

**T.C.  
CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DOKTORA TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI  
GEOMETRİ BİLİM DALI**

**SABİT GENİŞLİKLİ EĞRİLER VE KÜRESEL EĞRİLERİN  
DİFERENSİYEL KARAKTERİZASYONLARI**

**Muhammed ÇETİN**

**Danışman  
Prof. Dr. Mehmet SEZER**

**II. Danışman  
Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT**



**MANİSA-2015**

## TEZ ONAYI

**Muhammed ÇETİN** tarafından hazırlanan "**Sabit Genişlikli Eğriler ve Küresel Eğrilerin Diferensiyel Karakterizasyonları**" adlı tez çalışması 15/05/2015 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

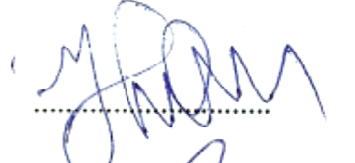
**Danışman**

**Prof. Dr. Mehmet SEZER**  
Celal Bayar Üniversitesi



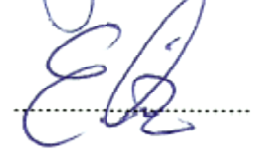
**II. Danışman**

**Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT**  
Celal Bayar Üniversitesi



**Jüri Üyesi**

**Doç. Dr. Emin ÖZYILMAZ**  
Ege Üniversitesi



**Jüri Üyesi**

**Doç. Dr. Murat Kemal KARACAN**  
Uşak Üniversitesi



**Jüri Üyesi**

**Doç. Dr. Salih YALÇINBAŞ**  
Celal Bayar Üniversitesi



**Enstitü Müdürü**

**Prof. Dr. Kenan DOST**

.....

## **TAAHHÜTNAME**

Bu tezin Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

**Muhammed ÇETİN**



## İÇİNDEKİLER

|                                                                                                              | Sayfa |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| İÇİNDEKİLER .....                                                                                            | I     |
| SEMBOLLER DİZİNİ .....                                                                                       | V     |
| ŞEKİLLER DİZİNİ .....                                                                                        | VI    |
| TABLOLAR DİZİNİ .....                                                                                        | VIII  |
| TEŞEKKÜR .....                                                                                               | XIII  |
| ÖZET.....                                                                                                    | XIV   |
| ABSTRACT .....                                                                                               | XVI   |
| <br>                                                                                                         |       |
| GİRİŞ .....                                                                                                  | 1     |
| <br>                                                                                                         |       |
| 1. TEMEL KAVRAMLAR .....                                                                                     | 4     |
| 1.1. 3-Boyutlu Öklid ve Minkowski Uzaylarında Temel Tanım<br>ve Teoremler .....                              | 4     |
| 1.2. Lucas Polinomları.....                                                                                  | 11    |
| 1.2.1. Lucas Polinomlarının Toplam Formülü.....                                                              | 11    |
| 1.2.2. Lucas Polinomlarının Tekrarlama (Rekürans) Bağıntısı .....                                            | 12    |
| 1.2.3. Lucas Polinomlarının Binet Formülü .....                                                              | 13    |
| 1.2.4. Lucas Polinomlarının Bazı Özellikleri .....                                                           | 13    |
| <br>                                                                                                         |       |
| 2. 3-BOYUTLU ÖKLİD VE MINKOWSKI UZAYLARINDA BISHOP<br>ÇATIYA GÖRE SABİT GENİŞLİKLİ EĞRİLER.....              | 14    |
| 2.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Bishop Çatıya Göre Sabit Genişlikli<br>Eğriler .....                           | 14    |
| 2.2. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Bishop Çatıya Göre Sabit Genişlikli<br>Eğriler .....                       | 22    |
| 2.2.1. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Bishop Çatıya Göre Sabit<br>Genişlikli Timelike Eğriler.....             | 22    |
| 2.2.2. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Bishop Çatıya Göre Sabit<br>Genişlikli Spacelike Eğriler.....            | 31    |
| <br>                                                                                                         |       |
| 3. 3-BOYUTLU ÖKLİD VE MINKOWSKI UZAYLARINDA KÜRESEL<br>EĞRİLER .....                                         | 40    |
| 3.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Küresel Eğriler .....                                                          | 40    |
| 3.2. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Küresel Eğriler .....                                                      | 45    |
| 3.2.1. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Lorentziyen Küresel Eğriler ....                                         | 45    |
| 3.2.1.1. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Lorentziyen Küresel<br>Timelike Eğriler.....                           | 45    |
| 3.2.1.2. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Aslinormali<br>Timelike Olan Lorentziyen Küresel Spacelike Eğriler.... | 50    |
| 3.2.1.3. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Binormali Timelike<br>Olan Lorentziyen Küresel Spacelike Eğriler ..... | 55    |
| 3.2.2. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Hiperbolik Küresel Eğriler .....                                         | 60    |
| 3.2.2.1. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Aslinormali<br>Timelike Olan Hiperbolik Küresel Spacelike Eğriler..... | 60    |
| 3.2.2.2. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Binormali Timelike<br>Olan Hiperbolik Küresel Spacelike Eğriler .....  | 65    |

|                                                                                                                                                                                      |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>4. ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ VE REZİDÜ HATA TAHMİNİ .....</b>                                                                                                                              | <b>71</b>  |
| 4.1. Taylor Collocation (Sıralama) Yöntemi .....                                                                                                                                     | 71         |
| 4.1.1. Değişken Katsayılı Lineer Diferensiyel Denklemlerin Çözümü için Taylor Sıralama Yöntemi .....                                                                                 | 71         |
| 4.1.2. Taylor Sıralama Yöntemiyle Çözülen Lineer Diferensiyel Denklemler için Çözümün Doğruluğu ve Rezidü Hata Tahmini .....                                                         | 73         |
| 4.1.3. Genel Lineer Diferensiyel Denklem Sistemlerinin Çözümü için Taylor Sıralama Yöntemi .....                                                                                     | 80         |
| 4.1.4. Taylor Sıralama Yöntemiyle Çözülen Genel Lineer Diferensiyel Denklem Sistemleri için Çözümün Doğruluğu ve Rezidü Hata Tahmini.....                                            | 84         |
| 4.1.5. Normal Formdaki Lineer Diferensiyel Denklem Sistemlerinin Çözümü için Taylor Sıralama Yöntemi .....                                                                           | 93         |
| 4.1.6. Taylor Sıralama Yöntemiyle Çözülen Normal Formdaki Lineer Diferensiyel Denklem Sistemleri için Çözümün Doğruluğu ve Rezidü Hata Tahmini .....                                 | 96         |
| 4.2. Lucas Collocation (Sıralama) Yöntemi .....                                                                                                                                      | 106        |
| 4.2.1. Değişken Katsayılı Lineer Diferensiyel Denklemlerin Çözümü için Lucas Sıralama Yöntemi .....                                                                                  | 106        |
| 4.2.2. Lucas Sıralama Yöntemiyle Çözülen Lineer Diferensiyel Denklemler için Çözümün Doğruluğu ve Rezidü Hata Tahmini .....                                                          | 109        |
| 4.2.3. Genel Lineer Diferensiyel Denklem Sistemlerinin Çözümü için Lucas Sıralama Yöntemi .....                                                                                      | 116        |
| 4.2.4. Lucas Sıralama Yöntemiyle Çözülen Genel Lineer Diferensiyel Denklem Sistemleri için Çözümün Doğruluğu ve Rezidü Hata Tahmini .....                                            | 120        |
| 4.2.5. Normal Formdaki Lineer Diferensiyel Denklem Sistemlerinin Çözümü için Lucas Sıralama Yöntemi.....                                                                             | 129        |
| 4.2.6. Lucas Sıralama Yöntemiyle Çözülen Normal Formdaki Lineer Diferensiyel Denklem Sistemleri için Çözümün Doğruluğu ve Rezidü Hata Tahmini.....                                   | 133        |
| <b>5. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA BISHOP ÇATIYA GÖRE SABİT GENİŞLİKLİ EĞRİLERİ KARAKTERİZE EDEN DİFERENSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ.....</b>                                      | <b>144</b> |
| 5.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Bishop Çatıya Göre Sabit Genişlikli Eğrileri Karakterize Eden Diferensiyel Denklem Sistemlerinin Çözümü için Taylor Sıralama Yöntemi.....              | 144        |
| 5.2. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Bishop Çatıya Göre Sabit Genişlikli Eğrileri Karakterize Eden Diferensiyel Denklem Sistemlerinin Çözümü için Lucas Sıralama Yöntemi .....              | 151        |
| <b>6. 3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA BISHOP ÇATIYA GÖRE SABİT GENİŞLİKLİ EĞRİLERİ KARAKTERİZE EDEN DİFERENSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ.....</b>                                  | <b>158</b> |
| 6.1. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Bishop Çatıya Göre Sabit Genişlikli Timelike Eğrileri Karakterize Eden Diferensiyel Denklem Sistemlerinin Çözümü için Taylor Sıralama Yöntemi..... | 158        |

|                                                                                                                                                                                               |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 6.2. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Bishop Çatıya Göre Sabit Genişlikli<br>Timelike Eğrileri Karakterize Eden Diferensiyel Denklem<br>Sistemlerinin Çözümü için Lucas Sıralama Yöntemi.....     | 164        |
| 6.3. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Bishop Çatıya Göre Sabit Genişlikli<br>Spacelike Eğrileri Karakterize Eden Diferensiyel Denklem<br>Sistemlerinin Çözümü için Taylor Sıralama Yöntemi.....   | 169        |
| 6.4. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Bishop Çatıya Göre Sabit Genişlikli<br>Spacelike Eğrileri Karakterize Eden Diferensiyel Denklem<br>Sistemlerinin Çözümü için Lucas Sıralama Yöntemi.....    | 182        |
| <b>7. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA KÜRESEL EĞRİLERİ<br/>KARAKTERİZE EDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN<br/>ÇÖZÜMÜ.....</b>                                                                            | <b>192</b> |
| 7.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Küresel Eğrileri Karakterize Eden<br>Diferensiyel Denklemlerin Çözümü için Taylor Sıralama Yöntemi .....                                                        | 192        |
| 7.2. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Küresel Eğrileri Karakterize Eden<br>Diferensiyel Denklemlerin Çözümü için Lucas Sıralama Yöntemi .....                                                         | 198        |
| <b>8. 3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA LORENTZİYEN KÜRESEL<br/>EĞRİLERİ KARAKTERİZE EDEN DİFERENSİYEL<br/>DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ .....</b>                                                           | <b>203</b> |
| 8.1. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Lorentziyen Küresel Timelike<br>Eğrileri Karakterize Eden Diferensiyel Denklemlerin Çözümü için<br>Taylor Sıralama Yöntemi .....                            | 197        |
| 8.2. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Lorentziyen Küresel Timelike<br>Eğrileri Karakterize Eden Diferensiyel Denklemlerin Çözümü için<br>Lucas Sıralama Yöntemi.....                              | 209        |
| 8.3. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Aslinormali Timelike Olan<br>Lorentziyen Küresel Spacelike Eğrileri Karakterize Eden<br>Diferensiyel Denklemlerin Çözümü için Taylor Sıralama Yöntemi ..... | 212        |
| 8.4. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Aslinormali Timelike Olan<br>Lorentziyen Küresel Spacelike Eğrileri Karakterize Eden<br>Diferensiyel Denklemlerin Çözümü için Lucas Sıralama Yöntemi .....  | 219        |
| 8.5. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Binormali Timelike Olan<br>Lorentziyen Küresel Spacelike Eğrileri Karakterize Eden<br>Diferensiyel Denklemlerin Çözümü için Taylor Sıralama Yöntemi .....   | 223        |
| 8.6. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Binormali Timelike Olan<br>Lorentziyen Küresel Spacelike Eğrileri Karakterize Eden<br>Diferensiyel Denklemlerin Çözümü için Lucas Sıralama Yöntemi .....    | 230        |
| <b>9. 3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA HİPERBOLİK KÜRESEL<br/>EĞRİLERİ KARAKTERİZE EDEN DİFERENSİYEL<br/>DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ .....</b>                                                            | <b>235</b> |
| 9.1. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Aslinormali Timelike Olan<br>Hiperbolik Küresel Spacelike Eğrileri Karakterize Eden Diferensiyel<br>Denklemlerin Çözümü için Taylor Sıralama Yöntemi.....   | 235        |
| 9.2. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Aslinormali Timelike Olan<br>Hiperbolik Küresel Spacelike Eğrileri Karakterize Eden Diferensiyel<br>Denklemlerin Çözümü için Lucas Sıralama Yöntemi .....   | 240        |

|                                                                                                                                                                                            |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 9.3. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Binormali Timelike Olan<br>Hiperbolik Küresel Spacelike Eğrileri Karakterize Eden Diferensiyel<br>Denklemlerin Çözümü için Taylor Sıralama Yöntemi ..... | 244        |
| 9.4. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Binormali Timelike Olan<br>Hiperbolik Küresel Spacelike Eğrileri Karakterize Eden Diferensiyel<br>Denklemlerin Çözümü için Lucas Sıralama Yöntemi .....  | 248        |
| <b>KAYNAKLAR .....</b>                                                                                                                                                                     | <b>253</b> |
| <b>ÖZGEÇMİŞ.....</b>                                                                                                                                                                       | <b>258</b> |

## SEMBOLLER DİZİNİ

|                          |                                                              |
|--------------------------|--------------------------------------------------------------|
| $\mathbb{R}$             | Reel sayılar cümlesi                                         |
| $\mathbb{R}^3$           | 3-boyutlu Öklid uzayı                                        |
| $\mathbb{R}_1^3$         | 3-boyutlu Minkowski uzayı                                    |
| $S^2$                    | Öklid-3 uzayında birim küre                                  |
| $S_1^2$                  | Lorentziyen birim küre                                       |
| $H_0^2$                  | Hiperbolik birim küre                                        |
| $\kappa$                 | Frenet çatıya göre eğrilik                                   |
| $\tau$                   | Frenet çatıya göre burulma                                   |
| $k_1$                    | Bishop çatıya göre 1. eğrilik                                |
| $k_2$                    | Bishop çatıya göre 2. eğrilik                                |
| $\wedge$                 | Vektörel çarpım                                              |
| $\langle, \rangle$       | İç çarpım                                                    |
| $\Lambda$                | Işık konisi                                                  |
| $\  \ $                  | Norm                                                         |
| $\mathbf{D}$             | Lucas polinomu için katsayılar matrisi                       |
| $N$                      | Kesme sınırı                                                 |
| $M$                      | Kesme sınırı                                                 |
| $x_i$                    | Sıralama noktaları                                           |
| $L_n(x)$                 | Lucas polinomları                                            |
| $\mathbf{W}$             | Artırılmış matris                                            |
| $\widetilde{\mathbf{W}}$ | Koşulların kullanıldığı yeni artırılmış matris               |
| $\mathbf{U}$             | Koşullar için artırılmış matris                              |
| $\widetilde{\mathbf{G}}$ | Sağ taraftaki koşulların kullanıldığı yeni artırılmış matris |
| $e_N(x)$                 | Asıl hata fonksiyonu                                         |
| $e_{N,M}(x)$             | Tahmini hata fonksiyonu                                      |
| $E_{N,M}(x)$             | Düzeltilmiş hata fonksiyonu                                  |
| $R_N(x)$                 | Rezidü hata fonksiyonu                                       |
| $y_N(x)$                 | Yaklaşık çözüm                                               |

## ŞEKİLLER DİZİNİ

|                                                                                                                   | Sayfa |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Şekil 1.1. Lucas polinomlarının grafiği .....                                                                     | 12    |
| Şekil 4.1. Örnek 4.1'in tam çözüm ile yaklaşık çözümlerinin $N = 5$ ve $M = 6, 9, 11$ için nümerik sonuçları..... | 76    |
| Şekil 4.2. Örnek 4.2'in tam çözüm ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....                                | 79    |
| Şekil 4.3. Örnek 4.3'ün tam çözüm $y_1(x)$ ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....                       | 87    |
| Şekil 4.4. Örnek 4.3'ün tam çözüm $y_2(x)$ ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....                       | 88    |
| Şekil 4.5. Örnek 4.4'ün tam çözüm $y_1(x)$ ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....                       | 91    |
| Şekil 4.6. Örnek 4.4'ün tam çözüm $y_2(x)$ ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....                       | 92    |
| Şekil 4.7. Örnek 4.5'in tam çözüm $y_1(x)$ ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....                       | 100   |
| Şekil 4.8. Örnek 4.5'in tam çözüm $y_2(x)$ ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....                       | 101   |
| Şekil 4.9. Örnek 4.5'in tam çözüm $y_3(x)$ ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....                       | 101   |
| Şekil 4.10. Örnek 4.6'nın tam çözüm $y_1(x)$ ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....                     | 104   |
| Şekil 4.11. Örnek 4.6'nın tam çözüm $y_2(x)$ ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....                     | 105   |
| Şekil 4.12. Örnek 4.7'nin tam çözüm ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....                              | 112   |
| Şekil 4.13. Örnek 4.8'in tam çözüm ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....                               | 115   |
| Şekil 4.14. Örnek 4.9'un tam çözüm $y_1(x)$ ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....                      | 124   |
| Şekil 4.15. Örnek 4.9'un tam çözüm $y_2(x)$ ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....                      | 124   |
| Şekil 4.16. Örnek 4.10'un tam çözüm $y_1(x)$ ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....                     | 127   |
| Şekil 4.17. Örnek 4.10'un tam çözüm $y_2(x)$ ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....                     | 128   |
| Şekil 4.18. Örnek 4.11'in tam çözüm $y_1(x)$ ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....                     | 137   |
| Şekil 4.19. Örnek 4.11'in tam çözüm $y_2(x)$ ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....                     | 137   |
| Şekil 4.20. Örnek 4.11'in tam çözüm $y_3(x)$ ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....                     | 138   |
| Şekil 4.21. Örnek 4.12'nin tam çözüm $y_1(x)$ ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....                    | 141   |

|                                                                                                                                    |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Şekil 4.22. Örnek 4.12'nin tam çözüm $y_2(x)$ ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....                                     | 142 |
| Şekil 5.1. Örnek 5.1'in uzaklık fonksiyonlarının karşılaştırılması .....                                                           | 148 |
| Şekil 5.2. Örnek 5.1'in $\alpha$ eğrisi ile $\alpha_{3,4}^*$ , $\alpha_{3,5}^*$ ve $\alpha_{3,8}^*$ eğrilerinin grafikleri .....   | 151 |
| Şekil 5.3. Örnek 5.2'nin uzaklık fonksiyonlarının karşılaştırılması .....                                                          | 155 |
| Şekil 5.4. Örnek 5.2'nin $\alpha$ eğrisi ile $\alpha_{3,4}^*$ , $\alpha_{3,5}^*$ ve $\alpha_{3,8}^*$ eğrilerinin grafikleri ...    | 157 |
| Şekil 6.1. Örnek 6.1'in uzaklık fonksiyonlarının karşılaştırılması .....                                                           | 163 |
| Şekil 6.2. Örnek 6.1'in $\alpha$ eğrisi ile $\alpha_{3,5}^*$ , $\alpha_{3,8}^*$ ve $\alpha_{3,12}^*$ eğrilerinin grafikleri .....  | 164 |
| Şekil 6.3. Örnek 6.2'nin uzaklık fonksiyonlarının karşılaştırılması .....                                                          | 168 |
| Şekil 6.4. Örnek 6.2'nin $\alpha$ eğrisi ile $\alpha_{3,5}^*$ , $\alpha_{3,8}^*$ ve $\alpha_{3,12}^*$ eğrilerinin grafikleri ...   | 169 |
| Şekil 6.5. Örnek 6.3'ün uzaklık fonksiyonlarının karşılaştırılması .....                                                           | 175 |
| Şekil 6.6. Örnek 6.3'ün $\alpha$ eğrisi ile $\alpha_{3,5}^*$ , $\alpha_{3,8}^*$ ve $\alpha_{3,12}^*$ eğrilerinin grafikleri ....   | 176 |
| Şekil 6.7. Örnek 6.4'ün uzaklık fonksiyonlarının karşılaştırılması .....                                                           | 181 |
| Şekil 6.8. Örnek 6.4'ün $\alpha$ eğrisi ile $\alpha_{3,5}^*$ , $\alpha_{3,8}^*$ ve $\alpha_{3,12}^*$ eğrilerinin grafikleri ....   | 182 |
| Şekil 6.9. Örnek 6.5'in uzaklık fonksiyonlarının karşılaştırılması .....                                                           | 186 |
| Şekil 6.10. Örnek 6.5'in $\alpha$ eğrisi ile $\alpha_{3,5}^*$ , $\alpha_{3,8}^*$ ve $\alpha_{3,12}^*$ eğrilerinin grafikleri ..... | 187 |
| Şekil 6.11. Örnek 6.6'nın uzaklık fonksiyonlarının karşılaştırılması .....                                                         | 190 |
| Şekil 6.12. Örnek 6.6'nın $\alpha$ eğrisi ile $\alpha_{3,5}^*$ , $\alpha_{3,8}^*$ ve $\alpha_{3,12}^*$ eğrilerinin grafikleri ...  | 191 |
| Şekil 7.1. Örnek 7.1'in $\alpha$ eğrisi ile $\alpha_{4,5}$ , $\alpha_{4,8}$ ve $\alpha_{4,13}$ eğrilerinin grafikleri .....        | 197 |
| Şekil 7.2. Örnek 7.2'nin $\alpha$ eğrisi ile $\alpha_{4,5}$ , $\alpha_{4,8}$ ve $\alpha_{4,13}$ eğrilerinin grafikleri ...         | 202 |
| Şekil 8.1. Örnek 8.1'in $\alpha$ eğrisi ile $\alpha_4$ ve $\alpha_6$ eğrilerinin grafikleri .....                                  | 208 |
| Şekil 8.2. Örnek 8.2'nin $\alpha$ eğrisi ile $\alpha_4$ ve $\alpha_6$ eğrilerinin grafikleri .....                                 | 212 |
| Şekil 8.3. Örnek 8.3'ün $\alpha$ eğrisi ile $\alpha_4$ ve $\alpha_6$ eğrilerinin grafikleri .....                                  | 218 |
| Şekil 8.4. Örnek 8.4'ün $\alpha$ eğrisi ile $\alpha_4$ ve $\alpha_6$ eğrilerinin grafikleri .....                                  | 222 |
| Şekil 8.5. Örnek 8.5'in $\alpha$ eğrisi ile $\alpha_4$ , $\alpha_7$ ve $\alpha_{13}$ eğrilerinin grafikleri .....                  | 229 |
| Şekil 8.6. Örnek 8.6'nın $\alpha$ eğrisi ile $\alpha_4$ , $\alpha_7$ ve $\alpha_{13}$ eğrilerinin grafikleri .....                 | 234 |
| Şekil 9.1. Örnek 9.1'in $\alpha$ eğrisi ile $\alpha_4$ ve $\alpha_7$ eğrilerinin grafikleri .....                                  | 240 |
| Şekil 9.2. Örnek 9.2'nin $\alpha$ eğrisi ile $\alpha_4$ ve $\alpha_7$ eğrilerinin grafikleri .....                                 | 243 |
| Şekil 9.3. Örnek 9.3'ün $\alpha$ Eğrisi ile $\alpha_4$ ve $\alpha_7$ eğrilerinin grafikleri .....                                  | 248 |
| Şekil 9.4. Örnek 9.4'ün $\alpha$ eğrisi ile $\alpha_4$ ve $\alpha_7$ eğrilerinin grafikleri .....                                  | 251 |

## TABLolar DİZİNİ

|                                                                                                                     | Sayfa |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Tablo 4.1. Örnek 4.1'in tam çözüm ile yaklaşık çözümlerinin $N = 5$ ve $M = 6, 9, 11$ için nümerik sonuçları.....   | 76    |
| Tablo 4.2. Örnek 4.1'in düzeltilmiş mutlak hatalarının $N = 5$ ve $M = 6, 9, 11$ için karşılaştırılması.....        | 77    |
| Tablo 4.3. Örnek 4.2'nin tam çözüm ile yaklaşık çözümlerinin $N = 6$ ve $M = 7, 10, 13$ için nümerik sonuçları..... | 79    |
| Tablo 4.4. Örnek 4.2'nin düzeltilmiş mutlak hatalarının $N = 6$ ve $M = 7, 10, 13$ için karşılaştırılması.....      | 80    |
| Tablo 4.5. Örnek 4.3'ün tam çözüm ile yaklaşık çözümlerinin $N = 3$ ve $M = 5, 6, 8$ için nümerik sonuçları.....    | 87    |
| Tablo 4.6. Örnek 4.3'ün düzeltilmiş mutlak hatalarının $N = 3$ ve $M = 5, 6, 8$ için karşılaştırılması.....         | 88    |
| Tablo 4.7. Örnek 4.4'ün tam çözüm ile yaklaşık çözümlerinin $N = 3$ ve $M = 4, 7, 9$ için nümerik sonuçları.....    | 91    |
| Tablo 4.8. Örnek 4.4'ün düzeltilmiş mutlak hatalarının $N = 3$ ve $M = 4, 7, 9$ için karşılaştırılması.....         | 92    |
| Tablo 4.9. Örnek 4.5'in tam çözüm ile yaklaşık çözümlerinin $N = 2$ ve $M = 3, 5, 9$ nümerik sonuçları.....         | 100   |
| Tablo 4.10. Örnek 4.5'in düzeltilmiş mutlak hatalarının $N = 2$ ve $M = 3, 5, 9$ için karşılaştırılması.....        | 102   |
| Tablo 4.11. Örnek 4.6'nın tam çözüm ile yaklaşık çözümlerinin $N = 2$ ve $M = 3, 5, 9$ için nümerik sonuçları.....  | 104   |
| Tablo 4.12. Örnek 4.6'nın düzeltilmiş mutlak hatalarının $N = 2$ ve $M = 3, 5, 9$ için karşılaştırılması.....       | 105   |
| Tablo 4.13. Örnek 4.7'nin tam çözüm ile yaklaşık çözümlerinin $N = 5$ ve $M = 6, 9, 11$ için nümerik sonuçları..... | 112   |
| Tablo 4.14. Örnek 4.7'nin düzeltilmiş mutlak hatalarının $N = 5$ ve $M = 6, 9, 11$ için karşılaştırılması.....      | 113   |
| Tablo 4.15. Örnek 4.8'in tam çözüm ile yaklaşık çözümlerinin $N = 6$ ve $M = 7, 10, 13$ için nümerik sonuçları..... | 114   |
| Tablo 4.16. Örnek 4.8'in düzeltilmiş mutlak hatalarının $N = 6$ ve $M = 7, 10, 13$ için karşılaştırılması.....      | 115   |
| Tablo 4.17. Örnek 4.9'un tam çözüm ile yaklaşık çözümlerinin $N = 3$ ve $M = 5, 6, 8$ için nümerik sonuçları.....   | 123   |
| Tablo 4.18. Örnek 4.9'un düzeltilmiş mutlak hatalarının $N = 3$ ve $M = 5, 6, 8$ için karşılaştırılması.....        | 125   |
| Tablo 4.19. Örnek 4.10'un tam çözüm ile yaklaşık çözümlerinin $N = 3$ ve $M = 4, 7, 9$ için nümerik sonuçları.....  | 127   |
| Tablo 4.20. Örnek 4.10'un düzeltilmiş mutlak hatalarının $N = 3$ ve $M = 4, 7, 9$ için karşılaştırılması.....       | 128   |
| Tablo 4.21. Örnek 4.11'in tam çözüm ile yaklaşık çözümlerinin $N = 2$ ve $M = 3, 5, 9$ için nümerik sonuçları.....  | 136   |

|                                                                                                                                             |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Tablo 4.22. Örnek 4.11'in düzeltilmiş mutlak hatalarının $N = 2$ ve $M = 3, 5, 9$ için karşılaştırılması .....                              | 139 |
| Tablo 4.23. Örnek 4.12'nin tam çözüm ile yaklaşık çözümlerinin $N = 2$ ve $M = 3, 5, 9$ için nümerik sonuçları .....                        | 141 |
| Tablo 4.24. Örnek 4.12'nin düzeltilmiş mutlak hatalarının $N = 2$ ve $M = 3, 5, 9$ için karşılaştırılması .....                             | 142 |
| Tablo 5.1. Örnek 5.1'in $d_{N,M}$ uzaklık fonksiyonunun $N = 2$ ve $M = 3, 5, 9$ değerleri için sayısal sonuçları .....                     | 148 |
| Tablo 5.2. Örnek 5.1'in $ e_{1,N,M}(s) $ tahmini mutlak hata fonksiyonunun $N = 3$ ve $M = 4, 5, 8$ değerleri için sayısal sonuçları .....  | 149 |
| Tablo 5.3. Örnek 5.1'in $ e_{2,N,M}(s) $ tahmini mutlak hata fonksiyonunun $N = 3$ ve $M = 4, 5, 8$ değerleri için sayısal sonuçları .....  | 150 |
| Tablo 5.4. Örnek 5.1'in $ e_{3,N,M}(s) $ tahmini mutlak hata fonksiyonunun $N = 3$ ve $M = 4, 5, 8$ değerleri için sayısal sonuçları .....  | 150 |
| Tablo 5.5. Örnek 5.2'nin $d_{N,M}$ uzaklık fonksiyonunun $N = 3$ ve $M = 4, 5, 8$ değerleri için sayısal sonuçları .....                    | 154 |
| Tablo 5.6. Örnek 5.2'nin $ e_{1,N,M}(s) $ tahmini mutlak hata fonksiyonunun $N = 3$ ve $M = 4, 5, 8$ değerleri için sayısal sonuçları ..... | 156 |
| Tablo 5.7. Örnek 5.2'nin $ e_{2,N,M}(s) $ tahmini mutlak hata fonksiyonunun $N = 3$ ve $M = 4, 5, 8$ değerleri için sayısal sonuçları ..... | 156 |
| Tablo 5.8. Örnek 5.2'nin $ e_{3,N,M}(s) $ tahmini mutlak hata fonksiyonunun $N = 3$ ve $M = 4, 5, 8$ değerleri için sayısal sonuçları ..... | 157 |
| Tablo 6.1. Örnek 6.1'in $d_{N,M}$ uzaklık fonksiyonunun $N = 3$ ve $M = 5, 8, 12$ değerleri için sayısal sonuçları .....                    | 162 |
| Tablo 6.2. Örnek 6.2'nin $d_{N,M}$ uzaklık fonksiyonunun $N = 3$ ve $M = 5, 8, 12$ değerleri için sayısal sonuçları .....                   | 168 |
| Tablo 6.3. Örnek 6.3'in $d_{N,M}$ uzaklık fonksiyonunun $N = 3$ ve $M = 5, 8, 12$ değerleri için sayısal sonuçları .....                    | 174 |
| Tablo 6.4. Örnek 6.4'ün $d_{N,M}$ uzaklık fonksiyonunun $N = 3$ ve $M = 5, 8, 12$ değerleri için sayısal sonuçları .....                    | 180 |
| Tablo 6.5. Örnek 6.5'in $d_{N,M}$ uzaklık fonksiyonunun $N = 3$ ve $M = 5, 8, 12$ değerleri için sayısal sonuçları .....                    | 185 |
| Tablo 6.6. Örnek 6.6'in $d_{N,M}$ uzaklık fonksiyonunun $N = 3$ ve $M = 5, 8, 12$ değerleri için sayısal sonuçları .....                    | 190 |
| Tablo 7.1. Örnek 7.1'in düzeltilmiş mutlak hata fonksiyonunun $( E_{1,N,M}(t) )$ $N = 4$ ve $M = 5, 8, 13$ için sayısal sonuçları .....     | 196 |
| Tablo 7.2. Örnek 7.1'in düzeltilmiş mutlak hata fonksiyonunun $( E_{2,N,M}(t) )$ $N = 4$ ve $M = 5, 8, 13$ için sayısal sonuçları .....     | 196 |

|                                                                                                                                             |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Tablo 7.3. Örnek 7.1'in düzeltilmiş mutlak hata fonksiyonunun<br>$( E_{3,N,M}(t) )$ $N = 4$ ve $M = 5, 8, 13$ için sayısal sonuçları.....   | 196 |
| Tablo 7.4. Örnek 7.2'nin düzeltilmiş mutlak hata fonksiyonunun<br>$( E_{1,N,M}(t) )$ $N = 4$ ve $M = 5, 8, 13$ için sayısal sonuçları.....  | 201 |
| Tablo 7.5. Örnek 7.2'nin düzeltilmiş mutlak hata fonksiyonunun<br>$( E_{2,N,M}(t) )$ $N = 4$ ve $M = 5, 8, 13$ için sayısal sonuçları ..... | 201 |
| Tablo 7.6. Örnek 7.2'nin düzeltilmiş mutlak hata fonksiyonunun<br>$( E_{3,N,M}(t) )$ $N = 4$ ve $M = 5, 8, 13$ için sayısal sonuçları.....  | 201 |
| Tablo 8.1. Örnek 8.1'in $\alpha_1(t)$ tam çözümü ile $\alpha_{1,N}(t)$ Taylor polinom<br>çözümünün $N = 4, 6$ için sayısal sonuçları .....  | 207 |
| Tablo 8.2. Örnek 8.1'in $\alpha_2(t)$ tam çözümü ile $\alpha_{2,N}(t)$ Taylor polinom<br>çözümünün $N = 4, 6$ için sayısal sonuçları .....  | 207 |
| Tablo 8.3. Örnek 8.1'in $\alpha_3(t)$ tam çözümü ile $\alpha_{3,N}(t)$ Taylor polinom<br>çözümünün $N = 4, 6$ için sayısal sonuçları .....  | 207 |
| Tablo 8.4. Örnek 8.1'in asıl mutlak hata fonksiyonlarının $( e_{j,N}(t) )$<br>$N = 4, 6$ ve $j = 1, 2, 3$ için sayısal sonuçları .....      | 208 |
| Tablo 8.5. Örnek 8.2'nin $\alpha_1(t)$ tam çözümü ile $\alpha_{1,N}(t)$ Lucas polinom<br>çözümünün $N = 4, 6$ için sayısal sonuçları .....  | 210 |
| Tablo 8.6. Örnek 8.2'nin $\alpha_2(t)$ tam çözümü ile $\alpha_{2,N}(t)$ Lucas polinom<br>çözümünün $N = 4, 6$ için sayısal sonuçları .....  | 211 |
| Tablo 8.7. Örnek 8.2'nin $\alpha_3(t)$ tam çözümü ile $\alpha_{3,N}(t)$ Lucas polinom<br>çözümünün $N = 4, 6$ için sayısal sonuçları .....  | 211 |
| Tablo 8.8. Örnek 8.2'in asıl mutlak hata fonksiyonlarının $( e_{j,N}(t) )$<br>$N = 4, 6$ ve $j = 1, 2, 3$ için sayısal sonuçları .....      | 211 |
| Tablo 8.9. Örnek 8.3'ün $\alpha_1(t)$ tam çözümü ile $\alpha_{1,N}(t)$ Taylor polinom<br>çözümünün $N = 4, 6$ için sayısal sonuçları .....  | 217 |
| Tablo 8.10. Örnek 8.3'ün $\alpha_2(t)$ tam çözümü ile $\alpha_{2,N}(t)$ Taylor polinom<br>çözümünün $N = 4, 6$ için sayısal sonuçları ..... | 217 |
| Tablo 8.11. Örnek 8.3'ün $\alpha_3(t)$ tam çözümü ile $\alpha_{3,N}(t)$ Taylor polinom<br>çözümünün $N = 4, 6$ için sayısal sonuçları ..... | 217 |
| Tablo 8.12. Örnek 8.3'ün asıl mutlak hata fonksiyonlarının $( e_{j,N}(t) )$<br>$N = 4, 6$ ve $j = 1, 2, 3$ için sayısal sonuçları .....     | 218 |
| Tablo 8.13. Örnek 8.4'ün $\alpha_1(t)$ tam çözümü ile $\alpha_{1,N}(t)$ Lucas polinom<br>çözümünün $N = 4, 6$ için sayısal sonuçları .....  | 220 |
| Tablo 8.14. Örnek 8.4'ün $\alpha_2(t)$ tam çözümü ile $\alpha_{2,N}(t)$ Lucas polinom<br>çözümünün $N = 4, 6$ için sayısal sonuçları .....  | 221 |
| Tablo 8.15. Örnek 8.4'ün $\alpha_3(t)$ tam çözümü ile $\alpha_{3,N}(t)$ Lucas polinom<br>çözümünün $N = 4, 6$ için sayısal sonuçları .....  | 221 |

|                                                                                                                                                 |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Tablo 8.16. Örnek 8.4'ün asıl mutlak hata fonksiyonlarının $( e_{j,N}(t) )$<br>$N = 4, 6$ ve $j = 1, 2, 3$ için sayısal sonuçları .....         | 222 |
| Tablo 8.17. Örnek 8.5'in $\alpha_1(t)$ tam çözümü ile $\alpha_{1,N}(t)$ Taylor polinom<br>çözümünün $N = 4, 7, 13$ için sayısal sonuçları ..... | 226 |
| Tablo 8.18. Örnek 8.5'in $\alpha_2(t)$ tam çözümü ile $\alpha_{2,N}(t)$ Taylor polinom<br>çözümünün $N = 4, 7, 13$ için sayısal sonuçları ..... | 226 |
| Tablo 8.19. Örnek 8.5'in $\alpha_3(t)$ tam çözümü ile $\alpha_{3,N}(t)$ Taylor polinom<br>çözümünün $N = 4, 7, 13$ için sayısal sonuçları ..... | 227 |
| Tablo 8.20. Örnek 8.5'in asıl mutlak hata fonksiyonunun $( e_{1,N}(t) )$<br>$N = 4, 7, 13$ sayısal sonuçları .....                              | 227 |
| Tablo 8.21. Örnek 8.5'in asıl mutlak hata fonksiyonunun $( e_{2,N}(t) )$<br>$N = 4, 7, 13$ için sayısal sonuçları .....                         | 228 |
| Tablo 8.22. Örnek 8.5'in asıl mutlak hata fonksiyonunun $( e_{3,N}(t) )$<br>$N = 4, 7, 13$ için sayısal sonuçları .....                         | 228 |
| Tablo 8.23. Örnek 8.6'nın $\alpha_1(t)$ tam çözümü ile $\alpha_{1,N}(t)$ Lucas polinom<br>çözümünün $N = 4, 7, 13$ için sayısal sonuçları ..... | 232 |
| Tablo 8.24. Örnek 8.6'nın $\alpha_2(t)$ tam çözümü ile $\alpha_{2,N}(t)$ Lucas polinom<br>çözümünün $N = 4, 7, 13$ için sayısal sonuçları ..... | 232 |
| Tablo 8.25. Örnek 8.6'nın $\alpha_3(t)$ tam çözümü ile $\alpha_{3,N}(t)$ Lucas polinom<br>çözümünün $N = 4, 7, 13$ için sayısal sonuçları ..... | 232 |
| Tablo 8.26. Örnek 8.6'nın asıl mutlak hata fonksiyonunun $( e_{1,N}(t) )$<br>$N = 4, 7, 13$ sayısal sonuçları .....                             | 233 |
| Tablo 8.27. Örnek 8.6'nın asıl mutlak hata fonksiyonunun $( e_{2,N}(t) )$<br>$N = 4, 7, 13$ sayısal sonuçları .....                             | 233 |
| Tablo 8.28. Örnek 8.6'nın asıl mutlak hata fonksiyonunun $( e_{3,N}(t) )$<br>$N = 4, 7, 13$ sayısal sonuçları .....                             | 233 |
| Tablo 9.1. Örnek 9.1'in $\alpha_1(t)$ tam çözümü ile $\alpha_{1,N}(t)$ Taylor polinom<br>çözümünün $N = 4, 7$ için sayısal sonuçları .....      | 238 |
| Tablo 9.2. Örnek 9.1'in $\alpha_2(t)$ tam çözümü ile $\alpha_{2,N}(t)$ Taylor polinom<br>çözümünün $N = 4, 7$ için sayısal sonuçları .....      | 238 |
| Tablo 9.3. Örnek 9.1'in $\alpha_3(t)$ tam çözümü ile $\alpha_{3,N}(t)$ Taylor polinom<br>çözümünün $N = 4, 7$ için sayısal sonuçları .....      | 239 |
| Tablo 9.4. Örnek 9.1'in asıl mutlak hata fonksiyonlarının $( e_{j,N}(t) )$<br>$N = 4, 7$ ve $j = 1, 2, 3$ için sayısal sonuçları .....          | 239 |
| Tablo 9.5. Örnek 9.2'in $\alpha_1(t)$ tam çözümü ile $\alpha_{1,N}(t)$ Lucas polinom<br>çözümünün $N = 4, 7$ için sayısal sonuçları .....       | 242 |

|                                                                                                                                                |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Tablo 9.6. Örnek 9.2'in $\alpha_2(t)$ tam çözümü ile $\alpha_{2,N}(t)$ Lucas polinom<br>çözümlerinin $N = 4, 7$ için sayısal sonuçları .....   | 242 |
| Tablo 9.7. Örnek 9.2'in $\alpha_3(t)$ tam çözümü ile $\alpha_{3,N}(t)$ Lucas polinom<br>çözümlerinin $N = 4, 7$ için sayısal sonuçları .....   | 242 |
| Tablo 9.8. Örnek 9.2'nin asıl mutlak hata fonksiyonlarının $( e_{j,N}(t) )$<br>$N = 4, 7$ ve $j = 1, 2, 3$ için sayısal sonuçları .....        | 243 |
| Tablo 9.9. Örnek 9.3'ün $\alpha_1(t)$ tam çözümü ile $\alpha_{1,N}(t)$ Taylor polinom<br>çözümlerinin $N = 4, 7$ için sayısal sonuçları .....  | 246 |
| Tablo 9.10. Örnek 9.3'ün $\alpha_2(t)$ tam çözümü ile $\alpha_{2,N}(t)$ Taylor polinom<br>çözümlerinin $N = 4, 7$ için sayısal sonuçları ..... | 247 |
| Tablo 9.11. Örnek 9.3'ün $\alpha_3(t)$ tam çözümü ile $\alpha_{3,N}(t)$ Taylor polinom<br>çözümlerinin $N = 4, 7$ için sayısal sonuçları ..... | 247 |
| Tablo 9.12. Örnek 9.3'ün asıl mutlak hata fonksiyonlarının $( e_{j,N}(t) )$<br>$N = 4, 7$ ve $j = 1, 2, 3$ için sayısal sonuçları .....        | 247 |
| Tablo 9.13. Örnek 9.4'ün $\alpha_1(t)$ tam çözümü ile $\alpha_{1,N}(t)$ Lucas polinom<br>çözümlerinin $N = 4, 7$ için sayısal sonuçları .....  | 250 |
| Tablo 9.14. Örnek 9.4'ün $\alpha_2(t)$ tam çözümü ile $\alpha_{2,N}(t)$ Lucas polinom<br>çözümlerinin $N = 4, 7$ için sayısal sonuçları .....  | 250 |
| Tablo 9.15. Örnek 9.4'ün $\alpha_3(t)$ tam çözümü ile $\alpha_{3,N}(t)$ Lucas polinom<br>çözümlerinin $N = 4, 7$ için sayısal sonuçları .....  | 250 |
| Tablo 9.16. Örnek 9.4'ün asıl mutlak hata fonksiyonlarının $( e_{j,N}(t) )$<br>$N = 4, 7$ ve $j = 1, 2, 3$ için sayısal sonuçları .....        | 251 |

## TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması esnasında, çalışmalarımı özenle takip eden, bana vakit ayıran, bilgi ve tecrübeleriyle destek veren, maddi-manevi her konuda yardımlarını benden hiç esirgemeyen değerli hocalarım Prof. Dr. Mehmet SEZER ve Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT'e teşekkürü bir borç bilirim.

Doktora eğitimimi tamamlamam için her türlü fedakârlığı gösteren, güven, anlayış ve destekleri için değerli aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Muhammed ÇETİN  
Manisa, 2015

# ÖZET

## Doktora Tezi

### Sabit Genişlikli Eğriler ve Küresel Eğrilerin Diferansiyel Karakterizasyonları

Muhammed ÇETİN

Celal Bayar Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mehmet SEZER

#### II. Danışman: Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT

Bu tez çalışması 9 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, 3-boyutlu Öklid ve Minkowski uzaylarında temel tanım ve teoremler verildi. Ardından Lucas polinomları tanıtılarak, toplam formülü, rekürans bağıntısı, Binet formülü ve bazı özellikleri verildi.

İkinci bölümde,  $E^3$  3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatıya göre sabit genişlikli eğriler ile  $E_1^3$  3-boyutlu Minkowski uzayında Bishop çatıya göre sabit genişlikli timelike ve spacelike eğriler incelendi ve bu eğrileri karakterize eden diferansiyel denklem ve denklem sistemleri verildi.

Üçüncü bölümde, Öklid 3-uzayında Frenet çatıya göre birim hızlı olmayan küresel eğriler ile Minkowski 3-uzayında Frenet çatıya göre birim hızlı olmayan Lorentziyen küresel timelike, spacelike eğriler ve hiperbolik küresel spacelike eğriler incelenerek bu eğrilerin diferansiyel denklem karakterizasyonları verildi.

Dördüncü bölümde, değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemler, genel lineer diferansiyel denklem sistemleri ile normal formdaki lineer diferansiyel denklem sistemlerinin çözümü için rezidü hata fonksiyonuna dayalı Taylor sıralama ve Lucas sıralama metodları verildi.

Beşinci bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatıya göre sabit genişlikli eğrileri karakterize eden diferansiyel denklem sistemlerinin Taylor ve Lucas sıralama metodları kullanılarak yaklaşık çözümleri verildi.

Altıncı bölümde, 3-boyutlu Minkowski uzayında Bishop çatıya göre sabit genişlikli timelike ve spacelike eğrileri karakterize eden diferansiyel denklem sistemlerinin Taylor ve Lucas sıralama metodları kullanılarak yaklaşık çözümleri verildi.

Yedinci bölümde, Öklid 3-uzayında Frenet çatıya göre birim hızlı olmayan küresel eğrileri karakterize eden diferansiyel denklemlerin Taylor ve Lucas sıralama metodları kullanılarak yaklaşık çözümleri verildi.

Sekizinci bölümde, Minkowski 3-uzayında Frenet çatıya göre birim hızlı olmayan Lorentziyen küresel timelike ve spacelike eğrileri karakterize eden diferensiyel denklemlerin Taylor ve Lucas sıralama metodları kullanılarak yaklaşık çözümleri verildi.

Dokuzuncu bölümde, Minkowski 3-uzayında Frenet çatıya göre birim hızlı olmayan hiperbolik küresel spacelike eğrileri karakterize eden diferensiyel denklemlerin Taylor ve Lucas sıralama metodları kullanılarak yaklaşık çözümleri verildi.

**Anahtar Kelimeler:** Sabit genişlikli eğriler, küresel eğriler, Taylor sıralama metodu, Lucas sıralama metodu, diferensiyel karakterizasyon.

**2015, 278 sayfa**

## **ABSTRACT**

### **PhD Thesis**

## **Differential Characterizations of Curves of Constant Breadth and Spherical Curves**

**Muhammed ÇETİN**

**Celal Bayar University  
Graduate School of Applied and Natural Sciences  
Department of Mathematics**

**Supervisor: Prof. Dr. Mehmet SEZER**

**Co-Supervisor: Assist. Prof. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT**

This thesis consists of nine sections.

In the first section, basic definitions and theorems in 3-dimensional Euclidean and Minkowski spaces are given. Lucas polynomials are introduced. Then sum formula, recurrence relation, Binet formula and some identities of the Lucas polynomials are given.

In the second section, the curves of constant breadth according to Bishop frame in 3-dimensional Euclidean space  $E^3$ , and the timelike and spacelike curves of constant breadth according to Bishop frame in 3-dimensional Minkowski space  $E_1^3$  are studied. Then differential equations and differential equation systems characterizing these curves are given.

In the third section, the non-unit speed spherical curves according to Frenet frame in Euclidean 3-space, and the non-unit speed Lorentzian spherical timelike and spacelike curves and the non-unit speed hyperbolic spherical spacelike curves are studied. Then differential equation characterizations of these curves are given.

In the fourth section, for solving linear differential equations with variable coefficients, general linear differential equation systems and systems of linear differential equation in normal form, Taylor collocation and Lucas collocation methods based on residual error function are given.

In the fifth section, approximate solutions of the differential equation systems characterizing curves of constant breadth according to Bishop frame in 3-dimensional Euclidean space are given by using Taylor and Lucas collocation methods.

In the sixth section, approximate solutions of the differential equation systems characterizing timelike and spacelike curves of constant breadth according to Bishop frame in 3-dimensional Minkowski space are given by using Taylor and Lucas collocation methods.

In the seventh section, approximate solutions of the differential equations characterizing non-unit speed spherical curves according to Frenet frame in Euclidean 3-space are given by using Taylor and Lucas collocation methods.

In the eighth section, approximate solutions of the differential equations characterizing non-unit speed Lorentzian spherical timelike and spacelike curves according to Frenet frame in Minkowski 3-space are given by using Taylor and Lucas collocation methods.

In the ninth section, approximate solutions of the differential equations characterizing non-unit speed hyperbolic spherical spacelike curves according to Frenet frame in Minkowski 3-space are given by using Taylor and Lucas collocation methods.

**Keywords:** Curves of constant breadth, spherical curves, Taylor collocation method, Lucas collocation method, differential characterization.

**2015, 278 pages**

## GİRİŞ

Sabit genişlikli eğriler ve küresel eğriler matematikteki önemli konulardandır. Çünkü bu eğriler özellikle mühendislikte sıkça karşılaşılan ve kullanılan eğrilerdir. Bundan dolayı, birçok matematikçi bu eğriler üzerine çalışmalar yapmış ve bilimsel makaleler yayınlamışlardır.

En yaygın sabit genişlikli eğri örneği çemberdir. Ayrıca düzlemde sabit genişlikli olan bir sürü örnek söz konusudur. Bunlardan en çok bilinen Reuleaux üçgenidir. Sabit genişlikli eğrilerin, makine parçaları ve madeni para şekilleri gibi birçok uygulama alanları vardır.

Sabit genişlikli eğriler üzerine ilk çalışma Euler tarafından yapılmıştır [1]. Euler bu çalışmasında düzlemde sabit genişlikli eğrileri tanımlamıştır. Daha sonra Fujiwara sabit genişlikli eğrileri 3-boyutlu Öklid uzayına taşıyarak, bu eğrilerin 3-boyutlu Öklid uzayında tanımlamasını yapmıştır [2]. Daha birçok matematikçi bu eğrileri incelemiş ve önemli sonuçlar elde etmiştir [3,4,5,6,7,8]. Reuleaux “*Kinematics of Machinery*” adlı çalışmasında sabit genişlikli eğrilerin mühendislik ve kinematikteki uygulamalarına yer vermiştir [9]. Köse 1982 yılındaki doçentlik tezinde sabit genişlikli eğriler ve bu eğrilerin bazı karakterizasyonlarını incelemiştir [10]. Ardından “*Düzlemde ovaler ve sabit genişlikli eğrilerin bazı özellikleri*” adlı eserinde ise Mellish’in (1931) sonuçlarını Minkowski fonksiyonuna ve bu fonksiyonun türevine bağlayarak ovalin karşıt noktalarındaki eğrilik yarıçapları ile ilgili bazı önemli sonuçlara ulaşmıştır [11]. Dahası Köse 1986 yılındaki makalesinde bir uzay eğrisi verildiğinde eğri ile karşılıklı noktalarındaki teğetleri paralel, zıt yönlü ve bu noktalar arasındaki uzaklıkları sabit olan bir uzay eğrisinin bulunabileceğini göstermiştir [12]. Ayrıca sabit genişlikli bir eğrinin toplam burulmasının  $2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) olduğunu bulmuştur. Sezer, [13]’te sabit genişlikli eğrilerin diferensiyel karakterizasyonlarını vermiş ve 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin sabit genişlikli olması için gerekli kriteri ortaya koymuştur. Ardından Akdoğan ve Mağden sabit genişlikli eğrileri  $n$ -boyutlu Öklid uzayına taşıyarak, sabit genişlikli eğrileri karakterize eden bir diferensiyel denklem sistemini elde etmiş ve bu denklem sisteminin yaklaşık bir çözümünü vermiştir [14,15]. Daha sonra Önder ve ark. 3-boyutlu Minkowski uzayında sabit genişlikli timelike ve spacelike eğrileri incelemiş

ve bu eğrilerin bir diferensiyel denklem karakterizasyonunu elde etmiştir [16]. Ayrıca, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir eğrinin sabit genişlikli olması için gerekli kriteri vermiştir. Ardından Kocayığıt ve Önder 3-boyutlu Minkowski uzayında sabit genişlikli timelike ve spacelike eğrilerin bazı durumlarda normal eğriler, helis ve küresel eğriler olma durumlarını incelemişlerdir. Dahası kapalı sabit genişlikli spacelike bir eğrinin toplam burulmasının 0 (sıfır), sabit genişlikli timelike bir eğrinin ise toplam burulmasının  $2n\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) olduğunu göstermişlerdir [17].

Temel diferensiyel geometri kitaplarında bir eğrinin küresel olma şartı, eğrinin eğrilik ve burulmasına bağlı olarak verilmiştir [18,19,20]. Wong 1963 deki makalesinde bir eğrinin küresel olması için daha kapsamlı bir formül geliştirmiştir [21]. Daha sonra Breuer ve Gottlieb 3-boyutlu Öklid uzayında küresel eğrileri karakterize eden diferensiyel denklem için bir çözüm vermiş ve eğrinin eğrilik yarıçapının burulma cinsinden karşılığını elde etmiştir [22]. Ardından Wong, Breuer ve Gottlieb in 1971’de küresel eğriler için verdiği karakterizasyonu geliştirerek daha kapsamlı hale getirmiştir [23]. Daha sonra Özdamar ve Hacısalihoğlu 1974’de küresel eğrileri  $n$ -boyutlu Öklid uzayına taşıyarak,  $n$ -boyutlu Öklid uzayında küresel eğriler için bazı karakterizasyonlar vermiştir [24]. Mehlum ve Wimp 3-boyutlu Öklid uzayında küresel eğriler için bir diferensiyel karakterizasyon vermiştir. Buna göre, 3-boyutlu Öklid uzayında küresel eğriler, eğrinin eğrilik ve burulmasına bağlı, 3. mertebeden değişken katsayılı lineer bir diferensiyel denklemle ifade edilebilmektedir [25]. Sezer 1989’da 4-boyutlu Öklid uzayında küresel eğriler için bir diferensiyel ve integral karakterizasyonu vermiştir [26]. Pekmen ve Paşalı 1999’da 3-boyutlu Minkowski uzayında birim hızlı aslinormali spacelike olan Lorentziyen küresel spacelike eğriler için bazı karakterizasyonlardan bahsetmiş ve birim hızlı aslinormali spacelike olan spacelike bir eğrinin küresel olma şartını bulmuştur [27]. Daha sonra Petrovic-Torgasev ve Sucurovic 3-boyutlu Minkowski uzayında birim hızlı aslinormali timelike veya null olan Lorentziyen küresel spacelike eğriler için karakterizasyon vermiştir [28]. Ardından yine Petrovic-Torgasev ve Sucurovic 3-boyutlu Minkowski uzayında hiperbolik küre üzerindeki birim hızlı timelike, spacelike ve null eğriler için bazı karakterizasyonlardan bahsetmiştir [29]. Benzer çalışmalar devam etmiş ve Petrovic-Torgasev ve Sucurovic 2001’de 3-boyutlu Minkowski uzayında birim hızlı Lorentziyen küresel timelike ve

null eğriler için bazı karakterizasyonlar vermiştir [30]. Güner ve Ekmekçi 2012’de Bertrand eğrilerinin küresel eğrilerle olan ilişkisini ortaya koymuştur [31].

Yukarıda bahsedilen çalışmalara bakılırsa sabit genişlikli eğriler ve küresel eğrileri karakterize eden lineer diferensiyel denklemler ve denklem sistemlerinin elde edildiği ancak analitik çözümlerinin tam olarak bulunamadığı görülmektedir. Buradan hareketle tezin 4. bölümünde bahsedilen rezidü hata fonksiyonuna dayalı Taylor sıralama metodu ve yeni geliştirdiğimiz Lucas sıralama metodu yardımıyla bugüne kadar çözülmeyi bekleyen denklem ve denklem sistemleri için bir çözüm metodu geliştirildi. Bu çalışmada, 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatıya göre sabit genişlikli eğrileri karakterize eden diferensiyel denklem sistemleri, ve 3-boyutlu Minkowski uzayında Bishop çatıya göre sabit genişlikli timelike ve spacelike eğrileri karakterize eden diferensiyel denklem sistemleri Taylor sıralama metodu ve Lucas sıralama metodu vasıtasıyla çözüme kavuşturuldu. Ayrıca 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı olmayan küresel eğriler, ve 3-boyutlu Minkowski uzayında birim hızlı olmayan Lorentziyen küresel timelike ve spacelike eğriler ile hiperbolik küresel spacelike eğrileri karakterize eden diferensiyel denklemler elde edilerek, yine Taylor ve Lucas sıralama metodları vasıtasıyla bu denklemlerin yaklaşık olarak çözümleri bulundu. Sabit genişlikli eğrileri karakterize eden denklem veya denklem sistemlerinin çözülmesiyle birlikte bir eğrinin sabit genişlikli olduğu eğri belirlenebildi. Aynı zamanda küresel eğrileri karakterize eden diferensiyel denklemlerin çözülmesiyle birlikte küresel eğrilerin eğriliği, burulması ve hızı bilindiğinde denklemlerinin belirlenmesi mümkün hale geldi. Bu tez çalışması Geometri ve Uygulamalı Matematiğin kesişimi olarak düşünülebilir. Bu tez çalışması birçok bilim dalında karşılaşılan diferensiyel denklem ve denklem sistemlerinin çözüme kavuşturulmasına önderlik edecek bir çalışmadır.

## 1. TEMEL KAVRAMLAR

### 1.1. 3-Boyutlu Öklid ve Minkowski Uzaylarında Temel Tanım ve Teoremler

**Tanım 1.1.1.**  $\mathbb{R}^3$  uzayında iki vektör  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  ve  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  olmak üzere

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

eşitliğiyle tanımlanan  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(\vec{a}, \vec{b}) \rightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$  fonksiyonu,  $\mathbb{R}^3$  uzayında bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma,  $\mathbb{R}^3$  uzayının *Öklid iç çarpımı* denir [32].

**Tanım 1.1.2.**  $\mathbb{R}^3$  uzayında bir vektör  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  olmak üzere

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$$

eşitliğiyle tanımlanan  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\vec{a} \rightarrow \|\vec{a}\|$  fonksiyonuna,  $\mathbb{R}^3$  uzayında *norm* denir [32].

**Tanım 1.1.3.**  $\mathbb{R}^n$  de bir açık cümle  $U$  olmak üzere bir

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonunun  $k$ -yıncı mertebeden bütün kısmi türevleri var ve sürekli iseler  $f$  fonksiyonuna  $C^k$  sınıftan diferensiyellenebilirdir, denir [32].

**Tanım 1.1.4.**  $\mathbb{R}^3$  uzayındaki birim küre

$$S^2 = \{ \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \}$$

şeklinde tanımlanır. [33].

**Tanım 1.1.5.**  $\mathbb{R}^3$  uzayında birim hızlı  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğrisi için

$$\vec{T}(s) = \vec{\alpha}'(s)$$

eşitliği ile belirli  $\vec{T}(s)$  vektörüne,  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki *birim teğet vektörü* denir [32].

**Tanım 1.1.6.**  $\mathbb{R}^3$  uzayında birim hızlı  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğrisi için

$$\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \kappa(s) = \left\| \vec{T}'(s) \right\|$$

fonksiyonuna,  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki *eğrilik fonksiyonu* denir.  $\kappa(s)$  sayısına eğrinin  $\alpha(s)$  noktasındaki *eğriliği* denir [32].

**Tanım 1.1.7.**  $\mathbb{R}^3$  uzayında birim hızlı  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğrisi için

$$\bar{N}(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \bar{T}'(s)$$

eşitliği ile belirli  $\bar{N}(s)$  vektörüne,  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki *aslinormali* denir [32].

**Tanım 1.1.8.**  $\mathbb{R}^3$  uzayında birim hızlı  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğrisi için

$$\bar{B}(s) = \bar{T}(s) \wedge \bar{N}(s)$$

eşitliği tanımlı  $\bar{B}(s)$  vektörüne,  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki *binormali* denir [32].

**Tanım 1.1.9.**  $\bar{T}(s), \bar{N}(s), \bar{B}(s)$  vektörlerine  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki *Frenet vektörleri* denir.

$$\{\bar{T}(s), \bar{N}(s), \bar{B}(s)\}$$

kümesine,  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki *Frenet çatısı* denir [32].

**Tanım 1.1.10.**  $\mathbb{R}^3$  uzayında birim hızlı  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğrisinin Frenet vektör alanları  $\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}$  olmak üzere

$$\tau : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tau(s) = -\left\langle \bar{B}'(s), \bar{N}(s) \right\rangle$$

fonksiyonuna,  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki *burulma fonksiyonu* denir.  $\tau(s)$  sayısına eğrinin  $\alpha(s)$  noktasındaki *burulması* denir [32].

**Teorem 1.1.1.**  $\mathbb{R}^3$  uzayında birim hızlı  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğrisinin Frenet vektör alanları  $\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}$ , eğrilik ve burulması sırasıyla  $\kappa, \tau$  ise

$$\begin{bmatrix} \bar{T}' \\ \bar{N}' \\ \bar{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T} \\ \bar{N} \\ \bar{B} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

olur. Bu eşitliklere, birim hızlı  $\alpha$  eğrisi için *Frenet formülleri* denir [32].

**Teorem 1.1.2.**  $\mathbb{R}^3$  uzayında birim hızlı olmayan  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğrisinin Frenet vektör alanları  $\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}$ , eğrilik ve burulması sırasıyla  $\kappa, \tau$  olsun.  $\|\alpha'\| = v$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} \bar{T}' \\ \bar{N}' \\ \bar{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & v\kappa & 0 \\ -v\kappa & 0 & v\tau \\ 0 & -v\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T} \\ \bar{N} \\ \bar{B} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

olur. Bu eşitlikler, birim hızlı olmayan  $\alpha$  eğrisi için *Frenet formülleri* dir [32].

**Teorem 1.1.3.**  $\mathbb{R}^3$  uzayında  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğrisinin Frenet vektör alanları  $\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}$ , eğrilik ve burulma fonksiyonları  $\kappa, \tau$  olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}, & \bar{B} &= \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}, & \bar{N} &= \bar{B} \wedge \bar{T} \\ \kappa &= \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}, & \tau &= \frac{\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2} \end{aligned}$$

[32].

**Tanım 1.1.11.**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğrisinin eğrilik fonksiyonu  $\kappa$  olmak üzere  $\frac{1}{\kappa}$  fonksiyonuna,  $\alpha$  eğrisinin *eğrilik yarıçapı fonksiyonu* denir ve  $\rho$  ile gösterilir [32].

**Tanım 1.1.12.** Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye *regüler eğri* denir [33].

**Teorem 1.1.4.**  $\mathbb{R}^3$  Öklid uzayında birim hızlı  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğrisinin Bishop vektör alanları  $\bar{T}, \bar{N}_1, \bar{N}_2$  ve Bishop eğrilikleri  $k_1, k_2$  ise

$$\begin{bmatrix} \bar{T}' \\ \bar{N}_1' \\ \bar{N}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T} \\ \bar{N}_1 \\ \bar{N}_2 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

olur. Bu eşitliklere, birim hızlı  $\alpha$  eğrisi için Bishop formülleri denir [34,35]. Burada

$$\kappa(s) = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \quad \theta(s) = \arctan\left(\frac{k_2}{k_1}\right), \quad \tau(s) = \frac{d\theta(s)}{ds}$$

$$k_1 = \kappa \cos \theta, \quad k_2 = \kappa \sin \theta$$

ve

$$\vec{T} = \vec{T}, \quad \vec{N}_1 = \vec{N} \cos \theta - \vec{B} \sin \theta, \quad \vec{N}_2 = \vec{N} \sin \theta + \vec{B} \cos \theta$$

eşitlikleri sağlanır.

**Tanım 1.1.13.**  $\mathbb{R}^3$  standart reel vektör uzayında, Öklid iç çarpımı yerine  $(-, +, +)$  işaretli

$$\langle, \rangle: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) \rightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = -a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Lorentziyen iç çarpımı alınırsa  $\mathbb{R}^3$  afin uzayına *Minkowski 3-uzayı* denir ve  $\mathbb{R}_1^3$  ile gösterilir [36,37].

**Tanım 1.1.14.**  $\mathbb{R}_1^3$  uzayında

$$\Lambda = \{a \in \mathbb{R}_1^3 \mid \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0, \vec{a} \neq 0\}$$

cümlesine *ışık konisi* adı verilir [37].

Lorentziyen iç çarpımı pozitif tanımlı olmadığından, bu uzaydaki vektörler üç sınıfa ayrılır. *Timelike vektörler* ışık konisinin içinde, *lightlike (null) vektörler* ışık konisinin üzerinde ve *spacelike vektörler* de ışık konisinin dışında bulunurlar.

**Tanım 1.1.15.**  $\mathbb{R}_1^3$  uzayında herhangi bir vektör  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  olmak üzere;

- i)  $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle > 0$  veya  $\vec{a} = 0$  ise  $\vec{a}$  ya *spacelike vektör*,
- ii)  $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle < 0$  ise  $\vec{a}$  ya *timelike vektör*,
- iii)  $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0$  ve  $\vec{a} \neq 0$  ise  $\vec{a}$  ya *lightlike (veya null) vektör* denir [36,37].

**Tanım 1.1.16.**  $\mathbb{R}_1^3$  uzayında diferensiyellenebilir bir  $\alpha = \alpha(t)$  eğrisi verilsin.  $\alpha'(t)$ ,  $\alpha$  nın  $t$  deki teğet vektörü olmak üzere  $\forall t \in I \subset \mathbb{R}$  için

$$\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle < 0$$

ise  $\alpha$  ya *timelike eğri* denir [36,37].

**Tanım 1.1.17.**  $\mathbb{R}_1^3$  uzayında  $\alpha = \alpha(t)$  eğrisi verilsin.  $\alpha(t)$  eğrisinin binormalleri daima timelike kalıyorsa,  $\alpha(t)$  ye *timelike binormalli spacelike eğri* denir [36,37].

**Tanım 1.1.18.**  $\mathbb{R}_1^3$  uzayında  $\alpha = \alpha(t)$  eğrisi verilsin.  $\alpha(t)$  eğrisinin aslinormalleri daima timelike kalıyorsa,  $\alpha(t)$  ye *timelike aslinormalli spacelike eğri* denir [36,37].

**Tanım 1.1.19.**  $\mathbb{R}_1^3$  uzayındaki bir  $\vec{a}$  vektörü için  $\vec{a}$  nün normu

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$$

biçiminde tanımlanır. Normu 1 olan vektöre *birim vektör* adı verilir [36].

**Tanım 1.1.20.**  $\mathbb{R}_1^3$  uzayında iki vektör  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  olsun.  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  ve  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  olmak üzere  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  vektörlerinin *Lorentziyen vektörel çarpımı*

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_1 b_3 - a_3 b_1, a_2 b_1 - a_1 b_2)$$

şeklinde tanımlıdır [37].

**Tanım 1.1.21.**  $\mathbb{R}_1^3$  uzayındaki *Lorentziyen ve hiperbolik birim küreler* sırasıyla

$$S_1^2 = \{ \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}_1^3 \mid \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 1 \}$$

ve

$$H_0^2 = \{ \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}_1^3 \mid \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = -1 \}$$

biçiminde tanımlanır [37].

**Tanım 1.1.22. i) Hiperbolik Açtı:**  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$ ,  $\mathbb{R}_1^3$  uzayında iki future pointing (veya past pointing) timelike vektör olsun. Bu taktirde,  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = -\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cosh \theta$  olacak şekilde bir tek  $\theta \geq 0$  reel sayısı vardır. Bu  $\theta \geq 0$  reel sayısına  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  vektörleri arasındaki *hiperbolik açı* denir.

**ii) Merkez Açtı:**  $\mathbb{R}_1^3$  uzayının bir timelike alt vektör uzayını geren iki spacelike vektör  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  olsun. Bu taktirde  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cosh \theta$  olacak şekilde bir tek  $\theta \geq 0$  reel sayısı vardır. Bu  $\theta \geq 0$  reel sayısına  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  vektörleri arasındaki *merkez açı* denir.

**iii) Spacelike Açı:**  $\mathbb{R}_1^3$  uzayının bir spacelike alt vektör uzayını geren iki spacelike vektör  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  olsun. Bu taktirde  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta$  olacak şekilde bir tek  $\theta \geq 0$  reel sayısı vardır. Bu  $\theta \geq 0$  reel sayısına  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  vektörleri arasındaki *spacelike açı* denir.

**iv) Lorentziyen Timelike Açı:**  $\mathbb{R}_1^3$  uzayında  $\vec{a}$  bir spacelike vektör ve  $\vec{b}$  bir timelike vektör olsun. Bu taktirde  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sinh \theta$  olacak şekilde bir tek  $\theta \geq 0$  reel sayısı vardır. Bu  $\theta \geq 0$  reel sayısına  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  vektörleri arasındaki *Lorentziyen timelike açı* denir [36].

**Teorem 1.1.5.**  $\mathbb{R}_1^3$  uzayında birim hızlı  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  timelike eğrisinin Frenet vektör alanları  $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ , eğrilik ve burulması sırasıyla  $\kappa, \tau$  ise

$$\begin{bmatrix} \vec{T}' \\ \vec{N}' \\ \vec{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

olur. Burada  $\langle \vec{T}, \vec{T} \rangle = -1$ ,  $\langle \vec{N}, \vec{N} \rangle = 1$ ,  $\langle \vec{B}, \vec{B} \rangle = 1$  ve  $\langle \vec{T}, \vec{N} \rangle = \langle \vec{T}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{N}, \vec{B} \rangle = 0$  şeklindedir [38].

**Teorem 1.1.6.**  $\mathbb{R}_1^3$  uzayında birim hızlı  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  spacelike eğrisinin Frenet vektör alanları  $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ , eğrilik ve burulması sırasıyla  $\kappa, \tau$  ise

$$\begin{bmatrix} \vec{T}' \\ \vec{N}' \\ \vec{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\varepsilon \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

olup,  $\langle \vec{T}, \vec{T} \rangle = 1$ ,  $\langle \vec{N}, \vec{N} \rangle = \varepsilon$ ,  $\langle \vec{B}, \vec{B} \rangle = -\varepsilon$  ve  $\langle \vec{T}, \vec{N} \rangle = \langle \vec{T}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{N}, \vec{B} \rangle = 0$  şeklindedir. Burada  $\varepsilon = 1$  ise  $\vec{\alpha}$  eğrisi timelike binormalli spacelike bir eğri,  $\varepsilon = -1$  ise  $\vec{\alpha}$  eğrisi timelike aslinormalli spacelike bir eğridir [38].

**Teorem 1.1.7.**  $\mathbb{R}_1^3$  uzayında birim hızlı olmayan  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  timelike eğrisinin Frenet vektör alanları  $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ , eğrilik ve burulması sırasıyla  $\kappa, \tau$  olsun.  $\|\alpha'\| = v$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} \vec{T}' \\ \vec{N}' \\ \vec{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & v\kappa & 0 \\ v\kappa & 0 & v\tau \\ 0 & -v\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

olur [39].

**Teorem 1.1.8.**  $\mathbb{R}_1^3$  uzayında birim hızlı olmayan  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  spacelike eğrisinin Frenet vektör alanları  $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ , eğrilik ve burulması sırasıyla  $\kappa, \tau$  ise

$$\begin{bmatrix} \vec{T}' \\ \vec{N}' \\ \vec{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & v\kappa & 0 \\ -\varepsilon v\kappa & 0 & v\tau \\ 0 & v\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

olur. Burada  $\varepsilon=1$  ise  $\alpha$  eğrisi timelike binormalli spacelike bir eğri,  $\varepsilon=-1$  ise  $\alpha$  eğrisi timelike aslinormalli spacelike bir eğridir [39].

**Teorem 1.1.9.**  $\mathbb{R}_1^3$  Minkowski uzayında birim hızlı  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  timelike eğrisinin Bishop vektör alanları  $\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2$  ve Bishop eğrilikleri  $k_1, k_2$  ise

$$\begin{bmatrix} \vec{T}' \\ \vec{N}_1' \\ \vec{N}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ k_1 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

olur. Burada

$$\kappa(s) = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \quad \theta(s) = \arctan\left(\frac{k_2}{k_1}\right), \quad \tau(s) = \frac{d\theta(s)}{ds}$$

$$k_1 = \kappa \cos \theta, \quad k_2 = \kappa \sin \theta$$

ve

$$\vec{T} = \vec{T}, \quad \vec{N}_1 = \vec{N} \cos \theta - \vec{B} \sin \theta, \quad \vec{N}_2 = \vec{N} \sin \theta + \vec{B} \cos \theta$$

eşitlikleri sağlanır [40].

**Teorem 1.1.10.**  $\mathbb{R}_1^3$  Minkowski uzayında birim hızlı  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  spacelike eğrisinin Bishop vektör alanları  $\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2$  ve Bishop eğrilikleri  $k_1, k_2$  ise

$$\begin{bmatrix} \bar{T}' \\ \bar{N}_1' \\ \bar{N}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & -k_2 \\ \varepsilon k_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T} \\ \bar{N}_1 \\ \bar{N}_2 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

olup  $\langle \bar{T}, \bar{T} \rangle = 1$ ,  $\langle \bar{N}, \bar{N} \rangle = -\varepsilon$ ,  $\langle \bar{B}, \bar{B} \rangle = \varepsilon$ . Burada  $\varepsilon = 1$  ise  $\alpha$  eğrisi timelike aslinormalli spacelike bir eğri,  $\varepsilon = -1$  ise  $\alpha$  eğrisi timelike binormalli spacelike bir eğridir. Ayrıca

$$\kappa(s) = \sqrt{k_1^2 - k_2^2}, \quad \theta(s) = \arctan h \left( \frac{k_2}{k_1} \right), \quad \tau(s) = \frac{d\theta(s)}{ds}$$

$$k_1 = \kappa \cosh \theta, \quad k_2 = \kappa \sinh \theta$$

ve

$$\bar{T} = \bar{T}, \quad \bar{N}_1 = \bar{N} \cosh \theta - \bar{B} \sinh \theta, \quad \bar{N}_2 = -\bar{N} \sinh \theta + \bar{B} \cosh \theta$$

eşitlikleri sağlanır [41,42].

## 1.2. Lucas Polinomları

### 1.2.1. Lucas Polinomlarının Toplam Formülü

$L_0(x) = 2$ ,  $\llbracket x \rrbracket$  taban fonksiyonu ve  $\binom{n}{r}$  binom katsayısı olmak üzere;

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{\llbracket n/2 \rrbracket} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} x^{n-2k}, \quad (n \geq 1) \quad \llbracket n/2 \rrbracket = \begin{cases} n/2 & , n \text{ çift ise} \\ (n-1)/2 & , n \text{ tek ise} \end{cases} \quad (1.10)$$

şeklinde ifade edilen  $L_n(x)$ ,  $n$ . dereceden Lucas polinomlarını ifade eder [43,44]. Bu polinomlardan bazıları ve grafikleri aşağıdaki gibidir.

$$L_0(x) = 2$$

$$L_1(x) = x$$

$$L_2(x) = x^2 + 2$$

$$L_3(x) = x^3 + 3x$$

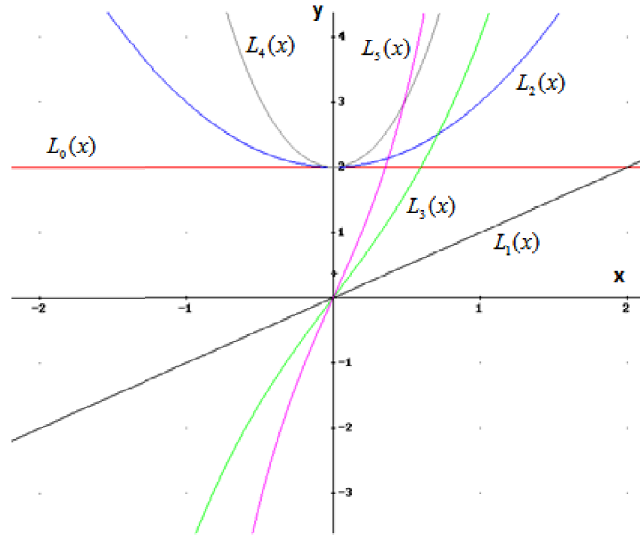
$$L_4(x) = x^4 + 4x^2 + 2$$

$$L_5(x) = x^5 + 5x^3 + 5x$$

$$L_6(x) = x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 2$$

$$L_7(x) = x^7 + 7x^5 + 14x^3 + 7x$$

$$L_8(x) = x^8 + 8x^6 + 20x^4 + 16x^2 + 2$$



**Şekil 1.1.** Lucas polinomlarının grafiği

### 1.2.2. Lucas Polinomlarının Tekrarlama (Rekürans) Bağıntısı

Lucas polinomlarının  $L_0(x) = 2$  ve  $L_1(x) = x$  olmak üzere

$$L_n(x) = xL_{n-1}(x) + L_{n-2}(x) \quad (1.11)$$

şeklinde bir tekrarlama bağıntısı vardır. Bu duruma birkaç örnek aşağıda verilmiştir.

$$L_2(x) = xL_1(x) + L_0(x) = x^2 + 2$$

$$L_3(x) = xL_2(x) + L_1(x) = x^3 + 3x$$

$$L_4(x) = xL_3(x) + L_2(x) = x^4 + 4x^2 + 2.$$

Aşağıdaki tablo Lucas polinomlarının katsayılarının hesaplanışını göstermektedir [44].

| n | $x^0$ | $x^1$ | $x^2$ | $x^3$ | $x^4$ | $x^5$ | $x^6$ | $x^7$ | $x^8$ |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 0     | 1     |       |       |       |       |       |       |       |
| 2 | 2     | 0     | 1     |       |       |       |       |       |       |
| 3 | 0     | 3     | 0     | 1     |       |       |       |       |       |
| 4 | 2     | 0     | 4     | 0     | 1     |       |       |       |       |
| 5 | 0     | 5     | 0     | 5     | 0     | 1     |       |       |       |
| 6 | 2     | 0     | 9     | 0     | 6     | 0     | 1     |       |       |
| 7 | 0     | 7     | 0     | 14    | 0     | 7     | 0     | 1     |       |
| 8 | 2     | 0     | 16    | 0     | 20    | 0     | 8     | 0     | 1     |

### 1.2.3. Lucas Polinomlarının Binet Formülü

(1.11) eşitliği ile verilen rekürans bağıntısının karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - x\lambda - 1 = 0 \quad (1.12)$$

olup, bu denklemin çözümleri  $\alpha(x)$  ve  $\beta(x)$  aşağıdaki gibidir.

$$\alpha(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} \text{ ve } \beta(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2}.$$

Ayrıca,  $L_n(x)$  lucas polinomunun Binet formülü

$$L_n(x) = \alpha^n(x) + \beta^n(x)$$

şeklinde [43,44].

