

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

BİR EĞRİNİN YÜZEY ÜZERİNE MERKEZİL İZDÜŞÜMÜ ÜZERİNE

BEDİA MERİH ÖZÇETİN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
DOÇ. DR. MUSTAFA DÜLDÜL**

İSTANBUL, 2015

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR EĞRİNİN YÜZEY ÜZERİNE MERKEZİL İZDÜŞÜMÜ ÜZERİNE

Bedia Merih Özçetin tarafından hazırlanan tez çalışması 12.08.2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Mustafa DÜLDÜL
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Mustafa DÜLDÜL
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Murat SARI

Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU

Bahçeşehir Üniversitesi

ÖNSÖZ

Tez çalışmam sırasında her konuda bana yol gösteren ve önerileriyle beni yönlendiren; benden yardımlarını, desteğini, bilgisini ve sabrını esirgemeyen kıymetli ve saygıdeğer hocam Doç. Dr. Mustafa DÜLDÜL'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarımın her anında bana koşulsuz destek olan, anlayış ve güvenlerini esirgemeyen aileme minnet ve şükranlarımı sunarım.

Son olarak çalışmalarım sırasında bana her konuda yardım eden arkadaşlarıma da teşekkür ederim.

Ağustos, 2015

Bedia Merih ÖZÇETİN

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ.....	vii
ÖZET.....	viii
ABSTRACT	x
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	2
1.3 Orijinal Katkı.....	2
BÖLÜM 2	
TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1 Tasarı Geometri	3
2.2 İzdüşüm Çeşitleri.....	5
2.2.1 Merkezi İzdüşüm veya Perspektif.....	5
2.2.2 Paralel İzdüşüm	6
2.2.2.1 Eşlenik Dik İzdüşüm.....	7
2.2.2.2 Aksonometrik İzdüşüm	7
2.2.2.3 Kotlu İzdüşüm.....	7
2.3 Afin Uzay ve Öklid Uzayı	8
2.4 Tanjant Vektörler ve Tanjant Uzaylar	9
2.5 Eğriler Teorisi	10
2.6 Yüzeyle Teorisi	11
2.7 Sayısal Analiz	12
2.7.1 Taylor Serisi	12
2.7.2 Taylor Teoremi.....	13
2.7.3 İki Değişkenli Eşitlikler (Newton Raphson)	13

BÖLÜM 3

PARAMETRİK YÜZEYE DİK İZDÜŞÜM EĞRİSİ İÇİN İKİNCİ MERTEBEDEN ALGORİTMA..... 15

- 3.1 Dik İzdüşüm Eğrisi 15
- 3.2 İzdüşüm İlerleyişi 23
 - 3.2.1 Genel Bakış 23
 - 3.2.2 İlerleyiş Düzeni..... 25

BÖLÜM 4

BİR EĞRİNİN YÜZEY ÜZERİNE MERKEZİL İZDÜŞÜMÜ 27

- 4.1 İzdüşüm Eğrisi İçin Birinci ve İkinci Dereceden Diferansiyel Eşitlikler 27
- 4.2 Eğri İlerleyişi 31
- 4.3 Hata Yaklaşımı 33
- 4.4 İzdüşüm Eğrisinin Çizimi İçin Algoritma 35
- 4.5 İzdüşüm Eğrisinin Çizim Programı 35
- 4.6 Merkezil İzdüşüm İçin Örnekler 42

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER 49

KAYNAKLAR..... 50

ÖZGEÇMİŞ..... 52

SİMGE LİSTESİ

π	İzdüşüm düzlemi
\mathbb{R}	Reel Sayılar kümesi
E^n	n-boyutlu Öklid Uzayı
$S(u, w)$	Yüzeyin parametrik denklemi
S_u	Tanjant vektör
$\ \cdot \ $	Norm
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Öklid iç Çarpımı
ε	Mutlak hata
α	İterasyonları durdurmak için verilen hata sınırı
k	Adım aralığı

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2.1 İzdüşüm Prensipleri	4
Şekil 2.2 Doğru izdüşümü.....	4
Şekil 2.3 Düzlem İzdüşümü	5
Şekil 2.4 Dik İzdüşüm	6
Şekil 2.5 Eğik İzdüşüm	6
Şekil 2.6 Kaybolmuş İzdüşüm.....	7
Şekil 3.1 Eğri İzdüşümü	16
Şekil 4.1 Merkezil İzdüşüm	28
Şekil 4.2 Parametrik Eğri Üzerinde İlerleyiş	32
Şekil 4.3 Çemberin Merkezil İzdüşümü.....	43
Şekil 4.4 $v_p = 0.1$ ve $h = 0.001$ alınarak izdüşüm eğrisi	44
Şekil 4.5 $v_p = 0.02$ ve $h = 0.00001$ alınarak izdüşüm eğrisi	44
Şekil 4.6 Parabolün Merkezil İzdüşümü	46
Şekil 4.7 Hypotrochoid Eğrisinin Merkezil İzdüşümü.....	47
Şekil 4.8 Lissajous Eğrisinin Merkezil İzdüşümü	48

BİR EĞRİNİN YÜZEY ÜZERİNE MERKEZİL İZDÜŞÜMÜ ÜZERİNE

Bedia Merih ÖZÇETİN

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mustafa DÜLDÜL

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, literatür özeti ve tezin amacı verilmiştir.

İkinci bölümde tasarı geometri ile sayısal analizin bazı temel kavramlarına yer verilmiştir. Ayrıca eğriler ve yüzeylerle ilgili bazı temel tanımlara değinilmiştir.

Üçüncü bölümde, ikinci mertebeden Taylor açılımı kullanılarak bir parametrik eğrinin bir parametrik yüzey üzerine dik izdüşümü tanıtılmıştır. Dik izdüşüm eğrisi için oluşan kesme hatası hesaplanmıştır.

Dördüncü bölüm tezin orijinal kısmıdır.

Dördüncü bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında ikinci mertebeden Taylor açılımı kullanılarak bir parametrik eğrinin bir parametrik yüzey üzerine merkezil izdüşümü araştırılmıştır. Oluşan kesme hatası hesaplanarak çeşitli örnekler verilmiştir.

Beşinci bölüm ise sonuç ve önerilerden oluşmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Eğri izdüşümü, dik izdüşüm, merkezil izdüşüm, parametrik yüzey, Taylor yaklaşımı, kesme hatası, ilerleyiş.

ON THE CENTRAL PROJECTION OF A CURVE ONTO SURFACE

Bedia Merih ÖZÇETİN

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL

This thesis consists of five sections. In the first section literature summary and the purpose of the thesis are given.

The second section includes some basic concepts of descriptive geometry and numerical analysis. Also, some basic definitions of curves and surfaces are mentioned.

In the third section, orthogonal projection of a parametric curve onto a parametric surface is introduced by using Taylor expansion up to second order. Resultant truncation error is calculated for orthogonal projection curve.

The fourth section is original part of the thesis.

In the fourth section, central projection of a parametric curve onto a parametric surface is researched by using Taylor expansion up to second order in Euclidean 3-space. Truncation error is calculated, some examples are given.

Fifth chapter consists of conclusions and suggestions.

Keywords: Curve projection, orthogonal projection, central projection, parametric surface, Taylor approximation, truncation error, marching.

1.1 Literatür Özeti

Bir yüzey üzerindeki eğrilerin bilgisayar destekli olarak incelenmesi geniş bir uygulama alanına sahiptir. Bir noktanın veya eğrinin bir eğri veya yüzey üzerine dik izdüşümünün hesaplanması, bilgisayar destekli tasarım, bilgisayar animasyonu ve insan-makine etkileşimlerinin sayesinde oldukça ilgi çekmektedir [1-3]. Dik izdüşümü hesaplamak için varolan yaklaşımlar cebirsel, diferansiyel denklem, geometrik ve alt bölümlere ayırma yaklaşımlarını içermektedir.

İzdüşüm tanımından, izdüşüm koşulları cebirsel denklemlerin bir sistemi olarak ifade edilebilir. Bu denklemleri çözmek için çeşitli yöntemler önerilmiştir. 1985 yılında Mortenson polinom denklemler sisteminin köklerini bulmak için Newton-Raphson yöntemini kullanmıştır [4]. Aynı zamanda Zhou vd. 1993 yılında çözüm için problemi polinom denklemler sistemine dönüştürmüşlerdir [5]. Piegl ve Tiller 1997 yılında, nokta izdüşüm ve değişim problemini çözmek için Newton-Raphson iterasyon yaklaşımının ayrıntılı bir tanımını vermişlerdir [6].

Bir cebirsel denklem sisteminin bir diferansiyel denklem sistemine dönüşümü, izdüşüm hesaplaması için bir alternatif sunmaktadır. Bu bağlamda, Pegna ve Wolter 1996 yılında diferansiyel denklemlerin genel sistemini inşa etmişler ve Runga-Kutta, Adams-Barsforth veya diğer sayısal yöntemlerle çözülebilecek bu problemi birinci dereceden başlangıç değer problemi olarak formüle etmişlerdir [7].

İzdüşümün geometrik etkilerini dikkate alarak, Hu ve Waller 2005 yılında nokta izdüşümü için tamamen geometrik bir yöntem önermişlerdir [8]. 2009 yılında ise tüm

yüzeyin ikinci dereceden yerel geometrik bilgilerinden faydalanmak amacıyla Liu vd. tarafından geliştirilmiş bir algoritma önerilmiştir [9]. Her iki yöntem nokta izdüşümü için oldukça etkilidir [10].

Alt bölümlere ayırma yöntemlerinde, eğri veya yüzey birden fazla parçaya veya yamaya bölünür. Burada çözüm sürecinin hedefi, izdüşüm noktasını içeren bir parça veya yama bulmaktır. 1999 yılında Dyllang ve Luther [11] ile 2003 yılında Ma ve Hewitt'in [12] çalışmalarında eğri ya da yüzey direkt olarak alt bölümlere ayrılmıştır.

Genel olarak, eğrinin dik izdüşüm problemini çözmek için iki temel yaklaşım türü vardır. Biri diferansiyel denklem yaklaşımıdır [5],[6],[13]. Bu yaklaşımın dezavantajı, hesaplama verimliliği ve hassaslığın büyük ölçüde sayısal çözücüye bağlı olmasıdır ve kararlılığı, başlangıç değeri ve adım boyutuna bağlıdır. Diğer yaklaşım yöntemi ise nokta izdüşümüne dayanır. Bu yaklaşımda verilen ana eğri nokta dizisine ayrılır ve bu noktaların izdüşümü [8], [9] da verilen nokta izdüşüm yöntemiyle bulunabilir.

1.2 Tezin Amacı

Bu tez çalışmasının amacı, 3-boyutlu Öklid uzayında parametrik olarak verilen bir eğrinin, bir parametrik yüzey üzerine merkezil izdüşümünü ikinci mertebeden Taylor yaklaşımıyla araştırmaktır.

1.3 Orijinal Katkı

Bu çalışmada 3-boyutlu Öklid uzayında bir parametrik eğrinin bir parametrik yüzey üzerine merkezil izdüşümüne ikinci mertebeden Taylor açılımı ile nasıl yaklaşımda bulunulabileceği gösterilerek, ilgili yaklaşım için kullanılan algoritmaya yer verilmiştir.

BÖLÜM 2

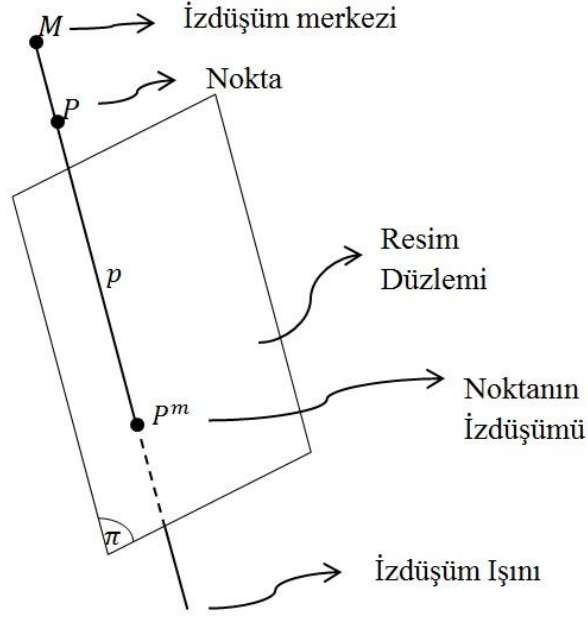
TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanımlara yer verilecektir.

2.1 Tasarı Geometri

Tanım 2.1 Gösterilmek istenen uzay elemanlarının resim düzlemindeki şeklinin kendisinden başka bir diğer elemana ait olmaması, yani bu şeklin birden fazla bir başka elemanı göstermemesi, eleman ile şekil arasında bire birlik prensibini ifade eder. Böylece bir değer ancak ve yalnız bir şekil ile belirtilmesi; düzlemdeki bir şekilden de ancak ve yalnız uzaydaki bir değere geçilmesi sağlanmış olur. Bu, eleman ile kendi şekli arasında birden fazla olmayan bir tekabül anlamına gelir. Bu esasa **bire birlik prensibi** adı verilir [14].

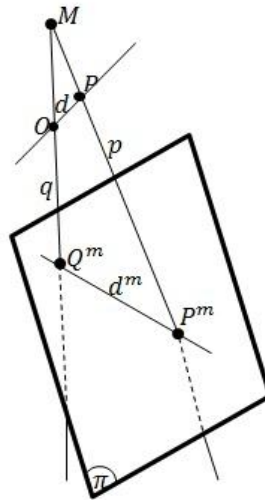
Tanım 2.2 Tasarı geometride, uzaydaki elemanların ve onların birbirleriyle olan durumlarının bire birlik prensibine sadık kalınarak, bir düzlem üzerinde gösterilmesine **izdüşüm** adı verilir. Uzayda bir taraftan gelişigüzel durumda bir π düzlemi ve bunun dışında bir P noktası, diğer taraftan her doğrultuda ışık üreten öz bir M ışık kaynağı düşünelim. Bu kaynaktan gelen bir p ışını P noktasından geçecek ve bu nokta π düzlemi üzerine gölge durumunda olan P^m noktası olarak düşecektir. İşte gölge durumunda olan P^m noktasına P 'nin izdüşümü, π düzlemine **resim** veya **izdüşüm düzlemi**; M noktasına **izdüşüm merkezi** ve p ışınına da **izdüşüm ışını** adı verilir [14].



