{ds} &= 0 \\ \frac{d\lambda_2}{ds} - (\tau - \tau_G)(s)\,\lambda_3 &= 0 \\ \frac{d\lambda_3}{ds} + (\tau - \tau_G)(s)\,\lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Denklem sisteminin çözümünden,

$$\lambda_1(s) = sabit$$

$$\lambda_2(s) = c_1 \cos\left(\int_1^s (\tau - \tau_G)(s)\,ds\right) + c_2 \sin\left(\int_1^s (\tau - \tau_G)(s)\,ds\right)$$

$$\lambda_3(s) = c_2 \cos\left(\int_1^s (\tau - \tau_G)(s)\,ds\right) - c_1 \sin\left(\int_1^s (\tau - \tau_G)(s)\,ds\right)$$

bulunur.

$(\Longleftarrow)$ $X = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \lambda_1(s) &= sabit \\ \lambda_2(s) &= c_1 \cos\left(\int_1^s (\tau - \tau_G)(s)\,ds\right) + c_2 \sin\left(\int_1^s (\tau - \tau_G)(s)\,ds\right) \\ \lambda_3(s) &= c_2 \cos\left(\int_1^s (\tau - \tau_G)(s)\,ds\right) - c_1 \sin\left(\int_1^s (\tau - \tau_G)(s)\,ds\right) \end{aligned}$$

olsun.

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \frac{1}{2}[T, X] - \kappa(B \wedge X)$$

bağıntısından

$$\widetilde{\nabla}_T X = \left(\frac{d\lambda_1}{ds}\right) T + \left(\frac{d\lambda_2}{ds} - (\tau - \tau_G)(s)\,\lambda_3\right) N + \left(\frac{d\lambda_3}{ds} + (\tau - \tau_G)(s)\,\lambda_2\right) B$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemde

$$\begin{aligned}
\frac{d\lambda_1}{ds} &= 0 \\
\frac{d\lambda_2}{ds} &= -c_1\left(\tau-\tau_G\right)(s)\sin\left(\int_1^s\left(\tau-\tau_G\right)(s)\,ds\right)+c_2\left(\tau-\tau_G\right)(s)\cos\left(\int_1^s\left(\tau-\tau_G\right)(s)\,ds\right) \\
\frac{d\lambda_3}{ds} &= -c_2\left(\tau-\tau_G\right)(s)\sin\left(\int_1^s\left(\tau-\tau_G\right)(s)\,ds\right)-c_1\left(\tau-\tau_G\right)(s)\cos\left(\int_1^s\left(\tau-\tau_G\right)(s)\,ds\right)
\end{aligned}$$

yazılırsa

$$\widetilde{\nabla}_T X = 0$$

olur.

Teorem 4.2. E^4 te bir Lie grubu G ve ∇, Levi-Civita konneksiyonu olsun. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sabitler ve $\lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \neq 0$ olmak üzere $X = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B$ vektör alanının $\alpha : I \subset IR \longrightarrow G$ Frenet eğrisi boyunca Fermi-Walker anlamında paralel olması için gerek ve yeter şart

$$\tau_G = \tau$$

olmasıdır.

İspat :

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \frac{1}{2}[T, X] - \kappa\left(B \wedge X\right)$$

ifadesinden

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_T X &= \lambda_1\left(\nabla_T T\right)+\lambda_2\left(\nabla_T N\right)+\lambda_3\left(\nabla_T B\right)-\frac{1}{2}\left[T, \lambda_1 T+\lambda_2 N+\lambda_3 B\right] \\
&\quad -\kappa\left[B \wedge\left(\lambda_1 T+\lambda_2 N+\lambda_3 B\right)\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemde Levi-Civita türevleri

$$\begin{aligned}
\nabla_T T &= \kappa N \\
\nabla_T N &= -\kappa T+\tau B \\
\nabla_T B &= -\tau N
\end{aligned}$$

$$[T,T]=0$$

$$[T,N]=2\tau_G B$$

$$[T,B]=-2\tau_G N$$

ve

$$B\wedge X=\lambda_1 N-\lambda_2 T$$

yazılırsa

$$\widetilde{\nabla}_T X=(\tau-\tau_G)(s)(-\lambda_3 N+\lambda_2 B)$$

elde edilir.

Buna göre Fermi-Walker paralel olması için

$$\tau=\tau_G$$

olmalıdır.

Uyarı 4.1. E^4 te bir Lie grubu G ve ∇, Levi-Civita konneksiyonu olsun. $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ sabitler ve $\lambda_2=0,\lambda_3=0$ olmak üzere $X=\lambda T$ vektör alanı bütün eğriler boyunca Fermi-Walker anlamında paraleldir.

Teorem 4.3. E^4 te bir Lie grubu G ve ∇, Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere $\alpha: I\subset IR\longrightarrow G$ Frenet eğrisinin Frenet çatısı $\{T,N,B\}$ olsun. $\{T,N,B\}$ Frenet vektörlerinin $\alpha(s)$ Frenet eğrisi boyunca Fermi-Walker anlamında paralel olması için ancak ve ancak

$$\tau=\tau_G$$

olmalıdır.

İspat Uyarı 4.1. den

a) $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=0$ alınırsa

$$X=T$$

ve

$$\widetilde{\nabla}_T T = 0$$

olur.

b) Uyarı 4.1. ve Teorem 4.2. den,

$\lambda_1 = \lambda_3 = 0, \lambda_2 = 1$ alınırsa

$$X = N$$

ve

$$\widetilde{\nabla}_T N = (\tau - \tau_G)\, B$$

elde edilir.

c) Uyarı 4.1. ve Teorem 4.2. den,

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1$ alınırsa

$$X = B$$

ve

$$\widetilde{\nabla}_T B = -\,(\tau - \tau_G)\, N$$

olur. Burada

$$\tau = \tau_G$$

olduğundan

$$\widetilde{\nabla}_T N = 0$$

$$\widetilde{\nabla}_T B = 0$$

elde edilir.