### 1.2.4. Lucas Polinomlarının Bazı Özellikleri

**Özellik 1 :**  $n \geq 1$  için  $L_n(x)$  Lucas polinomunun derecesi  $n$  dir.

**Özellik 2 :**  $L_n(x)$  Lucas polinomunun başkatsayısı 1 dir.

**Özellik 3 :**  $\alpha(x)$  ve  $\beta(x)$ , (1.12) karakteristik denkleminin kökleri olmak üzere

i)  $\alpha(L_{2m+1}(x)) = \alpha^{2m+1}(x)$

ii)  $\beta(L_{2m+1}(x)) = \beta^{2m+1}(x)$

iii)  $L_n(L_{2m+1}(x)) = \alpha^{(2m+1)n}(x) + \beta^{(2m+1)n}(x) = L_{(2m+1)n}(x)$

eşitlikleri sağlanır [44].

**Özellik 4 :**  $L_n(x) \mid L_{(2m-1)n}(x)$  [44].

**Özellik 5 :**  $\frac{d^2}{dx^2}(L_n(x)) = \frac{d^2}{dx^2}(\alpha^n(x) + \beta^n(x))$  [44].

## 2. 3-BOYUTLU ÖKLİD VE MINKOWSKI UZAYLARINDA BISHOP ÇATIYA GÖRE SABİT GENİŞLİKLİ EĞRİLER

### 2.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Bishop Çatıya Göre Sabit Genişlikli Eğriler

**Tanım 2.1.**  $(C)$ , 3-boyutlu Öklid uzayında kapalı bir uzay eğrisi olsun. Eğer,  $(C)$  eğrisi  $\alpha(s)$  ve  $\alpha^*(s)$  gibi karşıt noktalarında zıt yönlü ve paralel teğetlere sahip ve bu noktalar arasındaki uzaklık daima sabitse bu durumda  $(C)$  eğrisine **sabit genişlikli eğri** adı verilir [2].

**Tanım 2.2.**  $(C)$  ve  $(C^*)$  gibi bir uzay eğri çifti  $\alpha(s)$  ve  $\alpha^*(s^*)$  karşılıklı noktalarında zıt yönlü ve paralel teğetlere sahip ve bu noktalar arasındaki uzaklıkları daima sabitse  $(C)$  ve  $(C^*)$  eğrilerine **sabit genişlikli eğri çifti** adı verilir [12].

**Teorem 2.1.** Bishop eğrilikleri  $(k_1$  ve  $k_2)$  sıfırdan farklı olan birim hızlı bir  $\alpha: I \rightarrow E^3$  eğrisinin Bishop çatıya göre slant helis olması için gerek ve yeter şart  $\frac{k_1}{k_2}$  nin sabit olmasıdır [45].

$\{T, N_1, N_2\}$  ve  $k_1, k_2$  sırasıyla  $(C)$  eğrisi boyunca Bishop çatıyı ve Bishop eğrilikleri;  $\{T^*, N_1^*, N_2^*\}$  ve  $k_1^*, k_2^*$  ise sırasıyla  $(C^*)$  eğrisi boyunca Bishop çatıyı ve Bishop eğrilikleri gösterebilir.  $E^3$  Öklid uzayında  $(C)$  ve  $(C^*)$  gibi birim hızlı ve Bishop eğrilikleri sıfırdan farklı olan iki eğriyi göz önüne alalım.  $(C^*)$  eğrisinin  $\alpha^*(s^*)$  noktasındaki konum vektörü

$$\overrightarrow{\alpha^*}(s^*) = \overrightarrow{\alpha}(s) + \lambda_1(s)\overrightarrow{T}(s) + \lambda_2(s)\overrightarrow{N_1}(s) + \lambda_3(s)\overrightarrow{N_2}(s) \quad (2.1)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada,  $\lambda_i(s)$  ( $i=1,2,3$ ) değerleri  $(C)$  eğrisinin yay parametresi olan  $s$  e göre türevlenebilen fonksiyonlardır. (2.1) ifadesinin  $s$  e göre türevi alınır ve (1.3) Bishop formülleri kullanılırsa

$$\frac{d\overrightarrow{\alpha^*}}{ds} = \overrightarrow{T^*} \frac{ds^*}{ds} = \left(1 + \frac{d\lambda_1}{ds} - k_1\lambda_2 - k_2\lambda_3\right)\overrightarrow{T} + \left(k_1\lambda_1 + \frac{d\lambda_2}{ds}\right)\overrightarrow{N_1} + \left(k_2\lambda_1 + \frac{d\lambda_3}{ds}\right)\overrightarrow{N_2}$$

eşitliği bulunur.  $(C)$  ve  $(C^*)$  eğrilerinin  $\alpha(s)$  ve  $\alpha^*(s^*)$  gibi karşılıklı noktalarındaki teğetleri paralel ve zıt yönlü olsun. Bu durumda  $\bar{T}^* = -\bar{T}$  yazılabilir. O halde,

$$\begin{cases} \frac{d\lambda_1}{ds} = -\frac{ds^*}{ds} - 1 + k_1\lambda_2 + k_2\lambda_3 \\ \frac{d\lambda_2}{ds} = -k_1\lambda_1 \\ \frac{d\lambda_3}{ds} = -k_2\lambda_1 \end{cases} \quad (2.2)$$

denklem sistemi elde edilir.  $(C)$  eğrisinin herhangi bir  $\alpha(s)$  noktasındaki teğetinin sabit bir doğrultu ile yaptığı açığa  $\varphi$  denirse, bu eğrinin  $\alpha(s)$  ve  $\alpha(s+\Delta s)$  noktalarındaki  $\bar{T}(s)$  ve  $\bar{T}(s+\Delta s)$  teğetleri arasındaki  $\Delta\varphi$  kontengez açısı için

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds} = \kappa$$

olur. Buna göre (2.2) denklem sistemi

$$\begin{cases} \frac{d\lambda_1}{d\varphi} = \mu_1\lambda_2 + \mu_2\lambda_3 - f \\ \frac{d\lambda_2}{d\varphi} = -\mu_1\lambda_1 \\ \frac{d\lambda_3}{d\varphi} = -\mu_2\lambda_1 \end{cases} \quad (2.3)$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$\mu_1 = \rho k_1 = \frac{k_1}{\kappa} = \cos(\theta), \quad \mu_2 = \rho k_2 = \frac{k_2}{\kappa} = \sin(\theta), \quad \left( \theta = \int \tau ds \right)$$

ve

$$f(\varphi) = \rho + \rho^*, \quad \rho = \frac{1}{\kappa}, \quad \rho^* = \frac{1}{\kappa^*}$$

olup  $\rho$  ve  $\rho^*$ ,  $(C)$  ve  $(C^*)$  eğrilerin sırasıyla  $\alpha(s)$  ve  $\alpha^*(s^*)$  karşılıklı noktalarındaki eğrilik yarıçaplarını ifade eder. (2.2) denklem sisteminde  $\lambda_2, \lambda_3$  ve bunların türevleri yok edilirse  $\lambda_1$  e göre 3. mertebeden lineer

$$a_1 \ddot{\lambda}_1 + b_1 \dot{\lambda}_1 + c_1 \lambda_1 + d_1 \lambda_1 = e_1 \quad (2.4)$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Burada

$$a_1 = \left( k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1 \right)^3 + \ddot{k}_1 k_2^3 \left( k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1 \right)$$

$$b_1 = k_2 \left[ (\ddot{k}_1)^2 k_2^3 + \ddot{k}_1 \left( -k_2^2 k_1 \ddot{k}_2 + (k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1)^2 \right) + \ddot{k}_2 (k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1)^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
c_1 &= \ddot{k}_1 \left[ k_2^3 \ddot{k}_2 \dot{k}_1 + (k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1) \left( k_2^3 k_1^2 - k_1 (\dot{k}_2)^2 + k_2 \dot{k}_1 \dot{k}_2 + k_2^5 \right) \right] \\
&\quad - (\ddot{k}_1)^2 k_2^3 \dot{k}_2 + (k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1)^2 \left( -\ddot{k}_2 \dot{k}_2 + (k_1^2 + k_2^2)(k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1) \right) \\
d_1 &= k_2 \ddot{k}_1 \left[ (-k_2^4 k_1 - k_2^2 k_1^3) \ddot{k}_2 + \left( (k_1^3 + k_1^2 k_2 + 3k_2^3) \dot{k}_2 - k_1 k_2 \dot{k}_1 (-2k_2 + k_1) \right) (k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1) \right] \\
&\quad + (k_2^6 + k_2^4 k_1^2) (\ddot{k}_1)^2 + \left[ (k_1^2 k_2 + k_2^3) \ddot{k}_2 + 3 \left( k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1 \right) \left( k_1 \dot{k}_1 + k_2 \dot{k}_2 \right) \right] (k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1)^2 \\
e_1 &= -\ddot{k}_1 \left[ k_2^3 \left( \sigma \dot{k}_1 - \dot{\sigma} k_1 \right) k_2'' - \left( k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1 \right) \left( -k_2^3 \ddot{\sigma} + \left( k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1 \right) \left( -k_2 \dot{\sigma} + \dot{k}_2 \sigma \right) \right) \right] \\
&\quad - (\ddot{k}_1)^2 \left( -k_2^3 \dot{k}_2 \sigma + k_2^4 \dot{\sigma} \right) + \left( k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1 \right)^2 \left[ \left( -k_2 \dot{\sigma} + \dot{k}_2 \sigma \right) \ddot{k}_2 - \ddot{\sigma} \left( k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1 \right) \right]
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır.  $\sigma = \frac{ds^*}{ds} + 1$  olup,  $(\cdot)$  s e göre türevi ifade etmektedir. Benzer

şekilde (2.2) denklem sisteminde  $\lambda_1, \lambda_3$  ve bunların türevleri yok edilirse  $\lambda_2$  ye göre

3. mertebeden lineer

$$a_2 \ddot{\lambda}_2 + b_2 \ddot{\lambda}_2 + c_2 \dot{\lambda}_2 + d_2 \lambda_2 = e_2 \quad (2.5)$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Burada

$$a_2 = -k_1^2 k_2$$

$$b_2 = 2 \dot{k}_1 k_1 k_2 + k_2 k_1^2$$

$$c_2 = \ddot{k}_1 k_1 k_2 - 2(\dot{k}_1)^2 k_2 - k_1^4 k_2 - \dot{k}_2 \dot{k}_1 k_1 - k_2^3 k_1^2$$

$$d_2 = -k_1^3 \left( \dot{k}_1 k_2 - \dot{k}_2 k_1 \right)$$

$$e_2 = k_1^3 \left( \dot{k}_2 \sigma - \dot{\sigma} k_2 \right)$$

şeklindedir. Aynı şekilde (2.2) denklem sisteminde  $\lambda_1, \lambda_2$  ve bunların türevleri yok

edilirse  $\lambda_3$  e göre 3. mertebeden lineer

$$a_3 \ddot{\lambda}_3 + b_3 \ddot{\lambda}_3 + c_3 \dot{\lambda}_3 + d_3 \lambda_3 = e_3 \quad (2.6)$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Burada

$$a_3 = -k_2^2 k_1$$

$$b_3 = 2 \dot{k}_2 k_2 k_1 + \dot{k}_1 k_2^2$$

$$c_3 = \ddot{k}_2 k_2 k_1 - 2(\dot{k}_2)^2 k_1 - \dot{k}_1 \dot{k}_2 k_2 - k_1^3 k_2^2 - k_2^4 k_1$$

$$d_3 = -k_2^3 \left( \dot{k}_2 k_1 - \dot{k}_1 k_2 \right)$$

$$e_3 = k_2^3 \left( \dot{k}_1 \sigma - \dot{\sigma} k_1 \right)$$

şeklindedir. (C) eğrisi ve  $\sigma$  fonksiyonunun verilmesi durumunda (2.4), (2.5) ve (2.6) denklemlerinin çözümünden  $\lambda_i$  ( $i=1,2,3$ ) değerleri bulunabilir. Bu denklemler, (C) ve (C\*) eğrileri için  $\lambda_i$  katsayılarına göre bir diferensiyel karakterizasyonu ifade eder. Benzer şekilde, (2.3) denklem sisteminde  $\lambda_2, \lambda_3$  ve bunların türevleri yok edilirse  $\lambda_1$  e göre 3. mertebeden lineer

$$A_1 \lambda_1''' + B_1 \lambda_1'' + C_1 \lambda_1' + D_1 \lambda_1 = E_1 \quad (2.7)$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} A_1 &= (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1')^3 + \mu_1'' \mu_2^3 (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1') \\ B_1 &= \mu_2 \left[ (\mu_1'')^2 \mu_2^3 + \mu_1'' (-\mu_2^2 \mu_1 \mu_2'' + (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1')^2) + \mu_2'' (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1')^2 \right] \\ C_1 &= \mu_1'' \left[ \mu_2^3 \mu_2'' \mu_1' + (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1') (\mu_2^3 \mu_1^2 - \mu_1 (\mu_2')^2 + \mu_2 \mu_1' \mu_2' + \mu_2^5) \right] \\ &\quad - (\mu_1'')^2 \mu_2^3 \mu_2' + (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1')^2 (-\mu_2'' \mu_2' + (\mu_1^2 + \mu_2^2) (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1')) \\ D_1 &= \mu_2 \mu_1'' \left[ (-\mu_2^4 \mu_1 - \mu_2^2 \mu_1^3) \mu_2'' + ((\mu_1^3 + \mu_1^2 \mu_2 + 3\mu_2^3) \mu_2' - \mu_1 \mu_2 \mu_1' (-2\mu_2 + \mu_1)) (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1') \right] \\ &\quad + (\mu_2^6 + \mu_2^4 \mu_1^2) (\mu_1'')^2 + \left[ (\mu_1^2 \mu_2 + \mu_2^3) \mu_2'' + 3(\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1') (\mu_1 \mu_1' + \mu_2 \mu_2') \right] (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1')^2 \\ E_1 &= -\mu_1'' \left[ \mu_2^3 (f \mu_1' - f' \mu_1) \mu_2'' - (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1') (-\mu_2^3 f'' + (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1') (-\mu_2 f' + \mu_2' f)) \right] \\ &\quad - (\mu_1'')^2 (-\mu_2^3 \mu_2' f + \mu_2^4 f') + (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1')^2 \left[ (-\mu_2 f' + \mu_2' f) \mu_2'' - f'' (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1') \right] \end{aligned}$$

olup, (')  $\phi$  e göre türevi ifade etmektedir. Benzer şekilde (2.3) denklem sisteminde  $\lambda_1, \lambda_3$  ve bunların türevleri yok edilirse  $\lambda_2$  ye göre 3. mertebeden lineer

$$A_2 \lambda_2''' + B_2 \lambda_2'' + C_2 \lambda_2' + D_2 \lambda_2 = E_2 \quad (2.8)$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} A_2 &= -\mu_1^2 \mu_2 \\ B_2 &= 2\mu_1' \mu_1 \mu_2 + \mu_2' \mu_1^2 \\ C_2 &= \mu_1'' \mu_1 \mu_2 - 2(\mu_1')^2 \mu_2 - \mu_1^4 \mu_2 - \mu_2' \mu_1' \mu_1 - \mu_2^3 \mu_1^2 \\ D_2 &= -\mu_1^3 (\mu_1' \mu_2 - \mu_2' \mu_1) \\ E_2 &= \mu_1^3 (\mu_2' f - f' \mu_2) \end{aligned}$$

şeklindedir. Aynı şekilde (2.3) denklem sisteminde  $\lambda_1, \lambda_2$  ve bunların türevleri yok edilirse  $\lambda_3$  e göre 3. mertebeden lineer

$$A_3 \lambda_3''' + B_3 \lambda_3'' + C_3 \lambda_3' + D_3 \lambda_3 = E_3 \quad (2.9)$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Burada

$$A_3 = -\mu_2^2 \mu_1$$

$$B_3 = 2\mu_2' \mu_2 \mu_1 + \mu_1' \mu_2^2$$

$$C_3 = \mu_2'' \mu_2 \mu_1 - 2(\mu_2')^2 \mu_1 - \mu_1' \mu_2' \mu_2 - \mu_1^3 \mu_2^2 - \mu_2^4 \mu_1$$

$$D_3 = -\mu_2^3 (\mu_2' \mu_1 - \mu_1' \mu_2)$$

$$E_3 = \mu_2^3 (\mu_1' f - f' \mu_1)$$

şeklindedir. (C) eğrisi ve  $f(\varphi)$  fonksiyonunun verilmesi durumunda (2.7), (2.8) ve (2.9) denklemlerinin çözümünden  $\lambda_i$  ( $i=1,2,3$ ) değerleri bulunabilir. Bu denklemler de, (C) ve (C\*) eğrileri için  $\lambda_i$  katsayılarına göre bir diferensiyel karakterizasyonu ifade eder.

(C) ve (C\*), sabit genişlikli eğri çifti olduğunda karşılıklı noktaları arasındaki uzaklık sabittir. O halde,

$$d^2 = \|\vec{d}\|^2 = \|\vec{\alpha}^*(s^*) - \vec{\alpha}(s)\|^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = k^2, \quad k \in \mathbb{R} \quad (2.10)$$

olur. (2.10) eşitliğinin  $\varphi$  değişkenine göre türevi alınırsa

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\varphi} \|\vec{d}\|^2 = \lambda_1 \lambda_1' + \lambda_2 \lambda_2' + \lambda_3 \lambda_3' = 0 \quad (2.11)$$

elde edilir. (2.11) eşitliğinde (2.3) ile verilen eşitlikler yerlerine yazılırsa

$$\lambda_1 f = 0$$

elde edilir. Bu eşitlik (C) ve (C\*) eğrilerinin  $E^3$  te sabit genişlikli eğri çifti olması için gerek ve yeter şarttır. Burada temel iki durum vardır.

**Durum 1.**  $f(\varphi) = 0 \left( \frac{ds^*}{ds} + 1 = \sigma = 0 \right)$  olsun. Bu durum (C\*) eğrisinin, (C) eğrisine göre

$$\vec{d} = \lambda_1 \vec{T} + \lambda_2 \vec{N}_1 + \lambda_3 \vec{N}_2 \quad (2.12)$$

sabit vektörü ile ötelenmesini ifade eder. Gerçekten  $f(\varphi) = 0$  olduğunda  $\vec{d}$  vektörü sabittir. Bunu göstermek için (2.12) ile verilen  $\vec{d}$  vektörünün  $\varphi$  değişkenine göre türevi alınıp,  $f(\varphi) = 0$  için (2.3) ile verilen eşitlikler ve (1.3) Bishop formülleri

kullanılırsa  $\frac{d\vec{d}}{d\varphi}=0$  elde edilir. Bu ise  $\vec{d}$  vektörünün sabit olduğu anlamına gelir.

Tersine  $\vec{d}$  vektörü sabitse  $f(\varphi)=0$  olur.

$f(\varphi)=0$   $\left(\frac{ds^*}{ds}+1=\sigma=0\right)$  olması durumunda (2.2) ve (2.3) denklem sistemleri

ile (2.4), (2.5), (2.6) ve (2.7), (2.8), (2.9) denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{cases} \frac{d\lambda_1}{ds} = k_1\lambda_2 + k_2\lambda_3 \\ \frac{d\lambda_2}{ds} = -k_1\lambda_1 \\ \frac{d\lambda_3}{ds} = -k_2\lambda_1 \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\begin{cases} \frac{d\lambda_1}{d\varphi} = \mu_1\lambda_2 + \mu_2\lambda_3 \\ \frac{d\lambda_2}{d\varphi} = -\mu_1\lambda_1 \\ \frac{d\lambda_3}{d\varphi} = -\mu_2\lambda_1 \end{cases} \quad (2.14)$$

$$a_1 \ddot{\lambda}_1 + b_1 \ddot{\lambda}_1 + c_1 \dot{\lambda}_1 + d_1 \lambda_1 = 0 \quad (2.15)$$

öyle ki

$$\begin{aligned} a_1 &= \left(k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1\right)^3 + \ddot{k}_1 k_2^3 \left(k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1\right) \\ b_1 &= k_2 \left[ (\ddot{k}_1)^2 k_2^3 + \ddot{k}_1 \left( -k_2^2 k_1 \dot{k}_2 + (k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1)^2 \right) + \ddot{k}_2 (k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1)^2 \right] \\ c_1 &= \ddot{k}_1 \left[ k_2^3 \ddot{k}_2 \dot{k}_1 + (k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1) \left( k_2^3 k_1^2 - k_1 (\dot{k}_2)^2 + k_2 \dot{k}_1 \dot{k}_2 + k_2^5 \right) \right] \\ &\quad - (\ddot{k}_1)^2 k_2^3 \dot{k}_2 + (k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1)^2 \left( -\ddot{k}_2 \dot{k}_2 + (k_1^2 + k_2^2)(k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1) \right) \\ d_1 &= k_2 \ddot{k}_1 \left[ \left( -k_2^4 k_1 - k_2^2 k_1^3 \right) \ddot{k}_2 + \left( (k_1^3 + k_1^2 k_2 + 3k_2^3) \dot{k}_2 - k_1 k_2 \dot{k}_1 (-2k_2 + k_1) \right) \left( k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1 \right) \right] \\ &\quad + (k_2^6 + k_2^4 k_1^2) (\ddot{k}_1)^2 + \left[ (k_1^2 k_2 + k_2^3) \ddot{k}_2 + 3 \left( k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1 \right) \left( k_1 \dot{k}_1 + k_2 \dot{k}_2 \right) \right] \left( k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1 \right)^2. \\ a_2 \ddot{\lambda}_2 + b_2 \ddot{\lambda}_2 + c_2 \dot{\lambda}_2 + d_2 \lambda_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

öyle ki

$$\begin{aligned} a_2 &= -k_1^2 k_2 \\ b_2 &= 2 \dot{k}_1 k_1 k_2 + \ddot{k}_2 k_1^2 \\ c_2 &= \ddot{k}_1 k_1 k_2 - 2(\dot{k}_1)^2 k_2 - k_1^4 k_2 - \ddot{k}_2 \dot{k}_1 k_1 - k_2^3 k_1^2 \end{aligned}$$

$$d_2 = -k_1^3 \left( \dot{k}_1 k_2 - \dot{k}_2 k_1 \right).$$

$$a_3 \ddot{\lambda}_3 + b_3 \ddot{\lambda}_3 + c_3 \dot{\lambda}_3 + d_3 \lambda_3 = 0 \quad (2.17)$$

öyle ki

$$a_3 = -k_2^2 k_1$$

$$b_3 = 2 \dot{k}_2 k_2 k_1 + \dot{k}_1 k_2^2$$

$$c_3 = \ddot{k}_2 k_2 k_1 - 2(\dot{k}_2)^2 k_1 - \dot{k}_1 \dot{k}_2 k_2 - k_1^3 k_2^2 - k_2^4 k_1$$

$$d_3 = -k_2^3 \left( \dot{k}_2 k_1 - \dot{k}_1 k_2 \right)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$A_1 \lambda_1''' + B_1 \lambda_1'' + C_1 \lambda_1' + D_1 \lambda_1 = 0 \quad (2.18)$$

öyle ki

$$A_1 = \left( \mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1' \right)^3 + \mu_1'' \mu_2^3 \left( \mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1' \right)$$

$$B_1 = \mu_2 \left[ (\mu_1'')^2 \mu_2^3 + \mu_1'' \left( -\mu_2^2 \mu_1 \mu_2'' + (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1')^2 \right) + \mu_2'' (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1')^2 \right]$$

$$C_1 = \mu_1'' \left[ \mu_2^3 \mu_2'' \mu_1' + (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1') \left( \mu_2^3 \mu_1^2 - \mu_1 (\mu_2')^2 + \mu_2 \mu_1' \mu_2' + \mu_2^5 \right) \right]$$

$$- (\mu_1'')^2 \mu_2^3 \mu_2' + (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1')^2 \left( -\mu_2'' \mu_2' + (\mu_1^2 + \mu_2^2) (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1') \right)$$

$$D_1 = \mu_2 \mu_1'' \left[ \left( -\mu_2^4 \mu_1 - \mu_2^2 \mu_1^3 \right) \mu_2'' + \left( \left( \mu_1^3 + \mu_1^2 \mu_2 + 3\mu_2^3 \right) \mu_2' - \mu_1 \mu_2 \mu_1' (-2\mu_2 + \mu_1) \right) \left( \mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1' \right) \right]$$

$$+ \left( \mu_2^6 + \mu_2^4 \mu_1^2 \right) (\mu_1'')^2 + \left[ \left( \mu_1^2 \mu_2 + \mu_2^3 \right) \mu_2'' + 3 \left( \mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1' \right) \left( \mu_1 \mu_1' + \mu_2 \mu_2' \right) \right] \left( \mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1' \right)^2.$$

$$A_2 \lambda_2''' + B_2 \lambda_2'' + C_2 \lambda_2' + D_2 \lambda_2 = 0 \quad (2.19)$$

öyle ki

$$A_2 = -\mu_1^2 \mu_2$$

$$B_2 = 2 \mu_1' \mu_1 \mu_2 + \mu_2' \mu_1^2$$

$$C_2 = \mu_1'' \mu_1 \mu_2 - 2(\mu_1')^2 \mu_2 - \mu_1^4 \mu_2 - \mu_2' \mu_1' \mu_1 - \mu_2^3 \mu_1^2$$

$$D_2 = -\mu_1^3 \left( \mu_1' \mu_2 - \mu_2' \mu_1 \right).$$

$$A_3 \lambda_3''' + B_3 \lambda_3'' + C_3 \lambda_3' + D_3 \lambda_3 = 0 \quad (2.20)$$

öyle ki

$$A_3 = -\mu_2^2 \mu_1$$

$$B_3 = 2 \mu_2' \mu_2 \mu_1 + \mu_1' \mu_2^2$$

$$C_3 = \mu_2'' \mu_2 \mu_1 - 2(\mu_2')^2 \mu_1 - \mu_1' \mu_2' \mu_2 - \mu_1^3 \mu_2^2 - \mu_2^4 \mu_1$$

$$D_3 = -\mu_2^3 (\mu_2' \mu_1 - \mu_1' \mu_2).$$

**Sonuç 2.1.** Öklid 3-uzayında Bishop çatıya göre sabit genişlikli eğri çiftlerini karakterize eden diferensiyel denklem sistemleri (2.13), (2.14) ve diferensiyel denklemler ise (2.15), (2.16), (2.17), (2.18), (2.19), (2.20) deki gibidir.

**Durum 2.**  $\lambda_1 = 0$  olsun. Bu durumda karşımıza üç durum daha çıkar.

i)  $\lambda_2 = sbt$  ve  $\lambda_3 = 0$  ((2.3) den) olabilir. Bu durumda  $f(\varphi) = \mu_1 \lambda_2$  olur.

ii)  $\lambda_2 = 0$  ve  $\lambda_3 = sbt$  ((2.3) den) olabilir. Bu durumda  $f(\varphi) = \mu_2 \lambda_3$  olur.

Asıl dikkat çekici olan hal aşağıdaki durumdur.

iii)  $\lambda_2 = sbt$  ve  $\lambda_3 = sbt$  ((2.3) den) olabilir.  $\lambda_2 = sbt$  ve  $\lambda_3 = sbt$  iken  $f(\varphi) = 0$  alınırsa

$\frac{k_1}{k_2} = \frac{-\lambda_3}{\lambda_2} = sbt$  olduğu görülür. Bu ise (C) eğrisinin Bishop çatıya göre  $E^3$  te bir slant

helis olduğu anlamına gelir (Teorem (2.1) den).

**Teorem 2.2.**  $E^3$  de Bishop çatıya göre karşılıklı noktalarında eğrilik yarıçapları toplamı sıfır olan (C) ve  $(C^*)$  gibi sabit genişlikli eğri çiftini göz önüne alalım. Eğer, (2.1) denkleminde verilen teğet bileşen  $\lambda_1 = 0$ , birinci normal bileşen  $\lambda_2 = sbt$  ve ikinci normal bileşen  $\lambda_3 = sbt$  ise bu durumda (C) eğrisi bir slant helistir.

Birim hızlı (C) eğrisinin konum vektörü  $\bar{\alpha}(s)$  olmak üzere, (2.1) denklemini  $\bar{\alpha}(s)$  ve türevleri cinsinden ifade edelim. (C) birim hızlı bir eğri olduğundan

$$\dot{\bar{\alpha}} = \bar{T} \quad (2.21)$$

yazılabilir. (2.21) eşitliğinin  $s$  e göre ard arda iki defa türevi alınırsa

$$\ddot{\bar{\alpha}} = k_1 \bar{N}_1 + k_2 \bar{N}_2 \quad (2.22)$$

$$\ddot{\bar{\alpha}} = -(k_1^2 + k_2^2) \bar{T} + \dot{k}_1 \bar{N}_1 + \dot{k}_2 \bar{N}_2 \quad (2.23)$$

elde edilir. Burada  $(\dot{\phantom{x}})$   $s$  e göre türevi ifade etmektedir. (2.21), (2.22) ve (2.23) eşitlikleri kullanılarak

$$\bar{N}_1 = \frac{1}{\mu} \left[ -k_2 \ddot{\bar{\alpha}} + \dot{k}_2 \ddot{\bar{\alpha}} - k_2 (k_1^2 + k_2^2) \dot{\bar{\alpha}} \right] \quad (2.24)$$

ve

$$\overrightarrow{N_2} = \frac{1}{\mu} \left[ k_1 \ddot{\alpha} - \dot{k}_1 \dot{\alpha} + k_1 (k_1^2 + k_2^2) \dot{\alpha} \right] \quad (2.25)$$

olarak bulunur. Burada  $\mu = k_1^2 \left( \frac{\dot{k}_2}{k_1} \right) = \dot{k}_2 k_1 - \dot{k}_1 k_2$ .

(2.21), (2.24) ve (2.25) eşitlikleri (2.1) de yerlerine yazılırsa

$$\overrightarrow{\alpha^*}(s^*) = \left( \frac{k_1 \lambda_3 - k_2 \lambda_2}{\mu} \right) \ddot{\alpha} + \left( \frac{\dot{k}_2 \lambda_2 - \dot{k}_1 \lambda_3}{\mu} \right) \dot{\alpha} + \left[ \frac{(k_1^2 + k_2^2)(k_1 \lambda_3 - k_2 \lambda_2)}{\mu} + \lambda_1 \right] \dot{\alpha} + \overline{\alpha} \quad (2.26)$$

eşitliği elde edilir. Böylece,  $(C^*)$  eğrisi,  $(C)$  eğrisinin konum vektörü  $\overrightarrow{\alpha}(s)$  ve türevleri cinsinden ifade edilmiş olur. O halde  $(C)$  eğrisinin konum vektörü ve türevleri, Bishop eğrilikleri ve (2.13), (2.14) denklem sistemleri ya da (2.15), (2.16), (2.17) veya (2.18), (2.19), (2.20) denklemleri yardımıyla hesaplanan  $\lambda_1, \lambda_2$  ve  $\lambda_3$  değerleri (2.26) eşitliğinde yerlerine yazılırsa,  $(C)$  eğrisinin sabit genişlikli olduğu  $\overrightarrow{\alpha^*}(s^*)$  konum vektörü ile verilen  $(C^*)$  eğrisi belirlenmiş olur.

## 2.2. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Bishop Çatıya Göre Sabit Genişlikli Eğriler

### 2.2.1. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Bishop Çatıya Göre Sabit Genişlikli Timelike Eğriler

**Tanım 2.3.**  $(C) \subset E_1^3$  te bir timelike eğri olsun. Eğer,  $(C)$  eğrisi  $\alpha(s)$  ve  $\alpha^*(s)$  karşıt noktalarında zıt yönlü ve paralel teğetlere sahip ve bu noktalar arasındaki uzaklık daima sabitse bu durumda  $(C)$  eğrisine *sabit genişlikli timelike eğri* adı verilir. Dahası,  $(C)$  ve  $(C^*)$  gibi timelike eğri çifti  $\alpha(s)$  ve  $\alpha^*(s^*)$  karşılıklı noktalarında zıt yönlü ve paralel teğetlere sahip ve bu noktalar arasındaki uzaklıkları daima sabitse  $(C)$  ve  $(C^*)$  eğrilerine *sabit genişlikli timelike eğri çifti* adı verilir [17].

**Teorem 2.3.** Bishop eğrilikleri  $(k_1$  ve  $k_2)$  sıfırdan farklı olan birim hızlı bir  $\alpha: I \rightarrow E_1^3$  timelike eğrisinin Bishop çatıya göre slant helis olması için gerek ve yeter şart  $\frac{k_1}{k_2}$  nin sabit olmasıdır [46].

$\{T, N_1, N_2\}$  ve  $k_1, k_2$  sırasıyla  $(C)$  eğrisi boyunca Bishop çatıyı ve Bishop eğrilikleri;  $\{T^*, N_1^*, N_2^*\}$  ve  $k_1^*, k_2^*$  ise sırasıyla  $(C^*)$  eğrisi boyunca Bishop çatıyı ve Bishop eğrilikleri gösterebilir.  $E_1^3$  Minkowski uzayında  $(C)$  ve  $(C^*)$  gibi birim hızlı ve Bishop eğrilikleri sıfırdan farklı olan iki timelike eğriyi göz önüne alalım.  $(C^*)$  eğrisinin  $\alpha^*(s^*)$  noktasındaki konum vektörü

$$\vec{\alpha}^*(s^*) = \vec{\alpha}(s) + \lambda_1(s)\vec{T}(s) + \lambda_2(s)\vec{N}_1(s) + \lambda_3(s)\vec{N}_2(s) \quad (2.27)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada,  $\lambda_i(s)$  ( $i=1,2,3$ ) değerleri  $(C)$  eğrisinin yay parametresi olan  $s$  e göre türevlenebilen fonksiyonlardır. (2.27) ifadesinin  $s$  e göre türevi alınır ve (1.8) Bishop formülleri kullanılırsa

$$\frac{d\vec{\alpha}^*}{ds} = \vec{T}^* \frac{ds^*}{ds} = \left(1 + \frac{d\lambda_1}{ds} + k_1\lambda_2 + k_2\lambda_3\right)\vec{T} + \left(k_1\lambda_1 + \frac{d\lambda_2}{ds}\right)\vec{N}_1 + \left(k_2\lambda_1 + \frac{d\lambda_3}{ds}\right)\vec{N}_2$$

eşitliği bulunur.  $(C)$  ve  $(C^*)$  timelike eğrilerinin  $\alpha(s)$  ve  $\alpha^*(s^*)$  gibi karşılıklı noktalarındaki teğetleri paralel ve zıt yönlü olsun. Bu durumda  $\vec{T}^* = -\vec{T}$  yazılabilir. O halde,

$$\begin{cases} \frac{d\lambda_1}{ds} = -\frac{ds^*}{ds} - 1 - k_1\lambda_2 - k_2\lambda_3 \\ \frac{d\lambda_2}{ds} = -k_1\lambda_1 \\ \frac{d\lambda_3}{ds} = -k_2\lambda_1 \end{cases} \quad (2.28)$$

denklem sistemi elde edilir.  $(C)$  timelike eğrisinin herhangi bir  $\alpha(s)$  noktasındaki teğetinin sabit bir doğrultu ile yaptığı açığa  $\varphi$  denirse, bu eğrinin  $\alpha(s)$  ve  $\alpha(s+\Delta s)$  noktalarındaki  $\vec{T}(s)$  ve  $\vec{T}(s+\Delta s)$  teğetleri arasındaki  $\Delta\varphi$  kontengez açısı için

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds} = \kappa$$

olur. Buna göre (2.28) denklem sistemi

$$\begin{cases} \frac{d\lambda_1}{d\varphi} = -\mu_1\lambda_2 - \mu_2\lambda_3 - f \\ \frac{d\lambda_2}{d\varphi} = -\mu_1\lambda_1 \\ \frac{d\lambda_3}{d\varphi} = -\mu_2\lambda_1 \end{cases} \quad (2.29)$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$\mu_1 = \rho k_1 = \frac{k_1}{\kappa} = \cos(\theta), \quad \mu_2 = \rho k_2 = \frac{k_2}{\kappa} = \sin(\theta), \quad \left(\theta = \int \tau ds\right)$$

ve

$$f(\varphi) = \rho + \rho^*, \quad \rho = \frac{1}{\kappa}, \quad \rho^* = \frac{1}{\kappa^*}$$

olup  $\rho$  ve  $\rho^*$ ,  $(C)$  ve  $(C^*)$  timelike eğrilerinin sırasıyla  $\alpha(s)$  ve  $\alpha^*(s^*)$  karşılıklı noktalarındaki eğrilik yarıçaplarını ifade eder. (2.28) denklem sisteminde  $\lambda_2, \lambda_3$  ve bunların türevleri yok edilirse  $\lambda_1$  e göre 3. mertebeden lineer

$$a_1 \ddot{\lambda}_1 + b_1 \dot{\lambda}_1 + c_1 \lambda_1 + d_1 \lambda_1 = e_1 \quad (2.30)$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} a_1 &= \left( k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1 \right)^3 + \ddot{k}_1 k_2^3 \left( k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1 \right) \\ b_1 &= k_2 \left[ (\ddot{k}_1)^2 k_2^3 + \ddot{k}_1 \left( -k_2^2 k_1 \ddot{k}_2 + (k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1)^2 \right) + \ddot{k}_2 (k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1)^2 \right] \\ c_1 &= \ddot{k}_1 \left[ k_2^3 \ddot{k}_2 \dot{k}_1 - (k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1) \left( k_2^3 k_1^2 + k_1 (\dot{k}_2)^2 - k_2 \dot{k}_1 \dot{k}_2 + k_2^5 \right) \right] \\ &\quad - (\ddot{k}_1)^2 k_2^3 \dot{k}_2 - (k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1)^2 \left( \ddot{k}_2 \dot{k}_2 + (k_1^2 + k_2^2) (k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1) \right) \\ d_1 &= -k_2 \ddot{k}_1 \left[ \left( -k_2^4 k_1 - k_2^2 k_1^3 \right) \ddot{k}_2 + \left( (k_1^3 + k_1^2 k_2 + 3k_2^3) \dot{k}_2 - k_1 k_2 \dot{k}_1 (-2k_2 + k_1) \right) \left( k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1 \right) \right] \\ &\quad - (k_2^6 + k_2^4 k_1^2) (\ddot{k}_1)^2 - \left[ (k_1^2 k_2 + k_2^3) \ddot{k}_2 + 3 \left( k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1 \right) \left( k_1 \dot{k}_1 + k_2 \dot{k}_2 \right) \right] \left( k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1 \right)^2 \\ e_1 &= -\ddot{k}_1 \left[ k_2^3 \left( \sigma \dot{k}_1 - \dot{\sigma} k_1 \right) \ddot{k}_2 - \left( k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1 \right) \dot{k}_1 \left( -k_2^3 \ddot{\sigma} + \left( k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1 \right) \left( -k_2 \dot{\sigma} + \dot{k}_2 \sigma \right) \right) \right] \\ &\quad - (\ddot{k}_1)^2 \left( -k_2^3 \dot{k}_2 \sigma + k_2^4 \dot{\sigma} \right) + \left( k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1 \right)^2 \left[ \left( -k_2 \dot{\sigma} + \dot{k}_2 \sigma \right) \ddot{k}_2 - \ddot{\sigma} \left( k_1 k_2' - k_2 \dot{k}_1 \right) \right] \end{aligned}$$

şeklindedir.  $\sigma = \frac{ds^*}{ds} + 1$  olup,  $(\dot{\cdot})$  s e göre türevi ifade etmektedir. Benzer şekilde

(2.28) denklem sisteminde  $\lambda_1, \lambda_3$  ve bunların türevleri yok edilirse  $\lambda_2$  ye göre 3. mertebeden lineer

$$a_2 \ddot{\lambda}_2 + b_2 \dot{\lambda}_2 + c_2 \lambda_2 + d_2 \lambda_2 = e_2 \quad (2.31)$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} a_2 &= -k_1^2 k_2 \\ b_2 &= 2 \dot{k}_1 k_1 k_2 + \dot{k}_2 k_1^2 \\ c_2 &= \ddot{k}_1 k_1 k_2 - 2 (\dot{k}_1)^2 k_2 + k_1^4 k_2 - \dot{k}_2 \dot{k}_1 k_1 + k_2^3 k_1^2 \\ d_2 &= k_1^3 \left( \dot{k}_1 k_2 - k_2 \dot{k}_1 \right) \end{aligned}$$

$$e_2 = k_1^3 \left( \dot{k}_2 \sigma - \dot{\sigma} k_2 \right)$$

şeklindedir. Aynı şekilde (2.28) denklem sisteminde  $\lambda_1, \lambda_2$  ve bunların türevleri yok edilirse  $\lambda_3$  e göre 3. mertebeden lineer

$$a_3 \ddot{\lambda}_3 + b_3 \dot{\lambda}_3 + c_3 \lambda_3 + d_3 \lambda_3 = e_3 \quad (2.32)$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Burada

$$a_3 = -k_2^2 k_1$$

$$b_3 = 2 \dot{k}_2 k_2 k_1 + \dot{k}_1 k_2^2$$

$$c_3 = \ddot{k}_2 k_2 k_1 - 2(\dot{k}_2)^2 k_1 - \dot{k}_1 \dot{k}_2 k_2 + k_1^3 k_2^2 + k_2^4 k_1$$

$$d_3 = k_2^3 \left( \dot{k}_2 k_1 - \dot{k}_1 k_2 \right)$$

$$e_3 = k_2^3 \left( \dot{k}_1 \sigma - \dot{\sigma} k_1 \right)$$

şeklindedir. (C) eğrisi ve  $\sigma$  fonksiyonunun verilmesi durumunda (2.30), (2.31) ve (2.32) denklemlerinin çözümünden  $\lambda_i$  ( $i=1,2,3$ ) değerleri bulunabilir. Bu denklemler, (C) ve (C\*) timelike eğrileri için  $\lambda_i$  katsayılarına göre bir diferensiyel karakterizasyonu ifade eder. Benzer şekilde (2.29) denklem sisteminde  $\lambda_2, \lambda_3$  ve bunların türevleri yok edilirse  $\lambda_1$  e göre 3. mertebeden lineer

$$A_1 \lambda_1''' + B_1 \lambda_1'' + C_1 \lambda_1' + D_1 \lambda_1 = E_1 \quad (2.33)$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Burada

$$A_1 = (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1')^3 + \mu_1'' \mu_2^3 (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1')$$

$$B_1 = \mu_2 \left[ (\mu_1'')^2 \mu_2^3 + \mu_1'' \left( -\mu_2^2 \mu_1 \mu_2'' + (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1')^2 \right) + \mu_2'' (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1')^2 \right]$$

$$C_1 = \mu_1'' \left[ \mu_2^3 \mu_2'' \mu_1' - (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1') \left( \mu_2^3 \mu_1^2 + \mu_1 (\mu_2')^2 - \mu_2 \mu_1' \mu_2' + \mu_2^5 \right) \right] \\ - (\mu_1'')^2 \mu_2^3 \mu_2' - (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1')^2 \left( \mu_2'' \mu_2' + (\mu_1^2 + \mu_2^2) (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1') \right)$$

$$D_1 = -\mu_2 \mu_1'' \left[ (-\mu_2^4 \mu_1 - \mu_2^2 \mu_1^3) \mu_2'' + \left( (\mu_1^3 + \mu_1^2 \mu_2 + 3\mu_2^3) \mu_2' - \mu_1 \mu_2 \mu_1' (-2\mu_2 + \mu_1) \right) (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1') \right] \\ - (\mu_2^6 + \mu_2^4 \mu_1^2) (\mu_1'')^2 - \left[ (\mu_1^2 \mu_2 + \mu_2^3) \mu_2'' + 3(\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1') (\mu_1 \mu_1' + \mu_2 \mu_2') \right] (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1')^2$$

$$E_1 = -\mu_1'' \left[ \mu_2^3 (f \mu_1' - f' \mu_1) \mu_2'' - (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1') \left( -\mu_2^3 f'' + (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1') (-\mu_2 f' + \mu_2' f) \right) \right] \\ - (\mu_1'')^2 \left( -\mu_2^3 \mu_2' f + \mu_2^4 f' \right) + (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1')^2 \left[ (-\mu_2 f' + \mu_2' f) \mu_2'' - f'' (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1') \right]$$

olup,  $(\cdot)$   $\varphi$  e göre türevi ifade etmektedir. Benzer şekilde (2.29) denklem sisteminde  $\lambda_1, \lambda_3$  ve bunların türevleri yok edilirse  $\lambda_2$  ye göre 3. mertebeden lineer

$$A_2 \lambda_2''' + B_2 \lambda_2'' + C_2 \lambda_2' + D_2 \lambda_2 = E_2 \quad (2.34)$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Burada

$$A_2 = -\mu_1^2 \mu_2$$

$$B_2 = 2\mu_1' \mu_1 \mu_2 + \mu_2' \mu_1^2$$

$$C_2 = \mu_1'' \mu_1 \mu_2 - 2(\mu_1')^2 \mu_2 + \mu_1^4 \mu_2 - \mu_2' \mu_1' \mu_1 + \mu_2^3 \mu_1^2$$

$$D_2 = \mu_1^3 (\mu_1' \mu_2 - \mu_2' \mu_1)$$

$$E_2 = \mu_1^3 (\mu_2' f - f' \mu_2)$$

şeklindedir. Aynı şekilde (2.29) denklem sisteminde  $\lambda_1, \lambda_2$  ve bunların türevleri yok edilirse  $\lambda_3$  e göre 3. mertebeden lineer

$$A_3 \lambda_3''' + B_3 \lambda_3'' + C_3 \lambda_3' + D_3 \lambda_3 = E_3 \quad (2.35)$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Burada

$$A_3 = -\mu_2^2 \mu_1$$

$$B_3 = 2\mu_2' \mu_2 \mu_1 + \mu_1' \mu_2^2$$

$$C_3 = \mu_2'' \mu_2 \mu_1 - 2(\mu_2')^2 \mu_1 - \mu_1' \mu_2' \mu_2 + \mu_1^3 \mu_2^2 + \mu_2^4 \mu_1$$

$$D_3 = \mu_2^3 (\mu_2' \mu_1 - \mu_1' \mu_2)$$

$$E_3 = \mu_2^3 (\mu_1' f - f' \mu_1)$$

şeklindedir.  $(C)$  eğrisi ve  $f(\varphi)$  fonksiyonunun verilmesi durumunda (2.33), (2.34) ve (2.35) denklemlerinin çözümünden  $\lambda_i$  ( $i=1,2,3$ ) değerleri bulunabilir. Bu denklemler,  $(C)$  ve  $(C^*)$  timelike eğrileri için  $\lambda_i$  katsayılarına göre bir diferensiyel karakterizasyonu ifade eder.

$(C)$  ve  $(C^*)$ , sabit genişlikli timelike eğri çifti olduğunda karşılıklı noktaları arasındaki uzaklık sabittir. O halde,

$$d^2 = \|\vec{d}\|^2 = \|\vec{\alpha}^*(s^*) - \vec{\alpha}(s)\|^2 = |-\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2| = k^2, \quad k \in \mathbb{R} \quad (2.36)$$

olur. (2.36) eşitliğinin  $\varphi$  değişkenine göre türevi alınır

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\varphi} \|\vec{d}\|^2 = -\lambda_1 \lambda_1' + \lambda_2 \lambda_2' + \lambda_3 \lambda_3' = 0 \quad (2.37)$$

elde edilir. (2.37) eşitliğinde (2.29) ile verilen eşitlikler yerlerine yazılırsa

$$\lambda_1 f = 0$$

elde edilir. Bu eşitlik (C) ve (C\*) timelike eğrilerinin  $E_1^3$  te sabit genişlikli timelike eğri çifti olması için gerek ve yeter şarttır. Burada temel iki durum vardır.

**Durum 1.**  $f(\varphi) = 0 \left( \frac{ds^*}{ds} + 1 = \sigma = 0 \right)$  olsun. Bu durum, (C\*) timelike eğrisinin (C) timelike eğrisine göre

$$\vec{d} = \lambda_1 \vec{T} + \lambda_2 \vec{N}_1 + \lambda_3 \vec{N}_2 \quad (2.38)$$

sabit vektörü ile ötelenmesini ifade eder. Gerçekten  $f(\varphi) = 0$  olduğunda  $\vec{d}$  vektörü sabittir. Bunu göstermek için (2.38) ile verilen  $\vec{d}$  vektörünün  $\varphi$  değişkenine göre türevi alınıp,  $f(\varphi) = 0$  için (2.29) ile verilen eşitlikler ve (1.8) Bishop formülleri kullanılırsa  $\frac{d\vec{d}}{d\varphi} = 0$  elde edilir. Bu ise  $\vec{d}$  vektörünün sabit olduğu anlamına gelir.

Tersine  $\vec{d}$  vektörü sabitse  $f(\varphi) = 0$  olur.

$$f(\varphi) = 0 \left( \frac{ds^*}{ds} + 1 = \sigma = 0 \right) \text{ olması durumunda (2.28) ve (2.29) denklem}$$

sistemleri ile (2.30), (2.31), (2.32) ve (2.33), (2.34), (2.35) denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{cases} \frac{d\lambda_1}{ds} = -k_1\lambda_2 - k_2\lambda_3 \\ \frac{d\lambda_2}{ds} = -k_1\lambda_1 \\ \frac{d\lambda_3}{ds} = -k_2\lambda_1 \end{cases} \quad (2.39)$$

$$\begin{cases} \frac{d\lambda_1}{d\varphi} = -\mu_1\lambda_2 - \mu_2\lambda_3 \\ \frac{d\lambda_2}{d\varphi} = -\mu_1\lambda_1 \\ \frac{d\lambda_3}{d\varphi} = -\mu_2\lambda_1 \end{cases} \quad (2.40)$$

$$a_1 \ddot{\lambda}_1 + b_1 \dot{\lambda}_1 + c_1 \lambda_1 + d_1 \lambda_1 = 0 \quad (2.41)$$

öyle ki

$$a_1 = \left( k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1 \right)^3 + \ddot{k}_1 k_2^3 \left( k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1 \right)$$

$$b_1 = k_2 \left[ (\ddot{k}_1)^2 k_2^3 + \ddot{k}_1 \left( -k_2^2 k_1 \ddot{k}_2 + (k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1)^2 \right) + \ddot{k}_2 (k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1)^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
c_1 &= \ddot{k}_1 \left[ k_2^3 \ddot{k}_2 \dot{k}_1 - (k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1) \left( k_2^3 k_1^2 + k_1 (\dot{k}_2)^2 - k_2 \dot{k}_1 \dot{k}_2 + k_2^5 \right) \right] \\
&\quad - (\ddot{k}_1)^2 k_2^3 \dot{k}_2 - (k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1)^2 \left( \ddot{k}_2 \dot{k}_2 + (k_1^2 + k_2^2)(k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1) \right) \\
d_1 &= -k_2 \ddot{k}_1 \left[ (-k_2^4 k_1 - k_2^2 k_1^3) \ddot{k}_2 + \left( (k_1^3 + k_1^2 k_2 + 3k_2^3) \dot{k}_2 - k_1 k_2 \dot{k}_1 (-2k_2 + k_1) \right) (k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1) \right] \\
&\quad - (k_2^6 + k_2^4 k_1^2) (\ddot{k}_1)^2 - \left[ (k_1^2 k_2 + k_2^3) \ddot{k}_2 + 3 \left( k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1 \right) (k_1 \dot{k}_1 + k_2 \dot{k}_2) \right] (k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1)^2. \\
a_2 \ddot{\lambda}_2 + b_2 \ddot{\lambda}_2 + c_2 \dot{\lambda}_2 + d_2 \lambda_2 &= 0
\end{aligned} \tag{2.42}$$

öyle ki

$$\begin{aligned}
a_2 &= -k_1^2 k_2 \\
b_2 &= 2 \dot{k}_1 k_1 k_2 + \dot{k}_2 k_1^2 \\
c_2 &= \ddot{k}_1 k_1 k_2 - 2(\dot{k}_1)^2 k_2 + k_1^4 k_2 - \dot{k}_2 \dot{k}_1 k_1 + k_2^3 k_1^2 \\
d_2 &= k_1^3 \left( \dot{k}_1 k_2 - \dot{k}_2 k_1 \right). \\
a_3 \ddot{\lambda}_3 + b_3 \ddot{\lambda}_3 + c_3 \dot{\lambda}_3 + d_3 \lambda_3 &= 0
\end{aligned} \tag{2.43}$$

öyle ki

$$\begin{aligned}
a_3 &= -k_2^2 k_1 \\
b_3 &= 2 \dot{k}_2 k_2 k_1 + \dot{k}_1 k_2^2 \\
c_3 &= \ddot{k}_2 k_2 k_1 - 2(\dot{k}_2)^2 k_1 - \dot{k}_1 \dot{k}_2 k_2 + k_1^3 k_2^2 + k_2^4 k_1 \\
d_3 &= k_2^3 \left( \dot{k}_2 k_1 - \dot{k}_1 k_2 \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$A_1 \lambda_1''' + B_1 \lambda_1'' + C_1 \lambda_1' + D_1 \lambda_1 = 0 \tag{2.44}$$

öyle ki

$$\begin{aligned}
A_1 &= \left( \mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1' \right)^3 + \mu_1'' \mu_2^3 \left( \mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1' \right) \\
B_1 &= \mu_2 \left[ (\mu_1'')^2 \mu_2^3 + \mu_1'' \left( -\mu_2^2 \mu_1 \mu_2'' + (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1')^2 \right) + \mu_2'' (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1')^2 \right] \\
C_1 &= \mu_1'' \left[ \mu_2^3 \mu_2'' \mu_1' - (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1') \left( \mu_2^3 \mu_1^2 + \mu_1 (\mu_2')^2 - \mu_2 \mu_1' \mu_2' + \mu_2^5 \right) \right] \\
&\quad - (\mu_1'')^2 \mu_2^3 \mu_2' - (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1')^2 \left( \mu_2'' \mu_2' + (\mu_1^2 + \mu_2^2)(\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1') \right) \\
D_1 &= -\mu_2 \mu_1'' \left[ (-\mu_2^4 \mu_1 - \mu_2^2 \mu_1^3) \mu_2'' + \left( (\mu_1^3 + \mu_1^2 \mu_2 + 3\mu_2^3) \mu_2' - \mu_1 \mu_2 \mu_1' (-2\mu_2 + \mu_1) \right) (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1') \right] \\
&\quad - (\mu_2^6 + \mu_2^4 \mu_1^2) (\mu_1'')^2 - \left[ (\mu_1^2 \mu_2 + \mu_2^3) \mu_2'' + 3 (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1') (\mu_1 \mu_1' + \mu_2 \mu_2') \right] (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1')^2.
\end{aligned}$$

$$A_2 \lambda_2''' + B_2 \lambda_2'' + C_2 \lambda_2' + D_2 \lambda_2 = 0 \quad (2.45)$$

öyle ki

$$\begin{aligned} A_2 &= -\mu_1^2 \mu_2 \\ B_2 &= 2\mu_1' \mu_1 \mu_2 + \mu_2' \mu_1^2 \\ C_2 &= \mu_1'' \mu_1 \mu_2 - 2(\mu_1')^2 \mu_2 + \mu_1^4 \mu_2 - \mu_2' \mu_1' \mu_1 + \mu_2^3 \mu_1^2 \\ D_2 &= \mu_1^3 (\mu_1' \mu_2 - \mu_2' \mu_1). \end{aligned}$$

$$A_3 \lambda_3''' + B_3 \lambda_3'' + C_3 \lambda_3' + D_3 \lambda_3 = 0 \quad (2.46)$$

öyle ki

$$\begin{aligned} A_3 &= -\mu_2^2 \mu_1 \\ B_3 &= 2\mu_2' \mu_2 \mu_1 + \mu_1' \mu_2^2 \\ C_3 &= \mu_2'' \mu_2 \mu_1 - 2(\mu_2')^2 \mu_1 - \mu_1' \mu_2' \mu_2 + \mu_1^3 \mu_2^2 + \mu_2^4 \mu_1 \\ D_3 &= \mu_2^3 (\mu_2' \mu_1 - \mu_1' \mu_2). \end{aligned}$$

**Sonuç 2.2.** *Minkowski 3-uzayında Bishop çatıya göre sabit genişlikli timelike eğri çiftlerini karakterize eden diferensiyel denklem sistemleri (2.39), (2.40) ve diferensiyel denklemler ise (2.41), (2.42), (2.43), (2.44), (2.45) ve (2.46) daki gibidir.*

**Durum 2.**  $\lambda_1 = 0$  olsun. Bu durumda karşımıza üç durum daha çıkar.

i)  $\lambda_2 = sbt$  ve  $\lambda_3 = 0$  ((2.29) dan) olabilir. Bu durumda  $f(\varphi) = -\mu_1 \lambda_2$  olur.

ii)  $\lambda_2 = 0$  ve  $\lambda_3 = sbt$  ((2.29) dan) olabilir. Bu durumda  $f(\varphi) = -\mu_2 \lambda_3$  olur.

Asıl dikkat çekici olan hal aşağıdaki durumdur.

iii)  $\lambda_2 = sbt$  ve  $\lambda_3 = sbt$  ((2.29) dan) olabilir.  $\lambda_2 = sbt$  ve  $\lambda_3 = sbt$  iken  $f(\varphi) = 0$  alınırsa

$\frac{k_1}{k_2} = \frac{-\lambda_3}{\lambda_2} = sbt$  olduğu görülür. Bu ise (C) timelike eğrisinin Bishop çatıya göre  $E_1^3$  te

timelike slant helis olduğu anlamına gelir (Teorem (2.3) ten).

**Teorem 2.4.**  $E_1^3$  de Bishop çatıya göre karşılıklı noktalarında eğrilik yarıçapları toplamı sıfır olan (C) ve (C\*) gibi sabit genişlikli timelike eğri çiftini göz önüne alalım. Eğer, (2.27) denkleminde verilen teğet bileşen  $\lambda_1 = 0$ , birinci normal bileşen  $\lambda_2 = sbt$  ve ikinci normal bileşen  $\lambda_3 = sbt$  ise bu durumda (C) timelike eğrisi bir timelike slant helistir.

Birim hızlı  $(C)$  timelike eğrisinin konum vektörü  $\vec{\alpha}(s)$  olmak üzere, (2.27) denklemini  $\vec{\alpha}(s)$  ve türevleri cinsinden ifade edelim.  $(C)$  birim hızlı bir eğri olduğundan

$$\dot{\vec{\alpha}} = \vec{T} \quad (2.47)$$

yazılabilir. (2.47) eşitliğinin  $s$  e göre ard arda iki defa türevi alınır

$$\ddot{\vec{\alpha}} = k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2 \quad (2.48)$$

$$\ddot{\vec{\alpha}} = (k_1^2 + k_2^2) \vec{T} + \dot{k}_1 \vec{N}_1 + \dot{k}_2 \vec{N}_2 \quad (2.49)$$

elde edilir. Burada  $(\dot{\phantom{x}})$   $s$  e göre türevi ifade etmektedir. (2.47), (2.48) ve (2.49) eşitlikleri kullanılarak

$$\vec{N}_1 = \frac{1}{\mu} \left[ -k_2 \ddot{\vec{\alpha}} + \dot{k}_2 \dot{\vec{\alpha}} + k_2 (k_1^2 + k_2^2) \dot{\vec{\alpha}} \right] \quad (2.50)$$

ve

$$\vec{N}_2 = \frac{1}{\mu} \left[ k_1 \ddot{\vec{\alpha}} - \dot{k}_1 \dot{\vec{\alpha}} - k_1 (k_1^2 + k_2^2) \dot{\vec{\alpha}} \right] \quad (2.51)$$

olarak bulunur. Burada  $\mu = k_1^2 \left( \frac{k_2}{k_1} \right) = \dot{k}_2 k_1 - \dot{k}_1 k_2$ .

(2.47), (2.50) ve (2.51) eşitlikleri (2.27) de yerlerine yazılırsa

$$\vec{\alpha}^*(s^*) = \left( \frac{k_1 \lambda_3 - k_2 \lambda_2}{\mu} \right) \ddot{\vec{\alpha}} + \left( \frac{\dot{k}_2 \lambda_2 - \dot{k}_1 \lambda_3}{\mu} \right) \dot{\vec{\alpha}} + \left[ \frac{(k_1^2 + k_2^2)(k_2 \lambda_2 - k_1 \lambda_3)}{\mu} + \lambda_1 \right] \dot{\vec{\alpha}} + \vec{\alpha} \quad (2.52)$$

eşitliği elde edilir. Böylece,  $(C^*)$  timelike eğrisi,  $(C)$  timelike eğrisinin konum vektörü  $\vec{\alpha}(s)$  ve türevleri cinsinden ifade edilmiş olur. O halde  $(C)$  eğrisinin konum vektörü ve türevleri, Bishop eğrilikleri ve (2.39), (2.40) denklem sistemleri ya da (2.41), (2.42), (2.43) veya (2.44), (2.45), (2.46) denklemleri yardımıyla hesaplanan  $\lambda_1, \lambda_2$  ve  $\lambda_3$  değerleri (2.52) eşitliğinde yerlerine yazılırsa,  $(C)$  timelike eğrisinin sabit genişlikli olduğu  $\vec{\alpha}^*(s^*)$  konum vektörü ile verilen  $(C^*)$  timelike eğrisi belirlenmiş olur.

### 2.2.2. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Bishop Çatıya Göre Sabit Genişlikli Spacelike Eğriler

**Tanım 2.4.**  $(C)$  bir spacelike eğri olsun. Eğer,  $(C)$  eğrisi  $\alpha(s)$  ve  $\alpha^*(s)$  karşıt noktalarında zıt yönlü ve paralel teğetlere sahip ve bu noktalar arasındaki uzaklık daima sabitse bu durumda  $(C)$  eğrisine **sabit genişlikli spacelike eğri** adı verilir. Dahası,  $(C)$  ve  $(C^*)$  gibi spacelike eğri çifti  $\alpha(s)$  ve  $\alpha^*(s)$  karşılıklı noktalarında zıt yönlü ve paralel teğetlere sahip ve bu noktalar arasındaki uzaklıkları daima sabitse  $(C)$  ve  $(C^*)$  eğrilerine **sabit genişlikli spacelike eğri çifti** adı verilir [17].

**Teorem 2.5.** Bishop eğrilikleri  $(k_1$  ve  $k_2)$  sıfırdan farklı olan birim hızlı bir  $\alpha: I \rightarrow E_1^3$  spacelike eğrisinin Bishop çatıya göre slant helis olması için gerek ve yeter şart  $\frac{k_1}{k_2}$  nin sabit olmasıdır [47].

$\{T, N_1, N_2\}$  ve  $k_1, k_2$  sırasıyla  $(C)$  eğrisi boyunca Bishop çatıyı ve Bishop eğrilikleri;  $\{T^*, N_1^*, N_2^*\}$  ve  $k_1^*, k_2^*$  ise sırasıyla  $(C^*)$  eğrisi boyunca Bishop çatıyı ve Bishop eğrilikleri gösterebilir.  $E_1^3$  Minkowski uzayında  $(C)$  ve  $(C^*)$  gibi birim hızlı ve Bishop eğrilikleri sıfırdan farklı olan iki spacelike eğriyi göz önüne alalım.  $(C^*)$  eğrisinin  $\alpha^*(s)$  noktasındaki konum vektörü

$$\overrightarrow{\alpha^*}(s) = \overrightarrow{\alpha}(s) + \lambda_1(s)\overrightarrow{T}(s) + \lambda_2(s)\overrightarrow{N_1}(s) + \lambda_3(s)\overrightarrow{N_2}(s) \quad (2.53)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada,  $\lambda_i(s)$  ( $i=1,2,3$ ) değerleri  $(C)$  eğrisinin yay parametresi olan  $s$  e göre türevlenebilen fonksiyonlardır. (2.53) ifadesinin  $s$  e göre türevi alınır ve (1.9) Bishop formülleri kullanılırsa

$$\frac{d\overrightarrow{\alpha^*}}{ds} = \overrightarrow{T^*} \frac{ds^*}{ds} = \left(1 + \frac{d\lambda_1}{ds} + \varepsilon k_1 \lambda_2 + \varepsilon k_2 \lambda_3\right) \overrightarrow{T} + \left(k_1 \lambda_1 + \frac{d\lambda_2}{ds}\right) \overrightarrow{N_1} + \left(-k_2 \lambda_1 + \frac{d\lambda_3}{ds}\right) \overrightarrow{N_2}$$

eşitliği bulunur. Burada  $\varepsilon$ ,  $(C)$  spacelike eğrisinin türünü belirler. Eğer  $\varepsilon = 1$  ise  $(C)$  eğrisi birinci normal timelike olan spacelike olan bir eğridir. Eğer  $\varepsilon = -1$  ise o zaman  $(C)$  eğrisi ikinci normal timelike olan spacelike bir eğridir.  $(C)$  ve  $(C^*)$  spacelike eğrilerinin  $\alpha(s)$  ve  $\alpha^*(s)$  gibi karşılıklı noktalarındaki teğetleri paralel ve zıt yönlü olsun. Bu durumda  $\overrightarrow{T^*} = -\overrightarrow{T}$  yazılabilir. O halde,

$$\begin{cases} \frac{d\lambda_1}{ds} = -\frac{ds^*}{ds} - 1 - \varepsilon k_1 \lambda_2 - \varepsilon k_2 \lambda_3 \\ \frac{d\lambda_2}{ds} = -k_1 \lambda_1 \\ \frac{d\lambda_3}{ds} = k_2 \lambda_1 \end{cases} \quad (2.54)$$

denklem sistemi elde edilir. (C) spacelike eğrisinin herhangi bir  $\alpha(s)$  noktasındaki teğetinin sabit bir doğrultu ile yaptığı açığa  $\varphi$  denirse, bu eğrinin  $\alpha(s)$  ve  $\alpha(s+\Delta s)$  noktalarındaki  $\bar{T}(s)$  ve  $\bar{T}(s+\Delta s)$  teğetleri arasındaki  $\Delta\varphi$  kontengez açısı için

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds} = \kappa$$

olur. Buna göre (2.54) denklem sistemi

$$\begin{cases} \frac{d\lambda_1}{d\varphi} = -\varepsilon\mu_1\lambda_2 - \varepsilon\mu_2\lambda_3 - f \\ \frac{d\lambda_2}{d\varphi} = -\mu_1\lambda_1 \\ \frac{d\lambda_3}{d\varphi} = \mu_2\lambda_1 \end{cases} \quad (2.55)$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$\mu_1 = \rho k_1 = \frac{k_1}{\kappa} = \cosh(\theta), \quad \mu_2 = \rho k_2 = \frac{k_2}{\kappa} = \sinh(\theta), \quad \left(\theta = \int \tau ds\right)$$

ve

$$f(\varphi) = \rho + \rho^*, \quad \rho = \frac{1}{\kappa}, \quad \rho^* = \frac{1}{\kappa^*}$$

olup  $\rho$  ve  $\rho^*$ , (C) ve  $(C^*)$  spacelike eğrilerinin sırasıyla  $\alpha(s)$  ve  $\alpha^*(s^*)$  karşılıklı noktalarındaki eğrilik yarıçaplarını ifade eder. (2.54) denklem sisteminde  $\lambda_2, \lambda_3$  ve bunların türevleri yok edilirse  $\lambda_1$  e göre 3. mertebeden lineer

$$a_1 \ddot{\lambda}_1 + b_1 \dot{\lambda}_1 + c_1 \lambda_1 + d_1 \lambda_1 = e_1 \quad (2.56)$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} a_1 &= \left( k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1 \right)^3 + \ddot{k}_1 k_2^3 \left( k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1 \right) \\ b_1 &= k_2 \left[ (\ddot{k}_1)^2 k_2^3 + \ddot{k}_1 \left( -k_2^2 k_1 \ddot{k}_2 + (k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1)^2 \right) + \ddot{k}_2 (k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1)^2 \right] \\ c_1 &= \ddot{k}_1 \left[ k_2^3 \ddot{k}_1 \dot{k}_1 - (k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1) \left( \varepsilon k_2^3 k_1^2 + k_1 (\dot{k}_2)^2 - k_2 \dot{k}_1 \dot{k}_2 - \varepsilon k_2^5 \right) \right] \\ &\quad - (\ddot{k}_1)^2 k_2^3 \dot{k}_2 - (k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1)^2 \left( \ddot{k}_2 \dot{k}_2 + \varepsilon (k_1^2 - k_2^2) (k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_1 = & -\varepsilon k_2 \ddot{k}_1 \left[ (k_2^4 k_1 - k_2^2 k_1^3) \ddot{k}_2 + \left( (k_1^3 + k_1^2 k_2 - 3k_2^3) \dot{k}_2 - k_1 k_2 \dot{k}_1 (-2k_2 + k_1) \right) \left( k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1 \right) \right] \\
& - \varepsilon (k_2^4 k_1^2 - k_2^6) (\ddot{k}_1)^2 - \varepsilon \left[ (k_1^2 k_2 - k_2^3) \ddot{k}_2 + 3 \left( k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1 \right) \left( k_1 \dot{k}_1 - k_2 \dot{k}_2 \right) \right] \left( k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1 \right)^2 \\
e_1 = & -\ddot{k}_1 \left[ k_2^3 \left( \sigma \dot{k}_1 - \dot{\sigma} k_1 \right) \ddot{k}_2 - \left( k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1 \right) \left( -k_2^3 \ddot{\sigma} + \left( k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1 \right) \left( -k_2 \dot{\sigma} + \dot{k}_2 f \right) \right) \right] \\
& + (\ddot{k}_1)^2 \left( k_2^3 \dot{k}_2 \sigma - k_2^4 \dot{\sigma} \right) + \left( k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1 \right)^2 \left[ \left( -k_2 \dot{\sigma} + \dot{k}_2 \sigma \right) \ddot{k}_2 - \ddot{\sigma} \left( k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1 \right) \right]
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır.  $\sigma = \frac{ds^*}{ds} + 1$  olup,  $(\dot{\phantom{x}})$   $s$  e göre türevi ifade etmektedir. Benzer şekilde (2.54) denklem sisteminde  $\lambda_1, \lambda_3$  ve bunların türevleri yok edilirse  $\lambda_2$  e göre 3. mertebeden lineer

$$a_2 \ddot{\lambda}_2 + b_2 \ddot{\lambda}_2 + c_2 \dot{\lambda}_2 + d_2 \lambda_2 = e_2 \quad (2.57)$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
a_2 = & -k_1^2 k_2 \\
b_2 = & 2 \dot{k}_1 k_1 k_2 + \dot{k}_2 k_1^2 \\
c_2 = & \ddot{k}_1 k_1 k_2 - 2(\dot{k}_1)^2 k_2 + \varepsilon k_1^4 k_2 - \dot{k}_2 \dot{k}_1 k_1 - \varepsilon k_2^3 k_1^2 \\
d_2 = & \varepsilon k_1^3 \left( \dot{k}_1 k_2 - \dot{k}_2 k_1 \right) \\
e_2 = & k_1^3 \left( \dot{k}_2 \sigma - \dot{\sigma} k_2 \right)
\end{aligned}$$

şeklindedir. Aynı şekilde (2.54) denklem sisteminde  $\lambda_1, \lambda_2$  ve bunların türevleri yok edilirse  $\lambda_3$  e göre 3. mertebeden lineer

$$a_3 \ddot{\lambda}_3 + b_3 \ddot{\lambda}_3 + c_3 \dot{\lambda}_3 + d_3 \lambda_3 = e_3 \quad (2.58)$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
a_3 = & -k_2^2 k_1 \\
b_3 = & 2 \dot{k}_2 k_2 k_1 + \dot{k}_1 k_2^2 \\
c_3 = & \ddot{k}_2 k_2 k_1 - 2(\dot{k}_2)^2 k_1 - \dot{k}_1 \dot{k}_2 k_2 + \varepsilon k_1^3 k_2^2 - \varepsilon k_2^4 k_1 \\
d_3 = & \varepsilon k_2^3 \left( -\dot{k}_2 k_1 + k_2 \dot{k}_1 \right) \\
e_3 = & -k_2^3 \left( \dot{k}_1 \sigma - \dot{\sigma} k_1 \right)
\end{aligned}$$

şeklindedir. (C) eğrisi ve  $\sigma$  fonksiyonunun verilmesi durumunda (2.56), (2.57) ve (2.58) denklemlerinin çözümünden  $\lambda_i$  ( $i=1,2,3$ ) değerleri bulunabilir. Bu

denklemler, (C) ve (C\*) spacelike eğrileri için  $\lambda_1$  katsayılarına göre bir diferensiyel karakterizasyonu ifade eder (2.55) denklem sisteminde  $\lambda_2, \lambda_3$  ve bunların türevleri yok edilirse  $\lambda_1$  e göre 3. mertebeden lineer

$$A_1 \lambda_1''' + B_1 \lambda_1'' + C_1 \lambda_1' + D_1 \lambda_1 = E_1 \quad (2.59)$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} A_1 &= (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1')^3 + \mu_1'' \mu_2^3 (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1') \\ B_1 &= \mu_2 \left[ (\mu_1'')^2 \mu_2^3 + \mu_1'' (-\mu_2^2 \mu_1 \mu_2'' + (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1')^2) + \mu_2'' (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1')^2 \right] \\ C_1 &= \mu_1'' \left[ \mu_2^3 \mu_2'' \mu_1' - (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1') (\varepsilon \mu_2^3 \mu_1^2 + \mu_1 (\mu_2')^2 - \mu_2 \mu_1' \mu_2' - \varepsilon \mu_2^5) \right] \\ &\quad - (\mu_1'')^2 \mu_2^3 \mu_2' - (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1')^2 (\mu_2'' \mu_2' + \varepsilon (\mu_1^2 - \mu_2^2) (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1')) \\ D_1 &= -\varepsilon \mu_2 \mu_1'' \left[ (\mu_2^4 \mu_1 - \mu_2^2 \mu_1^3) \mu_2'' + ((\mu_1^3 + \mu_1^2 \mu_2 - 3\mu_2^3) \mu_2' - \mu_1 \mu_2 \mu_1' (-2\mu_2 + \mu_1)) (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1') \right] \\ &\quad - \varepsilon (\mu_2^4 \mu_1^2 - \mu_2^6) (\mu_1'')^2 - \varepsilon \left[ (\mu_1^2 \mu_2 - \mu_2^3) \mu_2'' + 3(\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1') (\mu_1 \mu_1' - \mu_2 \mu_2') \right] (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1')^2 \\ E_1 &= -\mu_1'' \left[ \mu_2^3 (f \mu_1' - f' \mu_1) \mu_2'' - (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1') (-\mu_2^3 f'' + (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1') (-\mu_2 f' + \mu_2' f)) \right] \\ &\quad + (\mu_1'')^2 (\mu_2^3 \mu_2' f - \mu_2^4 f') + (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1')^2 \left[ (-\mu_2 f' + \mu_2' f) \mu_2'' - f'' (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1') \right] \end{aligned}$$

olup, (')  $\varphi$  e göre türevi ifade etmektedir. Benzer şekilde (2.55) denklem sisteminde  $\lambda_1, \lambda_3$  ve bunların türevleri yok edilirse  $\lambda_2$  e göre 3. mertebeden lineer

$$A_2 \lambda_2''' + B_2 \lambda_2'' + C_2 \lambda_2' + D_2 \lambda_2 = E_2 \quad (2.60)$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} A_2 &= -\mu_1^2 \mu_2 \\ B_2 &= 2\mu_1' \mu_1 \mu_2 + \mu_2' \mu_1^2 \\ C_2 &= \mu_1'' \mu_1 \mu_2 - 2(\mu_1')^2 \mu_2 + \varepsilon \mu_1^4 \mu_2 - \mu_2' \mu_1' \mu_1 - \varepsilon \mu_2^3 \mu_1^2 \\ D_2 &= \varepsilon \mu_1^3 (\mu_1' \mu_2 - \mu_2' \mu_1) \\ E_2 &= \mu_1^3 (\mu_2' f - f' \mu_2) \end{aligned}$$

şeklindedir. Aynı şekilde (2.55) denklem sisteminde  $\lambda_1, \lambda_2$  ve bunların türevleri yok edilirse  $\lambda_3$  e göre 3. mertebeden lineer

$$A_3 \lambda_3''' + B_3 \lambda_3'' + C_3 \lambda_3' + D_3 \lambda_3 = E_3 \quad (2.61)$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Burada

$$A_3 = -\mu_2^2 \mu_1$$

$$B_3 = 2\mu_2' \mu_2 \mu_1 + \mu_1' \mu_2^2$$

$$C_3 = \mu_2'' \mu_2 \mu_1 - 2(\mu_2')^2 \mu_1 - \mu_1' \mu_2' \mu_2 + \varepsilon \mu_1^3 \mu_2^2 - \varepsilon \mu_2^4 \mu_1$$

$$D_3 = \varepsilon \mu_2^3 (-\mu_2' \mu_1 + \mu_2 \mu_1')$$

$$E_3 = -\mu_2^3 (\mu_1' f - f' \mu_1)$$

şeklindedir. (C) eğrisi ve  $f(\varphi)$  fonksiyonunun verilmesi durumunda (2.59), (2.60) ve (2.61) denklemlerinin çözümünden  $\lambda_i$  ( $i=1,2,3$ ) değerleri bulunabilir. Bu denklemler, (C) ve  $(C^*)$  spacelike eğrileri için  $\lambda_i$  katsayılarına göre bir diferensiyel karakterizasyonu ifade eder.