Şekil 2.1 İzdüşüm Prensibi

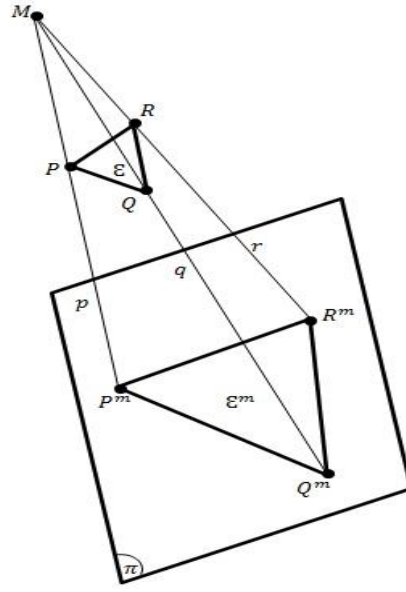
Bir noktanın izdüşümü bu noktayı izdüşüm merkezine birleştiren bir doğrunun π resim düzlemini kestiği nokta, yani bu ışının izidir. Böylece bir noktanın izdüşümü yine bir noktadır.

p ışını üzerinde olmayan bir diğer Q noktası düşünelim. Uzayda P ve Q^m noktası bir d doğrusu teşkil ederler. Şekilden görülüyor ki d doğrusunun izdüşümü $d^m = P^m Q^m$ doğrusundan ibarettir. Kısaca, bir doğrunun izdüşümü genel halde yine bir doğrudur. Daha genel bir ifade ile bir çizginin izdüşümü yine bir çizgidir [14].



Şekil 2.2 Doğru izdüşümü

d doğrusu üzerinde olmayan bir R noktası P ve Q ile birlikte bir ε düzlemi veya köşeleri P, Q, R olan ve üçgenden ibaret bulunan bir düzlemsel şekli teşkil eder. Böylece bu şeklin izdüşümü $\varepsilon^m = P^m Q^m R^m$ şeklinden ibarettir. Diğer ve genel bir deyimle; her yüzeysel düzlemsel şeklin izdüşümü genel halde yine bir düzlemsel şekildir.



Şekil 2.3 Düzlem İzdüşümü

2.2 İzdüşüm Çeşitleri

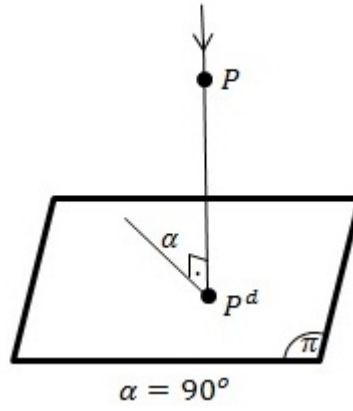
M izdüşüm merkezinin öz veya sonsuzda bir nokta olmasına göre izdüşümler ikiye ayrılır.

2.2.1 Merkezi İzdüşüm veya Persfektif

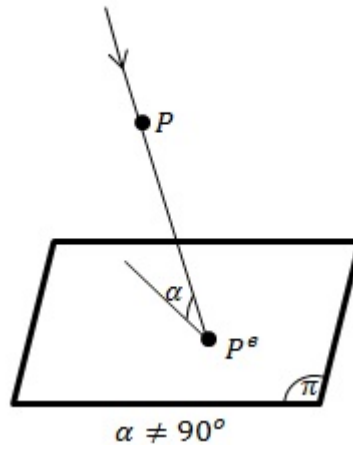
M izdüşüm merkezi öz bir nokta olarak düşünülürse böyle bir izdüşüm **Merkezi İzdüşüm** veya **Persfektif** olarak isimlendirilir. Uzayın elemanları ve uzaydaki durumlar bir düzlemde birebir olarak tek bir şekil ile temsil edilirler. Bu izdüşümde uzaydaki diklik ve paralellikler bozulmuştur.

2.2.2 Paralel İzdüşüm

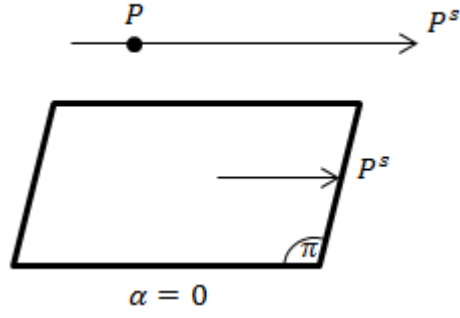
M izdüşüm merkezi sonsuzda bulunursa izdüşüm ışınları birbirine paralel olur. Bu şekildeki her izdüşüme **Paralel İzdüşüm** adı verilir. İzdüşüm ışınları, π resim düzlemine ve bunların α eğim açısının değerine nazaran, üç farklı durumda bulunurlar. Buna göre izdüşümler de şekilde olduğu gibi dik, eğik ve kaybolmuş izdüşüm olarak isimlendiririrler.



Şekil 2.4 Dik İzdüşüm



Şekil 2.5 Eğik İzdüşüm



Şekil 2.6 Kaybolmuş İzdüşüm

2.2.2.1 Eşlenik Dik İzdüşüm

Bu izdüşümde uzayın elemanları birbirine dik iki düzlemde birer çift ile temsil edilirler. Bundan dolayı bu çeşit izdüşümlere **eşlenik izdüşümler** denilmiştir. İzdüşüm ışınları düzleme diktir. Elemanların eğik ışınlarla bu düzlemlere düşen gölgeleri, eğik birer izdüşümden ibarettir. Böylece eşlenik izdüşümler dik ve eğik olarak uzayı birebir temsil edebilirler [14].

2.2.2.2 Aksonometrik İzdüşüm

Uzayın elemanları uzayda birbirine dik, O noktasında kesişen üç X, Y, Z eksenlerine göre ifade edilmiş ise bu elemanlar bu eksenlerle birlikte resim düzlemi olarak kabul edilen bir π düzlemine izdüşürülebilir. Böylece elde edilen izdüşüme **Aksonometrik İzdüşüm** denir [14].

2.2.2.3 Kotlu İzdüşüm

Bu izdüşümde uzayın elemanları belirli bir p resim düzlemine nazaran farklı yükseklikte noktalarla meydana gelmiş farzedilerek her noktanın yüksekliği veya kotu dik izdüşümün yanında belirtilmiş ise böylece elde edilen izdüşüme **Kotlu İzdüşüm** adı verilir [14].

2.3 Afin Uzay ve Öklid Uzayı

Tanım 2.3 $A \neq \emptyset$ bir küme ve V, \mathbb{R} cismi üzerinde n -boyutlu bir vektör uzayı olsun. Eğer

$$f : A \times A \rightarrow V$$

$$(P, Q) \rightarrow f(P, Q) = \overrightarrow{PQ}$$

fonksiyonu

A1) $\forall P, Q, R \in A$ için

$$f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R) \text{ (veya } \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR} \text{)}$$

A2) $\forall P \in A, \forall \alpha \in V$ için $\overrightarrow{PQ} = \alpha$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ vardır

özelliklerini sağlıyorsa A' ya V vektör uzayı ile birleşen n -boyutlu bir **Afin Uzay** denir [15].

Tanım 2.4 V, n -boyutlu bir vektör uzayı ve A, V vektör uzayı ile birleşen bir afin uzay olsun. $P_0, P_1, \dots, P_n \in A$ noktaları için $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ vektör sistemi V 'nin bir bazı ise $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ kümesine A afin uzayının bir **Afin çatısı** denir. P_0 noktasına çatının **başlangıç noktası**, P_1, P_2, \dots, P_n noktalarına da afin çatının **birim noktaları** denir [15].

Tanım 2.5 V, n -boyutlu bir reel iç-çarpım uzayı olsun. V ile birleşen A afin uzayına n boyutlu **Öklid uzayı** denir.

$V = \mathbb{R}^n$ standart reel vektör uzayında, $X = (x_1, \dots, x_n)$ ve $Y = (y_1, \dots, y_n)$ olmak üzere

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (X, Y) \rightarrow \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

standart iç-çarpımı (Öklid iç-çarpımı) tanımlı olduğunda, $V = \mathbb{R}^n$ iç-çarpım uzayı ile birleşen $A = \mathbb{R}^n$ afin uzayına n -boyutlu standart **Öklid uzayı** denir ve E^n ile gösterilir.

Tanım 2.6 E^n 'de sıralı bir $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ nokta $n+1$ -lisine \mathbb{R}^n de karşılık gelen $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ vektör n -lisi \mathbb{R}^n için bir ortonormal baz ise $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ sistemine E^n 'nin bir dik çatısı veya **Öklid çatısı** denir.

Tanım 2.7 E^n , n -boyutlu Öklid uzayı ve $S = \{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ afin çatısı verilsin. $\{\overrightarrow{P_0P_i} | i = 1, \dots, n\}$ sistemi \mathbb{R}^n 'de ortonormal baz ise S afin çatısına bir dik çatı ve karşılık gelen afin koordinat sistemine **dik koordinat sistemi** denir. Ayrıca bu sistemin fonksiyonlarına da **Öklid koordinat fonksiyonları** denir.

Tanım 2.8 E^n Öklid uzayı, $U \subset E^n$ açık alt küme olsun. Eğer $f : U \subset E^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu k -yüncü mertebeden kısmi türevlere sahip ve bu türevler sürekli ise f fonksiyonuna k -yüncü mertebeden **diferensiyellenebilir fonksiyon** adı verilir.

k -yüncü sınıftan diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi $C^k(U, \mathbb{R})$ ile gösterilir, yani $C^k(U, \mathbb{R}) = \{f | f : U \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^k\}$ [15].

2.4 Tanjant Vektörler ve Tanjant Uzaylar

Tanım 2.9 A, V vektör uzayı ile birleşen n -boyutlu bir afin uzay olsun. $P \in A, \vec{v} \in V$ için (P, \vec{v}) ikilisine A afin uzayında bir tanjant vektör denir ve \vec{v}_p ile gösterilir.

$P \in A$ noktasında A afin uzayının tanjant vektörlerinin kümesi $T_A(P)$ ile gösterilir ve

$$T_A(P) = \left\{ \vec{v}_p = (P, \vec{v}) \mid P \in A, \vec{v} \in V \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.10 A, V vektör uzayı ile birleşen n -boyutlu bir afin uzay olsun. $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta sistemi A afin uzayında bir afin çatı olmak üzere $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ kümesi V nin bir bazıdır. $\vec{v}_p = (P, \overrightarrow{PQ})$ ve $\overrightarrow{PQ} \in V$ olduğundan $\lambda_i \in \mathfrak{S}, i = 1, \dots, n$ skalerleri için

$\overrightarrow{PQ} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{P_0P_i}$ yazılabilir. Burada $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ n -lisine $\vec{v}_p \in T_A(P)$ tanjant vektörünün A 'daki $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ çatısına göre koordinatları veya bileşenleri denir ve $\vec{v}_p = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)|_p$ ile gösterilir.

2.5 Eğriler Teorisi

Tanım 2.11 $I \subseteq \mathbb{R}$, $I = (a, b)$ bir açık alt aralık olmak üzere

$$\alpha : I \rightarrow E^n$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$$

diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\alpha(I) \subset E^n$ alt kümesine E^n de **diferensiyellenebilir bir eğri (veya parametrik eğri)** denir. Ayrıca (I, α) ikilisine eğrinin koordinat komşuluğu, I alt kümesine eğrinin **parametre aralığı** ve $t \in I$ reel sayısına da eğrinin **parametresi** denir. Bir eğri $M = \alpha(I) \subset E^n$ şeklinde veya kısaca (α) ile gösterilir.

Eğer $\alpha : I \rightarrow E^n$, C^k sınıfından ise α 'ya C^k **sınıfından eğri** denir [15].

Tanım 2.12 E^n 'de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha : I \rightarrow E^n$ fonksiyonunun koordinat fonksiyonları $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ olmak üzere

$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)) \subset E^n$ yazılabilir. Buradan elde edilen

$$\frac{d\alpha}{dt}\Big|_t = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}\Big|_t, \frac{d\alpha_2}{dt}\Big|_t, \dots, \frac{d\alpha_n}{dt}\Big|_t \right) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt}, \dots, \frac{d\alpha_n}{dt} \right)\Big|_t$$

vektörüne M eğrisinin $\alpha(t) \in M$ noktasındaki hız vektörü denir. Bir diğer ifadeyle,

$$(\alpha(t), \alpha'(t)) = \alpha'(t)\Big|_{\alpha(t)} \in T_{E^n}(\alpha(t))$$

vektörüne M eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki (I, α) komşuluğuna göre hız vektörü denir [15].

Tanım 2.13 E^n 'de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\|\alpha'\|: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow \|\alpha'(t)\|$$

olarak tanımlı fonksiyona M eğrisinin (I, α) koordinat komşuluğuna göre skalar hız fonksiyonu ve $\|\alpha'\| \in \mathbb{R}$ reel sayısına da M eğrisinin (I, α) koordinat komşuluğuna göre $\alpha(t)$ noktasındaki **skalar hızı** denir [15].

Tanım 2.14 E^n 'de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. M nin her noktasındaki hız vektörü birim ise yani $\|\alpha'(s)\| = 1, \forall s \in I$ ise M 'ye **birim hızlı eğri** denir ve bu durumda $s \in I$ parametresine de eğrinin **yay parametresi** denir.

Tanım 2.15 Her noktada hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir. Her t için $\alpha'(t) \neq \vec{0}$ oluyorsa (yani $\|\alpha'(t)\| \neq 0$) ise α 'ya **regüler eğri** denir.