Sonuç 4.1. E^4 te G Lie grubu üzerindeki $\tau = \tau_G$ olan Frenet eğrileri boyunca $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı non-rotating çatıdır.

Sonuç 4.2. E^4 te $G = (R^3, +)$ Lie grubu $\alpha : I \subset IR \longrightarrow IR^3$ Frenet eğrisi ve eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun. $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı non-rotating çatıdır ancak ve ancak $\tau_G = 0$ dır.

Sonuç 4.3. E^4 te G bir Lie grubu, $\alpha : I \subset IR \longrightarrow G$ eğrisi G de bir genel helis ve eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun. $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı genel helis eğrisi boyunca non-rotating çatıdır ancak ve ancak $\alpha(s)$ eğrisi bir geodeziktir.

İspat : Teorem 4.3. den,

$$\widetilde{\nabla}_T T = 0$$

$$\widetilde{\nabla}_T N = (\tau - \tau_G)(s) B$$

$$\widetilde{\nabla}_T B = -(\tau - \tau_G)(s) N$$

dır. $\alpha(s)$ eğrisi bir geodezik iken

$$\kappa = 0$$

$$\tau = \tau_G$$

olduğundan $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı non-rotating çatıdır. İspatın diğer kısmı açıkça görülmektedir.

Teorem 4.4. E^4 te bir Lie grubu G ve ∇, Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere $\alpha : I \subset IR \longrightarrow G$ Frenet eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun. $\tau - \tau_G = sabit$ olan $\alpha(s)$ Frenet eğrileri boyunca $\widetilde{w}^* = (\tau - \tau_G)(s)\, T$ Fermi-Walker anlamında darboux vektörü, Fermi-Walker anlamında paraleldir.

İspat : Lemma 4.1 den

$$\widetilde{\nabla}_T \widetilde{w}^* = \nabla_T \widetilde{w}^* - \frac{1}{2}[T, \widetilde{w}^*] - \kappa (B \wedge \widetilde{w}^*)$$

$$\widetilde{\nabla}_T \widetilde{w}^* = \left(\frac{d(\tau - \tau_G)}{ds} T + (\tau - \tau_G) \nabla_T T \right) - \frac{1}{2}[T, (\tau - \tau_G) T] - \kappa (B \wedge (\tau - \tau_G) T)$$

elde edilir. Burada

$$\nabla_T T = \kappa N$$

$$[T, T] = 0$$

$$B \wedge T = N$$

yazılırsa,

$$\widetilde{\nabla}_T \widetilde{w}^* = \left(\frac{d(\tau - \tau_G)}{ds} T + (\tau - \tau_G) \kappa N \right) - \frac{1}{2} (\tau - \tau_G) [T, T] - \kappa (\tau - \tau_G) (B \wedge T)$$

den

$$\widetilde{\nabla}_T \widetilde{w}^* = \frac{d(\tau - \tau_G)}{ds} T$$

olacaktır. $\widetilde{w}^* = (\tau - \tau_G)(s) T$ darboux vektörü Fermi-Walker anlamında parelel olduğundan

$$\widetilde{\nabla}_T \widetilde{w}^* = 0$$

olup

$$\tau - \tau_G = sabit$$

olacaktır.

Diğer yandan,

$$\tau - \tau_G = sabit$$

iken

$$\widetilde{\nabla}_T \widetilde{w}^* = 0$$

olacağından $\widetilde{w}^* = (\tau - \tau_G)(s) T$ Fermi-Walker anlamında darboux vektörü, Fermi-Walker anlamında paralel olur.

Sonuç 4.4. E^4 te G bir Lie grubu, $\alpha : I \subset IR \longrightarrow G$ eğrisi G de bir genel helis ve eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun. Fermi-Walker anlamında darboux vektörü $\widetilde{w}^* = (\tau - \tau_G)(s) T$, Fermi-Walker anlamında paraleldir ancak ve ancak $\kappa = sabit$ tir.

İspat : $\alpha(s)$ eğrisi G de bir genel helis olsun Bu durumda Lancret teoreminden

$$\tau = c\kappa + \tau_G$$

ve teorem 4.4. den

$$\tau - \tau_G = sabit$$

olduğundan

$$\kappa = sabit$$

olur.

Teorem 4.5. $\alpha : I \longrightarrow S^3$ bir genel helis eğrisi ve eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

i) $\alpha(s)$ bir geodeziktir,

ii) $k_1 = 1$,

iii) Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ non-rotating frame dir,

iv) $\kappa = 0, \tau = 1$

Burada k_1, k_2, k_3 eğrinin asli eğrilik fonksiyonları, κ eğrinin içsel eğrilik fonksiyonu ve τ eğrinin torsiyon fonksiyonudur.

İspat : $\alpha(s)$ bir geodezik olsun. Bu durumda

$$\kappa = 0$$

ve

$$k_1 = 1$$

olur. Sonuç 4.3. ten , $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı non-rotating çatıdır. Sonuç 4.3 ve Uyarı 2.2.1. den

$$\tau = 1$$

elde ederiz. Buna göre $\alpha(s)$ bir geodezik olur.