(C) ve  $(C^*)$ , sabit genişlikli spacelike eğri çifti olduğunda karşılıklı noktaları arasındaki uzaklık sabittir. O halde,

$$d^2 = \|\vec{d}\|^2 = \|\vec{\alpha}^*(s^*) - \vec{\alpha}(s)\|^2 = |\lambda_1^2 - \varepsilon \lambda_2^2 + \varepsilon \lambda_3^2| = k^2, \quad k \in \mathbb{R} \quad (2.62)$$

olur. (2.62) eşitliğinin  $\varphi$  değişkenine göre türevi alınırsa

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\varphi} \|\vec{d}\|^2 = \lambda_1 \lambda_1' - \varepsilon \lambda_2 \lambda_2' + \varepsilon \lambda_3 \lambda_3' = 0 \quad (2.63)$$

elde edilir. (2.63) eşitliğinde (2.55) ile verilen eşitlikler yerlerine yazılırsa

$$\lambda_1 f = 0$$

elde edilir. Bu eşitlik (C) ve  $(C^*)$  spacelike eğrilerinin  $E_1^3$  te sabit genişlikli spacelike eğri çifti olması için gerek ve yeter şarttır. Burada temel iki durum vardır.

**Durum 1.**  $f(\varphi) = 0 \left( \frac{ds^*}{ds} + 1 = \sigma = 0 \right)$  olsun. Bu durum,  $(C^*)$  spacelike eğrisinin (C) spacelike eğrisine göre

$$\vec{d} = \lambda_1 \vec{T} + \lambda_2 \vec{N}_1 + \lambda_3 \vec{N}_2 \quad (2.64)$$

sabit vektörü ile ötelenmesini ifade eder. Gerçekten  $f(\varphi) = 0$  olduğunda  $\vec{d}$  vektörü sabittir. Bunu göstermek için (2.64) ile verilen  $\vec{d}$  vektörünün  $\varphi$  değişkenine göre türevi alınıp,  $f(\varphi) = 0$  için (2.55) ile verilen eşitlikler ve (1.9) Bishop formülleri kullanılırsa  $\frac{d\vec{d}}{d\varphi} = 0$  elde edilir. Bu ise  $\vec{d}$  vektörünün sabit olduğu anlamına gelir.

Tersine  $\vec{d}$  vektörü sabitse  $f(\varphi) = 0$  olur.

$f(\varphi) = 0 \quad \left( \frac{ds^*}{ds} + 1 = \sigma = 0 \right)$  olması durumunda (2.54) ve (2.55) denklem

sistemleri ile (2.56), (2.57), (2.58) ve (2.59), (2.60), (2.61) denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{cases} \frac{d\lambda_1}{ds} = -\varepsilon k_1 \lambda_2 - \varepsilon k_2 \lambda_3 \\ \frac{d\lambda_2}{ds} = -k_1 \lambda_1 \\ \frac{d\lambda_3}{ds} = k_2 \lambda_1 \end{cases} \quad (2.65)$$

$$\begin{cases} \frac{d\lambda_1}{d\varphi} = -\varepsilon \mu_1 \lambda_2 - \varepsilon \mu_2 \lambda_3 \\ \frac{d\lambda_2}{d\varphi} = -\mu_1 \lambda_1 \\ \frac{d\lambda_3}{d\varphi} = \mu_2 \lambda_1 \end{cases} \quad (2.66)$$

$$a_1 \ddot{\lambda}_1 + b_1 \ddot{\lambda}_1 + c_1 \dot{\lambda}_1 + d_1 \lambda_1 = 0 \quad (2.67)$$

öyle ki

$$\begin{aligned} a_1 &= \left( k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1 \right)^3 + \ddot{k}_1 k_2^3 \left( k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1 \right) \\ b_1 &= k_2 \left[ (\ddot{k}_1)^2 k_2^3 + \ddot{k}_1 \left( -k_2^2 k_1 \ddot{k}_2 + (k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1)^2 \right) + \ddot{k}_2 (k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1)^2 \right] \\ c_1 &= \ddot{k}_1 \left[ k_2^3 \ddot{k}_2 \dot{k}_1 - (k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1) \left( \varepsilon k_2^3 k_1^2 + k_1 (\dot{k}_2)^2 - k_2 \dot{k}_1 \dot{k}_2 - \varepsilon k_2^5 \right) \right] \\ &\quad - (\ddot{k}_1)^2 k_2^3 \dot{k}_2 - (k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1)^2 \left( \ddot{k}_2 \dot{k}_2 + \varepsilon (k_1^2 - k_2^2) (k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1) \right) \\ d_1 &= -\varepsilon k_2 \ddot{k}_1 \left[ (k_2^4 k_1 - k_2^2 k_1^3) \ddot{k}_2 + \left( (k_1^3 + k_1^2 k_2 - 3k_2^3) \dot{k}_2 - k_1 k_2 \dot{k}_1 (-2k_2 + k_1) \right) (k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1) \right] \\ &\quad - \varepsilon (k_2^4 k_1^2 - k_2^6) (\ddot{k}_1)^2 - \varepsilon \left[ (k_1^2 k_2 - k_2^3) \ddot{k}_2 + 3 \left( k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1 \right) (k_1 \dot{k}_1 - k_2 \dot{k}_2) \right] (k_1 \dot{k}_2 - k_2 \dot{k}_1)^2. \\ a_2 \ddot{\lambda}_2 + b_2 \ddot{\lambda}_2 + c_2 \dot{\lambda}_2 + d_2 \lambda_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.68)$$

öyle ki

$$\begin{aligned} a_2 &= -k_1^2 k_2 \\ b_2 &= 2 \dot{k}_1 k_1 k_2 + \dot{k}_2 k_1^2 \\ c_2 &= \ddot{k}_1 k_1 k_2 - 2 (\dot{k}_1)^2 k_2 + \varepsilon k_1^4 k_2 - \dot{k}_2 \dot{k}_1 k_1 - \varepsilon k_2^3 k_1^2 \\ d_2 &= \varepsilon k_1^3 \left( \dot{k}_1 k_2 - \dot{k}_2 k_1 \right). \end{aligned}$$

$$a_3 \ddot{\lambda}_3 + b_3 \ddot{\lambda}_3 + c_3 \dot{\lambda}_3 + d_3 \lambda_3 = 0 \quad (2.69)$$

öyle ki

$$\begin{aligned} a_3 &= -k_2^2 k_1 \\ b_3 &= 2 \dot{k}_2 k_2 k_1 + \dot{k}_1 k_2^2 \\ c_3 &= \ddot{k}_2 k_2 k_1 - 2(\dot{k}_2)^2 k_1 - \dot{k}_1 \dot{k}_2 k_2 + \varepsilon k_1^3 k_2^2 - \varepsilon k_2^4 k_1 \\ d_3 &= \varepsilon k_2^3 \left( -\dot{k}_2 k_1 + k_2 \dot{k}_1 \right) \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$A_1 \lambda_1''' + B_1 \lambda_1'' + C_1 \lambda_1' + D_1 \lambda_1 = 0 \quad (2.70)$$

öyle ki

$$\begin{aligned} A_1 &= \left( \mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1' \right)^3 + \mu_1'' \mu_2^3 \left( \mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1' \right) \\ B_1 &= \mu_2 \left[ (\mu_1'')^2 \mu_2^3 + \mu_1'' \left( -\mu_2^2 \mu_1 \mu_2'' + (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1')^2 \right) + \mu_2'' (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1')^2 \right] \\ C_1 &= \mu_1'' \left[ \mu_2^3 \mu_2'' \mu_1' - (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1') \left( \varepsilon \mu_2^3 \mu_1^2 + \mu_1 (\mu_2')^2 - \mu_2 \mu_1' \mu_2' - \varepsilon \mu_2^5 \right) \right. \\ &\quad \left. - (\mu_1'')^2 \mu_2^3 \mu_2' - (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1')^2 \left( \mu_2'' \mu_2' + \varepsilon (\mu_1^2 - \mu_2^2) (\mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1') \right) \right] \\ D_1 &= -\varepsilon \mu_2 \mu_1'' \left[ \left( \mu_2^4 \mu_1 - \mu_2^2 \mu_1^3 \right) \mu_2'' + \left( (\mu_1^3 + \mu_1^2 \mu_2 - 3\mu_2^3) \mu_2' - \mu_1 \mu_2 \mu_1' (-2\mu_2 + \mu_1) \right) \left( \mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1' \right) \right] \\ &\quad - \varepsilon \left( \mu_2^4 \mu_1^2 - \mu_2^6 \right) (\mu_1'')^2 - \varepsilon \left[ \left( \mu_1^2 \mu_2 - \mu_2^3 \right) \mu_2'' + 3 \left( \mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1' \right) \left( \mu_1 \mu_1' - \mu_2 \mu_2' \right) \right] \left( \mu_1 \mu_2' - \mu_2 \mu_1' \right)^2. \\ A_2 \lambda_2''' + B_2 \lambda_2'' + C_2 \lambda_2' + D_2 \lambda_2 &= 0 \quad (2.71) \end{aligned}$$

öyle ki

$$\begin{aligned} A_2 &= -\mu_1^2 \mu_2 \\ B_2 &= 2 \mu_1' \mu_1 \mu_2 + \mu_2' \mu_1^2 \\ C_2 &= \mu_1'' \mu_1 \mu_2 - 2(\mu_1')^2 \mu_2 + \varepsilon \mu_1^4 \mu_2 - \mu_2' \mu_1' \mu_1 - \varepsilon \mu_2^3 \mu_1^2 \\ D_2 &= \varepsilon \mu_1^3 \left( \mu_1' \mu_2 - \mu_2' \mu_1 \right). \end{aligned}$$

$$A_3 \lambda_3''' + B_3 \lambda_3'' + C_3 \lambda_3' + D_3 \lambda_3 = 0 \quad (2.72)$$

öyle ki

$$\begin{aligned} A_3 &= -\mu_2^2 \mu_1 \\ B_3 &= 2 \mu_2' \mu_2 \mu_1 + \mu_1' \mu_2^2 \\ C_3 &= \mu_2'' \mu_2 \mu_1 - 2(\mu_2')^2 \mu_1 - \mu_1' \mu_2' \mu_2 + \varepsilon \mu_1^3 \mu_2^2 - \varepsilon \mu_2^4 \mu_1 \\ D_3 &= \varepsilon \mu_2^3 \left( -\mu_2' \mu_1 + \mu_2 \mu_1' \right). \end{aligned}$$

**Sonuç 2.3.** *Minkowski 3-uzayında Bishop çatıya göre sabit genişlikli spacelike eğri çiftlerini karakterize eden diferensiyel denklem sistemleri (2.65), (2.66) ve diferensiyel denklemler ise (2.67), (2.68), (2.69), (2.70), (2.71) ve (2.72) deki gibidir.*

**Durum 2.**  $\lambda_1 = 0$  olsun. Bu durumda karşımıza üç durum daha çıkar.

i)  $\lambda_2 = sbt$  ve  $\lambda_3 = 0$  ((2.55) den) olabilir. Bu durumda  $f(\varphi) = -\varepsilon\mu_1\lambda_2$  olur.

ii)  $\lambda_2 = 0$  ve  $\lambda_3 = sbt$  ((2.55) den) olabilir. Bu durumda  $f(\varphi) = -\varepsilon\mu_2\lambda_3$  olur.

Asıl dikkat çekici olan hal aşağıdaki durumdur.

iii)  $\lambda_2 = sbt$  ve  $\lambda_3 = sbt$  ((2.55) den) olabilir.  $\lambda_2 = sbt$  ve  $\lambda_3 = sbt$  iken  $f(\varphi) = 0$  alınırsa

$\frac{k_1}{k_2} = \frac{-\lambda_3}{\lambda_2} = sbt$  olduğu görülür. Bu ise (C) spacelike eğrisinin Bishop çatıya göre  $E_1^3$  te

spacelike slant helis olduğu anlamına gelir (Teorem (2.5) den).

**Teorem 2.6.**  $E_1^3$  de Bishop çatıya göre karşılıklı noktalarında eğrilik yarıçapları toplamı sıfır olan (C) ve (C\*) gibi sabit genişlikli spacelike eğri çiftini göz önüne alalım. Eğer, (2.53) denkleminde verilen teğet bileşen  $\lambda_1 = 0$ , birinci normal bileşen  $\lambda_2 = sbt$  ve ikinci normal bileşen  $\lambda_3 = sbt$  ise bu durumda (C) spacelike eğrisi bir spacelike slant helistir.

Birim hızlı (C) spacelike eğrisinin konum vektörü  $\vec{\alpha}(s)$  olmak üzere, (2.53) denklemini  $\vec{\alpha}(s)$  ve türevleri cinsinden ifade edelim. (C) birim hızlı bir eğri olduğundan

$$\dot{\vec{\alpha}} = \vec{T} \quad (2.73)$$

yazılabilir. (2.73) eşitliğinin  $s$  e göre ard arda iki defa türevi alınırsa

$$\ddot{\vec{\alpha}} = k_1 \vec{N}_1 - k_2 \vec{N}_2 \quad (2.74)$$

$$\ddot{\vec{\alpha}} = \varepsilon(k_1^2 - k_2^2)\vec{T} + \dot{k}_1 \vec{N}_1 - \dot{k}_2 \vec{N}_2 \quad (2.75)$$

elde edilir. Burada  $(\dot{\cdot})$   $s$  e göre türevi ifade etmektedir. (2.73), (2.74) ve (2.75) eşitlikleri kullanılarak

$$\vec{N}_1 = \frac{1}{\mu} \left[ -k_2 \ddot{\vec{\alpha}} + \dot{k}_2 \ddot{\vec{\alpha}} + \varepsilon k_2 (k_1^2 - k_2^2) \dot{\vec{\alpha}} \right] \quad (2.76)$$

ve

$$\overline{N}_2 = \frac{1}{\mu} \left[ -k_1 \ddot{\alpha} + \dot{k}_1 \ddot{\alpha} + \varepsilon k_1 (k_1^2 - k_2^2) \dot{\alpha} \right] \quad (2.77)$$

olarak bulunur. Burada  $\mu = k_1^2 \left( \frac{\dot{k}_2}{k_1} \right) = \dot{k}_2 k_1 - \dot{k}_1 k_2$ .

(2.73), (2.76) ve (2.77) eşitlikleri (2.53) de yerlerine yazılırsa

$$\overline{\alpha}^*(s^*) = \left( \frac{-k_1 \lambda_3 - k_2 \lambda_2}{\mu} \right) \ddot{\alpha} + \left( \frac{\dot{k}_2 \lambda_2 + \dot{k}_1 \lambda_3}{\mu} \right) \ddot{\alpha} + \left[ \frac{\varepsilon (k_1^2 - k_2^2) (k_2 \lambda_2 + k_1 \lambda_3)}{\mu} + \lambda_1 \right] \dot{\alpha} + \overline{\alpha} \quad (2.78)$$

eşitliği elde edilir. Böylece,  $(C^*)$  spacelike eğrisi,  $(C)$  spacelike eğrisinin konum vektörü  $\overline{\alpha}(s)$  ve türevleri cinsinden ifade edilmiş olur. O halde  $(C)$  eğrisinin konum vektörü ve türevleri, Bishop eğrilikleri ve (2.65), (2.66) denklem sistemleri ya da (2.67), (2.68), (2.69) veya (2.70), (2.71), (2.72) denklemleri yardımıyla hesaplanan  $\lambda_1, \lambda_2$  ve  $\lambda_3$  değerleri (2.78) eşitliğinde yerlerine yazılırsa,  $(C)$  spacelike eğrisinin sabit genişlikli olduğu  $\overline{\alpha}^*(s^*)$  konum vektörü ile verilen  $(C^*)$  spacelike eğrisi belirlenmiş olur.

### 3. 3-BOYUTLU ÖKLİD VE MINKOWSKI UZAYLARINDA KÜRESEL EĞRİLER

#### 3.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Küresel Eğriler

Temel diferensiyel geometri kitaplarında [18-20] ve [21-26]'da, Öklid uzayında küresel eğriler ve bunların karakterizasyonları verilmiştir. Birim hızlı bir eğrinin küresel olma şartı  $\tau(s) \neq 0$  olmak üzere

$$\frac{\tau}{\kappa} + \left( \frac{1}{\tau} \left( \frac{1}{\kappa} \right)' \right)' = 0$$

eşitliği ile verilmiştir. Burada  $\kappa$  ve  $\tau$  sırasıyla eğrinin eğrilik ve burulmasıdır. Şimdi  $E^3$  Öklid uzayında, birim hızlı olmayan küresel eğriler ve bunların bazı karakterizasyonlarını verelim.

**Teorem 3.1.**  $E^3$  Öklid uzayında yarıçapı  $r$  ve merkezi  $m$  olan bir küre üzerinde bulunan, birim hızlı olmayan, regüler  $\alpha$  eğrisini göz önüne alalım.  $\tau(t) \neq 0$  ve  $\|\alpha'(t)\| = v(t)$  olmak üzere,

$$\bar{\alpha}(t) - \bar{m} = -P\bar{N}(t) - P'Q\bar{B}(t)$$

eşitliği sağlanır. Burada,  $P = \frac{1}{\kappa}$  ve  $Q = \frac{1}{v\tau}$  olarak tanımlıdır.

**İspat :**  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisi, yarıçapı  $r$  ve merkezi  $m$  olan bir küre üzerinde yatan regüler bir eğri olsun.  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(t)$  noktasındaki konum vektörü

$$\bar{\alpha}(t) = \bar{m} + \lambda_1(t)\bar{T}(t) + \lambda_2(t)\bar{N}(t) + \lambda_3(t)\bar{B}(t) \quad (3.1)$$

şeklinde ifade edilebilir.  $\alpha$  küresel bir eğri olduğundan

$$\langle \bar{\alpha} - \bar{m}, \bar{\alpha} - \bar{m} \rangle = r^2 \quad (3.2)$$

yazılabilir. (3.2) eşitliğinin  $t$  değişkenine göre türevi alınır,

$$\langle \bar{\alpha}', \bar{\alpha} - \bar{m} \rangle = 0$$

ya da

$$v \langle \bar{T}, \bar{\alpha} - \bar{m} \rangle = 0$$

elde edilir.  $\alpha$  eğrisi regüler olduğundan  $v \neq 0$  olup

$$\langle \bar{T}, \bar{\alpha} - \bar{m} \rangle = 0 \quad (3.3)$$

bulunur. (3.3) eşitliğinin  $t$  değişkenine göre türevi alınır ve (1.2) Frenet formülleri kullanılırsa

$$v\kappa \langle \bar{N}, \bar{\alpha} - \bar{m} \rangle + v \langle \bar{T}, \bar{T} \rangle = 0$$

olur. Buradan da

$$\langle \bar{N}, \bar{\alpha} - \bar{m} \rangle = -\frac{1}{\kappa} = -P \quad (3.4)$$

elde edilir. Son olarak, (3.4) eşitliğinin  $t$  değişkenine göre türevi alınır

$$-v\kappa \langle \bar{T}, \bar{\alpha} - \bar{m} \rangle + v\tau \langle \bar{B}, \bar{\alpha} - \bar{m} \rangle + v \langle \bar{N}, \bar{T} \rangle = \left( \frac{-1}{\kappa} \right)'$$

buradan da

$$\langle \bar{B}, \bar{\alpha} - \bar{m} \rangle = -\frac{1}{v\tau} \left( \frac{1}{\kappa} \right)' = -P'Q \quad (3.5)$$

elde edilir. (3.1) eşitliğini

$$\bar{\alpha}(t) - \bar{m} = \lambda_1(t)\bar{T}(t) + \lambda_2(t)\bar{N}(t) + \lambda_3(t)\bar{B}(t) \quad (3.6)$$

şeklinde yazıp, (3.6) eşitliğinin her iki tarafının sırasıyla  $\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}$  ile iç çarpımı alınır,

$$\langle \bar{T}, \bar{\alpha} - \bar{m} \rangle = \lambda_1 = 0 \quad (3.7)$$

$$\langle \bar{N}, \bar{\alpha} - \bar{m} \rangle = \lambda_2 = -\frac{1}{\kappa} = -P \quad (3.8)$$

ve

$$\langle \bar{B}, \bar{\alpha} - \bar{m} \rangle = \lambda_3 = -\frac{1}{v\tau} \left( \frac{1}{\kappa} \right)' = -P'Q \quad (3.9)$$

elde edilir. (3.7), (3.8) ve (3.9), (3.1) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$\bar{\alpha} - \bar{m} = -P\bar{N} - P'Q\bar{B}$$

bulunur.

**Teorem 3.2.**  $E^3$  Öklid uzayında birim hızlı olmayan, regüler  $\alpha$  eğrisini göz önüne alalım.  $\tau(t) \neq 0$  olmak üzere,  $P^2 + (P'Q)^2 = r^2 = sbt$  ( $r > 0$ ) ise  $\alpha$  eğrisi, yarıçapı  $r$  olan bir küre üzerindedir.

**İspat :** Öncelikle aşağıda verilen

$$\vec{m} = \vec{\alpha}(t) + P\vec{N}(t) + P'Q\vec{B}(t) \quad (3.10)$$

eşitliğini göz önüne alalım. Bu eşitliğin her iki tarafının  $t$  değişkenine göre türevi alınır

$$\vec{m}' = \left( \frac{P}{Q} + P''Q + P'Q' \right) \vec{B} \quad (3.11)$$

bulunur.  $P^2 + (P'Q)^2 = r^2 = sbt$  olduğunu kabul edelim. Buna göre, her iki tarafın  $t$ 'ye göre türevi alınır

$$PP' + P'Q(P''Q + P'Q') = 0$$

ve böylece

$$\frac{P}{Q} + P''Q + P'Q' = 0 \quad (3.12)$$

elde edilir. O zaman (3.11) ve (3.12) den

$$\vec{m}' = 0$$

ve buradan da

$$\vec{m} = sbt$$

bulunur. Ayrıca, (3.10) eşitliğini

$$\vec{\alpha} - \vec{m} = -P\vec{N} - P'Q\vec{B}$$

şeklinde yazalım. Buradan

$$\langle \vec{\alpha} - \vec{m}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle = P^2 + (P'Q)^2 = r^2 = sbt$$

olur. O halde,

$$\vec{\alpha} - \vec{m} = -P\vec{N} - P'Q\vec{B}$$

eşitliği,  $\alpha$  eğrisinin yarıçapı  $r$  ve merkezi  $m$  olan bir küre üzerinde bulunduğunu gösterir.

**Teorem 3.3.**  $E^3$  Öklid uzayında birim hızlı olmayan, regüler  $\alpha$  eğrisini göz önüne alalım.  $\tau(t) \neq 0$  olmak üzere,  $\alpha$  eğrisinin küresel olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{P}{Q} + (P'Q)' = 0$$

olmasıdır.

**İspat :**  $\tau(t) \neq 0$  olmak üzere, birim hızlı olmayan, regüler  $\alpha$  eğrisini göz önüne alalım. Teorem 3.1 den

$$P^2 + (P'Q)^2 = r^2$$

yazılabilir. Burada  $r$ , kürenin yarıçapıdır. Bu eşitliğin  $t$ 'ye göre türevi alınır

$$2PP' + 2(P'Q)(P'Q)' = 0$$

olur ve böylece

$$\frac{P}{Q} + (P'Q)' = 0$$

elde edilir. Tersine,  $\frac{P}{Q} + (P'Q)' = 0$  olduğunu kabul edelim. Eşitliğin her iki tarafı

$2(P'Q)$  ile çarpılırsa,

$$2PP' + 2(P'Q)(P'Q)' = 0$$

elde edilir. Bu ise,

$$P^2 + (P'Q)^2 = r^2 = sbt$$

ifadesinin türevidir. O halde, Teorem 3.2 den  $\alpha$  eğrisinin küresel bir eğri olduğu söylenebilir.

**Teorem 3.4.**  $E^3$  Öklid uzayında birim hızlı olmayan, regüler  $\alpha$  eğrisini göz önüne alalım.  $\tau(t) \neq 0$  olmak üzere  $\alpha$  eğrisinin küresel olması için gerek ve yeter şart

$$f = P'Q \text{ ve } f' = -\frac{P}{Q}$$

eşitliklerini sağlayan türevlenebilir bir  $f(t)$  fonksiyonunun var olmasıdır.

**İspat :**  $E^3$  Öklid uzayında birim hızlı olmayan, regüler  $\alpha$  eğrisini göz önüne alalım.

$\tau(t) \neq 0$  olsun. Teorem 3.3 den  $\frac{P}{Q} + (P'Q)' = 0$  eşitliğine sahibiz. Burada,  $f(t) = P'Q$

olacak şekilde türevlenebilir bir  $f$  fonksiyonu tanımlanabilir. O halde,  $f' = -\frac{P}{Q}$  olur.

Tersine,  $f = P'Q$  ve  $f' = -\frac{P}{Q}$  olsun. Bu durumda,  $(P'Q)' = -\frac{P}{Q}$  yani

$\frac{P}{Q} + (P'Q)' = 0$  yazılabilir. Sonuç olarak, Teorem 3.3 den  $\alpha$  eğrisinin küresel olduğu söylenebilir.

Şimdi,  $\alpha$  eğrisinin  $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$  Frenet vektör alanlarını;  $\alpha', \alpha'', \alpha''', \kappa, \tau$  ve  $v$  cinsinden ifade edelim.  $\|\alpha'(t)\| = v(t)$  olmak üzere

$$\vec{\alpha}' = v\vec{T} \quad (3.13)$$

olur. (3.13) ifadesinin ard arda  $t$  ye göre iki defa türevi alınır ve birim hızlı olmayan eğriler için (1.2) Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\bar{\alpha}'' = v'\bar{T} + v^2\kappa\bar{N} \quad (3.14)$$

$$\bar{\alpha}''' = (v'' - v^3\kappa^2)\bar{T} + (3vv'\kappa + v^2\kappa')\bar{N} + v^3\kappa\tau\bar{B} \quad (3.15)$$

elde edilir. (3.13), (3.14) ve (3.15) den

$$\bar{N} = \frac{1}{v^2\kappa}\bar{\alpha}'' - \frac{v'}{v^3\kappa}\bar{\alpha}' \quad (3.16)$$

ve

$$\bar{B} = \frac{1}{v^3\kappa\tau} \left[ \bar{\alpha}''' - \left( \frac{3v'}{v} + \frac{\kappa'}{\kappa} \right) \bar{\alpha}'' + \left( \frac{3(v')^2}{v^2} + \frac{v'\kappa'}{v\kappa} + v^2\kappa^2 - \frac{v''}{v} \right) \bar{\alpha}' \right] \quad (3.17)$$

olarak bulunur. (3.1) eşitliğinde (3.7), (3.8), (3.9), (3.13), (3.16) ve (3.17) eşitlikleri yerlerine yazılırsa,  $E^3$  Öklid uzayında birim hızlı olmayan küresel eğrileri karakterize eden ve eğrinin konum vektörü ve türevlerine bağlı

$$p_3(t)\bar{\alpha}'''(t) + p_2(t)\bar{\alpha}''(t) + p_1(t)\bar{\alpha}'(t) + p_0(t)\bar{\alpha}(t) = p_0(t)\bar{m} \quad (3.18)$$

3. mertebeden değişken katsayılı lineer diferensiyel denklemi elde edilir. Burada

$$p_3(s) = v^2\kappa\kappa'$$

$$p_2(s) = -v^4\kappa^2\tau^2 - 3vv'\kappa\kappa' - v^2(\kappa')^2$$

$$p_1(s) = v^3v'\kappa^2\tau^2 - vv''\kappa\kappa' + v^4\kappa^3\kappa' + 3(v')^2\kappa\kappa' + vv'(\kappa')^2$$

$$p_0(s) = -v^6\kappa^4\tau^2$$

olarak tanımlıdır. Buna göre aşağıdaki teoremi verebiliriz.

**Teorem 3.5.**  $E^3$  Öklid uzayında  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisi, yarıçapı  $r$  ve merkezi  $m$  olan bir küre üzerinde bulunan, birim hızlı olmayan regüler bir eğri olsun.  $\alpha(t)$  küresel eğrisini karakterize eden diferensiyel denklem (3.18)'deki gibidir.

### 3.2. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Küresel Eğriler

#### 3.2.1. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Lorentziyen Küresel Eğriler

##### 3.2.1.1. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Lorentziyen Küresel Timelike Eğriler

Bu bölümde, 3-boyutlu Minkowski uzayında Frenet çatıya göre birim hızlı olmayan Lorentziyen küresel timelike eğriler ve bunların bazı karakterizasyonları verilecektir. Petrovic-Torgasev ve Sucurovic [30]'da,  $E_1^3$  Minkowski uzayında birim hızlı, Lorentziyen küresel timelike eğriler ve bunların bazı karakterizasyonlarını vermiştir. Buna göre, birim hızlı bir timelike eğrinin Lorentziyen küre üzerinde bulunma şartı  $\kappa(s) \neq 0$  ve  $\tau(s) \neq 0$  olmak üzere

$$\frac{\tau}{\kappa} + \left( \frac{1}{\tau} \left( \frac{1}{\kappa} \right)' \right)' = 0$$

eşitliği ile verilmiştir. Burada  $\kappa(s)$  ve  $\tau(s)$ , sırasıyla timelike eğrinin eğrilik ve burulmasıdır. Şimdi  $E_1^3$  Minkowski uzayında, birim hızlı olmayan Lorentziyen küresel timelike eğriler ve bunların bazı karakterizasyonlarını verelim.

**Teorem 3.6.**  $E_1^3$  Minkowski uzayında yarıçapı  $r$  ve merkezi  $m$  olan bir Lorentziyen küre üzerinde bulunan, birim hızlı olmayan, regüler  $\alpha$  timelike eğrisini göz önüne alalım.  $\kappa(t) \neq 0$ ,  $\tau(t) \neq 0$  ve  $\|\alpha'(t)\| = v(t)$  olmak üzere,

$$\bar{\alpha}(t) - \bar{m} = P\bar{N}(t) + P'Q\bar{B}(t)$$

eşitliği sağlanır. Burada,  $P = \frac{1}{\kappa}$  ve  $Q = \frac{1}{v\tau}$  olarak tanımlıdır.

**İspat :**  $\alpha : I \rightarrow E_1^3$  eğrisi, yarıçapı  $r$  ve merkezi  $m$  olan bir Lorentziyen küre üzerinde bulunan regüler bir timelike eğri olsun.  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(t)$  noktasındaki konum vektörü

$$\bar{\alpha}(t) = \bar{m} + \lambda_1(t)\bar{T}(t) + \lambda_2(t)\bar{N}(t) + \lambda_3(t)\bar{B}(t) \quad (3.19)$$

şeklinde ifade edilebilir.  $\alpha$  Lorentziyen küresel bir eğri olduğundan

$$\langle \bar{\alpha} - \bar{m}, \bar{\alpha} - \bar{m} \rangle = r^2 \quad (3.20)$$

yazılabilir. (3.20) eşitliğinin  $t$  değişkenine göre türevi alınırsa,

$$\langle \vec{\alpha}', \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle = 0$$

ya da

$$v \langle \vec{T}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle = 0$$

elde edilir.  $\alpha$  eğrisi regüler olduğundan  $v \neq 0$  olup

$$\langle \vec{T}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle = 0 \quad (3.21)$$

bulunur. (3.21) eşitliğinin  $t$  değişkenine göre türevi alınır ve birim hızlı olmayan timelike eğriler için (1.6) Frenet formülleri kullanılırsa

$$v\kappa \langle \vec{N}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle + v \langle \vec{T}, \vec{T} \rangle = 0$$

olur. Buradan da

$$\langle \vec{N}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle = \frac{1}{\kappa} = P \quad (3.22)$$

elde edilir. Son olarak, (3.22) eşitliğinin  $t$  değişkenine göre türevi alınır

$$v\kappa \langle \vec{T}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle + v\tau \langle \vec{B}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle + v \langle \vec{N}, \vec{T} \rangle = \left( \frac{1}{\kappa} \right)'$$

buradan da

$$\langle \vec{B}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle = \frac{1}{v\tau} \left( \frac{1}{\kappa} \right)' = P'Q \quad (3.23)$$

elde edilir. (3.19) eşitliğini

$$\vec{\alpha}(t) - \vec{m} = \lambda_1(t) \vec{T}(t) + \lambda_2(t) \vec{N}(t) + \lambda_3(t) \vec{B}(t) \quad (3.24)$$

şeklinde yazıp, (3.24) eşitliğinin her iki tarafının sırasıyla  $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$  ile iç çarpımı alınır,

$$\langle \vec{T}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle = -\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \quad (3.25)$$

$$\langle \vec{N}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle = \lambda_2 = \frac{1}{\kappa} = P \quad (3.26)$$

ve

$$\langle \vec{B}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle = \lambda_3 = \frac{1}{v\tau} \left( \frac{1}{\kappa} \right)' = P'Q \quad (3.27)$$

elde edilir. (3.25), (3.26) ve (3.27), (3.19) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$\vec{\alpha} - \vec{m} = P \vec{N} + P'Q \vec{B}$$

bulunur.

**Teorem 3.7.**  $E_1^3$  Minkowski uzayında birim hızlı olmayan, regüler  $\alpha$  timelike eğrisini göz önüne alalım.  $\kappa(t) \neq 0$  ve  $\tau(t) \neq 0$  olmak üzere,  $P^2 + (P'Q)^2 = r^2 = sbt$  ( $r > 0$ ) ise  $\alpha$  eğrisi, yarıçapı  $r$  olan bir Lorentziyen küre üzerindedir.

**İspat :** Öncelikle aşağıda verilen

$$\vec{m} = \vec{\alpha}(t) - P\vec{N}(t) - P'Q\vec{B}(t) \quad (3.28)$$

eşitliğini göz önüne alalım. Bu eşitliğin her iki tarafının  $t$  değişkenine göre türevi alınırsa

$$\vec{m}' = -\left(\frac{P}{Q} + P''Q + P'Q'\right)\vec{B} \quad (3.29)$$

bulunur.  $P^2 + (P'Q)^2 = r^2 = sbt$  olduğunu kabul edelim. Buna göre, her iki tarafın  $t$ 'ye göre türevi alınırsa

$$PP' + P'Q(P''Q + P'Q') = 0$$

ve böylece

$$\frac{P}{Q} + P''Q + P'Q' = 0 \quad (3.30)$$

elde edilir. O zaman (3.29) ve (3.30) dan

$$\vec{m}' = 0$$

ve buradan da

$$\vec{m} = sbt$$

bulunur. Ayrıca, (3.28) eşitliğini

$$\vec{\alpha} - \vec{m} = P\vec{N} + P'Q\vec{B}$$

şeklinde yazalım. Buradan

$$\langle \vec{\alpha} - \vec{m}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle = P^2 + (P'Q)^2 = r^2 = sbt$$

olur. O halde,

$$\vec{\alpha} - \vec{m} = P\vec{N} + P'Q\vec{B}$$

eşitliği,  $\alpha$  timelike eğrisinin yarıçapı  $r$  ve merkezi  $m$  olan bir Lorentziyen küre üzerinde bulunduğunu gösterir.

**Teorem 3.8.**  $E_1^3$  Minkowski uzayında birim hızlı olmayan, regüler  $\alpha$  timelike eğrisini göz önüne alalım.  $\kappa(t) \neq 0$  ve  $\tau(t) \neq 0$  olmak üzere,  $\alpha$  eğrisinin bir Lorentziyen küresi üzerinde olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{P}{Q} + (P'Q)' = 0$$

olmasıdır.

**İspat :**  $\kappa(t) \neq 0$  ve  $\tau(t) \neq 0$  olmak üzere, birim hızlı olmayan, regüler  $\alpha$  timelike eğrisini göz önüne alalım. Teorem 3.6 dan

$$P^2 + (P'Q)^2 = r^2$$

yazılabilir. Burada  $r$ , kürenin yarıçapıdır. Bu eşitliğin  $t$ 'ye göre türevi alınır

$$2PP' + 2(P'Q)(P'Q)' = 0$$

olur ve böylece

$$\frac{P}{Q} + (P'Q)' = 0$$

elde edilir. Tersine,  $\frac{P}{Q} + (P'Q)' = 0$  olduğunu kabul edelim. Eşitliğin her iki tarafı

$2(P'Q)$  ile çarpılırsa,

$$2PP' + 2(P'Q)(P'Q)' = 0$$

elde edilir. Bu ise,

$$P^2 + (P'Q)^2 = r^2 = sbt$$

ifadesinin türevidir. O halde, Teorem 3.7 den  $\alpha$  timelike eğrisinin Lorentziyen küresel bir eğri olduğu söylenebilir.

**Teorem 3.9.**  $E_1^3$  Minkowski uzayında birim hızlı olmayan, regüler  $\alpha$  timelike eğrisini göz önüne alalım.  $\kappa(t) \neq 0$  ve  $\tau(t) \neq 0$  olmak üzere  $\alpha$  eğrisinin Lorentziyen küresi üzerinde olması için gerek ve yeter şart

$$f = P'Q \text{ ve } f' = -\frac{P}{Q}$$

eşitliklerini sağlayan türevlenebilir bir  $f(t)$  fonksiyonunun var olmasıdır.

**İspat :**  $E_1^3$  Minkowski uzayında birim hızlı olmayan, regüler  $\alpha$  timelike eğrisini göz önüne alalım.  $\kappa(t) \neq 0$  ve  $\tau(t) \neq 0$  olsun. Teorem 3.8 den  $\frac{P}{Q} + (P'Q)' = 0$  eşitliğine sahibiz. Burada,  $f(t) = P'Q$  olacak şekilde türevlenebilir bir  $f$  fonksiyonu tanımlanabilir. O halde,  $f' = -\frac{P}{Q}$  olur.

Tersine,  $f = P'Q$  ve  $f' = -\frac{P}{Q}$  olsun. Bu durumda,  $(P'Q)' = -\frac{P}{Q}$  yani

$\frac{P}{Q} + (P'Q)' = 0$  yazılabilir. Sonuç olarak, Teorem 3.8 den  $\alpha$  eğrisinin Lorentziyen

küresel bir eğri olduğu söylenebilir.

Şimdi,  $\alpha$  timelike eğrisinin  $\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}$  Frenet vektör alanlarını;  $\alpha', \alpha'', \alpha''', \kappa, \tau$  ve  $v$  cinsinden ifade edelim.  $\|\alpha'(t)\| = v(t)$  olmak üzere

$$\bar{\alpha}' = v\bar{T} \quad (3.31)$$

olur. (3.31) ifadesinin ard arda  $t$  ye göre iki defa türevi alınır ve birim hızlı olmayan timelike eğriler için (1.6) Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\bar{\alpha}'' = v'\bar{T} + v^2\kappa\bar{N} \quad (3.32)$$

$$\bar{\alpha}''' = (v'' + v^3\kappa^2)\bar{T} + (3vv'\kappa + v^2\kappa')\bar{N} + v^3\kappa\tau\bar{B} \quad (3.33)$$

elde edilir. (3.31), (3.32) ve (3.33) den

$$\bar{N} = \frac{1}{v^2\kappa}\bar{\alpha}'' - \frac{v'}{v^3\kappa}\bar{\alpha}' \quad (3.34)$$

ve

$$\bar{B} = \frac{1}{v^3\kappa\tau} \left[ \bar{\alpha}''' - \left( \frac{3v'}{v} + \frac{\kappa'}{\kappa} \right) \bar{\alpha}'' + \left( \frac{3(v')^2}{v^2} + \frac{v'\kappa'}{v\kappa} - v^2\kappa^2 - \frac{v''}{v} \right) \bar{\alpha}' \right] \quad (3.35)$$

olarak bulunur. (3.19) eşitliğinde (3.25), (3.26), (3.27), (3.31), (3.34) ve (3.35) eşitlikleri yerlerine yazılırsa,  $E_1^3$  Minkowski uzayında Lorentziyen küresel timelike eğrilerini karakterize eden ve eğrinin konum vektörü ve türevlerine bağlı

$$p_3(t)\bar{\alpha}'''(t) + p_2(t)\bar{\alpha}''(t) + p_1(t)\bar{\alpha}'(t) + p_0(t)\bar{\alpha}(t) = p_0(t)\bar{m} \quad (3.36)$$

3. mertebeden değişken katsayılı lineer diferensiyel denklemi elde edilir. Burada

$$p_3(s) = -v^2\kappa\kappa'$$

$$p_2(s) = v^4\kappa^2\tau^2 + 3vv'\kappa\kappa' + v^2(\kappa')^2$$

$$p_1(s) = -v^3v'\kappa^2\tau^2 + vv''\kappa\kappa' + v^4\kappa^3\kappa' - 3(v')^2\kappa\kappa' - vv'(\kappa')^2$$

$$p_0(s) = -v^6\kappa^4\tau^2$$

olarak tanımlıdır. Buna göre aşağıdaki teoremi verebiliriz.

**Teorem 3.10.**  $E_1^3$  Minkowski uzayında  $\alpha: I \rightarrow E_1^3$  eğrisi, yarıçapı  $r$  ve merkezi  $m$  olan bir Lorentziyen küre üzerinde bulunan, birim hızlı olmayan regüler bir timelike

eğri olsun.  $\alpha(t)$  Lorentziyen küresel eğrisini karakterize eden diferensiyel denklem (3.36) daki gibidir.

### 3.2.1.2. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Aslinormali Timelike Olan Lorentziyen Küresel Spacelike Eğriler

Bu bölümde, 3-boyutlu Minkowski uzayında Frenet çatıya göre birim hızlı olmayan aslinormali timelike olan Lorentziyen küresel spacelike eğriler ve bunların bazı karakterizasyonları verilecektir. Petrovic-Torgasev ve Sucurovic [28]'de,  $E_1^3$  Minkowski uzayında birim hızlı, aslinormali timelike olan Lorentziyen küresel spacelike eğrileri incelemiştir. Buna göre, aslinormali timelike olan spacelike bir eğrinin Lorentziyen küre üzerinde bulunma şartı  $\kappa(s) \neq 0$  ve  $\tau(s) \neq 0$  olmak üzere

$$\frac{\tau}{\kappa} - \left( \frac{1}{\tau} \left( \frac{1}{\kappa} \right)' \right)' = 0 \text{ ve } \left( \frac{1}{\kappa} \right)^2 < \left( \frac{1}{\tau} \left( \frac{1}{\kappa} \right)' \right)^2$$

eşitliği ile verilmiştir. Burada  $\kappa(s)$  ve  $\tau(s)$ , sırasıyla eğrinin eğrilik ve burulmasıdır. Şimdi  $E_1^3$  Minkowski uzayında birim hızlı olmayan, aslinormali timelike olan Lorentziyen küresel spacelike eğrileri ve bunların bazı karakterizasyonlarını verelim.

**Teorem 3.11.**  $E_1^3$  Minkowski uzayında yarıçapı  $r$  ve merkezi  $m$  olan bir Lorentziyen küre üzerinde bulunan, birim hızlı olmayan, regüler, aslinormali timelike olan  $\alpha$  spacelike eğrisini göz önüne alalım.  $\kappa(t) \neq 0$ ,  $\tau(t) \neq 0$  ve  $\|\alpha'(t)\| = v(t)$  olmak üzere,

$$\bar{\alpha}(t) - \bar{m} = P\bar{N}(t) - P'Q\bar{B}(t)$$

eşitliği sağlanır. Burada,  $P = \frac{1}{\kappa}$  ve  $Q = \frac{1}{v\tau}$  olarak tanımlıdır.

**İspat :**  $\alpha : I \rightarrow E_1^3$  aslinormali timelike olan spacelike eğrisi, yarıçapı  $r$  ve merkezi  $m$  olan bir Lorentziyen küre üzerinde bulunan regüler bir eğri olsun.  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(t)$  noktasındaki konum vektörü

$$\bar{\alpha}(t) = \bar{m} + \lambda_1(t)\bar{T}(t) + \lambda_2(t)\bar{N}(t) + \lambda_3(t)\bar{B}(t) \quad (3.37)$$

şeklinde ifade edilebilir.  $\alpha$  Lorentziyen küresel bir eğri olduğundan

$$\langle \bar{\alpha} - \bar{m}, \bar{\alpha} - \bar{m} \rangle = r^2 \quad (3.38)$$

yazılabilir. (3.38) eşitliğinin  $t$  değişkenine göre türevi alınırsa,

$$\langle \vec{\alpha}', \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle = 0$$

ya da

$$v \langle \vec{T}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle = 0$$

elde edilir.  $\alpha$  eğrisi regüler olduğundan  $v \neq 0$  olup

$$\langle \vec{T}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle = 0 \quad (3.39)$$

bulunur. (3.39) eşitliğinin  $t$  değişkenine göre türevi alınır ve birim hızlı olmayan aslinormali timelike olan spacelike eğriler için (1.7) Frenet formülleri kullanılırsa

$$v\kappa \langle \vec{N}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle + v \langle \vec{T}, \vec{T} \rangle = 0$$

olur. Buradan da

$$\langle \vec{N}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle = -\frac{1}{\kappa} = -P \quad (3.40)$$

elde edilir. Son olarak, (3.40) eşitliğinin  $t$  değişkenine göre türevi alınır

$$v\kappa \langle \vec{T}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle + v\tau \langle \vec{B}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle + v \langle \vec{N}, \vec{T} \rangle = -\left(\frac{1}{\kappa}\right)'$$

buradan da

$$\langle \vec{B}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle = -\frac{1}{v\tau} \left(\frac{1}{\kappa}\right)' = -P'Q \quad (3.41)$$

elde edilir. (3.37) eşitliğini

$$\vec{\alpha}(t) - \vec{m} = \lambda_1(t)\vec{T}(t) + \lambda_2(t)\vec{N}(t) + \lambda_3(t)\vec{B}(t) \quad (3.42)$$

şeklinde yazıp, (3.42) eşitliğinin her iki tarafının sırasıyla  $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$  ile iç çarpımı alınır,

$$\langle \vec{T}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle = \lambda_1 = 0 \quad (3.43)$$

$$\langle \vec{N}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle = -\lambda_2 = -\frac{1}{\kappa} = -P \Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{\kappa} = P \quad (3.44)$$

ve

$$\langle \vec{B}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle = \lambda_3 = -\frac{1}{v\tau} \left(\frac{1}{\kappa}\right)' = -P'Q \quad (3.45)$$

elde edilir. (3.43), (3.44) ve (3.45), (3.37) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$\vec{\alpha} - \vec{m} = P\vec{N} - P'Q\vec{B}$$

bulunur.

**Teorem 3.12.**  $E_1^3$  Minkowski uzayında birim hızlı olmayan, regüler aslinormali timelike olan  $\alpha$  spacelike eğrisini göz önüne alalım.  $\kappa(t) \neq 0$  ve  $\tau(t) \neq 0$  olmak üzere,  $-P^2 + (P'Q)^2 = r^2 = sbt$  ( $r > 0$ ) ise  $\alpha$  eğrisi, yarıçapı  $r$  olan bir Lorentziyen küre üzerindedir.

**İspat :** Öncelikle aşağıda verilen

$$\bar{m} = \bar{\alpha}(t) - P\bar{N}(t) + P'Q\bar{B}(t) \quad (3.46)$$

eşitliğini göz önüne alalım. Bu eşitliğin her iki tarafın  $t$  değişkenine göre türevi alınırsa

$$\bar{m}' = \left( -\frac{P}{Q} + P''Q + P'Q' \right) \bar{B} \quad (3.47)$$

bulunur.  $-P^2 + (P'Q)^2 = r^2 = sbt$  olduğunu kabul edelim. Buna göre, her iki tarafın  $t$ 'ye göre türevi alınırsa

$$-PP' + P'Q(P''Q + P'Q') = 0$$

ve böylece

$$-\frac{P}{Q} + P''Q + P'Q' = 0 \quad (3.48)$$

elde edilir. O zaman (3.47) ve (3.48) den

$$\bar{m}' = 0$$

ve buradan da

$$\bar{m} = sbt$$

bulunur. Ayrıca, (3.46) eşitliğini

$$\bar{\alpha} - \bar{m} = P\bar{N} - P'Q\bar{B}$$

şeklinde yazalım. Buradan

$$\langle \bar{\alpha} - \bar{m}, \bar{\alpha} - \bar{m} \rangle = -P^2 + (P'Q)^2 = r^2 = sbt$$

olur. O halde,

$$\bar{\alpha} - \bar{m} = P\bar{N} - P'Q\bar{B}$$

eşitliği, aslinormali timelike olan  $\alpha$  spacelike eğrisinin yarıçapı  $r$  ve merkezi  $m$  olan bir Lorentziyen küre üzerinde bulunduğunu gösterir.

**Teorem 3.13.**  $E_1^3$  Minkowski uzayında birim hızlı olmayan, regüler aslinormali timelike olan  $\alpha$  spacelike eğrisini göz önüne alalım.  $\kappa(t) \neq 0$  ve  $\tau(t) \neq 0$  olmak üzere,  $\alpha$  eğrisinin bir Lorentziyen küresi üzerinde bulunması için gerek ve yeter şart

$$-\frac{P}{Q} + (P'Q)' = 0 \text{ ve } (P'Q)^2 > P^2$$

olmasıdır.

**İspat :**  $\tau(t) \neq 0$  olmak üzere, birim hızlı olmayan, regüler aslinormali timelike olan  $\alpha$  spacelike eğrisini göz önüne alalım. Teorem 3.11 den

$$-P^2 + (P'Q)^2 = r^2$$

yazılabilir. Burada  $r$ , kürenin yarıçapıdır. Bu eşitliğin  $t$ 'ye göre türevi alınır

$$-2PP' + 2(P'Q)(P'Q)' = 0$$

olur ve böylece

$$-\frac{P}{Q} + (P'Q)' = 0$$

elde edilir. Tersine,  $-\frac{P}{Q} + (P'Q)' = 0$  olduğunu kabul edelim. Eşitliğin her iki tarafı  $2(P'Q)$  ile çarpılırsa,

$$-2PP' + 2(P'Q)(P'Q)' = 0$$

elde edilir. Bu ise,

$$-P^2 + (P'Q)^2 = r^2 = sbt$$

ifadesinin türevidir. O halde, Teorem 3.12 den aslinormali timelike olan  $\alpha$  spacelike eğrisinin Lorentziyen küresi üzerinde olduğu söylenir.

**Teorem 3.14.**  $E_1^3$  Minkowski uzayında birim hızlı olmayan, regüler aslinormali timelike olan  $\alpha$  spacelike eğrisini göz önüne alalım.  $\kappa(t) \neq 0$  ve  $\tau(t) \neq 0$  olmak üzere  $\alpha$  eğrisinin Lorentziyen küresi üzerinde olması için gerek ve yeter şart

$$f = P'Q \text{ ve } f' = \frac{P}{Q}$$

eşitliklerini sağlayan türevlenebilir bir  $f(t)$  fonksiyonunun var olmasıdır.

**İspat :**  $E_1^3$  Minkowski uzayında birim hızlı olmayan, regüler aslinormali timelike olan  $\alpha$  spacelike eğrisini göz önüne alalım.  $\kappa(t) \neq 0$  ve  $\tau(t) \neq 0$  olsun. Teorem 3.13

den  $-\frac{P}{Q} + (P'Q)' = 0$  eşitliğine sahibiz. Burada,  $f(t) = P'Q$  olacak şekilde türevlenebilir bir  $f$  fonksiyonu tanımlanabilir. O halde,  $f' = \frac{P}{Q}$  olur.

Tersine,  $f = P'Q$  ve  $f' = \frac{P}{Q}$  olsun. Bu durumda,  $(P'Q)' = \frac{P}{Q}$  yani  $-\frac{P}{Q} + (P'Q)' = 0$  yazılabilir. Sonuç olarak, Teorem 3.13 den  $\alpha$  eğrisinin Lorentziyen küresel bir eğri olduğu söylenebilir.

Şimdi, aslinormali timelike olan  $\alpha$  spacelike eğrisinin  $\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}$  Frenet vektör alanlarını;  $\alpha', \alpha'', \alpha''', \kappa, \tau$  ve  $v$  cinsinden ifade edelim.  $\|\alpha'(t)\| = v(t)$  olmak üzere

$$\bar{\alpha}' = v\bar{T} \quad (3.49)$$

olur. (3.49) ifadesinin ard arda  $t$  ye göre iki defa türevi alınır ve birim hızlı olmayan eğriler için (1.7) Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\bar{\alpha}'' = v'\bar{T} + v^2\kappa\bar{N} \quad (3.50)$$

$$\bar{\alpha}''' = (v'' + v^3\kappa^2)\bar{T} + (3vv'\kappa + v^2\kappa')\bar{N} + v^3\kappa\tau\bar{B} \quad (3.51)$$

elde edilir. (3.49), (3.50) ve (3.51) den

$$\bar{N} = \frac{1}{v^2\kappa}\bar{\alpha}'' - \frac{v'}{v^3\kappa}\bar{\alpha}' \quad (3.52)$$

ve

$$\bar{B} = \frac{1}{v^3\kappa\tau} \left[ \bar{\alpha}''' - \left( \frac{3v'}{v} + \frac{\kappa'}{\kappa} \right) \bar{\alpha}'' + \left( \frac{3(v')^2}{v^2} + \frac{v'\kappa'}{v\kappa} - v^2\kappa^2 - \frac{v''}{v} \right) \bar{\alpha}' \right] \quad (3.53)$$

olarak bulunur. (3.37) eşitliğinde (3.43), (3.44), (3.45), (3.49), (3.52) ve (3.53) eşitlikleri yerlerine yazılırsa,  $E_1^3$  Minkowski uzayında aslinormali timelike olan Lorentziyen küresel spacelike eğrilerini karakterize eden ve eğrinin konum vektörü ve türevlerine bağlı

$$p_3(t)\bar{\alpha}'''(t) + p_2(t)\bar{\alpha}''(t) + p_1(t)\bar{\alpha}'(t) + p_0(t)\bar{\alpha}(t) = p_0(t)\bar{m} \quad (3.54)$$

3. mertebeden değişken katsayılı lineer diferensiyel denklemi elde edilir. Burada

$$p_3(s) = v^2\kappa\kappa'$$

$$p_2(s) = v^4\kappa^2\tau^2 - 3vv'\kappa\kappa' - v^2(\kappa')^2$$

$$p_1(s) = -v^3v'\kappa^2\tau^2 - vv''\kappa\kappa' - v^4\kappa^3\kappa' + 3(v')^2\kappa\kappa' + vv'(\kappa')^2$$

$$p_0(s) = -v^6\kappa^4\tau^2$$

olarak tanımlıdır. Buna göre aşağıdaki teoremi verebiliriz.

**Teorem 3.15.**  $E_1^3$  Minkowski uzayında  $\alpha : I \rightarrow E_1^3$  aslinormali timelike olan spacelike eğrisi, yarıçapı  $r$  ve merkezi  $m$  olan bir Lorentziyen küre üzerinde bulunan, birim hızlı olmayan regüler bir eğri olsun.  $\alpha(t)$  Lorentziyen küresel eğrisini karakterize eden diferensiyel denklem (3.54)'teki gibidir.

### 3.2.1.3. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Binormali Timelike Olan Lorentziyen Küresel Spacelike Eğriler

Bu bölümde, 3-boyutlu Minkowski uzayında Frenet çatıya göre birim hızlı olmayan binormali timelike olan Lorentziyen küresel spacelike eğriler ve bunların bazı karakterizasyonları verilecektir. Pekmen ve Paşalı [27]'de,  $E_1^3$  Minkowski uzayında birim hızlı, binormali timelike olan Lorentziyen küresel spacelike eğrileri incelemiş ve bu eğrilerin bazı karakterizasyonlarını vermişlerdir. Buna göre, binormali timelike olan spacelike bir eğrinin Lorentziyen küre üzerinde bulunma şartı  $\kappa(s) \neq 0$  ve  $\tau(s) \neq 0$  olmak üzere

$$\frac{\tau}{\kappa} - \left( \frac{1}{\tau} \left( \frac{1}{\kappa} \right)' \right)' = 0 \text{ ve } \left( \frac{1}{\kappa} \right)^2 > \left( \frac{1}{\tau} \left( \frac{1}{\kappa} \right)' \right)^2$$

eşitliği ile verilmiştir. Burada  $\kappa(s)$  ve  $\tau(s)$ , sırasıyla eğrinin eğrilik ve burulmasıdır. Şimdi  $E_1^3$  Minkowski uzayında, birim hızlı olmayan binormali timelike olan Lorentziyen küresel spacelike eğriler ve bunların bazı karakterizasyonlarını verelim.

**Teorem 3.16.**  $E_1^3$  Minkowski uzayında yarıçapı  $r$  ve merkezi  $m$  olan bir Lorentziyen küre üzerinde bulunan, birim hızlı olmayan, regüler binormali timelike olan  $\alpha$  spacelike eğrisini göz önüne alalım.  $\kappa(t) \neq 0$  ve  $\tau(t) \neq 0$  ve  $\|\alpha'(t)\| = v(t)$  olmak üzere,

$$\bar{\alpha}(t) - \bar{m} = -P\bar{N}(t) + P'Q\bar{B}(t)$$

eşitliği sağlanır. Burada,  $P = \frac{1}{\kappa}$  ve  $Q = \frac{1}{v\tau}$  olarak tanımlıdır.

**İspat :**  $\alpha : I \rightarrow E_1^3$  eğrisi, yarıçapı  $r$  ve merkezi  $m$  olan bir Lorentziyen küre üzerinde bulunan regüler binormali timelike olan spacelike bir eğri olsun.  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(t)$  noktasındaki konum vektörü

$$\bar{\alpha}(t) = \bar{m} + \lambda_1(t)\bar{T}(t) + \lambda_2(t)\bar{N}(t) + \lambda_3(t)\bar{B}(t) \quad (3.55)$$

şeklinde ifade edilebilir.  $\alpha$  Lorentziyen küresel bir eğri olduğundan

$$\langle \vec{\alpha} - \vec{m}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle = r^2 \quad (3.56)$$

yazılabilir. (3.56) eşitliğinin  $t$  değişkenine göre türevi alınır,

$$\langle \vec{\alpha}', \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle = 0$$

ya da

$$v \langle \vec{T}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle = 0$$

elde edilir.  $\alpha$  eğrisi regüler olduğundan  $v \neq 0$  olup

$$\langle \vec{T}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle = 0 \quad (3.57)$$

bulunur. (3.57) eşitliğinin  $t$  değişkenine göre türevi alınır ve birim hızlı olmayan binormali timelike olan spacelike eğriler için (1.7) Frenet formülleri kullanılırsa

$$v\kappa \langle \vec{N}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle + v \langle \vec{T}, \vec{T} \rangle = 0$$

olur. Buradan da

$$\langle \vec{N}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle = -\frac{1}{\kappa} = -P \quad (3.58)$$

elde edilir. Son olarak, (3.58) eşitliğinin  $t$  değişkenine göre türevi alınır

$$-v\kappa \langle \vec{T}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle + v\tau \langle \vec{B}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle + v \langle \vec{N}, \vec{T} \rangle = -\left(\frac{1}{\kappa}\right)'$$

buradan da

$$\langle \vec{B}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle = -\frac{1}{v\tau} \left(\frac{1}{\kappa}\right)' = -P'Q \quad (3.59)$$

elde edilir. (3.55) eşitliğini

$$\vec{\alpha}(t) - \vec{m} = \lambda_1(t)\vec{T}(t) + \lambda_2(t)\vec{N}(t) + \lambda_3(t)\vec{B}(t) \quad (3.60)$$

şeklinde yazıp, (3.60) eşitliğinin her iki tarafının sırasıyla  $\vec{T}$ ,  $\vec{N}$ ,  $\vec{B}$  ile iç çarpımı alınır,

$$\langle \vec{T}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle = \lambda_1 = 0 \quad (3.61)$$

$$\langle \vec{N}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle = \lambda_2 = -\frac{1}{\kappa} = -P \quad (3.62)$$

ve

$$\langle \vec{B}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle = -\lambda_3 = -\frac{1}{v\tau} \left(\frac{1}{\kappa}\right)' = -P'Q \Rightarrow \lambda_3 = \frac{1}{v\tau} \left(\frac{1}{\kappa}\right)' = P'Q \quad (3.63)$$

elde edilir. (3.61), (3.62) ve (3.63), (3.55) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$\vec{\alpha} - \vec{m} = -P\vec{N} + P'Q\vec{B}$$

bulunur.

**Teorem 3.17.**  $E_1^3$  Minkowski uzayında birim hızlı olmayan, regüler binormali timelike olan  $\alpha$  spacelike eğrisini göz önüne alalım.  $\kappa(t) \neq 0$  ve  $\tau(t) \neq 0$  olmak üzere,  $P^2 - (P'Q)^2 = r^2 = sbt$  ( $r > 0$ ) ise  $\alpha$  eğrisi, yarıçapı  $r$  olan bir Lorentziyen küre üzerindedir.

**İspat :** Öncelikle aşağıda verilen

$$\bar{m} = \bar{\alpha}(t) + P\bar{N}(t) - P'Q\bar{B}(t) \quad (3.64)$$

eşitliğini göz önüne alalım. Bu eşitliğin her iki tarafın  $t$  değişkenine göre türevi alınırsa

$$\bar{m}' = \left( \frac{P}{Q} - P''Q - P'Q' \right) \bar{B} \quad (3.65)$$

bulunur.  $P^2 - (P'Q)^2 = r^2 = sbt$  olduğunu kabul edelim. Buna göre, her iki tarafın  $t$ 'ye göre türevi alınırsa

$$PP' - P'Q(P''Q + P'Q') = 0$$

ve böylece

$$\frac{P}{Q} - P''Q - P'Q' = 0 \quad (3.66)$$

elde edilir. O zaman (3.65) ve (3.66) dan

$$\bar{m}' = 0$$

ve buradan da

$$\bar{m} = sbt$$

bulunur. Ayrıca, (3.64) eşitliğini

$$\bar{\alpha} - \bar{m} = -P\bar{N} + P'Q\bar{B}$$

şeklinde yazalım. Buradan

$$\langle \bar{\alpha} - \bar{m}, \bar{\alpha} - \bar{m} \rangle = P^2 - (P'Q)^2 = r^2 = sbt$$

olur. O halde,

$$\bar{\alpha} - \bar{m} = -P\bar{N} + P'Q\bar{B}$$

eşitliği, binormali timelike olan  $\alpha$  spacelike eğrisinin yarıçapı  $r$  ve merkezi  $m$  olan bir Lorentziyen küre üzerinde bulunduğunu gösterir.

**Teorem 3.18.**  $E_1^3$  Minkowski uzayında birim hızlı olmayan, regüler binormali timelike olan  $\alpha$  spacelike eğrisini göz önüne alalım.  $\kappa(t) \neq 0$  ve  $\tau(t) \neq 0$  olmak üzere,  $\alpha$  eğrisinin bir Lorentziyen küresi üzerinde bulunması için gerek ve yeter şart

$$\frac{P}{Q} - (P'Q)' = 0 \text{ ve } (P'Q)^2 < P^2$$

olmasıdır.

**İspat :**  $\kappa(t) \neq 0$  ve  $\tau(t) \neq 0$  olmak üzere, birim hızlı olmayan, regüler binormali timelike olan  $\alpha$  spacelike eğrisini göz önüne alalım. Teorem 3.16 dan

$$P^2 - (P'Q)^2 = r^2$$

yazılabilir. Burada  $r$ , kürenin yarıçapıdır. Bu eşitliğin  $t$ 'ye göre türevi alınır

$$2PP' - 2(P'Q)(P'Q)' = 0$$

olur ve böylece

$$\frac{P}{Q} - (P'Q)' = 0$$

elde edilir. Tersine,  $\frac{P}{Q} - (P'Q)' = 0$  olduğunu kabul edelim. Eşitliğin her iki tarafı  $2(P'Q)$  ile çarpılırsa,

$$2PP' - 2(P'Q)(P'Q)' = 0$$

elde edilir. Bu ise,

$$P^2 - (P'Q)^2 = r^2 = sbt$$

ifadesinin türevidir. O halde, Teorem 3.17 den binormali timelike olan  $\alpha$  spacelike eğrisinin Lorentziyen küresi üzerinde olduğu söylenir.

**Teorem 3.19.**  $E_1^3$  Minkowski uzayında birim hızlı olmayan, regüler binormali timelike olan  $\alpha$  spacelike eğrisini göz önüne alalım.  $\kappa(t) \neq 0$  ve  $\tau(t) \neq 0$  olmak üzere  $\alpha$  eğrisinin Lorentziyen küresi üzerinde olması için gerek ve yeter şart

$$f = P'Q \text{ ve } f' = \frac{P}{Q}$$

eşitliklerini sağlayan türevlenebilir bir  $f(t)$  fonksiyonunun var olmasıdır.

**İspat :**  $E_1^3$  Minkowski uzayında birim hızlı olmayan, regüler aslinormali timelike olan  $\alpha$  spacelike eğrisini göz önüne alalım.  $\kappa(t) \neq 0$  ve  $\tau(t) \neq 0$  olsun. Teorem 3.18

den  $\frac{P}{Q} - (P'Q)' = 0$  eşitliğine sahibiz. Burada,  $f(t) = P'Q$  olacak şekilde türevlenebilir bir  $f$  fonksiyonu tanımlanabilir. O halde,  $f' = \frac{P}{Q}$  olur.

Tersine,  $f = P'Q$  ve  $f' = \frac{P}{Q}$  olsun. Bu durumda,  $(P'Q)' = \frac{P}{Q}$  yani  $\frac{P}{Q} - (P'Q)' = 0$  yazılabilir. Sonuç olarak, Teorem 3.18 den  $\alpha$  eğrisinin Lorentziyen küresel bir eğri olduğu söylenebilir.

Şimdi,  $\alpha$  spacelike eğrisinin  $\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}$  Frenet vektör alanlarını;  $\alpha', \alpha'', \alpha''', \kappa, \tau$  ve  $v$  cinsinden ifade edelim.  $\|\alpha'(t)\| = v(t)$  olmak üzere

$$\bar{\alpha}' = v\bar{T} \quad (3.67)$$

olur. (3.57) ifadesinin ard arda  $t$  ye göre iki defa türevi alınır ve birim hızlı olmayan eğriler için (1.7) Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\bar{\alpha}'' = v'\bar{T} + v^2\kappa\bar{N} \quad (3.68)$$

$$\bar{\alpha}''' = (v'' - v^3\kappa^2)\bar{T} + (3vv'\kappa + v^2\kappa')\bar{N} + v^3\kappa\tau\bar{B} \quad (3.69)$$

elde edilir. (3.67), (3.68) ve (3.69) dan

$$\bar{N} = \frac{1}{v^2\kappa}\bar{\alpha}'' - \frac{v'}{v^3\kappa}\bar{\alpha}' \quad (3.70)$$

ve

$$\bar{B} = \frac{1}{v^3\kappa\tau} \left[ \bar{\alpha}''' - \left( \frac{3v'}{v} + \frac{\kappa'}{\kappa} \right) \bar{\alpha}'' + \left( \frac{3(v')^2}{v^2} + \frac{v'\kappa'}{v\kappa} + v^2\kappa^2 - \frac{v''}{v} \right) \bar{\alpha}' \right] \quad (3.71)$$

olarak bulunur. (3.55) eşitliğinde (3.61), (3.62), (3.63), (3.67), (3.70) ve (3.71) eşitlikleri yerlerine yazılırsa,  $E_1^3$  Minkowski uzayında binormali timelike olan Lorentziyen küresel spacelike eğrileri karakterize eden ve eğrinin konum vektörü ve türevlerine bağlı

$$p_3(t)\bar{\alpha}'''(t) + p_2(t)\bar{\alpha}''(t) + p_1(t)\bar{\alpha}'(t) + p_0(t)\bar{\alpha}(t) = p_0(t)\bar{m} \quad (3.72)$$

3. mertebeden değişken katsayılı lineer diferensiyel denklemi elde edilir. Burada

$$p_3(s) = -v^2\kappa\kappa'$$

$$p_2(s) = -v^4\kappa^2\tau^2 + 3vv'\kappa\kappa' + v^2(\kappa')^2$$

$$p_1(s) = v^3v'\kappa^2\tau^2 + vv''\kappa\kappa' - v^4\kappa^3\kappa' - 3(v')^2\kappa\kappa' - vv'(\kappa')^2$$

$$p_0(s) = -v^6\kappa^4\tau^2$$

olarak tanımlıdır. Buna göre aşağıdaki teoremi verebiliriz.

**Teorem 3.20.**  $E_1^3$  Minkowski uzayında  $\alpha : I \rightarrow E_1^3$  binormali timelike olan spacelike eğrisi, yarıçapı  $r$  ve merkezi  $m$  olan bir Lorentziyen küre üzerinde bulunan, birim hızlı olmayan regüler bir eğri olsun.  $\alpha(t)$  Lorentziyen küresel eğrisini karakterize eden diferensiyel denklem (3.72) deki gibidir.

### 3.2.2. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Hiperbolik Küresel Eğriler

#### 3.2.2.1. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Aslinormali Timelike Olan Hiperbolik Küresel Spacelike Eğriler

Bu bölümde, 3-boyutlu Minkowski uzayında Frenet çatıya göre birim hızlı olmayan aslinormali timelike olan hiperbolik küresel spacelike eğriler ve bunların bazı karakterizasyonları verilecektir. Petrovic-Torgasev ve Sucurovic [29]'da,  $E_1^3$  Minkowski uzayında birim hızlı, aslinormali timelike olan hiperbolik küresel spacelike eğrileri incelemiştir. Buna göre, aslinormali timelike olan spacelike bir eğrinin hiperbolik küre üzerinde bulunma şartı  $\tau(s) \neq 0$  olmak üzere

$$\frac{\tau}{\kappa} - \left( \frac{1}{\tau} \left( \frac{1}{\kappa} \right)' \right)' = 0 \text{ ve } \left( \frac{1}{\kappa} \right)^2 > \left( \frac{1}{\tau} \left( \frac{1}{\kappa} \right)' \right)^2$$

eşitliği ile verilmiştir. Burada  $\kappa(s)$  ve  $\tau(s)$ , sırasıyla eğrinin eğrilik ve burulmasıdır. Şimdi  $E_1^3$  Minkowski uzayında, birim hızlı olmayan, aslinormali timelike olan hiperbolik küresel spacelike eğrileri ve bunların bazı karakterizasyonlarını verelim.

**Teorem 3.21.**  $E_1^3$  Minkowski uzayında yarıçapı  $r$  ve merkezi  $m$  olan bir hiperbolik küre üzerinde bulunan, birim hızlı olmayan, regüler aslinormali timelike olan  $\alpha$  spacelike eğrisini göz önüne alalım.  $\tau(t) \neq 0$  ve  $\|\alpha'(t)\| = v(t)$  olmak üzere,

$$\bar{\alpha}(t) - \bar{m} = P\bar{N}(t) - P'Q\bar{B}(t)$$

eşitliği sağlanır. Burada,  $P = \frac{1}{\kappa}$  ve  $Q = \frac{1}{v\tau}$  olarak tanımlıdır.

**İspat :**  $\alpha : I \rightarrow E_1^3$  aslinormali timelike olan spacelike eğrisi, yarıçapı  $r$  ve merkezi  $m$  olan bir hiperbolik küre üzerinde bulunan regüler bir eğri olsun.  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(t)$  noktasındaki konum vektörü

$$\vec{\alpha}(t) = \vec{m} + \lambda_1(t)\vec{T}(t) + \lambda_2(t)\vec{N}(t) + \lambda_3(t)\vec{B}(t) \quad (3.73)$$

şeklinde ifade edilebilir.  $\alpha$  hiperbolik küre üzerinde bulunduğundan

$$\langle \vec{\alpha} - \vec{m}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle = -r^2 \quad (3.74)$$

yazılabilir. (3.74) eşitliğinin  $t$  değişkenine göre türevi alınır,

$$\langle \vec{\alpha}', \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle = 0$$

ya da

$$v \langle \vec{T}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle = 0$$

elde edilir.  $\alpha$  eğrisi regüler olduğundan  $v \neq 0$  olup

$$\langle \vec{T}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle = 0 \quad (3.75)$$

bulunur. (3.75) eşitliğinin  $t$  değişkenine göre türevi alınır ve birim hızlı olmayan aslinormali timelike olan spacelike eğriler için (1.7) Frenet formülleri kullanılırsa

$$v\kappa \langle \vec{N}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle + v \langle \vec{T}, \vec{T} \rangle = 0$$

olur. Buradan da

$$\langle \vec{N}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle = -\frac{1}{\kappa} = -P \quad (3.76)$$

elde edilir. Son olarak, (3.76) eşitliğinin  $t$  değişkenine göre türevi alınır

$$v\kappa \langle \vec{T}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle + v\tau \langle \vec{B}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle + v \langle \vec{N}, \vec{T} \rangle = -\left(\frac{1}{\kappa}\right)'$$

buradan da

$$\langle \vec{B}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle = -\frac{1}{v\tau} \left(\frac{1}{\kappa}\right)' = -P'Q \quad (3.77)$$

elde edilir. (3.73) eşitliğini

$$\vec{\alpha}(t) - \vec{m} = \lambda_1(t)\vec{T}(t) + \lambda_2(t)\vec{N}(t) + \lambda_3(t)\vec{B}(t) \quad (3.78)$$

şeklinde yazıp, (3.78) eşitliğinin her iki tarafının sırasıyla  $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$  ile iç çarpımı alınır,

$$\langle \vec{T}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle = \lambda_1 = 0 \quad (3.79)$$

$$\langle \vec{N}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle = -\lambda_2 = -\frac{1}{\kappa} = -P \Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{\kappa} = P \quad (3.80)$$

ve

$$\langle \vec{B}, \vec{\alpha} - \vec{m} \rangle = \lambda_3 = -\frac{1}{v\tau} \left(\frac{1}{\kappa}\right)' = -P'Q \quad (3.81)$$

elde edilir. (3.79), (3.80) ve (3.81), (3.73) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$\bar{\alpha} - \bar{m} = P\bar{N} - P'Q\bar{B}$$

bulunur.

**Teorem 3.22.**  $E_1^3$  Minkowski uzayında birim hızlı olmayan, regüler aslinormali timelike olan  $\alpha$  spacelike eğrisini göz önüne alalım.  $\tau(t) \neq 0$  olmak üzere,  $-P^2 + (P'Q)^2 = -r^2 = sbt$  ( $r > 0$ ) ise  $\alpha$  eğrisi, yarıçapı  $r$  olan bir hiperbolik küre üzerindedir.

**İspat :** Öncelikle aşağıda verilen

$$\bar{m} = \bar{\alpha}(t) - P\bar{N}(t) + P'Q\bar{B}(t) \quad (3.82)$$

eşitliğini göz önüne alalım. Bu eşitliğin her iki tarafın  $t$  değişkenine göre türevi alınırsa

$$\bar{m}' = \left( -\frac{P}{Q} + P''Q + P'Q' \right) \bar{B} \quad (3.83)$$

bulunur.  $-P^2 + (P'Q)^2 = -r^2 = sbt$  olduğunu kabul edelim. Buna göre, her iki tarafın  $t$  'ye göre türevi alınırsa

$$-PP' + P'Q(P''Q + P'Q') = 0$$

ve böylece

$$-\frac{P}{Q} + P''Q + P'Q' = 0 \quad (3.84)$$

elde edilir. O zaman (3.83) ve (3.84) ten

$$\bar{m}' = 0$$

ve buradan da

$$\bar{m} = sbt$$

bulunur. Ayrıca, (3.82) eşitliğini

$$\bar{\alpha} - \bar{m} = P\bar{N} - P'Q\bar{B}$$

şeklinde yazalım. Buradan

$$\langle \bar{\alpha} - \bar{m}, \bar{\alpha} - \bar{m} \rangle = -P^2 + (P'Q)^2 = -r^2 = sbt$$

olur. O halde,

$$\bar{\alpha} - \bar{m} = P\bar{N} - P'Q\bar{B}$$

eşitliği, aslinormali timelike olan  $\alpha$  spacelike eğrisinin yarıçapı  $r$  ve merkezi  $m$  olan bir hiperbolik küre üzerinde bulunduğunu gösterir.

**Teorem 3.23.**  $E_1^3$  Minkowski uzayında birim hızlı olmayan, regüler aslinormali timelike olan  $\alpha$  spacelike eğrisini göz önüne alalım.  $\tau(t) \neq 0$  olmak üzere,  $\alpha$  eğrisinin bir hiperbolik küre üzerinde bulunması için gerek ve yeter şart

$$-\frac{P}{Q} + (P'Q)' = 0 \text{ ve } P^2 > (P'Q)^2$$

olmasıdır.

**İspat :**  $\tau(t) \neq 0$  olmak üzere, birim hızlı olmayan, regüler aslinormali timelike olan  $\alpha$  spacelike eğrisini göz önüne alalım. Teorem 3.21 den

$$-P^2 + (P'Q)^2 = -r^2$$

yazılabilir. Burada  $r$ , kürenin yarıçapıdır. Bu eşitliğin  $t$ 'ye göre türevi alınır

$$-2PP' + 2(P'Q)(P'Q)' = 0$$

olur ve böylece

$$-\frac{P}{Q} + (P'Q)' = 0$$

elde edilir. Tersine,  $-\frac{P}{Q} + (P'Q)' = 0$  olduğunu kabul edelim. Eşitliğin her iki tarafı  $2(P'Q)$  ile çarpılırsa,

$$-2PP' + 2(P'Q)(P'Q)' = 0$$

elde edilir. Bu ise,

$$-P^2 + (P'Q)^2 = -r^2 = sbt$$

ifadesinin türevidir. O halde, Teorem 3.22 den aslinormali timelike olan  $\alpha$  spacelike eğrisinin hiperbolik küresi üzerinde olduğu söylenir.