Tanım 2.16 E^n 'de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $a, b \in I$ olmak üzere M eğrisinin a 'dan b 'ye **yay uzunluğu** diye eğrinin $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki eğri boyunca uzaklığa karşılık tutulan

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt, t \in I$$

reel sayısına denir.

2.6 Yüzeyler Teorisi

Tanım 2.17 $U \subset E^2$ bir bağlantılı açık küme ve $\phi: U \subset E^2 \rightarrow E^3$ bir regüler dönüşüm ($\text{rank } \phi = \text{boy } U = 2$) olsun. Eğer $\phi: U \rightarrow \phi(U)$ dönüşümü bir homeomorfizm ise $\phi(U)$ kümesine E^3 de bir regüler yüzey denir. Yani $\phi: U \subset E^2 \rightarrow E^3$ dönüşümü

- 1) ϕ , 1-1,
- 2) ϕ , regüler,
- 3) ϕ^{-1} fonksiyonu sürekli,

özelliklerini sağlıyorsa $\phi(U) \subset E^3$ 'e bir regüler yüzey denir. ϕ fonksiyonuna da $M = \phi(U) \subset E^3$ alt kümesinin bir parametrelendirilmesi denir [15].

2.7 Sayısal Analiz

Tanım 2.18 Herhangi bir işlem sonucu elde edilen gerçek değer s , bilgisayarın aynı işlemler sonucu elde ettiği değer \tilde{s} olsun. \tilde{s} sayısına s sayısının **yaklaşık değeri** denir [16].

Tanım 2.19 Bir s sayısının bir yaklaşık değeri \tilde{s} olsun. Bu durumda

$$E_s = |s - \tilde{s}|$$

değerine **mutlak hata** denir [16].

2.7.1 Taylor Serisi

Bir fonksiyonun x noktasındaki değeri, buna yakın bir $x = x_0$ noktasındaki değerleri cinsinden;

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

şeklinde yazılabilir. Bunun geçerli olabilmesi için seri yakınsak olmalı ve $x = x_0$ noktasında türev tanımlı olmalıdır. Sonsuz sayıda terime sahip bu fonksiyonda belli sayıda terim alınması durumunda oluşacak kesme hatasının değeri x 'in (x_0) noktasına yakınlığına ve alınan terim sayısına bağlıdır. n -inci terimden sonrası kesiliyorsa kesme hatası

$$e = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \left| \frac{d^{n+1}f(x)}{dx^{(n+1)}} \right| = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{d^{n+1}f(x)}{dx^{(n+1)}}$$

şeklinde yazılabilir. Oluşan bu hatanın mertebesi h^{n+1} olup, hata mertebesi $O(h^{n+1})$ olarak gösterilir [17].

2.7.2 Taylor Teoremi

f ve ilk n türevi, $f', f'', \dots, f^{(n)}$ $[a, b]$ veya $[b, a]$ aralıklarında sürekli iseler ve $f^{(n)}$, (a, b) veya (b, a) aralığında türevlenebiliyorsa, a ile b arasında

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

olmasını sağlayacak bir c sayısı bulunur [18].

2.7.3 İki Değişkenli Eşitlikler (Newton Raphson)

$f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ denklemleri verilsin. Böyle bir tanımlamada öyle bir (x) ve (y) değeri bulunmalıdır ki her iki denklemi de aynı anda sağlamalıdır. Eşitlikler tek değişkenli sistemlerde olduğu gibi Taylor serisine açılarak yazıldığında aşağıdaki şekilde ifade edilebilirler.

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\Delta y}{1!} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$$

$$g(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx g(x_0, y_0) + \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\Delta y}{1!} \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y}$$

Yukarıdaki eşitliklerde denklemin kökü eşitliği sıfır yapan değer olduğu için eşitlikler sıfıra eşitlenerek aşağıdaki şekillerde yazılabilirler. Bu yazım tarzında (x) ve (y) değerlerinin eski ile yeni farkları (Δx) ve (Δy) şeklinde gösterilmektedir.

$$0 \approx f(x_0, y_0) + \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\Delta y}{1!} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$$

$$0 \approx g(x_0, y_0) + \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\Delta y}{1!} \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y}$$

Yukarıdaki eşitlikler bilinmeyenler olarak (Δx) ve (Δy) alınarak iki bilinmeyenli iki denklem olarak aşağıdaki gibi matris formunda katsayılar matrisi, bilinmeyenler vektörü ve eşitlik vektörü oluşturularak yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

Bu denklem sisteminin çözümünde x_0, y_0 başlangıç değerleri ve mutlak hata (ε) değeri verilerek işleme başlanır.

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y$$

Elde edilen bu yeni değerler $(x_1), (y_1)$ başlangıç değerleri gibi kullanılarak denklem sistemi yeni bir (Δx) ve (Δy) değeri elde etmek üzere çözülür. Her çözüm adımı sonunda elde edilen yeni değerler (x_{i+1}) ve (y_{i+1}) aşağıdaki şekilde genelleştirilerek ifade edilebilirler.

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y$$

İterasyonun bitirilebilmesi için,

$$|\Delta x| < \varepsilon, |\Delta y| < \varepsilon$$

veya

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon, |y_{n+1} - y_n| < \varepsilon$$

şartlarının sağlanması aranılır [19].

PARAMETRİK YÜZEYE DİK İZDÜŞÜM EĞRİSİ İÇİN İKİNCİ MERTEBEDEN ALGORİTMA

Bu bölümde, verilen bir parametrik eğrinin bir parametrik yüzey üzerine dik izdüşümü bulunurken ikinci mertebeden Taylor yaklaşımı kullanılarak, eğri üzerinde ilerleyiş incelenecek ve oluşan kesme hatasının hesaplanmasına yer verilecektir.

3.1 Dik izdüşüm Eğrisi

3-boyutlu Öklid uzayında bir parametrik eğri ve bir parametrik yüzey verilsin. Eğri ve yüzeyin kesişmediği kabul edilmektedir.

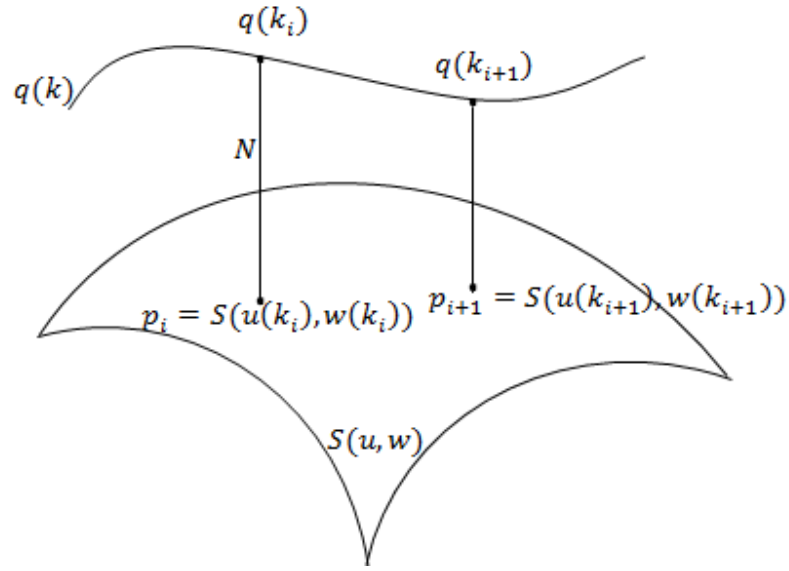
Eğri üzerinde bir q noktası

$$q(k) = [x(k) \ y(k) \ z(k)]^T \quad (3.1)$$

ve u ve w ile parametrelendirilmiş yüzey

$$S(u, w) = [x(u, w) \ y(u, w) \ z(u, w)]^T \quad (3.2)$$

olsun. q noktasının S yüzeyi üzerindeki izdüşümü p olsun. p ve q noktaları arasında birebir bir karşılık olduğu kabul edilsin. q noktası eğri boyunca hareket ettikçe, p noktası S yüzeyinde bir eğri çizer. Bu durumda, 3-boyutlu parametrik eğri ana eğri olarak ve yüzey üzerindeki izdüşümü de izdüşüm eğrisi olarak adlandırılır. izdüşüm eğrisi S üzerinde olduğundan $p(u, w)$ noktası, S yüzeyinin u ve w parametrelerinin bir fonksiyonudur.



Şekil 3.1 Eğri İzdüşümü

Bununla birlikte,

$$p(u, w) = p(u(k), w(k)) \quad (3.3)$$

olacak şekilde ana eğrinin k parametresi ile ilişkilendirilebilir.

İzdüşüm eğrisi $u = u(k)$ ve $w = w(k)$ olacak şekilde ana eğrinin parametresiyle parametrelendirilmiştir. İzdüşüm eğrisi, verilen ana eğri ve parametrik yüzey kullanılarak sayısal olarak hesaplanabilir [10].

Aşağıda izdüşüm eğrisinin birinci ve ikinci dereceden diferansiyelleri analiz edilmektedir.

$N = p - q$ alalım. p noktası, q noktasının izdüşümü olduğundan, N yüzeye p noktasında diktir. Buradan

$$N \cdot S_u = 0 \quad (3.4)$$

$$N \cdot S_w = 0 \quad (3.5)$$

yazılabilir. Burada

$$S_u = \left[\frac{dx}{du} \frac{dy}{du} \frac{dz}{du} \right]^T \text{ ve } S_w = \left[\frac{dx}{dw} \frac{dy}{dw} \frac{dz}{dw} \right]^T$$

vektörleri u ve w -parametre eğrileri boyunca p noktasında yönlü teğet vektörlerdir [10].

$N = p - q$ yazılır ve (3.4) eşitliğinin k 'ya göre türevi alınır;

$$p \cdot S_u = q \cdot S_u \Rightarrow p_k \cdot S_u + p \cdot \frac{dS_u}{dk} = q_k \cdot S_u + q \cdot \frac{dS_u}{dk}$$

$$p_k \cdot S_u + (p-q) \cdot \frac{dS_u}{dk} = q_k \cdot S_u$$

$$p_k \cdot S_u + N \cdot \frac{dS_u}{dk} = q_k \cdot S_u \quad (3.6)$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde (3.5) eşitliğinin k 'ya göre türevi alınır;

$$p \cdot S_w = q \cdot S_w \Rightarrow p_k \cdot S_w + p \cdot \frac{dS_w}{dk} = q_k \cdot S_w + q \cdot \frac{dS_w}{dk}$$

$$p_k \cdot S_w + (p-q) \cdot \frac{dS_w}{dk} = q_k \cdot S_w$$

$$p_k \cdot S_w + N \cdot \frac{dS_w}{dk} = q_k \cdot S_w \quad (3.7)$$

eşitliği elde edilir.

Diğer taraftan $p(u, w) = p(u(k), w(k))$ olduğundan, yukarıda bulunan türevler

$$p_k = S_u u_k + S_w w_k \quad (3.8)$$

$$\frac{dS_u}{dk} = S_{uu} u_k + S_{uw} w_k \quad (3.9)$$

$$\frac{dS_w}{dk} = S_{uw} u_k + S_{ww} w_k \quad (3.10)$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradan (3.8), (3.9) ve (3.10) eşitliklerinde bulunan ifadeler (3.6) ve (3.7) eşitliklerinde sırasıyla yerine yazılırsa

$$(S_u u_k + S_w w_k) \cdot S_u + N \cdot (S_{uu} u_k + S_{uw} w_k) = q_k \cdot S_u \quad (3.11)$$

$$(S_u u_k + S_w w_k) \cdot S_w + N \cdot (S_{uw} u_k + S_{ww} w_k) = q_k \cdot S_w \quad (3.12)$$

elde edilir. Bu eşitlikler düzenlenirse

$$(S_u \cdot S_u + N \cdot S_{uu}) u_k + (S_u \cdot S_w + N \cdot S_{uw}) w_k = q_k \cdot S_u \quad (3.13)$$

$$(S_u \cdot S_w + N \cdot S_{uw}) u_k + (S_w \cdot S_w + N \cdot S_{ww}) w_k = q_k \cdot S_w \quad (3.14)$$

olup, bulunan bu eşitlikler matris formunda yazılırsa

$$\begin{bmatrix} S_u \cdot S_u + N \cdot S_{uu} & S_u \cdot S_w + N \cdot S_{uw} \\ S_u \cdot S_w + N \cdot S_{uw} & S_w \cdot S_w + N \cdot S_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ w_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_k \cdot S_u \\ q_k \cdot S_w \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

sistemi elde edilir. Bu sistem

$$G = \begin{bmatrix} S_u \cdot S_u + N \cdot S_{uu} & S_u \cdot S_w + N \cdot S_{uw} \\ S_u \cdot S_w + N \cdot S_{uw} & S_w \cdot S_w + N \cdot S_{ww} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

olmak üzere

$$G \begin{bmatrix} u_k \\ w_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_k \cdot S_u \\ q_k \cdot S_w \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

şeklinde yazılırsa, (3.17) eşitliği

$$\begin{bmatrix} u_k \\ w_k \end{bmatrix} = G^{-1} \cdot \begin{bmatrix} q_k \cdot S_u \\ q_k \cdot S_w \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

şeklinde çözülebilir.

Yukarıda bulunan (3.18) eşitliği $|G| = 0$ olmadığı sürece iyi tanımlıdır. $R = \|N\|$ ve N

yönünde bir birim vektör $n = \frac{N}{\|N\|}$ olsun. Ayrıca

$$E = S_u \cdot S_u \quad F = S_u \cdot S_w \quad G = S_w \cdot S_w$$

ve

$$L = n \cdot S_{uu} \quad M = n \cdot S_{uw} \quad H = n \cdot S_{ww}$$

sırasıyla, yüzeyin birinci ve ikinci temel form katsayıları olmak üzere G matrisi

$$G = \begin{bmatrix} E + RL & F + RM \\ F + RM & G + RH \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

şeklinde ifade edilebilir. Böylece G matrisinin determinanı

$$\begin{aligned} |G| &= \begin{vmatrix} E + RL & F + RM \\ F + RM & G + RH \end{vmatrix} \\ &= EG + EHR + GLR + LHR^2 - F^2 - FMR - FMR - M^2R \end{aligned} \quad (3.20)$$

olarak bulunur. Bu eşitlik düzenlenirse

$$|G| = (EG - F^2) + (GL - 2FM + EH)R + (LH - M^2)R^2 \quad (3.21)$$

elde edilir.