Uyarı 4.2. E^4 te bir Lie grubu G ve ∇, Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere $\alpha : I \subset R \longrightarrow G$ Frenet eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun. G Lie grubu bir

Abel grubu iken $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı non-rotating çatıdır ancak ve ancak $\tau = 0$ dır.

Uyarı 4.3. E^4 te bir Lie grubu G ve ∇, Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere $\alpha : I \subset IR \longrightarrow G$ Frenet eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun. $G = SO(3)$ iken $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı non-rotating çatıdır ancak ve ancak $\tau = \frac{1}{2}$ dir.

5. HİPERYÜZEYLER ÜZERİNDE FERMI TÜREVİ

Bu bölümde 4-boyutlu Öklid uzayındaki yüzey üzerinde alınan bir eğri ve vektör alanının Fermi türevi (Thorpe 1979) incelenmiştir.

5.1 4-Boyutlu Öklid Uzayındaki Yüzeyler Üzerinde Fermi Türevi

Lemma 5.1.1. E^3 teki M yüzeyi üzerinde $\alpha : I \to M$ birim hızlı bir eğri, X her yerde $\alpha(s)$ eğrisine dik ve eğri boyunca yüzeye teğet differensiyellenebilir bir vektör alanı olsun. ∇, M nin Levi-Civita konneksiyonu ve yüzeyin Darboux çatısı $\{T, Y, n\}$ olmak üzere X, vektör alanının eğri boyunca Fermi türevi

$$\frac{\delta X}{\delta s} = \frac{d\left(\ln \lambda\left(s\right)\right)}{ds} X$$

şeklinde ifade edilir.

İspat :

$$\frac{\delta X}{\delta s} = \nabla_T X - \left\langle \nabla_T X, T\right\rangle T$$

X, vektör alanının Levi-Civita türevi

$$\nabla_T X = \frac{dX}{ds} - \left\langle \frac{dX}{ds}, n\right\rangle n$$

yazılırsa

$$\frac{\delta X}{\delta s} = \frac{dX}{ds} - \left\langle \frac{dX}{ds}, n\right\rangle n - \left\langle \frac{dX}{ds} - \left\langle \frac{dX}{ds}, n\right\rangle n, T\right\rangle T$$

$$\frac{\delta X}{\delta s} = \frac{dX}{ds} - \left\langle \frac{dX}{ds}, n\right\rangle n - \left\langle \frac{dX}{ds}, T\right\rangle T + \left\langle \frac{dX}{ds}, n\right\rangle \left\langle n, T\right\rangle T$$

X her yerde $\alpha(s)$ eğrisine dik ve eğri boyunca yüzeye teğet differensiyellenebilir bir vektör alanı olduğundan $\langle X, T\rangle = 0$ ve $\langle X, n\rangle = 0$ dır. Buna göre

$$\frac{\delta X}{\delta s} = \frac{dX}{ds} + \left\langle X, \frac{dn}{ds}\right\rangle n + \left\langle X, \frac{dT}{ds}\right\rangle T$$

olur. Burada

$$\frac{dT}{ds} = \kappa_g Y + \kappa_n n$$

$$\frac{dT}{ds} = -\kappa_n T - t_r Y$$

yazılırsa

$$\frac{\delta X}{\delta s} = \frac{dX}{ds} - t_r \langle X, Y \rangle n + \kappa_g \langle X, Y \rangle T$$

$$\frac{\delta X}{\delta s} = \frac{dX}{ds} - \langle X, Y \rangle (-\kappa_g T + t_r n)$$

$$\frac{\delta X}{\delta s} = \frac{dX}{ds} - \langle X, Y \rangle \frac{dY}{ds}$$

elde edilir. Burada $\langle X, T \rangle = 0$ ve $X \in \chi(M)$ olduğundan

$$X = \lambda(s) Y$$

olacaktır. Buna göre

$$\frac{\delta X}{\delta s} = \frac{d\lambda(s)}{ds} Y$$

$$\frac{\delta X}{\delta s} = \frac{d(\ln \lambda(s))}{ds} X$$

elde edilir.

Sonuç 5.1.1. X vektör alanı $\frac{\delta X}{\delta s}$, Fermi türevi ile lineer bağımlıdır.

Sonuç 5.1.2. M, E^3 te herhangi bir yüzey olmak üzere $X = \lambda(s) Y$ vektör alanının M üzerindeki bütün eğriler boyunca Fermi paralel olması için ancak ve ancak

$$\lambda(s) = sabit$$

olmalıdır.

İspat :

Lemma 5.1.1. den,

$$\frac{\delta X}{\delta s} = \frac{d(\ln \lambda(s))}{ds} X$$

buna göre

$$\lambda(s) = sabit$$

olmalıdır.

Sonuç 5.1.3. E^3 te herhangi bir M yüzeyi üzerinde $\alpha : I \subset IR \rightarrow M$ birim hızlı bir eğri olsun. $\alpha(s)$ asimptotik eğri ise eğrinin normali N eğri boyunca Fermi paraleldir. $\alpha(s)$ geodezik eğri ise eğrinin binormali B eğri boyunca Fermi paraleldir.Burada $\{T, N, B\}$ eğrinin Frenet çatısı, $\{T, Y, n\}$ yüzeyin darboux çatısıdır.

İspat :

$\alpha(s)$ asimptotik eğri olsun. Bu durumda

$$Y = N$$

den

$$\frac{\delta N}{\delta s} = 0$$

olacaktır.

$\alpha(s)$ geodezik eğri olsun.Buna göre

$$Y = B$$

olup

$$\frac{\delta B}{\delta s} = 0$$

elde edilir.