**Teorem 3.24.**  $E_1^3$  Minkowski uzayında birim hızlı olmayan, regüler aslinormali timelike olan  $\alpha$  spacelike eğrisini göz önüne alalım.  $\tau(t) \neq 0$  olmak üzere  $\alpha$  eğrisinin hiperbolik küresi üzerinde olması için gerek ve yeter şart

$$f = P'Q \text{ ve } f' = \frac{P}{Q}$$

eşitliklerini sağlayan türevlenebilir bir  $f(t)$  fonksiyonunun var olmasıdır.

**İspat :**  $E_1^3$  Minkowski uzayında birim hızlı olmayan, regüler aslinormali timelike olan  $\alpha$  spacelike eğrisini göz önüne alalım.  $\tau(t) \neq 0$  olsun. Teorem 3.23 den  $-\frac{P}{Q} + (P'Q)' = 0$  eşitliğine sahibiz. Burada,  $f(t) = P'Q$  olacak şekilde türevlenebilir bir  $f$  fonksiyonu tanımlanabilir. O halde,  $f' = \frac{P}{Q}$  olur.

Tersine,  $f = P'Q$  ve  $f' = \frac{P}{Q}$  olsun. Bu durumda,  $(P'Q)' = \frac{P}{Q}$  yani  $-\frac{P}{Q} + (P'Q)' = 0$  yazılabilir. Sonuç olarak, Teorem 3.23 den  $\alpha$  eğrisinin hiperbolik küresel bir eğri olduğu söylenebilir.

Şimdi,  $\alpha$  spacelike eğrisinin  $\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}$  Frenet vektör alanlarını;  $\alpha', \alpha'', \alpha''', \kappa, \tau$  ve  $v$  cinsinden ifade edelim.  $\|\alpha'(t)\| = v$  olmak üzere

$$\bar{\alpha}' = v\bar{T} \quad (3.85)$$

olur. (3.85) ifadesinin ard arda  $t$  ye göre iki defa türevi alınır ve birim hızlı olmayan eğriler için Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\bar{\alpha}'' = v'\bar{T} + v^2\kappa\bar{N} \quad (3.86)$$

$$\bar{\alpha}''' = (v'' + v^3\kappa^2)\bar{T} + (3vv'\kappa + v^2\kappa')\bar{N} + v^3\kappa\tau\bar{B} \quad (3.87)$$

elde edilir. (3.85), (3.86) ve (3.87) den

$$\bar{N} = \frac{1}{v^2\kappa}\bar{\alpha}'' - \frac{v'}{v^3\kappa}\bar{\alpha}' \quad (3.88)$$

ve

$$\bar{B} = \frac{1}{v^3\kappa\tau} \left[ \bar{\alpha}''' - \left( \frac{3v'}{v} + \frac{\kappa'}{\kappa} \right) \bar{\alpha}'' + \left( \frac{3(v')^2}{v^2} + \frac{v'\kappa'}{v\kappa} - v^2\kappa^2 - \frac{v''}{v} \right) \bar{\alpha}' \right] \quad (3.89)$$

olarak bulunur. (3.73) eşitliğinde (3.79), (3.80), (3.81), (3.85), (3.88) ve (3.89) eşitlikleri yerlerine yazılırsa,  $E_1^3$  Minkowski uzayında aslinormali timelike olan hiperbolik küresel spacelike eğrilerini karakterize eden ve eğrinin konum vektörü ve türevlerine bağlı

$$p_3(t)\bar{\alpha}'''(t) + p_2(t)\bar{\alpha}''(t) + p_1(t)\bar{\alpha}'(t) + p_0(t)\bar{\alpha}(t) = p_0(t)\bar{m} \quad (3.90)$$

3. mertebeden değişken katsayılı lineer diferensiyel denklemi elde edilir. Burada

$$p_3(s) = v^2\kappa\kappa'$$

$$p_2(s) = v^4\kappa^2\tau^2 - 3vv'\kappa\kappa' - v^2(\kappa')^2$$

$$p_1(s) = -v^3v'\kappa^2\tau^2 - vv''\kappa\kappa' - v^4\kappa^3\kappa' + 3(v')^2\kappa\kappa' + vv'(\kappa')^2$$

$$p_0(s) = -v^6 \kappa^4 \tau^2$$

olarak tanımlıdır. Buna göre aşağıdaki teoremi verebiliriz.

**Teorem 3.25.**  $E_1^3$  Minkowski uzayında  $\alpha : I \rightarrow E_1^3$  aslinormali timelike olan spacelike eğrisi, yarıçapı  $r$  ve merkezi  $m$  olan bir hiperbolik küre üzerinde bulunan, birim hızlı olmayan regüler bir eğri olsun.  $\alpha(t)$  hiperbolik küresel eğrisini karakterize eden diferensiyel denklem (3.90) daki gibidir.

### 3.2.2.2. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Binormali Timelike Olan Hiperbolik Küresel Spacelike Eğriler

Bu bölümde, 3-boyutlu Minkowski uzayında Frenet çatıya göre birim hızlı olmayan binormali timelike olan hiperbolik küresel spacelike eğriler ve bunların bazı karakterizasyonları verilecektir. Pekmen ve Paşalı [29]'da,  $E_1^3$  Minkowski uzayında birim hızlı, binormali timelike olan hiperbolik küresel spacelike eğrileri incelemiş ve bu eğrilerin bazı karakterizasyonlarını vermiştir. Buna göre, binormali timelike olan spacelike bir eğrinin hiperbolik küre üzerinde bulunma şartı  $\tau(s) \neq 0$  olmak üzere

$$\frac{\tau}{\kappa} - \left( \frac{1}{\tau} \left( \frac{1}{\kappa} \right)' \right)' = 0 \text{ ve } \left( \frac{1}{\tau} \left( \frac{1}{\kappa} \right)' \right)^2 > \left( \frac{1}{\kappa} \right)^2$$

eşitliği ile verilmiştir. Burada  $\kappa(s)$  ve  $\tau(s)$ , sırasıyla eğrinin eğrilik ve burulmasıdır. Şimdi  $E_1^3$  Minkowski uzayında, birim hızlı olmayan, binormali timelike olan hiperbolik küresel spacelike eğrileri ve bunların bazı karakterizasyonlarını verelim.

**Teorem 3.26.**  $E_1^3$  Minkowski uzayında yarıçapı  $r$  ve merkezi  $m$  olan bir hiperbolik küre üzerinde bulunan, birim hızlı olmayan, regüler binormali timelike olan  $\alpha$  spacelike eğrisini göz önüne alalım.  $\tau(t) \neq 0$  ve  $\|\alpha'(t)\| = v(t)$  olmak üzere,

$$\bar{\alpha}(t) - \bar{m} = -P\bar{N}(t) + P'Q\bar{B}(t)$$

eşitliği sağlanır. Burada,  $P = \frac{1}{\kappa}$  ve  $Q = \frac{1}{v\tau}$  olarak tanımlıdır.

**İspat :**  $\alpha : I \rightarrow E_1^3$  binormali timelike olan spacelike eğrisi, yarıçapı  $r$  ve merkezi  $m$  olan bir hiperbolik küre üzerinde bulunan regüler bir eğri olsun.  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(t)$  noktasındaki konum vektörü

$$\bar{\alpha}(t) = \bar{m} + \lambda_1(t)\bar{T}(t) + \lambda_2(t)\bar{N}(t) + \lambda_3(t)\bar{B}(t) \quad (3.91)$$

şeklinde ifade edilebilir.  $\alpha$  hiperbolik küresel bir eğri olduğundan

$$\langle \bar{\alpha} - \bar{m}, \bar{\alpha} - \bar{m} \rangle = -r^2 \quad (3.92)$$

yazılabilir. (3.92) eşitliğinin  $t$  değişkenine göre türevi alınır,

$$\langle \bar{\alpha}', \bar{\alpha} - \bar{m} \rangle = 0$$

ya da

$$v \langle \bar{T}, \bar{\alpha} - \bar{m} \rangle = 0$$

elde edilir.  $\alpha$  eğrisi regüler olduğundan  $v \neq 0$  olup

$$\langle \bar{T}, \bar{\alpha} - \bar{m} \rangle = 0 \quad (3.93)$$

bulunur. (3.93) eşitliğinin  $t$  değişkenine göre türevi alınır ve birim hızlı olmayan binormali timelike olan spacelike eğriler için (1.7) Frenet formülleri kullanılırsa

$$v\kappa \langle \bar{N}, \bar{\alpha} - \bar{m} \rangle + v \langle \bar{T}, \bar{T} \rangle = 0$$

olur. Buradan da

$$\langle \bar{N}, \bar{\alpha} - \bar{m} \rangle = -\frac{1}{\kappa} = -P \quad (3.94)$$

elde edilir. Son olarak, (3.94) eşitliğinin  $t$  değişkenine göre türevi alınır

$$-v\kappa \langle \bar{T}, \bar{\alpha} - \bar{m} \rangle + v\tau \langle \bar{B}, \bar{\alpha} - \bar{m} \rangle + v \langle \bar{N}, \bar{T} \rangle = -\left(\frac{1}{\kappa}\right)'$$

buradan da

$$\langle \bar{B}, \bar{\alpha} - \bar{m} \rangle = -\frac{1}{v\tau} \left(\frac{1}{\kappa}\right)' = -P'Q \quad (3.95)$$

elde edilir. (3.91) eşitliğini

$$\bar{\alpha}(t) - \bar{m} = \lambda_1(t)\bar{T}(t) + \lambda_2(t)\bar{N}(t) + \lambda_3(t)\bar{B}(t) \quad (3.96)$$

şeklinde yazıp, (3.96) eşitliğinin her iki tarafının sırasıyla  $\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}$  ile iç çarpımı alınır,

$$\langle \bar{T}, \bar{\alpha} - \bar{m} \rangle = \lambda_1 = 0 \quad (3.97)$$

$$\langle \bar{N}, \bar{\alpha} - \bar{m} \rangle = \lambda_2 = -\frac{1}{\kappa} = -P \quad (3.98)$$

ve

$$\langle \bar{B}, \bar{\alpha} - \bar{m} \rangle = -\lambda_3 = -\frac{1}{v\tau} \left( \frac{1}{\kappa} \right)' = -P'Q \Rightarrow \lambda_3 = \frac{1}{v\tau} \left( \frac{1}{\kappa} \right)' = P'Q \quad (3.99)$$

elde edilir. (3.97), (3.98) ve (3.99), (3.91) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$\bar{\alpha} - \bar{m} = -P\bar{N} + P'Q\bar{B}$$

bulunur.

**Teorem 3.27.**  $E_1^3$  Minkowski uzayında birim hızlı olmayan, regüler binormali timelike olan  $\alpha$  spacelike eğrisini göz önüne alalım.  $\tau(t) \neq 0$  olmak üzere,  $P^2 - (P'Q)^2 = -r^2 = sbt$  ( $r > 0$ ) ise  $\alpha$  eğrisi, yarıçapı  $r$  olan bir hiperbolik küre üzerindedir.

**İspat :** Öncelikle aşağıda verilen

$$\bar{m} = \bar{\alpha}(t) + P\bar{N}(t) - P'Q\bar{B}(t) \quad (3.100)$$

eşitliğini göz önüne alalım. Bu eşitliğin her iki tarafını  $t$  değişkenine göre türevi alınırsa

$$\bar{m}' = \left( \frac{P}{Q} - P''Q - P'Q' \right) \bar{B} \quad (3.101)$$

bulunur.  $P^2 - (P'Q)^2 = -r^2 = sbt$  olduğunu kabul edelim. Buna göre, her iki tarafın  $t$ 'ye göre türevi alınırsa

$$PP' - P'Q(P''Q + P'Q') = 0$$

ve böylece

$$\frac{P}{Q} - P''Q - P'Q' = 0 \quad (3.102)$$

elde edilir. O zaman (3.101) ve (3.102) den

$$\bar{m}' = 0$$

ve buradan da

$$\bar{m} = sbt$$

bulunur. Ayrıca, (3.100) eşitliğini

$$\bar{\alpha} - \bar{m} = -P\bar{N} + P'Q\bar{B}$$

şeklinde yazalım. Buradan

$$\langle \bar{\alpha} - \bar{m}, \bar{\alpha} - \bar{m} \rangle = P^2 - (P'Q)^2 = -r^2 = sbt$$

olur. O halde,

$$\vec{\alpha} - \vec{m} = -P\vec{N} + P'Q\vec{B}$$

eşitliği, binormali timelike olan  $\alpha$  spacelike eğrisinin yarıçapı  $r$  ve merkezi  $m$  olan bir hiperbolik küre üzerinde bulunduğunu gösterir.

**Teorem 3.28.**  $E_1^3$  Minkowski uzayında birim hızlı olmayan, regüler binormali timelike olan  $\alpha$  spacelike eğrisini göz önüne alalım.  $\tau(t) \neq 0$  olmak üzere,  $\alpha$  eğrisinin bir hiperbolik küre üzerinde bulunması için gerek ve yeter şart

$$\frac{P}{Q} - (P'Q)' = 0 \text{ ve } P^2 < (P'Q)^2$$

olmasıdır.

**İspat :**  $\tau(t) \neq 0$  olmak üzere, birim hızlı olmayan, regüler binormali timelike olan  $\alpha$  spacelike eğrisini göz önüne alalım. Teorem 3.26 dan

$$P^2 - (P'Q)^2 = -r^2$$

yazılabilir. Burada  $r$ , kürenin yarıçapıdır. Bu eşitliğin  $t$ 'ye göre türevi alınırsa

$$2PP' - 2(P'Q)(P'Q)' = 0$$

olur ve böylece

$$\frac{P}{Q} - (P'Q)' = 0$$

elde edilir. Tersine,  $\frac{P}{Q} - (P'Q)' = 0$  olduğunu kabul edelim. Eşitliğin her iki tarafı  $2(P'Q)$  ile çarpılırsa,

$$2PP' - 2(P'Q)(P'Q)' = 0$$

elde edilir. Bu ise,

$$P^2 - (P'Q)^2 = -r^2 = sbt$$

ifadesinin türevidir. O halde, Teorem 3.27 den binormali timelike olan  $\alpha$  spacelike eğrisinin hiperbolik küre üzerinde olduğu söylenebilir.

**Teorem 3.29.**  $E_1^3$  Minkowski uzayında birim hızlı olmayan, regüler binormali timelike olan  $\alpha$  spacelike eğrisini göz önüne alalım.  $\tau(t) \neq 0$  olmak üzere  $\alpha$  eğrisinin hiperbolik küre üzerinde olması için gerek ve yeter şart

$$f = P'Q \text{ ve } f' = \frac{P}{Q}$$

eşitliklerini sağlayan türevlenebilir bir  $f(t)$  fonksiyonunun var olmasıdır.

**İspat :**  $E_1^3$  Minkowski uzayında birim hızlı olmayan, regüler aslinormali timelike olan  $\alpha$  spacelike eğrisini göz önüne alalım.  $\tau(t) \neq 0$  olsun. Teorem 3.28 den  $\frac{P}{Q} - (P'Q)' = 0$  eşitliğine sahibiz. Burada,  $f(t) = P'Q$  olacak şekilde türevlenebilir bir  $f$  fonksiyonu tanımlanabilir. O halde,  $f' = \frac{P}{Q}$  olur.

Tersine,  $f = P'Q$  ve  $f' = \frac{P}{Q}$  olsun. Bu durumda,  $(P'Q)' = \frac{P}{Q}$  yani  $\frac{P}{Q} - (P'Q)' = 0$  yazılabilir. Sonuç olarak, Teorem 3.28 den  $\alpha$  eğrisinin hiperbolik küresel bir eğri olduğu söylenebilir.

Şimdi,  $\alpha$  spacelike eğrisinin  $\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}$  Frenet vektör alanlarını;  $\alpha', \alpha'', \alpha''', \kappa, \tau$  ve  $v$  cinsinden ifade edelim.  $\|\alpha'(t)\| = v$  olmak üzere

$$\bar{\alpha}' = v\bar{T} \quad (3.103)$$

olur. (3.103) ifadesinin ard arda  $t$  ye göre iki defa türevi alınır ve birim hızlı olmayan eğriler için (1.7) Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\bar{\alpha}'' = v'\bar{T} + v^2\kappa\bar{N} \quad (3.104)$$

$$\bar{\alpha}''' = (v'' - v^3\kappa^2)\bar{T} + (3vv'\kappa + v^2\kappa')\bar{N} + v^3\kappa\tau\bar{B} \quad (3.105)$$

elde edilir. (3.103), (3.104) ve (3.105) den

$$\bar{N} = \frac{1}{v^2\kappa}\bar{\alpha}'' - \frac{v'}{v^3\kappa}\bar{\alpha}' \quad (3.106)$$

ve

$$\bar{B} = \frac{1}{v^3\kappa\tau} \left[ \bar{\alpha}''' - \left( \frac{3v'}{v} + \frac{\kappa'}{\kappa} \right) \bar{\alpha}'' + \left( \frac{3(v')^2}{v^2} + \frac{v'\kappa'}{v\kappa} + v^2\kappa^2 - \frac{v''}{v} \right) \bar{\alpha}' \right] \quad (3.107)$$

olarak bulunur. (3.91) eşitliğinde (3.97), (3.98), (3.99), (3.103), (3.106) ve (3.107) eşitlikleri yerlerine yazılırsa,  $E_1^3$  Minkowski uzayında binormali timelike olan hiperbolik küresel spacelike eğrilerini karakterize eden ve eğrinin konum vektörü ve türevlerine bağlı

$$p_3(t)\bar{\alpha}'''(t) + p_2(t)\bar{\alpha}''(t) + p_1(t)\bar{\alpha}'(t) + p_0(t)\bar{\alpha}(t) = p_0(t)\bar{m} \quad (3.108)$$

3. mertebeden değişken katsayılı lineer diferensiyel denklemi elde edilir. Burada

$$p_3(s) = -v^2 \kappa \kappa'$$

$$p_2(s) = -v^4 \kappa^2 \tau^2 + 3vv' \kappa \kappa' + v^2 (\kappa')^2$$

$$p_1(s) = v^3 v' \kappa^2 \tau^2 + vv'' \kappa \kappa' - v^4 \kappa^3 \kappa' - 3(v')^2 \kappa \kappa' - vv' (\kappa')^2$$

$$p_0(s) = -v^6 \kappa^4 \tau^2$$

olarak tanımlıdır. Buna göre aşağıdaki teoremi verebiliriz.

**Teorem 3.30.**  $E_1^3$  Minkowski uzayında  $\alpha : I \rightarrow E_1^3$  binormali timelike olan spacelike eğrisi, yarıçapı  $r$  ve merkezi  $m$  olan bir hiperbolik küre üzerinde bulunan, birim hızlı olmayan regüler bir eğri olsun.  $\alpha(t)$  hiperbolik küresel eğrisini karakterize eden diferensiyel denklem (3.108) deki gibidir.

## 4. ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ VE REZİDÜ HATA TAHMİNİ

### 4.1. Taylor Collocation (Sıralama) Yöntemi

Karamete [48,49], Keşan [50], Sezer ve ark. [51], Taylor sıralama metodu kullanarak lineer diferensiyel denklem ve denklem sistemlerinin yaklaşık çözümlerini elde ettiler. Bu bölümde Taylor sıralama metodunu geliştirerek, metod için rezidü hata fonksiyonuna dayalı bir hata tahmini verilecektir.

#### 4.1.1. Değişken Katsayılı Lineer Diferensiyel Denklemlerin Çözümü için Taylor Sıralama Yöntemi

Değişken katsayılı  $m$ . mertebeden lineer

$$L[y(x)] = \sum_{k=0}^m p_k(x) y^{(k)}(x) = g(x), \quad 0 \leq a \leq x \leq b \quad (4.1)$$

diferensiyel denkleminin

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk} y^{(k)}(a) + b_{jk} y^{(k)}(b)) = c_j, \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (4.2)$$

karışık koşulları altında

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n \quad (4.3)$$

kesilmiş (sonlu) Taylor serisi formunda bir yaklaşık çözümünün olduğunu varsayalım. Burada  $y^{(0)}(x) = y(x)$  bilinmeyen fonksiyon,  $p_k(x)$  ve  $g(x)$   $[a, b]$ 'nda bilinen sürekli fonksiyonlar,  $y^{(k)}(x)$ ,  $y(x)$  in  $k$ . mertebeden türevidir.  $a_n$  bilinmeyen katsayılar, ve  $a_{jk}$ ,  $b_{jk}$  ve  $c_j$  reel katsayılardır.

Ayrıca, (4.2) koşulları altında, (4.1) denkleminin yaklaşık çözümünü bulmak için

$$x_i = a + \frac{b-a}{N} i, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad 0 \leq a \leq x \leq b \quad (4.4)$$

ile verilen sıralama noktalarını kullanalım. Öncelikle (4.3) ile verilen yaklaşık çözümün matris formu

$$y_N(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{A} \quad (4.5)$$

olarak ifade edilebilir. Burada

$$\mathbf{X}(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^N \end{bmatrix}$$

ve

$$\mathbf{A} = [a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_N]^T$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca,  $\mathbf{X}(x)$  matrisi ile  $\mathbf{X}'(x)$ ,  $\mathbf{X}''(x)$  ve  $\mathbf{X}^{(k)}(x)$  türevleri arasında

$$\mathbf{X}'(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}, \quad \mathbf{X}''(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}^2 \quad \text{ve} \quad \mathbf{X}^{(k)}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}^k \quad (4.6)$$

bağıntısı vardır. Burada  $\mathbf{B}$  matrisi

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlıdır. O halde (4.5) ve (4.6) dan

$$y'_N(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}\mathbf{A}, \quad y''_N(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}^2\mathbf{A} \quad \text{ve} \quad y_N^{(k)}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}^k\mathbf{A} \quad (4.7)$$

matris bağıntıları yazılabilir. (4.7), (4.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\sum_{k=0}^m p_k(x)\mathbf{X}(x)\mathbf{B}^k\mathbf{A} = g(x) \quad (4.8)$$

matris bağıntısı elde edilir. (4.8)'de (4.4) ile verilen sıralama noktaları kullanılırsa

$$\sum_{k=0}^m p_k(x_i)\mathbf{X}(x_i)\mathbf{B}^k\mathbf{A} = g(x_i)$$

matris denklem sistemi yada kapalı form olarak

$$\left\{ \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{X} \mathbf{B}^k \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (4.9)$$

elde edilir. Burada

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} p_k(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_k(x_1) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & p_k(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0) \\ \mathbf{X}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{X}(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^N \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \cdots & x_N^N \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece (4.1) denklemi için (4.9) ile verilen temel matris denklemi

$$\mathbf{W}\mathbf{A} = \mathbf{G} \quad \text{ya da} \quad [\mathbf{W}; \mathbf{G}]; \quad \text{öyleki} \quad \mathbf{W} = \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{X} \mathbf{B}^k \quad (4.10)$$

artırılmış matris formunda yazılabilir. (4.7) den yararlanarak (4.2) koşulları için

$$\sum_{k=0}^{m-1} [a_{jk}\mathbf{X}(a) + b_{jk}\mathbf{X}(b)]\mathbf{B}^k\mathbf{A} = [c_j], \quad j = 0, 1, \dots, m-1$$

ya da kısaca

$$\mathbf{U}_j\mathbf{A} = [c_j] \quad \text{ya da} \quad [\mathbf{U}_j; c_j], \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (4.11)$$

artırılmış matris formu elde edilir. Burada

$$\mathbf{U}_j = \sum_{k=0}^{m-1} [a_{jk} \mathbf{X}(a) + b_{jk} \mathbf{X}(b)] \mathbf{B}^k = \begin{bmatrix} u_{j0} & u_{j1} & u_{j2} & \cdots & u_{jN} \end{bmatrix}, \quad j = 0, 1, \dots, (m-1)$$

şeklinde tanımlanır. Son olarak, (4.10) matris formunun son  $m$  satırı silinerek, bunların yerine (4.11) koşullar için artırılmış matrisinin satırları yazılırsa

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{W}}; \widetilde{\mathbf{G}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & ; & g(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} & ; & g(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & ; & \vdots \\ w_{(N-m)0} & w_{(N-m)1} & \cdots & w_{(N-m)N} & ; & g(x_{N-m}) \\ u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} & ; & c_0 \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} & ; & c_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & ; & \vdots \\ u_{(m-1)0} & u_{(m-1)1} & \cdots & u_{(m-1)N} & ; & c_{m-1} \end{bmatrix}$$

yeni artırılmış matris formu elde edilir. Bu ise lineer bir cebirsel sistemdir. Eğer,  $\text{rank } \widetilde{\mathbf{W}} = \text{rank} \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{W}}; \widetilde{\mathbf{G}} \end{bmatrix} = N + 1$  ise o zaman

$$\mathbf{A} = \left( \widetilde{\mathbf{W}} \right)^{-1} \widetilde{\mathbf{G}}$$

yazılabilir. Böylece

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_N \end{bmatrix}^T$$

bilinmeyen Taylor katsayılar matrisi belirlenmiş olur. Belirlenen  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_N$  katsayıları (4.3) denkleminde yerlerine yazılırsa (4.1) diferensiyel denkleminin Taylor polinom çözümü elde edilir.

#### 4.1.2. Taylor Sıralama Yöntemiyle Çözülen Lineer Diferensiyel Denklemler için Çözümün Doğruluğu ve Rezidü Hata Tahmini

Bu bölümde rezidü hata fonksiyonu [52,53,54,55,56] yardımıyla, (4.2) koşulları altında (4.1) denkleminin yaklaşık çözümü olan (4.3) Taylor polinom çözümü için bir hata tahmini verilecektir. Öncelikle (4.1) denklemi için rezidü hata fonksiyonunu

$$R_N(x) = L[y_N(x)] - g(x) \quad (4.12)$$

şeklinde tanımlayalım. Burada  $y_N(x)$ , (4.1) denkleminin Taylor polinom çözümüdür.

Böylece  $y_N(x)$

$$\begin{cases} L[y_N(x)] = \sum_{k=0}^m p_k(x) y_N^{(k)}(x) = g(x) + R_N(x) \\ \sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk} y_N^{(k)}(a) + b_{jk} y_N^{(k)}(b)) = c_j, \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \end{cases}$$

problemini sağlar. Ayrıca  $e_N(x)$  hata fonksiyonu

$$e_N(x) = y(x) - y_N(x) \quad (4.13)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $y(x)$ , (4.1) denkleminin tam çözümüdür. (4.1), (4.2), (4.12) ve (4.13) denklemlerinden

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk} e_N^{(k)}(a) + b_{jk} e_N^{(k)}(b)) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1$$

homojen karışık koşulları altında

$$L[e_N(x)] = L[y(x)] - L[y_N(x)] = -R_N(x)$$

hata diferensiyel denklemi elde edilir. Ya da, açık şekilde hata problemi

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^m p_k(x) e_N^{(k)}(x) = -R_N(x) \\ \sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk} e_N^{(k)}(a) + b_{jk} e_N^{(k)}(b)) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \end{cases} \quad (4.14)$$

şeklinde tanımlanır. Burada dikkat edilmelidir ki;

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk} y^{(k)}(a) + b_{jk} y^{(k)}(b)) = c_j, \quad j = 0, 1, \dots, m-1$$

ve

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk} y_N^{(k)}(a) + b_{jk} y_N^{(k)}(b)) = c_j, \quad j = 0, 1, \dots, m-1$$

homojen olmayan karışık koşulları

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk} e_N^{(k)}(a) + b_{jk} e_N^{(k)}(b)) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1$$

şeklinde homojen olan karışık koşullara dönüşmektedir. (4.14) hata problemi, geliştirilen metod yardımıyla çözülebilir. Böylece

$$e_{N,M}(x) = \sum_{n=0}^M a_n^* x^n, \quad M > N$$

şeklinde,  $e_N(x)$  e göre  $e_{N,M}(x)$  yaklaşık çözümü bulunur. Sonuç olarak,  $y_N(x)$  ve  $e_{N,M}(x)$  polinomları yardımıyla

$$y_{N,M}(x) = y_N(x) + e_{N,M}(x)$$

*düzeltilmiş Taylor polinom çözümü* elde edilir. Ayrıca,

$$e_N(x) = y(x) - y_N(x)$$

*asıl hata fonksiyonunu;*

$$e_{N,M}(x)$$

*tahmini hata fonksiyonunu;*

$$E_{N,M}(x) = e_N(x) - e_{N,M}(x) = y(x) - y_{N,M}(x)$$

ise *düzeltilmiş hata fonksiyonunu* ifade eder. Şimdi aşağıda verilen problemlerin çözümünü, Taylor sıralama metodunu kullanarak bulmaya çalışalım.

**Örnek 4.1.** Tam çözümü  $y(x) = x(1-x)e^x$  olan, değişken katsayılı,  $0 \leq x \leq 1$  aralığında

$$y^{(4)}(x) + xy(x) = -(8 + 7x + x^3)e^x$$

homojen olmayan 4. mertebeden lineer diferensiyel denklemini

$$y(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad y''(1) = -4e$$

koşulları altında Taylor sıralama yöntemini kullanarak çözelim [57,58].

$N = 5$  için  $y_5(x)$  kesilmiş (sonlu) Taylor seri çözümü

$$y_5(x) = \sum_{n=0}^5 a_n x^n$$

şeklinde. Şimdi yaklaşık çözümün  $a_n$ , ( $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ) katsayılarını hesaplayalım.

$a = 0$ ,  $b = 1$  ve  $N = 5$  için (4.4) ile verilen sıralama noktalarının kümesi

$$\left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{5}, x_2 = \frac{2}{5}, x_3 = \frac{3}{5}, x_4 = \frac{4}{5}, x_5 = 1 \right\}$$

olur. Yukarıda bahsedilen Taylor metodu uygulanırsa  $N = 5$  için  $y_5(x)$  Taylor polinom çözümü

$$y_5(x) = 1.1351545520109646263x - 0.6545212185511746370x^3 - 0.33333333333333333333x^4 - 0.14730000012645665596x^5$$

şeklinde hesaplanır. Düzeltilmiş Taylor polinom çözümünü elde etmek için

$$\begin{cases} e_5^{(4)}(x) + xe_5(x) = -R_5(x) \\ e_5(0) = 0, e_5''(0) = 0, e_5(1) = 0, e_5''(1) = 0 \end{cases}$$

hata problemini ele alalım. Öyleki;

$$R_5(x) = y_5^{(4)}(x) + xy_5(x) + (8 + 7x + x^3)e^x$$

şeklinde tanımlıdır. Yine, Taylor metodu kullanılarak  $M = 6$  için bu hata problemi çözülürse  $e_5(x)$  e göre  $e_{5,6}(x)$  tahmini hata fonksiyonu

$$e_{5,6}(x) = -0.111188115931996x + 0.128356555990440x^3 - (0.833333333333333e - 10)x^4 + (0.255086135689322e - 1)x^5 - (0.426770535440429e - 1)x^6$$

şeklinde hesaplanır ve böylece

$$y_{5,6}(x) = 1.02396643606800x - 0.526164662609560x^3 - 0.333333333333333x^4 - 0.121791386531068x^5 - (0.426770535440429e - 1)x^6$$

düzeltilmiş Taylor polinom çözümü elde edilmiş olur. Benzer şekilde  $y_{5,9}(x)$  ve  $y_{5,11}(x)$  çözümü aşağıdaki gibi bulunur.

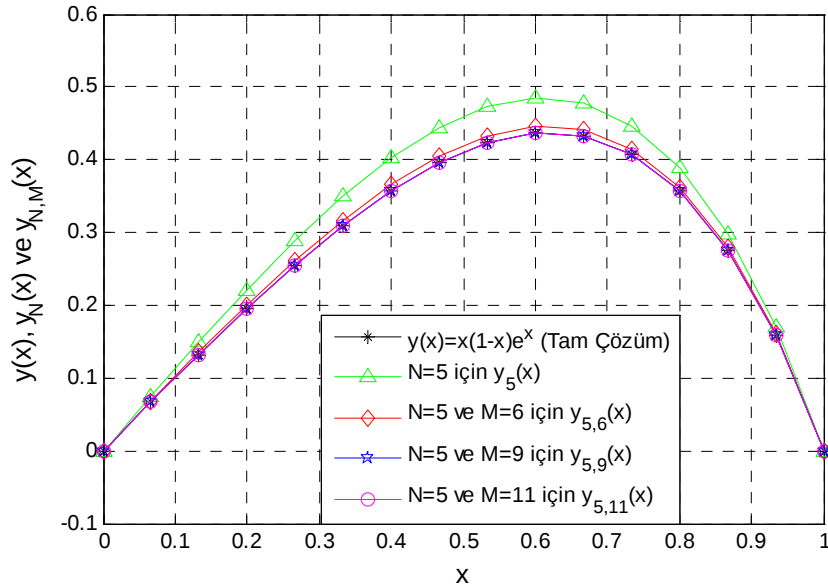
$$y_{5,9}(x) = 1.00002437285014x - 0.500024934241621x^3 - 0.333333333383333x^4 \\ - 0.125002533109927x^5 - (0.333161948721942e-1)x^6 - (0.699814396901965e-2)x^7 \\ - (0.110160272776683e-2)x^8 - (0.247630546279298e-3)x^9$$

$$y_{5,11}(x) = 1.00000015646940x - 0.500000158571441x^3 - 0.333333333383333x^4 \\ - 0.124999993131259x^5 - (0.333333761497010e-1)x^6 - (0.694437055055541e-2)x^7 \\ - (0.119035166848747e-2)x^8 - (0.174340158144659e-3)x^9 \\ - (0.208074050727092e-4)x^{10} - (0.342545138387607e-5)x^{11}.$$

Problemin tam çözümü, Taylor polinom çözümü ve düzeltilmiş Taylor polinom çözümünün verilen aralıkta seçilmiş bazı değerleri için nümerik sonuçları Tablo 4.1. de gösterilmiştir.

**Tablo 4.1.** Örnek 4.1'in tam çözüm ile yaklaşık çözümlerinin  
 $N = 5$  ve  $M = 6, 9, 11$  için nümerik sonuçları

|       | Tam Çözüm   | Taylor Polinom Çözümü | Düzeltilmiş Taylor Polinom Çözümleri |                |                 |
|-------|-------------|-----------------------|--------------------------------------|----------------|-----------------|
| $x_i$ | $y(x_i)$    | $y_5(x_i)$            | $y_{5,6}(x_i)$                       | $y_{5,9}(x_i)$ | $y_{5,11}(x_i)$ |
| 0     | 0           | 0                     | 0                                    | 0              | 0               |
| 0.2   | 0.195424441 | 0.221214271           | 0.200008932                          | 0.195429116    | 0.195424471     |
| 0.4   | 0.358037927 | 0.402130777           | 0.365956754                          | 0.358046078    | 0.358037980     |
| 0.6   | 0.437308512 | 0.485062100           | 0.446066656                          | 0.437317739    | 0.437308572     |
| 0.8   | 0.356086549 | 0.388208180           | 0.362147373                          | 0.356093256    | 0.356086592     |
| 1.0   | 0           | 0.1000e-19            | -0.6680e-16                          | 0.8566e-15     | 0.1763e-13      |



**Şekil 4.1.** Örnek 4.1'in tam çözüm ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

Tablo 4.1 ve Şekil 4.1 e bakarak,  $M$  değeri artırıldığında, yaklaşık çözümlerin tam çözüme yaklaştığı görülmektedir. Aşağıdaki Tablo 4.2 ise düzeltilmiş mutlak hataların karşılaştırmasını göstermektedir.

**Tablo 4.2.** Örnek 4.1'in düzeltilmiş mutlak hatalarının  
 $N = 5$  ve  $M = 6, 9, 11$  için karşılaştırılması

| Düzeltilmiş Mutlak Hata $ E_{N,M}(x)  =  y(x) - y_{N,M}(x) $ |                  |                  |                   |
|--------------------------------------------------------------|------------------|------------------|-------------------|
| $x_i$                                                        | $ E_{5,6}(x_i) $ | $ E_{5,9}(x_i) $ | $ E_{5,11}(x_i) $ |
| 0                                                            | 0                | 0                | 0                 |
| 0.2                                                          | 0.458449e-2      | 0.467489e-5      | 0.300257e-7       |
| 0.4                                                          | 0.791883e-2      | 0.815089e-5      | 0.524390e-7       |
| 0.6                                                          | 0.875814e-2      | 0.922697e-5      | 0.596090e-7       |
| 0.8                                                          | 0.606082e-2      | 0.670756e-5      | 0.438762e-7       |
| 1.0                                                          | 0.668e-16        | 0.856610e-15     | 0.176261e-13      |

Tablo 4.2 ye bakıldığında,  $M$  değeri arttıkça düzeltilmiş mutlak hatanın küçüldüğü ve çözümün doğruluğunun arttığı görülmektedir.

**Örnek 4.2.** Tam çözümü  $y(x) = x(1-x)e^x$  olan, değişken katsayılı,  $0 \leq x \leq 1$  aralığında

$$y^{(5)}(x) - y(x) = -(15 + 10x)e^x$$

homojen olmayan 5. mertebeden lineer diferensiyel denklemini

$$y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0, y(1) = 0, y'(1) = -e$$

koşulları altında Taylor sıralama yöntemini kullanarak çözelim [59,60].

$N = 6$  için  $y_6(x)$  kesilmiş (sonlu) Taylor seri çözümü

$$y_6(x) = \sum_{n=0}^6 a_n x^n$$

şeklindedir. Şimdi yaklaşık çözümün  $a_n$ , ( $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) katsayılarını hesaplayalım.

$a = 0$ ,  $b = 1$  ve  $N = 6$  için (4.4) ile verilen sıralama noktalarının kümesi

$$\left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{6}, x_2 = \frac{2}{6}, x_3 = \frac{3}{6}, x_4 = \frac{4}{6}, x_5 = \frac{5}{6}, x_6 = 1 \right\}$$

olur. Yukarıda bahsedilen Taylor metodu uygulanırsa  $N = 6$  için  $y_6(x)$  Taylor polinom çözümü

$$y_6(x) = x - 0.4821381146908052794x^3 - 0.3551519137342694634x^4 \\ - 0.12500000000000000000x^5 - (0.37709971574925257351e-1)x^6$$

şeklinde hesaplanır. Düzeltilmiş Taylor polinom çözümünü elde etmek için

$$\begin{cases} e_6^{(5)}(x) - e_6(x) = -R_6(x) \\ e_6(0) = 0, e_6'(0) = 0, e_6''(0) = 0, e_6(1) = 0, e_6'(1) = 0 \end{cases}$$

hata problemini ele alalım. Öyleki;

$$R_6(x) = y_6^{(5)}(x) - y_6(x) + (15 + 10x)e^x$$

şeklinde tanımlıdır. Yine, Taylor metodu kullanılarak  $M=7$  için bu hata problemi çözümlerse  $e_6(x)$  e göre  $e_{6,7}(x)$  tahmini hata fonksiyonu

$$\begin{aligned} e_{6,7}(x) = & -(0.155983754693797e-1)x^3 + (0.191646266291429e-1)x^4 \\ & + (0.489962199009021e-2)x^6 - (0.846587314985338e-2)x^7 \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır ve böylece

$$\begin{aligned} y_{6,7}(x) = & x - 0.497736490169380x^3 - 0.335987287070857x^4 - 0.12500000000000000000x^5 \\ & - (0.328103495799098e-1)x^6 - (0.846587314985338e-2)x^7 \end{aligned}$$

düzeltilmiş Taylor polinom çözümü elde edilmiş olur. Benzer şekilde  $y_{6,10}(x)$  ve

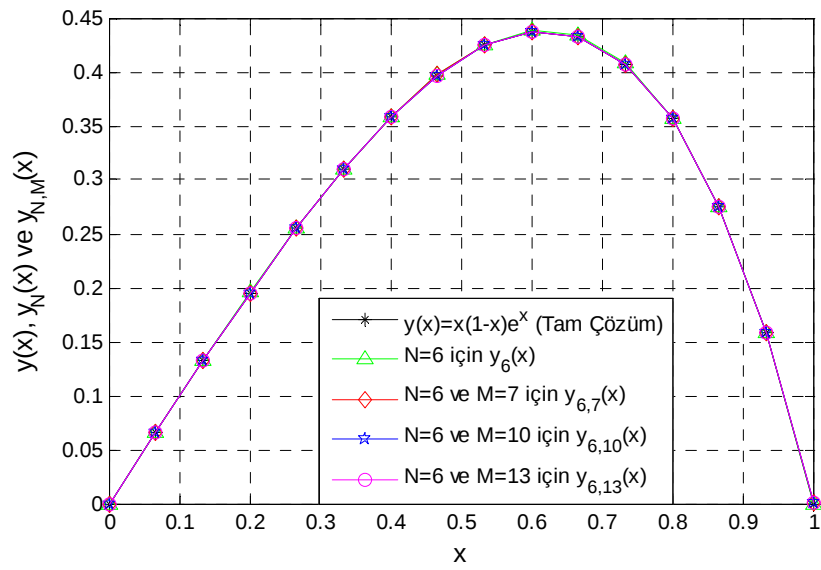
$y_{6,13}(x)$  çözümü aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} y_{6,10}(x) = & x - 0.499998960328312x^3 - 0.333334449870202x^4 - 0.12500000000000000000x^5 \\ & - (0.333336323290548e-1)x^6 - (0.694251102077484e-2)x^7 \\ & - (0.163993965842713e-3)x^9 - (0.301056977066866e-4)x^{10} \\ & - (0.119634675810629e-2)x^8 \\ y_{6,13}(x) = & x - 0.49999998536806x^3 - 0.333333334836932x^4 - 0.12500000000000000000x^5 \\ & - (0.333333366170699e-1)x^6 - (0.694441580738783e-2)x^7 \\ & - (0.173333131383124e-3)x^9 - (0.224606569920738e-4)x^{10} \\ & - (0.443226187307744e-6)x^{12} + (0.159581940994968e-7)x^{13} \\ & - (0.119059242405106e-2)x^8 - (0.210069136752367e-5)x^{11}. \end{aligned}$$

Problemin tam çözümü, Taylor polinom çözümü ve düzeltilmiş Taylor polinom çözümünün verilen aralıkta seçilmiş bazı değerleri için nümerik sonuçları Tablo 4.3 de gösterilmiştir.

**Tablo 4.3.** Örnek 4.2'nin tam çözüm ile yaklaşık çözümlerinin $N = 6$  ve  $M = 7, 10, 13$  için nümerik sonuçları

|       | Tam Çözüm   | Taylor Polinom Çözümü | Düzeltilmiş Taylor Polinom Çözümleri |                 |                 |
|-------|-------------|-----------------------|--------------------------------------|-----------------|-----------------|
| $x_i$ | $y(x_i)$    | $y_6(x_i)$            | $y_{6,7}(x_i)$                       | $y_{6,10}(x_i)$ | $y_{6,13}(x_i)$ |
| 0     | 0           | 0                     | 0                                    | 0               | 0               |
| 0.1   | 0.099465383 | 0.099481059           | 0.099467381                          | 0.099465384     | 0.099465383     |
| 0.2   | 0.195424441 | 0.195532239           | 0.195438320                          | 0.195424448     | 0.195424441     |
| 0.5   | 0.412180318 | 0.413040273           | 0.412298682                          | 0.412180378     | 0.412180318     |
| 0.8   | 0.356086549 | 0.356829619           | 0.356202066                          | 0.356086623     | 0.356086549     |
| 1.0   | 0           | -0.1510e-18           | 0.3000e-10                           | 0.2999e-10      | 0.3001e-10      |

**Şekil 4.2.** Örnek 4.2'in tam çözüm ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

Tablo 4.3 ve Şekil 4.2 ye bakarak,  $M$  değeri artırıldığında, yaklaşık çözümlerin tam çözüme yaklaştığı görülmektedir. Aşağıdaki Tablo 4.4 ise düzeltilmiş mutlak hataların karşılaştırmasını göstermektedir.

**Tablo 4.4.** Örnek 4.2'nin düzeltilmiş mutlak hatalarının $N = 6$  ve  $M = 7, 10, 13$  için karşılaştırılması

| Düzeltilmiş Mutlak Hata $ E_{N,M}(x)  =  y(x) - y_{N,M}(x) $ |                  |                   |                   |
|--------------------------------------------------------------|------------------|-------------------|-------------------|
| $x_i$                                                        | $ E_{6,7}(x_i) $ | $ E_{6,10}(x_i) $ | $ E_{6,13}(x_i) $ |
| 0                                                            | 0                | 0                 | 0                 |
| 0.1                                                          | 0.199850e-5      | 0.927862e-9       | 0.131149e-11      |
| 0.2                                                          | 0.138789e-4      | 0.652565e-8       | 0.926550e-11      |
| 0.5                                                          | 0.118364e-3      | 0.598642e-7       | 0.882683e-10      |
| 0.8                                                          | 0.115517e-3      | 0.741339e-7       | 0.131679e-9       |
| 1.0                                                          | 0.300000e-10     | 0.299997e-10      | 0.300178e-10      |

Tablo 4.4 e bakıldığında,  $M$  değeri arttıkça düzeltilmiş mutlak hatanın küçüldüğü ve çözümün doğruluğunun arttığı görülmektedir.

#### 4.1.3. Genel Lineer Diferensiyel Denklem Sistemlerinin Çözümü için Taylor Sıralama Yöntemi

Değişken katsayılı yüksek mertebeden lineer

$$L[y_i(x)] = \sum_{n=0}^m \sum_{j=1}^k p_{i,j}^n(x) y_j^{(n)}(x) = g_i(x), \quad (i=1, 2, \dots, k, \quad 0 \leq a \leq x \leq b) \quad (4.15)$$

diferensiyel denklem sisteminin

$$\sum_{n=0}^{m-1} [a_{i,n}^j y_j^{(n)}(a) + b_{i,n}^j y_j^{(n)}(b)] = c_{j,i}, \quad (i=0, 1, \dots, m-1, \quad j=1, 2, \dots, k) \quad (4.16)$$

karışık koşulları altında

$$y_j(x) \cong y_{j,N}(x) = \sum_{n=0}^N a_{j,n} x^n \quad (4.17)$$

kesilmiş (sonlu) Taylor serisi formunda bir yaklaşık çözümünün olduğunu varsayalım. Burada  $y_j^{(0)}(x) = y_j(x)$  bilinmeyen fonksiyon,  $p_{i,j}^n(x)$  ve  $g_i(x)$   $[a, b]$ 'nda bilinen sürekli fonksiyonlar,  $y_j^{(n)}(x)$ ,  $y_j(x)$  in  $n$ . mertebeden türevidir.  $a_{j,n}$  bilinmeyen katsayılar, ve  $a_{i,n}^j$ ,  $b_{i,n}^j$  ve  $c_{j,i}$  reel katsayılardır.

Ayrıca, (4.16) koşulları altında, (4.15) denklem sisteminin yaklaşık çözümünü bulmak için

$$x_i = a + \frac{b-a}{N} i, \quad i=0, 1, \dots, N, \quad 0 \leq a \leq x \leq b \quad (4.18)$$

ile verilen sıralama noktaları kullanılsın. Öncelikle (4.17) ile verilen yaklaşık çözümün matris formu

$$y_{j,N}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{A}_j, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (4.19)$$

olarak ifade edilebilir. Burada

$$\mathbf{X}(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^N \end{bmatrix}$$

ve

$$\mathbf{A}_j = \begin{bmatrix} a_{j,0} & a_{j,1} & a_{j,2} & \dots & a_{j,N} \end{bmatrix}^T$$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca  $\mathbf{X}(x)$  matrisi ile  $\mathbf{X}^{(k)}(x)$  türevi arasında

$$\mathbf{X}^{(k)}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}^k \quad (4.20)$$

bağıntısı vardır. Burada  $\mathbf{B}$  matrisi

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlıdır. O halde (4.19) ve (4.20) den

$$y_{j,N}^{(i)}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}^i\mathbf{A}_j, \quad i = 0, 1, \dots, m \text{ ve } j = 1, 2, \dots, k \quad (4.21)$$

elde edilir. Böylece

$$\mathbf{Y}^{(i)}(x) = \overline{\mathbf{X}}(x)(\overline{\mathbf{B}})^i \mathbf{A}, \quad i = 0, 1, \dots, m \quad (4.22)$$

yazılabilir. Burada

$$\mathbf{Y}^{(i)}(x) = \begin{bmatrix} y_{1,N}^{(i)}(x) \\ y_{2,N}^{(i)}(x) \\ \vdots \\ y_{k,N}^{(i)}(x) \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{X}}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{X}(x) \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{B} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_k \end{bmatrix}$$

olarak tanımlıdır. Şimdi (4.15) denklem sistemini

$$\sum_{i=0}^m \mathbf{P}_i(x) \mathbf{Y}^{(i)}(x) = \mathbf{G}(x) \quad (4.23)$$

matris formunda ifade edelim. Burada

$$\mathbf{P}_i(x) = \begin{bmatrix} p_{1,1}^i(x) & p_{1,2}^i(x) & \dots & p_{1,k}^i(x) \\ p_{2,1}^i(x) & p_{2,2}^i(x) & \dots & p_{2,k}^i(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k,1}^i(x) & p_{k,2}^i(x) & \dots & p_{k,k}^i(x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}^{(i)}(x) = \begin{bmatrix} y_{1,N}^{(i)}(x) \\ y_{2,N}^{(i)}(x) \\ \vdots \\ y_{k,N}^{(i)}(x) \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{G}(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_k(x) \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. (4.23) de (4.18) ile verilen sıralama noktaları kullanılırsa

$$\sum_{i=0}^m \mathbf{P}_i(x_s) \mathbf{Y}^{(i)}(x_s) = \mathbf{G}(x_s), \quad s = 0, 1, \dots, N$$

ya da

$$\sum_{i=0}^m \mathbf{P}_i \mathbf{Y}^{(i)} = \mathbf{G} \quad (4.24)$$

kapalı formu elde edilir. Burada

$$\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_i(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_i(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{P}_i(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^{(i)}(x_0) \\ \mathbf{Y}^{(i)}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{Y}^{(i)}(x_N) \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}(x_0) \\ \mathbf{G}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{G}(x_N) \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. (4.18) ve (4.22) den

$$\mathbf{Y}^{(i)}(x_s) = \overline{\mathbf{X}}(x_s) (\overline{\mathbf{B}})^i \mathbf{A}, \quad s = 0, 1, \dots, N$$

ya da kısaca

$$\mathbf{Y}^{(i)} = \mathbf{X} (\overline{\mathbf{B}})^i \mathbf{A} \quad (4.25)$$

elde edilir. Öyleki

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{X}}(x_0) \\ \overline{\mathbf{X}}(x_1) \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{X}}(x_N) \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{X}}(x_s) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(x_s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{X}(x_s) \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. (4.25), (4.24) te yerine yazılırsa

$$\left\{ \sum_{i=0}^m \mathbf{P}_i \mathbf{X} (\overline{\mathbf{B}})^i \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (4.26)$$

temel matris denklemi elde edilir. (4.26) da yer alan  $\mathbf{P}_i$ ,  $\mathbf{X}$ ,  $\overline{\mathbf{B}}$ ,  $\mathbf{A}$  ve  $\mathbf{G}$  matrislerinin boyutları sırasıyla  $k(N+1) \times k(N+1)$ ,  $k(N+1) \times k(N+1)$ ,  $k(N+1) \times k(N+1)$ ,  $k(N+1) \times 1$  ve  $k(N+1) \times 1$  şeklindedir. (4.15) denklem sistemine karşılık gelen (4.26) temel matris denklemi

$$\mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad \text{ya da} \quad [\mathbf{W}; \mathbf{G}] \quad (4.27)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada

$$\mathbf{W} = \sum_{i=0}^m \mathbf{P}_i \mathbf{X} (\overline{\mathbf{B}})^i = [\mathbf{w}_{p,q}], \quad p, q = 1, 2, \dots, k(N+1)$$

olarak tanımlıdır. (4.18) ile verilen sıralama noktaları ve (4.22) kullanılarak (4.16) ile verilen koşullar için matris formu

$$\sum_{j=0}^{m-1} [\mathbf{a}_j \overline{\mathbf{X}}(a) + \mathbf{b}_j \overline{\mathbf{X}}(b)] (\overline{\mathbf{B}})^j \mathbf{A} = \mathbf{C}$$

olarak ifade edilir. Öyleki

$$\mathbf{a}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_j^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{a}_j^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{a}_j^k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_j^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{b}_j^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{b}_j^k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_k \end{bmatrix}$$

ve

$$\mathbf{a}_j^i = \begin{bmatrix} a_{0,j}^i \\ a_{1,j}^i \\ \vdots \\ a_{m-1,j}^i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_j^i = \begin{bmatrix} b_{0,j}^i \\ b_{1,j}^i \\ \vdots \\ b_{m-1,j}^i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_i = \begin{bmatrix} c_{i,0} \\ c_{i,1} \\ \vdots \\ c_{i,m-1} \end{bmatrix}, \quad i = 0, 1, \dots, k$$

olarak tanımlıdır. Böylece, koşullar için

$$\mathbf{U}\mathbf{A} = \mathbf{C} \text{ ya da } [\mathbf{U}; \mathbf{C}] \quad (4.28)$$

temel matris formu elde edilir. Öyleki

$$\mathbf{U} = \sum_{j=0}^{m-1} [\mathbf{a}_j \bar{\mathbf{X}}(a) + \mathbf{b}_j \bar{\mathbf{X}}(b)] (\bar{\mathbf{B}})^j$$

şeklindedir. Son olarak, (4.27) matris formunun son  $mk$  satırı silinerek, bunların yerine (4.28) koşullar için artırılmış matrisinin satırları yazılırsa yeni

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}]$$

artırılmış matrisi elde edilir. Burada (4.27) matrisinin son satırlarının silinmesi zorunlu değildir. Eğer,  $\tilde{\mathbf{W}}$  matrisi tekil ise bu durumda (4.27) matrisinin farklı satırları silinerek, silinen satırlar yerine (4.28) matrisinin satırları yazılabilir. Eğer,  $\text{rank } \tilde{\mathbf{W}} = \text{rank} [\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = k(N+1)$  ise o zaman

$$\mathbf{A} = (\tilde{\mathbf{W}})^{-1} \tilde{\mathbf{G}}$$

yazılabilir. Böylece,

$$\mathbf{A}_j = [a_{j,0} \quad a_{j,1} \quad a_{j,2} \quad \cdots \quad a_{j,N}]^T$$

bilinmeyen Taylor katsayılar matrisi belirlenmiş olur. Belirlenen  $a_{j,0}, a_{j,1}, a_{j,2}, \dots, a_{j,N}$  katsayıları (4.17) denkleminde yerlerine yazılırsa (4.15) diferensiyel denklem sisteminin Taylor polinom çözümleri elde edilir.

#### 4.1.4. Taylor Sıralama Yöntemiyle Çözülen Genel Lineer Diferensiyel Denklem Sistemleri için Çözümün Doğruluğu ve Rezidü Hata Tahmini

Bu bölümde rezidü hata fonksiyonu [52,53,54,55,56] yardımıyla, (4.16) karışık koşulları altında (4.15) sisteminin yaklaşık çözümü olan (4.17) Taylor polinom çözümü için bir hata tahmini verilecektir. Öncelikle (4.15) sistemi için rezidü hata fonksiyonunu

$$R_{i,N}(x) = L[y_{i,N}(x)] - g_i(x), \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (4.29)$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece  $y_{i,N}(x)$

$$\begin{cases} L[y_{i,N}(x)] = \sum_{n=0}^m \sum_{j=1}^k p_{i,j}^n(x) y_{j,N}^{(n)}(x) = g_i(x) + R_{i,N}(x), & (i = 1, 2, \dots, k) \\ \sum_{n=0}^{m-1} [a_{i,n}^j y_{j,N}^{(n)}(a) + b_{i,n}^j y_{j,N}^{(n)}(b)] = c_{j,i}, & (i = 0, 1, \dots, m-1, \quad j = 1, 2, \dots, k) \end{cases}$$

problemini sağlar. Ayrıca  $e_{j,N}(x)$  hata fonksiyonu

$$e_{j,N}(x) = y_j(x) - y_{j,N}(x) \quad (4.30)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $y_j(x)$ , (4.15) denklem sisteminin tam çözümleridir.

(4.15), (4.16), (4.29) ve (4.30) denklemlerinden

$$\sum_{n=0}^{m-1} [a_{i,n}^j e_{j,N}^{(n)}(a) + b_{i,n}^j e_{j,N}^{(n)}(b)] = 0, \quad (i = 0, 1, \dots, m-1, \quad j = 1, 2, \dots, k)$$

homojen karışık koşulları altında

$$L[e_{i,N}(x)] = L[y_i(x)] - L[y_{i,N}(x)] = -R_{i,N}(x)$$

hata diferensiyel denklemi elde edilir. Ya da, açık şekilde hata problemi

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^m \sum_{j=1}^k p_{i,j}^n(x) e_{j,N}^{(n)}(x) = -R_{i,N}(x), & (i = 1, 2, \dots, k) \\ \sum_{n=0}^{m-1} [a_{i,n}^j e_{j,N}^{(n)}(a) + b_{i,n}^j e_{j,N}^{(n)}(b)] = 0, & (i = 0, 1, \dots, m-1, \quad j = 1, 2, \dots, k) \end{cases} \quad (4.31)$$

şeklinde tanımlanır. Burada dikkat edilmelidir ki;

$$\sum_{n=0}^{m-1} [a_{i,n}^j y_j^{(n)}(a) + b_{i,n}^j y_j^{(n)}(b)] = c_{j,i}, \quad (i = 0, 1, \dots, m-1, \quad j = 1, 2, \dots, k)$$

ve

$$\sum_{n=0}^{m-1} [a_{i,n}^j y_{j,N}^{(n)}(a) + b_{i,n}^j y_{j,N}^{(n)}(b)] = c_{j,i}, \quad (i = 0, 1, \dots, m-1, \quad j = 1, 2, \dots, k)$$

homojen olmayan karışık koşulları

$$\sum_{n=0}^{m-1} [a_{i,n}^j e_{j,N}^{(n)}(a) + b_{i,n}^j e_{j,N}^{(n)}(b)] = 0, \quad (i = 0, 1, \dots, m-1, \quad j = 1, 2, \dots, k)$$

şeklinde homojen olan karışık koşullara dönüşmektedir. (4.31) hata problemi, geliştirilen metod yardımıyla çözülebilir. Böylece

$$e_{j,N,M}(x) = \sum_{n=0}^M a_{j,n}^* x^n, \quad (M > N, \quad j = 1, 2, \dots, k)$$

şeklinde,  $e_{j,N}(x)$  e göre  $e_{j,N,M}(x)$  yaklaşık çözümü bulunur. Sonuç olarak,  $y_{j,N}(x)$  ve  $e_{j,N,M}(x)$  polinomları yardımıyla

$$y_{j,N,M}(x) = y_{j,N}(x) + e_{j,N,M}(x)$$

düzeltilmiş Taylor polinom çözümü elde edilir. Ayrıca,

$$e_{j,N}(x) = y_j(x) - y_{j,N}(x)$$

asıl hata fonksiyonunu;

$$e_{j,N,M}(x)$$

tahmini hata fonksiyonunu;

$$E_{j,N,M}(x) = e_{j,N}(x) - e_{j,N,M}(x) = y_j(x) - y_{j,N,M}(x)$$

ise *düzeltilmiş hata fonksiyonunu* ifade eder. Şimdi aşağıda verilen problemlerin çözümünü, Taylor sıralama metodunu kullanarak bulmaya çalışalım.

**Örnek 4.3.** Tam çözümleri  $y_1(x) = e^{-x} + 3e^{-x/3} - 3$  ve  $y_2(x) = -\frac{e^{-x}}{2} + \frac{3e^{-x/3}}{2} - 1 + x$  olan

$$\begin{cases} y_1^{(1)}(x) + y_2^{(1)}(x) + y_2(x) = x - e^{-x} \\ y_1^{(1)}(x) + 4y_2^{(1)}(x) + y_1(x) = 1 + 2e^{-x} \end{cases}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

lineer diferensiyel denklem sistemini

$$y_1(0) = 1 \text{ ve } y_2(0) = 0$$

başlangıç koşulları altında Taylor sıralama yöntemini kullanarak çözelim [61,62]. Bu problemde,  $k = 2$ ,  $m = 1$ ,  $p_{1,1}^1 = 1$ ,  $p_{1,1}^0 = 0$ ,  $p_{1,2}^1 = 1$ ,  $p_{1,2}^0 = 1$ ,  $g_1(x) = x - e^{-x}$ ,  $p_{2,1}^1 = 1$ ,  $p_{2,1}^0 = 1$ ,  $p_{2,2}^1 = 4$ ,  $p_{2,2}^0 = 0$ ,  $g_2(x) = 1 + 2e^{-x}$  şeklindedir.

$N = 3$  için  $y_{j,3}(x)$  ( $j = 1, 2$ ) kesilmiş Taylor seri çözümleri

$$y_{j,N}(x) = \sum_{n=0}^3 a_{j,n} x^n$$

şeklindedir. Şimdi yaklaşık çözümün  $a_{j,n}$ , ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) katsayılarını hesaplayalım.

$a = 0$ ,  $b = 1$  ve  $N = 3$  için (4.18) ile verilen sıralama noktalarının kümesi

$$\left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = 1 \right\}$$

olur. Yukarıda bahsedilen Taylor metodu kullanılırsa  $N = 3$  için  $y_{j,3}(x)$  ( $j=1,2$ ) Taylor polinom çözümleri

$$y_{1,3}(x) = 1 - 2x + 0.65026593172059818797x^2 - 0.1360932709322248727x^3$$

$$y_{2,3}(x) = x - 0.15908130534369392778x^2 + (0.514414694144519197e - 1)x^3$$

şeklinde hesaplanır. Düzeltilmiş Taylor polinom çözümlerini elde etmek için

$$\begin{cases} e_{1,3}^{(1)}(x) + e_{2,3}^{(1)}(x) + e_{2,3}(x) = -R_{1,3}(x) \\ e_{1,3}^{(1)}(x) + 4e_{2,3}^{(1)}(x) + e_{1,3}(x) = -R_{2,3}(x) \end{cases}$$

hata problemini ele alalım. Öyleki

$$\begin{cases} R_{1,3}(x) = y_{1,3}^{(1)}(x) + y_{2,3}^{(1)}(x) + y_{2,3}(x) - x + e^{-x} \\ R_{2,3}(x) = y_{1,3}^{(1)}(x) + 4y_{2,3}^{(1)}(x) + y_{1,3}(x) - 1 - 2e^{-x} \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. Yine, Taylor metodunu kullanarak  $M = 5$  için bu hata problemi çözümlerse  $e_{1,3}(x)$  ve  $e_{2,3}(x)$  e göre  $e_{1,3,5}(x)$  ve  $e_{2,3,5}(x)$  tahmini hata fonksiyonu

$$e_{1,3,5}(x) = (0.162770215780354590e - 1)x^2 - (0.482469240675063027e - 1)x^3 \\ + (0.409517659738837526e - 1)x^4 - (0.569481032290415982e - 2)x^5$$

$$e_{2,3,5}(x) = -(0.752408243401713872e - 2)x^2 + (0.222141846900607044e - 1)x^3 \\ - (0.189435361508392338e - 1)x^4 + (0.275727053046810524e - 2)x^5$$

şeklinde hesaplanır ve böylece

$$y_{1,3,5}(x) = 1 - 2x + 0.6665429533x^2 - 0.1843401950x^3 + (0.409517659738837526e - 1)x^4 \\ - (0.569481032290415982e - 2)x^5$$

$$y_{2,3,5}(x) = x - 0.1666053877x^2 + (0.7365565410e - 1)x^3 - (0.189435361508392338e - 1)x^4 \\ + (0.275727053046810524e - 2)x^5$$

düzeltilmiş Taylor polinom çözümleri elde edilmiş olur. Benzer şekilde  $y_{1,3,6}(x)$ ,

$y_{2,3,6}(x)$ ,  $y_{1,3,8}(x)$  ve  $y_{2,3,8}(x)$  çözümleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$y_{1,3,6}(x) = 1 - 2x + 0.6666586736x^2 - 0.1851133063x^3 + (0.429422525458353910e - 1)x^4 \\ - (0.793751687780180904e - 2)x^5 + (0.923831179539782305e - 3)x^6$$

$$y_{2,3,6}(x) = x - 0.1666626863x^2 + (0.7403827294e - 1)x^3 - (0.199284001921761246e - 1)x^4 \\ + (0.386672804181833336e - 2)x^5 - (0.456948612971404962e - 3)x^6$$

ve

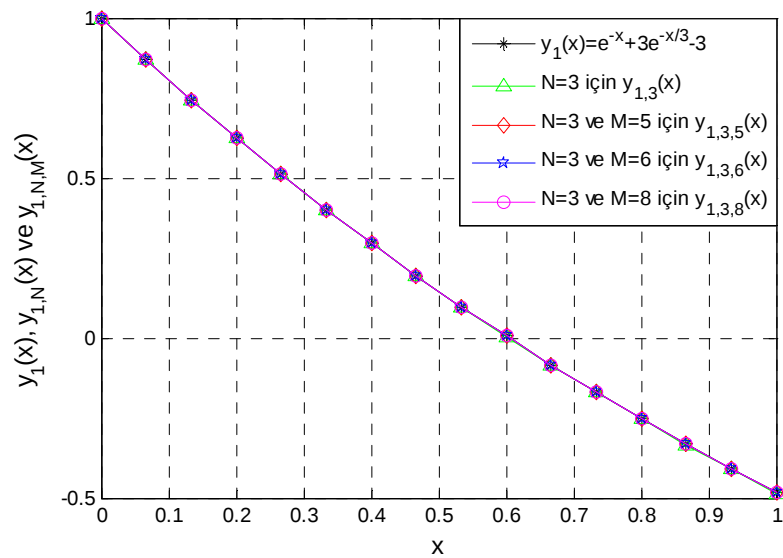
$$y_{1,3,8}(x) = 1 - 2x + 0.6666666556x^2 - 0.1851849986x^3 + (0.432086365045858817e - 1)x^4 \\ - (0.843169260781334584e - 2)x^5 + (0.138493637601555532e - 2)x^6 \\ - (0.186573519907473618e - 3)x^7 + (0.164112150792816713e - 4)x^8$$

$$y_{2,3,8}(x) = x - 0.1666666700x^2 + (0.7407407658e-1)x^3 - (0.200615521752642578e-1)x^4 \\ + (0.411406676137388017e-2)x^5 - (0.688268645838152616e-3)x^6 \\ + (0.941030930443065294e-4)x^7 - (0.851182365907421357e-5)x^8.$$

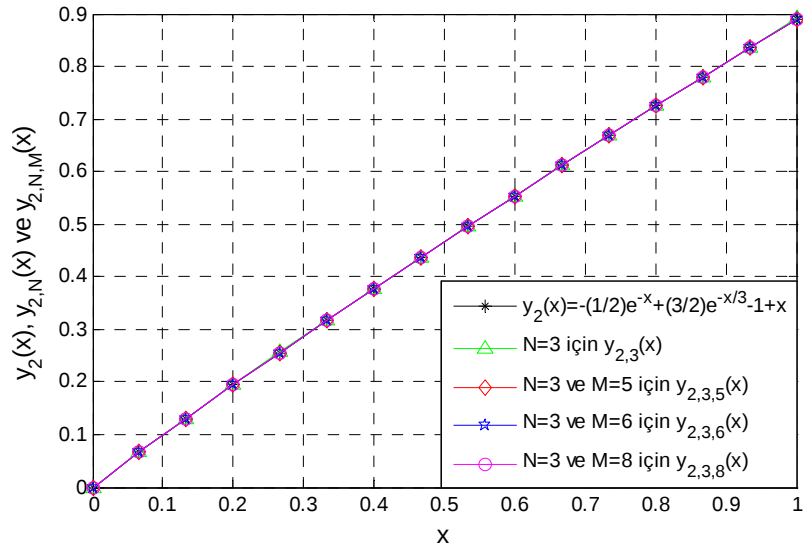
Problemin tam çözümü, Taylor polinom çözümü ve düzeltilmiş Taylor polinom çözümlerinin verilen aralıkta seçilmiş bazı değerleri için nümerik sonuçları Tablo 4.5 de gösterilmiştir.

**Tablo 4.5.** Örnek 4.3'ün tam çözüm ile yaklaşık çözümlerinin  
 $N = 3$  ve  $M = 5, 6, 8$  için nümerik sonuçları

|       | Tam Çözüm    | Taylor Polinom Çözümü | Düzeltilmiş Taylor Polinom Çözümleri |                  |                  |
|-------|--------------|-----------------------|--------------------------------------|------------------|------------------|
| $x_i$ | $y_1(x_i)$   | $y_{1,3}(x_i)$        | $y_{1,3,5}(x_i)$                     | $y_{1,3,6}(x_i)$ | $y_{1,3,8}(x_i)$ |
| 0     | 1            | 1                     | 1                                    | 1                | 1                |
| 0.2   | 0.625251708  | 0.624921891           | 0.625250697                          | 0.625251667      | 0.625251708      |
| 0.4   | 0.295840003  | 0.295332580           | 0.295839150                          | 0.295839962      | 0.295840003      |
| 0.6   | 0.005003895  | 0.004699589           | 0.005002501                          | 0.005003845      | 0.005003896      |
| 0.8   | -0.252886021 | -0.253509558          | -0.252886922                         | -0.252886104     | -0.252886020     |
| 1.0   | -0.482526627 | -0.485827339          | -0.482540286                         | -0.482526069     | -0.482526625     |
| $x_i$ | $y_2(x_i)$   | $y_{2,3}(x_i)$        | $y_{2,3,5}(x_i)$                     | $y_{2,3,6}(x_i)$ | $y_{2,3,8}(x_i)$ |
| 0     | 0            | 0                     | 0                                    | 0                | 0                |
| 0.2   | 0.193895101  | 0.194048280           | 0.193895602                          | 0.193895121      | 0.193895101      |
| 0.4   | 0.377599956  | 0.377839245           | 0.377600380                          | 0.377599976      | 0.377599955      |
| 0.6   | 0.553690312  | 0.553842087           | 0.553691005                          | 0.553690337      | 0.553690311      |
| 0.8   | 0.724228025  | 0.724525997           | 0.724228477                          | 0.724228067      | 0.724228025      |
| 1.0   | 0.890857245  | 0.892360164           | 0.890864001                          | 0.890856966      | 0.890857244      |



**Şekil 4.3.** Örnek 4.3'ün tam çözüm  $y_1(x)$  ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması



**Şekil 4.4.** Örnek 4.3'ün tam çözüm  $y_2(x)$  ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

Tablo 4.5, Şekil 4.3 ve Şekil 4.4 incelendiğinde  $M$  değerleri arttıkça, yaklaşık çözümlerin tam çözümlere yaklaştığı yani çözümün doğruluğunun arttığı görülmektedir. Şimdi,  $y_1(x)$  ve  $y_2(x)$  için düzeltilmiş mutlak hata fonksiyonuna ait aşağıdaki tabloyu inceleyelim.

**Tablo 4.6.** Örnek 4.3'ün düzeltilmiş mutlak hatalarının  
 $N = 3$  ve  $M = 5, 6, 8$  için karşılaştırılması

| Düzeltilmiş Mutlak Hata $ E_{i,N,M}(x)  =  y_i(x) - y_{i,N,M}(x) $ |                    |                    |                    |
|--------------------------------------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $x_i$                                                              | $ E_{1,3,5}(x_i) $ | $ E_{1,3,6}(x_i) $ | $ E_{1,3,8}(x_i) $ |
| 0                                                                  | 0                  | 0                  | 0                  |
| 0.2                                                                | 0.101111e-5        | 0.409554e-7        | 0.289375e-10       |
| 0.4                                                                | 0.852765e-6        | 0.414868e-7        | 0.155927e-9        |
| 0.6                                                                | 0.139384e-5        | 0.501077e-7        | 0.236706e-9        |
| 0.8                                                                | 0.901043e-6        | 0.830198e-7        | 0.371497e-9        |
| 1.0                                                                | 0.136589e-4        | 0.561254e-6        | 0.207515e-8        |
| $x_i$                                                              | $ E_{2,3,5}(x_i) $ | $ E_{2,3,6}(x_i) $ | $ E_{2,3,8}(x_i) $ |
| 0                                                                  | 0                  | 0                  | 0                  |
| 0.2                                                                | 0.501385e-6        | 0.203910e-7        | 0.443765e-10       |
| 0.4                                                                | 0.424209e-6        | 0.207023e-7        | 0.857063e-10       |
| 0.6                                                                | 0.693215e-6        | 0.250302e-7        | 0.102776e-9        |
| 0.8                                                                | 0.451283e-6        | 0.414137e-7        | 0.147980e-9        |
| 1.0                                                                | 0.675550e-5        | 0.279398e-6        | 0.148531e-8        |

Tablo 4.6 ya göre,  $M$  değeri artırıldığında, düzeltilmiş mutlak hatanın sıfıra yaklaştığı yani çözümün doğruluğunun arttığı gözlenmektedir.

**Örnek 4.4.** Tam çözümleri  $y_1(x) = \sin(x)$ ,  $y_2(x) = \cos(x)$  olan

$$\begin{cases} y_1^{(2)}(x) + xy_1(x) + xy_2(x) = (x-1)\sin(x) + x\cos(x) \\ y_2^{(2)}(x) + 2xy_2(x) + 2xy_1(x) = (2x-1)\cos(x) + 2x\sin(x) \end{cases}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

lineer diferensiyel denklem sistemini

$$y_1(0) = 0, \quad y_1(1) = \sin(1), \quad y_2(0) = 1 \quad \text{ve} \quad y_2(1) = \cos(1)$$

karışık koşulları altında Taylor sıralama yöntemini kullanarak çözelim. Bu problemde,  $k = 2$ ,  $m = 2$ ,  $p_{1,1}^2 = 1$ ,  $p_{1,1}^1 = 0$ ,  $p_{1,1}^0 = x$ ,  $p_{1,2}^2 = 0$ ,  $p_{1,2}^1 = 0$ ,  $p_{1,2}^0 = x$ ,  $p_{2,1}^2 = 0$ ,  $p_{2,1}^1 = 0$ ,  $p_{2,1}^0 = 2x$ ,  $p_{2,2}^2 = 1$ ,  $p_{2,2}^1 = 0$ ,  $p_{2,2}^0 = 2x$ ,  $g_1(x) = (x-1)\sin(x) + x\cos(x)$  ve  $g_2(x) = (2x-1)\cos(x) + 2x\sin(x)$  şeklindedir.

$N = 3$  için  $y_{j,3}(x)$  ( $j = 1, 2$ ) kesilmiş Taylor seri çözümleri

$$y_{j,3}(x) = \sum_{n=0}^3 a_{j,n} x^n$$

şeklindedir. Şimdi yaklaşık çözümün  $a_{j,n}$ , ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) katsayılarını hesaplayalım.