Böylece $|G|$, R 'ye bağlı bir polinom olarak görülebilir. Yüzey diferansiyel geometrisine göre, bu polinomun kökleri, p noktasında S yüzeyinin iki asli eğrilik yarıçapıdır. Bu yüzden parametrik eğrinin q noktası yüzeyin asli eğrilik merkezi ile çakışmadığında (3.18) eşitliği iyi tanımlıdır [10].

(3.6) eşitliğinde $N = p - q$ yazılırsa

$$p_k \cdot S_u + p \cdot \frac{dS_u}{dk} = q_k \cdot S_u + q \cdot \frac{dS_u}{dk}$$

olup, bu son eşitliğin k 'ya göre türevi alınırsa

$$p_{kk} \cdot S_u + p_k \cdot \frac{dS_u}{dk} + p_k \cdot \frac{dS_u}{dk} + p \cdot \frac{d^2S_u}{dk^2} = q_{kk} \cdot S_u + q_k \cdot \frac{dS_u}{dk} + q_k \cdot \frac{dS_u}{dk} + q \cdot \frac{d^2S_u}{dk^2}$$

veya

$$p_{kk} \cdot S_u + 2p_k \cdot \frac{dS_u}{dk} + N \cdot \frac{d^2S_u}{dk^2} = q_{kk} \cdot S_u + 2q_k \cdot \frac{dS_u}{dk} \quad (3.22)$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.7) eşitliğinde $N = p - q$ yazılırsa

$$p_k \cdot S_w + p \cdot \frac{dS_w}{dk} = q_k \cdot S_w + q \cdot \frac{dS_w}{dk}$$

olup, k ya göre türevi alınırsa

$$p_{kk} \cdot S_w + p_k \cdot \frac{dS_w}{dk} + p_k \cdot \frac{dS_w}{dk} + p \cdot \frac{d^2 S_w}{dk^2} = q_{kk} \cdot S_w + q_k \cdot \frac{dS_w}{dk} + q_k \cdot \frac{dS_w}{dk} + q \cdot \frac{d^2 S_w}{dk^2}$$

veya

$$p_{kk} \cdot S_w + 2p_k \cdot \frac{dS_w}{dk} + N \cdot \frac{d^2 S_w}{dk^2} = q_{kk} \cdot S_w + 2q_k \cdot \frac{dS_w}{dk} \quad (3.23)$$

bulunur.

Buradaki ikinci türevleri bulabilmek için $p_k = S_u u_k + S_w w_k$ eşitliğinin k 'ya göre türevi alınır

$$\begin{aligned} p_{kk} &= (S_{uu} u_k + S_{uw} w_k) u_k + S_u u_{kk} + (S_{uw} u_k + S_{ww} w_k) w_k + S_w w_{kk} \\ &= S_{uu} (u_k)^2 + S_{uw} w_k u_k + S_u u_{kk} + S_{uw} u_k w_k + S_{ww} (w_k)^2 + S_w w_{kk} \end{aligned}$$

veya

$$p_{kk} = \begin{bmatrix} u_k \\ w_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} S_{uu} & S_{uw} \\ S_{uw} & S_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ w_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_u & S_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{kk} \\ w_{kk} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\frac{dS_u}{dk} = S_{uu} u_k + S_{uw} w_k$ eşitliğinin k 'ya göre türevi alınır

$$\frac{d^2 S_u}{dk^2} = (S_{uuu} u_k + S_{uww} w_k) u_k + S_{uu} u_{kk} + (S_{uwu} u_k + S_{uww} w_k) w_k + S_{uw} w_{kk}$$

veya

$$\frac{d^2 S_u}{dk^2} = \begin{bmatrix} u_k \\ w_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} S_{uuu} & S_{uww} \\ S_{uww} & S_{www} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ w_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{uu} & S_{uw} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{kk} \\ w_{kk} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

bulunur. $\frac{dS_w}{dk} = S_{uw}u_k + S_{ww}w_k$ eşitliğinin de k 'ya göre türevi alınırsa

$$\frac{d^2S_w}{dk^2} = (S_{uuu}u_k + S_{uww}w_k)u_k + S_{uw}u_{kk} + (S_{wuu}u_k + S_{www}w_k)w_k + S_{ww}w_{kk}$$

veya

$$\frac{d^2S_w}{dk^2} = \begin{bmatrix} u_k \\ w_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} S_{uuu} & S_{uww} \\ S_{uww} & S_{www} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ w_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{uw} & S_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{kk} \\ w_{kk} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

elde edilir.

Buradan (3.9), (3.24) ve (3.25) eşitliklerinde bulunan ifadeler (3.22) eşitliğinde bulunan

$$p_{kk} \cdot S_u + 2p_k \cdot \frac{dS_u}{dk} + N \cdot \frac{d^2S_u}{dk^2} = q_{kk} \cdot S_u + 2q_k \cdot \frac{dS_u}{dk}$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & S_u \cdot S_{uu} (u_k)^2 + S_u \cdot S_{uw} w_k u_k + S_u \cdot S_u u_{kk} + S_u \cdot S_{uw} u_k w_k + S_u \cdot S_{ww} (w_k)^2 + S_u \cdot S_w w_{kk} \\ & + 2(S_u u_k + S_w w_k) \cdot (S_{uu} u_k + S_{uw} w_k) + N \cdot S_{uuu} (u_k)^2 + N \cdot S_{uww} w_k u_k + N \cdot S_{uu} u_{kk} \\ & + N \cdot S_{uwu} u_k w_k + N \cdot S_{uww} (w_k)^2 + N \cdot S_{uw} w_{kk} \\ & = q_{kk} \cdot S_u + 2q_k \cdot S_{uu} u_k + 2q_k \cdot S_{uw} w_k \end{aligned} \quad (3.27)$$

elde edilir. Bu eşitlik düzenlenirse

$$\begin{aligned} & (S_u \cdot S_u + N \cdot S_{uu}) u_{kk} + (S_u \cdot S_w + N \cdot S_{uw}) w_{kk} = -S_u \cdot S_{uu} (u_k)^2 - S_u \cdot S_{uw} w_k u_k \\ & - S_u \cdot S_{uw} u_k w_k - S_u \cdot S_{ww} (w_k)^2 - 2S_u \cdot S_{uu} (u_k)^2 - 2S_u \cdot S_{uw} u_k w_k - 2S_w \cdot S_{uu} w_k u_k \\ & - 2S_w \cdot S_{uw} (w_k)^2 - N \cdot S_{uuu} (u_k)^2 - N \cdot S_{uww} w_k u_k - N \cdot S_{uwu} u_k w_k - N \cdot S_{uww} (w_k)^2 \\ & + q_{kk} \cdot S_u + 2q_k \cdot S_{uu} u_k + 2q_k \cdot S_{uw} w_k \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned}
& (S_u \cdot S_u + N \cdot S_{uu})u_{kk} + (S_u \cdot S_w + N \cdot S_{uw})w_{kk} = q_{kk} \cdot S_u + 2q_k \cdot \begin{bmatrix} S_{uu} & S_{uw} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ w_k \end{bmatrix} \\
& - \begin{bmatrix} u_k \\ w_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3S_{uu} \cdot S_u + S_{uuu} \cdot N & 2S_{uw} \cdot S_u + S_{uu} \cdot S_w + S_{uuw} \cdot N \\ 2S_{uw} \cdot S_u + S_{uu} \cdot S_w + S_{uuw} \cdot N & S_{ww} \cdot S_u + 2S_{uw} \cdot S_w + S_{uww} \cdot N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ w_k \end{bmatrix} \quad (3.29)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.10), (3.24) ve (3.26)'da bulunan eşitlikler (3.23) eşitliğinde bulunan

$$p_{kk} \cdot S_w + 2p_k \cdot \frac{dS_w}{dk} + N \cdot \frac{d^2 S_w}{dk^2} = q_{kk} \cdot S_w + 2q_k \cdot \frac{dS_w}{dk}$$

denkleminde yerine yazılıp düzenlenirse

$$\begin{aligned}
& S_w \cdot S_{uu} (u_k)^2 + S_w \cdot S_{uw} w_k u_k + S_w \cdot S_w w_{kk} + S_w \cdot S_{uw} u_k w_k + S_w \cdot S_{ww} (w_k)^2 + S_w \cdot S_{uw} w_k u_k \\
& + 2(S_u u_k + S_w w_k) \cdot (S_{uw} u_k + S_{ww} w_k) + N \cdot S_{uuu} (u_k)^2 + N \cdot S_{uww} w_k u_k + N \cdot S_{uw} u_{kk} \\
& + N \cdot S_{uww} u_k w_k + N \cdot S_{www} (w_k)^2 + N \cdot S_{ww} w_{kk} \\
& = q_{kk} \cdot S_w + 2q_k \cdot S_{uw} u_k + 2q_k \cdot S_{ww} w_k \quad (3.30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (S_w \cdot S_w + N \cdot S_{ww})w_{kk} + (S_u \cdot S_w + N \cdot S_{uw})u_{kk} = -S_w \cdot S_{uu} (u_k)^2 - S_w \cdot S_{uw} w_k u_k \\
& - S_w \cdot S_{uw} u_k w_k - S_w \cdot S_{ww} (w_k)^2 - 2S_u \cdot S_{uw} (u_k)^2 - 2S_u \cdot S_{ww} u_k w_k - 2S_w \cdot S_{uw} w_k u_k \\
& - 2S_w \cdot S_{ww} (w_k)^2 - N \cdot S_{uuu} (u_k)^2 - N \cdot S_{uww} w_k u_k - N \cdot S_{uww} u_k w_k - N \cdot S_{www} (w_k)^2 \\
& + q_{kk} \cdot S_w + 2q_k \cdot S_{uw} u_k + 2q_k \cdot S_{ww} w_k \quad (3.31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (S_w \cdot S_w + N \cdot S_{ww})w_{kk} + (S_u \cdot S_w + N \cdot S_{uw})u_{kk} = q_{kk} \cdot S_w + 2q_k \cdot \begin{bmatrix} S_{uw} & S_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ w_k \end{bmatrix} \\
& - \begin{bmatrix} u_k \\ w_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} S_{uu} \cdot S_w + 2S_{uw} \cdot S_u + S_{uuw} \cdot N & 2S_{uw} \cdot S_w + S_{ww} \cdot S_u + S_{uww} \cdot N \\ 2S_{uw} \cdot S_w + S_{ww} \cdot S_u + S_{uww} \cdot N & 3S_{ww} \cdot S_w + S_{www} \cdot N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ w_k \end{bmatrix} \quad (3.32)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.29) ve (3.32)'de bulunan bu denklemler matris formunda yazılırsa

$$G \begin{bmatrix} u_{kk} \\ w_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

elde edilir. Burada

$$b_1 = q_{kk} \cdot S_u + 2q_k \cdot \begin{bmatrix} S_{uu} & S_{uw} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ w_k \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} u_k \\ w_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3S_{uu} \cdot S_u + S_{uuu} \cdot N & 2S_{uw} \cdot S_u + S_{uu} \cdot S_w + S_{uuw} \cdot N \\ 2S_{uw} \cdot S_u + S_{uu} \cdot S_w + S_{uuw} \cdot N & S_{ww} \cdot S_u + 2S_{uw} \cdot S_w + S_{uww} \cdot N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ w_k \end{bmatrix}$$

ve

$$b_2 = q_{kk} \cdot S_w + 2q_k \cdot \begin{bmatrix} S_{uw} & S_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ w_k \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} u_k \\ w_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} S_{uu} \cdot S_w + 2S_{uw} \cdot S_u + S_{uuw} \cdot N & 2S_{uw} \cdot S_w + S_{ww} \cdot S_u + S_{uww} \cdot N \\ 2S_{uw} \cdot S_w + S_{ww} \cdot S_u + S_{uww} \cdot N & 3S_{ww} \cdot S_w + S_{www} \cdot N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ w_k \end{bmatrix}$$

şeklindedir. (3.33) eşitliğinden

$$\begin{bmatrix} u_{kk} \\ w_{kk} \end{bmatrix} = G^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

elde edilir.

3.2 İzdüşüm İlerleyişi

3.2.1 Genel Bakış

Şekil 3.1'de ana eğri üzerindeki q noktası hareket ettikçe, q noktasının izdüşümü de S yüzeyi üzerindeki izdüşüm eğrisi üzerinde hareket eder. İzdüşüm ilerleyişi, bu hareketin karakterizasyonuna odaklanır. Özel olarak, $q(k_i)$ noktasından $q(k_{i+1})$ noktasına ilerlendiğinde, buna karşılık izdüşüm noktası da $S(u(k_i), w(k_i))$ noktasından $S(u(k_{i+1}), w(k_{i+1}))$ noktasına ilerler [10].

İkinci mertebeye kadar Taylor serisi açılımı yapılırsa, k 'daki artış $l = \delta k$ olmak üzere,

$$u_{i+1} = u_i + \frac{du}{dk}l + \frac{1}{2} \frac{d^2u}{dk^2}l^2 \quad (3.35)$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{dw}{dk}l + \frac{1}{2} \frac{d^2w}{dk^2}l^2 \quad (3.36)$$

dir. Burada $u_i = u(k_i)$, $w_i = w(k_i)$, $u_{i+1} = u(k_{i+1})$, $w_{i+1} = w(k_{i+1})$ ve $l = k_{i+1} - k_i$ şeklinde ifade edilebilir.

k 'nın artışında birden çok seçenek vardır. Eğer l değeri sabit bir değer kabul edilirse izdüşüm eğrisi boyunca konumları hesaplamak için (3.18), (3.34), (3.35) ve (3.36) eşitlikleri kullanılır.