Teorem 5.1.1. E^3 te herhangi bir M yüzeyi üzerinde $\alpha : I \subset IR \rightarrow M$ geodezik bir eğri olsun. $X = \lambda(s) Y$ vektör alanının eğri boyunca Levi-Civita paralel olması için $X = \lambda(s) Y$ vektör alanı eğri boyunca Fermi paralel olmalıdır.

İspat :

$X = \lambda(s) Y$ vektör alanı geodezik eğri boyunca Levi-Civita paralel olsun. Bu durumda vektör alanı eğri boyunca Fermi paraleldir.

Vektör alanı $X = \lambda(s)Y$ geodezik eğri boyunca Fermi paralel olsun. Bu durumda

$$\lambda(s) = 0$$

$$\kappa_g = 0$$

olur. Buna göre vektör alanının Levi-Civita türevi

$$\nabla_T X = \frac{d\lambda}{ds}Y - (\kappa_g \lambda(s))\,T$$

$$\nabla_T X = 0$$

olur. X vektör alanı eğri boyunca Levi-Civita paraleldir.

Örnek 5.1.1. E^3 te S^2 birim küre olmak üzere $X = \lambda(s)Y$ vektör alanının büyük çemberler boyunca Levi-Civita paralel olması için ancak ve ancak $X = \lambda(s)Y$ vektör alanı büyük çemberler boyunca Fermi paralel olmalıdır.

Gerçekten küre üzerindeki büyük çemberler geodeziklerdir. Bu nedenle Teorem 5.1.1. den X büyük çemberler boyunca Levi-Civita paraleldir ancak ve ancak X vektör alanı büyük çemberler boyunca Fermi paraleldir.

5.2 4-Boyutlu Öklid Uzayındaki Hiperyüzeyler Üzerinde Fermi Türevi

Bu bölümde $4-$boyutlu Öklid uzayındaki hiperyüzey üzerinde herhangi bir eğri aldık. Eğri boyunca aldığımız herhangi bir vektör alanının Fermi türevini inceledik. Vektör alanının 4-boyutlu Öklid uzayındaki hiperyüzey üzerinde alınan eğri boyunca Fermi paralel olması için gerekli durumlar incelenmiştir.

Bu bölümde M E^4 te hiperyüzey, $\alpha : I \subset R \to M$ hiperyüzey üzerinde birim hızlı eğri olmak üzere eğri boyunca Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ dir. ∇, M nin Levi-Civita konneksiyonu, κ ve τ, Levi-Civita konneksiyonuna göre eğrinin, sırasıyla, eğrilik ve torsiyonudur.

Lemma 5.2.1. E^4 teki M hiperyüzeyi üzerinde $\alpha : I \subset IR \to M$ birim hızlı bir eğri, X her yerde $\alpha(s)$ eğrisine dik ve eğri boyunca M hiperyüzeyine teğet differensiyellenebilir bir vektör alanı olsun. ∇, M nin Levi-Civita konneksiyonu T eğrinin teğet vektör alanı ve n, M nin normali olmak üzere X, vektör alanının eğri boyunca Fermi türevi

$$\frac{\delta X}{\delta s}=\frac{dX}{ds}-\left\langle \frac{dX}{ds},\overrightarrow{n}\right\rangle \overrightarrow{n}-\left\langle \frac{dX}{ds},\overrightarrow{T}\right\rangle \overrightarrow{T}$$

şeklinde ifade edilir.

İspat :

$$\frac{\delta X}{\delta s}=\nabla_T X-\left\langle \nabla_T X,T\right\rangle T$$

X, vektör alanının Levi-Civita türevi

$$\nabla_T X=\frac{dX}{ds}-\left\langle \frac{dX}{ds},n\right\rangle n$$

yazılırsa

$$\frac{\delta X}{\delta s}=\frac{dX}{ds}-\left\langle \frac{dX}{ds},n\right\rangle n-\left\langle \frac{dX}{ds}-\left\langle \frac{dX}{ds},n\right\rangle n,T\right\rangle T$$

$$\frac{\delta X}{\delta s}=\frac{dX}{ds}-\left\langle \frac{dX}{ds},n\right\rangle n-\left\langle \frac{dX}{ds},T\right\rangle T+\left\langle \frac{dX}{ds},n\right\rangle \left\langle n,T\right\rangle T$$

olur. Buna göre

$$\frac{\delta X}{\delta s}=\frac{dX}{ds}-\left\langle \frac{dX}{ds},n\right\rangle n-\left\langle \frac{dX}{ds},T\right\rangle T$$

elde edilir.

Teorem 5.2.1. E^4 te herhangi bir M hiperyüzeyi üzerinde $\alpha : I \subset R \rightarrow M$ birim hızlı eğri boyunca $\{T,N,B\}$ çatısı vardır. $\lambda_1$ve λ_2; s e bağlı fonksiyonlar olmak üzere $X=\lambda_1 N+\lambda_2 B$ vektör alanı $\alpha(s)$ eğrisi boyunca Fermi paraleldir ancak ve ancak

$$\lambda_1(s)=c_1\cos\left(\int_1^s \tau(s)\,ds\right)+c_2\sin\left(\int_1^s \tau(s)\,ds\right)$$

$$\lambda_2(s)=c_2\cos\left(\int_1^s \tau(s)\,ds\right)-c_1\sin\left(\int_1^s \tau(s)\,ds\right)$$

dır.