$a = 0$ ,  $b = 1$  ve  $N = 3$  için (4.18) ile verilen sıralama noktalarının kümesi

$$\left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = 1 \right\}$$

olur. Yukarıda bahsedilen Taylor metodu kullanılırsa  $N = 3$  için  $y_{j,3}(x)$  ( $j = 1, 2$ )

Taylor polinom çözümleri

$$y_{1,3}(x) = 1.0063471145431744992x - 0.16487612973527799252x^3$$

$$y_{2,3}(x) = 1 + (0.1533834169991229046e-1)x - 0.50000000000000000000x^2 \\ + (0.24963964168227426956e-1)x^3$$

şeklinde hesaplanır. Düzeltilmiş Taylor polinom çözümlerini elde etmek için

$$\begin{cases} e_{1,3}^{(2)}(x) + xe_{1,3}(x) + xe_{2,3}(x) = -R_{1,3}(x) \\ e_{2,3}^{(2)}(x) + 2xe_{2,3}(x) + 2xe_{1,3}(x) = -R_{2,3}(x) \end{cases}$$

hata problemini ele alalım. Öyleki

$$\begin{cases} R_{1,3}(x) = y_{1,3}^{(2)}(x) + xy_{1,3}(x) + xy_{2,3}(x) - (x-1)\sin(x) - x\cos(x) \\ R_{2,3}(x) = y_{2,3}^{(2)}(x) + 2xy_{2,3}(x) + 2xy_{1,3}(x) - (2x-1)\cos(x) - 2x\sin(x) \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. Yine, Taylor metodunu kullanarak  $M = 4$  için bu hata problemi çözümlerse  $e_{1,3}(x)$  ve  $e_{2,3}(x)$  e göre  $e_{1,3,4}(x)$  ve  $e_{2,3,4}(x)$  tahmini hata fonksiyonu

$$e_{1,3,4}(x) = -(0.499228952471965706e-2)x - (0.518961349576921740e-2)x^3 \\ + (0.101819030204888753e-1)x^4$$

$$e_{2,3,4}(x) = -(0.156911938827726494e-1)x - (0.243242930248717682e-1)x^3 \\ + (0.400154869076444208e-1)x^4$$

şeklinde hesaplanır ve böylece

$$y_{1,3,4}(x) = 1.001354825x - 0.1700657432x^3 + (0.101819030204888753e-1)x^4$$

$$y_{2,3,4}(x) = 1 - (0.35285218e-3)x - 0.50000000000000000000x^2 + (0.63967115e-3)x^3 \\ + (0.400154869076444208e-1)x^4$$

düzeltilmiş Taylor polinom çözümleri elde edilmiş olur. Benzer şekilde  $y_{1,3,7}(x)$ ,

$y_{2,3,7}(x)$ ,  $y_{1,3,9}(x)$  ve  $y_{2,3,9}(x)$  çözümleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$y_{1,3,7}(x) = 1.000000143x - 0.1666661714x^3 - (0.388464629791579822e-5)x^4 \\ + (0.834590801968151768e-2)x^5 - (0.199067083831251440e-4)x^6 \\ - (0.185102512198028380e-3)x^7$$

$$y_{2,3,7}(x) = 1 + (0.29669e-6)x - 0.50000000000000000000x^2 + (0.156876e-5)x^3 \\ + (0.416540206484458664e-1)x^4 + (0.435420619463444680e-4)x^5 \\ - (0.146619889651633530e-2)x^6 + (0.690766000483455933e-4)x^7$$

ve

$$y_{1,3,9}(x) = 1.000000001x - 0.1666666724x^3 + (0.586157759586980464e-7)x^4 \\ + (0.833306459176818768e-2)x^5 + (0.678926827099926578e-6)x^6 \\ - (0.199409712951184420e-3)x^7 + (0.822626752055785615e-6)x^8 \\ + (0.244208002439191309e-5)x^9$$

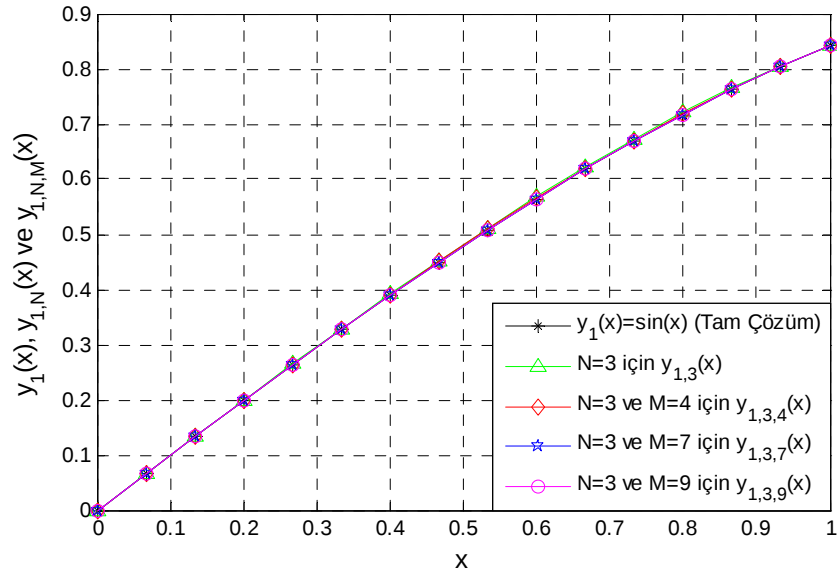
$$y_{2,3,9}(x) = 1 - (0.65e-9)x - 0.50000000000000000000x^2 - (0.544e-8)x^3 \\ + (0.416667264697384576e-1)x^4 - (0.304619977464781756e-6)x^5 \\ - (0.138799435778302894e-2)x^6 - (0.160350059097424946e-5)x^7 \\ + (0.265395474254859210e-4)x^8 - (0.105158250818249144e-5)x^9.$$

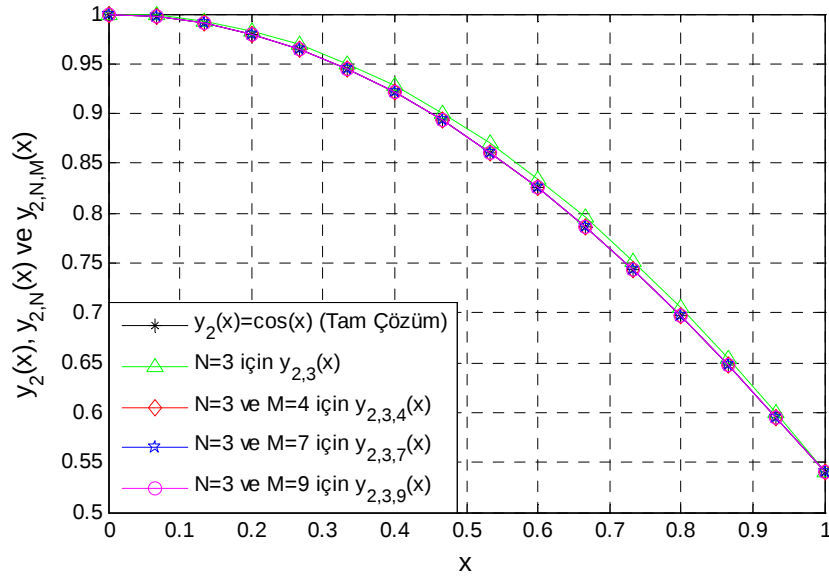
Problemin tam çözümü, Taylor polinom çözümü ve düzeltilmiş Taylor polinom çözümlerinin verilen aralıktan seçilmiş bazı değerleri için nümerik sonuçları Tablo 4.7 de gösterilmiştir.

**Tablo 4.7.** Örnek 4.4'ün tam çözüm ile yaklaşık çözümlerinin $N = 3$  ve  $M = 4, 7, 9$  için nümerik sonuçları

|       | Tam Çözüm   | Taylor Polinom Çözümü | Düzeltilmiş Taylor Polinom Çözümleri |                  |                  |
|-------|-------------|-----------------------|--------------------------------------|------------------|------------------|
| $x_i$ | $y_1(x_i)$  | $y_{1,3}(x_i)$        | $y_{1,3,4}(x_i)$                     | $y_{1,3,7}(x_i)$ | $y_{1,3,9}(x_i)$ |
| 0     | 0           | 0                     | 0                                    | 0                | 0                |
| 0.1   | 0.099833417 | 0.100469835           | 0.099966435                          | 0.099833431      | 0.099833417      |
| 0.3   | 0.295520207 | 0.297452479           | 0.295897146                          | 0.295520250      | 0.295520207      |
| 0.6   | 0.564642473 | 0.568195025           | 0.565398269                          | 0.564642557      | 0.564642474      |
| 0.8   | 0.717356091 | 0.720661113           | 0.718180707                          | 0.717356193      | 0.717356092      |
| 1.0   | 0.841470985 | 0.841470985           | 0.841470985                          | 0.841470986      | 0.841470986      |
| $x_i$ | $y_2(x_i)$  | $y_{2,3}(x_i)$        | $y_{2,3,4}(x_i)$                     | $y_{2,3,7}(x_i)$ | $y_{2,3,9}(x_i)$ |
| 0     | 1           | 1                     | 1                                    | 1                | 1                |
| 0.1   | 0.995004165 | 0.996558798           | 0.994969356                          | 0.995004196      | 0.995004165      |
| 0.3   | 0.955336489 | 0.960275530           | 0.955235541                          | 0.955336581      | 0.955336489      |
| 0.6   | 0.825335615 | 0.834595221           | 0.825112465                          | 0.825335790      | 0.825335615      |
| 0.8   | 0.696706709 | 0.705052223           | 0.696435573                          | 0.696706926      | 0.696706709      |
| 1.0   | 0.540302306 | 0.540302306           | 0.540302306                          | 0.540302306      | 0.540302306      |

Tablo 4.7 incelendiğinde  $M$  değerleri arttıkça, yaklaşık çözümlerin tam çözümlere yaklaştığı yani çözümün doğruluğunun arttığı görülmektedir.

**Şekil 4.5.** Örnek 4.4'ün tam çözüm  $y_1(x)$  ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması



**Şekil 4.6.** Örnek 4.4'ün tam çözüm  $y_2(x)$  ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

Şekil 4.5 ve Şekil 4.6,  $M$  değeri arttığında yaklaşık çözümlerin tam çözüme yaklaştığını göstermektedir. Şimdi,  $y_1(x)$  ve  $y_2(x)$  için düzeltilmiş mutlak hata fonksiyonuna ait aşağıdaki tabloyu inceleyelim.

**Tablo 4.8.** Örnek 4.4'ün düzeltilmiş mutlak hatalarının  $N = 3$  ve  $M = 4, 7, 9$  için karşılaştırılması

| Düzeltilmiş Mutlak Hata $ E_{i,N,M}(x)  =  y_i(x) - y_{i,N,M}(x) $ |                    |                    |                    |
|--------------------------------------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $x_i$                                                              | $ E_{1,3,4}(x_i) $ | $ E_{1,3,7}(x_i) $ | $ E_{1,3,9}(x_i) $ |
| 0                                                                  | 0                  | 0                  | 0                  |
| 0.1                                                                | 0.133018e-3        | 0.145140e-7        | 0.9803e-10         |
| 0.3                                                                | 0.376939e-3        | 0.437078e-7        | 0.2917e-9          |
| 0.6                                                                | 0.755796e-3        | 0.832869e-7        | 0.5736e-9          |
| 0.8                                                                | 0.824616e-3        | 0.102498e-6        | 0.7592e-9          |
| 1.0                                                                | 0.125924e-10       | 0.944906e-9        | 0.9203e-9          |
| $x_i$                                                              | $ E_{2,3,4}(x_i) $ | $ E_{2,3,7}(x_i) $ | $ E_{2,3,9}(x_i) $ |
| 0                                                                  | 0                  | 0                  | 0                  |
| 0.1                                                                | 0.348093e-4        | 0.303379e-7        | 0.667553e-10       |
| 0.3                                                                | 0.100948e-3        | 0.918604e-7        | 0.201317e-9        |
| 0.6                                                                | 0.223150e-3        | 0.175590e-6        | 0.399044e-9        |
| 0.8                                                                | 0.271136e-3        | 0.217100e-6        | 0.523507e-9        |
| 1.0                                                                | 0.950470e-11       | 0.421550e-11       | 0.183542e-11       |

Tablo 4.8 e göre,  $M$  değeri artırıldığında, düzeltilmiş mutlak hatanın sıfıra yaklaştığı yani çözümün doğruluğunun arttığı söylenebilir.

#### 4.1.5. Normal Formdaki Linear Diferensiyel Denklem Sistemlerinin Çözümü için Taylor Sıralama Yöntemi

Değişken katsayılı yüksek mertebeden normal formdaki lineer

$$L[y_i(x)] = y_i'(x) - \sum_{j=1}^m p_{i,j}(x)y_j(x) = g_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (0 \leq a \leq x \leq b) \quad (4.32)$$

diferensiyel denklem sisteminin

$$y_i(a) = c_i \quad (4.33)$$

başlangıç koşulları altında

$$y_i(x) \cong y_{i,N}(x) = \sum_{n=0}^N a_{i,n} x^n \quad (4.34)$$

kesilmiş (sonlu) Taylor serisi formunda bir yaklaşık çözümünün olduğunu varsayalım. Burada  $y_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) bilinmeyen fonksiyon,  $p_{i,j}(x)$  ve  $g_i(x)$   $[a, b]$  'nda bilinen sürekli fonksiyonlar,  $a_{i,n}$  bilinmeyen katsayılar ve  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) reel sabitlerdir. Ayrıca, (4.33) koşulları altında, (4.32) denklem sisteminin yaklaşık çözümünü bulmak için

$$x_i = a + \frac{b-a}{N}i, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad 0 \leq a \leq x \leq b \quad (4.35)$$

ile verilen sıralama noktaları kullanılsın. Öncelikle (4.34) ile verilen yaklaşık çözümün matris formu

$$y_{i,N}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{A}_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (4.36)$$

olarak ifade edilebilir. Burada

$$\mathbf{X}(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^N \end{bmatrix}$$

ve

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} a_{i,0} & a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,N} \end{bmatrix}^T$$

şeklinde tanımlıdır. (4.36) dan  $y_{i,N}$  çözümleri

$$\mathbf{Y}(x) = \bar{\mathbf{X}}(x)\mathbf{A} \quad (4.37)$$

şeklinde ifade edilebilir. Öyleki

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{bmatrix} y_{1,N}(x) \\ y_{2,N}(x) \\ \vdots \\ y_{m,N}(x) \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{X}}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{X}(x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_m \end{bmatrix}$$

olarak tanımlıdır. Ayrıca  $\mathbf{X}(x)$  matrisi ile  $\mathbf{X}'(x)$  türevi arasında

$$\mathbf{X}'(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{B} \quad (4.38)$$

bağıntısı vardır. Burada  $\mathbf{B}$  matrisi

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlıdır. O halde (4.36) ve (4.38) den

$$y'_{i,N}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}\mathbf{A}_i \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (4.39)$$

elde edilir. Böylece

$$\mathbf{Y}'(x) = \bar{\mathbf{X}}(x)\bar{\mathbf{B}}\mathbf{A}, \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (4.40)$$

yazılabilir. Burada

$$\mathbf{Y}'(x) = \begin{bmatrix} y'_{1,N}(x) \\ y'_{2,N}(x) \\ \vdots \\ y'_{m,N}(x) \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{X}}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{X}(x) \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{B} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_m \end{bmatrix}$$

olarak tanımlıdır. Şimdi (4.32) denklem sistemini

$$\mathbf{Y}'(x) = \mathbf{P}(x)\mathbf{Y}(x) + \mathbf{G}(x) \quad (4.41)$$

matris formunda ifade edelim. Burada

$$\mathbf{P}(x) = \begin{bmatrix} p_{1,1}(x) & p_{1,2}(x) & \cdots & p_{1,m}(x) \\ p_{2,1}(x) & p_{2,2}(x) & \cdots & p_{2,m}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m,1}(x) & p_{m,2}(x) & \cdots & p_{m,m}(x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. (4.41) de (4.35) ile verilen sıralama noktaları kullanılırsa

$$\mathbf{Y}'(x_k) = \mathbf{P}(x_k)\mathbf{Y}(x_k) + \mathbf{G}(x_k) \quad (k=0,1,\dots,N)$$

ya da

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{P}\mathbf{Y} + \mathbf{G} \quad (4.42)$$

kapalı formu elde edilir. Burada

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{P}(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{P}(x_N) \end{bmatrix}, \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}(x_0) \\ \mathbf{Y}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{Y}(x_N) \end{bmatrix}, \mathbf{Y}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}'(x_0) \\ \mathbf{Y}'(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{Y}'(x_N) \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}(x_0) \\ \mathbf{G}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{G}(x_N) \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. (4.37) ve (4.40) da sıralama noktaları kullanılırsa

$$\mathbf{Y}(x_k) = \bar{\mathbf{X}}(x_k) \mathbf{A} \text{ ve } \mathbf{Y}'(x_k) = \bar{\mathbf{X}}(x_k) \bar{\mathbf{B}} \mathbf{A} \quad (k = 0, 1, \dots, N)$$

ya da kısaca

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} \mathbf{A} \text{ ve } \mathbf{Y}' = \mathbf{X} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{A} \quad (4.43)$$

elde edilir. Öyleki

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{X}}(x_0) \\ \bar{\mathbf{X}}(x_1) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{X}}(x_N) \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{X}}(x_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_k) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(x_k) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{X}(x_k) \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. (4.43), (4.42) te yerine yazılırsa

$$\{\mathbf{X} \bar{\mathbf{B}} - \mathbf{P} \mathbf{X}\} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (4.44)$$

temel matris denklemi elde edilir. (4.44) de yer alan  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{X}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}$ ,  $\mathbf{A}$  ve  $\mathbf{G}$  matrislerinin boyutları sırasıyla  $m(N+1) \times m(N+1)$ ,  $m(N+1) \times m(N+1)$ ,  $m(N+1) \times m(N+1)$ ,  $m(N+1) \times 1$  ve  $m(N+1) \times 1$  şeklindedir. (4.32) denklem sistemine karşılık gelen (4.44) temel matris denklemi

$$\mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{G} \text{ ya da } [\mathbf{W}; \mathbf{G}] \quad (4.45)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada

$$\mathbf{W} = \mathbf{X} \bar{\mathbf{B}} - \mathbf{P} \mathbf{X} = [w_{p,q}] \quad p, q = 1, 2, \dots, m(N+1)$$

olarak tanımlıdır. (4.35) ile verilen sıralama noktaları ve (4.37) kullanılarak (4.33) ile verilen koşullar için matris formu

$$\bar{\mathbf{X}}(a) \mathbf{A} = \mathbf{C}$$

olarak ifade edilir. Öyleki

$$\mathbf{C} = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_m]^T$$

olarak tanımlıdır. Böylece, koşullar için

$$\mathbf{U} \mathbf{A} = \mathbf{C} \text{ ya da } [\mathbf{U}; \mathbf{C}] \quad (4.46)$$

temel matris formu elde edilir. Öyleki

$$\mathbf{U} = \bar{\mathbf{X}}(a)$$

şeklindedir. Son olarak, (4.45) matris formunun son  $m$  satırı silinerek, bunların yerine (4.46) koşullar için artırılmış matrisinin satırları yazılırsa yeni

$$\widetilde{\mathbf{W}}\mathbf{A} = \widetilde{\mathbf{G}} \text{ ya da } [\widetilde{\mathbf{W}}; \widetilde{\mathbf{G}}]$$

artırılmış matrisi elde edilir. Burada (4.45) matrisinin son satırlarının silinmesi zorunlu değildir. Eğer,  $\widetilde{\mathbf{W}}$  matrisi tekil ise bu durumda (4.45) matrisinin farklı satırları silenerek, silinen satırlar yerine (4.46) matrisinin satırları yazılabilir. Eğer,  $\text{rank } \widetilde{\mathbf{W}} = \text{rank} [\widetilde{\mathbf{W}}; \widetilde{\mathbf{G}}] = m(N+1)$  ise o zaman

$$\mathbf{A} = (\widetilde{\mathbf{W}})^{-1} \widetilde{\mathbf{G}}$$

yazılabilir. Böylece,

$$\mathbf{A}_i = [a_{i,0} \quad a_{i,1} \quad a_{i,2} \quad \cdots \quad a_{i,N}]^T$$

bilinmeyen Taylor katsayılar matrisi belirlenmiş olur. Belirlenen  $a_{i,0}, a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,N}$  ( $i=1,2,\dots,m$ ) katsayıları (4.34) denkleminde yerlerine yazılırsa (4.32) diferensiyel denklem sisteminin Taylor polinom çözümleri elde edilir.

#### 4.1.6. Taylor Sıralama Yöntemiyle Çözülen Normal Formdaki Lineer Diferensiyel Denklem Sistemleri için Çözümün Doğruluğu ve Rezidü Hata Tahmini

Bu bölümde rezidü hata fonksiyonu [52,53,54,55,56] yardımıyla, (4.33) başlangıç koşulları altında (4.32) sisteminin yaklaşık çözümü olan (4.34) Taylor polinom çözümü için bir hata tahmini verilecektir. Öncelikle (4.32) sistemi için rezidü hata fonksiyonunu

$$R_{i,N}(x) = L[y_{i,N}(x)] - g_i(x) \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (4.47)$$

şeklinde tanımlayalım. Burada  $y_{i,N}(x)$ , (4.32) denklem sisteminin Taylor polinom çözümüdür. Böylece  $y_{i,N}(x)$

$$\begin{cases} y'_{i,N}(x) - \sum_{j=1}^m p_{i,j}(x)y_{j,N}(x) = g_i(x) + R_{i,N}(x), & (i=1,2,\dots,m) \\ y_{i,N}(a) = c_i, & (i=1,2,3). \end{cases}$$

problemini sağlar. Ayrıca  $e_{i,N}(x)$  hata fonksiyonu

$$e_{i,N}(x) = y_i(x) - y_{i,N}(x) \quad (4.48)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $y_i(x)$ , (4.32) denklem sisteminin tam çözümüdür. (4.32), (4.33), (4.47) ve (4.48) denklemlerinden

$$e_{i,N}(a) = 0, \quad (i=1,2,\dots,m)$$

homojen karışık koşulları altında

$$L[e_{i,N}(x)] = L[y_i(x)] - L[y_{i,N}(x)] = -R_{i,N}(x)$$

hata diferensiyel denklemi elde edilir. Ya da, açık şekilde hata problemi

$$\begin{cases} e'_{i,N}(x) - \sum_{j=1}^m p_{i,j}(x)e_{j,N}(x) = -R_{i,N}(x), & (i=1,2,\dots,m) \\ e_{i,N}(a) = 0, & (i=1,2,3) \end{cases} \quad (4.49)$$

şeklinde tanımlanır. Burada dikkat edilmelidir ki;

$$y_i(a) = c_i \text{ ve } y_{i,N}(a) = c_i$$

homojen olmayan başlangıç koşulları

$$e_{i,N}(a) = 0$$

şeklinde homojen olan başlangıç koşullarına dönüşmektedir. (4.49) hata problemi, geliştirilen metod yardımıyla çözülebilir. Böylece

$$e_{i,N,M}(x) = \sum_{n=0}^M a_{i,n}^* x^n \quad (M > N, \quad i=1,2,\dots,m)$$

şeklinde,  $e_{i,N}(x)$  e göre  $e_{i,N,M}(x)$  yaklaşık çözümü bulunur. Sonuç olarak,  $y_{i,N}(x)$  ve  $e_{i,N,M}(x)$  polinomları yardımıyla

$$y_{i,N,M}(x) = y_{i,N}(x) + e_{i,N,M}(x)$$

düzeltilmiş Taylor polinom çözümü elde edilir. Ayrıca,

$$e_{i,N}(x) = y_i(x) - y_{i,N}(x)$$

asıl hata fonksiyonunu;

$$e_{i,N,M}(x)$$

tahmini hata fonksiyonunu;

$$E_{i,N,M}(x) = e_{i,N}(x) - e_{i,N,M}(x) = y_i(x) - y_{i,N,M}(x)$$

ise *düzeltilmiş hata fonksiyonunu* ifade eder. Şimdi aşağıda verilen problemlerin çözümünü, Taylor sıralama metodunu kullanarak bulmaya çalışalım.

**Örnek 4.5.** Tam çözümleri  $y_1(x) = e^x$ ,  $y_2(x) = \sin(x)$  ve  $y_3(x) = e^x + \cos(x)$  olan normal formdaki

$$\begin{cases} y_1^{(1)}(x) - y_3(x) = -\cos(x) \\ y_2^{(1)}(x) - y_3(x) = -e^x \\ y_3^{(1)}(x) - y_1(x) + y_2(x) = 0 \end{cases}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

lineer diferensiyel denklem sistemini

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0 \text{ ve } y_3(0) = 2$$

başlangıç koşulları altında Taylor sıralama yöntemini kullanarak çözelim [63].

$N = 2$  için  $y_{i,2}(x)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) kesilmiş Taylor seri çözümleri

$$y_{i,2}(x) = \sum_{n=0}^2 a_{i,n} x^n$$

şeklindedir. Şimdi yaklaşık çözümün  $a_{i,n}$ , ( $n = 0, 1, 2$ ) katsayılarını hesaplayalım.  $a = 0$ ,  $b = 1$  ve  $N = 2$  için (4.35) ile verilen sıralama noktalarının kümesi

$$\left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1 \right\}$$

olur. Yukarıda bahsedilen Taylor metodu kullanılırsa  $N = 2$  için  $y_{i,2}(x)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) Taylor polinom çözümleri

$$y_{1,2}(x) = 1 + x + 0.67061360741023699830x^2$$

$$y_{2,2}(x) = x - 0.1005251013995184324x^2$$

$$y_{3,2}(x) = 2 + x + 0.19278467720243885767x^2$$

şeklinde hesaplanır. Düzeltilmiş Taylor polinom çözümlerini elde etmek için

$$\begin{cases} e'_{1,2}(x) - e_{3,2}(x) = -R_{1,2}(x) \\ e'_{2,2}(x) - e_{3,2}(x) = -R_{2,2}(x) \\ e'_{3,2}(x) - e_{1,2}(x) + e_{2,2}(x) = -R_{3,2}(x) \end{cases}$$

hata problemini ele alalım. Öyleki

$$\begin{cases} R_{1,2}(x) = y'_{1,2}(x) - y_{3,2}(x) + \cos(x) \\ R_{2,2}(x) = y'_{2,2}(x) - y_{3,2}(x) + e^x \\ R_{3,2}(x) = y'_{3,2}(x) - y_{1,2}(x) + y_{2,2}(x) \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. Yine Taylor metodunu kullanarak  $M = 3$  için bu hata problemi çözümlerse  $e_{1,2}(x)$ ,  $e_{2,2}(x)$  ve  $e_{3,2}(x)$  e göre sırasıyla  $e_{1,2,3}(x)$ ,  $e_{2,2,3}(x)$  ve  $e_{3,2,3}(x)$  tahmini hata fonksiyonları

$$e_{1,2,3}(x) = -0.198342522463333336x^2 + 0.238386300344444440x^3$$

$$e_{2,2,3}(x) = (0.922148375866666676e - 1)x^2 - 0.152417435955555569x^3$$

$$e_{3,2,3}(x) = -0.236207314336666668x^2 + 0.290461694969999962x^3$$

şeklinde hesaplanır ve böylece

$$y_{1,2,3}(x) = 1 + x + 0.4722710849x^2 + 0.238386300344444440x^3$$

$$y_{2,2,3}(x) = x - (0.831026381e - 2)x^2 - 0.152417435955555569x^3$$

$$y_{3,2,3}(x) = 2 + x - (0.434226371e - 1)x^2 + 0.290461694969999962x^3$$

düzeltilmiş Taylor polinom çözümleri elde edilmiş olur. Benzer şekilde  $y_{1,2,5}(x)$ ,  $y_{2,2,5}(x)$ ,  $y_{3,2,5}(x)$  ve  $y_{1,2,9}(x)$ ,  $y_{2,2,9}(x)$ ,  $y_{3,2,9}(x)$  çözümleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\begin{aligned} y_{1,2,5}(x) &= 1 + x + 0.4997685849x^2 + 0.168225454862777624x^3 \\ &\quad + (0.377211001762152444e-1)x^4 + (0.125314366180554194e-1)x^5 \\ y_{2,2,5}(x) &= x + (0.453421e-4)x^2 - 0.166989019477499944x^3 \\ &\quad + (0.782935853298638574e-3)x^4 + (0.764087047222199168e-2)x^5 \\ y_{3,2,5}(x) &= 2 + x - (0.938985e-4)x^2 + 0.167226488756944570x^3 \\ &\quad + (0.820919222569445051e-1)x^4 + (0.934385828125017249e-2)x^5 \end{aligned}$$

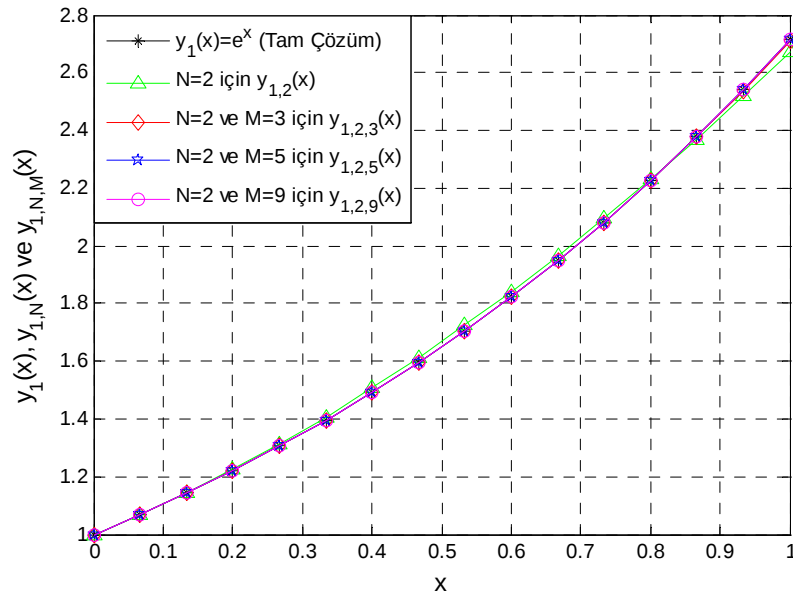
ve

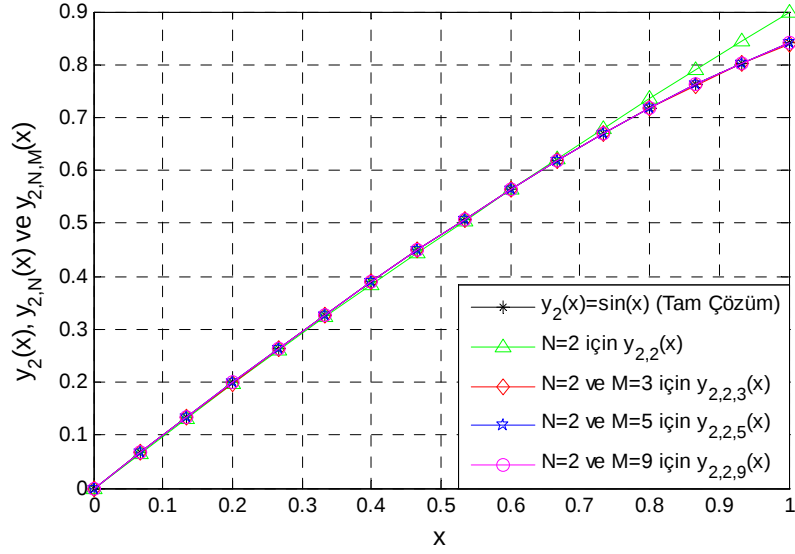
$$\begin{aligned} y_{1,2,9}(x) &= 1 + x + 0.5000000043^2 + 0.166666599243195352x^3 + (0.416670828610961054e-1)x^4 \\ &\quad + (0.833202202396421399e-2)x^5 + (0.139106498306773574e-2)x^6 \\ &\quad + (0.196782559969577166e-3)x^7 + (0.247511344531048394e-4)x^8 \\ &\quad + (0.352065501130205405e-5)x^9 \\ y_{2,2,9}(x) &= x + (0.1341e-6)x^2 - (0.166668546848332878)x^3 + (0.113679634867747126e-4)x^4 \\ &\quad + (0.829617310724284352e-2)x^5 + (0.704477670598890882e-4)x^6 \\ &\quad - (0.275912593465932334e-3)x^7 + (0.459553932872225344e-4)x^8 \\ &\quad - (0.863843029863531342e-5)x^9 \\ y_{3,2,9}(x) &= 2 + x - (0.121e-7)x^2 + 0.166666815135405600x^3 + (0.833324772620436250e-1)x^4 \\ &\quad + (0.833609272867619212e-2)x^5 - (0.526472155115698116e-5)x^6 \\ &\quad + (0.204359255008057517e-3)x^7 + (0.458737358854932608e-4)x^8 \\ &\quad + (0.379297555852531332e-5)x^9. \end{aligned}$$

Problemin tam çözümü, Taylor polinom çözümü ve düzeltilmiş Taylor polinom çözümlerinin verilen aralıktan seçilen bazı değerleri için nümerik sonuçları Tablo 4.9 da gösterilmiştir. Buna göre,  $M$  değeri arttıkça, yaklaşık çözümlerin tam çözümlere yaklaştığı ve çözümün doğruluğunun arttığı görülmektedir.

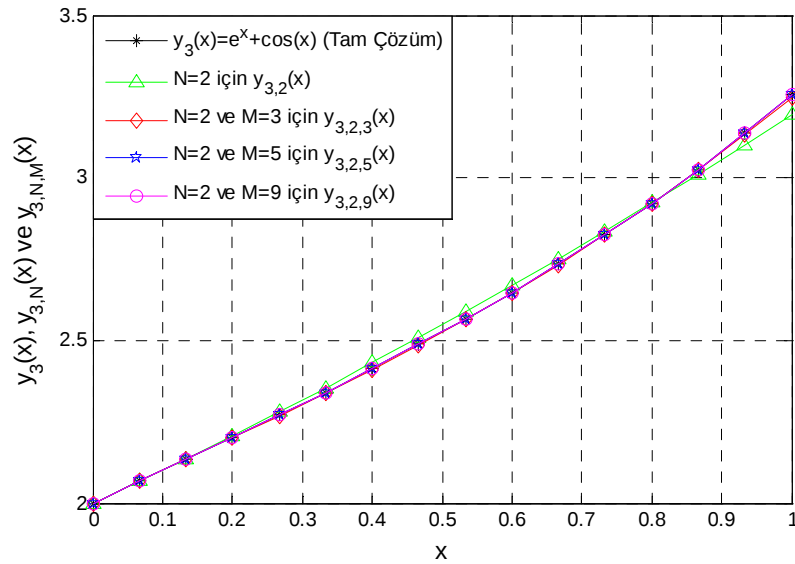
**Tablo 4.9.** Örnek 4.5'in tam çözüm ile yaklaşık çözümlerinin $N = 2$  ve  $M = 3, 5, 9$  için nümerik sonuçları

|       | Tam Çözüm   | Taylor Polinom Çözümü | Düzeltilmiş Taylor Polinom Çözümleri |                  |                  |
|-------|-------------|-----------------------|--------------------------------------|------------------|------------------|
| $x_i$ | $y_1(x_i)$  | $y_{1,2}(x_i)$        | $y_{1,2,3}(x_i)$                     | $y_{1,2,5}(x_i)$ | $y_{1,2,9}(x_i)$ |
| 0     | 1           | 1                     | 1                                    | 1                | 1                |
| 0.2   | 1.221402758 | 1.226824544           | 1.220797934                          | 1.221400911      | 1.221402758      |
| 0.5   | 1.648721271 | 1.667653402           | 1.647866059                          | 1.648719504      | 1.648721271      |
| 0.8   | 2.225540928 | 2.229192709           | 2.224307280                          | 2.225540191      | 2.225540928      |
| 1.0   | 2.718281828 | 2.670613607           | 2.710657385                          | 2.718246577      | 2.718281828      |
| $x_i$ | $y_2(x_i)$  | $y_{2,2}(x_i)$        | $y_{2,2,3}(x_i)$                     | $y_{2,2,5}(x_i)$ | $y_{2,2,9}(x_i)$ |
| 0     | 0           | 0                     | 0                                    | 0                | 0                |
| 0.2   | 0.198669331 | 0.195978996           | 0.198448250                          | 0.198669599      | 0.198669331      |
| 0.5   | 0.479425539 | 0.474868725           | 0.478870255                          | 0.479425419      | 0.479425539      |
| 0.8   | 0.717356091 | 0.735663935           | 0.716643704                          | 0.717355092      | 0.717356091      |
| 1.0   | 0.841470985 | 0.899474899           | 0.839271300                          | 0.841480129      | 0.841470980      |
| $x_i$ | $y_3(x_i)$  | $y_{3,2}(x_i)$        | $y_{3,2,3}(x_i)$                     | $y_{3,2,5}(x_i)$ | $y_{3,2,9}(x_i)$ |
| 0     | 2           | 2                     | 2                                    | 2                | 2                |
| 0.2   | 2.201469336 | 2.207711387           | 2.200586788                          | 2.201468393      | 2.201469336      |
| 0.5   | 2.526303833 | 2.548196169           | 2.525452053                          | 2.526302577      | 2.526303832      |
| 0.8   | 2.922247638 | 2.923382193           | 2.920925900                          | 2.922246514      | 2.922247638      |
| 1.0   | 3.258584134 | 3.192784677           | 3.247039058                          | 3.258568371      | 3.258584134      |

**Şekil 4.7.** Örnek 4.5'in tam çözüm  $y_1(x)$  ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması



**Şekil 4.8.** Örnek 4.5'in tam çözüm  $y_2(x)$  ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması



**Şekil 4.9.** Örnek 4.5'in tam çözüm  $y_3(x)$  ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

Şekil 4.7, Şekil 4.8 ve Şekil 4.9 dan,  $M$  değeri artırıldığında yaklaşık çözümlerin tam çözümlere yaklaştığı görülmektedir. Şimdi,  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  ve  $y_3(x)$  için düzeltilmiş mutlak hata fonksiyonlarına ait aşağıdaki Tablo 4.10 u inceleyelim. Buna göre,  $M$  değeri artırıldığında, düzeltilmiş mutlak hataların sıfıra yaklaştığı diğer bir ifadeyle çözümün doğruluğunun arttığı gözlenmektedir.

**Tablo 4.10.** Örnek 4.5'in düzeltilmiş mutlak hatalarının $N = 2$  ve  $M = 3, 5, 9$  için karşılaştırılması

| Düzeltilmiş Mutlak Hata $ E_{i,N,M}(x)  =  y_i(x) - y_{i,N,M}(x) $ |                    |                    |                    |
|--------------------------------------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $x_i$                                                              | $ E_{1,2,3}(x_i) $ | $ E_{1,2,5}(x_i) $ | $ E_{1,2,9}(x_i) $ |
| 0                                                                  | 0                  | 0                  | 0                  |
| 0.2                                                                | 0.604824e-3        | 0.184731e-5        | 0.245769e-11       |
| 0.5                                                                | 0.855212e-3        | 0.176646e-5        | 0.381529e-10       |
| 0.8                                                                | 0.123365e-2        | 0.737484e-6        | 0.927858e-10       |
| 1.0                                                                | 0.762444e-2        | 0.352519e-4        | 0.698288e-9        |
| $x_i$                                                              | $ E_{2,2,3}(x_i) $ | $ E_{2,2,5}(x_i) $ | $ E_{2,2,9}(x_i) $ |
| 0                                                                  | 0                  | 0                  | 0                  |
| 0.2                                                                | 0.221081e-3        | 0.268509e-6        | 0.248487e-9        |
| 0.5                                                                | 0.555284e-3        | 0.119821e-6        | 0.292619e-9        |
| 0.8                                                                | 0.712387e-3        | 0.998966e-6        | 0.259591e-9        |
| 1.0                                                                | 0.219868e-2        | 0.914414e-5        | 0.434892e-8        |
| $x_i$                                                              | $ E_{3,2,3}(x_i) $ | $ E_{3,2,5}(x_i) $ | $ E_{3,2,9}(x_i) $ |
| 0                                                                  | 0                  | 0                  | 0                  |
| 0.2                                                                | 0.882548e-3        | 0.942921e-6        | 0.528007e-10       |
| 0.5                                                                | 0.851780e-3        | 0.125541e-5        | 0.990846e-10       |
| 0.8                                                                | 0.132174e-2        | 0.112380e-5        | 0.135252e-9        |
| 1.0                                                                | 0.115451e-1        | 0.157635e-4        | 0.561586e-10       |

**Örnek 4.6.** Tam çözümleri  $y_1(x) = e^{\sin(x)}(2 \cosh(x) - x)$  ve  $y_2(x) = e^{\sin(x)}(2 \sinh(x) - 2)$  olan normal formdaki lineer

$$\begin{cases} y_1^{(1)}(x) = \cos(x)y_1(x) + y_2(x) + e^{\sin(x)} \\ y_2^{(1)}(x) = y_1(x) + \cos(x)y_2(x) + xe^{\sin(x)} \end{cases}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

diferensiyel denklem sistemini

$$y_1(0) = 2 \text{ ve } y_2(0) = -2$$

başlangıç koşulları altında Taylor sıralama yöntemini kullanarak çözelim.

$N = 2$  için  $y_{i,2}(x)$  ( $i = 1, 2$ ) kesilmiş Taylor seri çözümleri

$$y_{i,2}(x) = \sum_{n=0}^2 a_{i,n} x^n$$

şeklinde. Şimdi yaklaşık çözümün  $a_{i,n}$ , ( $n = 0, 1, 2$ ) katsayılarını hesaplayalım.  $a = 0$

,  $b = 1$  ve  $N = 3$  için (4.35) ile verilen sıralama noktalarının kümesi

$$\left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = 1 \right\}$$

olur. Yukarıda bahsedilen Taylor metodu kullanılırsa  $N = 2$  için  $y_{i,2}(x)$  ( $i = 1, 2$ )

Taylor polinom çözümleri

$$y_{1,2}(x) = 2 + x + 1.8646865593930787634x^2$$

$$y_{2,2}(x) = -2 + 2.5859190249855302151x^2$$

şeklinde hesaplanır. Düzeltilmiş Taylor polinom çözümlerini elde etmek için

$$\begin{cases} e_{1,2}^{(1)}(x) - \cos(x)e_{1,2}(x) - e_{2,2}(x) = -R_{1,2} \\ e_{2,2}^{(1)}(x) - e_{1,2}(x) - \cos(x)e_{2,2}(x) = -R_{2,2} \end{cases}$$

hata problemini ele alalım. Öyleki

$$\begin{cases} R_{1,2}(x) = y_{1,2}^{(1)}(x) - \cos(x)y_{1,2}(x) - y_{2,2}(x) - e^{\sin(x)} \\ R_{2,2}(x) = y_{2,2}^{(1)}(x) - y_{1,2}(x) - \cos(x)y_{2,2}(x) - xe^{\sin(x)} \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. Yine Taylor metodunu kullanarak  $M = 3$  için bu hata problemi çözümlerse  $e_{1,2}(x)$  ve  $e_{2,2}(x)$  e göre sırasıyla  $e_{1,2,3}(x)$  ve  $e_{2,2,3}(x)$  tahmini hata fonksiyonları

$$e_{1,2,3}(x) = -1.0553168029550909369x^2 + 0.99497083450946547051x^3$$

$$e_{2,2,3}(x) = -1.8301377254066642699x^2 + 2.0381675757084778421x^3$$

şeklinde hesaplanır ve böylece

$$y_{1,2,3}(x) = 2 + x + 0.809369756x^2 + 0.99497083450946547051x^3$$

$$y_{2,2,3}(x) = -2 + 0.755781300x^2 + 2.0381675757084778421x^3$$

düzeltilmiş Taylor polinom çözümleri elde edilmiş olur. Benzer şekilde  $y_{1,2,5}(x)$ ,

$y_{2,2,5}(x)$  ve  $y_{1,2,9}(x)$ ,  $y_{2,2,9}(x)$  çözümleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$y_{1,2,5}(x) = 2 + x + 1.019087035x^2 + 0.38418404084877058288x^3 + 0.6009588114966867209x^4 - 0.16172189638449954742x^5$$

$$y_{2,2,5}(x) = -2 + 1.031092567x^2 + 1.1335297565208665254x^3 + 1.072894635943808348x^4 - 0.4205451163175187106x^5$$

ve

$$\begin{aligned} y_{1,2,9}(x) = & 2 + x + 0.9999897539x^2 + 0.500173101302650469x^3 + 0.332010653018222968x^4 \\ & + (0.807771671168744376e-1)x^5 - (0.378493987310264402e-1)x^6 \\ & - (0.107759922510410888e-1)x^7 - (0.415635790661426086e-1)x^8 \\ & + (0.166670256823326924e-1)x^9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{2,2,9}(x) = & -2 + 1.000008919x^2 + (0.561045229456268930e-15)x + 1.33319973007876058x^3 \\ & + 0.584178089466959705x^4 + (0.639409598703650772e-1)x^5 \\ & - (0.642539417701755156e-1)x^7 - (0.177960431765313842e-1)x^8 \\ & + (0.176957626717921812e-1)x^9 - 0.104116324378878744x^6 \end{aligned}$$

Problemin tam çözümü, Taylor polinom çözümü ve düzeltilmiş Taylor polinom çözümlerinin verilen aralıktan seçilen bazı değerleri için nümerik sonuçları Tablo

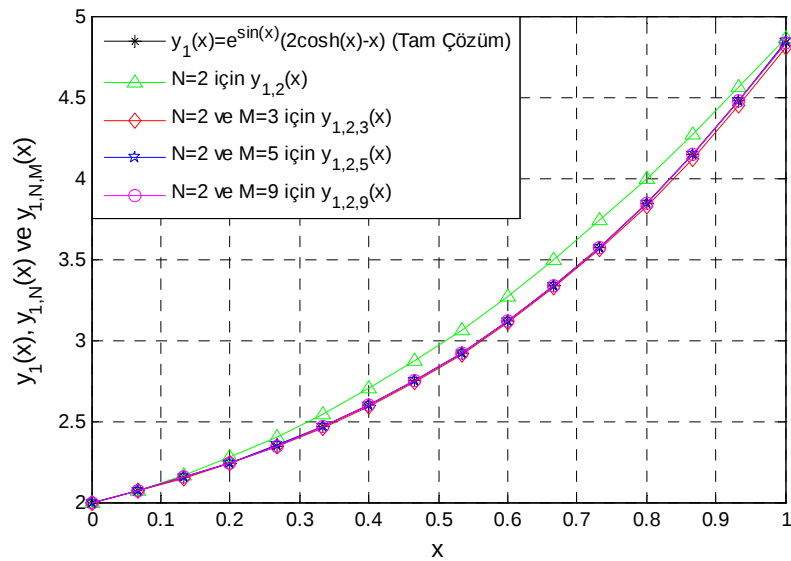
4.11 de gösterilmiştir. Buna göre,  $M$  değeri arttıkça, yaklaşık çözümlerin tam çözümlere yaklaştığı ve çözümün doğruluğunun arttığı görülmektedir.

**Tablo 4.11.** Örnek 4.6'nın tam çözüm ile yaklaşık çözümlerinin

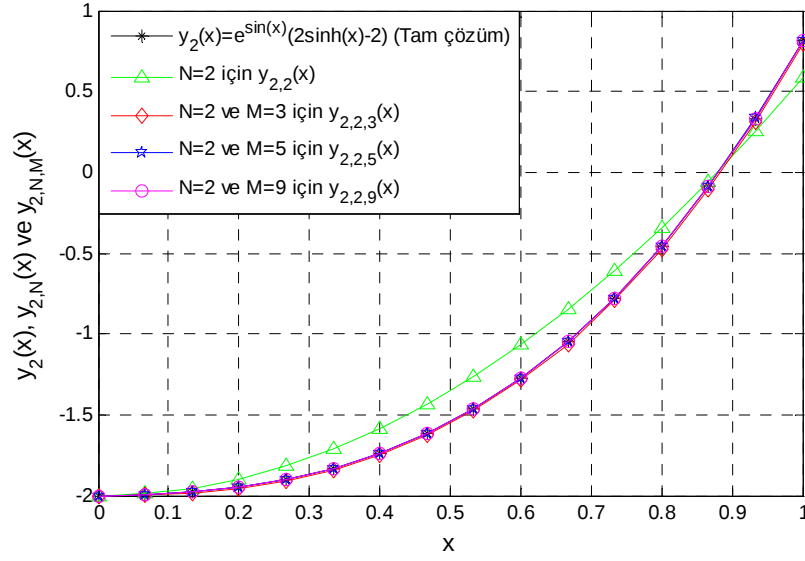
$N = 2$  ve  $M = 3, 5, 9$  için nümerik sonuçları

|       | Tam Çözüm    | Taylor Polinom Çözümü | Düzeltilmiş Taylor Polinom Çözümleri |                  |                  |
|-------|--------------|-----------------------|--------------------------------------|------------------|------------------|
| $x_i$ | $y_1(x_i)$   | $y_{1,2}(x_i)$        | $y_{1,2,3}(x_i)$                     | $y_{1,2,5}(x_i)$ | $y_{1,2,9}(x_i)$ |
| 0     | 2            | 2                     | 2                                    | 2                | 2                |
| 0.1   | 2.110534057  | 2.118646866           | 2.109088668                          | 2.110633533      | 2.110534040      |
| 0.3   | 2.406356994  | 2.467821790           | 2.399707491                          | 2.406565584      | 2.406356979      |
| 0.6   | 3.114745826  | 3.271287161           | 3.106286812                          | 3.115163853      | 3.114745811      |
| 0.8   | 3.841624628  | 3.993399398           | 3.827421711                          | 3.842077629      | 3.841624613      |
| 1.0   | 4.839428566  | 4.864686559           | 4.804340591                          | 4.842507991      | 4.839428731      |
| $x_i$ | $y_2(x_i)$   | $y_{2,2}(x_i)$        | $y_{2,2,3}(x_i)$                     | $y_{2,2,5}(x_i)$ | $y_{2,2,9}(x_i)$ |
| 0     | -2           | -2                    | -2                                   | -2               | -2               |
| 0.1   | -1.988607781 | -1.974140810          | -1.990404019                         | -1.988452461     | -1.988607765     |
| 0.3   | -1.869206372 | -1.767267288          | -1.876949158                         | -1.868927844     | -1.869206358     |
| 0.6   | -1.278121055 | -1.069069151          | -1.287674536                         | -1.277618692     | -1.278121041     |
| 0.8   | -0.458543621 | -0.345011824          | -0.472758169                         | -0.458080103     | -0.458543604     |
| 1.0   | 0.812855337  | 0.585919025           | 0.793948876                          | 0.816971843      | 0.812857152      |

Şimdi,  $y_1(x)$  ve  $y_2(x)$  için tam çözüm ile yaklaşık çözümlerin karşılaştırmasını gösteren Şekil 4.10, Şekil 4.11'i ayrıca düzeltilmiş mutlak hata fonksiyonlarına ait aşağıdaki Tablo 4.12'yi inceleyelim.



**Şekil 4.10.** Örnek 4.6'nın tam çözüm  $y_1(x)$  ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması



**Şekil 4.11.** Örnek 4.6'ın tam çözüm  $y_2(x)$  ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

Şekil 4.10 ve Şekil 4.11 den,  $M$  değeri artırıldığında, Taylor polinom çözümlerinin tam çözümlere yaklaştığı görülmektedir. Tablo 4.12 den de yine,  $M$  değeri artırıldığında, düzeltilmiş mutlak hataların sıfıra yaklaştığı diğer bir ifadeyle çözümün doğruluğunun arttığı görülmektedir.

**Tablo 4.12.** Örnek 4.6'nın düzeltilmiş mutlak hatalarının  $N = 2$  ve  $M = 3, 5, 9$  için karşılaştırılması

| Düzeltilmiş Mutlak Hata $ E_{i,N,M}(x)  =  y_i(x) - y_{i,N,M}(x) $ |                    |                    |                    |
|--------------------------------------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $x_i$                                                              | $ E_{1,2,3}(x_i) $ | $ E_{1,2,5}(x_i) $ | $ E_{1,2,9}(x_i) $ |
| 0                                                                  | 0                  | 0                  | 0                  |
| 0.1                                                                | 0.144539e-2        | 0.994758e-4        | 0.170758e-7        |
| 0.3                                                                | 0.664950e-2        | 0.208590e-3        | 0.154019e-7        |
| 0.6                                                                | 0.845901e-2        | 0.418026e-3        | 0.154698e-7        |
| 0.8                                                                | 0.142029e-1        | 0.453002e-3        | 0.151985e-7        |
| 1.0                                                                | 0.350880e-1        | 0.307943e-2        | 0.165063e-6        |
| $x_i$                                                              | $ E_{2,2,3}(x_i) $ | $ E_{2,2,5}(x_i) $ | $ E_{2,2,9}(x_i) $ |
| 0                                                                  | 0                  | 0                  | 0                  |
| 0.1                                                                | 0.179624e-2        | 0.155321e-3        | 0.168819e-7        |
| 0.3                                                                | 0.774277e-2        | 0.278529e-3        | 0.143867e-7        |
| 0.6                                                                | 0.955348e-2        | 0.502363e-3        | 0.134442e-7        |
| 0.8                                                                | 0.142145e-1        | 0.463518e-3        | 0.164055e-7        |
| 1.0                                                                | 0.189065e-1        | 0.411651e-2        | 0.181441e-5        |

## 4.2. Lucas Collocation (Sıralama) Yöntemi

### 4.2.1. Değişken Katsayılı Lineer Diferensiyel Denklemlerin Çözümü için Lucas Sıralama Yöntemi

Değişken katsayılı  $m$ . mertebeden lineer

$$L[y(x)] = \sum_{k=0}^m p_k(x) y^{(k)}(x) = g(x), \quad 0 \leq a \leq x \leq b \quad (4.50)$$

diferensiyel denkleminin

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk} y^{(k)}(a) + b_{jk} y^{(k)}(b)) = c_j, \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (4.51)$$

karışık koşulları altında

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n L_n(x) \quad (4.52)$$

kesilmiş Lucas serisi formunda bir yaklaşık çözümünün olduğunu varsayalım. Burada  $y^{(0)}(x) = y(x)$  bilinmeyen fonksiyon,  $p_k(x)$  ve  $g(x)$   $[a, b]$ 'nda bilinen sürekli fonksiyonlar,  $y^{(k)}(x)$ ,  $y(x)$  in  $k$ . mertebeden türevidir.  $a_n$  bilinmeyen katsayılar,  $a_{jk}$ ,  $b_{jk}$  ve  $c_j$  reel katsayılar, ve  $L_n(x)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$

$$L_0(x) = 2; \quad L_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} x^{n-2k}, \quad (n \geq 1) \quad \lfloor n/2 \rfloor = \begin{cases} n/2, & n \text{ çift} \\ (n-1)/2, & n \text{ tek} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı Lucas polinomlarıdır [43,44]. Ayrıca, (4.51) koşulları altında, (4.50) denkleminin yaklaşık çözümünü bulmak için

$$x_i = a + \frac{b-a}{N} i, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad 0 \leq a \leq x \leq b \quad (4.53)$$

ile verilen sıralama noktalarını kullanalım. Öncelikle (4.52) ile verilen yaklaşık çözümün matris formu

$$y_N(x) = \mathbf{L}(x) \mathbf{A} \quad (4.54)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\mathbf{L}(x) = [L_0(x) \quad L_1(x) \quad L_2(x) \quad \dots \quad L_N(x)]$$

ve

$$\mathbf{A} = [a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_N]^T$$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca (4.54) eşitliği

$$y_N(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{D}^T \mathbf{A} \quad (4.55)$$

olarak ifade edilebilir. Burada

$$\mathbf{X}(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^N \end{bmatrix}$$

ve  $N$  tekse

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1} \binom{1}{0} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{2}{1} \binom{1}{1} & 0 & \frac{2}{2} \binom{2}{0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \binom{2}{1} & 0 & \frac{3}{3} \binom{3}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{4}{2} \binom{2}{2} & 0 & \frac{4}{3} \binom{3}{1} & 0 & \frac{4}{4} \binom{4}{0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{n-1}{(n-1)/2} \binom{(n-1)/2}{(n-1)/2} & 0 & \frac{n-1}{(n+1)/2} \binom{(n+1)/2}{(n-3)/2} & 0 & \frac{n-1}{(n+3)/2} \binom{(n+3)/2}{(n-5)/2} & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{n}{(n+1)/2} \binom{(n+1)/2}{(n-1)/2} & 0 & \frac{n}{(n+3)/2} \binom{(n+3)/2}{(n-3)/2} & 0 & \cdots & \frac{n}{n} \binom{n}{0} \end{bmatrix}$$

$N$  çiftse,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1} \binom{1}{0} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{2}{1} \binom{1}{1} & 0 & \frac{2}{2} \binom{2}{0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \binom{2}{1} & 0 & \frac{3}{3} \binom{3}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{4}{2} \binom{2}{2} & 0 & \frac{4}{3} \binom{3}{1} & 0 & \frac{4}{4} \binom{4}{0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{n-1}{n/2} \binom{n/2}{(n-2)/2} & 0 & \frac{n-1}{(n+2)/2} \binom{(n+2)/2}{(n-4)/2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{n}{n/2} \binom{n/2}{n/2} & 0 & \frac{n}{(n+2)/2} \binom{(n+2)/2}{(n-2)/2} & 0 & \frac{n}{(n+4)/2} \binom{(n+4)/2}{(n-4)/2} & \cdots & \frac{n}{n} \binom{n}{0} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca,  $\mathbf{X}(x)$  matrisi ile  $\mathbf{X}'(x)$ ,  $\mathbf{X}''(x)$  ve  $\mathbf{X}^{(k)}(x)$  türevleri arasında

$$\mathbf{X}'(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}, \quad \mathbf{X}''(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}^2 \quad \text{ve} \quad \mathbf{X}^{(k)}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}^k \quad (4.56)$$

bağıntısı vardır. Burada  $\mathbf{B}$  matrisi

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlıdır. O halde (4.55) ve (4.56) dan

$$\mathbf{y}'_N(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}\mathbf{D}^T \mathbf{A}, \quad \mathbf{y}''_N(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}^2\mathbf{D}^T \mathbf{A} \quad \text{ve} \quad \mathbf{y}^{(k)}_N(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}^k\mathbf{D}^T \mathbf{A} \quad (4.57)$$

matris bağıntıları yazılabilir. (4.57), (4.50) denkleminde yerine yazılırsa

$$\sum_{k=0}^m p_k(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{B}^k \mathbf{D}^T \mathbf{A} = \mathbf{g}(x) \quad (4.58)$$

matris bağıntısı elde edilir. (4.58) de (4.53) ile verilen sıralama noktaları kullanılırsa

$$\sum_{k=0}^m p_k(x_i) \mathbf{X}(x_i) \mathbf{B}^k \mathbf{D}^T \mathbf{A} = g(x_i)$$

matris denklem sistemi yada kapalı form olarak

$$\left\{ \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{X} \mathbf{B}^k \mathbf{D}^T \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (4.59)$$

elde edilir. Burada

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} p_k(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_k(x_1) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & p_k(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0) \\ \mathbf{X}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{X}(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^N \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \cdots & x_N^N \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımladır. Böylece (4.50) denklemini için (4.59) ile verilen temel matris denklemini

$$\mathbf{W}\mathbf{A}=\mathbf{G} \text{ ya da } [\mathbf{W};\mathbf{G}]; \text{ öyleki } \mathbf{W} = \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{X} \mathbf{B}^k \mathbf{D}^T \quad (4.60)$$

artırılmış matris formunda yazılabilir. (4.57) den yararlanarak (4.51) koşulları için

$$\sum_{k=0}^{m-1} [a_{jk} \mathbf{X}(a) + b_{jk} \mathbf{X}(b)] \mathbf{B}^k \mathbf{D}^T \mathbf{A} = [c_j], \quad j = 0, 1, \dots, m-1$$

ya da kısaca

$$\mathbf{U}_j \mathbf{A} = [c_j] \text{ ya da } [\mathbf{U}_j; c_j], \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (4.61)$$

artırılmış matris formu elde edilir. Burada

$$\mathbf{U}_j = \sum_{k=0}^{m-1} [a_{jk} \mathbf{X}(a) + b_{jk} \mathbf{X}(b)] \mathbf{B}^k \mathbf{D}^T = \begin{bmatrix} u_{j0} & u_{j1} & u_{j2} & \cdots & u_{jN} \end{bmatrix}, \quad j = 0, 1, \dots, (m-1)$$

şeklinde tanımlanır. Son olarak, (4.60) matris formunun son  $m$  satırı silinerek, bunların yerine (4.61) koşullar için artırılmış matrisinin satırları yazılırsa

$$[\widetilde{\mathbf{W}}; \widetilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & ; & g(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} & ; & g(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & ; & \vdots \\ w_{(N-m)0} & w_{(N-m)1} & \cdots & w_{(N-m)N} & ; & g(x_{N-m}) \\ u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} & ; & c_0 \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} & ; & c_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & ; & \vdots \\ u_{(m-1)0} & u_{(m-1)1} & \cdots & u_{(m-1)N} & ; & c_{m-1} \end{bmatrix}$$

yeni artırılmış matris formu elde edilir. Bu ise lineer bir cebirsel sistemdir. Eğer, rank  $\widetilde{\mathbf{W}} = \text{rank}[\widetilde{\mathbf{W}}; \widetilde{\mathbf{G}}] = N + 1$  ise o zaman

$$\mathbf{A} = (\widetilde{\mathbf{W}})^{-1} \widetilde{\mathbf{G}}$$

yazılabilir. Böylece

$$\mathbf{A} = [a_0 \ a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_N]^T$$

bilinmeyen Lucas katsayılar matrisi belirlenmiş olur. Belirlenen  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_N$  katsayıları (4.52) denkleminde yerlerine yazılırsa (4.50) diferensiyel denkleminin Lucas polinom çözümü elde edilir.

#### 4.2.2. Lucas Sıralama Yöntemiyle Çözülen Lineer Diferensiyel Denklemler için Çözümün Doğruluğu ve Rezidü Hata Tahmini

Bu bölümde rezidü hata fonksiyonu [52,53,54,55,56] yardımıyla, (4.51) koşulları altında (4.50) denkleminin yaklaşık çözümü olan (4.52) Lucas polinom çözümü için bir hata tahmini verilecektir. Öncelikle (4.50) denklemi için rezidü hata fonksiyonunu

$$R_N(x) = L[y_N(x)] - g(x) \quad (4.62)$$

şeklinde tanımlayalım. Burada  $y_N(x)$ , (4.51) denkleminin Lucas polinom çözümüdür.

Böylece  $y_N(x)$

$$\begin{cases} L[y_N(x)] = \sum_{k=0}^m p_k(x) y_N^{(k)}(x) = g(x) + R_N(x) \\ \sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk} y_N^{(k)}(a) + b_{jk} y_N^{(k)}(b)) = c_j, \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \end{cases}$$

problemini sağlar. Ayrıca  $e_N(x)$  hata fonksiyonu

$$e_N(x) = y(x) - y_N(x) \quad (4.63)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $y(x)$ , (4.50) denkleminin tam çözümüdür. (4.50), (4.51), (4.62) ve (4.63) denklemlerinden

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk} e_N^{(k)}(a) + b_{jk} e_N^{(k)}(b)) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1$$

homojen karışık koşulları altında

$$L[e_N(x)] = L[y(x)] - L[y_N(x)] = -R_N(x)$$

hata diferensiyel denklemi elde edilir. Ya da, açık şekilde hata problemi

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^m p_k(x) e_N^{(k)}(x) = -R_N(x) \\ \sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk} e_N^{(k)}(a) + b_{jk} e_N^{(k)}(b)) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1. \end{cases} \quad (4.64)$$

şeklinde tanımlanır. Burada dikkat edilmelidir ki;

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk} y^{(k)}(a) + b_{jk} y^{(k)}(b)) = c_j, \quad j = 0, 1, \dots, m-1$$

ve

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk} y_N^{(k)}(a) + b_{jk} y_N^{(k)}(b)) = c_j, \quad j = 0, 1, \dots, m-1$$

homojen olmayan karışık koşulları

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk} e_N^{(k)}(a) + b_{jk} e_N^{(k)}(b)) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1$$

şeklinde homojen olan karışık koşullara dönüşmektedir. (4.64) hata problemi, geliştirilen metod yardımıyla çözülebilir. Böylece

$$e_{N,M}(x) = \sum_{n=0}^M a_n^* L_n(x) \quad (M > N)$$

şeklinde,  $e_N(x)$  e göre  $e_{N,M}(x)$  yaklaşık çözümü bulunur. Sonuç olarak,  $y_N(x)$  ve  $e_{N,M}(x)$  polinomları yardımıyla

$$y_{N,M}(x) = y_N(x) + e_{N,M}(x)$$

düzeltilmiş Lucas polinom çözümü elde edilir. Ayrıca,

$$e_N(x) = y(x) - y_N(x)$$

asıl hata fonksiyonunu;

$$e_{N,M}(x), \quad M > N$$

tahmini hata fonksiyonunu;

$$E_{N,M}(x) = e_N(x) - e_{N,M}(x) = y(x) - y_{N,M}(x)$$

ise düzeltilmiş hata fonksiyonunu ifade eder.

**Örnek 4.7.** Örnek 4.1 ile verilen problemi bu de kez Lucas sıralama yöntemini kullanarak çözelim.

$N = 5$  için  $y_5(x)$  kesilmiş (sonlu) Lucas seri çözümü

$$y_5(x) = \sum_{n=0}^5 a_n L_n(x)$$

şeklinde. Şimdi yaklaşık çözümün  $a_n$ , ( $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ) katsayılarını hesaplayalım.

$a = 0$ ,  $b = 1$  ve  $N = 5$  için (4.53) ile verilen sıralama noktalarının kümesi

$$\left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{5}, x_2 = \frac{2}{5}, x_3 = \frac{3}{5}, x_4 = \frac{4}{5}, x_5 = 1 \right\}$$

olur. Yukarıda bahsedilen Lucas metodu uygulanırsa  $N = 5$  için  $y_5(x)$  Lucas polinom çözümü

$$y_5(x) = 1.1351545520109646264x - 0.65452121855117463700x^3 - 0.33333333333333333333x^4 - 0.14730000012645665596x^5$$

şeklinde hesaplanır. Düzeltilmiş Lucas polinom çözümünü elde etmek için

$$\begin{cases} e_5^{(4)}(x) + xe_5(x) = -R_5(x) \\ e_5(0) = 0, e_5''(0) = 0, e_5(1) = 0, e_5''(1) = 0 \end{cases}$$

hata problemini ele alalım. Öyleki;

$$R_5(x) = y_5^{(4)}(x) + xy_5(x) + (8 + 7x + x^3)e^x$$

şeklinde tanımlıdır. Yine, Lucas metodu kullanılarak  $M = 6$  için bu hata problemi çözülürse  $e_5(x)$  e göre  $e_{5,6}(x)$  tahmini hata fonksiyonu

$$\begin{aligned} e_{5,6}(x) = & (0.111022302462516e-15) - 0.111188115931996x + 0.128356555990440x^3 \\ & - (0.833333402283642e-10)x^4 + (0.255086135689322e-1)x^5 \\ & - (0.426770535440429e-1)x^6 \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır ve böylece

$$\begin{aligned} y_{5,6}(x) = & 1.02396643606800x - 0.526164662609560x^3 - 0.333333333383333x^4 \\ & - 0.121791386531068x^5 + (0.111022302462516e-15) - (0.426770535440429e-1)x^6 \end{aligned}$$

düzeltilmiş Lucas polinom çözümü elde edilmiş olur. Benzer şekilde  $y_{5,9}(x)$  ve  $y_{5,11}(x)$  çözümü aşağıdaki gibi bulunur.

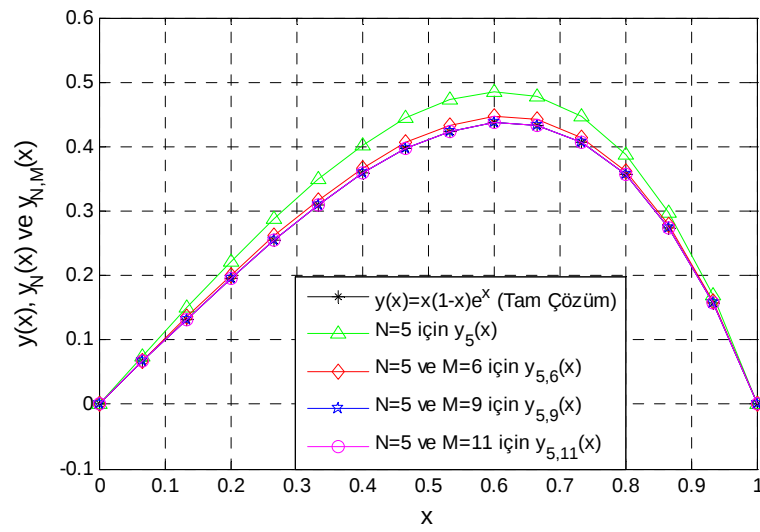
$$\begin{aligned} y_{5,9}(x) = & 1.00002437285018x - 0.500024934241587x^3 - 0.333333333383344x^4 \\ & - 0.125002533109915x^5 - (0.699814396901766e-2)x^7 - (0.110160272776683e-2)x^8 \\ & - (0.247630546279298e-3)x^9 + (0.479616346638068e-13)x^2 \\ & - (0.333161948721994e-1)x^6 + (0.492939022933570e-13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{5,11}(x) = & 1.00000015646814x - 0.500000158573438x^3 - 0.333333333374069x^4 \\ & - 0.124999993132486x^5 - (0.694437055088670e-2)x^7 - (0.119035166820858e-2)x^8 \\ & - (0.174340158197950e-3)x^9 - (0.208074050727092e-4)x^{10} \\ & + (0.912248054873999e-11)x^2 - (0.333333761470227e-1)x^6 \\ & - (0.342545138387607e-5)x^{11} - (0.251709764143015e-11). \end{aligned}$$

Problemin tam çözümü, Lucas polinom çözümü ve düzeltilmiş Lucas polinom çözümünün verilen aralıkta seçilmiş bazı değerleri için nümerik sonuçları Tablo 4.13. de gösterilmiştir.

**Tablo 4.13.** Örnek 4.7'nin tam çözüm ile yaklaşık çözümlerinin $N = 5$  ve  $M = 6, 9, 11$  için nümerik sonuçları

|       | Tam Çözüm   | Lucas Polinom Çözümü | Düzeltilmiş Lucas Polinom Çözümleri |                |                 |
|-------|-------------|----------------------|-------------------------------------|----------------|-----------------|
| $x_i$ | $y(x_i)$    | $y_5(x_i)$           | $y_{5,6}(x_i)$                      | $y_{5,9}(x_i)$ | $y_{5,11}(x_i)$ |
| 0     | 0           | 0                    | 0.1110e-15                          | 0.4929e-13     | -0.2517e-11     |
| 0.2   | 0.195424441 | 0.221214271          | 0.200008932                         | 0.195429116    | 0.195424471     |
| 0.4   | 0.358037927 | 0.402130777          | 0.365956754                         | 0.358046078    | 0.358037980     |
| 0.6   | 0.437308512 | 0.485062100          | 0.446066656                         | 0.437317739    | 0.437308572     |
| 0.8   | 0.356086549 | 0.388208180          | 0.362147373                         | 0.356093256    | 0.356086592     |
| 1.0   | 0           | 0.1100e-18           | 0.4422e-16                          | 0.1707e-12     | 0.1398e-10      |

**Şekil 4.12.** Örnek 4.7'nin tam çözüm ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

Tablo 4.13 ve Şekil 4.12'ye bakarak,  $M$  değeri artırıldığında, yaklaşık çözümlerin tam çözüme yaklaştığı söylenebilir. Aşağıdaki Tablo 4.14 ise düzeltilmiş mutlak hataların karşılaştırmasını göstermektedir.

**Tablo 4.14.** Örnek 4.7'nin düzeltilmiş mutlak hatalarının $N = 5$  ve  $M = 6, 9, 11$  için karşılaştırılması

| Düzeltilmiş Mutlak Hata $ E_{N,M}(x)  =  y(x) - y_{N,M}(x) $ |                  |                  |                   |
|--------------------------------------------------------------|------------------|------------------|-------------------|
| $x_i$                                                        | $ E_{5,6}(x_i) $ | $ E_{5,9}(x_i) $ | $ E_{5,11}(x_i) $ |
| 0                                                            | 0.111022e-15     | 0.492939e-13     | 0.251710e-11      |
| 0.2                                                          | 0.458449e-2      | 0.467489e-5      | 0.300233e-7       |
| 0.4                                                          | 0.791883e-2      | 0.815089e-5      | 0.524375e-7       |
| 0.6                                                          | 0.875814e-2      | 0.922697e-5      | 0.596098e-7       |
| 0.8                                                          | 0.606083e-2      | 0.670756e-5      | 0.438815e-7       |
| 1.0                                                          | 0.442220e-16     | 0.170694e-12     | 0.139825e-10      |

Tablo 4.14 e bakıldığında,  $M$  değeri arttıkça düzeltilmiş mutlak hatanın küçüldüğü ve çözümün doğruluğunun arttığı görülmektedir.

**Örnek 4.8.** Örnek 4.2 ile verilen problemi bu kez Lucas sıralama yöntemini kullanarak çözelim.

$N = 6$  için  $y_6(x)$  kesilmiş (sonlu) Lucas seri çözümü

$$y_6(x) = \sum_{n=0}^6 a_n L_n(x)$$

şeklindedir. Şimdi yaklaşık çözümün  $a_n$ , ( $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) katsayılarını hesaplayalım.

$a = 0$ ,  $b = 1$  ve  $N = 6$  için (4.53) ile verilen sıralama noktalarının kümesi

$$\left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{6}, x_2 = \frac{2}{6}, x_3 = \frac{3}{6}, x_4 = \frac{4}{6}, x_5 = \frac{5}{6}, x_6 = 1 \right\}$$

şeklindedir. Yukarıda bahsedilen Lucas metodu uygulanırsa  $N = 6$  için  $y_6(x)$  Lucas polinom çözümü

$$\begin{aligned} y_6(x) = & -(0.102e-18) + 0.999999999999999980x + (0.4e-19)x^2 - 0.48213811469080527940x^3 \\ & - 0.35515191373426946331x^4 - 0.12500000000000000000x^5 \\ & - (0.37709971574925257351e-1)x^6 \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Düzeltilmiş Lucas polinom çözümünü elde etmek için

$$\begin{cases} e_6^{(5)}(x) - e_6(x) = -R_6(x) \\ e_6(0) = 0, e_6'(0) = 0, e_6''(0) = 0, e_6(1) = 0, e_6'(1) = 0 \end{cases}$$

hata problemini ele alalım. Öyleki;

$$R_6(x) = y_6^{(5)}(x) - y_6(x) + (15 + 10x)e^x$$

şeklinde tanımlıdır. Yine, Lucas metodu kullanılarak  $M = 7$  için bu hata problemi çözülürse  $e_6(x)$  e göre  $e_{6,7}(x)$  tahmini hata fonksiyonu

$$e_{6,7}(x) = -(0.693889390390723e-17) - (0.222044604925031e-15)x \\ + (0.693889390390723e-17)x^2 - (0.155983754693798e-1)x^3 \\ + (0.191646266291429e-1)x^4 - (0.693889390390723e-17)x^5 \\ + (0.489962199009021e-2)x^6 - (0.846587314985338e-2)x^7$$

şeklinde hesaplanır ve böylece

$$y_{6,7}(x) = -(0.704089390390723e-17) + 1.000000000000000x + (0.697889390390723e-17)x^2 \\ - 0.497736490169380x^3 - 0.335987287070857x^4 - 0.125000000000000x^5 \\ - (0.328103495799098e-1)x^6 - (0.846587314985338e-2)x^7$$

düzeltilmiş Lucas polinom çözümü elde edilmiş olur. Benzer şekilde  $y_{6,10}(x)$  ve  $y_{6,13}(x)$  çözümleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$y_{6,10}(x) = -(0.624510651351651e-14) + 0.999999999999956x - (0.188737514186277e-13)x^2 \\ - 0.499998960328355x^3 - 0.333334449870217x^4 - 0.125000000000015x^5 \\ - (0.333336323290584e-1)x^6 - (0.694251102077731e-2)x^7 \\ - (0.119634675810645e-2)x^8 - (0.163993965842713e-3)x^9 \\ - (0.301056977066866e-4)x^{10}$$

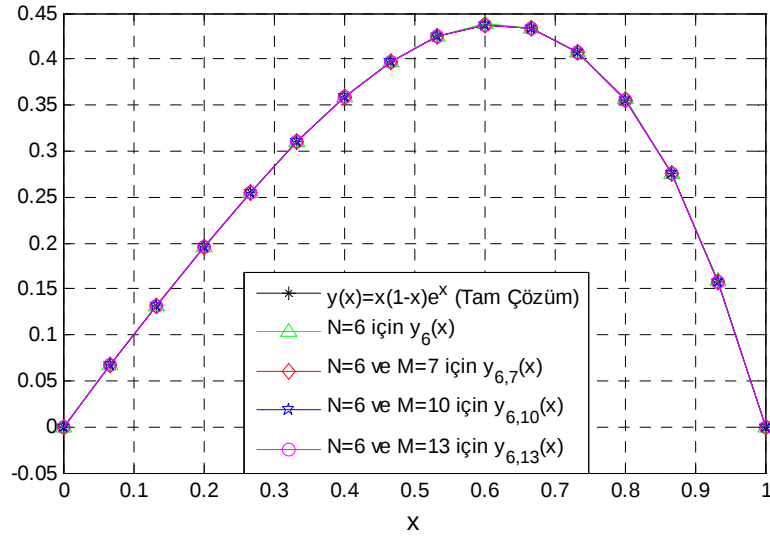
$$y_{6,13}(x) = (0.950173263195194e-11) + 0.9999999999998975x + (0.235544920904473e-11)x^2 \\ - 0.499999998537517x^3 - 0.333333334843527x^4 - 0.124999999999231x^5 \\ - (0.333333366220332e-1)x^6 - (0.443226187307744e-6)x^{12} \\ + (0.159581940994968e-7)x^{13} - (0.694441580669913e-2)x^7 \\ - (0.119059242531883e-2)x^8 - (0.173333131143094e-3)x^9 \\ - (0.224606571030961e-4)x^{10} - (0.210069132200452e-5)x^{11}.$$

Problemin tam çözümü, Lucas polinom çözümü ve düzeltilmiş Lucas polinom çözümlerinin verilen aralıkta seçilmiş bazı değerleri için nümerik sonuçları Tablo 4.15 de gösterilmiştir.

**Tablo 4.15.** Örnek 4.8'in tam çözüm ile yaklaşık çözümlerinin

$N = 6$  ve  $M = 7, 10, 13$  için nümerik sonuçları

|       | Tam Çözüm   | Lucas Polinom Çözümü | Düzeltilmiş Lucas Polinom Çözümleri |                 |                 |
|-------|-------------|----------------------|-------------------------------------|-----------------|-----------------|
| $x_i$ | $y(x_i)$    | $y_6(x_i)$           | $y_{6,7}(x_i)$                      | $y_{6,10}(x_i)$ | $y_{6,13}(x_i)$ |
| 0     | 0           | -0.1020e-18          | -0.7041e-17                         | -0.6245e-14     | 0.9502e-11      |
| 0.1   | 0.099465383 | 0.099481059          | 0.099467381                         | 0.099465384     | 0.099465383     |
| 0.2   | 0.195424441 | 0.195532239          | 0.195438320                         | 0.195424448     | 0.195424441     |
| 0.5   | 0.412180318 | 0.413040273          | 0.412298682                         | 0.412180378     | 0.412180318     |
| 0.8   | 0.356086549 | 0.356829619          | 0.356202066                         | 0.356086623     | 0.356086549     |
| 1.0   | 0           | -0.3210e-18          | 0.3000e-10                          | 0.2985e-10      | 0.2894e-10      |



**Şekil 4.13.** Örnek 4.8'in tam çözüm ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

Tablo 4.15 ve Şekil 4.13 e bakıldığında,  $M$  değeri arttıkça, yaklaşık çözümlerin tam çözüme yaklaştığı görülmektedir. Aşağıdaki Tablo 4.16 ise düzeltilmiş mutlak hataların kıyaslamasını göstermektedir.

**Tablo 4.16.** Örnek 4.8'in düzeltilmiş mutlak hatalarının  $N = 6$  ve  $M = 7, 10, 13$  için karşılaştırılması

| Düzeltilmiş Mutlak Hata $ E_{N,M}(x)  =  y(x) - y_{N,M}(x) $ |                  |                   |                   |
|--------------------------------------------------------------|------------------|-------------------|-------------------|
| $x_i$                                                        | $ E_{6,7}(x_i) $ | $ E_{6,10}(x_i) $ | $ E_{6,13}(x_i) $ |
| 0                                                            | 0.704089e-17     | 0.624511e-14      | 0.950173e-11      |
| 0.1                                                          | 0.199850e-5      | 0.927852e-9       | 0.107329e-10      |
| 0.2                                                          | 0.138789e-4      | 0.652563e-8       | 0.186402e-10      |
| 0.5                                                          | 0.118364e-3      | 0.598642e-7       | 0.972927e-10      |
| 0.8                                                          | 0.115517e-3      | 0.741338e-7       | 0.137709e-9       |
| 1.0                                                          | 0.299997e-10     | 0.298521e-10      | 0.289442e-10      |

Tablo 4.16,  $M$  değeri arttıkça düzeltilmiş mutlak hatanın küçüldüğü ve çözümün doğruluğunun arttığını göstermektedir.