İzdüşüm eğrisi üzerindeki ilerleyiş ana eğri üzerindeki sabit v_q adımlarına dayanır. Ana eğrinin yay uzunluk fonksiyonu r kabul edilirse,

$$dr = |x_k dk \quad y_k dk \quad z_k dk| = |q_k| dk \quad (3.37)$$

eşitliği yazılır.

Böylece,

$$l = \frac{1}{|q_k|} v_q \quad (3.38)$$

olmak üzere $k_{i+1} = k_i + l$ ve (3.18), (3.34), (3.35) ve (3.36) eşitlikleri kullanılarak izdüşüm eğrisi boyunca ilerlenir.

Ana eğri ve yüzey arasındaki yerel geometri ve yerel ayrıma bağlı olarak, ana eğri ve izdüşüm eğrisi boyunca hareketlerin hızları farklı olabilir.

İzdüşüm eğrisi üzerindeki ilerleyiş, izdüşüm eğrisi üzerindeki sabit adımlar v_p ve izdüşüm eğrisinin yay uzunluk fonksiyonu s olmak üzere

$$\begin{aligned} ds &= |S_u u_k + S_w w_k| dk \\ &= |(x_u u_k + x_w w_k) dk \quad (y_u u_k + y_w w_k) dk \quad (z_u u_k + z_w w_k) dk|. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Böylece,

$$l = \frac{1}{|S_u u_k + S_w w_k|} v_p \quad (3.40)$$

olmak üzere $k_{i+1} = k_i + l$ ve (3.18), (3.34), (3.35) ve (3.36) eşitlikleri kullanılarak izdüşüm eğrisi boyunca ilerlenir [10].

3.2.2 İlerleyiş Düzeni

Yukarıda anlatılan ilerleyiş şemaları ikinci mertebeden Taylor seri açılımına dayanır. Yüksek mertebeden terimler ihmal edilmiştir. Kesilmesi nedeniyle hatalar oluşabilir ve çok fazla adımdan sonra izdüşüm eğrisinden sapma olabilir. Burada ilerleyişin her adımında kesme hatasını azaltmak için bir yaklaşım önerilmiştir.

(3.35) ve (3.36) eşitliklerinden her bir adımın sonunda sırasıyla

$$\hat{u}_{i+1} = u_i + \frac{du}{dk} l + \frac{1}{2} \frac{d^2 u}{dk^2} l^2 \quad (3.41)$$

$$\hat{w}_{i+1} = w_i + \frac{dw}{dk} l + \frac{1}{2} \frac{d^2 w}{dk^2} l^2 \quad (3.42)$$

elde edildiği kabul edilsin.

Kesme hatasından dolayı, N vektörü yüzeyin p_{i+1} noktasındaki teğet düzleme dik olmayabilir. Yüzeyin normali $N_p = S_u \times S_w$ olsun. N 'nin parametrik yüzeye dikliğini hesaplamak amacıyla

$$\varepsilon = \frac{|N \times N_p|}{|N| |N_p|} \quad (3.43)$$

kabul edilsin.

Küçük açılı saptalarda; ε , N vektörü ve yüzeyin normali N_p arasındaki açı için iyi bir yaklaşımdır. ε önceden ayarlanmış bir eşik değeri α 'dan daha büyük ise ilerleyiş devam eder.

ε_1 ve ε_2 'nin N vektörüyle, yüzeyin teğet vektörlerinin iç çarpımı olduğunu kabul edelim:

$$N \cdot S_u = \varepsilon_1 \quad (3.44)$$

$$N \cdot S_w = \varepsilon_2 \quad (3.45)$$

Eğer $(\hat{u}_{i+1}, \hat{w}_{i+1})$ izdüşüm eğrisinde olsaydı, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ olurdu. Birinci dereceden düzeltim $[\delta_u \ \delta_w]$ kabul edilirse,

$$\begin{bmatrix} u_{i+1} \\ w_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{u}_{i+1} \\ \hat{w}_{i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_u \\ \delta_w \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

elde edilir. Burada $N_u = S_u$ ve $N_w = S_w$ olacak şekilde alınırsa $[\delta_u \ \delta_w]$ aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\delta(N \cdot S_u) = (N_u \cdot S_u + N \cdot S_{uu})\delta_u + (N_w \cdot S_u + N \cdot S_{uw})\delta_w = -\varepsilon_1 \quad (3.47)$$

$$\delta(N \cdot S_w) = (N_u \cdot S_w + N \cdot S_{uw})\delta_u + (N_w \cdot S_w + N \cdot S_{ww})\delta_w = -\varepsilon_2 \quad (3.48)$$

Bu eşitliklerden

$$\begin{bmatrix} \delta_u \\ \delta_w \end{bmatrix} = -G^{-1} \cdot \begin{bmatrix} N \cdot S_u \\ N \cdot S_w \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

elde edilir.

BİR EĞRİNİN YÜZEY ÜZERİNE MERKEZİL İZDÜŞÜMÜ

Çalışmanın orijinal kısmını oluşturan bu bölümde, parametrik denklemlerle verilen bir eğrinin, bir parametrik yüzey üzerine merkezil izdüşümü, ikinci mertebeden Taylor yaklaşımı kullanılarak incelenecek ve oluşan kesme hatasının hesaplanmasına yer verilecektir.

4.1 İzdüşüm Eğrisi İçin Birinci ve İkinci Dereceden Diferansiyel Eşitlikler

3-boyutlu Öklid uzayında bir parametrik eğri

$$p(t) = [x(t) \quad y(t) \quad z(t)] \quad (4.1)$$

ve bir parametrik yüzey

$$S(u, w) = [x(u, w) \quad y(u, w) \quad z(u, w)] \quad (4.2)$$

olsun. Eğri ve yüzeyin kesişmediği kabul edilmektedir.

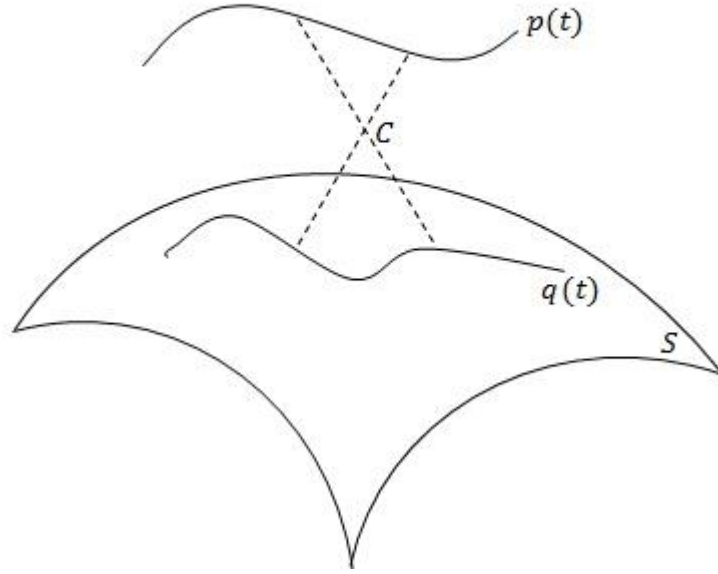
Eğri üzerindeki bir p noktasının S yüzeyi üzerindeki C merkezli izdüşümü q olsun.

p noktası eğri boyunca hareket ettikçe q noktası S üzerinde bir eğri çizer. İzdüşüm eğrisinin $q(u, w)$ noktası, S yüzeyinin u ve w parametrelerinin bir fonksiyonudur.

Bununla birlikte

$$q(u, w) = S(u(t), w(t)) \quad (4.3)$$

olacak şekilde ana eğrinin t parametresiyle ilişkilendirilebilir.



Şekil 4.1 Merkezil İzdüşüm

Yüzey üzerinde olmayan bir C noktası alındığında, merkezil izdüşüm eşitliğinden

$$[p(t) - C] \times [q(t) - C] = \vec{0} \quad (4.4)$$

yazılabilir [13].

(4.4) eşitliğinin t 'ye göre türevi alınır

$$\frac{dp}{dt} \times [q(t) - C] + [p(t) - C] \times \frac{dq}{dt} = \vec{0}$$

veya

$$\frac{dp}{dt} \times [q(t) - C] + [p(t) - C] \times \left[S_u \frac{du}{dt} + S_w \frac{dw}{dt} \right] = \vec{0} \quad (4.5)$$

elde edilir. Bu eşitlik düzenlenirse

$$\left(S_u \times [p(t) - C] \right) \frac{du}{dt} + \left(S_w \times [p(t) - C] \right) \frac{dw}{dt} = \frac{dp}{dt} \times [q(t) - C] \quad (4.6)$$

olup, bu eşitliğin her iki tarafı S_w ile skaler çarpılırsa

$$\langle S_u \times [p(t) - C], S_w \rangle \frac{du}{dt} = \left\langle \frac{dp}{dt} \times [q(t) - C], S_w \right\rangle \quad (4.7)$$

elde edilir. Buradan

$$A = \frac{dp}{dt} \times [q(t) - C]$$

olmak üzere

$$\frac{du}{dt} = \frac{-\langle A, S_w \rangle}{\langle S_u \times S_w, [p(t) - C] \rangle} \quad (4.8)$$

bulunur. Burada C merkezi $\langle S_u \times S_w, [p(t) - C] \rangle \neq 0$ olacak şekilde seçilmektedir.

Benzer şekilde (4.6) eşitliğinin her iki tarafı S_u ile skaler çarpılırsa

$$\langle S_w \times [p(t) - C], S_u \rangle \frac{dw}{dt} = \left\langle \frac{dp}{dt} \times [q(t) - C], S_u \right\rangle \quad (4.9)$$

olup,

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\langle A, S_u \rangle}{\langle S_u \times S_w, [p(t) - C] \rangle} \quad (4.10)$$

olarak bulunur. Böylece (4.8) ve (4.10) eşitliklerinden birinci dereceden diferansiyeller elde edilir.

İkinci türevlerin bulunabilmesi için (4.6) eşitliğinin t 'ye göre türevi alınır;

$$\begin{aligned} & \left(\frac{dS_u}{dt} \times [p(t) - C] + S_u \times \frac{dp}{dt} \right) \frac{du}{dt} + (S_u \times [p(t) - C]) \frac{d^2 u}{dt^2} + \\ & + \left(\frac{dS_w}{dt} \times [p(t) - C] + S_w \times \frac{dp}{dt} \right) \frac{dw}{dt} + (S_w \times [p(t) - C]) \frac{d^2 w}{dt^2} \\ & = \frac{d^2 p}{dt^2} \times [q(t) - C] + \frac{dp}{dt} \times \left(S_u \frac{du}{dt} + S_w \frac{dw}{dt} \right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlik düzenlenirse

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{dS_u}{dt} \times [p(t) - C] \right) \frac{du}{dt} + \left(S_u \times \frac{dp}{dt} \right) \frac{du}{dt} + \left(S_u \times [p(t) - C] \right) \frac{d^2u}{dt^2} \\
& + \left(\frac{dS_w}{dt} \times [p(t) - C] \right) \frac{dw}{dt} + \left(S_w \times \frac{dp}{dt} \right) \frac{dw}{dt} + \left(S_w \times [p(t) - C] \right) \frac{d^2w}{dt^2} \\
& = \frac{d^2p}{dt^2} \times [q(t) - C] + \frac{dp}{dt} \times \left(S_u \frac{du}{dt} \right) + \frac{dp}{dt} \times \left(S_w \frac{dw}{dt} \right)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

elde edilir.

$$\frac{dS_u}{dt} = S_{uu} \frac{du}{dt} + S_{uw} \frac{dw}{dt} \tag{4.13}$$

ve

$$\frac{dS_w}{dt} = S_{wu} \frac{du}{dt} + S_{ww} \frac{dw}{dt} \tag{4.14}$$

eşitlikleri (4.12) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
& \left(S_{uu} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + S_{uw} \frac{du}{dt} \frac{dw}{dt} \right) \times [p(t) - C] + \left(S_u \times \frac{dp}{dt} \right) \frac{du}{dt} + \left(S_u \times [p(t) - C] \right) \frac{d^2u}{dt^2} \\
& + \left(S_{wu} \frac{du}{dt} \frac{dw}{dt} + S_{ww} \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 \right) \times [p(t) - C] + \left(S_w \times \frac{dp}{dt} \right) \frac{dw}{dt} + \left(S_w \times [p(t) - C] \right) \frac{d^2w}{dt^2} \\
& = \frac{d^2p}{dt^2} \times [q(t) - C] + \left(\frac{dp}{dt} \times S_u \right) \frac{du}{dt} + \left(\frac{dp}{dt} \times S_w \right) \frac{dw}{dt}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

elde edilir. Bu eşitlik düzenlenirse

$$\begin{aligned}
& \left(S_{uu} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2S_{uw} \frac{du}{dt} \frac{dw}{dt} + S_{ww} \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 \right) \times [p(t) - C] + \left(S_u \times [p(t) - C] \right) \frac{d^2u}{dt^2} \\
& + \left(S_w \times [p(t) - C] \right) \frac{d^2w}{dt^2} = \frac{d^2p}{dt^2} \times [q(t) - C] + 2 \left(\frac{dp}{dt} \times S_u \right) \frac{du}{dt} + 2 \left(\frac{dp}{dt} \times S_w \right) \frac{dw}{dt}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

şeklini alır. (4.16) eşitliğinin her iki tarafı S_w ile skaler çarpılırsa

$$B = \frac{d^2 p}{dt^2} \times [q(t) - C] + 2 \left(\frac{dp}{dt} \times S_u \right) \frac{du}{dt} + 2 \left(\frac{dp}{dt} \times S_w \right) \frac{dw}{dt} - \left(S_{uu} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2S_{uw} \frac{du}{dt} \frac{dw}{dt} + S_{ww} \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 \right) \times [p(t) - C]$$

olmak üzere

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{-\langle B, S_w \rangle}{\langle S_u \times S_w, [p(t) - C] \rangle} \quad (4.17)$$

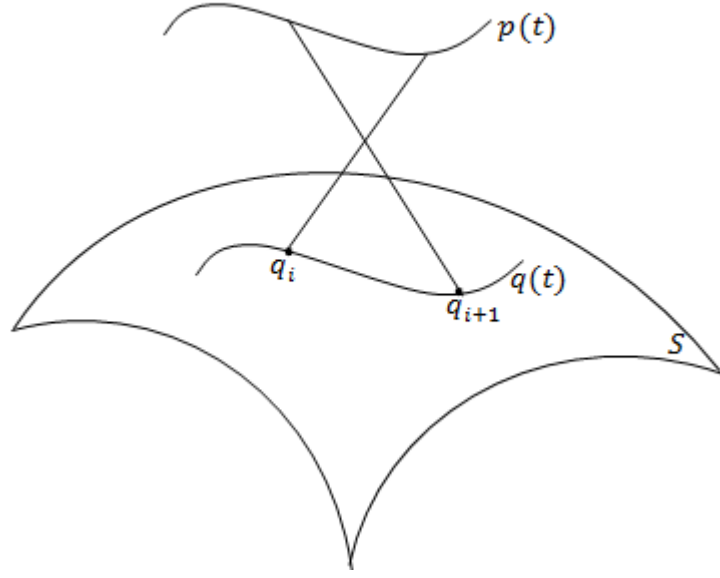
bulunur. Benzer şekilde (4.16) eşitliğinin her iki tarafı S_u ile skaler çarpılırsa

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = \frac{\langle B, S_u \rangle}{\langle S_u \times S_w, [p(t) - C] \rangle} \quad (4.18)$$

elde edilir. Buradan (4.17) ve (4.18) eşitliklerinden ikinci dereceden diferansiyeller bulunur.