İspat :

$(\Longrightarrow)$ $X=\lambda_1 N+\lambda_2 B$ vektör alanı $\alpha : I \subset IR \to M$ eğrisi boyunca Fermi paralel olsun. Buna göre

$$\frac{\delta X}{\delta s}=\nabla_T X-\langle \nabla_T X, T\rangle T$$

Fermi türevinden

$$\begin{aligned}\frac{\delta X}{\delta s} &= \left(\frac{d\lambda_1}{ds}\right)N+\lambda_1\nabla_T N+\left(\frac{d\lambda_2}{ds}\right)B+\lambda_2\nabla_T B\\ &\quad -\left\langle\left(\frac{d\lambda_1}{ds}\right)N+\lambda_1\nabla_T N+\left(\frac{d\lambda_2}{ds}\right)B+\lambda_2\nabla_T B, T\right\rangle T\end{aligned}$$

olur. $\{T,N,B\}$ Frenet çatısının Levi-Civita türevleri

$$\begin{aligned}\nabla_T T &= \kappa N\\ \nabla_T N &= -\kappa T+\tau B\\ \nabla_T B &= -\tau N\end{aligned}$$

yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{\delta X}{\delta s}=\left(\frac{d\lambda_1}{ds}\right)N+\lambda_1(-\kappa T+\tau B)+\left(\frac{d\lambda_2}{ds}\right)B+\lambda_2(-\tau N)+(\kappa\lambda_1)T$$

$$\frac{\delta X}{\delta s}=\left(\frac{d\lambda_1}{ds}-\tau(s)\lambda_2\right)N+\left(\frac{d\lambda_2}{ds}+\tau(s)\lambda_1\right)B$$

elde edilir. X vektör alanı $\alpha(s)$ eğrisi boyunca Fermi parelel olduğundan

$$\frac{\delta X}{\delta s}=0$$

olup,

$$\begin{aligned}&\frac{d\lambda_1}{ds}-\tau(s)\lambda_2=0\\ &\frac{d\lambda_2}{ds}+\tau(s)\lambda_1=0\end{aligned}$$

elde edilir. Denklem sisteminin çözümünden,

$$\lambda_1(s)=c_1\cos\left(\int_1^s\tau(s)\,ds\right)+c_2\sin\left(\int_1^s\tau(s)\,ds\right)$$

$$\lambda_2(s) = c_2 \cos\left(\int_1^s \tau(s)\, ds\right) - c_1 \sin\left(\int_1^s \tau(s)\, ds\right)$$

bulunur.

($\Longleftarrow$) Tersine $X = \lambda_1 N + \lambda_2 B$ olmak üzere

$$\lambda_1(s) = c_1 \cos\left(\int_1^s \tau(s)\, ds\right) + c_2 \sin\left(\int_1^s \tau(s)\, ds\right)$$

$$\lambda_2(s) = c_2 \cos\left(\int_1^s \tau(s)\, ds\right) - c_1 \sin\left(\int_1^s \tau(s)\, ds\right)$$

olsun.

$$\frac{\delta X}{\delta s} = \nabla_T X - \langle \nabla_T X, T \rangle T$$

bağıntısından

$$\frac{\delta X}{\delta s} = \left(\frac{d\lambda_1}{ds} - \tau(s)\lambda_2\right) N + \left(\frac{d\lambda_2}{ds} + \tau(s)\lambda_1\right) B$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemde

$$\lambda_1(s) = c_1 \cos\left(\int_1^s \tau(s)\, ds\right) + c_2 \sin\left(\int_1^s \tau(s)\, ds\right)$$

$$\lambda_2(s) = c_2 \cos\left(\int_1^s \tau(s)\, ds\right) - c_1 \sin\left(\int_1^s \tau(s)\, ds\right)$$

yazılıp düzenlenirse

$$\frac{\delta X}{\delta s} = 0$$

elde edilir.

Sonuç 5.2.1. λ_1 ve λ_2 sabitler olmak üzere $\tau = 0$ ise $X = \lambda_1 N + \lambda_2 B$ vektör alanı $\alpha(s)$ eğrisi boyunca Fermi paraleldir.

İspat :

$X = \lambda_1 N + \lambda_2 B$ vektör alanının $\alpha : I \subset R \to M$ eğrisi boyunca Fermi türevinden

$$\frac{\delta X}{\delta s} = \nabla_T X - \langle \nabla_T X, T \rangle T$$

$$\frac{\delta X}{\delta s} = \lambda_1 \nabla_T N + \lambda_2 \nabla_T B - \langle \lambda_1 \nabla_T N + \lambda_2 \nabla_T B, T \rangle T$$

olur. $\{T, N, B\}$ Frenet çatısının Levi-Civita türevleri

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= \kappa N \\ \nabla_T N &= -\kappa T + \tau B \\ \nabla_T B &= -\tau N \end{aligned}$$

yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{\delta X}{\delta s} = \lambda_1 (-\kappa T + \tau B) + \lambda_2 (-\tau N) + \langle \lambda_1 (-\kappa T + \tau B) + \lambda_2 (-\tau N), T \rangle T$$

$$\frac{\delta X}{\delta s} = (\kappa \lambda_1) T + (\tau \lambda_1) B - (\tau \lambda_2) N - (\kappa \lambda_1) T$$

$$\frac{\delta X}{\delta s} = (\tau \lambda_1) B - (\tau \lambda_2) N$$

$$\frac{\delta X}{\delta s} = \tau (s) (\lambda_1 B - \lambda_2 N)$$

elde edilir. $\tau(s) = 0$ ise

$$\frac{\delta X}{\delta s} = 0$$

olur.