#### 4.2.3. Genel Lineer Diferensiyel Denklemlerinin Çözümü için Lucas Sıralama Yöntemi

Değişken katsayılı yüksek mertebeden lineer

$$L[y_i(x)] = \sum_{n=0}^m \sum_{j=1}^k p_{i,j}^n(x) y_j^{(n)}(x) = g_i(x), \quad (i = 1, 2, \dots, k, \quad 0 \leq a \leq x \leq b) \quad (4.65)$$

diferensiyel denklem sisteminin

$$\sum_{n=0}^{m-1} [a_{i,n}^j y_j^{(n)}(a) + b_{i,n}^j y_j^{(n)}(b)] = c_{j,i}, \quad (i = 0, 1, \dots, m-1, \quad j = 1, 2, \dots, k) \quad (4.66)$$

karışık koşulları altında

$$y_j(x) \cong y_{j,N}(x) = \sum_{n=0}^N a_{j,n} L_n(x) \quad (4.67)$$

kesilmiş (sonlu) Lucas serisi formunda bir yaklaşık çözümünün olduğunu varsayalım. Burada  $y_j^{(0)}(x) = y_j(x)$  bilinmeyen fonksiyon,  $p_{i,j}^n(x)$  ve  $g_i(x)$   $[a, b]$ 'nda bilinen sürekli fonksiyonlar,  $y_j^{(n)}(x)$ ,  $y_j(x)$  in  $n$ . mertebeden türevidir.  $a_{j,n}$  bilinmeyen katsayılar,  $a_{i,n}^j, b_{i,n}^j$  ve  $c_{j,i}$  reel katsayılar ve  $L_n(x)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$

$$L_0(x) = 2; \quad L_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} x^{n-2k}, \quad (n \geq 1) \quad \lfloor n/2 \rfloor = \begin{cases} n/2, & n \text{ çift} \\ (n-1)/2, & n \text{ tek} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı Lucas polinomlarıdır [43,44]. Ayrıca, (4.66) koşulları altında, (4.65) denklem sisteminin yaklaşık çözümünü bulmak için

$$x_i = a + \frac{b-a}{N} i, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad 0 \leq a \leq x \leq b \quad (4.68)$$

ile verilen sıralama noktaları kullanılsın. Öncelikle (4.67) ile verilen yaklaşık çözümün matris formu

$$y_{j,N}(x) = \mathbf{L}(x) \mathbf{A}_j, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (4.69)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\mathbf{L}(x) = [L_0(x) \quad L_1(x) \quad L_2(x) \quad \cdots \quad L_N(x)]$$

ve

$$\mathbf{A}_j = [a_{j,0} \quad a_{j,1} \quad a_{j,2} \quad \cdots \quad a_{j,N}]^T$$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca (4.69) eşitliği

$$y_{j,N}(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{D}^T \mathbf{A}_j, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (4.70)$$

olarak ifade edilebilir. Burada

$$\mathbf{X}(x) = [1 \quad x \quad x^2 \quad \cdots \quad x^N]$$

ve  $N$  tekse

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1} \binom{1}{0} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{2}{1} \binom{1}{1} & 0 & \frac{2}{2} \binom{2}{0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \binom{2}{1} & 0 & \frac{3}{3} \binom{3}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{4}{2} \binom{2}{2} & 0 & \frac{4}{3} \binom{3}{1} & 0 & \frac{4}{4} \binom{4}{0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{n-1}{(n-1)/2} \binom{(n-1)/2}{(n-1)/2} & 0 & \frac{n-1}{(n+1)/2} \binom{(n+1)/2}{(n-3)/2} & 0 & \frac{n-1}{(n+3)/2} \binom{(n+3)/2}{(n-5)/2} & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{n}{(n+1)/2} \binom{(n+1)/2}{(n-1)/2} & 0 & \frac{n}{(n+3)/2} \binom{(n+3)/2}{(n-3)/2} & 0 & \cdots & \frac{n}{n} \binom{n}{0} \end{bmatrix}$$

$N$  çiftse

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1} \binom{1}{0} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{2}{1} \binom{1}{1} & 0 & \frac{2}{2} \binom{2}{0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \binom{2}{1} & 0 & \frac{3}{3} \binom{3}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{4}{2} \binom{2}{2} & 0 & \frac{4}{3} \binom{3}{1} & 0 & \frac{4}{4} \binom{4}{0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{n-1}{n/2} \binom{n/2}{(n-2)/2} & 0 & \frac{n-1}{(n+2)/2} \binom{(n+2)/2}{(n-4)/2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{n}{n/2} \binom{n/2}{n/2} & 0 & \frac{n}{(n+2)/2} \binom{(n+2)/2}{(n-2)/2} & 0 & \frac{n}{(n+4)/2} \binom{(n+4)/2}{(n-4)/2} & \cdots & \frac{n}{n} \binom{n}{0} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca  $\mathbf{X}(x)$  matrisi ile  $\mathbf{X}^{(k)}(x)$  türevi arasında

$$\mathbf{X}^{(k)}(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{B}^k \quad (4.71)$$

bağıntısı vardır. Burada  $\mathbf{B}$  matrisi

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlıdır. O halde (4.70) ve (4.71) den

$$y_{j,N}^{(i)}(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{B}^i \mathbf{D}^T \mathbf{A}_j, \quad i = 0, 1, \dots, m \quad \text{ve} \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (4.72)$$

elde edilir. Böylece

$$\mathbf{Y}^{(i)}(x) = \overline{\mathbf{X}}(x) \left( \overline{\mathbf{B}} \right)^i \overline{\mathbf{D}} \mathbf{A}, \quad i = 0, 1, \dots, m \quad (4.73)$$

yazılabilir. Burada

$$\mathbf{Y}^{(i)}(x) = \begin{bmatrix} y_{1,N}^{(i)}(x) \\ y_{2,N}^{(i)}(x) \\ \vdots \\ y_{k,N}^{(i)}(x) \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{X}}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{X}(x) \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{B} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{B} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^T & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{D}^T & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{D}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_k \end{bmatrix}$$

olarak tanımlıdır. Şimdi (4.65) denklem sistemini

$$\sum_{i=0}^m \mathbf{P}_i(x) \mathbf{Y}^{(i)}(x) = \mathbf{G}(x) \quad (4.74)$$

matris formunda ifade edelim. Burada

$$\mathbf{P}_i(x) = \begin{bmatrix} p_{1,1}^i(x) & p_{1,2}^i(x) & \cdots & p_{1,k}^i(x) \\ p_{2,1}^i(x) & p_{2,2}^i(x) & \cdots & p_{2,k}^i(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k,1}^i(x) & p_{k,2}^i(x) & \cdots & p_{k,k}^i(x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}^{(i)}(x) = \begin{bmatrix} y_{1,N}^{(i)}(x) \\ y_{2,N}^{(i)}(x) \\ \vdots \\ y_{k,N}^{(i)}(x) \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{G}(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_k(x) \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. (4.74) de (4.68) ile verilen sıralama noktaları kullanılırsa

$$\sum_{i=0}^m \mathbf{P}_i(x_s) \mathbf{Y}^{(i)}(x_s) = \mathbf{G}(x_s), \quad s = 0, 1, \dots, N$$

ya da

$$\sum_{i=0}^m \mathbf{P}_i \mathbf{Y}^{(i)} = \mathbf{G} \quad (4.75)$$

kapalı formu elde edilir. Burada

$$\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_i(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_i(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{P}_i(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^{(i)}(x_0) \\ \mathbf{Y}^{(i)}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{Y}^{(i)}(x_N) \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}(x_0) \\ \mathbf{G}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{G}(x_N) \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. (4.68) ve (4.73) den

$$\mathbf{Y}^{(i)}(x_s) = \bar{\mathbf{X}}(x_s) (\bar{\mathbf{B}})^i \bar{\mathbf{D}} \mathbf{A}, \quad s = 0, 1, \dots, N$$

ya da kısaca

$$\mathbf{Y}^{(i)} = \mathbf{X} (\bar{\mathbf{B}})^i \bar{\mathbf{D}} \mathbf{A} \quad (4.76)$$

elde edilir. Öyleki

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{X}}(x_0) \\ \bar{\mathbf{X}}(x_1) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{X}}(x_N) \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{X}}(x_s) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(x_s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{X}(x_s) \end{bmatrix}$$

olarak tanımlıdır. (4.76), (4.75) te yerine yazılırsa

$$\left\{ \sum_{i=0}^m \mathbf{P}_i \mathbf{X}(\overline{\mathbf{B}})^i \overline{\mathbf{D}} \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (4.77)$$

temel matris denklemi elde edilir. (4.77) de yer alan  $\mathbf{P}_i$ ,  $\mathbf{X}$ ,  $\overline{\mathbf{B}}$ ,  $\overline{\mathbf{D}}$ ,  $\mathbf{A}$  ve  $\mathbf{G}$  matrislerinin boyutları sırasıyla  $k(N+1) \times k(N+1)$ ,  $k(N+1) \times k(N+1)$ ,  $k(N+1) \times k(N+1)$ ,  $k(N+1) \times k(N+1)$ ,  $k(N+1) \times 1$  ve  $k(N+1) \times 1$  şeklindedir. (4.65) denklem sistemine karşılık gelen (4.77) temel matris denklemi

$$\mathbf{W}\mathbf{A}=\mathbf{G} \text{ ya da } [\mathbf{W};\mathbf{G}] \quad (4.78)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada

$$\mathbf{W} = \sum_{i=0}^m \mathbf{P}_i \mathbf{X}(\overline{\mathbf{B}})^i \overline{\mathbf{D}} = [\mathbf{w}_{p,q}], \quad p, q = 1, 2, \dots, k(N+1)$$

olarak tanımlıdır. (4.68) ile verilen sıralama noktaları ve (4.73) kullanılarak (4.66) ile verilen koşullar için matris formu

$$\sum_{j=0}^{m-1} [\mathbf{a}_j \overline{\mathbf{X}}(a) + \mathbf{b}_j \overline{\mathbf{X}}(b)] (\overline{\mathbf{B}})^j \overline{\mathbf{D}} \mathbf{A} = \mathbf{C}$$

olarak ifade edilir. Öyleki

$$\mathbf{a}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_j^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{a}_j^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{a}_j^k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_j^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{b}_j^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{b}_j^k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_k \end{bmatrix}$$

ve

$$\mathbf{a}_j^i = \begin{bmatrix} a_{0,j}^i \\ a_{1,j}^i \\ \vdots \\ a_{m-1,j}^i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_j^i = \begin{bmatrix} b_{0,j}^i \\ b_{1,j}^i \\ \vdots \\ b_{m-1,j}^i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_i = \begin{bmatrix} c_{i,0} \\ c_{i,1} \\ \vdots \\ c_{i,m-1} \end{bmatrix}, \quad i = 0, 1, \dots, k$$

olarak tanımlıdır. Böylece, koşullar için

$$\mathbf{U}\mathbf{A} = \mathbf{C} \text{ ya da } [\mathbf{U};\mathbf{C}] \quad (4.79)$$

temel matris formu elde edilir. Öyleki

$$\mathbf{U} = \sum_{j=0}^{m-1} [\mathbf{a}_j \overline{\mathbf{X}}(a) + \mathbf{b}_j \overline{\mathbf{X}}(b)] (\overline{\mathbf{B}})^j \overline{\mathbf{D}}$$

şeklindedir. Son olarak, (4.78) matris formunun son  $mk$  satırı silinerek, bunların yerine (4.79) koşullar için artırılmış matrisinin satırları yazılırsa yeni

$$[\widetilde{\mathbf{W}}; \widetilde{\mathbf{G}}]$$

artırılmış matrisi elde edilir. Burada (4.78) matrisinin son satırlarının silinmesi zorunlu değildir. Eğer,  $\tilde{\mathbf{W}}$  matrisi tekil ise bu durumda (4.78) matrisinin farklı satırları silenerek, silinen satırlar yerine (4.79) matrisinin satırları yazılabilir. Eğer,  $\text{rank } \tilde{\mathbf{W}} = \text{rank}[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = k(N+1)$  ise o zaman

$$\mathbf{A} = (\tilde{\mathbf{W}})^{-1} \tilde{\mathbf{G}}$$

yazılabilir. Böylece,

$$\mathbf{A}_j = [a_{j,0} \quad a_{j,1} \quad a_{j,2} \quad \cdots \quad a_{j,N}]^T$$

bilinmeyen Lucas katsayılar matrisi belirlenmiş olur. Belirlenen  $a_{j,0}, a_{j,1}, a_{j,2}, \dots, a_{j,N}$  katsayıları (4.67) denkleminde yerlerine yazılırsa (4.65) diferensiyel denklem sisteminin Lucas polinom çözümleri elde edilir.

#### 4.2.4. Lucas Sıralama Yöntemiyle Çözülen Genel Lineer Diferensiyel Denklem Sistemleri için Çözümün Doğruluğu ve Rezidü Hata Tahmini

Bu bölümde rezidü hata fonksiyonu [52,53,54,55,56] yardımıyla, (4.66) karışık koşulları altında (4.65) sisteminin yaklaşık çözümü olan (4.67) Lucas polinom çözümü için bir hata tahmini verilecektir. Öncelikle (4.65) sistemi için rezidü hata fonksiyonunu

$$R_{i,N}(x) = L[y_{i,N}(x)] - g_i(x), \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (4.80)$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece  $y_{i,N}(x)$

$$\begin{cases} L[y_{i,N}(x)] = \sum_{n=0}^m \sum_{j=1}^k p_{i,j}^n(x) y_{j,N}^{(n)}(x) = g_i(x) + R_{i,N}(x), & (i = 1, 2, \dots, k) \\ \sum_{n=0}^{m-1} [a_{i,n}^j y_{j,N}^{(n)}(a) + b_{i,n}^j y_{j,N}^{(n)}(b)] = c_{j,i}, & (i = 0, 1, \dots, m-1, \quad j = 1, 2, \dots, k) \end{cases}$$

problemini sağlar. Ayrıca  $e_{j,N}(x)$  hata fonksiyonu

$$e_{j,N}(x) = y_j(x) - y_{j,N}(x) \quad (4.81)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $y_j(x)$ , (4.65) denklem sisteminin tam çözümleridir. (4.65), (4.66), (4.80) ve (4.81) denklemlerinden

$$\sum_{n=0}^{m-1} [a_{i,n}^j e_{j,N}^{(n)}(a) + b_{i,n}^j e_{j,N}^{(n)}(b)] = 0, \quad (i = 0, 1, \dots, m-1, \quad j = 1, 2, \dots, k)$$

homojen karışık koşulları altında

$$L[e_{i,N}(x)] = L[y_i(x)] - L[y_{i,N}(x)] = -R_{i,N}(x)$$

hata diferensiyel denklemini elde edilir. Ya da, açık şekilde hata problemi

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^m \sum_{j=1}^k p_{i,j}^n(x) e_{j,N}^{(n)}(x) = -R_{i,N}(x), & (i=1,2,\dots,k) \\ \sum_{n=0}^{m-1} [a_{i,n}^j e_{j,N}^{(n)}(a) + b_{i,n}^j e_{j,N}^{(n)}(b)] = 0, & (i=0,1,\dots,m-1, \quad j=1,2,\dots,k) \end{cases} \quad (4.82)$$

şeklinde tanımlanır. Burada dikkat edilmelidir ki;

$$\sum_{n=0}^{m-1} [a_{i,n}^j y_j^{(n)}(a) + b_{i,n}^j y_j^{(n)}(b)] = c_{j,i}, \quad (i=0,1,\dots,m-1, \quad j=1,2,\dots,k)$$

ve

$$\sum_{n=0}^{m-1} [a_{i,n}^j y_{j,N}^{(n)}(a) + b_{i,n}^j y_{j,N}^{(n)}(b)] = c_{j,i}, \quad (i=0,1,\dots,m-1, \quad j=1,2,\dots,k)$$

homojen olmayan karışık koşulları

$$\sum_{n=0}^{m-1} [a_{i,n}^j e_{j,N}^{(n)}(a) + b_{i,n}^j e_{j,N}^{(n)}(b)] = 0, \quad (i=0,1,\dots,m-1, \quad j=1,2,\dots,k)$$

şeklinde homojen olan karışık koşullara dönüşmektedir. (4.82) hata problemi, geliştirilen metod yardımıyla çözülebilir. Böylece

$$e_{j,N,M}(x) = \sum_{n=0}^M a_{j,n}^* L_n(x), \quad (M > N, \quad j=1,2,\dots,k)$$

şeklinde,  $e_{j,N}(x)$  e göre  $e_{j,N,M}(x)$  yaklaşık çözümü bulunur. Sonuç olarak,  $y_{j,N}(x)$  ve  $e_{j,N,M}(x)$ ,  $M > N$  polinomları yardımıyla

$$y_{j,N,M}(x) = y_{j,N}(x) + e_{j,N,M}(x)$$

düzeltilmiş Lucas polinom çözümü elde edilir. Ayrıca,

$$e_{j,N}(x) = y_j(x) - y_{j,N}(x)$$

asıl hata fonksiyonunu;

$$e_{j,N,M}(x)$$

tahmini hata fonksiyonunu;

$$E_{j,N,M}(x) = e_{j,N}(x) - e_{j,N,M}(x) = y_j(x) - y_{j,N,M}(x)$$

ise *düzeltilmiş hata fonksiyonunu* ifade eder.

**Örnek 4.9.** Örnek 4.3 ile verilen problemi bu kez Lucas sıralama yöntemini kullanarak çözelim.

$N = 3$  için  $y_{j,3}(x)$  ( $j=1,2$ ) kesilmiş (sonlu) Lucas seri çözümleri

$$y_{j,3}(x) = \sum_{n=0}^3 a_{j,n} L_n(x)$$

şeklinde. Şimdi yaklaşık çözümün  $a_{j,n}$ , ( $n=0,1,2,3$ ) katsayılarını hesaplayalım.

$a = 0$ ,  $b = 1$  ve  $N = 3$  için (4.62) ile verilen sıralama noktalarının kümesi

$$\left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = 1 \right\}$$

olur. Yukarıda bahsedilen Lucas metodu kullanılırsa  $N = 3$  için  $y_{j,3}(x)$  ( $j = 1, 2$ ) Lucas polinom çözümleri

$$y_{1,3}(x) = 1.000000000000000002 - 1.9999999999999997x + 0.65026593172059818797x^2 - 0.1360932709322248727x^3$$

$$y_{2,3}(x) = (0.20e - 18) + 0.9999999999999997x - 0.15908130534369392778x^2 + (0.514414694144519197e - 1)x^3$$

şeklinde hesaplanır. Düzeltilmiş Lucas polinom çözümlerini elde etmek için

$$\begin{cases} e_{1,3}^{(1)}(x) + e_{2,3}^{(1)}(x) + e_{2,3}(x) = -R_{1,3}(x) \\ e_{1,3}^{(1)}(x) + 4e_{2,3}^{(1)}(x) + e_{1,3}(x) = -R_{2,3}(x) \end{cases}$$

hata problemini ele alalım. Öyleki

$$\begin{cases} R_{1,3}(x) = y_{1,3}^{(1)}(x) + y_{2,3}^{(1)}(x) + y_{2,3}(x) - x + e^{-x} \\ R_{2,3}(x) = y_{1,3}^{(1)}(x) + 4y_{2,3}^{(1)}(x) + y_{1,3}(x) - 1 - 2e^{-x} \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. Yine, Lucas metodunu kullanarak  $M = 5$  için bu hata problemi çözümlerse  $e_{1,3}(x)$  ve  $e_{2,3}(x)$  e göre  $e_{1,3,5}(x)$  ve  $e_{2,3,5}(x)$  tahmini hata fonksiyonu

$$e_{1,3,5}(x) = (0.532e - 16) - (0.5250e - 16)x + (0.162770215780355664e - 1)x^2 - (0.4824692406750631330e - 1)x^3 + (0.409517659738837526e - 1)x^4 - (0.569481032290415982e - 2)x^5$$

$$e_{2,3,5}(x) = -(0.1129e - 16)x - (0.75240824340171289e - 2)x^2 + (0.2221418469006070357e - 1)x^3 - (0.189435361508392338e - 1)x^4 + (0.275727053046810524e - 2)x^5$$

şeklinde hesaplanır ve böylece

$$y_{1,3,5}(x) = 1 - 2x + 0.6665429533x^2 - 0.1843401950x^3 + (0.409517659738837526e - 1)x^4 - (0.569481032290415982e - 2)x^5$$

$$y_{2,3,5}(x) = (0.20e - 18) + x - 0.1666053877x^2 + (0.7365565410e - 1)x^3 - (0.189435361508392338e - 1)x^4 + (0.275727053046810524e - 2)x^5$$

düzeltilmiş Lucas polinom çözümleri elde edilmiş olur. Benzer şekilde  $y_{1,3,6}(x)$ ,

$y_{2,3,6}(x)$ ,  $y_{1,3,8}(x)$  ve  $y_{2,3,8}(x)$  çözümleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$y_{1,3,6}(x) = 1 - 2x + 0.666586736x^2 - 0.1851133063x^3 + (0.42942252545835481230e - 1)x^4 - (0.793751687780180904e - 2)x^5 + (0.923831179539782305e - 3)x^6$$

$$y_{2,3,6}(x) = (0.6876e-17) + x - 0.1666626863x^2 + (0.7403827294e-1)x^3 \\ - (0.19928400192176100372e-1)x^4 + (0.386672804181833336e-2)x^5 \\ - (0.456948612971404962e-3)x^6$$

ve

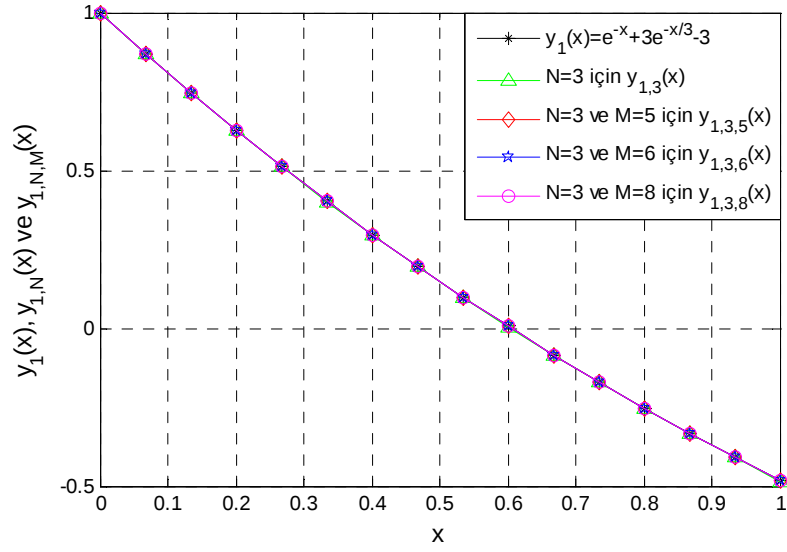
$$y_{1,3,8}(x) = 1 - 2x + 0.6666666556x^2 - 0.1851849986x^3 + (0.43208636504582398446e-1)x^4 \\ - (0.8431692607795748816e-2)x^5 + (0.13849363760144450904e-2)x^6 \\ - (0.186573519907473618e-3)x^7 + (0.164112150792816713e-4)x^8$$

$$y_{2,3,8}(x) = (0.169344886e-14) + x - 0.1666666700x^2 + (0.7407407658e-1)x^3 \\ - (0.20061552175262620243e-1)x^4 + (0.41140667613691062058e-2)x^5 \\ - (0.68826864583793057056e-3)x^6 + (0.941030930443065294e-4)x^7 \\ - (0.851182365907421357e-5)x^8.$$

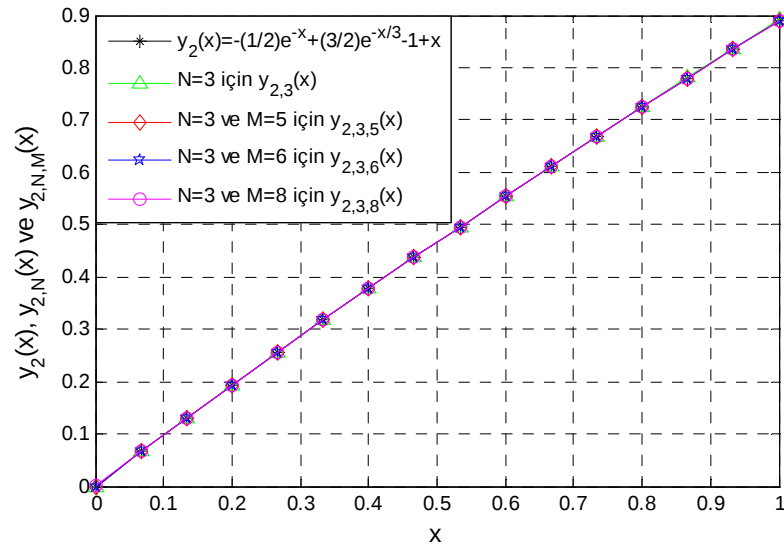
Problemin tam çözümü, Lucas polinom çözümü ve düzeltilmiş Lucas polinom çözümlerinin verilen aralıkta seçilmiş bazı değerleri için nümerik sonuçları Tablo 4.17 de gösterilmiştir.

**Tablo 4.17.** Örnek 4.9'un tam çözüm ile yaklaşık çözümlerinin  
 $N = 3$  ve  $M = 5, 6, 8$  için nümerik sonuçları

|       | Tam<br>Çözüm | Lucas Polinom<br>Çözümü | Düzeltilmiş Lucas Polinom Çözümleri |                  |                  |
|-------|--------------|-------------------------|-------------------------------------|------------------|------------------|
| $x_i$ | $y_1(x_i)$   | $y_{1,3}(x_i)$          | $y_{1,3,5}(x_i)$                    | $y_{1,3,6}(x_i)$ | $y_{1,3,8}(x_i)$ |
| 0     | 1            | 1                       | 1                                   | 1                | 1                |
| 0.2   | 0.625251708  | 0.624921891             | 0.625250697                         | 0.625251667      | 0.625251708      |
| 0.4   | 0.295840003  | 0.295332580             | 0.295839150                         | 0.295839962      | 0.295840003      |
| 0.6   | 0.005003895  | 0.004699589             | 0.005002501                         | 0.005003845      | 0.005003896      |
| 0.8   | -0.252886021 | -0.253509558            | -0.252886922                        | -0.252886104     | -0.252886020     |
| 1.0   | -0.482526627 | -0.485827339            | -0.482540286                        | -0.482526066     | -0.482526625     |
| $x_i$ | $y_2(x_i)$   | $y_{2,3}(x_i)$          | $y_{2,3,5}(x_i)$                    | $y_{2,3,6}(x_i)$ | $y_{2,3,8}(x_i)$ |
| 0     | 0            | 0.20e-18                | 0.20e-18                            | 0.6876e-17       | 0.1693e-14       |
| 0.2   | 0.193895101  | 0.194048280             | 0.193895602                         | 0.193895121      | 0.193895101      |
| 0.4   | 0.377599956  | 0.377839245             | 0.377600380                         | 0.377599976      | 0.377599955      |
| 0.6   | 0.553690312  | 0.553842087             | 0.553691005                         | 0.553690337      | 0.553690311      |
| 0.8   | 0.724228025  | 0.724525997             | 0.724228477                         | 0.724228067      | 0.724228025      |
| 1.0   | 0.890857245  | 0.892360164             | 0.890864001                         | 0.890856966      | 0.890857244      |



Şekil 4.14. Örnek 4.9'un tam çözüm  $y_1(x)$  ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması



Şekil 4.15. Örnek 4.9'un tam çözüm  $y_2(x)$  ile yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

Tablo 4.17, Şekil 4.14 ve Şekil 4.15 incelendiğinde  $M$  değerleri arttıkça, yaklaşık çözümlerin tam çözümlere yaklaştığı yani çözümün doğruluğunun arttığı görülmektedir. Şimdi,  $y_1(x)$  ve  $y_2(x)$  için düzeltilmiş mutlak hata fonksiyonuna ait aşağıdaki tabloyu inceleyelim.

**Tablo 4.18.** Örnek 4.9'un düzeltilmiş mutlak hatalarının  
 $N = 3$  ve  $M = 5, 6, 8$  için karşılaştırılması

| Düzeltilmiş Mutlak Hata $ E_{i,N,M}(x)  =  y_i(x) - y_{i,N,M}(x) $ |                    |                    |                    |
|--------------------------------------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $x_i$                                                              | $ E_{1,3,5}(x_i) $ | $ E_{1,3,6}(x_i) $ | $ E_{1,3,8}(x_i) $ |
| 0                                                                  | 0                  | 0                  | 0                  |
| 0.2                                                                | 0.101111e-5        | 0.409554e-7        | 0.289375e-10       |
| 0.4                                                                | 0.852765e-6        | 0.414868e-7        | 0.155927e-9        |
| 0.6                                                                | 0.139384e-5        | 0.501077e-7        | 0.236706e-9        |
| 0.8                                                                | 0.901043e-6        | 0.830198e-7        | 0.371501e-9        |
| 1.0                                                                | 0.136589e-4        | 0.561255e-6        | 0.207516e-8        |
| $x_i$                                                              | $ E_{2,3,5}(x_i) $ | $ E_{2,3,6}(x_i) $ | $ E_{2,3,8}(x_i) $ |
| 0                                                                  | 0                  | 0                  | 0                  |
| 0.2                                                                | 0.501385e-6        | 0.203910e-7        | 0.443765e-10       |
| 0.4                                                                | 0.424209e-6        | 0.207023e-7        | 0.857063e-10       |
| 0.6                                                                | 0.693215e-6        | 0.250302e-7        | 0.102776e-9        |
| 0.8                                                                | 0.451283e-6        | 0.414137e-7        | 0.147981e-9        |
| 1.0                                                                | 0.675550e-5        | 0.279398e-6        | 0.148531e-8        |

Tablo 4.18 e göre,  $M$  değeri artırıldığında, düzeltilmiş mutlak hatanın sıfıra yaklaştığı yani çözümün doğruluğunun arttığı gözlenmektedir.

**Örnek 4.10.** Örnek 4.4 ile verilen problemi bu kez Lucas sıralama yöntemini kullanarak çözelim.

$N = 3$  için  $y_{j,3}(x)$  ( $j=1,2$ ) kesilmiş Lucas seri çözümleri

$$y_{j,3}(x) = \sum_{n=0}^3 a_{j,3} L_n(x)$$

şeklindedir. Şimdi yaklaşık çözümün  $a_{j,n}$ , ( $n=0,1,2,3$ ) katsayılarını hesaplayalım.

$a = 0$ ,  $b = 1$  ve  $N = 3$  için (4.68) ile verilen sıralama noktalarının kümesi

$$\left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = 1 \right\}$$

olur. Yukarıda bahsedilen Lucas metodu kullanılırsa  $N = 3$  için  $y_{j,3}(x)$  ( $j=1,2$ ) Lucas polinom çözümleri

$$y_{1,3}(x) = 1.0063471145431744990x - 0.16487612973527799252x^3$$

$$y_{2,3}(x) = 1 + (0.15338341699912290508e - 1)x - 0.5x^2 + (0.24963964168227426956e - 1)x^3$$

şeklinde hesaplanır. Düzeltilmiş Lucas polinom çözümlerini elde etmek için

$$\begin{cases} e_{1,3}^{(2)}(x) + xe_{1,3}(x) + xe_{2,3}(x) = -R_{1,3}(x) \\ e_{2,3}^{(2)}(x) + 2xe_{2,3}(x) + 2xe_{1,3}(x) = -R_{2,3}(x) \end{cases}$$

hata problemini ele alalım. Öyleki

$$\begin{cases} R_{1,3}(x) = y_{1,3}^{(2)}(x) + xy_{1,3}(x) + xy_{2,3}(x) - (x-1)\sin(x) - x\cos(x) \\ R_{2,3}(x) = y_{2,3}^{(2)}(x) + 2xy_{2,3}(x) + 2xy_{1,3}(x) - (2x-1)\cos(x) - 2x\sin(x) \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. Yine, Lucas metodunu kullanarak  $M = 4$  için bu hata problemi çözümlürse  $e_{1,3}(x)$  ve  $e_{2,3}(x)$  e göre  $e_{1,3,4}(x)$  ve  $e_{2,3,4}(x)$  tahmini hata fonksiyonu

$$\begin{aligned} e_{1,3,4}(x) &= -(0.106e-16) - (0.499228952471965960e-2)x - (0.2e-18)x^2 \\ &\quad - (0.518961349576921740e-2)x^3 + (0.101819030204888753e-1)x^4 \\ e_{2,3,4}(x) &= (0.16e-17) - (0.156911938827726528e-1)x + (0.2e-18)x^2 \\ &\quad - (0.243242930248717682e-1)x^3 + (0.400154869076444208e-1)x^4 \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır ve böylece

$$\begin{aligned} y_{1,3,4}(x) &= 1.001354825x - 0.1700657432x^3 - (0.106e-16) - (0.2e-18)x^2 \\ &\quad + (0.101819030204888753e-1)x^4 \end{aligned}$$

$$y_{2,3,4}(x) = 1 - (0.35285218e-3)x - 0.5x^2 + (0.63967115e-3)x^3 + (0.400154869076444208e-1)x^4$$

düzeltilmiş Lucas polinom çözümleri elde edilmiş olur. Benzer şekilde  $y_{1,3,7}(x)$ ,  $y_{2,3,7}(x)$ ,  $y_{1,3,9}(x)$  ve  $y_{2,3,9}(x)$  çözümleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\begin{aligned} y_{1,3,7}(x) &= 1.000000143x - 0.1666661714x^3 - (0.37734520e-14) - (0.54378080e-14)x^2 \\ &\quad - (0.38846462992057800e-5)x^4 + (0.8345908019681463140e-2)x^5 \\ &\quad - (0.199067083831251440e-4)x^6 - (0.185102512198028380e-3)x^7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{2,3,7}(x) &= 1 + (0.29669e-6)x - 0.5x^2 + (0.156876e-5)x^3 + (0.4165402064844236920e-1)x^4 \\ &\quad + (0.435420619471771331e-4)x^5 - (0.146619889651633530e-2)x^6 \\ &\quad + (0.690766000483455933e-4)x^7 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} y_{1,3,9}(x) &= 1.000000001x - 0.1666666724x^3 + (0.309113845480e-12)x^2 - (0.89723367650e-13) \\ &\quad + (0.58615978466847160e-7)x^4 + (0.83330645918148055524e-2)x^5 \\ &\quad + (0.678926859967732280e-6)x^6 - (0.19940971293675390519e-3)x^7 \\ &\quad + (0.822626752055785615e-6)x^8 + (0.244208002439191309e-5)x^9 \end{aligned}$$

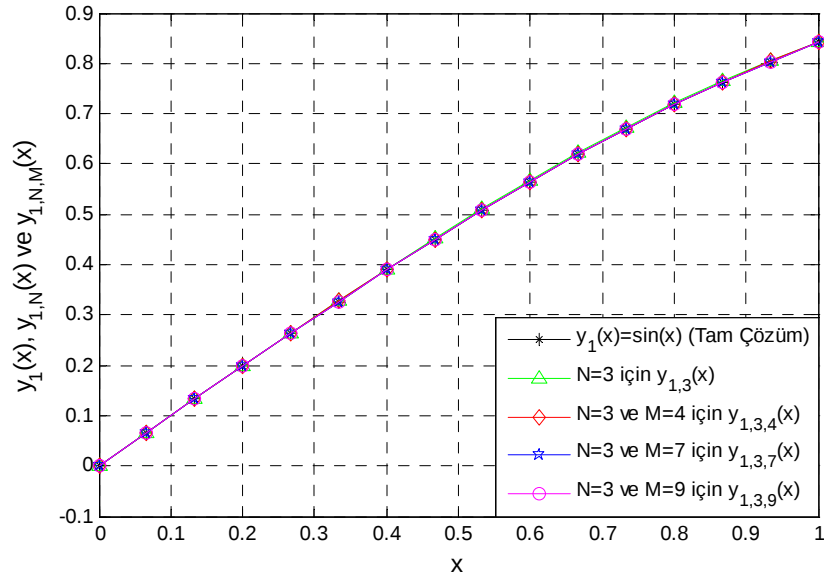
$$\begin{aligned} y_{2,3,9}(x) &= 1 - (0.65e-9)x - 0.5x^2 - (0.544e-8)x^3 + (0.41666726469394177620e-1)x^4 \\ &\quad - (0.30461993461017292e-6)x^5 - (0.13879943577705944320e-2)x^6 \\ &\quad - (0.160350056432889688e-5)x^7 + (0.265395474254859210e-4)x^8 \\ &\quad - (0.105158250818249144e-5)x^9. \end{aligned}$$

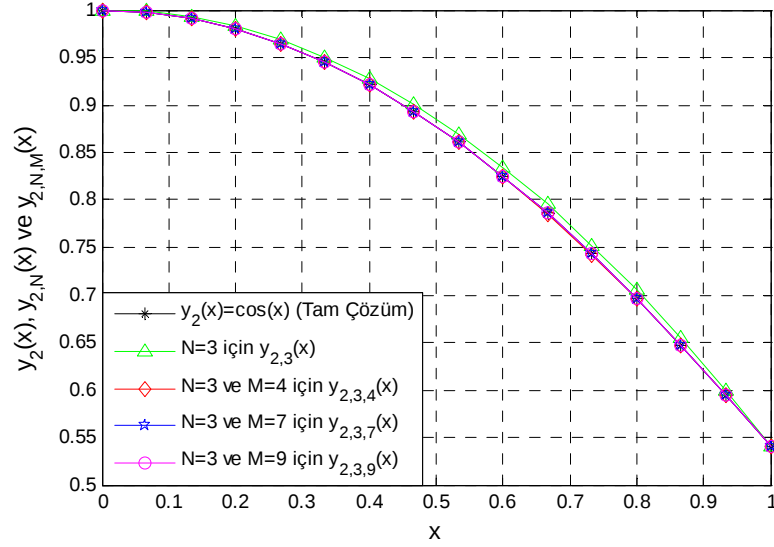
Problemin tam çözümü, Lucas polinom çözümü ve düzeltilmiş Lucas polinom çözümlerinin verilen aralıktan seçilmiş bazı değerleri için nümerik sonuçları Tablo 4.19 da gösterilmiştir.

**Tablo 4.19.** Örnek 4.10'nun tam çözüm ile yaklaşık çözümlerinin $N = 3$  ve  $M = 4, 7, 9$  için nümerik sonuçları

|       | Tam Çözüm   | Lucas Polinom Çözümü | Düzeltilmiş Lucas Polinom Çözümleri |                  |                  |
|-------|-------------|----------------------|-------------------------------------|------------------|------------------|
| $x_i$ | $y_1(x_i)$  | $y_{1,3}(x_i)$       | $y_{1,3,4}(x_i)$                    | $y_{1,3,7}(x_i)$ | $y_{1,3,9}(x_i)$ |
| 0     | 0           | 0                    | -0.1060e-16                         | -0.3773e-14      | -0.8972e-13      |
| 0.1   | 0.099833417 | 0.100469835          | 0.099966435                         | 0.099833431      | 0.099833417      |
| 0.3   | 0.295520207 | 0.297452479          | 0.295897146                         | 0.295520250      | 0.295520207      |
| 0.6   | 0.564642473 | 0.568195025          | 0.565398269                         | 0.564642557      | 0.564642474      |
| 0.8   | 0.717356091 | 0.720661113          | 0.718180707                         | 0.717356193      | 0.717356092      |
| 1.0   | 0.841470985 | 0.841470985          | 0.841470985                         | 0.841470986      | 0.841470986      |
| $x_i$ | $y_2(x_i)$  | $y_{2,3}(x_i)$       | $y_{2,3,4}(x_i)$                    | $y_{2,3,7}(x_i)$ | $y_{2,3,9}(x_i)$ |
| 0     | 1           | 1                    | 1                                   | 1                | 1                |
| 0.1   | 0.995004165 | 0.996558798          | 0.994969356                         | 0.995004196      | 0.995004165      |
| 0.3   | 0.955336489 | 0.960275530          | 0.955235541                         | 0.955336581      | 0.955336489      |
| 0.6   | 0.825335615 | 0.834595221          | 0.825112465                         | 0.825335790      | 0.825335615      |
| 0.8   | 0.696706709 | 0.705052223          | 0.696435573                         | 0.696706926      | 0.696706709      |
| 1.0   | 0.540302306 | 0.540302306          | 0.540302306                         | 0.540302306      | 0.540302306      |

Tablo 4.19 incelendiğinde  $M$  değerleri arttıkça, yaklaşık çözümlerin tam çözümlere yaklaştığı yani çözümün doğruluğunun arttığı görülmektedir.

**Şekil 4.16.** Örnek 4.10'un tam çözüm  $y_1(x)$  ile yaklaşık çözümlerin karşılaştırılması



**Şekil 4.17.** Örnek 4.10'un tam çözüm  $y_2(x)$  ile yaklaşık çözümlerin karşılaştırılması

Şekil 4.16 ve Şekil 4.17 den Lucas polinom çözümlerin tam çözümlere  $M$  değeri artırıldığında yaklaştığı görülmektedir. Şimdi,  $y_1(x)$  ve  $y_2(x)$  için düzeltilmiş mutlak hata fonksiyonuna ait aşağıdaki tabloyu inceleyelim.

**Tablo 4.20.** Örnek 4.10'nun düzeltilmiş mutlak hatalarının  $N = 3$  ve  $M = 4, 7, 9$  için karşılaştırılması

| Düzeltilmiş Mutlak Hata $ E_{i,N,M}(x)  =  y_i(x) - y_{i,N,M}(x) $ |                    |                    |                    |
|--------------------------------------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $x_i$                                                              | $ E_{1,3,4}(x_i) $ | $ E_{1,3,7}(x_i) $ | $ E_{1,3,9}(x_i) $ |
| 0                                                                  | 0.1060e-16         | 0.3773e-14         | 0.8972e-13         |
| 0.1                                                                | 0.133018e-3        | 0.145140e-7        | 0.979414e-10       |
| 0.3                                                                | 0.376939e-3        | 0.437078e-7        | 0.291620e-9        |
| 0.6                                                                | 0.755796e-3        | 0.832869e-7        | 0.573659e-9        |
| 0.8                                                                | 0.824616e-3        | 0.102498e-6        | 0.759408e-9        |
| 1.0                                                                | 0.125924e-10       | 0.944895e-9        | 0.920816e-9        |
| $x_i$                                                              | $ E_{2,3,4}(x_i) $ | $ E_{2,3,7}(x_i) $ | $ E_{2,3,9}(x_i) $ |
| 0                                                                  | 0                  | 0                  | 0                  |
| 0.1                                                                | 0.348093e-4        | 0.303379e-7        | 0.667554e-10       |
| 0.3                                                                | 0.100948e-3        | 0.918604e-7        | 0.201321e-9        |
| 0.6                                                                | 0.223150e-3        | 0.175590e-6        | 0.399084e-9        |
| 0.8                                                                | 0.271136e-3        | 0.217100e-6        | 0.523625e-9        |
| 1.0                                                                | 0.950470e-11       | 0.421550e-11       | 0.209777e-11       |

Tablo 4.20 ye göre,  $M$  değeri artırıldığında, düzeltilmiş mutlak hatanın sıfıra yaklaştığı yani çözümün doğruluğunun arttığı gözlenmektedir.

#### 4.2.5. Normal Formdaki Lineer Diferensiyel Denklem Sistemlerinin Çözümü için Lucas Sıralama Yöntemi

Değişken katsayılı yüksek mertebeden normal formdaki lineer

$$L[y_i(x)] = y_i'(x) - \sum_{j=1}^m p_{i,j}(x)y_j(x) = g_i(x) \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (0 \leq a \leq x \leq b) \quad (4.83)$$

diferensiyel denklem sisteminin

$$y_i(a) = c_i \quad (4.84)$$

başlangıç koşulları altında

$$y_i(x) \equiv y_{i,N}(x) = \sum_{n=0}^N a_{i,n} L_n(x) \quad (4.85)$$

kesilmiş (sonlu) Taylor serisi formunda bir yaklaşık çözümünün olduğunu varsayalım. Burada  $y_i(x)$  ( $i=1,2,\dots,m$ ) bilinmeyen fonksiyon,  $p_{i,j}(x)$  ve  $g_i(x)$   $[a,b]$  'nda bilinen sürekli fonksiyonlar,  $a_{i,n}$  bilinmeyen katsayılar,  $c_i$  ( $i=1,2,\dots,m$ ) reel sabitlerdir ve  $L_n(x)$ ,  $n=0,1,\dots,N$

$$L_0(x) = 2; \quad L_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} x^{n-2k}, \quad (n \geq 1) \quad \lfloor n/2 \rfloor = \begin{cases} n/2, & n \text{ çift} \\ (n-1)/2, & n \text{ tek} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı Lucas polinomlarıdır [43,44]. Ayrıca, (4.84) koşulları altında, (4.83) denklem sisteminin yaklaşık çözümünü bulmak için

$$x_i = a + \frac{b-a}{N} i, \quad i=0,1,\dots,N, \quad 0 \leq a \leq x \leq b \quad (4.86)$$

ile verilen sıralama noktaları kullanılsın. Öncelikle (4.85) ile verilen yaklaşık çözümün matris formu

$$y_{i,N}(x) = \mathbf{L}(x) \mathbf{A}_i, \quad i=1,2,\dots,m \quad (4.87)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\mathbf{L}(x) = [L_0(x) \quad L_1(x) \quad L_2(x) \quad \dots \quad L_N(x)]$$

ve

$$\mathbf{A}_i = [a_{i,0} \quad a_{i,1} \quad a_{i,2} \quad \dots \quad a_{i,N}]^T$$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca (4.87) eşitliği

$$y_{i,N}(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{D}^T \mathbf{A}_i \quad (4.88)$$

olarak ifade edilebilir. Burada

$$\mathbf{X}(x) = [1 \quad x \quad x^2 \quad \dots \quad x^N]$$

ve  $N$  tekse

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1} \binom{1}{0} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{2}{1} \binom{1}{1} & 0 & \frac{2}{2} \binom{2}{0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \binom{2}{1} & 0 & \frac{3}{3} \binom{3}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{4}{2} \binom{2}{2} & 0 & \frac{4}{3} \binom{3}{1} & 0 & \frac{4}{4} \binom{4}{0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{n-1}{(n-1)/2} \binom{(n-1)/2}{(n-1)/2} & 0 & \frac{n-1}{(n+1)/2} \binom{(n+1)/2}{(n-3)/2} & 0 & \frac{n-1}{(n+3)/2} \binom{(n+3)/2}{(n-5)/2} & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{n}{(n+1)/2} \binom{(n+1)/2}{(n-1)/2} & 0 & \frac{n}{(n+3)/2} \binom{(n+3)/2}{(n-3)/2} & 0 & \cdots & \frac{n}{n} \binom{n}{0} \end{bmatrix}$$

$N$  çiftse

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1} \binom{1}{0} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{2}{1} \binom{1}{1} & 0 & \frac{2}{2} \binom{2}{0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \binom{2}{1} & 0 & \frac{3}{3} \binom{3}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{4}{2} \binom{2}{2} & 0 & \frac{4}{3} \binom{3}{1} & 0 & \frac{4}{4} \binom{4}{0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{n-1}{n/2} \binom{n/2}{(n-2)/2} & 0 & \frac{n-1}{(n+2)/2} \binom{(n+2)/2}{(n-4)/2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{n}{n/2} \binom{n/2}{n/2} & 0 & \frac{n}{(n+2)/2} \binom{(n+2)/2}{(n-2)/2} & 0 & \frac{n}{(n+4)/2} \binom{(n+4)/2}{(n-4)/2} & \cdots & \frac{n}{n} \binom{n}{0} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. Böylece (4.88) ile ifade edilen  $y_{i,N}(x)$ , ( $i=1,2,\dots,m$ ) matrisleri

$$\mathbf{Y}(x) = \bar{\mathbf{X}}(x) \bar{\mathbf{D}} \mathbf{A} \quad (4.89)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{bmatrix} y_{1,N}(x) \\ y_{2,N}(x) \\ \vdots \\ y_{m,N}(x) \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{X}}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{X}(x) \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^T & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{D}^T & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{D}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_m \end{bmatrix}$$

olarak tanımlıdır. Ayrıca  $\mathbf{X}(x)$  matrisi ile  $\mathbf{X}'(x)$  türevi arasında

$$\mathbf{X}'(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{B} \quad (4.90)$$

bağıntısı vardır. Burada  $\mathbf{B}$  matrisi

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlıdır. O halde (4.88) ve (4.90) dan

$$y'_{i,N}(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{B} \mathbf{D}^T \mathbf{A}_i \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (4.91)$$

elde edilir. Böylece

$$\mathbf{Y}'(x) = \overline{\mathbf{X}}(x) \overline{\mathbf{B}} \mathbf{D} \mathbf{A} \quad (4.92)$$

yazılabilir. Burada

$$\mathbf{Y}'(x) = \begin{bmatrix} y'_{1,N}(x) \\ y'_{2,N}(x) \\ \vdots \\ y'_{m,N}(x) \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{X}}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{X}(x) \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{B} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^T & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{D}^T & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{D}^T \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_m \end{bmatrix}$$

olarak tanımlıdır. Şimdi (4.83) denklem sistemini

$$\mathbf{Y}'(x) = \mathbf{P}(x) \mathbf{Y}(x) + \mathbf{G}(x) \quad (4.93)$$

matris formunda ifade edelim. Burada

$$\mathbf{P}(x) = \begin{bmatrix} p_{1,1}(x) & p_{1,2}(x) & \cdots & p_{1,m}(x) \\ p_{2,1}(x) & p_{2,2}(x) & \cdots & p_{2,m}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m,1}(x) & p_{m,2}(x) & \cdots & p_{m,m}(x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. (4.93) de (4.86) ile verilen sıralama noktaları kullanılırsa

$$\mathbf{Y}'(x_k) = \mathbf{P}(x_k) \mathbf{Y}(x_k) + \mathbf{G}(x_k) \quad (k = 0, 1, \dots, N)$$

ya da

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{P} \mathbf{Y} + \mathbf{G} \quad (4.94)$$

kapalı formu elde edilir. Burada

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{P}(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{P}(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}(x_0) \\ \mathbf{Y}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{Y}(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}'(x_0) \\ \mathbf{Y}'(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{Y}'(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}(x_0) \\ \mathbf{G}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{G}(x_N) \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. (4.89) ve (4.92) de sıralama noktaları kullanılırsa

$$\mathbf{Y}(x_k) = \overline{\mathbf{X}}(x_k) \overline{\mathbf{D}} \mathbf{A} \text{ ve } \mathbf{Y}'(x_k) = \overline{\mathbf{X}}(x_k) \overline{\mathbf{B}} \mathbf{D} \mathbf{A} \quad (k = 0, 1, \dots, N)$$

ya da kısaca

$$\mathbf{Y} = \overline{\mathbf{X}} \mathbf{D} \mathbf{A} \text{ ve } \mathbf{Y}' = \overline{\mathbf{X}} \mathbf{B} \mathbf{D} \mathbf{A} \quad (4.95)$$

elde edilir. Öyleki

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{X}}(x_0) \\ \bar{\mathbf{X}}(x_1) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{X}}(x_N) \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{X}}(x_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_k) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(x_k) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{X}(x_k) \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. (4.95), (4.94) te yerine yazılırsa

$$\{\mathbf{X}\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{D}} - \mathbf{P}\mathbf{X}\bar{\mathbf{D}}\} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (4.96)$$

temel matris denklemi elde edilir. (4.96) da yer alan  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{X}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}$ ,  $\bar{\mathbf{D}}$ ,  $\mathbf{A}$  ve  $\mathbf{G}$  matrislerinin boyutları sırasıyla  $m(N+1) \times m(N+1)$ ,  $m(N+1) \times m(N+1)$ ,  $m(N+1) \times m(N+1)$ ,  $m(N+1) \times m(N+1)$ ,  $m(N+1) \times 1$  ve  $m(N+1) \times 1$  şeklindedir. (4.83) denklem sistemine karşılık gelen (4.96) temel matris denklemi

$$\mathbf{W}\mathbf{A} = \mathbf{G} \text{ ya da } [\mathbf{W}; \mathbf{G}] \quad (4.97)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada

$$\mathbf{W} = \mathbf{X}\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{D}} - \mathbf{P}\mathbf{X}\bar{\mathbf{D}} = [w_{p,q}], \quad p, q = 1, 2, \dots, m(N+1)$$

olarak tanımlıdır. (4.86) ile verilen sıralama noktaları ve (4.89) kullanılarak (4.84) ile verilen koşullar için matris formu

$$\bar{\mathbf{X}}(a)\bar{\mathbf{D}}\mathbf{A} = \mathbf{C}$$

olarak ifade edilir. Öyleki

$$\mathbf{C} = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_m]^T$$

olarak tanımlıdır. Böylece, koşullar için

$$\mathbf{U}\mathbf{A} = \mathbf{C} \text{ ya da } [\mathbf{U}; \mathbf{C}] \quad (4.98)$$

temel matris formu elde edilir. Öyleki

$$\mathbf{U} = \bar{\mathbf{X}}(a)\bar{\mathbf{D}}$$

şeklindedir. Son olarak, (4.97) matris formunun son  $mk$  satırı silinerek, bunların yerine (4.98) koşullar için artırılmış matrisinin satırları yazılırsa yeni

$$\tilde{\mathbf{W}}\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{G}} \text{ ya da } [\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}]$$

artırılmış matrisi elde edilir. Burada (4.97) matrisinin son satırlarının silinmesi zorunlu değildir. Eğer,  $\tilde{\mathbf{W}}$  matrisi tekil ise bu durumda (4.97) matrisinin farklı satırları silinerek, silinen satırlar yerine (4.98) matrisinin satırları yazılabilir. Eğer,  $\text{rank } \tilde{\mathbf{W}} = \text{rank} [\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = m(N+1)$  ise o zaman

$$\mathbf{A} = (\tilde{\mathbf{W}})^{-1} \tilde{\mathbf{G}}$$

yazılabilir. Böylece,

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} a_{i,0} & a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,N} \end{bmatrix}^T$$

bilinmeyen Lucas katsayılar matrisi belirlenmiş olur. Belirlenen  $a_{i,0}, a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,N}$  ( $i=1,2,\dots,m$ ) katsayıları (4.85) denkleminde yerlerine yazılırsa (4.83) diferensiyel denklem sisteminin Lucas polinom çözümleri elde edilir.

#### 4.2.6. Lucas Sıralama Yöntemiyle Çözülen Normal Formdaki Lineer Diferensiyel Denklem Sistemleri için Çözümün Doğruluğu ve Rezidü Hata Tahmini

Bu bölümde rezidü hata fonksiyonu [52,53,54,55,56] yardımıyla, (4.84) başlangıç koşulları altında (4.83) sisteminin yaklaşık çözümü olan (4.85) Lucas polinom çözümü için bir hata tahmini verilecektir. Öncelikle (4.83) sistemi için rezidü hata fonksiyonunu

$$R_{i,N}(x) = L[y_{i,N}(x)] - g_i(x) \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (4.99)$$

şeklinde tanımlayalım. Burada  $y_{i,N}(x)$ , (4.83) denklem sisteminin Lucas polinom çözümüdür. Böylece  $y_{i,N}(x)$

$$\begin{cases} y'_{i,N}(x) - \sum_{j=1}^m p_{i,j}(x)y_{j,N}(x) = g_i(x) + R_{i,N}(x), & (i=1,2,\dots,m) \\ y_{i,N}(a) = c_i, & (i=1,2,3). \end{cases}$$

problemini sağlar. Ayrıca  $e_{i,N}(x)$  hata fonksiyonu

$$e_{i,N}(x) = y_i(x) - y_{i,N}(x) \quad (4.100)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $y_i(x)$ , (4.83) denklem sisteminin tam çözümüdür. (4.83), (4.84), (4.99) ve (4.100) denklemlerinden

$$e_{i,N}(a) = 0, \quad (i=1,2,\dots,m)$$

homojen karışık koşulları altında

$$L[e_{i,N}(x)] = L[y_i(x)] - L[y_{i,N}(x)] = -R_{i,N}(x)$$

hata diferensiyel denklemi elde edilir. Ya da, açık şekilde hata problemi

$$\begin{cases} e'_{i,N}(x) - \sum_{j=1}^m p_{i,j}(x)e_{j,N}(x) = -R_{i,N}(x), & (i=1,2,\dots,m) \\ e_{i,N}(a) = 0, & (i=1,2,3). \end{cases} \quad (4.101)$$

şeklinde tanımlanır. Burada dikkat edilmelidir ki;

$$y_i(a) = c_i \text{ ve } y_{i,N}(a) = c_i$$

homojen olmayan başlangıç koşulları

$$e_{i,N}(a) = 0$$

şeklinde homojen olan başlangıç koşullarına dönüşmektedir. (4.101) hata problemi, geliştirilen metod yardımıyla çözülebilir. Böylece

$$e_{i,N,M}(x) = \sum_{n=0}^M a_{i,n}^* L_n(x) \quad (M > N, \quad i = 1, 2, \dots, m)$$

şeklinde,  $e_{i,N}(x)$  e göre  $e_{i,N,M}(x)$  yaklaşık çözümü bulunur. Sonuç olarak,  $y_{i,N}(x)$  ve  $e_{i,N,M}(x)$  polinomları yardımıyla

$$y_{i,N,M}(x) = y_{i,N}(x) + e_{i,N,M}(x)$$

düzeltilmiş Lucas polinom çözümü elde edilir. Ayrıca,

$$e_{i,N}(x) = y_i(x) - y_{i,N}(x)$$

asıl hata fonksiyonunu;

$$e_{i,N,M}(x)$$

tahmini hata fonksiyonunu;

$$E_{i,N,M}(x) = e_{i,N}(x) - e_{i,N,M}(x) = y_i(x) - y_{i,N,M}(x)$$

ise düzeltilmiş hata fonksiyonunu ifade eder.

**Örnek 4.11.** Örnek 4.5 ile verilen problemi bu kez Lucas sıralama yöntemini kullanarak çözelim.

$N = 2$  için  $y_{i,2}(x)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) kesilmiş Lucas seri çözümleri

$$y_{i,2}(x) = \sum_{n=0}^2 a_{i,2} L_n(x)$$

şeklinde. Şimdi yaklaşık çözümün  $a_{i,n}$ , ( $n = 0, 1, 2$ ) katsayılarını hesaplayalım.  $a = 0$

,  $b = 1$  ve  $N = 3$  için (4.86) ile verilen sıralama noktalarının kümesi

$$\left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = 1 \right\}$$

olur. Yukarıda bahsedilen Lucas metodu kullanılırsa  $N = 2$  için  $y_{i,2}(x)$  ( $i = 1, 2, 3$ )

Lucas polinom çözümleri

$$y_{1,2}(x) = 1 + x + 0.67061360741023699830x^2$$

$$y_{2,2}(x) = -(0.1e-18) + x - 0.1005251013995184324x^2$$

$$y_{3,2}(x) = 2 + x + 0.19278467720243885767x^2$$

şeklinde hesaplanır. Düzeltilmiş lucas polinom çözümlerini elde etmek için

$$\begin{cases} e'_{1,2}(x) - e_{3,2}(x) = -R_{1,2}(x) \\ e'_{2,2}(x) - e_{3,2}(x) = -R_{2,2}(x) \\ e'_{3,2}(x) - e_{1,2}(x) + e_{2,2}(x) = -R_{3,2}(x) \end{cases}$$

hata problemini ele alalım. Öyleki

$$\begin{cases} R_{1,2}(x) = y'_{1,2}(x) - y_{3,2}(x) + \cos(x) \\ R_{2,2}(x) = y'_{2,2}(x) - y_{3,2}(x) + e^x \\ R_{3,2}(x) = y'_{3,2}(x) - y_{1,2}(x) + y_{2,2}(x) \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. Yine Lucas metodunu kullanarak  $M = 3$  için bu hata problemi çözümlürse  $e_{1,2}(x)$ ,  $e_{2,2}(x)$  ve  $e_{3,2}(x)$  e göre sırasıyla  $e_{1,2,3}(x)$ ,  $e_{2,2,3}(x)$  ve  $e_{3,2,3}(x)$  tahmini hata fonksiyonları

$$e_{1,2,3}(x) = -(0.30e - 16)x - 0.198342522463333336x^2 + 0.238386300344444440x^3$$

$$e_{2,2,3}(x) = (0.1e - 17)x + (0.922148375866666676e - 1)x^2 - 0.152417435955555569x^3$$

$$e_{3,2,3}(x) = -(0.110e - 15)x - 0.236207314336666668x^2 + 0.290461694969999962x^3$$

şeklinde hesaplanır ve böylece

$$y_{1,2,3}(x) = 1 + x + 0.4722710849x^2 + 0.238386300344444440x^3$$

$$y_{2,2,3}(x) = -(0.1e - 18) + x - (0.831026381e - 2)x^2 - 0.152417435955555569x^3$$

$$y_{3,2,3}(x) = -(0.1e - 18) + x - (0.831026381e - 2)x^2 - 0.152417435955555569x^3$$

düzeltilmiş Lucas polinom çözümleri elde edilmiş olur. Benzer şekilde  $y_{1,2,5}(x)$ ,  $y_{2,2,5}(x)$ ,  $y_{3,2,5}(x)$  ve  $y_{1,2,9}(x)$ ,  $y_{2,2,9}(x)$ ,  $y_{3,2,9}(x)$  çözümleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$y_{1,2,5}(x) = 1 + x + 0.4997685849x^2 + 0.1682254548627777070x^3 + (0.377211001762152444e - 1)x^4 + (0.125314366180554194e - 1)x^5$$

$$y_{2,2,5}(x) = (0.1110048e - 14) + x + (0.453421e - 4)x^2 - 0.16698901947750079160x^3 + (0.782935853298638574e - 3)x^4 + (0.764087047222199168e - 2)x^5$$

$$y_{3,2,5}(x) = 2 + x - (0.938985e - 4)x^2 + 0.16722648875694567945x^3 + (0.820919222569445051e - 1)x^4 + (0.934385828125017249e - 2)x^5$$

ve

$$\begin{aligned} y_{1,2,9}(x) = & 1 + x + 0.5000000043x^2 + (0.19678255958344159645e - 3)x^7 \\ & + (0.352065501130205405e - 5)x^9 + 0.16666659924216542516x^3 \\ & + (0.41667082860282533908e - 1)x^4 + (0.83320220225406860294e - 2)x^5 \\ & + (0.13910649830890520352e - 2)x^6 + (0.247511344531048394e - 4)x^8 \end{aligned}$$

$$y_{2,2,9}(x) = -(0.1549516088e-10) + x + (0.1341e-6)x^2 - (0.27591259310755234078e-3)x^7 \\ + (0.459553932872225344e-4)x^8 - (0.863843029863531342e-5)x^9 \\ - 0.16666854684809728753x^3 + (0.113679654454301660e-4)x^4 \\ + (0.82961731078283751277e-2)x^5 + (0.704477678752368752e-4)x^6$$

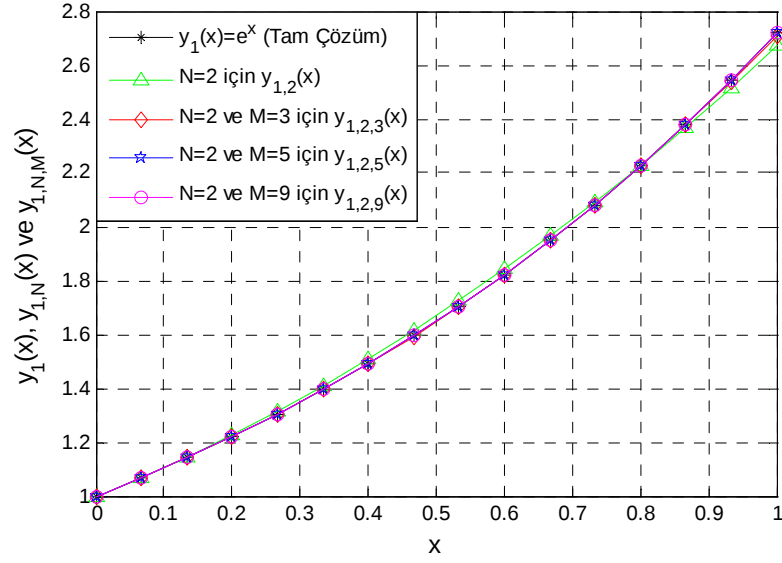
$$y_{3,2,9}(x) = 2 + x - (0.121e-7)x^2 + (0.20435925476292027288e-3)x^7 \\ + (0.379297555852531332e-5)x^9 + 0.16666681513294889599x^3 \\ + (0.83332477278247552074e-1)x^4 + (0.83360927275499818806e-2)x^5 \\ - (0.52647191068899706e-5)x^6 + (0.458737358854932608e-4)x^8.$$

Problemin tam çözümü, Lucas polinom çözümü ve düzeltilmiş Lucas polinom çözümlerinin verilen aralıktan seçilen bazı değerleri için nümerik sonuçları Tablo 4.21 de gösterilmiştir. Buna göre,  $M$  değeri arttıkça, yaklaşık çözümlerin tam çözümlere yaklaştığı ve çözümün doğruluğunun arttığı görülmektedir.

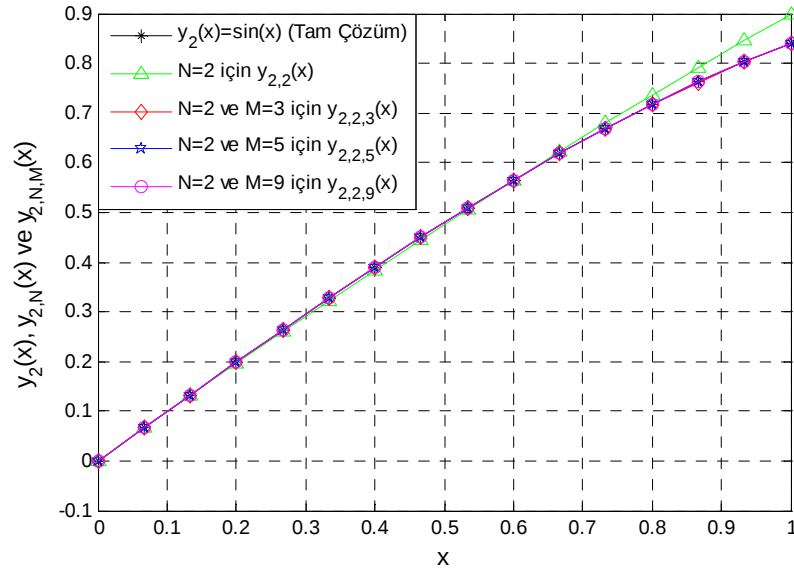
**Tablo 4.21.** Örnek 4.11'in tam çözüm ile yaklaşık çözümlerinin

$N = 2$  ve  $M = 3, 5, 9$  için nümerik sonuçları

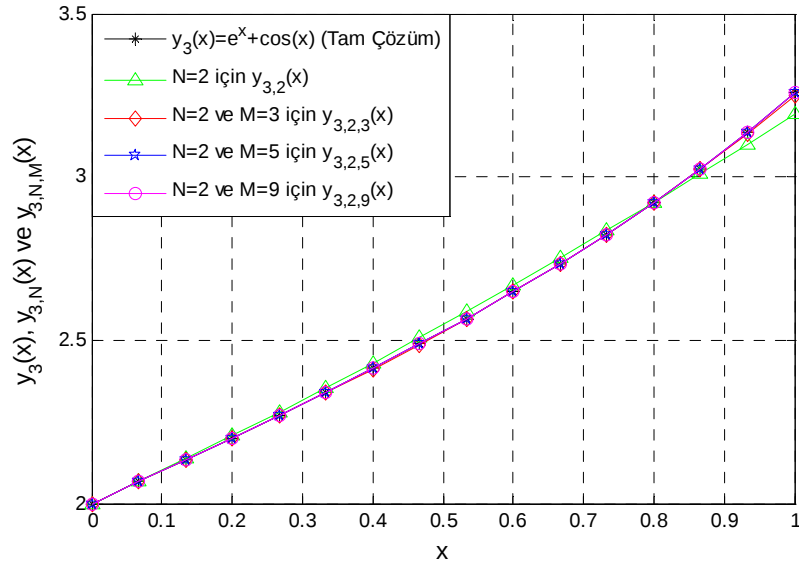
|       | Tam Çözüm   | Lucas Polinom Çözümü | Düzeltilmiş Lucas Polinom Çözümleri |                  |                  |
|-------|-------------|----------------------|-------------------------------------|------------------|------------------|
| $x_i$ | $y_1(x_i)$  | $y_{1,2}(x_i)$       | $y_{1,2,3}(x_i)$                    | $y_{1,2,5}(x_i)$ | $y_{1,2,9}(x_i)$ |
| 0     | 1           | 1                    | 1                                   | 1                | 1                |
| 0.2   | 1.221402758 | 1.226824544          | 1.220797934                         | 1.221400911      | 1.221402758      |
| 0.5   | 1.648721271 | 1.667653402          | 1.647866059                         | 1.648719504      | 1.648721271      |
| 0.8   | 2.225540928 | 2.229192709          | 2.224307280                         | 2.225540191      | 2.225540928      |
| 1.0   | 2.718281828 | 2.670613607          | 2.710657385                         | 2.718246577      | 2.718281828      |
| $x_i$ | $y_2(x_i)$  | $y_{2,2}(x_i)$       | $y_{2,2,3}(x_i)$                    | $y_{2,2,5}(x_i)$ | $y_{2,2,9}(x_i)$ |
| 0     | 0           | -0.1e-18             | -0.1e-18                            | 0                | -0.1550e-10      |
| 0.2   | 0.198669331 | 0.195978996          | 0.198448250                         | 0.198669599      | 0.198669331      |
| 0.5   | 0.479425539 | 0.474868725          | 0.478870255                         | 0.479425419      | 0.479425539      |
| 0.8   | 0.717356091 | 0.735663935          | 0.716643704                         | 0.717355092      | 0.717356091      |
| 1.0   | 0.841470985 | 0.899474899          | 0.839272300                         | 0.841480129      | 0.841470980      |
| $x_i$ | $y_3(x_i)$  | $y_{3,2}(x_i)$       | $y_{3,2,3}(x_i)$                    | $y_{3,2,5}(x_i)$ | $y_{3,2,9}(x_i)$ |
| 0     | 2           | 2                    | 2                                   | 2                | 2                |
| 0.2   | 2.201469336 | 2.207711387          | 2.200586788                         | 2.201468393      | 2.201469336      |
| 0.5   | 2.526303833 | 2.548196169          | 2.525452053                         | 2.526302577      | 2.526303832      |
| 0.8   | 2.922247638 | 2.923382193          | 2.920925900                         | 2.922246514      | 2.922247638      |
| 1.0   | 3.258584134 | 3.192784677          | 3.247039058                         | 3.258568371      | 3.258584134      |



Şekil 4.18. Örnek 4.11'in tam çözüm  $y_1(x)$  ile yaklaşık çözümlerin karşılaştırılması



Şekil 4.19. Örnek 4.11'in tam çözüm  $y_2(x)$  ile yaklaşık çözümlerin karşılaştırılması



**Şekil. 4.20.** Örnek 4.11'in tam çözüm  $y_3(x)$  ile yaklaşık çözümlerin karşılaştırılması

Şekil 4.18, Şekil 4.19 ve Şekil 4.20,  $M$  değerinin artırılması durumunda Lucas polinom çözümlerinin tam çözümlere yaklaştığını göstermektedir. Şimdi,  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  ve  $y_3(x)$  için düzeltilmiş mutlak hata fonksiyonlarına ait aşağıdaki Tablo 4.22 incelendiğinde,  $M$  değeri artırıldığında, düzeltilmiş mutlak hataların sıfıra yaklaştığı diğer bir ifadeyle çözümün doğruluğunun arttığı görülmektedir.

**Tablo 4.22.** Örnek 4.11'in düzeltilmiş mutlak hatalarının $N = 2$  ve  $M = 3, 5, 9$  için karşılaştırılması

| Düzeltilmiş Mutlak Hata $ E_{i,N,M}(x)  =  y_i(x) - y_{i,N,M}(x) $ |                    |                    |                    |
|--------------------------------------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $x_i$                                                              | $ E_{1,2,3}(x_i) $ | $ E_{1,2,5}(x_i) $ | $ E_{1,2,9}(x_i) $ |
| 0                                                                  | 0                  | 0                  | 0                  |
| 0.2                                                                | 0.604824e-3        | 0.184731e-5        | 0.246769e-11       |
| 0.5                                                                | 0.855212e-3        | 0.176646e-5        | 0.383796e-10       |
| 0.8                                                                | 0.123365e-2        | 0.737484e-6        | 0.941883e-10       |
| 1.0                                                                | 0.762444e-2        | 0.352519e-4        | 0.701920e-9        |
| $x_i$                                                              | $ E_{2,2,3}(x_i) $ | $ E_{2,2,5}(x_i) $ | $ E_{2,2,9}(x_i) $ |
| 0                                                                  | 0.1e-18            | 0.1110e-14         | 0.1550e-10         |
| 0.2                                                                | 0.221081e-3        | 0.268509e-6        | 0.232997e-9        |
| 0.5                                                                | 0.555284e-3        | 0.119821e-6        | 0.277310e-9        |
| 0.8                                                                | 0.712387e-3        | 0.998966e-6        | 0.245500e-9        |
| 1.0                                                                | 0.219868e-2        | 0.914414e-5        | 0.436046e-8        |
| $x_i$                                                              | $ E_{3,2,3}(x_i) $ | $ E_{3,2,5}(x_i) $ | $ E_{3,2,9}(x_i) $ |
| 0                                                                  | 0                  | 0                  | 0                  |
| 0.2                                                                | 0.882548e-3        | 0.942921e-6        | 0.527947e-10       |
| 0.5                                                                | 0.851780e-3        | 0.125541e-5        | 0.983779e-10       |
| 0.8                                                                | 0.132174e-2        | 0.112380e-5        | 0.129652e-9        |
| 1.0                                                                | 0.115451e-1        | 0.157635e-4        | 0.413385e-10       |

**Örnek 4.12.** Örnek 4.6 ile verilen problemi bu kez Lucas sıralama yöntemini kullanarak çözelim.

$N = 2$  için  $y_{i,2}(x)$  ( $i = 1, 2$ ) kesilmiş Lucas seri çözümleri

$$y_{i,N}(x) = \sum_{n=0}^2 a_{i,n} L_n(x)$$

şeklinde. Şimdi yaklaşık çözümün  $a_{i,n}$ , ( $n = 0, 1, 2$ ) katsayılarını hesaplayalım.  $a = 0$

,  $b = 1$  ve  $N = 3$  için (4.35) ile verilen sıralama noktalarının kümesi

$$\left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = 1 \right\}$$

olur. Yukarıda bahsedilen Lucas metodu kullanılırsa  $N = 2$  için  $y_{i,2}(x)$  ( $i = 1, 2$ ) Lucas polinom çözümleri

$$y_{1,2}(x) = 2 + x + 1.8646865593930787634x^2$$

$$y_{2,2}(x) = -2.0000000000000000004 + 2.5859190249855302151x^2$$

şeklinde hesaplanır. Düzeltilmiş Lucas polinom çözümlerini elde etmek için

$$\begin{cases} e_{1,2}^{(1)}(x) - \cos(x)e_{1,2}(x) - e_{2,2}(x) = -R_{1,2} \\ e_{2,2}^{(1)}(x) - e_{1,2}(x) - \cos(x)e_{2,2}(x) = -R_{2,2} \end{cases}$$

hata problemini ele alalım. Öyleki

$$\begin{cases} R_{1,2}(x) = y_{1,2}^{(1)}(x) - \cos(x)y_{1,2}(x) - y_{2,2}(x) - e^{\sin(x)} \\ R_{2,2}(x) = y_{2,2}^{(1)}(x) - y_{1,2}(x) - \cos(x)y_{2,2}(x) - xe^{\sin(x)} \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. Yine Lucas metodunu kullanarak  $M = 3$  için bu hata problemi çözümlerse  $e_{1,2}(x)$  ve  $e_{2,2}(x)$  e göre sırasıyla  $e_{1,2,3}(x)$  ve  $e_{2,2,3}(x)$  tahmini hata fonksiyonları

$$e_{1,2,3}(x) = (0.1e - 18) + (0.309995237e - 10)x - 1.0553168029550909369x^2 + 0.99497083450946547050x^3$$

$$e_{2,2,3}(x) = (0.13559036513e - 8)x - 1.8301377254066642699x^2 + 2.0381675757084778421x^3$$

şeklinde hesaplanır ve böylece

$$y_{1,2,3}(x) = 2 + x + 0.809369756x^2 + 0.99497083450946547050x^3$$

$$y_{2,2,3}(x) = -2 + 0.755781300x^2 + (0.13559036513e - 8)x + 2.0381675757084778421x^3$$

düzeltilmiş Lucas polinom çözümleri elde edilmiş olur. Benzer şekilde  $y_{1,2,5}(x)$ ,  $y_{2,2,5}(x)$  ve  $y_{1,2,9}(x)$ ,  $y_{2,2,9}(x)$  çözümleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$y_{1,2,5}(x) = 1.999999974 + 1.000000008x + 1.019087033x^2 + 0.38418404556095510925x^3 + 0.6009588114966867220x^4 - 0.16172189638449954717x^5$$

$$y_{2,2,5}(x) = -1.999999939 + 1.031092571x^2 - (0.489437872090e - 7)x + 1.1335297266208479740x^3 + 1.072894635943808351x^4 - 0.4205451163175187100x^5$$

ve

$$y_{1,2,9}(x) = 2 + x + 0.9999897535x^2 + (0.807771670804484696e - 1)x^5 - (0.378493987032584304e - 1)x^6 - (0.107759923236070408e - 1)x^7 - (0.415635790169659458e - 1)x^8 + (0.166670256709000598e - 1)x^9 + 0.5001731013688424180x^3 + 0.3320106528403243800x^4$$

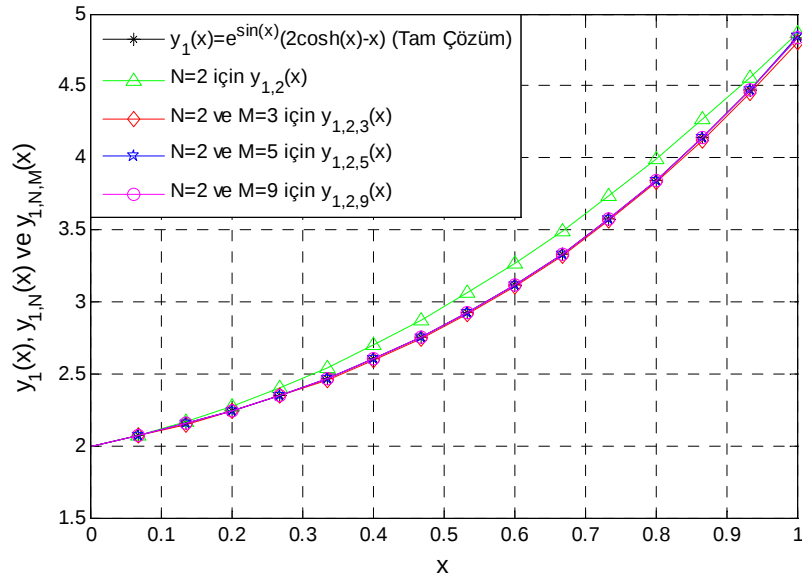
$$y_{2,2,9}(x) = -1.999999998 + 1.000008921x^2 + (0.160582780e - 10)x + (0.639409597747260280e - 1)x^5 - 0.1041163240570313061x^6 - (0.642539419440879560e - 1)x^7 - (0.177960430686425752e - 1)x^8 + (0.176957626521527800e - 1)x^9 + 1.3331997299908948860x^3 + 0.5841780904561346700x^4.$$

Problemin tam çözümü, Lucas polinom çözümü ve düzeltilmiş Lucas polinom çözümlerinin verilen aralıktan seçilen bazı değerleri için nümerik sonuçları Tablo 4.23 de gösterilmiştir. Buna göre,  $M$  değeri arttıkça, yaklaşık çözümlerin tam çözümlere yaklaştığı ve çözümün doğruluğunun arttığı görülmektedir.