4.2 Eğri İlerleyişi

Şekil 4.2'de ana eğri üzerindeki p noktası hareket ettikçe, p noktasının izdüşümü de S yüzeyi üzerindeki izdüşüm eğrisi üzerinde hareket eder. Özel olarak $p(t_i)$ noktasından $p(t_{i+1})$ noktasına ilerlendiğinde, buna karşılık izdüşüm noktası da $q_i = S(u_i, w_i)$ noktasından $q_{i+1} = S(u_{i+1}, w_{i+1})$ noktasına ilerler.



Şekil 4.2 Parametrik Eğri Üzerinde İlerleyiş

İkinci mertebeye kadar Taylor serisi açılımı yapılırsa k ' daki artış $k = \Delta t$ olmak üzere

$$[\hat{u}_{i+1}, \hat{w}_{i+1}] = [u_i, w_i] + \left[\frac{du}{dt}, \frac{dw}{dt} \right] k + \frac{1}{2} \left[\frac{d^2u}{dt^2}, \frac{d^2w}{dt^2} \right] k^2 \quad (4.19)$$

eşitliği yazılır.

Eğer $k = \Delta t$ sabit adım büyüklüğü ise, (4.19) eşitliğine yerleştirilerek izdüşüm eğrisinin ardışık (u_i, w_i) noktaları bulunabilir. Buna rağmen izdüşüm noktaları iyi orantılı olmayabilir.

Ana eğri üzerindeki sabit adım uzunluğu v_p , r yay uzunluk fonksiyonu olmak üzere

$$dr = \left\| (x_t, y_t, z_t) \right\| dt = \left\| \frac{dp}{dt} \right\| dt \quad (4.20)$$

şeklindedir.

Böylece

$$k = \frac{1}{\left\| \frac{dp}{dt} \right\|} v_p \quad (4.21)$$

olmak üzere $t_{i+1} = t_i + k$ ve (4.8), (4.10), (4.17), (4.18) ve (4.19) eşitlikleri kullanılarak izdüşüm eğrisi boyunca ilerlenir.

v_q , izdüşüm eğrisinde sabit adım uzunluğu, s yay uzunluk fonksiyonu ve

$$\frac{dq}{dt} = S_u \frac{du}{dt} + S_w \frac{dw}{dt} \text{ olmak üzere,}$$

$$\begin{aligned} ds &= \left\| \frac{dq}{dt} \right\| dt \\ &= \left\| S_u \frac{du}{dt} + S_w \frac{dw}{dt} \right\| dt \end{aligned} \quad (4.22)$$

eşitliği yazılır. Böylece

$$k = \frac{1}{\left\| S_u \frac{du}{dt} + S_w \frac{dw}{dt} \right\|} v_q \quad (4.23)$$

olmak üzere $t_{i+1} = t_i + k$ ve (4.8), (4.10), (4.17), (4.18) ve (4.19) eşitlikleri kullanılarak izdüşüm eğrisi boyunca ilerlenir.

4.3 Hata Yaklaşımı

izdüşüm noktaları bulunurken ikinci mertebeden Taylor seri açılımı yapıldığından, kesme hataları oluşabilir. Bu kısımda anlatılan yaklaşım oluşan kesme hataları sonucunda izdüşüm eğrisinde sapmayı azaltmak için kullanılabilir.

$\hat{q}_{i+1} = S(\hat{u}_{i+1}, \hat{w}_{i+1})$ noktasının (4.19) denkleminde yani

$$[\hat{u}_{i+1}, \hat{w}_{i+1}] = [u_i, w_i] + \left[\frac{du}{dt}, \frac{dw}{dt} \right] k + \frac{1}{2} \left[\frac{d^2u}{dt^2}, \frac{d^2w}{dt^2} \right] k^2$$

eşitliği yardımıyla elde edilen izdüşüm noktası olduğunu varsayalım.

$\hat{q}_{i+1} = S(\hat{u}_{i+1}, \hat{w}_{i+1})$, $p_{i+1} = p(t_{i+1})$ ve $q_{i+1} = S(u_{i+1}, w_{i+1})$ olduğunu biliyoruz.

Dolayısıyla

$$(p_{i+1} - C) \times (\hat{q}_{i+1} - C) = \varepsilon \neq \vec{0} \quad (4.24)$$

dır.

$[\Delta u, \Delta w]$ sapma vektörü olmak üzere;

$$q_{i+1} = S(u_{i+1}, w_{i+1}) = S(\hat{u}_{i+1} + \Delta u, \hat{w}_{i+1} + \Delta w) \quad (4.25)$$

olarak yazılabilir. (4.4) eşitliğinden merkezli izdüşüm tanımının

$$(p_{i+1} - C) \times (q_{i+1} - C) = \vec{0}$$

olduğunu biliyoruz.

Hata yaklaşım vektörü $[\Delta u, \Delta w]$ 'yi hesaplayabilmek için,

$$q_{i+1} = S(\hat{u}_{i+1}, \hat{w}_{i+1}) + S_u \Delta u + S_w \Delta w \quad (4.26)$$

$$q_{i+1} = \hat{q}_{i+1} + S_u \Delta u + S_w \Delta w \quad (4.27)$$

olarak yazılır. (4.27) eşitliği, (4.4) denkleminde yerine yazılırsa;

$$(p_{i+1} - C) \times ((\hat{q}_{i+1} + S_u \Delta u + S_w \Delta w) - C) = \vec{0} \quad (4.28)$$

$$(p_{i+1} - C) \times (\hat{q}_{i+1} - C) + (p_{i+1} - C) \times (S_u \Delta u + S_w \Delta w) = \vec{0} \quad (4.29)$$

$$(p_{i+1} - C) \times (S_u \Delta u + S_w \Delta w) = -\varepsilon \quad (4.30)$$

elde edilir.

(4.30) eşitliğinin her iki tarafı S_w ile skaler çarpılırsa

$$\Delta u = \frac{\langle \varepsilon, S_w \rangle}{\langle S_u \times S_w, [p(t) - C] \rangle} \quad (4.31)$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.30) eşitliğinin her iki tarafı S_u ile skaler çarpılırsa

$$\Delta w = \frac{-\langle \varepsilon, S_u \rangle}{\langle S_u \times S_w, [p(t) - C] \rangle} \quad (4.32)$$

elde edilir. Buradan bulunan (4.31) ve (4.32) eşitliklerinden hata yaklaşım vektörü hesaplanır.

(4.30) denkleminde elde edilen ε değerinin normu hesaplanır. Bulunan $\|\varepsilon\|$ değeri, daha önceden belirtilen α kesme hatasından büyük oluyorsa yani $\|\varepsilon\| > \alpha$ oluyorsa iterasyona devam edilir ve izdüşüm eğrisi bulunur.

4.4 İz düşüm Eğrisinin Çizimi İçin Algoritma

Bu bölümde yüzey üzerine izdüşüm noktalarının hesaplanması amacıyla bir algoritma verilmiştir. Bu algoritma aşağıdaki şekilde özetlenebilir.

Parametrik yüzey $S(u,w)$, parametrik eğri $p(t)$, merkez noktası C , başlangıç izdüşüm noktası, bu noktanın yüzey üzerindeki ilk izdüşüm noktası ve hata eşik değeri kullanıcı tarafından girilecektir. $[a1,a2]$ aralığı izdüşümü yapılacak olan eğrinin aralığı olarak seçilecektir.

(1) $p(a1)$ noktasına karşılık gelen $q(a1)$ izdüşüm noktası hesaplanır.

(2) $u_i = u0$ ve $w_i = w0$ olarak atanır.

(3) $\frac{du}{dt}, \frac{dw}{dt}, \frac{d^2u}{dt^2}, \frac{d^2w}{dt^2}$ türevleri hesaplanır.

(4) $(\hat{u}_{i+1}, \hat{w}_{i+1})$ değerleri ve ε değeri bulunur.

(5) $[\Delta u, \Delta w]$ hata sapma vektörü hesaplanır ve izdüşüm noktası bulunur.

(6) $(u_i, w_i) = (\hat{u}_{i+1}, \hat{w}_{i+1})$ olarak atanır ve $\|\varepsilon\| > \alpha$ olduğu sürece ikinci adımdan işleme devam edilir.

4.5 İz düşüm Eğrisinin Çizim Programı

Ana eğrinin verilen parametrik yüzeye göre izdüşüm eğrisini çizdirmek amacıyla aşağıdaki program verilmiştir. Bu programda $[a1,a2]$ aralığı izdüşümü yapılacak olan eğrinin aralığı olarak seçilsin. Bu aralık çizdirilmek istenen eğriye göre kullanıcı tarafından girilecektir.

```
syms u w t;  
input('Yüzeyin 1. bileşenini giriniz, f1=');
```

```

f1=ans
s1=symfun(f1, [u w])
input('Yüzeyin 2. bileşenini giriniz, f2=');
f2=ans
s2=symfun(f2, [u w])
input('Yüzeyin 3. bileşenini giriniz, f3=');
f3=ans
s3=symfun(f3, [u w]);
l=[s1 s2 s3]
s=[f1 f2 f3]
input('Eğrinin 1. bileşenini giriniz, g1=');
g1=ans
p1=symfun(g1, [t])
input('Eğrinin 2. bileşenini giriniz, g2=');
g2=ans
p2=symfun(g2, [t])
input('Eğrinin 3. bileşenini giriniz, g3=');
g3=ans
p3=symfun(g3, [t])
p=[p1 p2 p3]
input('Eğrinin parametre aralığının başlangıç noktasını giriniz, a1=');
a1=ans
input('Eğrinin parametre aralığının bitiş noktasını giriniz, a2=');
a2=ans
input('Adım aralığını giriniz, vp=');
vp=ans;
input('Merkez noktasını giriniz, C=');
C=ans;
input('Başlangıç izdüşüm noktasını giriniz, q=');
q=ans
input('Kesme hatasını giriniz, h=');
h=ans
input('İlk izdüşüm noktasına karşılık gelen u0 değerini giriniz, u0=');

```

```

u0=ans
input(' İlk izdüşüm noktasına karşılık gelen w0 değerini giriniz, w0=');
w0=ans
ui=u0
wi=w0
tsu=diff(s,u)
tsu1=tsu(:,1)
x1=symfun(tsu1,[u,w])
tsu2=tsu(:,2)
x2=symfun(tsu2,[u,w])
tsu3=tsu(:,3)
x3=symfun(tsu3,[u,w])
x4=[x1 x2 x3]
su=x4(ui,wi)
tsw=diff(s,w)
tsw1=tsw(:,1)
x5=symfun(tsw1,[u,w])
tsw2=tsw(:,2)
x6=symfun(tsw2,[u,w])
tsw3=tsw(:,3)
x7=symfun(tsw3,[u,w])
x8=[x5 x6 x7]
sw=x8(ui,wi)
tsuu=diff(tsu,u)
tsuu1=tsuu(:,1)
x9=symfun(tsuu1,[u,w])
tsuu2=tsuu(:,2)
x10=symfun(tsuu2,[u,w])
tsuu3=tsuu(:,3)
x11=symfun(tsuu3,[u,w])
x12=[x9 x10 x11]
suu=x12(ui,wi)
tsww=diff(tsw,w)

```

```

tsww1=tsww(:,1)
x13=symfun(tsww1,[u,w])
tsww2=tsww(:,2)
x14=symfun(tsww2,[u,w])
tsww3=tsww(:,3)
x15=symfun(tsww3,[u,w])
x16=[x13 x14 x15]
sww=x16(ui,wi)
tsuw=diff(tsu,w)
tsuw1=tsuw(:,1)
x17=symfun(tsuw1,[u,w])
tsuw2=tsuw(:,2)
x18=symfun(tsuw2,[u,w])
tsuw3=tsuw(:,3)
x19=symfun(tsuw3,[u,w])
x20=[x17 x18 x19]
suw=x20(ui,wi)
zt=diff(p,t);
ztt=diff(zt,t);
pt=zt(a1);
ptt=ztt(a1);
k=vp/sqrt(sum(pt.^2))
A=cross(pt,q-C)
suxsw=cross(su,sw)
X=dot(A,sw)
Y=dot(suxsw,p(a1)-C)
Z=dot(A,su)
ut=-X/Y
wt=Z/Y
E=cross(ptt,q-C)
F=cross(pt,su)
G=cross(pt,sw)
H=suu*ut.^2+2*ut*wt*suw+sww*wt.^2