Teorem 5.2.2. E^4 te herhangi bir M hiperyüzeyi üzerinde $\alpha : I \subset IR \to M$ birim hızlı eğri boyunca $\{T, N, B\}$ çatısı vardır. $\{N, B\}$ vektörlerinin $\alpha(s)$ eğrisi boyunca Fermi-Walker anlamında paralel olması için ancak ve ancak

$$\tau(s) = 0$$

olmalıdır.

İspat : Sonuç 5.2.1. den

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$ alınırsa bu durumda

$$X = N$$

buradan da

$$\frac{\delta N}{\delta s} = \tau\left(s\right) B$$

elde edilir.

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ alınırsa

$$X = B$$

ve

$$\frac{\delta B}{\delta s} = -\tau\left(s\right) N$$

olur. Buna göre $\tau(s) = 0$ olduğundan

$$\frac{\delta N}{\delta s} = 0$$

$$\frac{\delta B}{\delta s} = 0$$

olacaktır.

Sonuç 5.2.2. $\tau = 0$ ise $\{N, B\}$ eğri boyunca non-rotating dir.

Teorem 5.2.3. E^4 te herhangi bir M hiperyüzeyi üzerinde $\alpha : I \subset IR \to M$ birim hızlı eğri boyunca herhangi bir vektör alanı X olsun.Vektör alanının eğri boyunca Fermi türevi ile Levi-Civita türevinin çakışması için ancak ve ancak

$$X = \lambda B$$

olmalıdır. Burada B binormal vektör ve λ sabittir.

İspat :

$$\frac{\delta X}{\delta s} = \nabla_T X - \left\langle \nabla_T X, T \right\rangle T$$

bağıntısında

$$\frac{\delta X}{\delta s} = \nabla_T X$$

olması için

$$\langle \nabla_T X, T \rangle T = 0$$

yani,

$$X = \lambda B$$

olmalıdır.

5.3 n-Boyutlu Öklid Uzayında Fermi Türevi

Bu bölümde $n-$boyutlu Öklid uzayındaki herhangi bir eğri boyunca vektör alanının Fermi türevini inceledik. Vektör alanının $n-$boyutlu Öklid uzayındaki eğri boyunca Fermi paralel olması için gerekli durumlar ve Fermi türevinin özelikleri incelenmiştir.

Bu bölümde $n \geq 4$ olmak üzere M bir Riemann manifold, $\alpha : I \subset IR \to M$ eğrisi M de birim hızlı bir $w-$eğrisi, $\{V_1, V_2, ..., V_{n-1}\}$ eğri boyunca M nin teğet uzayı, ∇, M nin Levi-Civita konneksiyonu ve $k_i \, (1 \leq i \leq n)$, konneksiyona göre eğrinin eğrilikleridir.

Teorem 5.3.1. $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_{n-2}$; s e bağlı fonksiyonlar olmak üzere $X = \sum\limits_{i=1}^{n-2} \lambda_i V_{i+1}$ vektör alanının eğri boyunca Fermi paralel olması için

$$\begin{bmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \\ . \\ . \\ . \\ \lambda_{n-2}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_2 & 0 & . & . & . & 0 \\ -k_2 & 0 & k_3 & . & . & . & 0 \\ 0 & -k_3 & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & k_{n-2} \\ 0 & 0 & . & . & . & -k_{n-2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ . \\ . \\ . \\ \lambda_{n-2} \end{bmatrix}$$

olmalıdır.

İspat : $X = \sum\limits_{i=1}^{n-2} \lambda_i V_{i+1}$ vektör alanı eğri boyunca Fermi paralel olsun.

Buna göre

$$\frac{\delta X}{\delta s} = \nabla_T X - \langle \nabla_T X, T \rangle T$$

Fermi türevinden

$$\frac{\delta X}{\delta s} = \left(\frac{d\lambda_1}{ds} - k_2\lambda_2\right) V_2 + \sum_{i=3}^{n-2}\left(\frac{d\lambda_{i-1}}{ds} + k_{i-1}\lambda_{i-2} - k_i\lambda_i\right) V_i + \left(\frac{d\lambda_{n-2}}{ds} + k_{n-2}\lambda_{n-3}\right) V_{n-1}$$

elde edilir.

Burada $3 > n-2$, $\sum\limits_{i=3}^{n-2}\left(\frac{d\lambda_{i-1}}{ds} + k_{i-1}\lambda_{i-2} - k_i\lambda_i\right) V_i = 0$ olmalıdır. $X = \sum\limits_{i=1}^{n-2} \lambda_i V_{i+1}$ vektör alanı eğri boyunca Fermi paralel olduğundan

$$\frac{d\lambda_1}{ds} - k_2\lambda_2 = 0$$

$$\frac{d\lambda_2}{ds} + k_2\lambda_1 - k_3\lambda_3 = 0$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$\frac{d\lambda_{n-2}}{ds} + k_{n-2}\lambda_{n-3} = 0$$

olur. Denklem sisteminin çözümünden

$$\begin{bmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \\ . \\ . \\ . \\ \lambda_{n-2}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_2 & 0 & . & . & . & 0 \\ -k_2 & 0 & k_3 & . & . & . & 0 \\ 0 & -k_3 & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & k_{n-2} \\ 0 & 0 & . & . & . & -k_{n-2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ . \\ . \\ . \\ \lambda_{n-2} \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Bu teoremde $n = 4$ alınırsa teorem 5.2.1. elde edilir.

Sonuç 5.3.1. $k_i = 0\,(2 \leq i \leq n-2)$ ise $\{V_1, V_2, ..., V_{n-1}\}$ eğri boyunca non-rotating dir.