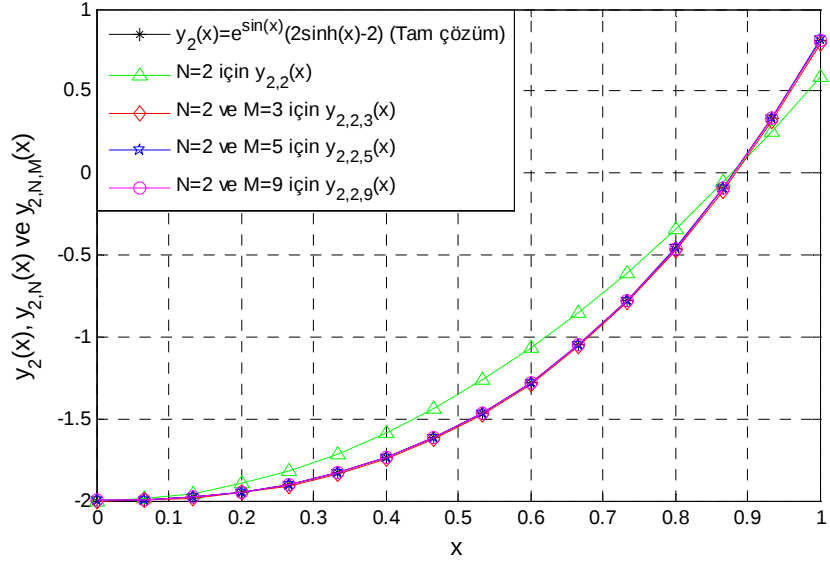
**Tablo 4.23.** Örnek 4.12'nin tam çözüm ile yaklaşık çözümlerinin  $N = 2$  ve  $M = 3, 5, 9$  için nümerik sonuçları

|       | Tam Çözüm    | Lucas Polinom Çözümü | Düzeltilmiş Lucas Polinom Çözümleri |                  |                  |
|-------|--------------|----------------------|-------------------------------------|------------------|------------------|
| $x_i$ | $y_1(x_i)$   | $y_{1,2}(x_i)$       | $y_{1,2,3}(x_i)$                    | $y_{1,2,5}(x_i)$ | $y_{1,2,9}(x_i)$ |
| 0     | 2            | 2                    | 2                                   | 1.999999974      | 2                |
| 0.1   | 2.110534057  | 2.118646866          | 2.109088668                         | 2.110633508      | 2.110534040      |
| 0.3   | 2.406356994  | 2.467821790          | 2.399707491                         | 2.406565561      | 2.406356979      |
| 0.6   | 3.114745826  | 3.271287161          | 3.106286812                         | 3.115163832      | 3.114745811      |
| 0.8   | 3.841624628  | 3.993399398          | 3.827421711                         | 3.842077611      | 3.841624612      |
| 1.0   | 4.839428566  | 4.864686559          | 4.804340591                         | 4.842507976      | 4.839428730      |
| $x_i$ | $y_2(x_i)$   | $y_{2,2}(x_i)$       | $y_{2,2,3}(x_i)$                    | $y_{2,2,5}(x_i)$ | $y_{2,2,9}(x_i)$ |
| 0     | -2           | -2                   | -2                                  | -1.999999939     | -1.999999998     |
| 0.1   | -1.988607781 | -1.974140810         | -1.990404019                        | -1.988452404     | -1.988607763     |
| 0.3   | -1.869206372 | -1.767267288         | -1.876949158                        | -1.868927798     | -1.869206356     |
| 0.6   | -1.278121055 | -1.069069151         | -1.287674535                        | -1.277618665     | -1.278121038     |
| 0.8   | -0.458543621 | -0.345011824         | -0.472758168                        | -0.458080094     | -0.458543601     |
| 1.0   | 0.812855337  | 0.585919025          | 0.793948877                         | 0.816971829      | 0.812857157      |

Şimdi,  $y_1(x)$  ve  $y_2(x)$  için tam çözüm ile yaklaşık çözümlerin karşılaştırmasını gösteren Şekil 4.21, Şekil 4.22 yi ayrıca düzeltilmiş mutlak hata fonksiyonlarına ait aşağıdaki Tablo 4.24 ü inceleyelim.



**Şekil 4.21.** Örnek 4.12'nin tam çözüm  $y_1(x)$  ile yaklaşık çözümlerin karşılaştırılması



**Şekil 4.22.** Örnek 4.12'nin tam çözüm  $y_2(x)$  ile yaklaşık çözümlerin karşılaştırılması

Şekil 4.21 ve Şekil 4.22 den,  $M$  değeri artırıldığında, Lucas polinom çözümlerinin tam çözümlere yaklaştığı ayrıca Tablo 4.24 ten de,  $M$  değeri artırıldığında, düzeltilmiş mutlak hataların sıfıra yaklaştığı diğer bir ifadeyle çözümün doğruluğunun arttığı görülmektedir.

**Tablo 4.24.** Örnek 4.12'nin düzeltilmiş mutlak hatalarının  $N = 2$  ve  $M = 3, 5, 9$  için karşılaştırılması

| Düzeltilmiş Mutlak Hata $ E_{i,N,M}(x)  =  y_i(x) - y_{i,N,M}(x) $ |                    |                    |                    |
|--------------------------------------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $x_i$                                                              | $ E_{1,2,3}(x_i) $ | $ E_{1,2,5}(x_i) $ | $ E_{1,2,9}(x_i) $ |
| 0                                                                  | 0                  | 0.26e-7            | 0                  |
| 0.1                                                                | 0.144539e-2        | 0.994506e-4        | 0.170797e-7        |
| 0.3                                                                | 0.664950e-2        | 0.208567e-3        | 0.154377e-7        |
| 0.6                                                                | 0.845901e-2        | 0.418006e-3        | 0.156254e-7        |
| 0.8                                                                | 0.142029e-1        | 0.452983e-3        | 0.155066e-7        |
| 1.0                                                                | 0.350880e-1        | 0.307941e-2        | 0.164508e-6        |
| $x_i$                                                              | $ E_{2,2,3}(x_i) $ | $ E_{2,2,5}(x_i) $ | $ E_{2,2,9}(x_i) $ |
| 0                                                                  | 0                  | 0.61e-7            | 0.2e-8             |
| 0.1                                                                | 0.179624e-2        | 0.155377e-3        | 0.189035e-7        |
| 0.3                                                                | 0.774279e-2        | 0.278575e-3        | 0.165771e-7        |
| 0.6                                                                | 0.955348e-2        | 0.502389e-3        | 0.162874e-7        |
| 0.8                                                                | 0.142145e-1        | 0.463527e-3        | 0.200905e-7        |
| 1.0                                                                | 0.189065e-1        | 0.411649e-2        | 0.181947e-5        |

Lineer diferensiyel denklemler, lineer diferensiyel denklem sistemleri ve normal formdaki lineer diferensiyel denklem sistemlerinin çözümü için kullanılan Taylor ve Lucas sıralama metodları karşılaştırıldığında örneklerden elde edilen sonuçların birbirine oldukça yakın olduğu ve her iki metodun da oldukça kullanışlı olduğu görülmektedir.

## 5. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA BISHOP ÇATIYA GÖRE SABİT GENİŞLİKLİ EĞRİLERİ KARAKTERİZE EDEN DİFERENSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

### 5.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Bishop Çatıya Göre Sabit Genişlikli Eğrileri Karakterize Eden Diferensiyel Denklem Sistemlerinin Çözümü için Taylor Sıralama Yöntemi

Bu bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatıya göre sabit genişlikli eğri çiftlerini karakterize eden diferensiyel denklem sistemlerinin yaklaşık çözümleri için Taylor sıralama metodu kullanılacaktır. Bir örnek verilerek, bir eğrinin sabit genişlikli olduğu eğri, elde edilen bu yaklaşık çözümler vasıtasıyla belirlenecektir.

Bölüm 2.1 de 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatıya göre sabit genişlikli eğri çiftlerini karakterize eden diferensiyel denklem sistemi (2.13) ile ayrıca,  $s$  yay parametrelili  $\alpha$  eğrisinin sabit genişlikli olduğu,  $\vec{\alpha}^*(s^*)$  konum vektörü ile verilen  $\alpha^*$  eğrisinin ise (2.26) eşitliği ile belirlenebileceği gösterilmiştir.

Şimdi (2.13) denklem sistemi ile (2.26) eşitliğini kullanılarak bir eğrinin sabit genişlikli olduğu eğriyi yaklaşık olarak belirlemeye çalışalım. Bunun için aşağıda verilen örneği inceleyelim.

**Örnek 5.1.**  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow E^3$  tanımlı, birim hızlı

$$\alpha(s) = \left( 3\cos\left(\frac{s}{5}\right), 3\sin\left(\frac{s}{5}\right), \frac{4s}{5} \right)$$

eğrisini göz önüne alalım.  $\alpha$  eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilik ve burulması sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$\vec{T}(s) = \left( -\frac{3}{5}\sin\left(\frac{s}{5}\right), \frac{3}{5}\cos\left(\frac{s}{5}\right), \frac{4}{5} \right), \quad \vec{N}(s) = \left( -\cos\left(\frac{s}{5}\right), -\sin\left(\frac{s}{5}\right), 0 \right)$$

$$\vec{B}(s) = \left( \frac{4}{5}\sin\left(\frac{s}{5}\right), -\frac{4}{5}\cos\left(\frac{s}{5}\right), \frac{3}{5} \right), \quad \kappa = \frac{3}{25} \text{ ve } \tau = \frac{4}{25}.$$

Ayrıca,  $\alpha$  eğrisinin Bishop elemanları

$$\theta = \frac{4s}{25}$$

$$k_1 = \frac{3}{25} \cos\left(\frac{4s}{25}\right), \quad k_2 = \frac{3}{25} \sin\left(\frac{4s}{25}\right) \quad (5.1)$$

ve

$$\begin{aligned} \overrightarrow{N}_1 &= \left( \frac{-4}{5} \sin\left(\frac{s}{5}\right) \sin\left(\frac{4s}{25}\right) - \cos\left(\frac{s}{5}\right) \cos\left(\frac{4s}{25}\right), \frac{4}{5} \cos\left(\frac{s}{5}\right) \sin\left(\frac{4s}{25}\right) - \sin\left(\frac{s}{5}\right) \cos\left(\frac{4s}{25}\right), \frac{-3}{5} \sin\left(\frac{4s}{25}\right) \right) \\ \overrightarrow{N}_2 &= \left( \frac{4}{5} \sin\left(\frac{s}{5}\right) \cos\left(\frac{4s}{25}\right) - \cos\left(\frac{s}{5}\right) \sin\left(\frac{4s}{25}\right), \frac{-4}{5} \cos\left(\frac{s}{5}\right) \cos\left(\frac{4s}{25}\right) - \sin\left(\frac{s}{5}\right) \sin\left(\frac{4s}{25}\right), \frac{3}{5} \cos\left(\frac{4s}{25}\right) \right) \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. (5.1) ile verilen Bishop eğrilikleri (2.13) de yerlerine yazılırsa  $\alpha$  eğrisinin sabit genişlikli olduğu eğriyi belirlemede kullanılacak olan normal formdaki lineer diferensiyel denklem sistemi

$$\begin{cases} \lambda_1'(s) = \frac{3}{25} \cos\left(\frac{4s}{25}\right) \lambda_2(s) + \frac{3}{25} \sin\left(\frac{4s}{25}\right) \lambda_3(s) \\ \lambda_2'(s) = -\frac{3}{25} \cos\left(\frac{4s}{25}\right) \lambda_1(s) \\ \lambda_3'(s) = -\frac{3}{25} \sin\left(\frac{4s}{25}\right) \lambda_1(s) \end{cases} \quad (5.2)$$

şeklinde bulunur. (5.2) denklem sisteminin yaklaşık çözümlerini, Bölüm 4.1.5 ve 4.1.6 da bahsedilen normal formdaki lineer denklem sistemlerinin çözümü için Taylor sıralama yöntemini kullanarak bulmaya çalışalım.  $\lambda_1(s)$ ,  $\lambda_2(s)$  ve  $\lambda_3(s)$  için başlangıç koşullarını

$$\lambda_1(0) = 2, \quad \lambda_2(0) = 1, \quad \lambda_3(0) = 3$$

olarak kabul edelim. Bu durumda  $d$  genişliği

$$d = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} = \sqrt{14} \cong 3.741657387 \quad (5.3)$$

olur.  $N=3$  için  $\lambda_{1,3}(s)$ ,  $\lambda_{2,3}(s)$  ve  $\lambda_{3,3}(s)$  kesilmiş (sonlu) Taylor seri çözümleri

$$\lambda_{i,3}(s) = \sum_{n=0}^3 a_{i,n} s^n, \quad (i=1,2,3)$$

şeklinde dir. Şimdi yaklaşık çözümlerin  $a_{i,n}$  ( $n=0,1,2,3$ ) katsayılarını hesaplayalım.

$a=0$ ,  $b=2\pi$  ve  $N=3$  için sıralama noktalarının kümesi

$$\left\{ s_0 = 0, s_1 = \frac{2\pi}{3}, s_2 = \frac{4\pi}{3}, s_3 = 2\pi \right\}$$

olur. (4.44) ten, (5.2) sistemi için temel matris denklemi

$$\{\mathbf{S}\overline{\mathbf{B}} - \mathbf{P}\mathbf{S}\} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

şeklinde yazılabilir. Bölüm 4.1.5 ve 4.1.6 da bahsedilen yöntem kullanılarak  $N=3$  için (5.2) probleminin yaklaşık çözümleri

$$\lambda_{1,3}(s) = 2 + 0.11999999999999994s + (0.148701113607149546e-1)s^2 - (0.108758588173734316e-2)s^3$$

$$\lambda_{2,3}(s) = 1 - 0.23999999999999990s - (0.873633174412091763e-2)s^2 + (0.115528896583677382e-2)s^3$$

$$\lambda_{3,3}(s) = 3 - (0.195847736542368278e-1)s^2 - (0.683135379920168538e-3)s^3$$

olarak hesaplanır. Şimdi düzeltilmiş Taylor polinom çözümlerini hesaplamak için

$$\begin{cases} e'_{1,3}(s) - \frac{3}{25} \cos\left(\frac{4s}{25}\right) e_{2,3}(s) - \frac{3}{25} \sin\left(\frac{4s}{25}\right) e_{3,3}(s) = -R_{1,3}(s) \\ e'_{2,3}(s) + \frac{3}{25} \cos\left(\frac{4s}{25}\right) e_{1,3}(s) = -R_{2,3}(s) \\ e'_{3,3}(s) + \frac{3}{25} \sin\left(\frac{4s}{25}\right) e_{1,3}(s) = -R_{3,3}(s) \end{cases} \quad (5.4)$$

hata problemini ele alalım. Öyleki,

$$\begin{cases} R_{1,3}(s) = \lambda'_{1,3}(s) - \frac{3}{25} \cos\left(\frac{4s}{25}\right) \lambda_{2,3}(s) - \frac{3}{25} \sin\left(\frac{4s}{25}\right) \lambda_{3,3}(s) \\ R_{2,3}(s) = \lambda'_{2,3}(s) + \frac{3}{25} \cos\left(\frac{4s}{25}\right) \lambda_{1,3}(s) \\ R_{3,3}(s) = \lambda'_{3,3}(s) + \frac{3}{25} \sin\left(\frac{4s}{25}\right) \lambda_{1,3}(s) \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. Yine Taylor metodu kullanılarak  $M=4$  için (5.4) hata probleminin  $e_{1,3}(s)$ ,  $e_{2,3}(s)$  ve  $e_{3,3}(s)$  e göre  $e_{1,3,4}(s)$ ,  $e_{2,3,4}(s)$  ve  $e_{3,3,4}(s)$  tahmini hata fonksiyonları

$$e_{1,3,4}(s) = -(0.341067270660595030e-3)s^2 + (0.190358881883564312e-3)s^3 - (0.241570139950251427e-4)s^4$$

$$e_{2,3,4}(s) = (0.151791194512943678e-2)s^2 - (0.715789891362811458e-3)s^3 + (0.844881912401404312e-4)s^4$$

$$e_{3,3,4}(s) = (0.784722476727751960e-3)s^2 - (0.392449258278592588e-3)s^3 + (0.484628169544237858e-4)s^4$$

şeklinde hesaplanır ve böylece

$$\lambda_{1,3,4}(s) = 2 + 0.11999999999999994s + (0.1452904409e-1)s^2 - (0.8972270001e-3)s^3 - (0.241570139950251427e-4)s^4$$

$$\lambda_{2,3,4}(s) = 1 - 0.23999999999999990s - (0.7218419799e-2)s^2 + (0.4394990746e-3)s^3 + (0.844881912401404312e-4)s^4$$

$$\lambda_{3,3,4}(s) = 3 - (0.1880005117e-1)s^2 - (0.1075584638e-2)s^3 + (0.484628169544237858e-4)s^4$$

düzeltilmiş Taylor polinom çözümleri elde edilir. Benzer şekilde  $M=5$  için

$\lambda_{1,3,5}(s)$ ,  $\lambda_{2,3,5}(s)$  ve  $\lambda_{3,3,5}(s)$  çözümleri

$$\lambda_{1,3,5}(s) = 2 + 0.11999999999999994s + (0.1439737414e-1)s^2 - (0.7947228696e-3)s^3 \\ - (0.508657095719278348e-4)s^4 + (0.226278147175747614e-5)s^5$$

$$\lambda_{2,3,5}(s) = 1 - 0.23999999999999990s - (0.7121186842e-2)s^2 + (0.3615042855e-3)s^3 \\ + (0.105565171620638706e-3)s^4 - (0.184964326733999626e-5)s^5$$

$$\lambda_{3,3,5}(s) = 3 - (0.1920195851e-1)s^2 - (0.7626538882e-3)s^3 - (0.329828771379642208e-4)s^4 \\ + (0.690853227461905316e-5)s^5$$

ve  $M = 8$  için  $\lambda_{1,3,8}(s)$ ,  $\lambda_{2,3,8}(s)$  ve  $\lambda_{3,3,8}(s)$  çözümleri

$$\lambda_{1,3,8}(s) = 2 + 0.11999999999999994s + (0.1440000746e-1)s^2 - (0.8000151877e-3)s^3 \\ - (0.479862996416925864e-4)s^4 + (0.159324423040038568e-5)s^5 \\ + (0.659440054032486062e-7)s^6 - (0.184727975432647118e-8)s^7 \\ - (0.175647261556320578e-10)s^8$$

$$\lambda_{2,3,8}(s) = 1 - 0.23999999999999990s - (0.7200001520e-2)s^2 + (0.4479985321e-3)s^3 \\ + (0.700883710680355620e-4)s^4 + (0.425489541190857338e-5)s^5 \\ - (0.296452061743570304e-6)s^6 - (0.194890934014232106e-7)s^7 \\ + (0.105207625088382470e-8)s^8$$

$$\lambda_{3,3,8}(s) = 3 - (0.1919982286e-1)s^2 - (0.7683896860e-3)s^3 - (0.277865487879685406e-4)s^4 \\ + (0.484261911331022518e-5)s^5 + (0.374860308800117502e-6)s^6 \\ - (0.260342571361117485e-7)s^7 + (0.139893638198862298e-9)s^8$$

şeklinde hesaplanır. Şimdi (2.10) dan  $d_{N,M}$  uzaklık fonksiyonu

$$d_{N,M}(s) = \sqrt{\lambda_{1,N,M}^2(s) + \lambda_{2,N,M}^2(s) + \lambda_{3,N,M}^2(s)} = k, \quad k \in \mathbb{R}$$

şeklinde yazılabilir.  $N = 3$  ve  $M = 4, 5, 8$  için  $d_{3,4}$ ,  $d_{3,5}$  ve  $d_{3,8}$  uzaklık fonksiyonları aşağıdaki gibi bulunur.

$$d_{3,4}(s) = (0.2000000000000000e-10)[(0.138367955738275e+19)s^4 + (0.719757435500000e+19)s^2 \\ - (0.552901398520000e+19)s^3 - (0.958165040494845e+17)s^5 \\ - (0.397211986269680e+16)s^6 + 33404728162078s^7 + 25176151028361s^8 \\ + (0.350000000000000e+23)]^{(1/2)}$$

$$d_{3,5}(s) = (0.4000000000000000e-12)[(0.846073850000000e+21)s^2 - (0.989167242750000e+21)s^3 \\ + (0.451409944795980e+21)s^4 - (0.926227946415095e+20)s^5 \\ + 0.670821758671850e+19s^6 + (0.210416759380431e+18)s^7 \\ - (0.407698907964350e+16)s^8 - (0.672773956672850e+16)s^9 + 351682364967490s^{10} \\ + (0.875000000000000e+26)]^{(1/2)}$$

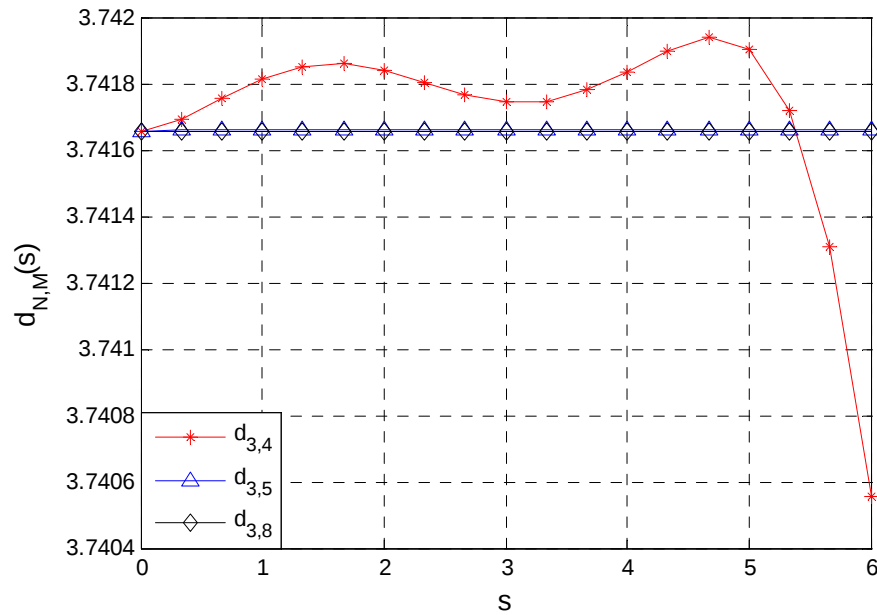
$$\begin{aligned}
d_{3,8}(s) = & (0.100000000000000e-15)[(0.108964000000000e+27)s^2 - (0.239928260000000e+27)s^3 \\
& + (0.230274497692750e+27)s^4 - (0.120638545022320e+27)s^5 \\
& + (0.366926990526920e+26)s^6 - (0.635088985330760e+25)s^7 \\
& + (0.536652347489610e+24)s^8 + (0.140000000000000e+34) \\
& - (0.548645006355880e+22)s^9 - (0.201483174705506e+22)s^{10} \\
& + (0.965946771587340e+20)s^{11} - (0.497417074083528e+19)s^{12} \\
& + (0.204499269053910e+18)s^{13} + (0.539803969393183e+17)s^{14} \\
& - (0.482271846089033e+16)s^{15} + 112674318728718s^{16}]^{(1/2)}.
\end{aligned}$$

$d_{N,M}$  uzaklık fonksiyonunun  $N=3$  ve  $M=4,5,8$  değerleri için  $[0,2\pi]$  aralığından seçilmiş bazı değerlerde nümerik sonuçları Tablo 5.1 de gösterilmiştir.

**Tablo 5.1.** Örnek 5.1'in  $d_{N,M}$  uzaklık fonksiyonunun  $N=3$  ve  $M=4,5,8$  değerleri için sayısal sonuçları

| $s_i$    | $d_{3,4}(s_i)$ | $d_{3,5}(s_i)$ | $d_{3,8}(s_i)$ |
|----------|----------------|----------------|----------------|
| 0        | 3.741657387    | 3.741657387    | 3.741657387    |
| $2\pi/4$ | 3.741859416    | 3.741662122    | 3.741657397    |
| $3\pi/4$ | 3.741800656    | 3.741660812    | 3.741657399    |
| $5\pi/4$ | 3.741821912    | 3.741661886    | 3.741657399    |
| $7\pi/4$ | 3.741551934    | 3.741660935    | 3.741657407    |
| $2\pi$   | 3.739579499    | 3.741653059    | 3.741657103    |

Şimdi  $d_{N,M}$  uzaklık fonksiyonunun  $N=3$  ve  $M=4,5,8$  değerleri için grafiklerini çizelim.



**Şekil 5.1.** Örnek 5.1'in uzaklık fonksiyonlarının karşılaştırılması

Tablo 5.1 deki değerler (5.3) ile karşılaştırıldığında  $M$  değeri arttıkça gerçek çözüme oldukça yaklaşıldığı açık bir şekilde görülmektedir. Ayrıca Şekil 5.1 den görülmektedir ki  $M$  değeri artırıldığında çözümün doğruluğu artmaktadır. Çünkü  $d_{N,M}$  fonksiyonu sabit kalmaktadır. Buradan Taylor sıralama metodunun bu tip denklem sistemlerinin çözümünde oldukça etkili olduğu söylenebilir. Dahası  $N=3$  ve  $M=4,5,8$  değerleri için  $e_{i,N,M}(s)$ , ( $i=1,2,3$ ) tahmini hata fonksiyonlarını hesaplayalım ve  $[0,2\pi]$  aralığından seçilen bazı değerler için elde edilen sonuçları karşılaştıralım.

$$e_{1,3,4}(s) = (0.34106727e-3)s^2 - (0.1903588819e-3)s^3 + (0.241570139950251427e-4)s^4$$

$$e_{1,3,5}(s) = -(0.47273722e-3)s^2 + (0.2928630124e-3)s^3 - (0.508657095719278348e-4)s^4 + (0.226278147175747614e-5)s^5$$

$$e_{1,3,8}(s) = (0.47010390e-3)s^2 - (0.2875706943e-3)s^3 + (0.479862996416925864e-4)s^4 - (0.159324423040038568e-5)s^5 - (0.659440054032486062e-7)s^6 + (0.184727975432647118e-8)s^7 + (0.175647261556320578e-10)s^8.$$

**Tablo 5.2.** Örnek 5.1'in  $|e_{i,N,M}(s)|$  tahmini mutlak hata fonksiyonunun

$N=3$  ve  $M=4,5,8$  değerleri için sayısal sonuçları

| $s_i$    | $ e_{1,3,4}(s_i) $ | $ e_{1,3,5}(s_i) $ | $ e_{1,3,8}(s_i) $ |
|----------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 0        | 0                  | 0                  | 0                  |
| $2\pi/4$ | 0.250829e-3        | 0.319393e-3        | 0.321334e-3        |
| $3\pi/4$ | 0.147985e-3        | 0.196999e-3        | 0.200962e-3        |
| $5\pi/4$ | 0.523379e-3        | 0.461898e-3        | 0.455743e-3        |
| $7\pi/4$ | 0.745862e-3        | 0.727607e-3        | 0.733896e-3        |
| $2\pi$   | 0.389604e-2        | 0.313612e-2        | 0.311312e-2        |

$$e_{2,3,4}(s) = (0.1517911945e-2)s^2 - (0.7157898914e-3)s^3 + (0.844881912401404312e-4)s^4$$

$$e_{2,3,5}(s) = -(0.1615144902e-2)s^2 + (0.7937846805e-3)s^3 - (0.105565171620638706e-3)s^4 + (0.184964326733999626e-5)s^5$$

$$e_{2,3,8}(s) = (0.1536330224e-2)s^2 - (0.7072904339e-3)s^3 + (0.700883710680355620e-4)s^4 + (0.425489541190857338e-5)s^5 - (0.296452061743570304e-6)s^6 - (0.194890934014232106e-7)s^7 + (0.105207625088382470e-8)s^8$$

**Tablo 5.3.** Örnek 5.1'in  $|e_{2,N,M}(s)|$  tahmini mutlak hata fonksiyonunun $N = 3$  ve  $M = 4, 5, 8$  değerleri için sayısal sonuçları

| $s_i$    | $ e_{2,3,4}(s_i) $ | $ e_{2,3,5}(s_i) $ | $ e_{2,3,8}(s_i) $ |
|----------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 0        | 0                  | 0                  | 0                  |
| $2\pi/4$ | 0.148542e-2        | 0.153367e-2        | 0.151196e-2        |
| $3\pi/4$ | 0.166783e-2        | 0.170269e-2        | 0.168886e-2        |
| $5\pi/4$ | 0.153067e-3        | 0.214272e-3        | 0.192573e-3        |
| $7\pi/4$ | 0.412167e-2        | 0.406535e-2        | 0.403958e-2        |
| $2\pi$   | 0.140516e-1        | 0.132802e-1        | 0.128916e-1        |

$$e_{3,3,4}(s) = (0.784722476727751960e-3)s^2 - (0.392449258278592588e-3)s^3 + (0.484628169544237858e-4)s^4$$

$$e_{3,3,5}(s) = (0.382815141144866249e-3)s^2 - (0.795185082545703140e-4)s^3 - (0.329828771379642208e-4)s^4 + (0.690853227461905316e-5)s^5$$

$$e_{3,3,8}(s) = (0.384950790265328552e-3)s^2 - (0.852543060974059880e-4)s^3 - (0.277865487879685406e-4)s^4 + (0.484261911331022518e-5)s^5 + (0.374860308800117502e-6)s^6 - (0.260342571361117485e-7)s^7 + (0.139893638198862298e-9)s^8$$

**Tablo 5.4.** Örnek 5.1'in  $|e_{3,N,M}(s)|$  tahmini mutlak hata fonksiyonunun $N = 3$  ve  $M = 4, 5, 8$  değerleri için sayısal sonuçları

| $s_i$    | $ e_{3,3,4}(s_i) $ | $ e_{3,3,5}(s_i) $ | $ e_{3,3,8}(s_i) $ |
|----------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 0        | 0                  | 0                  | 0                  |
| $2\pi/4$ | 0.710221e-3        | 0.501627e-3        | 0.501567e-3        |
| $3\pi/4$ | 0.716632e-3        | 0.570230e-3        | 0.570964e-3        |
| $5\pi/4$ | 0.139788e-3        | 0.304045e-3        | 0.304317e-3        |
| $7\pi/4$ | 0.277897e-2        | 0.292374e-2        | 0.292166e-2        |
| $2\pi$   | 0.916398e-2        | 0.116357e-1        | 0.115051e-1        |

Tablo 5.2, Tablo 5.3 ve Tablo 5.4 ten tahmini mutlak hata değerlerinin hemen hemen aynı olduğu görülmektedir. Son olarak,  $N = 3$  ve  $M = 4, 5, 8$  değerleri için bulduğumuz  $\lambda_{i,N,M}$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) değerlerini, (5.1) ile verilen Bishop eğriliklerini ve  $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$  değerlerini (2.26) da yerlerine yazarsak,  $\alpha$  eğrisinin sabit genişlikli ( $d = \sqrt{14}$ ) olduğu  $\alpha^*$  eğrisi belirlenebilir. O halde  $N = 3$  ve  $M = 4$  için  $\alpha_{3,4}^*$  eğrisi

$$\overrightarrow{\alpha_{3,4}^*}(s^*) = \left( \frac{k_1 \lambda_{3,3,4} - k_2 \lambda_{2,3,4}}{\mu} \right) \overrightarrow{\alpha}''' + \left( \frac{k_2' \lambda_{2,3,4} - k_1' \lambda_{3,3,4}}{\mu} \right) \overrightarrow{\alpha}'' + \left[ \frac{(k_1^2 + k_2^2)(k_1 \lambda_{3,3,4} - k_2 \lambda_{2,3,4})}{\mu} + \lambda_{1,3,4} \right] \overrightarrow{\alpha}' + \overrightarrow{\alpha}$$

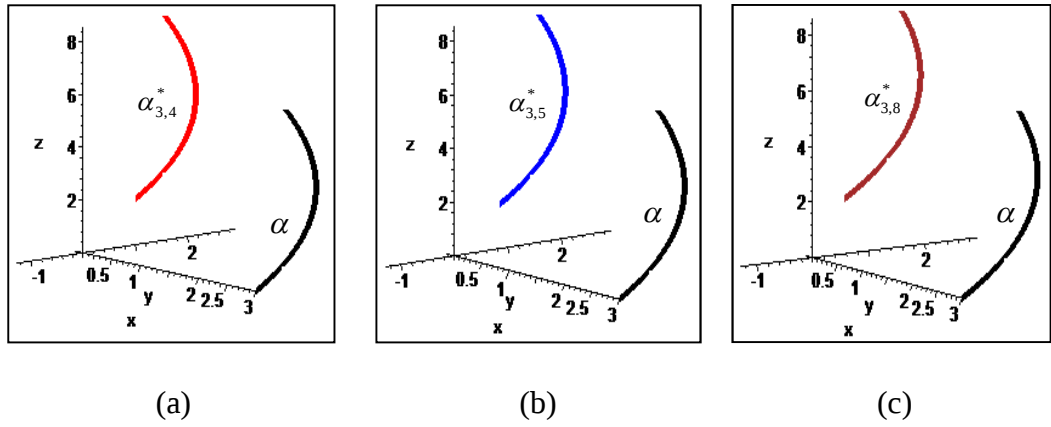
şeklinde ifade edilir. Benzer şekilde  $N=3$  ve  $M=5$  için  $\alpha_{3,5}^*$  eğrisi

$$\overrightarrow{\alpha_{3,5}^*}(s^*) = \left( \frac{k_1 \lambda_{3,3,5} - k_2 \lambda_{2,3,5}}{\mu} \right) \overrightarrow{\alpha}''' + \left( \frac{k_2' \lambda_{2,3,5} - k_1' \lambda_{3,3,5}}{\mu} \right) \overrightarrow{\alpha}'' + \left[ \frac{(k_1^2 + k_2^2)(k_1 \lambda_{3,3,5} - k_2 \lambda_{2,3,5})}{\mu} + \lambda_{1,3,5} \right] \overrightarrow{\alpha}' + \overrightarrow{\alpha}$$

$N=3$  ve  $M=8$  için  $\alpha_{3,8}^*$  eğrisi

$$\overrightarrow{\alpha_{3,8}^*}(s^*) = \left( \frac{k_1 \lambda_{3,3,8} - k_2 \lambda_{2,3,8}}{\mu} \right) \overrightarrow{\alpha}''' + \left( \frac{k_2' \lambda_{2,3,8} - k_1' \lambda_{3,3,8}}{\mu} \right) \overrightarrow{\alpha}'' + \left[ \frac{(k_1^2 + k_2^2)(k_1 \lambda_{3,3,8} - k_2 \lambda_{2,3,8})}{\mu} + \lambda_{1,3,8} \right] \overrightarrow{\alpha}' + \overrightarrow{\alpha}$$

şeklinde yazılabilir. Aşağıdaki grafik  $\alpha$  ile  $\alpha_{3,4}^*$ ,  $\alpha_{3,5}^*$  ve  $\alpha_{3,8}^*$  eğrilerinin grafiklerini göstermektedir.



**Şekil 5.2.** Örnek 5.1'in  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_{3,4}^*$ ,  $\alpha_{3,5}^*$  ve  $\alpha_{3,8}^*$  eğrilerinin grafikleri

Şekil 5.2 (a),  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_{3,4}^*$  eğrisinin grafiği; (b),  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_{3,5}^*$  eğrisinin grafiği; (c),  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_{3,8}^*$  eğrisinin grafiğini göstermektedir.

## 5.2. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Bishop Çatıya Göre Sabit Genişlikli Eğrileri Karakterize Eden Diferensiyel Denklem Sistemlerinin Çözümü için Lucas Sıralama Yöntemi

Bu bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatıya göre sabit genişlikli eğri çiftlerini karakterize eden diferensiyel denklem sistemlerinin yaklaşık çözümleri için geliştirdiğimiz Lucas sıralama yöntemi kullanılacaktır. Bölüm 5.1 de verilen örneği bu kez de Lucas sıralama metoduyla çözerek, bir eğrinin sabit genişlikli olduğu eğri, elde edilen bu yaklaşık çözümler vasıtasıyla bulunacaktır.

Bölüm 2.1 de 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatıya göre sabit genişlikli eğri çiftlerini karakterize eden diferensiyel denklem sistemi (2.13) ile ayrıca,  $s$  yay parametrelili  $\alpha$  eğrisinin sabit genişlikli olduğu,  $\overrightarrow{\alpha^*}(s^*)$  konum vektörü ile verilen  $\alpha^*$  eğrisinin ise (2.26) eşitliği ile belirlenebileceği gösterilmiştir.

Şimdi (2.13) denklem sistemi ile (2.26) eşitliğini kullanılarak bir eğrinin sabit genişlikli olduğu eğriyi yaklaşık olarak belirlemeye çalışalım. Aşağıdaki örneği inceleyelim.

**Örnek 5.2.** Örnek 5.1 de verilen (5.2) denklem sisteminin yaklaşık çözümlerini bu kez de, Bölüm 4.2.5 ve 4.2.6 da bahsedilen normal formdaki lineer denklem sistemlerinin çözümü için Lucas sıralama yöntemini kullanarak bulmaya çalışalım.  $\lambda_1(s)$ ,  $\lambda_2(s)$  ve  $\lambda_3(s)$  için başlangıç koşulları

$$\lambda_1(0) = 2, \lambda_2(0) = 1, \lambda_3(0) = 3$$

olsun.  $N = 3$  için  $\lambda_{1,3}(s)$ ,  $\lambda_{2,3}(s)$  ve  $\lambda_{3,3}(s)$  kesilmiş (sonlu) Lucas seri çözümleri

$$\lambda_{i,3}(s) = \sum_{n=0}^3 a_{i,n} L_n(s), \quad (i = 1, 2, 3)$$

şeklinde. Şimdi yaklaşık çözümlerin  $a_{i,n}$  ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) katsayılarını hesaplayalım.

(4.96) dan, (5.2) sistemi için temel matris denklemi

$$\{\overline{\mathbf{SBD}} - \mathbf{PSD}\} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

şeklinde yazılabilir. Bölüm 4.2.5 ve 4.2.6 da bahsedilen yöntem kullanılarak  $N = 3$  için (5.2) probleminin yaklaşık çözümleri

$$\lambda_{1,3}(s) = 1.9999999999999998592 + 0.11999999999999997920s + (0.148701113607149616e - 1)s^2 - (0.108758588173734360e - 2)s^3$$

$$\lambda_{2,3}(s) = 1.0000000000000000112 - 0.23999999999999999166s - (0.873633174412091242e - 2)s^2 + (0.115528896583677578e - 2)s^3$$

$$\lambda_{3,3}(s) = 3.00000000000000002592 - (0.426e - 18)s - (0.195847736542368104e - 1)s^2 - (0.683135379920169622e - 3)s^3$$

olarak hesaplanır. Şimdi de düzeltilmiş Lucas polinom çözümlerini hesaplayalım.

$M = 4$  için hata probleminin  $e_{1,3,4}(s)$ ,  $e_{2,3,4}(s)$  ve  $e_{3,3,4}(s)$  tahmini hata fonksiyonları

$$e_{1,3,4}(s) = -(0.7158e - 18) + (0.188e - 18)s - (0.3410672706605954376e - 3)s^2 + (0.190358881883564420e - 3)s^3 - (0.241570139950251359e - 4)s^4$$

$$\begin{aligned}
e_{2,3,4}(s) &= (0.3408e-18) - (0.310e-18)s + (0.15179119451294333216e-2)s^2 \\
&\quad - (0.715789891362810590e-3)s^3 + (0.844881912401403904e-4)s^4 \\
e_{3,3,4}(s) &= -(0.3524e-18) + (0.272e-18)s + (0.7847224767277560262e-3)s^2 \\
&\quad - (0.392449258278594756e-3)s^3 + (0.484628169544240568e-4)s^4
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır ve böylece

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,3,4}(s) &= 2 + 0.12s + (0.1452904409e-1)s^2 - (0.8972270001e-3)s^3 \\
&\quad - (0.241570139950251359e-4)s^4 \\
\lambda_{2,3,4}(s) &= 1 - 0.24s - (0.7218419799e-2)s^2 + (0.4394990746e-3)s^3 \\
&\quad + (0.844881912401403904e-4)s^4 \\
\lambda_{3,3,4}(s) &= 3 - (0.1880005117e-1)s^2 - (0.1075584638e-2)s^3 + (0.272e-18)s \\
&\quad + (0.484628169544240568e-4)s^4
\end{aligned}$$

düzeltilmiş Lucas polinom çözümleri elde edilir. Benzer şekilde  $M=5$  için

$\lambda_{1,3,5}(s)$ ,  $\lambda_{2,3,5}(s)$  ve  $\lambda_{3,3,5}(s)$  çözümleri

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,3,5}(s) &= 2 + 0.12s + (0.1439737414e-1)s^2 - (0.7947228696e-3)s^3 \\
&\quad - (0.508657095719279094e-4)s^4 + (0.226278147175747656e-5)s^5 \\
\lambda_{2,3,5}(s) &= 1 - 0.24s - (0.7121186842e-2)s^2 + (0.3615042855e-3)s^3 \\
&\quad + (0.105565171620641416e-3)s^4 - (0.184964326734020590e-5)s^5 \\
\lambda_{3,3,5}(s) &= 3 - (0.1920195851e-1)s^2 - (0.7626538882e-3)s^3 - (0.9500e-19) \\
&\quad - (0.329828771379646138e-4)s^4 + (0.690853227461910060e-5)s^5
\end{aligned}$$

ve  $M=8$  için  $\lambda_{1,3,8}(s)$ ,  $\lambda_{2,3,8}(s)$  ve  $\lambda_{3,3,8}(s)$  çözümleri

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,3,8}(s) &= 2 + 0.12s + (0.1440000746e-1)s^2 - (0.8000151877e-3)s^3 \\
&\quad - (0.175647261569654730e-10)s^8 - (0.47986299641691626094e-4)s^4 \\
&\quad + (0.15932442303998731236e-5)s^5 + (0.65944005403372378816e-7)s^6 \\
&\quad - (0.184727975442906806e-8)s^7 \\
\lambda_{2,3,8}(s) &= 1 - 0.24s - (0.7200001520e-2)s^2 + (0.4479985321e-3)s^3 \\
&\quad + (0.105207625072095326e-8)s^8 + (0.70088371067750995209e-4)s^4 \\
&\quad + (0.42548954120400987222e-5)s^5 - (0.29645206177374334992e-6)s^6 \\
&\quad - (0.194890933981399454e-7)s^7 \\
\lambda_{3,3,8}(s) &= 3 - (0.1919982286e-1)s^2 - (0.7683896860e-3)s^3 - (0.80621958e-17)s \\
&\quad + (0.139893638166039770e-9)s^8 - (0.27786548788037724569e-4)s^4 \\
&\quad + (0.48426191133402169242e-5)s^5 + (0.37486030879628552416e-6)s^6 \\
&\quad - (0.260342571353121494e-7)s^7
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Şimdi de  $N=3$  ve  $M=4,5,8$  için  $d_{3,4}$ ,  $d_{3,5}$  ve  $d_{3,8}$  uzaklık fonksiyonlarını hesaplayalım.

$$d_{3,4}(s) = (0.1e - 10)[(0.287902974200000e + 20)s^2 - (0.221160559408000e + 20)s^3 + (0.553471822953102e + 19)s^4 + (0.140000000000000e + 24) - (0.383266016197938e + 18)s^5 - (0.158884794507873e + 17)s^6 + 133618912648302s^7 + 100704604113444s^8]^{(1/2)}$$

$$d_{3,5}(s) = (0.2e - 11)[(0.338429540000000e + 20)s^2 - (0.395666897100000e + 20)s^3 + (0.180563977918395e + 20)s^4 - (0.370491178566065e + 19)s^5 + (0.268328703468762e + 18)s^6 + (0.841667037521825e + 16)s^7 - 163079563185692s^8 - 269109582669158s^9 + 14067294598700s^{10} + (0.350000000000000e + 25)]^{(1/2)}$$

$$d_{3,8}(s) = (0.1e - 15)[-(0.483731748000000e + 16)s + (0.108964000000000e + 27)s^2 - (0.23992826e + 27)s^3 + (0.14e + 34) - (0.548645006462830e + 22)s^9 - (0.201483174676095e + 22)s^{10} + (0.965946771585250e + 20)s^{11} + 112674318693535s^{16} - (0.497417073861449e + 19)s^{12} + (0.204499268913060e + 18)s^{13} + (0.539803969231170e + 17)s^{14} - (0.482271845937051e + 16)s^{15} + (0.536652347338948e + 24)s^8 + (0.230274497594700e + 27)s^4 - (0.120638544964560e + 27)s^5 + (0.366926990387630e + 26)s^6 - (0.635088985108210e + 25)s^7]^{(1/2)}$$

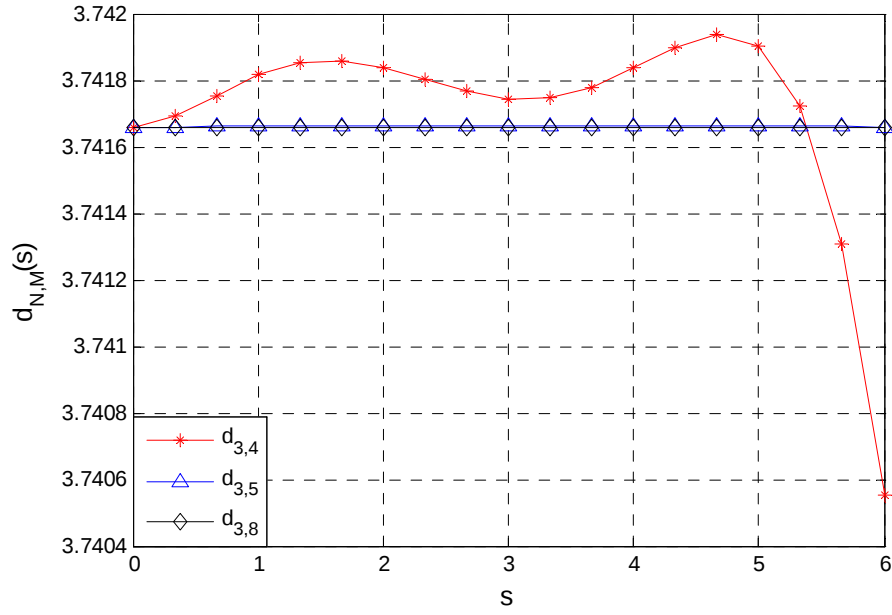
$d_{N,M}$  uzaklık fonksiyonunun  $N=3$  ve  $M=4,5,8$  değerleri için  $[0,2\pi]$  aralığından seçilmiş bazı değerlerde nümerik sonuçları Tablo 5.5 de gösterilmiştir.

**Tablo 5.5.** Örnek 5.2'nin  $d_{N,M}$  uzaklık fonksiyonunun

$N=3$  ve  $M=4,5,8$  değerleri için sayısal sonuçları

| $s_i$    | $d_{3,4}(s_i)$ | $d_{3,5}(s_i)$ | $d_{3,6}(s_i)$ |
|----------|----------------|----------------|----------------|
| 0        | 3.741657387    | 3.741657387    | 3.741657387    |
| $2\pi/4$ | 3.741859416    | 3.741662122    | 3.741657397    |
| $3\pi/4$ | 3.741800656    | 3.741660812    | 3.741657399    |
| $5\pi/4$ | 3.741821912    | 3.741661886    | 3.741657399    |
| $7\pi/4$ | 3.741551934    | 3.741660935    | 3.741657407    |
| $2\pi$   | 3.739549499    | 3.741653059    | 3.741657103    |

Şimdi  $d_{N,M}$  uzaklık fonksiyonunun  $N=3$  ve  $M=4,5,8$  değerleri için grafiklerini çizelim.



**Şekil 5.3.** Örnek 5.2'nin uzaklık fonksiyonlarının karşılaştırılması

Tablo 5.5 deki değerler (5.3) ile karşılaştırıldığında  $M$  değeri arttıkça gerçek çözüme oldukça yaklaşıldığı açık bir şekilde görülmektedir. Ayrıca, Şekil 5.3 ten görülmektedir ki  $M$  değeri artırıldığında çözümün doğruluğu artmaktadır. Çünkü  $d_{N,M}$  fonksiyonu sabit kalmaktadır. Buradan Lucas sıralama metodunun bu tip denklem sistemlerinin çözümünde oldukça etkili olduğu söylenebilir. Dahası  $N=3$  ve  $M=4,5,8$  değerleri için  $e_{i,N,M}(s)$ ,  $(i=1,2,3)$  tahmini hata fonksiyonlarını hesaplayalım ve  $[0,2\pi]$  aralığından seçilen bazı değerler için elde edilen sonuçları karşılaştıralım.

$$e_{1,3,4}(s) = -(0.7158e-18) + (0.188e-18)s - (0.3410672706605954376e-3)s^2 \\ + (0.190358881883564420e-3)s^3 - (0.241570139950251359e-4)s^4$$

$$e_{1,3,5}(s) = -(0.16708e-17) + (0.81380e-18)s - (0.4727372232749809816e-3)s^2 \\ + (0.29286301242551355980e-3)s^3 - (0.508657095719279094e-4)s^4 \\ + (0.226278147175747656e-5)s^5$$

$$e_{1,3,8}(s) = -(0.80621958e-17)s + (0.38495079026532861209e-3)s^2 - (0.9076708460e-17) \\ - (0.8525430609730756924e-4)s^3 + (0.139893638166039770e-9)s^8 \\ - (0.27786548788037724569e-4)s^4 + (0.48426191133402169242e-5)s^5 \\ + (0.37486030879628552416e-6)s^6 - (0.260342571353121494e-7)s^7$$

**Tablo 5.6.** Örnek 5.2'nin  $|e_{1,N,M}(s)|$  tahmini mutlak hata fonksiyonunun $N = 3$  ve  $M = 4, 5, 8$  değerleri için sayısal sonuçları

| $s_i$    | $ e_{1,3,4}(s_i) $ | $ e_{1,3,5}(s_i) $ | $ e_{1,3,8}(s_i) $ |
|----------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 0        | 0.7158-18          | 0.16708e-17        | 0.15332e-16        |
| $2\pi/4$ | 0.250829e-3        | 0.319393e-3        | 0.321334e-3        |
| $3\pi/4$ | 0.147985e-3        | 0.196999e-3        | 0.200962e-3        |
| $5\pi/4$ | 0.523379e-3        | 0.461898e-3        | 0.455743e-3        |
| $7\pi/4$ | 0.745862e-3        | 0.727607e-3        | 0.733896e-3        |
| $2\pi$   | 0.389604e-2        | 0.313612e-2        | 0.311312e-2        |

$$e_{2,3,4}(s) = (0.3408e-18) - (0.310e-18)s + (0.15179119451294333216e-2)s^2 \\ - (0.715789891362810590e-3)s^3 + (0.844881912401403904e-4)s^4$$

$$e_{2,3,5}(s) = (0.1192e-17) - (0.11695e-17)s + (0.1615144902332080764e-2)s^2 \\ - (0.79378468047399544950e-3)s^3 + (0.105565171620641416e-3)s^4 \\ - (0.184964326734020590e-5)s^5$$

$$e_{2,3,8}(s) = (0.944440822e-16)s + (0.15363302240170269445e-2)s^2 + (0.5280395452e-16) \\ - (0.70729043390158554354e-3)s^3 + (0.105207625072095326e-8)s^8 \\ + (0.70088371067750995209e-4)s^4 + (0.42548954120400987222e-5)s^5 \\ - (0.29645206177374334992e-6)s^6 - (0.194890933981399454e-7)s^7$$

**Tablo 5.7.** Örnek 5.2'nin  $|e_{2,N,M}(s)|$  tahmini mutlak hata fonksiyonunun $N = 3$  ve  $M = 4, 5, 8$  değerleri için sayısal sonuçları

| $s_i$    | $ e_{2,3,4}(s_i) $ | $ e_{2,3,5}(s_i) $ | $ e_{2,3,8}(s_i) $ |
|----------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 0        | 0.3408e-18         | 0.1192e-17         | 0.5280e-16         |
| $2\pi/4$ | 0.148542e-2        | 0.153367e-2        | 0.151196e-2        |
| $3\pi/4$ | 0.166783e-2        | 0.170269e-2        | 0.168886e-2        |
| $5\pi/4$ | 0.153067e-3        | 0.214272e-3        | 0.192573e-3        |
| $7\pi/4$ | 0.412167e-2        | 0.406535e-2        | 0.403958e-2        |
| $2\pi$   | 0.140516e-1        | 0.132802e-1        | 0.128916e-1        |

$$e_{3,3,4}(s) = -(0.3524e-18) + (0.272e-18)s + (0.7847224767277560262e-3)s^2 \\ - (0.392449258278594756e-3)s^3 + (0.484628169544240568e-4)s^4$$

$$e_{3,3,5}(s) = (0.14104e-17) - (0.9500e-19)s + (0.3828151411448691228e-3)s^2 \\ - (0.7951850825457046100e-4)s^3 - (0.329828771379646138e-4)s^4 \\ + (0.690853227461910060e-5)s^5$$

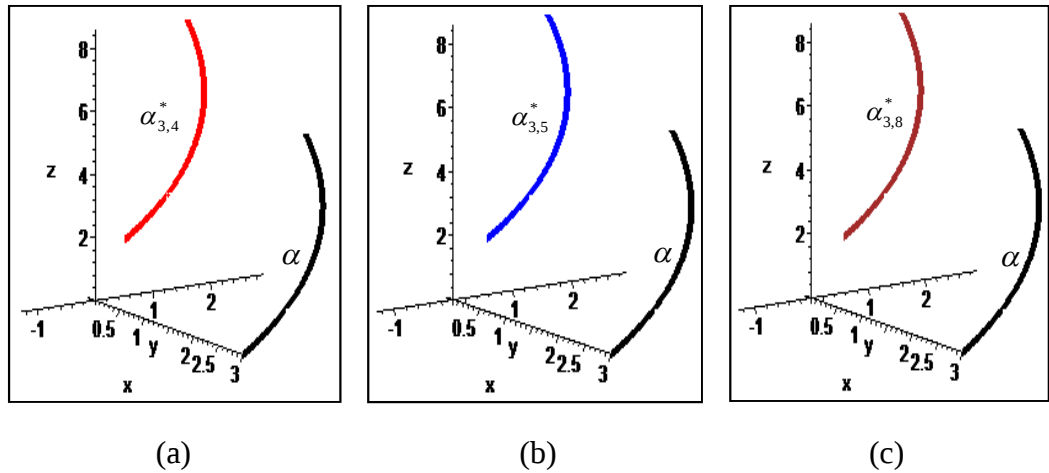
$$\begin{aligned}
e_{3,3,8}(s) = & -(0.80621958e-17)s + (0.38495079026532861209e-3)s^2 - (0.9076708460e-17) \\
& - (0.8525430609730756924e-4)s^3 + (0.139893638166039770e-9)s^8 \\
& - (0.27786548788037724569e-4)s^4 + (0.48426191133402169242e-5)s^5 \\
& + (0.37486030879628552416e-6)s^6 - (0.260342571353121494e-7)s^7
\end{aligned}$$

**Tablo 5.8.** Örnek 5.2'nin  $|e_{3,N,M}(s)|$  tahmini mutlak hata fonksiyonunun

$N = 3$  ve  $M = 4, 5, 8$  değerleri için sayısal sonuçları

| $s_i$    | $ e_{3,3,4}(s_i) $ | $ e_{3,3,5}(s_i) $ | $ e_{3,3,8}(s_i) $ |
|----------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 0        | 0.3524e-18         | 0.1410e-17         | 0.9077e-17         |
| $2\pi/4$ | 0.710221e-3        | 0.501627e-3        | 0.501567e-3        |
| $3\pi/4$ | 0.716632e-3        | 0.570230e-3        | 0.570964e-3        |
| $5\pi/4$ | 0.139788e-3        | 0.304045e-3        | 0.304317e-3        |
| $7\pi/4$ | 0.277897e-2        | 0.292374e-2        | 0.292166e-2        |
| $2\pi$   | 0.916398e-2        | 0.116357e-1        | 0.115051e-1        |

Tablo 5.6, Tablo 5.7 ve Tablo 5.8 den tahmini mutlak hata değerlerinin hemen hemen aynı olduğu görülmektedir. Son olarak, Lucas sıralama yöntemiyle  $N=3$  ve  $M = 4, 5, 8$  değerleri için bulduğumuz  $\lambda_{i,N,M}$ ,  $(i=1, 2, 3)$  değerlerini, (5.1) ile verilen Bishop eğriliklerini ve  $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$  değerlerini (2.26)'da yerlerine yazarsak,  $\alpha$  eğrisinin sabit genişlikli ( $d=\sqrt{14}$ ) olduğu  $\alpha_{3,4}^*$ ,  $\alpha_{3,5}^*$  ve  $\alpha_{3,8}^*$  eğrileri elde edilir. Aşağıdaki grafik  $\alpha$  ile  $\alpha_{3,4}^*$ ,  $\alpha_{3,5}^*$  ve  $\alpha_{3,8}^*$  eğrilerinin grafiklerini göstermektedir.



**Şekil 5.4.** Örnek 5.2'nin  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_{3,4}^*$ ,  $\alpha_{3,5}^*$  ve  $\alpha_{3,8}^*$  eğrilerinin grafikleri

Şekil 5.4 (a),  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_{3,4}^*$  eğrisinin grafiği; (b),  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_{3,5}^*$  eğrisinin grafiği; (c),  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_{3,8}^*$  eğrisinin grafiğini göstermektedir.

## 6. 3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA BISHOP ÇATIYA GÖRE SABİT GENİŞLİKLİ EĞRİLERİ KARAKTERİZE EDEN DİFERENSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

### 6.1. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Bishop Çatıya Göre Sabit Genişlikli Timelike Eğrileri Karakterize Eden Diferensiyel Denklem Sistemlerinin Çözümü için Taylor Sıralama Yöntemi

Bu bölümde 3-boyutlu Minkowski uzayında Bishop çatıya göre sabit genişlikli timelike eğri çiftlerini karakterize eden diferensiyel denklem sistemlerinin yaklaşık çözümleri için Taylor sıralama yöntemi kullanılacaktır. Bir örnek verilerek, timelike bir eğrinin sabit genişlikli olduğu timelike eğri, elde edilen bu yaklaşık çözümler vasıtasıyla belirlenecektir.

Bölüm 2.2.1 de 3-boyutlu Minkowski uzayında Bishop çatıya göre sabit genişlikli timelike eğri çiftlerini karakterize eden diferensiyel denklem sistemi (2.39) ile ayrıca,  $s$  yay parametrelili  $\alpha$  timelike eğrisinin sabit genişlikli olduğu,  $\bar{\alpha}^*(s^*)$  konum vektörü ile verilen  $\alpha^*$  timelike eğrisinin ise (2.52) eşitliği ile belirlenebileceği gösterilmişti.

Şimdi (2.39) denklem sistemi ile (2.52) eşitliğini kullanılarak timelike bir eğrinin sabit genişlikli olduğu timelike eğriyi yaklaşık olarak belirlemeye çalışalım. Bunun için aşağıda verilen örneği inceleyelim.

**Örnek 6.1.**  $\alpha : [0, 2] \rightarrow E_1^3$  tanımlı, birim hızlı timelike

$$\alpha(s) = \left( \frac{s^3}{3} + s, \frac{s^3}{3}, \frac{s^2}{\sqrt{2}} \right)$$

eğrisini göz önüne alalım.  $\alpha$  eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilik ve burulması sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$\bar{T}(s) = (s^2 + 1, s^2, \sqrt{2}s), \quad \bar{N}(s) = (\sqrt{2}s, \sqrt{2}s, 1), \quad \bar{B}(s) = (s^2, s^2 - 1, \sqrt{2}s)$$

$$\kappa = \sqrt{2} \text{ ve } \tau = -\sqrt{2}.$$

Ayrıca,  $\alpha$  eğrisinin Bishop elemanları

$$\theta = -\sqrt{2}s$$

$$k_1 = \sqrt{2} \cos(\sqrt{2}s), \quad k_2 = -\sqrt{2} \sin(\sqrt{2}s) \quad (6.1)$$

ve

$$\overline{N}_1 = (s^2 \sin(\sqrt{2}s) + \sqrt{2}s \cos(\sqrt{2}s), (s^2 - 1) \sin(\sqrt{2}s) + \sqrt{2}s \cos(\sqrt{2}s), \sqrt{2}s \sin(\sqrt{2}s) + \cos(\sqrt{2}s))$$

$$\overline{N}_2 = (s^2 \cos(\sqrt{2}s) - \sqrt{2}s \sin(\sqrt{2}s), (s^2 - 1) \cos(\sqrt{2}s) - \sqrt{2}s \sin(\sqrt{2}s), \sqrt{2}s \cos(\sqrt{2}s) - \sin(\sqrt{2}s))$$

olarak hesaplanır. (6.1) ile verilen Bishop eğrilikleri (2.39) da yerlerine yazılırsa  $\alpha$  timelike eğrisinin sabit genişlikli olduğu eğriyi belirlemede kullanılacak olan normal formdaki diferensiyel denklem sistemi

$$\begin{cases} \lambda_1'(s) = -\sqrt{2} \cos(\sqrt{2}s) \lambda_2(s) + \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}s) \lambda_3(s) \\ \lambda_2'(s) = -\sqrt{2} \cos(\sqrt{2}s) \lambda_1(s) \\ \lambda_3'(s) = \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}s) \lambda_1(s) \end{cases} \quad (6.2)$$

şeklinde bulunur. (6.2) denklem sisteminin yaklaşık çözümlerini, Bölüm 4.1.5 ve 4.1.6 da bahsedilen normal formdaki lineer denklem sistemlerinin çözümü için Taylor sıralama yöntemini kullanarak bulmaya çalışalım.  $\lambda_1(s)$ ,  $\lambda_2(s)$  ve  $\lambda_3(s)$  için başlangıç koşullarını

$$\lambda_1(0) = 1, \quad \lambda_2(0) = 2, \quad \lambda_3(0) = 3$$

olarak kabul edelim. Bu durumda  $d$  genişliği

$$d = \sqrt{|\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2|} = \sqrt{12} \cong 3.464101615 \quad (6.3)$$

olur.  $N=3$  için  $\lambda_{1,3}(s)$ ,  $\lambda_{2,3}(s)$  ve  $\lambda_{3,3}(s)$  kesilmiş (sonlu) Taylor seri çözümleri

$$\lambda_{i,3}(s) = \sum_{n=0}^3 a_{i,n} s^n, \quad (i = 1, 2, 3)$$

şeklinde. Şimdi yaklaşık çözümlerin  $a_{i,n}$  ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) katsayılarını hesaplayalım.

$a=0$ ,  $b=2$  ve  $N=3$  için sıralama noktalarının kümesi

$$\left\{ s_0 = 0, s_1 = \frac{2}{3}, s_2 = \frac{4}{3}, s_3 = 2 \right\}$$

olur. (4.44) ten (6.2) sistemi için temel matris denklemi

$$\{\mathbf{SB} - \mathbf{PS}\} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

şeklinde yazılabilir. Bölüm 4.1.5 ve 4.1.6 da bahsedilen yöntem kullanılarak  $N=3$  için (6.2) probleminin yaklaşık çözümleri

$$\lambda_{1,3}(s) = 1 - 2.82842712474618985s + 4.26827278102106344s^2 - 0.147125958466821138s^3$$

$$\lambda_{2,3}(s) = 1.99999999999999978 - 1.41421356237309515s - 0.348912923091741156s^2 + 0.806483109289568790s^3$$

$$\lambda_{3,3}(s) = 3 - 0.591766574524276612s^2 + 1.42242721303247310s^3$$

olarak hesaplanır. Şimdi düzeltilmiş Taylor polinom çözümlerini hesaplamak için

$$\begin{cases} e_{1,3}'(s) + \sqrt{2} \cos(\sqrt{2}s) e_{2,3}(s) - \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}s) e_{3,3}(s) = -R_{1,3}(s) \\ e_{2,3}'(s) + \sqrt{2} \cos(\sqrt{2}s) e_{1,3}(s) = -R_{2,3}(s) \\ e_{3,3}'(s) - \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}s) e_{1,3}(s) = -R_{3,3}(s) \end{cases} \quad (6.4)$$

hata problemini ele alalım. Öyleki,

$$\begin{cases} R_{1,3}(s) = \lambda_{1,3}'(s) + \sqrt{2} \cos(\sqrt{2}s) \lambda_{2,3}(s) - \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}s) \lambda_{3,3}(s) \\ R_{2,3}(s) = \lambda_{2,3}'(s) + \sqrt{2} \cos(\sqrt{2}s) \lambda_{1,3}(s) \\ R_{3,3}(s) = \lambda_{3,3}'(s) - \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}s) \lambda_{1,3}(s) \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. Yine Taylor metodu kullanılarak  $M=5$  için (6.4) hata probleminin  $e_{1,3}(s)$ ,  $e_{2,3}(s)$  ve  $e_{3,3}(s)$  e göre  $e_{1,3,5}(s)$ ,  $e_{2,3,5}(s)$  ve  $e_{3,3,5}(s)$  tahmini hata fonksiyonları

$$\begin{aligned} e_{1,3,5}(s) = & (0.432208657149308238e - 14) + (0.299999305473596038e - 8)s \\ & - 0.346527193497648156s^2 + 0.262703717976641826s^3 - (0.638240213959025416e - 1)s^4 \\ & + (0.120759569099575526e - 1)s^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{2,3,5}(s) = & -(0.411154514283405894e - 14)s + 3.03872292177504466s^2 - 4.46940319801238762s^3 \\ & + 1.64500058196755594s^4 + (0.861717520356184482e - 3)s^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{3,3,5}(s) = & 1.88705634989938930s^2 - 4.48192514417283140s^3 + 3.69150246310902162s^4 \\ & - 1.03265360535704964s^5 \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır ve böylece

$$\begin{aligned} \lambda_{1,3,5}(s) = & 1 - 2.828427122s + 3.921745588s^2 + 0.1155777595s^3 - (0.638240213959025416e - 1)s^4 \\ & + (0.120759569099575526e - 1)s^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{2,3,5}(s) = & 1.99999999999999978 - 1.414213562s + 2.689809999s^2 - 3.662920089s^3 \\ & + 1.64500058196755594s^4 + (0.861717520356184482e - 3)s^5 \end{aligned}$$

$$\lambda_{3,3,5}(s) = 3 + 1.295289776s^2 - 3.059497931s^3 + 3.69150246310902162s^4 - 1.03265360535704964s^5$$

düzeltilmiş Taylor polinom çözümleri elde edilir. Benzer şekilde  $M=8$  için

$\lambda_{1,3,8}(s)$ ,  $\lambda_{2,3,8}(s)$  ve  $\lambda_{3,3,8}(s)$  çözümleri

$$\begin{aligned} \lambda_{1,3,8}(s) = & 1 - 2.828427122s + 3.999219270s^2 + (0.35095009e - 2)s^3 \\ & - (0.801533892861572284e - 2)s^4 + (0.985138061607582216e - 2)s^5 \\ & - (0.671637812922920574e - 2)s^6 + (0.239036457297325810e - 2)s^7 \\ & - (0.346169585431377326e - 3)s^8 \end{aligned}$$

$$\lambda_{2,3,8}(s) = 1.9999999999999978 - 1.414213562s + 2.002758480s^2 - 1.434032005s^3 \\ - 0.935208216272673032s^4 + 0.964661395995666470s^5 + 0.245311061213525416s^6 \\ - 0.225005760594266856s^7 + (0.315753093385295406e-1)s^8$$

$$\lambda_{3,3,8}(s) = 3 + 0.9912407445s^2 - 1.825671705s^3 + 1.65530461093694826s^4 \\ + 0.663113170824448872s^5 - (0.696419434016338102)s^6 \\ + 0.106908896290521582s^7 + (0.265623455548102960e-2)s^8$$

ve  $M=12$  için  $\lambda_{1,3,12}(s)$ ,  $\lambda_{2,3,12}(s)$  ve  $\lambda_{3,3,12}(s)$  çözümleri

$$\lambda_{1,3,12}(s) = 1 - 2.828427122s + 3.999999320s^2 + (0.70354e-5)s^3 - (0.341768695584221405e-4)s^4 \\ + (0.957795709197739598e-4)s^5 - (0.169318392060802126e-3)s^6 \\ + (0.196729569466924660e-3)s^7 - (0.152213719175620099e-3)s^8 \\ + (0.775466754419085192e-4)s^9 - (0.249313336233569770e-4)s^{10} \\ + (0.457225336525368676e-5)s^{11} - (0.363351551346813296e-6)s^{12}$$

$$\lambda_{2,3,12}(s) = 1.9999999999999978 - 1.414213562s + 2.000000685s^2 - 1.414221780s^3 \\ - 0.999952410227107568s^4 + 1.08406376762491030s^5 + 0.111497463590509827s^6 \\ - 0.133062963159293501s^7 - (0.484898256994649446e-2)s^8 \\ + (0.634837693806034054e-2)s^9 + (0.486308713268795990e-3)s^{10} \\ - (0.330551767680750674e-3)s^{11} + (0.283402542385433748e-4)s^{12}$$

$$\lambda_{3,3,12}(s) = 3 + 0.9999969715s^2 - 1.885582073s^3 + 1.83313420929297876s^4 \\ + 0.377775855598315502s^5 - 0.434723678445493534s^6 \\ - (0.249209905827001422e-1)s^7 + (0.309113410838790514e-1)s^8 \\ + (0.240098286082002232e-2)s^9 - (0.191237806237154473e-2)s^{10} \\ + (0.164704460814846244e-3)s^{11} + (0.281714930938647967e-5)s^{12}$$

şeklinde hesaplanır. Şimdi (2.26) dan  $d_{N,M}$  uzaklık fonksiyonu

$$d_{N,M}(s) = \sqrt{\left| -\lambda_{1,N,M}^2(s) + \lambda_{2,N,M}^2(s) + \lambda_{3,N,M}^2(s) \right|} = k, \quad k \in \mathbb{R}$$

şeklinde yazılabilir.  $N=3$  ve  $M=5,8,12$  için  $d_{3,5}$ ,  $d_{3,8}$  ve  $d_{3,12}$  uzaklık fonksiyonları aşağıdaki gibi bulunur.

$$d_{3,5}(s) = | 33.403539198960882626s^4 - 39.767958205291513719s^5 \\ - (0.39999993777460327200e-8)s + 4.6874874904795237765s^2 \\ - 18.663011847211935792s^3 + 11.999999999999999120 \\ + 41.743239545788426560s^6 - 37.389799640744701234s^7 \\ + 22.638842753245939666s^8 - 7.6197101315185712375s^9 \\ + 1.0662283824787069582s^{10} |^{(1/2)}$$

$$d_{3,8}(s) = -(0.39999993777460327200e-8)s - (0.39960138520475921214e-1)s^2 \\ + 0.26116684073307099097s^3 - 0.71722179369568849098s^4 + 1.0259781245364571311s^5 \\ - 0.86734501321753951246s^6 + 0.74280078487864756426s^7 \\ - 1.1249053263235258114s^8 + 11.99999999999999120 \\ + 1.4307884445663292787s^9 - 1.0048572309226577050s^{10} + 0.22437672055676874915s^{11} \\ + 0.20249121831720373044s^{12} - 0.19481900802354093501s^{13} \\ + (0.73838579104679679436e-1)s^{14} - (0.13639647835173238560e-1)s^{15} \\ + (0.10039359084556845860e-2)s^{16} |^{(1/2)}$$

$$d_{3,12}(s) = -(0.39999993777460327200e-8)s - (0.14056520475920000301e-4)s^2 \\ + (0.16331506653476225758e-3)s^3 + (0.56684305047800745698e-2)s^{13} \\ - (0.16003645242951147835e-2)s^{14} - (0.13840471871545812588e-3)s^{15} \\ + (0.30239457011802784095e-3)s^{16} - (0.10053818657698551282e-3)s^{17} \\ + (0.67361057002745141158e-5)s^{18} + (0.27024320436148859035e-5)s^{19} \\ + (0.38553637255455726869e-6)s^{20} - (0.57781337946554156173e-6)s^{21} \\ + (0.15314232342036516839e-6)s^{22} - (0.17804525483363134014e-7)s^{23} \\ + (0.81097431618678630405e-9)s^{24} + 11.99999999999999120 \\ - (0.87086826635283288994e-3)s^4 + (0.27197654699577427978e-2)s^5 \\ - (0.55044165958284094310e-2)s^6 + (0.78071778270479649104e-2)s^7 \\ - (0.88339559299439395550e-2)s^8 + (0.98839629099071551930e-2)s^9 \\ - (0.11899109351408730674e-1)s^{10} + (0.12889550674651029570e-1)s^{11} \\ - (0.10482299041963768742e-1)s^{12} |^{(1/2)}$$

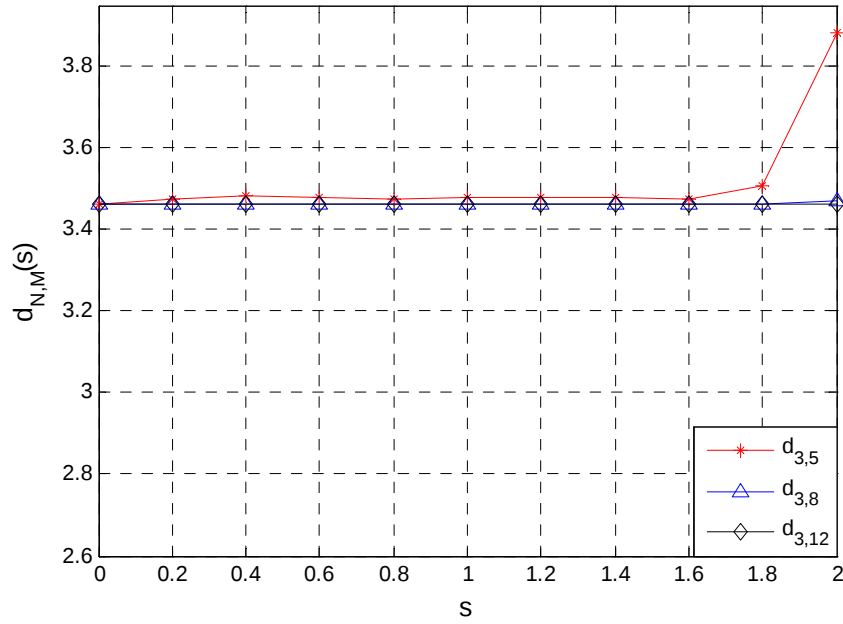
$d_{N,M}$  uzaklık fonksiyonunun  $N=3$  ve  $M=5,8,12$  değerleri için  $[0,2]$  aralığından seçilmiş bazı değerlerde nümerik sonuçları Tablo 6.1 de gösterilmiştir.

**Tablo 6.1.** Örnek 6.1'in  $d_{N,M}$  uzaklık fonksiyonunun  $N=3$  ve  $M=5,8,12$  değerleri için sayısal sonuçları

| $s_i$ | $d_{3,5}(s_i)$ | $d_{3,8}(s_i)$ | $d_{3,12}(s_i)$ |
|-------|----------------|----------------|-----------------|
| 0     | 3.464101615    | 3.464101615    | 3.464101615     |
| 0.2   | 3.475796666    | 3.464047263    | 3.464101608     |
| 0.5   | 3.481190913    | 3.464058386    | 3.464101608     |
| 0.8   | 3.476627429    | 3.464052078    | 3.464101609     |
| 1.0   | 3.478341206    | 3.464057806    | 3.464101610     |
| 1.3   | 3.479405717    | 3.464049035    | 3.464101618     |
| 1.5   | 3.476219142    | 3.464080294    | 3.464101641     |
| 1.8   | 3.507953388    | 3.463960021    | 3.464101762     |
| 2.0   | 3.882115127    | 3.472645154    | 3.464103106     |

Tablo 6.1 deki değerler (6.3) ile karşılaştırıldığında  $M$  değeri arttıkça yaklaşık çözümlerin gerçek çözümlere oldukça yaklaşıldığı açık bir şekilde görülmektedir.

Şimdi  $d_{N,M}$  uzaklık fonksiyonunun  $N=3$  ve  $M=5,8,12$  değerleri için grafiklerini çizelim.