```

```

J=cross(H,p(a1)-C)
B=E+2*ut*F+2*wt*G-J
T1=dot(B,sw)
T2=dot(B,su)
utt=-T1/Y;
wtt=T2/Y;
hu=ui+ut*k+(utt*k.^2)/2
hw=wi+wt*k+(wtt*k.^2)/2
z=l(hu,hw);
yp=p(a1);
Eps=cross(yp-C,z-C);
m=sqrt(sum(Eps.^2))
q1=q(:,1)
q2=q(:,2)
q3=q(:,3)
plot(q1,q2,q3)
hold on
v=a1;
while m>h
v=v+k;
if v>a2
break
end
yp=p(v);
tsu=diff(s,u)
tsu1=tsu(:,1)
x1=symfun(tsu1,[u,w])
tsu2=tsu(:,2)
x2=symfun(tsu2,[u,w])
tsu3=tsu(:,3)
x3=symfun(tsu3,[u,w])
x4=[x1 x2 x3]
su=x4(ui,wi)

```

```

tsw=diff(s,w)
tsw1=tsw(:,1)
x5=symfun(tsw1,[u,w])
tsw2=tsw(:,2)
x6=symfun(tsw2,[u,w])
tsw3=tsw(:,3)
x7=symfun(tsw3,[u,w])
x8=[x5 x6 x7]
sw=x8(ui,wi)
tsuu=diff(tsu,u)
tsuu1=tsuu(:,1)
x9=symfun(tsuu1,[u,w])
tsuu2=tsuu(:,2)
x10=symfun(tsuu2,[u,w])
tsuu3=tsuu(:,3)
x11=symfun(tsuu3,[u,w])
x12=[x9 x10 x11]
suu=x12(ui,wi)
tsww=diff(tsw,w)
tsww1=tsww(:,1)
x13=symfun(tsww1,[u,w])
tsww2=tsww(:,2)
x14=symfun(tsww2,[u,w])
tsww3=tsww(:,3)
x15=symfun(tsww3,[u,w])
x16=[x13 x14 x15]
sww=x16(ui,wi)
tsuw=diff(tsu,w)
tsuw1=tsuw(:,1)
x17=symfun(tsuw1,[u,w])
tsuw2=tsuw(:,2)
x18=symfun(tsuw2,[u,w])
tsuw3=tsuw(:,3)

```

```

x19=symfun(tsuw3,[u,w])
x20=[x17 x18 x19]
suw=x20(ui,wi)
zt=diff(p,t);
ztt=diff(zt,t);
pt=zt(v);
ptt=ztt(v);
k=vp/sqrt(sum(pt.^2))
A=cross(pt,q-C)
suxsw=cross(su,sw)
X=dot(A,sw)
Y=dot(suxsw,p(v)-C)
Z=dot(A,su)
ut=-X/Y
wt=Z/Y
E=cross(ptt,q-C)
F=cross(pt,su)
G=cross(pt,sw)
H=suu*ut.^2+2*ut*wt*suw+sww*wt.^2
J=cross(H,p(v)-C)
B=E+2*ut*F+2*wt*G-J
T1=dot(B,sw)
T2=dot(B,su)
utt=-T1/Y;
wtt=T2/Y;
hu=ui+ut*k+(utt*k.^2)/2;
hw=wi+wt*k+(wtt*k.^2)/2;
ui=hu;
wi=hw;
a=hu;
b=hw;
z=l(hu,hw);
Du=dot(Eps,sw)/dot(suxsw,p(v)-C);

```

```

Dw=-dot(Eps,su)/dot(suxsw,p(v)-C);
Eps=cross(yp-C,z-C);
m=sqrt(sum(Eps.^2));
aa=a+Du;
bb=b+Dw;
x=s1(aa,bb);
y=s2(aa,bb);
z=s3(aa,bb);
q=[x y z];
plot3(x,y,z)
hold on
end

```

4.6 Merkezil İzdüşüm İçin Örnekler

1) $t \in [0, 2\pi]$ olmak üzere $p(t) = (\cos t, \sin t, 2)$ eğrisinin $S(u, w) = (u, w, 0)$ düzlemi üzerine $vp = 0,02$ adım aralığı ve $h = 0,0001$ kesme hatası ile birlikte $C = (0,0,1)$ merkezli merkezil izdüşüm eğrisini bulalım.

Yukarıda verilen programda $[a1, a2]$ aralığı bu örnekte $[0, 2\pi]$ olarak alınmıştır. p eğrisinin başlangıç noktasının S yüzeyi üzerindeki ilk izdüşüm noktası $q(0) = (q_1, q_2, q_3)$ olsun. Merkezil izdüşüm eşitliğinden

$$[p(0) - C] \times [q(0) - C] = \vec{0}$$

yazılır. Buradan

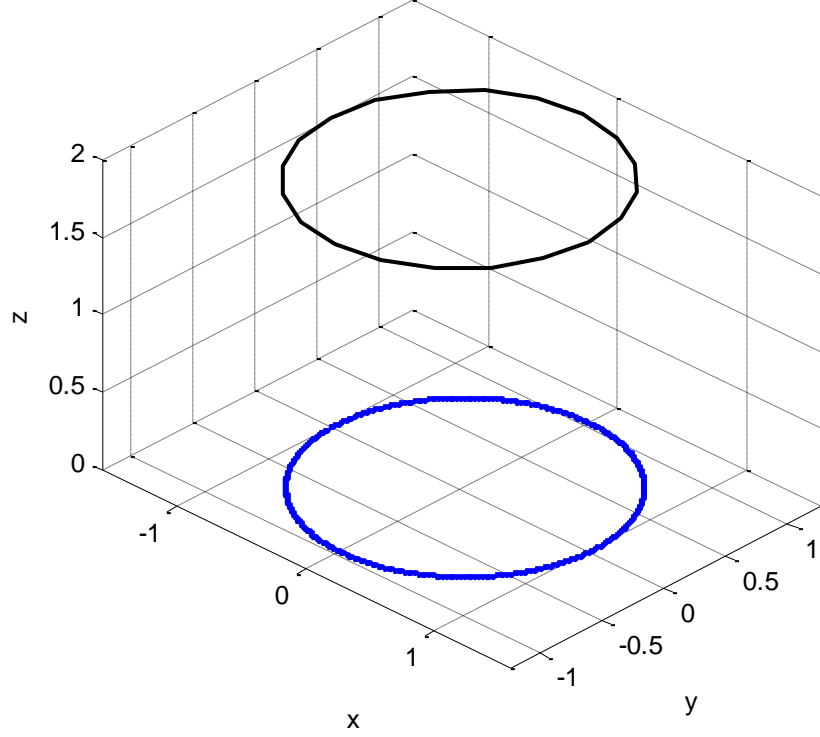
$$[(1, 0, 2) - (0, 0, 1)] \times [(q_1, q_2, q_3) - (0, 0, 1)] = \vec{0}$$

$$(1, 0, 1) \times (q_1, q_2, q_3 - 1) = \vec{0} \Rightarrow (-q_2, 1 - q_3 + q_1, q_2) = (0, 0, 0)$$

elde edilir. Ayrıca

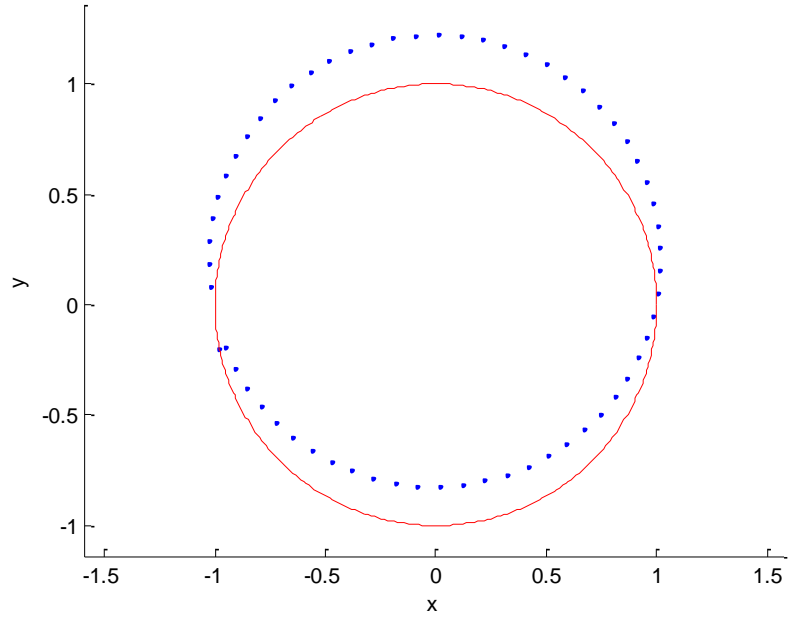
$$q(0) = S(u_0, w_0) = (u_0, w_0, 0) = (q_1, q_2, q_3)$$

olduğu göz önüne alınır, $q(0) = (q_1, q_2, q_3) = (-1, 0, 0)$ ve $(u_0, w_0) = (-1, 0)$ olarak bulunur. Böylece yukarıdaki program MATLAB(8.3.0.532) ile çalıştırılıp sonlandıktan sonra esas eğri de çizdirilirse aşağıdaki şekil elde edilmektedir.

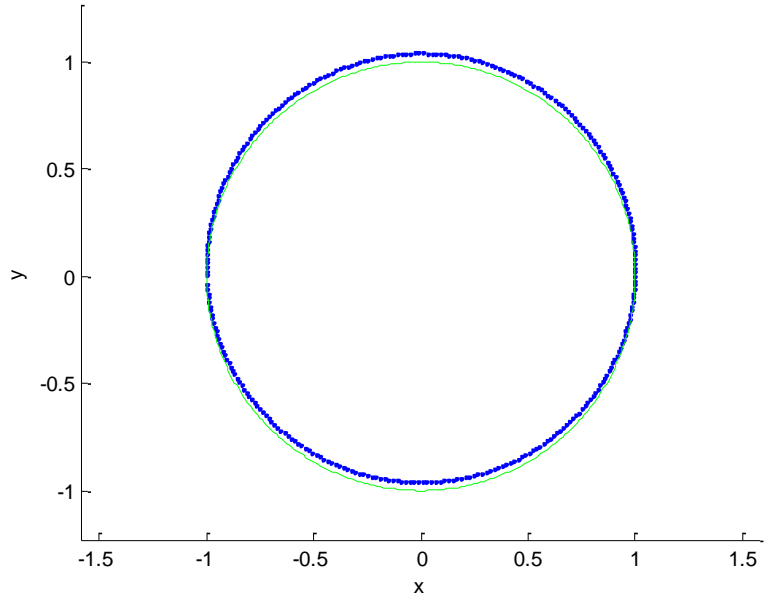


Şekil 4.3 Çemberin Merkezil İzdüşümü

İkinci mertebeden Taylor yaklaşımıyla merkezil izdüşüm yapılırken adım aralığı ve kesme hatası küçüldükçe izdüşüm eğrisi ve ana eğri arasındaki sapma miktarı az olur. Aşağıda farklı adım aralıkları ve kesme hatalarıyla girilen eğrilerin karşılaştırılması verilmiştir.



Şekil 4.4 $v_p = 0.1$ ve $h = 0.001$ alınarak izdüşüm eğrisi



Şekil 4.5 $v_p = 0.02$ ve $h = 0.00001$ alınarak izdüşüm eğrisi

2) $t \in [-2, 2]$ olmak üzere $p(t) = (t^2, t, 3)$ eğrisinin $S(u, w) = (u, w, 0)$ düzlemi üzerine $vp = 0,1$ adım aralığı ve $h = 0,001$ kesme hatası ile birlikte $C = (1, 0, 2)$ merkezli merkezli izdüşüm eğrisini bulalım.

Yukarıda verilen programda $[a1, a2]$ aralığı bu örnekte $[-2, 2]$ olarak alınmıştır.

p eğrisinin başlangıç noktasının S yüzeyi üzerindeki ilk izdüşüm noktası $q(-2) = (q_1, q_2, q_3)$ olsun. Merkezli izdüşüm eşitliğinden

$$[p(-2) - C] \times [q(-2) - C] = \vec{0}$$

yazılır. Buradan

$$[(4, -2, 3) - (1, 0, 2)] \times [(q_1, q_2, q_3) - (1, 0, 2)] = \vec{0}$$

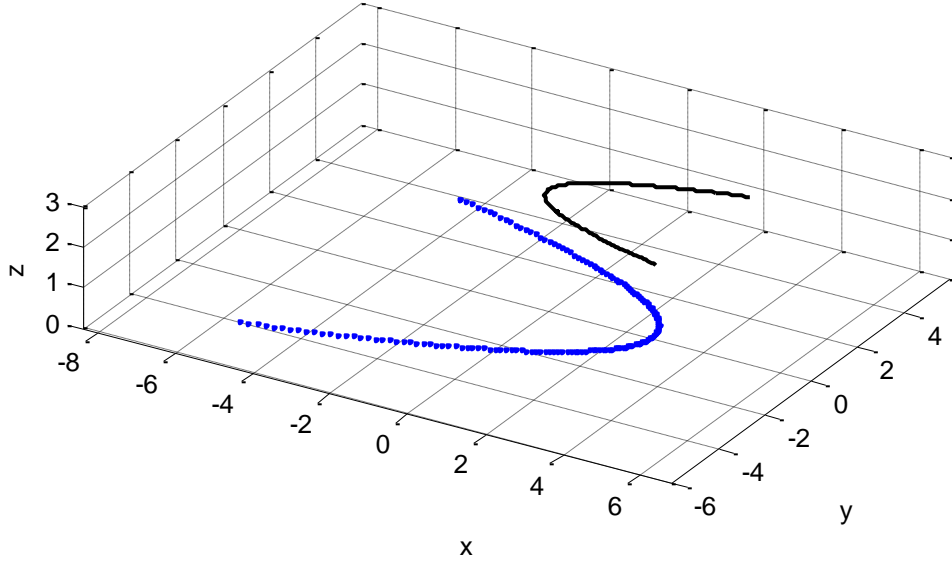
$$(3, -2, 1) \times (q_1 - 1, q_2, q_3 - 2) = \vec{0}$$

$$(-2q_3 + 4 - q_2, -3q_3 + 5 + q_1, 3q_2 + 2q_1 - 2) = (0, 0, 0)$$

elde edilir. Ayrıca

$$q(-2) = S(u_0, w_0) = (u_0, w_0, 0) = (q_1, q_2, q_3)$$

olduğu göz önüne alınırsa, $q(-2) = (q_1, q_2, q_3) = (-5, 4, 0)$ ve $(u_0, w_0) = (-5, 4)$ olarak bulunur. Böylece program MATLAB(8.3.0.532) ile çalıştırılıp sonlandıktan sonra esas eğri de çizdirilirse aşağıdaki şekil elde edilmektedir.