Örnek 5.3.1 E^5 te $M = E^4$ te bir hiperyüzey ve $\{T, M_1, M_2, M_3\}$ birim hızlı $\alpha : I \subset IR \longrightarrow E^4 \subset E^5$ eğrisinin Bishop çatısı olmak üzere E^4 teki bütün eğriler boyunca $\{M_1, M_2, M_3\}$ non-rotating dir.

Teorem 5.3.1 $X = \sum\limits_{i=1}^{n-2} \lambda_i V_{i+1}$ ve $Y = \sum\limits_{i=1}^{n-2} \mu_i V_{i+1}$ eğri boyunca Fermi paralel vektör alanları olmak üzere

i) $\|X\| = sabit$

ii) $\langle X, Y \rangle = sabit$

iii) $\theta = sabit$

iv) $X + Y$ ve cX vektör alanları eğri boyunca Fermi paraleldir.

Burada λ_i ve μ_i; s e bağlı fonksiyonlar, c bir reel sayı θ da X ve Y arasındaki açıdır.

İspat :

i) $X = \sum\limits_{i=1}^{n-2} \lambda_i V_{i+1}$ vektör alanı eğri boyunca Fermi paralel olsun.

Buna göre

$$\frac{\delta X}{\delta s} = 0$$

$$\frac{d\left\|X\right\|^2}{ds} = 2\left\langle \frac{dX}{ds}, X \right\rangle$$

$$\|X\| = sabit$$

olur.

ii) $X = \sum\limits_{i=1}^{n-2} \lambda_i V_{i+1}$ ve $Y = \sum\limits_{i=1}^{n-2} \mu_i V_{i+1}$vektör alanları eğri boyunca Fermi paralel olsun.

Buna göre

$$\frac{\delta X}{\delta s} = 0, \frac{\delta Y}{\delta s} = 0$$

$$\frac{d\langle X,Y\rangle}{ds}=\left\langle\frac{dX}{ds},Y\right\rangle+\left\langle X,\frac{dY}{ds}\right\rangle$$
$$\langle X,Y\rangle=sabit$$

elde edilir.

iii) $X=\sum\limits_{i=1}^{n-2}\lambda_i V_{i+1}$ ve $Y=\sum\limits_{i=1}^{n-2}\mu_i V_{i+1}$ eğri boyunca Fermi paralel vektör alanları olmak üzere

$$\theta=\arccos\frac{\langle X,Y\rangle}{\|X\|\,\|Y\|}$$
$$\theta=sabit$$

olur.

iv) $X=\sum\limits_{i=1}^{n-2}\lambda_i V_{i+1}$ ve $Y=\sum\limits_{i=1}^{n-2}\mu_i V_{i+1}$vektör alanları eğri boyunca Fermi paralel olsun.

Bu durumda

$$\frac{\delta(X+Y)}{\delta s}=\frac{\delta X}{\delta s}+\frac{\delta Y}{\delta s}$$
$$\frac{\delta(X+Y)}{\delta s}=0$$

ve

$$\frac{\delta(cX)}{\delta s}=c\frac{\delta X}{\delta s}$$
$$\frac{\delta(cX)}{\delta s}=0$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

Balakrishnan, R. April 2005. Space curves, anholonomy and nonlinearity. Pramana Journal of Physics, Vol. 64, Number 4, pp. 607-615.

Barros, M. May 1997. General helices and a Theorem of Lancret. Proceeding of the American Mathematical Society, Vol. 125, Number 5, pp. 1503-1509.

Benn, I. M. and Tucker,R. W. 1989. Wave mechanics and inertial guidance. The American Physical Society, Vol,39, Number 6, pp. 1594-1601.

Berry, M. V. 1984. Proc. R. Soc. London, A392.

Bishop, R. L. 1975. There is More than One Way to Frame a Curve. The American Mathematical Monthly, Vol. 82, Number 3, pp. 246-251.

Carmo, P. and Monfedo, P. 1976. Differantial Geometry of Curves and Surfaces. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.

Chen, B. Y., Deprez, J. and Verheyen, P. 1992. Immersions with geodesics of 2-type. In Geometry and Topology of Submanifolds IV, Belgium.

Crouch, P. and Silva Leite, F. 1995. The dynamic interpolation problem on Riemannian manifolds, Lie groups and symmetric spaces. J. Dynam. Control Systems, Vol. 1, Number 2, pp. 177-202.

Çiftçi, Ü. August 2009. A generalization of Lancret's theorem. Journal of Geometry and Physics, Vol. 59, pp. 1597-1603.

Dandolof, R. 1989. Berry's Phase and Fermi-Walker Parallel Transport. Elsevier Science Publishers, Vol. 139, Number 1-2, pp. 19-20.

Fermi, E. 1922. Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fiz. Mat. Nat., 31, 184-306.

Fornari, S., Do Espirito-Santo, N., Frensel, K. and Ripoll, J. 2003. Constant mean curvature hyper-surfaces in Lie group with a bi-invariant metric. Manuscripta Math., Vol. 111, Number 4, pp. 459-470.

Gray, A., Abbena, E. and Salamon, S. 2006. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces With Mathematica, Chapman&Hall CRC, pp. 528-530.

Guggenheimer, H. W. 1963. Differential Geometry, McGraw-Hill, New York.

Hacısalihoğlu, H. H. 2000. Diferensiyel Geometri, Cilt I. A. Ü. Fen Fakültesi, s.154-175, Ankara.

Hacısalihoğlu, H. H. 2000. Diferensiyel Geometri, Cilt II. A. Ü. Fen Fakültesi, s. 54-68, Ankara.