Şekil 4.6 Parabolün Merkezil İzdüşümü

3) $t \in [0, 2\pi]$ olmak üzere $p(t) = (2\cos t + 2\cos 4t, 2\sin t - 2\sin 4t, 3)$ eğrisinin $S(u, w) = (u, w, 0)$ düzlemi üzerine $vp = 0,02$ adım aralığı ve $h = 0,00001$ kesme hatası ile birlikte $C = (0,0,1)$ merkezli merkezil izdüşüm eğrisini bulalım.

Yukarıda verilen programda $[a1, a2]$ aralığı bu örnekte $[0, 2\pi]$ olarak alınmıştır. p eğrisinin başlangıç noktasının S yüzeyi üzerindeki ilk izdüşüm noktası $q(0) = (q_1, q_2, q_3)$ olsun. Merkezil izdüşüm eşitliğinden

$$[p(0) - C] \times [q(0) - C] = \vec{0}$$

yazılır. Buradan

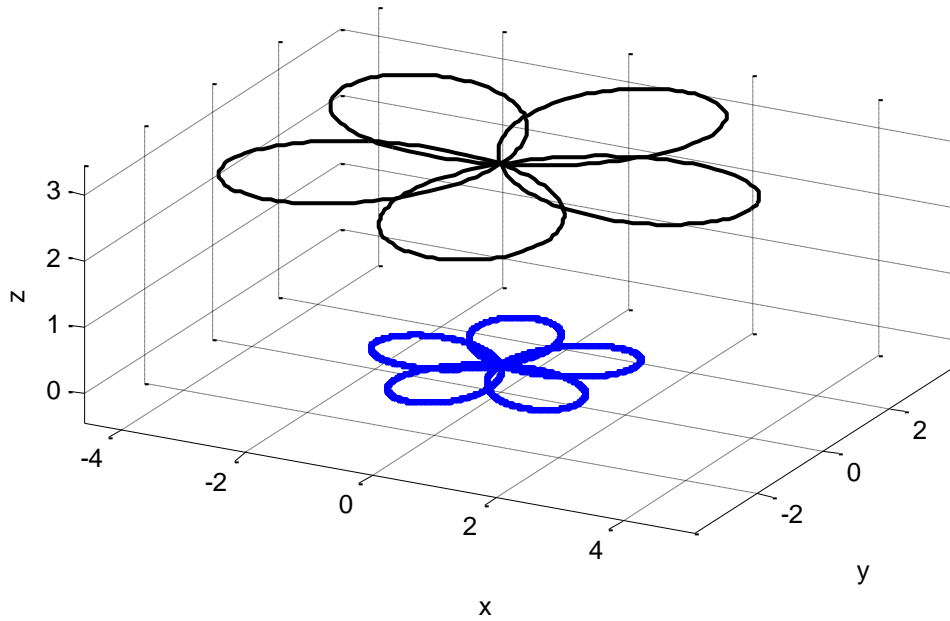
$$[(4, 0, 3) - (0, 0, 1)] \times [(q_1, q_2, q_3) - (0, 0, 1)] = \vec{0}$$

$$(4, 0, 2) \times (q_1, q_2, q_3 - 1) = \vec{0} \Rightarrow (-2q_2, 4 - 4q_3 + 2q_1, 4q_2) = (0, 0, 0)$$

elde edilir. Ayrıca

$$q(0) = S(u_0, w_0) = (u_0, w_0, 0) = (q_1, q_2, q_3)$$

olduğu göz önüne alınır, $q(0) = (q_1, q_2, q_3) = (-2, 0, 0)$ ve $(u_0, w_0) = (-2, 0)$ olarak bulunur. Böylece program MATLAB(8.3.0.532) ile çalıştırılıp sonlandıktan sonra esas eğri de çizdirilirse aşağıdaki şekil elde edilmektedir.



Şekil 4.7 Hypotrochoid Eğrisinin Merkezil İzdüşümü

4) $t \in [0, 2\pi]$ olmak üzere $p(t) = (3\sin(2t+1), 4\sin t, 5)$ eğrisinin $S(u, w) = (u, w, 0)$ düzlemi üzerine $vp = 0,02$ adım aralığı ve $h = 0,0001$ kesme hatası ile birlikte $C = (2,1,3)$ merkezli merkezil izdüşüm eğrisini bulalım.

Yukarıda verilen programda $[a1, a2]$ aralığı bu örnekte $[0, 2\pi]$ olarak alınmıştır.

p eğrisinin başlangıç noktasının S yüzeyi üzerindeki ilk izdüşüm noktası $q(0) = (q_1, q_2, q_3)$ olsun. Merkezil izdüşüm eşitliğinden

$$[p(0) - C] \times [q(0) - C] = \vec{0}$$

yazılır. Buradan

$$[(2.5244, 0, 5) - (2, 1, 3)] \times [(q_1, q_2, q_3) - (2, 1, 3)] = \vec{0}$$

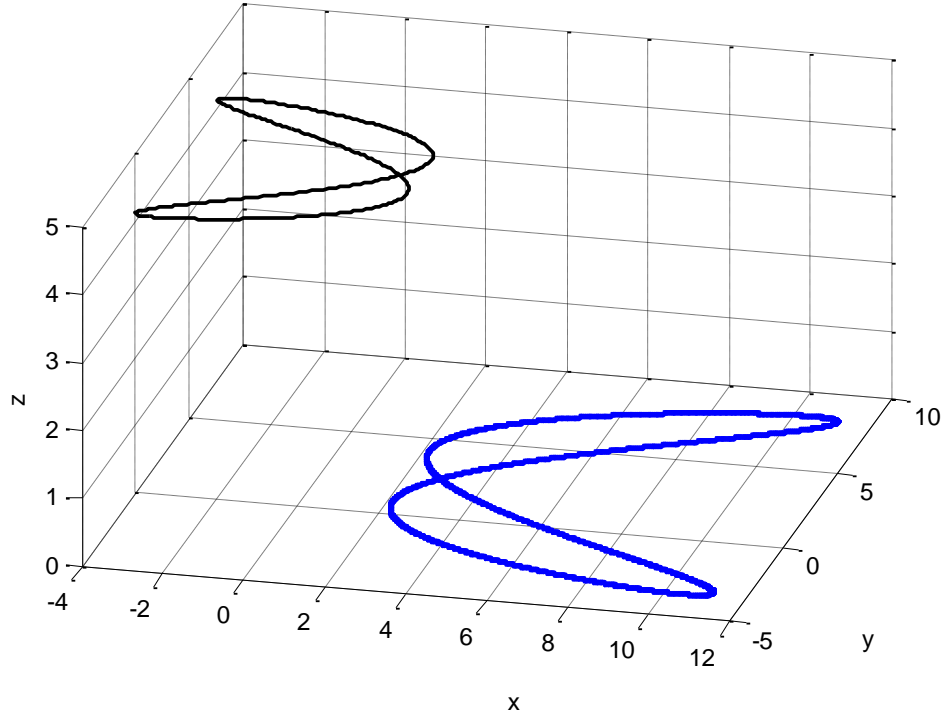
$$(0.5244, -1, 2) \times (q_1 - 2, q_2 - 1, q_3 - 3) = \vec{0}$$

$$(5 - q_3 - 2q_2, (3 - q_3)0.5244 + 2q_1 - 4, (q_2 - 1)0.5244 + q_1 - 2) = (0, 0, 0)$$

elde edilir. Ayrıca

$$q(0) = S(u_0, w_0) = (u_0, w_0, 0) = (q_1, q_2, q_3)$$

olduğu göz önüne alınırsa, $q(0) = (q_1, q_2, q_3) = (1.25, 2.5, 0)$ ve $(u_0, w_0) = (1.25, 2.5)$ olarak bulunur. Böylece program MATLAB(8.3.0.532) ile çalıştırılıp sonlandıktan sonra esas eğri de çizdirilirse aşağıdaki şekil elde edilmektedir.



Şekil 4.8 Lissajous Eğrisinin Merkezil İzdüşümü

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, 3-boyutlu Öklid uzayında uzayda parametrik bir eğrinin, parametrik bir yüzey üzerine merkezil izdüşümü incelenmiştir. Elde edilen izdüşüm eğrisinin birinci ve ikinci dereceden diferansiyel özellikleri analiz edilmiştir. Oluşan izdüşüm eğrisini hesaplamak amacıyla ikinci mertebeden Taylor açılımı kullanılmış ve izdüşüm bir algoritma ile gösterilmiştir. Verilen örneklerde farklı adım aralıkları ve kesme hatası seçilerek izdüşürülen eğrilerin sapma miktarları gösterilmiştir. Daha küçük kesme hataları seçildiğinde izdüşüm eğrisinde oluşan sapma miktarının azaldığı gözlenmiştir.

Benzer düşünceyle; 4-boyutlu Öklid uzayında verilen eğrilerin bir hiperyüzey üzerine merkezil ve paralel izdüşümleri araştırılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Limaiem, A. ve Trochu, F., (1995). "Geometric Algorithms For The Intersection of Curves and Surfaces", *Computers & Graphics*, 19: 391-403.
- [2] Besl, P. J. ve McKay, N. D., (1992). "A Method For Registration of 3-D Shapes", *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14: 239-256.
- [3] Piegl, L. A. ve Tiller, W., (2001). "Parameterization For The Surface Fitting in Reverse Engineering", *Computer-Aided Design*, 33: 593-603.
- [4] Mortenson, M. E., (1985). "Geometric Modeling", John Wiley & Sons, New York.
- [5] Zhou, J. M., Sheerbroke, E. C. ve Patrikalakis, N., (1993). "Computation of Stationary Points of Distance Functions", *Engineering with Computers*, 9: 231-246.
- [6] Piegl, L. A. ve Tiller, W., (1997). *The NURBS Book*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- [7] Pegna, J. ve Wolter, F. E., (1996). "Surface Curve Design by Orthogonal Projection of Space Curves onto Free-Form Surfaces", *Journal of Mechanical Design*, 118: 45-52.
- [8] Hu, S.M. ve Wallner, J., (2005). "A Second Order Algorithm For Orthogonal Projection onto Curves and Surfaces", *Computer Aided Geometric Design*, 22: 251-260.
- [9] Liu, X. M., Yang, L., Yong, J. H., Gu, H. J. ve Sun, J.G., (2009). "A Torus Patch Approximation Approach For Point Projection on Surfaces", *Computer Aided Geometric Design*, 26: 593-598.
- [10] Xu, H. Y., Fang, X., Tam, H. Y., Wu, X. ve Hu, L., (2012). "A Second Order Algorithm For Curve Orthogonal Projection onto Parametric Surface", *International Journal of Computer Mathematics*, 89(1): 98-111.
- [11] Dyllong, E. ve Luther, W., (1999). "Distance Calculation Between a Point and a NURBS Surface", *Proceedings of the 4th International Conference on Curves and Surfaces*, Saint-Malo.

- [12] Ma, Y. L. ve Hewitt, W. T., (2003). "Point Inversion and Projection for NURBS Curve and Surface: Control Polygon Approach", Computer Aided Geometric Design, 20: 79-99.
- [13] Wang, X. P., Wei, W. ve Zhang, W. Z., (2010). "Projection Curves onto Free-Form Surfaces", International Journal Computer Applications in Technology, 37: 153-159.
- [14] Palamutođlu, M., (1994). Tasarı Geometri Eşlenik Dik İzdüşüm Prensipleri, Erciyes Üniversitesi Yayınları, Kayseri.
- [15] Yüce, S., (2013). Diferansiyel Geometri, Sürat Üniversite Yayınları, İstanbul.
- [16] Bayram, M., (2009). Nümerik Analiz, Birsen Yayınevi, İstanbul.
- [17] Karagöz, İ., (2011). Sayısal Analiz ve Mühendislik Uygulamaları, Üçüncü Basım, Nobel Yayınları, Türkiye.
- [18] Thomas, G. B., Finney R. L., Weir, M. D., (2001). Calculus ve Analitik Geometri Cilt: II, Beta Yayıncılık, İstanbul.
- [19] Uzun, İ., (2011). Mühendislikte Sayısal Çözüm Yöntemleri Nümerik Analiz, Dördüncü Baskı, Beta Yayıncılık, İstanbul.
- [20] Wong, W. E. ve Zhu, T., (2014). Computer Engineering and Networking: Proceedings of the 2013 International Conference on Computer Engineering and Network (CENet 2013), Springer International Publishing Switzerland.
- [21] İnan, A., (2011). Matlab Kılavuzu, Üçüncü Basım, Papatya Yayıncılık, İstanbul.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Bedia Merih ÖZÇETİN
Doğum Tarihi ve Yeri : 27.06.1990 / Tarsus
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : merih-ozcetin@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2012
Lise	Matematik-Fen	Tarsus/ Mustafa Kemal Anadolu Lisesi	2008

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2014-2015	Ekol Dershanesi	Matematik Öğretmenliği