Hawking, S. W. and Ellis, G. F. R. 1973. The large scale structure of spacetime, Cambridge Univ. Press, 4.1.

Inoguchi, J. I. August 2002. Biharmonic curves in Minkowski 3-space. Hindawi Publishing Corp. IJMMS 2003. 21, pp. 1365-1368.

Klein, F. and Lie, S. 1871. Uber diejenigen ebenenen kurven welche durch ein geschlossenes system von einfach unendlich vielen vartauschbaren linearen Transformationen in sich. Ubergehen. Math. Ann. 4. pp. 50-84.

Karakuş, F. and Yaylı, Y. 2012. On the Fermi-Walker Derivative and Non-rotating Frame. Int. Journal of Geometric Methods in Modern Physics, Vol. 9, Number 8. pp. 1250066-1-11.

Karakuş, F. and Yaylı, Y. 2012. The Fermi Derivative in the Hyper-surfaces. Int. Journal of Mathematics, (submitted-12021).

Karakuş, F. and Yaylı, Y. 2012. The Fermi-Walker Derivative in Lie Groups. Int. Journal of Geometric Methods in Modern Physics, (submitted-12102).

Kobayashi, S. and Nomizu, K. 1996. Foundations of differential geometry, John Wiley and Sons, Inc., New York.

Manoff, S. 1998. Fermi derivative and Fermi-Walker transports over (L_n, g)-spaces. Internat. J. Modern Phys. A, 13, Number 25. pp. 4289-4308.

Monterde, J. 2007. Curves with constant curvature ratios. Boletin de la Sociedad Mathematica Mexicana, 3a Seria. 13(1). pp, 177-186.

O'Neill, B. 1966. Elementary Differential Geometry. Academic Press, New York.

Pripoae, G. T.1999. Generalized Fermi-Walker transport, Libertas Math., XIX. pp. 65-69.

Pripoae, G. T. 2000. Generalized Fermi-Walker Parallelism Induced by Generalized Schouthen Connections. Balkan Society of Geometers. Differential Geometry and Lie Algebras, pp. 117-125.

Sabuncuoğlu, A. 2006. Diferensiyel Geometri, Nobel Yayınları, s. 264-277, Ankara.

Sachs, R. K.and Wu, H. 1977. General Relativity for Mathematicians, Springer Verlag, N.Y., 3.3.

Salkowski, E. 1909. Zur Transformation von Raumkurven. Mathematische Annalen, 66-4, pp. 517-557.

Thorpe, J. A. 1979. Elementary Topics in Differential Geometry. Springer-Verlag, pp. 45-52, Berlin.

Yaylı, Y., Ekmekci, N., Gök, İ., Gökçelik, F. 2012. Generalized Helix according to Bishop Frame in E^4., (submitted)

Walker, A.G. 1932. Relative co-ordinates. Proc. Royal Soc. Edinburgh, 52, pp. 345-353.

Weinberg, S. 1972. Geavitation and Cosmology, J. Wiley Publ., N.Y, 5.1.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Fatma KARAKUŞ
Doğum Yeri : Kırıkkale
Doğum Tarihi : 15.08.1981
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Batıkent Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi (2000)
Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2004)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi
Orta Öğretim Alan Öğretmenliği (2006)
Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı (2008)

Doktora : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı (2012)

Bilimsel Yayınlar (SCI ve Diğerleri)

1) Karakuş, F. , Yaylı, Y. (2012)., On the Fermi-Walker Derivative and Non-rotating Frame, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics (SCI).

2) Karakuş, F. , Yaylı, Y. (2012)., The Fermi Derivative in the Hyper-surfaces, International Journal of Mathematics (SCI-submitted).

3) Karakuş, F. , Yaylı, Y. (2012)., The Fermi-Walker derivative in Lie groups, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics (SCI-submitted).

4) Karakuş, F. (2009)., Fermi Türevi ve Uygulamaları, Doktora Semineri, (Danışman: Prof. Dr. Yusuf Yaylı) Ankara Üniversitesi.

5) Karakuş, F. (2008)., Meusnier Teoreminin 3 Boyutlu Çizgiler Uzayındaki Karşılığı, Yüksek Lisans Tezi, (Danışman: Prof. Dr. H.Hilmi Hacısalihoğlu) Ankara Üniversitesi.

6) Karakuş, F. (2006)., Meusnier Teoremi, Yüksek Lisans Semineri, (Danışman: Prof. Dr. H.Hilmi Hacısalihoğlu) Ankara Üniversitesi.

Sempozyum, Konferans ve Kongreler

1) 31 Mayıs- 1 Haziran 2012, 7. Ankara Matematik Günleri, Bilkent Üniversitesi, Ankara.

2) 3-16 Haziran 2012, X. Geometri Sempozyumu, Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir.

3) 02-03 Haziran 2011, 6. Ankara Matematik Günleri, Hacettepe Üniversitesi, Ankara.

4) 07-10 Haziran 2011, IX. Geometri Sempozyumu, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Samsun (Bildirili).

5) 20-23 July 2011, The 24th International Congress of the Jangjeon Mathematical Society, Selçuk Üniversitesi, Konya (Bildirili).

6) 03 – 04 Haziran 2010, 5. Ankara Matematik Günleri Sempozyumu, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Ankara.

7) 04 – 05 Haziran 2009, 4. Ankara Matematik Günleri Sempozyumu, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara.

8) 22 – 23 Mayıs 2008, 3. Ankara Matematik Günleri Sempozyumu, Ankara Üniversitesi, Ankara.