Şekil 6.1. Örnek 6.1'in uzaklık fonksiyonlarının karşılaştırılması

Ayrıca Şekil 6.1 den de görülmektedir ki  $M$  değeri artırıldığında çözümün doğruluğu artmaktadır. Çünkü  $d_{N,M}$  fonksiyonu sabit kalmaktadır. Buradan Taylor sıralama metodunun bu tip denklem sistemlerinin çözümünde oldukça etkili olduğu söylenebilir. Son olarak,  $N=3$  ve  $M=5,8,12$  değerleri için bulduğumuz  $\lambda_{i,N,M}$ , ( $i=1,2,3$ ) değerlerini, (6.1) ile verilen Bishop eğriliklerini ve  $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$  değerlerini (2.52)'de yerlerine yazarsak,  $\alpha$  timelike eğrisinin sabit genişlikli ( $d=\sqrt{12} \cong 3.464101615$ ) olduğu  $\alpha^*$  eğrisi belirlenebilir. O halde  $N=3$  ve  $M=5$  için  $\alpha_{3,5}^*$  eğrisi

$$\overrightarrow{\alpha_{3,5}^*}(s^*) = \left( \frac{k_1 \lambda_{3,3,5} - k_2 \lambda_{2,3,5}}{\mu} \right) \overrightarrow{\alpha}''' + \left( \frac{k_2' \lambda_{2,3,5} - k_1' \lambda_{3,3,5}}{\mu} \right) \overrightarrow{\alpha}'' + \left[ \frac{(k_1^2 + k_2^2)(k_2 \lambda_{2,3,5} - k_1 \lambda_{3,3,5})}{\mu} + \lambda_{1,3,5} \right] \overrightarrow{\alpha}' + \overrightarrow{\alpha}$$

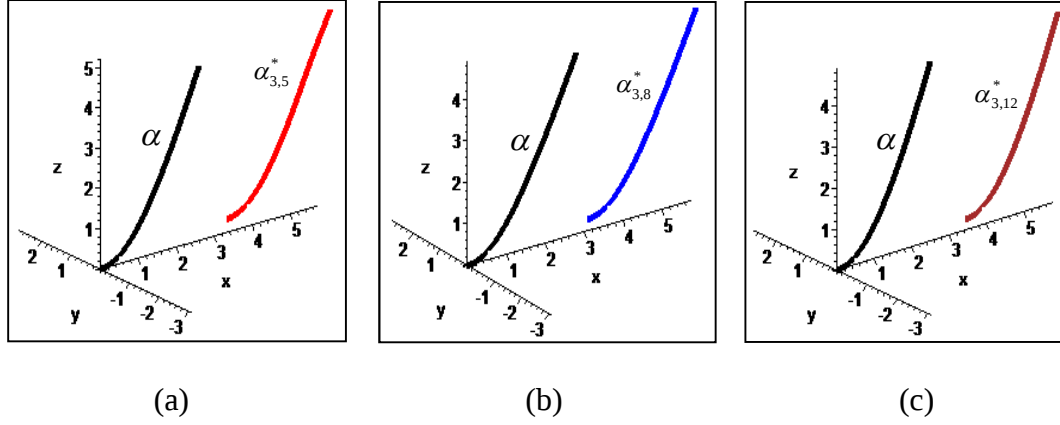
şeklinde ifade edilir. Benzer şekilde  $N=3$  ve  $M=8$  için  $\alpha_{3,8}^*$  eğrisi

$$\overrightarrow{\alpha_{3,8}^*}(s^*) = \left( \frac{k_1 \lambda_{3,3,8} - k_2 \lambda_{2,3,8}}{\mu} \right) \overrightarrow{\alpha}''' + \left( \frac{k_2' \lambda_{2,3,8} - k_1' \lambda_{3,3,8}}{\mu} \right) \overrightarrow{\alpha}'' + \left[ \frac{(k_1^2 + k_2^2)(k_2 \lambda_{2,3,8} - k_1 \lambda_{3,3,8})}{\mu} + \lambda_{1,3,8} \right] \overrightarrow{\alpha}' + \overrightarrow{\alpha}$$

$N=3$  ve  $M=12$  için  $\alpha_{3,12}^*$  eğrisi

$$\overrightarrow{\alpha_{3,12}^*}(s^*) = \left( \frac{k_1 \lambda_{3,3,12} - k_2 \lambda_{2,3,12}}{\mu} \right) \overrightarrow{\alpha}''' + \left( \frac{k_2' \lambda_{2,3,12} - k_1' \lambda_{3,3,12}}{\mu} \right) \overrightarrow{\alpha}'' + \left[ \frac{(k_1^2 + k_2^2)(k_2 \lambda_{2,3,12} - k_1 \lambda_{3,3,12})}{\mu} + \lambda_{1,3,12} \right] \overrightarrow{\alpha}' + \overrightarrow{\alpha}$$

şeklinde yazılabilir. Aşağıdaki grafik  $\alpha$  ile  $\alpha_{3,5}^*$ ,  $\alpha_{3,8}^*$  ve  $\alpha_{3,12}^*$  eğrilerinin grafiklerini göstermektedir.



**Şekil 6.2.** Örnek 6.1'in  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_{3,5}^*$ ,  $\alpha_{3,8}^*$  ve  $\alpha_{3,12}^*$  eğrilerinin grafikleri

Şekil 6.2 (a),  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_{3,5}^*$  eğrisinin grafiği; (b),  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_{3,8}^*$  eğrisinin grafiği; (c),  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_{3,12}^*$  eğrisinin grafiğini göstermektedir.

## 6.2. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Bishop Çatıya Göre Sabit Genişlikli Timelike Eğrileri Karakterize Eden Diferensiyel Denklem Sistemlerinin Çözümü için Lucas Sıralama Yöntemi

Bu bölümde 3-boyutlu Minkowski uzayında Bishop çatıya göre sabit genişlikli timelike eğri çiftlerini karakterize eden diferensiyel denklem sistemlerinin yaklaşık çözümleri için geliştirdiğimiz Lucas sıralama yöntemi kullanılacaktır. Bölüm 6.1 de verilen örneği bu kez de Lucas sıralama metoduyla çözerek, bir eğrinin sabit genişlikli olduğu eğri yaklaşık olarak bulunacaktır.

Bölüm 2.2.1 de 3-boyutlu Minkowski uzayında Bishop çatıya göre sabit genişlikli timelike eğri çiftlerini karakterize eden diferensiyel denklem sistemi (2.39) ile ayrıca,  $s$  yay parametrelili  $\alpha$  eğrisinin sabit genişlikli olduğu,  $\overrightarrow{\alpha^*}(s^*)$  konum vektörü ile verilen  $\alpha^*$  eğrisinin ise (2.52) bağıntısı ile belirlenebileceği gösterilmiştir.

Şimdi (2.39) denklem sistemi ile (2.52) bağıntısını kullanılarak timelike bir eğrinin sabit genişlikli olduğu eğriyi yaklaşık olarak belirlemeye çalışalım. Aşağıdaki örneği inceleyelim.

**Örnek 6.2.** Örnek 6.1 de verilen (6.2) denklem sisteminin yaklaşık çözümlerini bu kez de, Bölüm 4.2.5 ve 4.2.6 da bahsedilen normal formdaki lineer denklem sistemlerinin çözümü için Lucas sıralama yöntemini kullanarak bulmaya çalışalım.  $\lambda_1(s)$ ,  $\lambda_2(s)$  ve  $\lambda_3(s)$  için başlangıç koşulları

$$\lambda_1(0) = 1, \lambda_2(0) = 2, \lambda_3(0) = 3$$

olsun.  $N = 3$  için  $\lambda_{1,3}(s)$ ,  $\lambda_{2,3}(s)$  ve  $\lambda_{3,3}(s)$  kesilmiş (sonlu) Lucas seri çözümleri

$$\lambda_{i,3}(s) = \sum_{n=0}^3 a_{i,n} L_n(s), \quad (i = 1, 2, 3)$$

şeklinde. Şimdi yaklaşık çözümlerin  $a_{i,n}$  ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) katsayılarını hesaplayalım. (4.96) dan, (6.2) sistemi için temel matris denklemi

$$\{\overline{\mathbf{SBD}} - \overline{\mathbf{PSD}}\} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

şeklinde yazılabilir. Bölüm 4.2.5 ve 4.2.6 da bahsedilen yöntem kullanılarak  $N = 3$  için (6.2) probleminin yaklaşık çözümleri

$$\lambda_{1,3}(s) = 1.000000000000000356 - 2.828427124746190092s + 4.26827278102106434s^2 - 0.147125958466821944s^3$$

$$\lambda_{2,3}(s) = 1.999999999999997784 - 1.414213562373097586s - 0.348912923091740268s^2 + 0.806483109289567678s^3$$

$$\lambda_{3,3}(s) = 2.99999999999999560 + (0.44e - 15)s - 0.591766574524275280s^2 + 1.42242721303247288s^3$$

olarak hesaplanır. Şimdi de düzeltilmiş Lucas polinom çözümlerini hesaplayalım.

$M = 5$  için hata probleminin  $e_{1,3,5}(s)$ ,  $e_{2,3,5}(s)$  ve  $e_{3,3,5}(s)$  tahmini hata fonksiyonları

$$e_{1,3,5}(s) = (0.1810788e - 12) + (0.29999877595e - 8)s - 0.3465271934981004612s^2 + 0.2627037179766176235s^3 - (0.638240213960001302e - 1)s^4 + (0.120759569099705699e - 1)s^5$$

$$e_{2,3,5}(s) = (0.6262e - 13) + (0.18131e - 13)s + 3.03872292177506377s^2 - 4.4694031980123650894s^3 + 1.64500058196755972s^4 + (0.861717520356530126e - 3)s^5$$

$$e_{3,3,5}(s) = (0.60e - 15) + (0.2018e - 14)s + 1.88705634989936204s^2 - 4.481925144172753874s^3 + 3.69150246310900386s^4 - 1.03265360535704986s^5$$

şeklinde hesaplanır ve böylece

$$\lambda_{1,3,5}(s) = 1 - 2.828427122s + 3.921745588s^2 + 0.1155777595s^3 - (0.638240213960001302e-1)s^4 \\ + (0.120759569099705699e-1)s^5$$

$$\lambda_{2,3,5}(s) = 2 - 1.414213562s + 2.689809999s^2 - 3.662920089s^3 + 1.64500058196755972s^4 \\ + (0.861717520356530126e-3)s^5$$

$$\lambda_{3,3,5}(s) = 3 + (0.2458e-14)s + 1.295289776s^2 - 3.059497931s^3 + 3.69150246310900386s^4 \\ - 1.03265360535704986s^5$$

düzeltilmiş Lucas polinom çözümleri elde edilir. Benzer şekilde  $M=8$  için

$\lambda_{1,3,8}(s)$ ,  $\lambda_{2,3,8}(s)$  ve  $\lambda_{3,3,8}(s)$  çözümleri

$$\lambda_{1,3,8}(s) = 1 - 2.828427122s + 3.999219270s^2 + (0.35095009e-2)s^3 \\ + (0.985138064893309464e-2)s^5 - (0.6716378156663482840e-2)s^6 \\ + (0.239036458241503880e-2)s^7 - (0.346169586707911760e-3)s^8 \\ - (0.8015338967288565560e-2)s^4$$

$$\lambda_{2,3,8}(s) = 2 - 1.414213562s + 2.002758480s^2 - 1.434032005s^3 - 0.93520821625812975336s^4 \\ + 0.964661395977016730s^5 + 0.24531106122664293744s^6 \\ - 0.225005760598665060s^7 + (0.315753093391494960e-1)s^8$$

$$\lambda_{3,3,8}(s) = 3 + (0.4285052e-11)s + 0.9912407445s^2 - 1.825671705s^3 + 1.6553046109233173828s^4 \\ + 0.6631131708439212953s^5 - 0.69641943402791994728s^6 + 0.106908896294712008s^7 \\ + (0.265623455498187334e-2)s^8$$

ve  $M=12$  için  $\lambda_{1,3,12}(s)$ ,  $\lambda_{2,3,12}(s)$  ve  $\lambda_{3,3,12}(s)$  çözümleri

$$\lambda_{1,3,12}(s) = 1.000000009 - 2.828427027s + 3.999999263s^2 + (0.70963e-5)s^3 \\ - (0.342338713379408728e-4)s^4 + (0.9579317081209736182e-4)s^5 \\ - (0.16933590260670428318e-3)s^6 + (0.19672849228768995904e-3)s^7 \\ - (0.15221631877571084677e-3)s^8 + (0.7754645366597756626e-4)s^9 \\ - (0.24931478603384960104e-4)s^{10} + (0.457226206185268326e-5)s^{11} \\ - (0.363345428633365942e-6)s^{12}$$

$$\lambda_{2,3,12}(s) = 2 - 1.414213550s + 2.000000687s^2 - 1.414221772s^3 - 0.99995240683274940940s^4 \\ + 1.0840637706373325550s^5 + 0.11149746349311443051s^6 \\ - 0.13306295937477707859s^7 - (0.48489848727519355666e-2)s^8 \\ + (0.6348378915415869852e-2)s^9 + (0.4863080914916072272e-3)s^{10} \\ - (0.330551600514150668e-3)s^{11} + (0.283402395740020921e-4)s^{12}$$

$$\lambda_{3,3,12}(s) = 3 + (0.1041780755e-7)s + 0.9999969675s^2 - 1.885582062s^3 + 1.8331342043781466712s^4 \\ + 0.37777585987717543551s^5 - 0.43472368058529298255s^6 \\ - (0.24920990553120248012e-1)s^7 + (0.30911341318764939890e-1)s^8 \\ + (0.2400982271467455582e-2)s^9 - (0.19123779089902370822e-2)s^{10} \\ + (0.164704422694228470e-3)s^{11} + (0.281715486405431648e-5)s^{12}$$

şeklinde hesaplanır. Şimdi de  $N=3$  ve  $M=5,8,12$  için  $d_{3,5}$ ,  $d_{3,8}$  ve  $d_{3,12}$  uzaklık fonksiyonlarını hesaplayalım.

$$d_{3,5}(s) = |12 - (0.39999852520000000000e - 8)s + 4.6874874904795249600s^2 - 18.663011847211931036s^3 + 33.403539198960972047s^4 - 39.767958205292084279s^5 + 41.743239545789233904s^6 - 37.389799640744698505s^7 + 22.638842753245804328s^8 - 7.6197101315185310196s^9 + 1.0662283824787070988s^{10}|^{(1/2)}$$

$$d_{3,8}(s) = |12 - (0.39742896880000000000e - 8)s - (0.39960138520475040000e - 1)s^2 + 0.26116684074156539627s^3 + 1.4307884445880262991s^9 - 1.0048572309622268759s^{10} + 0.22437672054445639630s^{11} + 0.20249121834667421756s^{12} + (0.73838579109239889222e - 1)s^{14} - (0.13639647835801802238e - 1)s^{15} + (0.10039359084912996061e - 2)s^{16} - 0.71722179365760156205s^4 + 1.0259781242672634848s^5 - 0.86734501259483791247s^6 + 0.74280078437847799527s^7 - 1.1249053260964987361s^8 - 0.19481900804014913122s^{13}|^{(1/2)}$$

$$d_{3,12}(s) = |-(0.32581468214000000000e - 7)s - 80.13527060442854469286e - 4)s^2 + (0.16227200456868459721e - 3)s^3 - (0.87006552871814581665e - 3)s^4 + (0.27190343705757703552e - 2)s^5 - (0.55039155353917327321e - 2)s^6 + (0.78070365664673059378e - 2)s^7 - (0.88338635819736064183e - 2)s^8 + (0.98839975005922459011e - 2)s^9 - (0.11899111912358437595e - 1)s^{10} + (0.12889553816106657321e - 1)s^{11} - (0.10482289587360060509e - 1)s^{12} + 11.9999999819999999919 + (0.15314213058243627181e - 6)s^{22} - (0.17804504748195742462e - 7)s^{23} + (0.81097352073939041265e - 9)s^{24} + (0.56684225464453112679e - 2)s^{13} - (0.16003610918785162856e - 2)s^{14} - (0.13840490854832671171e - 3)s^{15} + (0.30239427567858754757e - 3)s^{16} - (0.10053806601639951952e - 3)s^{17} + (0.67360870101706903401e - 5)s^{18} + (0.27024305598918830228e - 5)s^{19} + (0.38553596904773409642e - 6)s^{20} - (0.57781265960350625590e - 6)s^{21}|^{(1/2)}$$

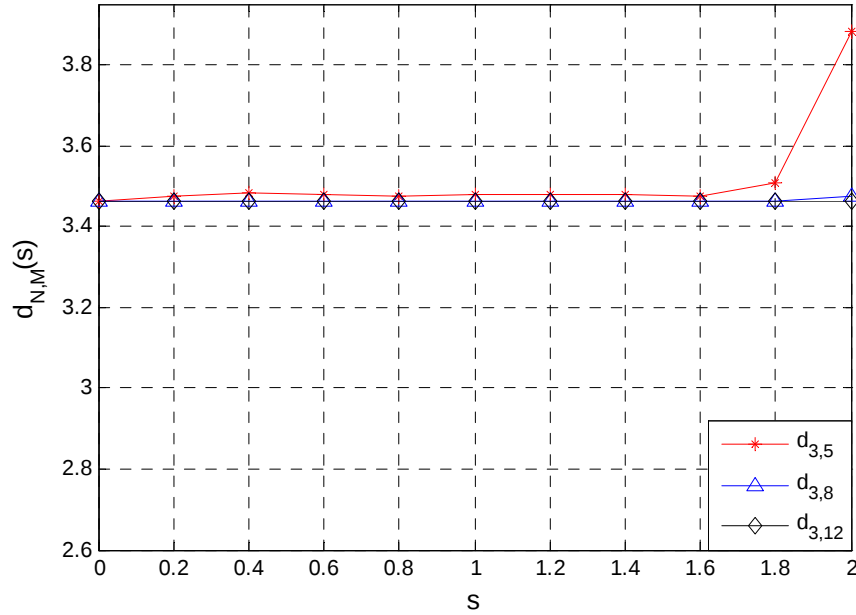
$d_{N,M}$  uzaklık fonksiyonunun  $N=3$  ve  $M=5,8,12$  değerleri için  $[0,2]$  aralığından seçilmiş bazı değerlerde nümerik sonuçları Tablo 6.2 de gösterilmiştir.

**Tablo 6.2.** Örnek 6.2'nin  $d_{N,M}$  uzaklık fonksiyonunun

$N=3$  ve  $M=5,8,12$  değerleri için sayısal sonuçları

| $s_i$ | $d_{3,5}(s_i)$ | $d_{3,8}(s_i)$ | $d_{3,12}(s_i)$ |
|-------|----------------|----------------|-----------------|
| 0     | 3.464101615    | 3.464101615    | 3.464101613     |
| 0.2   | 3.475796666    | 3.464047263    | 3.464101606     |
| 0.5   | 3.481190913    | 3.464058386    | 3.464101610     |
| 0.8   | 3.476627429    | 3.464052078    | 3.464101605     |
| 1.0   | 3.478341206    | 3.464057806    | 3.464101610     |
| 1.3   | 3.479405717    | 3.464049035    | 3.464101747     |
| 1.5   | 3.476219142    | 3.464080294    | 3.464102179     |
| 1.8   | 3.507953388    | 3.463960021    | 3.464104783     |
| 2.0   | 3.882115127    | 3.472645156    | 3.464111349     |

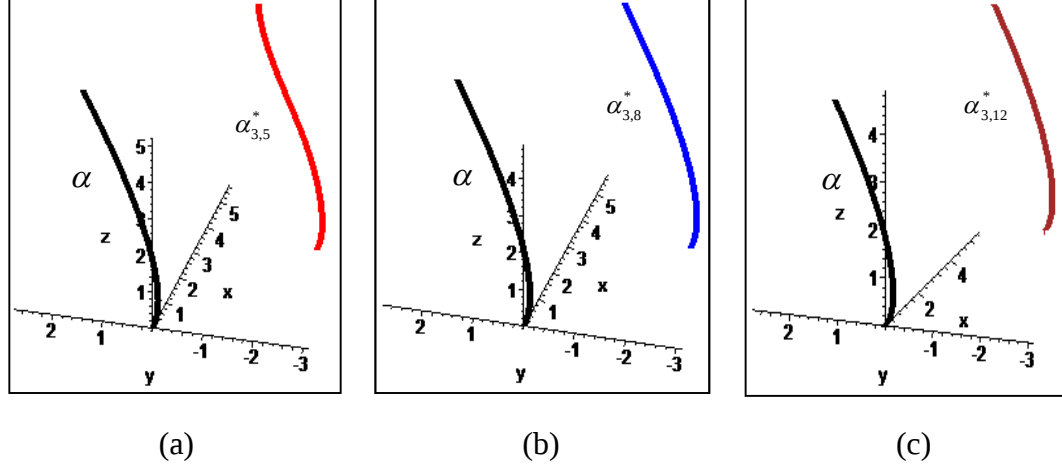
Tablo 6.2 deki değerler (6.3) ile karşılaştırıldığında  $M$  değeri arttıkça gerçek çözüme oldukça yaklaşıldığı açık bir şekilde görülmektedir. Şimdi  $d_{N,M}$  uzaklık fonksiyonunun  $N=3$  ve  $M=5,8,12$  değerleri için grafiklerini çizelim.



**Şekil 6.3.** Örnek 6.2'nin uzaklık fonksiyonlarının karşılaştırılması

Ayrıca Şekil 6.3 den görülmektedir ki  $M$  değeri artırıldığında çözümün doğruluğu artmaktadır. Çünkü  $d_{N,M}$  fonksiyonu sabit kalmaktadır. Buradan Lucas sıralama metodunun bu tip denklem sistemlerinin çözümünde oldukça etkili olduğu söylenebilir. Son olarak, Lucas sıralama yöntemiyle  $N=3$  ve  $M=5,8,12$  değerleri için bulduğumuz  $\lambda_{i,N,M}$ ,  $(i=1,2,3)$  değerlerini, (6.1) ile verilen Bishop eğriliklerini ve  $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$  değerlerini (2.52)'de yerlerine yazarsak,  $\alpha$  eğrisinin sabit genişlikli

( $d = \sqrt{12} \cong 3.464101615$ ) olduğu  $\alpha_{3,5}^*$ ,  $\alpha_{3,8}^*$  ve  $\alpha_{3,12}^*$  eğrileri elde edilir. Aşağıdaki grafik  $\alpha$  ile  $\alpha_{3,5}^*$ ,  $\alpha_{3,8}^*$  ve  $\alpha_{3,12}^*$  eğrilerinin grafiklerini göstermektedir.



**Şekil 6.4.** Örnek 6.2'nin  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_{3,5}^*$ ,  $\alpha_{3,8}^*$  ve  $\alpha_{3,12}^*$  eğrilerinin grafikleri

Şekil 6.4 (a),  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_{3,5}^*$  eğrisinin grafiği; (b),  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_{3,8}^*$  eğrisinin grafiği; (c),  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_{3,12}^*$  eğrisinin grafiğini göstermektedir.

### 6.3. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Bishop Çatıya Göre Sabit Genişlikli Spacelike Eğrileri Karakterize Eden Diferensiyel Denklem Sistemlerinin Çözümü için Taylor Sıralama Yöntemi

Bu bölümde 3-boyutlu Minkowski uzayında Bishop çatıya göre sabit genişlikli spacelike eğri çiftlerini karakterize eden diferensiyel denklem sistemlerinin yaklaşık çözümleri için Taylor sıralama yöntemi kullanılacaktır. İki örnek verilerek, spacelike bir eğrinin sabit genişlikli olduğu spacelike eğri, elde edilen bu yaklaşık çözümler vasıtasıyla belirlenecektir.

Bölüm 2.2.2 de 3-boyutlu Minkowski uzayında Bishop çatıya göre sabit genişlikli spacelike eğri çiftlerini karakterize eden diferensiyel denklem sistemi (2.65) ile ayrıca,  $s$  yay parametrelili  $\alpha$  spacelike eğrisinin sabit genişlikli olduğu,  $\overrightarrow{\alpha}(s^*)$  konum vektörü ile verilen  $\alpha^*$  spacelike eğrisinin ise (2.78) bağıntısı ile belirlenebileceği gösterilmişti.

Şimdi (2.65) denklem sistemi ile (2.78) bağıntısını kullanılarak spacelike bir eğrinin sabit genişlikli olduğu spacelike eğriyi yaklaşık olarak belirlemeye çalışalım. Bunun için aşağıda verilen örnekleri inceleyelim.

**Örnek 6.3.**  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow E_1^3$  tanımlı, birim hızlı aslinormali timelike olan

$$\alpha(s) = \left( 3 \cosh\left(\frac{s}{5}\right), 3 \sinh\left(\frac{s}{5}\right), \frac{4s}{5} \right)$$

spacelike eğrisini göz önüne alalım [65].  $\alpha$  eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilik ve burulması sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$\bar{T}(s) = \left( \frac{3}{5} \sinh\left(\frac{s}{5}\right), \frac{3}{5} \cosh\left(\frac{s}{5}\right), \frac{4}{5} \right), \quad \bar{N}(s) = \left( \cosh\left(\frac{s}{5}\right), \sinh\left(\frac{s}{5}\right), 0 \right),$$

$$\bar{B}(s) = \left( \frac{4}{5} \sinh\left(\frac{s}{5}\right), \frac{4}{5} \cosh\left(\frac{s}{5}\right), \frac{-3}{5} \right), \quad \kappa = \frac{3}{25} \text{ ve } \tau = \frac{4}{25}.$$

Ayrıca,  $\alpha$  eğrisinin Bishop elemanları

$$\theta = \frac{4s}{25}$$

$$k_1 = \frac{3}{25} \cosh\left(\frac{4s}{25}\right), \quad k_2 = \frac{3}{25} \sinh\left(\frac{4s}{25}\right) \quad (6.5)$$

ve

$$\bar{N}_1 = \left( \frac{-4}{5} \sinh\left(\frac{s}{5}\right) \sinh\left(\frac{4s}{25}\right) + \cosh\left(\frac{s}{5}\right) \cosh\left(\frac{4s}{25}\right), \frac{-4}{5} \cosh\left(\frac{s}{5}\right) \sinh\left(\frac{4s}{25}\right) + \sinh\left(\frac{s}{5}\right) \cosh\left(\frac{4s}{25}\right), \frac{3}{5} \sinh\left(\frac{4s}{25}\right) \right)$$

$$\bar{N}_2 = \left( \frac{4}{5} \sinh\left(\frac{s}{5}\right) \cosh\left(\frac{4s}{25}\right) - \cosh\left(\frac{s}{5}\right) \sinh\left(\frac{4s}{25}\right), \frac{4}{5} \cosh\left(\frac{s}{5}\right) \cosh\left(\frac{4s}{25}\right) - \sinh\left(\frac{s}{5}\right) \sinh\left(\frac{4s}{25}\right), \frac{-3}{5} \cosh\left(\frac{4s}{25}\right) \right)$$

olarak hesaplanır. (6.5) ile verilen Bishop eğrilikleri (2.65) de yerlerine yazılırsa  $\alpha$  spacelike eğrisinin sabit genişlikli olduğu eğriyi belirlemede kullanılacak olan normal formdaki diferensiyel denklem sistemi

$$\begin{cases} \lambda_1'(s) = -\frac{3}{25} \cosh\left(\frac{4s}{25}\right) \lambda_2(s) - \frac{3}{25} \sinh\left(\frac{4s}{25}\right) \lambda_3(s) \\ \lambda_2'(s) = -\frac{3}{25} \cosh\left(\frac{4s}{25}\right) \lambda_1(s) \\ \lambda_3'(s) = \frac{3}{25} \sinh\left(\frac{4s}{25}\right) \lambda_1(s) \end{cases} \quad (6.6)$$

şeklinde bulunur. (6.6) denklem sisteminin yaklaşık çözümlerini, Bölüm 4.1.5 ve 4.1.6 da bahsedilen normal formdaki lineer denklem sistemlerinin çözümü için Taylor sıralama yöntemini kullanarak bulmaya çalışalım.  $\lambda_1(s)$ ,  $\lambda_2(s)$  ve  $\lambda_3(s)$  için başlangıç koşullarını

$$\lambda_1(0) = 3, \lambda_2(0) = 2, \lambda_3(0) = 1$$

olarak kabul edelim. Bu durumda  $d$  genişliği

$$d = \sqrt{|\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2|} = \sqrt{6} \cong 2.449489743 \quad (6.7)$$

olur.  $N=3$  için  $\lambda_{1,3}(s)$ ,  $\lambda_{2,3}(s)$  ve  $\lambda_{3,3}(s)$  kesilmiş (sonlu) Taylor seri çözümleri

$$\lambda_{i,3}(s) = \sum_{n=0}^3 a_{i,n} s^n, \quad (i = 1, 2, 3)$$

şeklindedir. Şimdi yaklaşık çözümlerin  $a_{i,n}$  ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) katsayılarını hesaplayalım.

$a = 0$ ,  $b = 2\pi$  ve  $N = 3$  için sıralama noktalarının kümesi

$$\left\{ s_0 = 0, s_1 = \frac{2\pi}{3}, s_2 = \frac{4\pi}{3}, s_3 = 2\pi \right\}$$

olur. (4.44) ten, (6.6) sistemi için temel matris denklemi

$$\{\bar{\mathbf{S}}\mathbf{B} - \mathbf{P}\mathbf{S}\} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

şeklinde yazılabilir. Bölüm 4.1.5 ve 4.1.6 da bahsedilen yöntem kullanılarak  $N = 3$  için (6.6) probleminin yaklaşık çözümleri

$$\lambda_{1,3}(s) = 3 - 0.239999999999999990s + (0.118469934610790674e-1)s^2 - (0.143906347487123801e-2)s^3$$

$$\lambda_{2,3}(s) = 2 - 0.3599999999999999986s + (0.124089497100107940e-1)s^2 - (0.103022526195725197e-2)s^3$$

$$\lambda_{3,3}(s) = 1 + (0.279390707420637610e-1)s^2 - (0.997700682999588548e-3)s^3$$

olarak hesaplanır. Şimdi düzeltilmiş Taylor polinom çözümlerini hesaplamak için

$$\begin{cases} e_{1,3}'(s) + \frac{3}{25} \cosh\left(\frac{4s}{25}\right) e_{2,3}(s) + \frac{3}{25} \sinh\left(\frac{4s}{25}\right) e_{3,3}(s) = -R_{1,3}(s) \\ e_{2,3}'(s) + \frac{3}{25} \cosh\left(\frac{4s}{25}\right) e_{1,3}(s) = R_{2,3}(s) \\ e_{3,3}'(s) - \frac{3}{25} \sinh\left(\frac{4s}{25}\right) e_{1,3}(s) = R_{3,3}(s) \end{cases} \quad (6.8)$$

hata problemini ele alalım. Öyleki,

$$\begin{cases} R_{1,3}(s) = \lambda_{1,3}'(s) + \frac{3}{25} \cosh\left(\frac{4s}{25}\right) \lambda_{2,3}(s) + \frac{3}{25} \sinh\left(\frac{4s}{25}\right) \lambda_{3,3}(s) \\ R_{2,3}(s) = \lambda_{2,3}'(s) + \frac{3}{25} \cosh\left(\frac{4s}{25}\right) \lambda_{1,3}(s) \\ R_{3,3}(s) = \lambda_{3,3}'(s) - \frac{3}{25} \sinh\left(\frac{4s}{25}\right) \lambda_{1,3}(s) \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. Yine Taylor metodu kullanılarak  $M=5$  için (6.8) hata probleminin  $e_{1,3}(s)$ ,  $e_{2,3}(s)$  ve  $e_{3,3}(s)$  e göre  $e_{1,3,5}(s)$ ,  $e_{2,3,5}(s)$  ve  $e_{3,3,5}(s)$  tahmini hata fonksiyonları

$$\begin{aligned} e_{1,3,5}(s) &= (0.155659751280128192e-3)s^2 - (0.160933546243982351e-3)s^3 \\ &\quad + (0.391648182149072655e-4)s^4 - (0.285545505012148254e-5)s^5 \\ e_{2,3,5}(s) &= (0.189435265582780696e-2)s^2 - (0.879287374638778956e-3)s^3 \\ &\quad + (0.957149196653338898e-4)s^4 + (0.156354546864966890e-5)s^5 \\ e_{3,3,5}(s) &= (0.872979124523135691e-3)s^2 - (0.547755528717119380e-3)s^3 \\ &\quad + (0.119820243525867592e-3)s^4 - (0.895059117974064116e-5)s^5 \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır ve böylece

$$\begin{aligned} \lambda_{1,3,5}(s) &= 3 - 0.239999999999999990s + (0.1200265321e-1)s^2 - (0.1599997021e-2)s^3 \\ &\quad + (0.391648182149072655e-4)s^4 - (0.285545505012148254e-5)s^5 \\ \lambda_{2,3,5}(s) &= 2 - 0.359999999999999986s + (0.1430330237e-1)s^2 - (0.1909512637e-2)s^3 \\ &\quad + (0.957149196653338898e-4)s^4 + (0.156354546864966890e-5)s^5 \\ \lambda_{3,3,5}(s) &= 1 + (0.2881204986e-1)s^2 - (0.1545456212e-2)s^3 + (0.119820243525867592e-3)s^4 \\ &\quad - (0.895059117974064116e-5)s^5 \end{aligned}$$

düzeltilmiş Taylor polinom çözümleri elde edilir. Benzer şekilde  $M=8$  için  $\lambda_{1,3,8}(s)$ ,  $\lambda_{2,3,8}(s)$  ve  $\lambda_{3,3,8}(s)$  çözümleri

$$\begin{aligned} \lambda_{1,3,8}(s) &= 3 - 0.239999999999999990s + (0.1199999222e-1)s^2 - (0.1599984337e-2)s^3 \\ &\quad + (0.399856650960201936e-4)s^4 - (0.319268377237993488e-5)s^5 \\ &\quad + (0.511251213220247659e-7)s^6 - (0.265474827421929870e-8)s^7 \\ &\quad - (0.375422289056310168e-12)s^8 \\ \lambda_{2,3,8}(s) &= 2 - 0.359999999999999986s + (0.1440006840e-1)s^2 - (0.2016144390e-2)s^3 \\ &\quad + (0.140289924153166114e-3)s^4 - (0.667375006744821996e-5)s^5 \\ &\quad + (0.620093194969633219e-6)s^6 - (0.182140175606590675e-7)s^7 \\ &\quad + (0.135378409017801782e-8)s^8 \\ \lambda_{3,3,8}(s) &= 1 + (0.2879978167e-1)s^2 - (0.1535520855e-2)s^3 - (0.212258042475094427e-17)s \\ &\quad + (0.118582084767860644e-3)s^4 - (0.983706446024064678e-5)s^5 \\ &\quad + (0.271320528759761641e-6)s^6 - (0.181082634793510792e-7)s^7 \\ &\quad - (0.542761804971210363e-9)s^8 \end{aligned}$$

ve  $M=12$  için  $\lambda_{1,3,12}(s)$ ,  $\lambda_{2,3,12}(s)$  ve  $\lambda_{3,3,12}(s)$  çözümleri

$$\begin{aligned}\lambda_{1,3,12}(s) = & 3 - 0.23999999999999990s + (0.1200000213e-1)s^2 - (0.1600006280e-2)s^3 \\ & + (0.400079891306455050e-4)s^4 - (0.320515968662138921e-5)s^5 \\ & + (0.548692585559231512e-7)s^6 - (0.300313449091356194e-8)s^7 \\ & - (0.154060605355622616e-9)s^8 + (0.647552190573899500e-10)s^9 \\ & - (0.111463261465550210e-10)s^{10} + (0.962356919727187463e-12)s^{11} \\ & - (0.341426399975745223e-13)s^{12}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{2,3,12}(s) = & 2 - 0.359999999999999986s + (0.1439998842e-1)s^2 - (0.2015959458e-2)s^3 \\ & + (0.140092802773414800e-3)s^4 - (0.654657737940324818e-5)s^5 \\ & + (0.563220270417756237e-6)s^6 + (0.821736208479505517e-9)s^7 \\ & - (0.346541481317847424e-8)s^8 + (0.877494214320220796e-9)s^9 \\ & - (0.105201617902526588e-9)s^{10} + (0.726591929829946954e-11)s^{11} \\ & - (0.215631569617095166e-12)s^{12}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{3,3,12}(s) = & 1 + (0.2880000137e-1)s^2 - (0.1536004047e-2)s^3 + (0.119044688263835256e-3)s^4 \\ & - (0.100784394348365624e-4)s^5 + (0.344209615233260873e-6)s^6 \\ & - (0.304768551469877108e-7)s^7 + (0.391568373957359127e-9)s^8 \\ & + (0.305936020806685076e-10)s^9 - (0.119393595847601972e-10)s^{10} \\ & + (0.982389618945010454e-12)s^{11} - (0.352290000486351006e-13)s^{12}\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Şimdi (2.62) den  $d_{N,M}$  uzaklık fonksiyonu

$$d_{N,M}(s) = \sqrt{|\lambda_{1,N,M}^2(s) - \lambda_{2,N,M}^2(s) + \lambda_{3,N,M}^2(s)|} = k, \quad k \in \mathbb{R}$$

şeklinde yazılabilir.  $N=3$  ve  $M=5,8,12$  için  $d_{3,5}$ ,  $d_{3,8}$  ve  $d_{3,12}$  uzaklık fonksiyonları aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}d_{3,5}(s) = & |6 + (0.4e-17)s + (0.42680950000000528000e-3)s^2 - (0.51573983640000016044e-3)s^3 \\ & + (0.25453263164684494607e-3)s^4 - (0.64011733499603477921e-4)s^5 \\ & + (0.89051762699963079178e-5)s^6 - (0.75918692635944522017e-6)s^7 \\ & + (0.49503580186877606883e-7)s^8 - (0.26679000434815055925e-8)s^9 \\ & + (0.85822031577580328120e-10)s^{10} |^{(1/2)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_{3,8}(s) = & |-6 + (0.24516084950188854000e-18)s + (0.75693999999472000000e-6)s^2 \\ & - (0.16828103999997145382e-5)s^3 + (0.16477479457720181291e-5)s^4 \\ & - (0.90069916006726254020e-6)s^5 + (0.30109422336005609226e-6)s^6 \\ & - (0.65174115390134505161e-7)s^7 + (0.98512114987227398963e-8)s^8 \\ & - (0.68974635228928185073e-16)s^{15} + (0.15381408449416221703e-17)s^{16} \\ & - (0.11804857338837249284e-8)s^9 + (0.12272633081894501423e-9)s^{10} \\ & - (0.10342691393684498417e-10)s^{11} + (0.68678092166359875608e-12)s^{12} \\ & - (0.41241437045057729968e-13)s^{13} + (0.19703013714689495701e-14)s^{14} |^{(1/2)}\end{aligned}$$

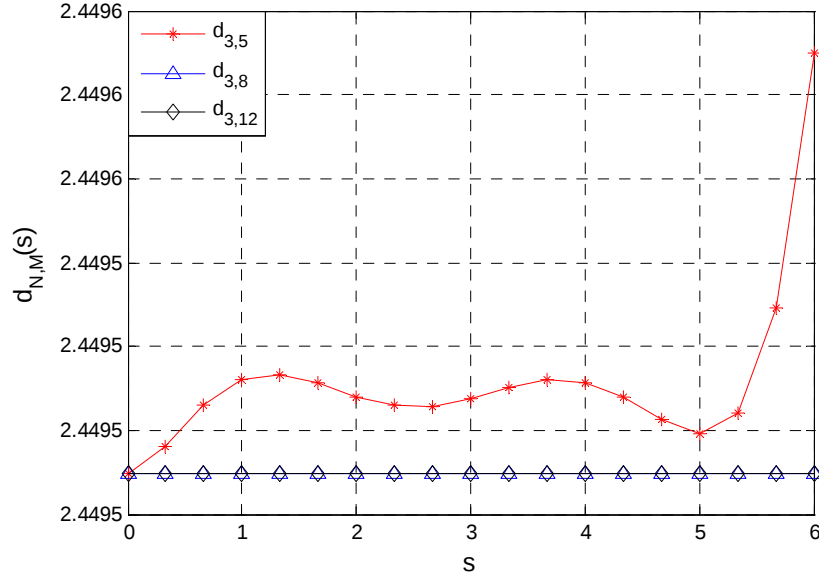
$$\begin{aligned}
d_{3,12}(s) = & -(0.4e-17)s - (0.61840000005280000000e-7)s^2 + (0.21730200000016319963e-6)s^3 \\
& - 6 + (0.44196678129878041493e-14)s^{15} - (0.21199313019225487205e-15)s^{16} \\
& + (0.22436866652441299522e-17)s^{17} + (0.13626218576941754008e-17)s^{18} \\
& - (0.23599198472498146773e-18)s^{19} + (0.24879025590960901613e-19)s^{20} \\
& - (0.18557147546861243001e-20)s^{21} + (0.94669589633583208645e-22)s^{22} \\
& - (0.29985911464208896971e-23)s^{23} + (0.44090171505101451618e-25)s^{24} \\
& + (0.92817082047041754971e-12)s^{13} - (0.67851981922375077711e-13)s^{14} \\
& - (0.35876839375668384674e-6)s^4 + (0.35295340873854572244e-6)s^5 \\
& - (0.22742743310297519795e-6)s^6 + (0.10086831188078507984e-6)s^7 \\
& - (0.31644806680871901986e-7)s^8 + (0.71165312583217324226e-8)s^9 \\
& - (0.11534994350934332901e-8)s^{10} + (0.13599970127727667340e-9)s^{11} \\
& - (0.12168574942593775580e-10)s^{12} \Big|^{(1/2)}
\end{aligned}$$

$d_{N,M}$  uzaklık fonksiyonunun  $N=3$  ve  $M=5,8,12$  değerleri için  $[0,2\pi]$  aralığından seçilmiş bazı değerlerde nümerik sonuçları Tablo 6.3 de gösterilmiştir.

**Tablo 6.3.** Örnek 6.3'ün  $d_{N,M}$  uzaklık fonksiyonunun  $N=3$  ve  $M=5,8,12$  değerleri için sayısal sonuçları

| $s_i$    | $d_{3,5}(s_i)$ | $d_{3,8}(s_i)$ | $d_{3,12}(s_i)$ |
|----------|----------------|----------------|-----------------|
| 0        | 2.449489743    | 2.449489743    | 2.449489743     |
| $\pi/2$  | 2.449512037    | 2.449489732    | 2.449489743     |
| $\pi$    | 2.449508687    | 2.449489731    | 2.449489743     |
| $3\pi/2$ | 2.449501890    | 2.449489733    | 2.449489743     |
| $2\pi$   | 2.449686299    | 2.449490262    | 2.449489726     |

Tablo 6.3 deki değerler (6.7) ile karşılaştırıldığında  $M$  değeri arttıkça yaklaşık çözümlerin gerçek çözümlere oldukça yaklaştığı açık bir şekilde görülmektedir. Şimdi  $d_{N,M}$  uzaklık fonksiyonunun  $N=3$  ve  $M=5,8,12$  değerleri için grafiklerini çizelim.



**Şekil 6.5.** Örnek 6.3'ün uzaklık fonksiyonlarının karşılaştırılması

Ayrıca Şekil 6.5 den de görülmektedir ki  $M$  değeri artırıldığında çözümün doğruluğu artmaktadır. Çünkü  $d_{N,M}$  fonksiyonu sabit kalmaktadır. Son olarak,  $N=3$  ve  $M=5,8,12$  değerleri için bulduğumuz  $\lambda_{i,N,M}$ ,  $(i=1,2,3)$  değerlerini, (6.5) ile verilen Bishop eğriliklerini ve  $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$  değerlerini (2.78) de yerlerine yazarsak,  $\alpha$  spacelike eğrisinin sabit genişlikli ( $d=\sqrt{6} \cong 2.449489743$ ) olduğu  $\alpha^*$  eğrisi belirlenebilir. O halde  $N=3$  ve  $M=5$  için  $\alpha_{3,5}^*$  eğrisi

$$\overrightarrow{\alpha_{3,5}^*}(s^*) = \left( \frac{-k_1 \lambda_{3,3,5} - k_2 \lambda_{2,3,5}}{\mu} \right) \overrightarrow{\alpha}''' + \left( \frac{k_2' \lambda_{2,3,5} + k_1' \lambda_{3,3,5}}{\mu} \right) \overrightarrow{\alpha}'' + \left[ \frac{(k_1^2 - k_2^2)(k_2 \lambda_{2,3,5} + k_1 \lambda_{3,3,5})}{\mu} + \lambda_{1,3,5} \right] \overrightarrow{\alpha}' + \overrightarrow{\alpha}$$

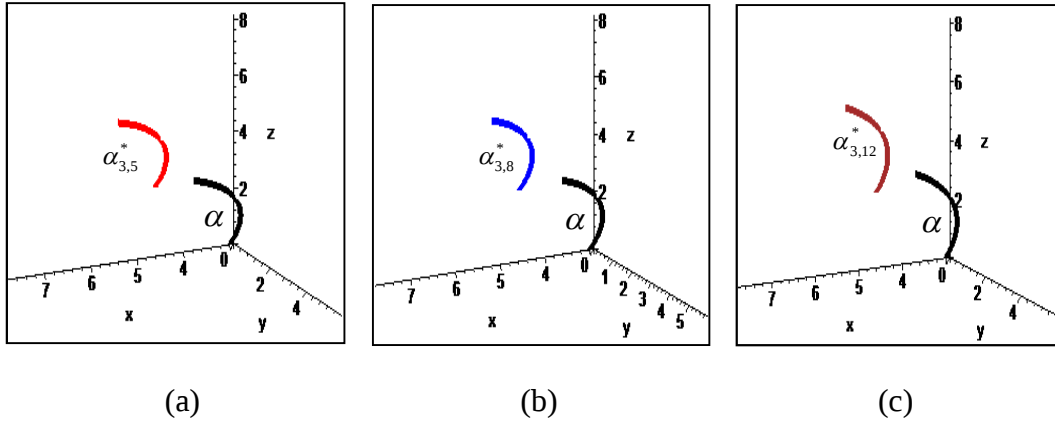
şeklinde ifade edilir. Benzer şekilde  $N=3$  ve  $M=8$  için  $\alpha_{3,8}^*$  eğrisi

$$\overrightarrow{\alpha_{3,8}^*}(s^*) = \left( \frac{-k_1 \lambda_{3,3,8} - k_2 \lambda_{2,3,8}}{\mu} \right) \overrightarrow{\alpha}''' + \left( \frac{k_2' \lambda_{2,3,8} + k_1' \lambda_{3,3,8}}{\mu} \right) \overrightarrow{\alpha}'' + \left[ \frac{(k_1^2 - k_2^2)(k_2 \lambda_{2,3,8} + k_1 \lambda_{3,3,8})}{\mu} + \lambda_{1,3,8} \right] \overrightarrow{\alpha}' + \overrightarrow{\alpha}$$

$N=3$  ve  $M=12$  için  $\alpha_{3,12}^*$  eğrisi

$$\overrightarrow{\alpha_{3,12}^*}(s^*) = \left( \frac{-k_1 \lambda_{3,3,12} - k_2 \lambda_{2,3,12}}{\mu} \right) \overrightarrow{\alpha}''' + \left( \frac{k_2' \lambda_{2,3,12} + k_1' \lambda_{3,3,12}}{\mu} \right) \overrightarrow{\alpha}'' + \left[ \frac{(k_1^2 - k_2^2)(k_2 \lambda_{2,3,12} + k_1 \lambda_{3,3,12})}{\mu} + \lambda_{1,3,12} \right] \overrightarrow{\alpha}' + \overrightarrow{\alpha}$$

şeklinde yazılabilir. Aşağıdaki grafik  $\alpha$  ile  $\alpha_{3,5}^*$ ,  $\alpha_{3,8}^*$  ve  $\alpha_{3,12}^*$  eğrilerinin grafiklerini göstermektedir.



**Şekil 6.6.** Örnek 6.3'ün  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_{3,5}^*$ ,  $\alpha_{3,8}^*$  ve  $\alpha_{3,12}^*$  eğrilerinin grafikleri

Şekil 6.6 (a),  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_{3,5}^*$  eğrisinin grafiği; (b),  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_{3,8}^*$  eğrisinin grafiği; (c),  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_{3,12}^*$  eğrisinin grafiğini göstermektedir.

**Örnek 6.4.**  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow E_1^3$  tanımlı, birim hızlı binormali timelike olan

$$\alpha(s) = \left( 3 \sinh\left(\frac{s}{4}\right), 3 \cosh\left(\frac{s}{4}\right), \frac{5s}{4} \right)$$

spacelike eğrisini göz önüne alalım.  $\alpha$  eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilik ve burulması sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$\bar{T}(s) = \left( \frac{3}{4} \cosh\left(\frac{s}{4}\right), \frac{3}{4} \sinh\left(\frac{s}{4}\right), \frac{5}{4} \right), \quad \bar{N}(s) = \left( \sinh\left(\frac{s}{4}\right), \cosh\left(\frac{s}{4}\right), 0 \right),$$

$$\bar{B}(s) = \left( \frac{-5}{4} \cosh\left(\frac{s}{4}\right), \frac{-5}{4} \sinh\left(\frac{s}{4}\right), \frac{-3}{4} \right), \quad \kappa = \frac{3}{16} \text{ ve } \tau = \frac{-5}{16}.$$

Ayrıca,  $\alpha$  eğrisinin Bishop elemanları

$$\theta = \frac{-5s}{16}$$

$$k_1 = \frac{3}{16} \cosh\left(\frac{5s}{16}\right), \quad k_2 = \frac{-3}{16} \sinh\left(\frac{5s}{16}\right) \quad (6.9)$$

ve

$$\bar{N}_1 = \left( \frac{-5}{4} \cosh\left(\frac{s}{4}\right) \sinh\left(\frac{5s}{16}\right) + \sinh\left(\frac{s}{4}\right) \cosh\left(\frac{5s}{16}\right), \frac{-5}{4} \sinh\left(\frac{s}{4}\right) \sinh\left(\frac{5s}{16}\right) + \cosh\left(\frac{s}{4}\right) \cosh\left(\frac{5s}{16}\right), \frac{-3}{4} \sinh\left(\frac{5s}{16}\right) \right)$$

$$\bar{N}_2 = \left( \frac{-5}{4} \cosh\left(\frac{s}{4}\right) \cosh\left(\frac{5s}{16}\right) + \sinh\left(\frac{s}{4}\right) \sinh\left(\frac{5s}{16}\right), \frac{-5}{4} \sinh\left(\frac{s}{4}\right) \cosh\left(\frac{5s}{16}\right) + \cosh\left(\frac{s}{4}\right) \sinh\left(\frac{5s}{16}\right), \frac{-3}{4} \cosh\left(\frac{5s}{16}\right) \right)$$

olarak hesaplanır. (6.9) ile verilen Bishop eğrilikleri (2.65) de yerlerine yazılırsa  $\alpha$  spacelike eğrisinin sabit genişlikli olduğu eğriyi belirlemede kullanılacak olan normal formdaki diferensiyel denklem sistemi

$$\begin{cases} \lambda_1'(s) = \frac{3}{16} \cosh\left(\frac{5s}{16}\right) \lambda_2(s) - \frac{3}{16} \sinh\left(\frac{5s}{16}\right) \lambda_3(s) \\ \lambda_2'(s) = -\frac{3}{16} \cosh\left(\frac{5s}{16}\right) \lambda_1(s) \\ \lambda_3'(s) = -\frac{3}{16} \sinh\left(\frac{5s}{16}\right) \lambda_1(s) \end{cases} \quad (6.10)$$

şeklinde bulunur. (6.10) denklem sisteminin yaklaşık çözümlerini, Bölüm 4.1.5 ve 4.1.6 da bahsedilen normal formdaki lineer denklem sistemlerinin çözümü için Taylor sıralama yöntemini kullanarak bulmaya çalışalım.  $\lambda_1(s)$ ,  $\lambda_2(s)$  ve  $\lambda_3(s)$  için başlangıç koşullarını

$$\lambda_1(0) = 4, \lambda_2(0) = 3, \lambda_3(0) = 2$$

olarak kabul edelim. Bu durumda  $d$  genişliği

$$d = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2} = \sqrt{21} \cong 4.582575695 \quad (6.11)$$

olur.  $N=3$  için  $\lambda_{1,3}(s)$ ,  $\lambda_{2,3}(s)$  ve  $\lambda_{3,3}(s)$  kesilmiş (sonlu) Taylor seri çözümleri

$$\lambda_{i,3}(s) = \sum_{n=0}^3 a_{i,n} s^n, \quad (i=1,2,3)$$

şeklinde dir. Şimdi yaklaşık çözümlerin  $a_{i,n}$  ( $n=0,1,2,3$ ) katsayılarını hesaplayalım.

$a=0$ ,  $b=2\pi$  ve  $N=3$  için sıralama noktalarının kümesi

$$\left\{ s_0 = 0, s_1 = \frac{2\pi}{3}, s_2 = \frac{4\pi}{3}, s_3 = 2\pi \right\}$$

olur. (4.44) ten (6.10) sistemi için temel matris denklemi

$$\{\bar{\mathbf{S}}\mathbf{B} - \mathbf{P}\mathbf{S}\} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

şeklinde yazılabilir. Bölüm 4.1.5 ve 4.1.6 da bahsedilen yöntem kullanılarak  $N=3$  için (6.10) probleminin yaklaşık çözümleri

$$\lambda_{1,3}(s) = 4 + 0.562499999999999889s - 0.118159582260970022s^2 + (0.755696025590192438e - 3)s^3$$

$$\lambda_{2,3}(s) = 3 - 0.75s - (0.490684516041400287e - 1)s^2 - (0.863829547989537414e - 2)s^3$$

$$\lambda_{3,3}(s) = 2 - 0.126743095627038588s^2 - (0.635027397197631892e - 2)s^3$$

olarak hesaplanır. Şimdi düzeltilmiş Taylor polinom çözümlerini hesaplamak için

$$\begin{cases} e_{1,3}'(s) - \frac{3}{16} \cosh\left(\frac{5s}{16}\right) e_{2,3}(s) + \frac{3}{16} \sinh\left(\frac{5s}{16}\right) e_{3,3}(s) = -R_{1,3}(s) \\ e_{2,3}'(s) + \frac{3}{16} \cosh\left(\frac{5s}{16}\right) e_{1,3}(s) = -R_{2,3}(s) \\ e_{3,3}'(s) + \frac{3}{16} \sinh\left(\frac{5s}{16}\right) e_{1,3}(s) = -R_{3,3}(s) \end{cases} \quad (6.12)$$

hata problemini ele alalım. Öyleki,

$$\begin{cases} R_{1,3}(s) = \lambda_{1,3}'(s) - \frac{3}{16} \cosh\left(\frac{5s}{16}\right) \lambda_{2,3}(s) + \frac{3}{16} \sinh\left(\frac{5s}{16}\right) \lambda_{3,3}(s) \\ R_{2,3}(s) = \lambda_{2,3}'(s) + \frac{3}{16} \cosh\left(\frac{5s}{16}\right) \lambda_{1,3}(s) \\ R_{3,3}(s) = \lambda_{3,3}'(s) + \frac{3}{16} \sinh\left(\frac{5s}{16}\right) \lambda_{1,3}(s) \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. Yine Taylor metodu kullanılarak  $M=5$  için (6.12) hata probleminin  $e_{1,3}(s)$ ,  $e_{2,3}(s)$  ve  $e_{3,3}(s)$  e göre  $e_{1,3,5}(s)$ ,  $e_{2,3,5}(s)$  ve  $e_{3,3,5}(s)$  tahmini hata fonksiyonları

$$\begin{aligned} e_{1,3,5}(s) &= -(0.105928145152966880e-1)s^2 + (0.489361084006016256e-2)s^3 \\ &\quad - (0.574182640827182348e-3)s^4 - (0.398092377338239984e-6)s^5 \\ e_{2,3,5}(s) &= -(0.582341769543024812e-2)s^2 + (0.658276424790392098e-2)s^3 \\ &\quad - (0.220507268882495083e-2)s^4 + (0.229237733244127608e-3)s^5 \\ e_{3,3,5}(s) &= (0.521777611394166636e-2)s^2 + (0.527442612452168336e-4)s^3 \\ &\quad - (0.955857908655768312e-3)s^4 + (0.153968352688835806e-3)s^5 \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır ve böylece

$$\begin{aligned} \lambda_{1,3,5}(s) &= 4 + 0.56249999999999889s - 0.1287523968s^2 + (0.5649306866e-2)s^3 \\ &\quad - (0.574182640827182348e-3)s^4 - (0.398092377338239984e-6)s^5 \\ \lambda_{2,3,5}(s) &= 3 - 0.75s - (0.5489186930e-1)s^2 - (0.2055531232e-2)s^3 \\ &\quad - (0.220507268882495083e-2)s^4 + (0.229237733244127608e-3)s^5 \\ \lambda_{3,3,5}(s) &= 2 - 0.1215253195s^2 - (0.6297529711e-2)s^3 - (0.955857908655768312e-3)s^4 \\ &\quad + (0.153968352688835806e-3)s^5 \end{aligned}$$

düzeltilmiş Taylor polinom çözümleri elde edilir. Benzer şekilde  $M=8$  için

$\lambda_{1,3,8}(s)$ ,  $\lambda_{2,3,8}(s)$  ve  $\lambda_{3,3,8}(s)$  çözümleri

$$\begin{aligned} \lambda_{1,3,8}(s) &= 4 + 0.5625s - 0.1289037535s^2 + (0.5856029575e-2)s^3 - (0.669166315737968008e-3)s^4 \\ &\quad + (0.174854310399223148e-4)s^5 - (0.122371027674894086e-5)s^6 \\ &\quad + (0.708041262540592314e-8)s^7 - (0.470011387677653106e-9)s^8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{2,3,8}(s) = & 3 - 0.75s - (0.5268482008e - 1)s^2 - (0.4258537654e - 2)s^3 \\ & + (0.149090127221772828e - 3)s^5 - (0.862242004364552275e - 6)s^6 \\ & - (0.532022665405352383e - 6)s^7 + (0.152358000011210449e - 6)s^8 \\ & - (0.145988500872305848e - 2)s^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{3,3,8}(s) = & 2 - 0.1171555968s^2 - (0.1105462535e - 1)s^3 + (0.997230858847616282e - 3)s^4 \\ & - (0.206523200376361460e - 3)s^5 + (0.322243531298872787e - 4)s^6 \\ & - (0.247627152405688160e - 5)s^7 + (0.207171926317935850e - 6)s^8\end{aligned}$$

ve  $M=12$  için  $\lambda_{1,3,12}(s)$ ,  $\lambda_{2,3,12}(s)$  ve  $\lambda_{3,3,12}(s)$  çözümleri

$$\begin{aligned}\lambda_{1,3,12}(s) = & 4 + 0.56249999999999889s - 0.1289061713s^2 + (0.5859096680e - 2)s^3 \\ & - (0.670937000683444543e - 3)s^4 + (0.178887386855959562e - 4)s^5 \\ & - (0.114696040901841878e - 5)s^6 - (0.724472379162385827e - 7)s^7 \\ & + (0.249802139995394106e - 7)s^8 - (0.467493605949714266e - 8)s^9 \\ & + (0.529338414636762066e - 9)s^{10} - (0.345395923339866720e - 10)s^{11} \\ & + (0.987831989549765450e - 12)s^{12}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{2,3,12}(s) = & 3 - 0.75s - (0.5273431986e - 1)s^2 - (0.4150600864e - 2)s^3 \\ & - (0.156175524349805372e - 2)s^4 + (0.201241236913800650e - 3)s^5 \\ & - (0.162625996275453854e - 4)s^6 + (0.204780899947242272e - 5)s^7 \\ & - (0.635627953797193074e - 7)s^8 + (0.439416943325040134e - 8)s^9 \\ & + (0.452479422630397925e - 9)s^{10} - (0.342098895276399121e - 10)s^{11} \\ & + (0.219103668309968070e - 11)s^{12}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{3,3,12}(s) = & 2 - 0.1171874940s^2 - (0.1098634877e - 1)s^3 + (0.934632929994752560e - 3)s^4 \\ & - (0.175982796033341550e - 3)s^5 + (0.239600789219834852e - 4)s^6 \\ & - (0.133438739413280217e - 5)s^7 + (0.162816792659281618e - 6)s^8 \\ & - (0.652762203469901825e - 8)s^9 + (0.700665709235962983e - 9)s^{10} \\ & - (0.268494076137334700e - 10)s^{11} + (0.168152915705614782e - 11)s^{12}\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Şimdi (2.62) den  $d_{N,M}$  uzaklık fonksiyonu

$$d_{N,M}(s) = \sqrt{|\lambda_{1,N,M}^2(s) + \lambda_{2,N,M}^2(s) - \lambda_{3,N,M}^2(s)|} = k, \quad k \in \mathbb{R}$$

şeklinde yazılabilir.  $N=3$  ve  $M=5,8,12$  için  $d_{3,5}$ ,  $d_{3,8}$  ve  $d_{3,12}$  uzaklık fonksiyonları aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}d_{3,5}(s) = & |21 - (0.888e - 15)s + (0.56371377999998751250e - 2)s^2 \\ & + (0.26019516472176070985e - 3)s^4 + (0.65834349656315850370e - 3)s^5 \\ & - (0.19020942695278654803e - 3)s^6 + (0.28966783511150235923e - 5)s^7 \\ & + (0.52706989452389605353e - 5)s^8 - (0.71617083898385541215e - 6)s^9 \\ & + (0.28843843190732970541e - 7)s^{10} - (0.44572560699999714170e - 2)s^3|^{(1/2)}\end{aligned}$$

$$d_{3,8}(s) = -21 - (0.18968872e-3)s^2 + (0.4739804915e-3)s^3 - (0.54070981092900314440e-3)s^4 \\ + (0.35369784496371166296e-3)s^5 - (0.14240486653671891073e-3)s^6 \\ + (0.35277201525021776086e-4)s^7 - (0.47980458961902092753e-5)s^8 \\ + (0.96389920417973554372e-7)s^9 + (0.97757523353061541653e-7)s^{10} \\ - (0.22770258666378944369e-7)s^{11} + (0.30747918572250226485e-8)s^{12} \\ - (0.29147796091384227709e-9)s^{13} + (0.19462373655734035996e-10)s^{14} \\ - (0.86390540917751739544e-12)s^{15} + (0.19707025976163691028e-13)s^{16} \big|^{(1/2)}$$

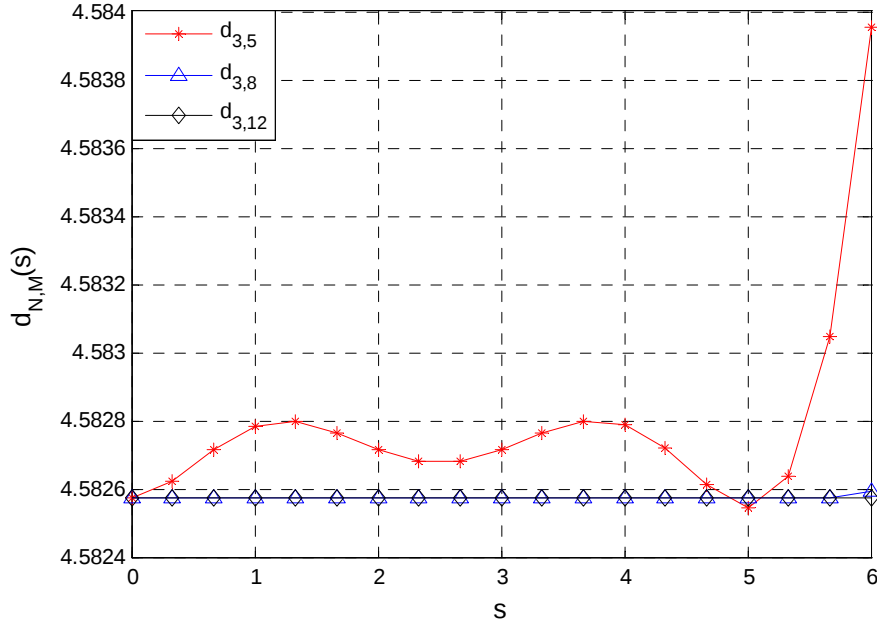
$$d_{3,12}(s) = -(0.888e-15)s + (0.9364399987512500000e-6)s^2 - (0.33995864999713828300e-5)s^3 \\ - (0.83058405280628663886e-11)s^{14} + (0.10325704652785964029e-11)s^{15} \\ - (0.10586604964217467354e-12)s^{16} + (0.89674222310292655825e-14)s^{17} \\ - (0.62155224539240182476e-15)s^{18} + (0.32859206819239345568e-16)s^{19} \\ - (0.11109752428460211714e-17)s^{20} + (0.20723538543555873101e-20)s^{21} \\ + (0.23146225172369494307e-20)s^{22} - (0.12785275068237675489e-21)s^{23} \\ + (0.29489134802363395049e-23)s^{24} + (0.56758388379267074780e-10)s^{13} \\ + 21 + (0.56266148868079048805e-5)s^4 - (0.53973199973672422470e-5)s^5 \\ + (0.32746438094436346066e-5)s^6 - (0.12954656955234828240e-5)s^7 \\ + (0.32847917941777210677e-6)s^8 - (0.47124448101558438022e-7)s^9 \\ + (0.94772195170918367462e-9)s^{10} + (0.11942643138306953039e-8)s^{11} \\ - (0.32355148006176127760e-9)s^{12} \big|^{(1/2)}$$

$d_{N,M}$  uzaklık fonksiyonunun  $N=3$  ve  $M=5,8,12$  değerleri için  $[0, 2\pi]$  aralığından seçilmiş bazı değerlerde nümerik sonuçları Tablo 6.4 de gösterilmiştir.

**Tablo 6.4.** Örnek 6.4'ün  $d_{N,M}$  uzaklık fonksiyonunun  $N=3$  ve  $M=5,8,12$  değerleri için sayısal sonuçları

| $s_i$    | $d_{3,5}(s_i)$ | $d_{3,8}(s_i)$ | $d_{3,12}(s_i)$ |
|----------|----------------|----------------|-----------------|
| 0        | 4.582575695    | 4.582575695    | 4.582575695     |
| $\pi/2$  | 4.582780924    | 4.582577128    | 4.582575698     |
| $\pi$    | 4.582738519    | 4.582577181    | 4.582575698     |
| $3\pi/2$ | 4.582604423    | 4.582577423    | 4.582575696     |
| $2\pi$   | 4.585227383    | 4.582663518    | 4.582575634     |

Tablo 6.4 deki değerler (6.11) ile karşılaştırıldığında  $M$  değeri arttıkça yaklaşık çözümlerin gerçek çözümlere oldukça yaklaştığı açık bir şekilde görülmektedir. Şimdi  $d_{N,M}$  uzaklık fonksiyonunun  $N=3$  ve  $M=5,8,12$  değerleri için grafiklerini çizelim.



**Şekil 6.7.** Örnek 6.4'ün uzaklık fonksiyonlarının karşılaştırılması

Ayrıca, Şekil 6.7 den de görülmektedir ki  $M$  değeri artırıldığında çözümün doğruluğu artmaktadır. Çünkü  $d_{N,M}$  fonksiyonu sabit kalmaktadır. Son olarak,  $N=3$  ve  $M=5,8,12$  değerleri için bulduğumuz  $\lambda_{i,N,M}$ , ( $i=1,2,3$ ) değerlerini, (6.5) ile verilen Bishop eğriliklerini ve  $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$  değerlerini (2.78) de yerlerine yazarsak,  $\alpha$  spacelike eğrisinin sabit genişlikli ( $d=\sqrt{21} \cong 4.582575695$ ) olduğu  $\alpha^*$  eğrisi belirlenebilir. O halde  $N=3$  ve  $M=5$  için  $\alpha_{3,5}^*$  eğrisi

$$\overrightarrow{\alpha_{3,5}^*}(s^*) = \left( \frac{-k_1 \lambda_{3,3,5} - k_2 \lambda_{2,3,5}}{\mu} \right) \overrightarrow{\alpha}''' + \left( \frac{k_2' \lambda_{2,3,5} + k_1' \lambda_{3,3,5}}{\mu} \right) \overrightarrow{\alpha}'' + \left[ \frac{(k_2^2 - k_1^2)(k_2 \lambda_{2,3,5} + k_1 \lambda_{3,3,5})}{\mu} + \lambda_{1,3,5} \right] \overrightarrow{\alpha}' + \overrightarrow{\alpha}$$

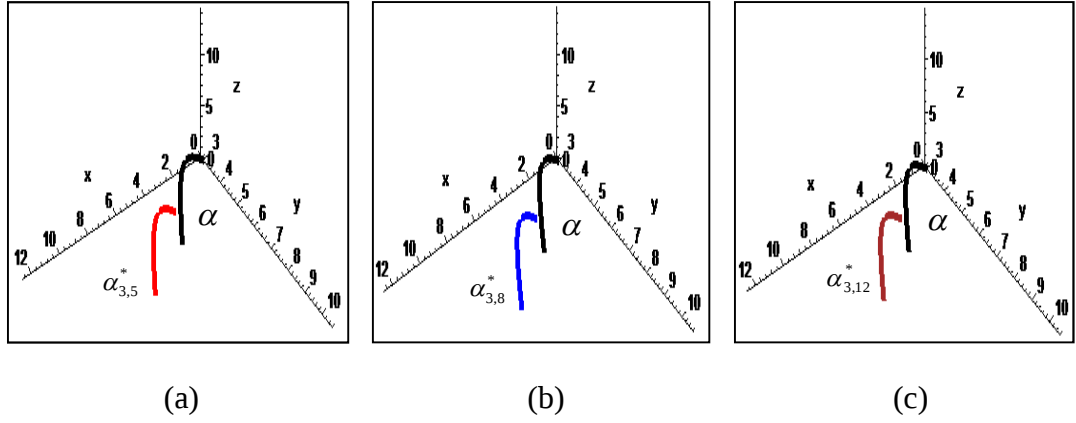
şeklinde ifade edilir. Benzer şekilde  $N=3$  ve  $M=8$  için  $\alpha_{3,8}^*$  eğrisi

$$\overrightarrow{\alpha_{3,8}^*}(s^*) = \left( \frac{-k_1 \lambda_{3,3,8} - k_2 \lambda_{2,3,8}}{\mu} \right) \overrightarrow{\alpha}''' + \left( \frac{k_2' \lambda_{2,3,8} + k_1' \lambda_{3,3,8}}{\mu} \right) \overrightarrow{\alpha}'' + \left[ \frac{(k_2^2 - k_1^2)(k_2 \lambda_{2,3,8} + k_1 \lambda_{3,3,8})}{\mu} + \lambda_{1,3,8} \right] \overrightarrow{\alpha}' + \overrightarrow{\alpha}$$

$N=3$  ve  $M=12$  için  $\alpha_{3,12}^*$  eğrisi

$$\overrightarrow{\alpha_{3,12}^*}(s^*) = \left( \frac{-k_1 \lambda_{3,3,12} - k_2 \lambda_{2,3,12}}{\mu} \right) \overrightarrow{\alpha}''' + \left( \frac{k_2' \lambda_{2,3,12} + k_1' \lambda_{3,3,12}}{\mu} \right) \overrightarrow{\alpha}'' + \left[ \frac{(k_2^2 - k_1^2)(k_2 \lambda_{2,3,12} + k_1 \lambda_{3,3,12})}{\mu} + \lambda_{1,3,12} \right] \overrightarrow{\alpha}' + \overrightarrow{\alpha}$$

şeklinde yazılabilir. Aşağıdaki grafik  $\alpha$  ile  $\alpha_{3,5}^*$ ,  $\alpha_{3,8}^*$  ve  $\alpha_{3,12}^*$  eğrilerinin grafiklerini göstermektedir.



**Şekil 6.8.** Örnek 6.4'ün  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_{3,5}^*$ ,  $\alpha_{3,8}^*$  ve  $\alpha_{3,12}^*$  eğrilerinin grafikleri

Şekil 7.8 (a),  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_{3,5}^*$  eğrisinin grafiği; (b),  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_{3,8}^*$  eğrisinin grafiği; (c),  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_{3,12}^*$  eğrisinin grafiğini göstermektedir.

#### 6.4. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Bishop Çatıya Göre Sabit Genişlikli Spacelike Eğrileri Karakterize Eden Diferensiyel Denklem Sistemlerinin Çözümü için Lucas Sıralama Yöntemi

Bu bölümde 3-boyutlu Minkowski uzayında Bishop çatıya göre sabit genişlikli spacelike eğri çiftlerini karakterize eden diferensiyel denklem sistemlerinin yaklaşık çözümleri için geliştirdiğimiz Lucas sıralama yöntemi kullanılacaktır. Bölüm 6.3 de verilen örnekleri bu kez de Lucas sıralama metoduyla çözerek, spacelike bir eğrinin sabit genişlikli olduğu eğriyi yaklaşık olarak bulmaya çalışalım.

Bölüm 2.2.2 de 3-boyutlu Minkowski uzayında Bishop çatıya göre sabit genişlikli spacelike eğri çiftlerini karakterize eden diferensiyel denklem sistemi (2.65) ile ayrıca,  $s$  yay parametrelili  $\alpha$  spacelike eğrisinin sabit genişlikli olduğu,  $\overline{\alpha^*}(s^*)$  konum vektörü ile verilen  $\alpha^*$  spacelike eğrisinin ise (2.78) bağıntısı ile belirlenebileceği gösterilmişti.

Şimdi (2.65) denklem sistemi ile (2.78) bağıntısını kullanılarak spacelike bir eğrinin sabit genişlikli olduğu eğriyi yaklaşık olarak belirlemeye çalışalım. Aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

**Örnek 6.5.** Örnek 6.3 de verilen (6.6) denklem sisteminin yaklaşık çözümlerini bu kez de, Bölüm 4.2.5 ve 4.2.6 da bahsedilen normal formdaki lineer denklem sistemlerinin çözümü için Lucas sıralama yöntemini kullanarak bulmaya çalışalım.  $\lambda_1(s)$ ,  $\lambda_2(s)$  ve  $\lambda_3(s)$  için başlangıç koşulları

$$\lambda_1(0)=3, \lambda_2(0)=2, \lambda_3(0)=1$$

olsun.  $N=3$  için  $\lambda_{1,3}(s)$ ,  $\lambda_{2,3}(s)$  ve  $\lambda_{3,3}(s)$  kesilmiş (sonlu) Lucas seri çözümleri

$$\lambda_{i,3}(s) = \sum_{n=0}^3 a_{i,n} L_n(s), \quad (i=1,2,3)$$

şeklindedir. Şimdi yaklaşık çözümlerin  $a_{i,n}$  ( $n=0,1,2,3$ ) katsayılarını hesaplayalım.

(4.96) dan, (6.6) sistemi için temel matris denklemi

$$\{\overline{\mathbf{SBD}} - \overline{\mathbf{PSD}}\} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

şeklinde yazılabilir. Bölüm 4.2.5 ve 4.2.6 da bahsedilen yöntem kullanılarak  $N=3$  için (6.6) probleminin yaklaşık çözümleri

$$\lambda_{1,3}(s) = 3.0000000000000001644 - 0.2400000000000000140s + (0.118469934610790622e-1)s^2 - (0.143906347487123780e-2)s^3$$

$$\lambda_{2,3}(s) = 2.0000000000000001416 - 0.35999999999999998099s + (0.124089497100107888e-1)s^2 - (0.103022526195724633e-2)s^3$$

$$\lambda_{3,3}(s) = 0.9999999999999999656 + (0.2374e-17)s + (0.279390707420637368e-1)s^2 - (0.997700682999586162e-3)s^3$$

olarak hesaplanır. Şimdi de düzeltilmiş Lucas polinom çözümlerini hesaplayalım.

$M=5$  için hata probleminin  $e_{1,3,5}(s)$ ,  $e_{2,3,5}(s)$  ve  $e_{3,3,5}(s)$  tahmini hata fonksiyonları

$$e_{1,3,5}(s) = -(0.7328e-20) - (0.16820e-18)s + (0.15565975128012658814e-3)s^2 - (0.16093354624398156620e-3)s^3 + (0.391648182149071367e-4)s^4 - (0.285545505012147324e-5)s^5$$

$$e_{2,3,5}(s) = (0.3588e-18) - (0.12028e-17)s + (0.18943526558278087576e-2)s^2 - (0.87928737463878048680e-3)s^3 + (0.957149196653340794e-4)s^4 + (0.156354546864962824e-5)s^5$$

$$e_{3,3,5}(s) = (0.244e-18) - (0.19462e-17)s + (0.872979124523147674e-3)s^2 - (0.54775552871712653620e-3)s^3 + (0.119820243525869272e-3)s^4 - (0.895059117974079024e-5)s^5$$

şeklinde hesaplanır ve böylece

$$\lambda_{1,3,5}(s) = 3 - 0.24s + (0.1200265321e-1)s^2 - (0.1599997021e-2)s^3 + (0.391648182149071367e-4)s^4 - (0.285545505012147324e-5)s^5$$

$$\begin{aligned}\lambda_{2,3,5}(s) &= 2 - 0.36s + (0.1430330237e-1)s^2 - (0.1909512637e-2)s^3 \\ &\quad + (0.957149196653340794e-4)s^4 + (0.156354546864962824e-5)s^5 \\ \lambda_{3,3,5}(s) &= 1 + (0.4278e-18)s + (0.2881204986e-1)s^2 - (0.1545456212e-2)s^3 \\ &\quad + (0.119820243525869272e-3)s^4 - (0.895059117974079024e-5)s^5\end{aligned}$$

düzeltilmiş Lucas polinom çözümleri elde edilir. Benzer şekilde  $M=8$  için

$\lambda_{1,3,8}(s)$ ,  $\lambda_{2,3,8}(s)$  ve  $\lambda_{3,3,8}(s)$  çözümleri

$$\begin{aligned}\lambda_{1,3,8}(s) &= 3 - 0.24s + (0.1199999222e-1)s^2 - (0.1599984337e-2)s^3 \\ &\quad + (0.39985665096033986043e-4)s^4 - (0.31926837723853974257e-5)s^5 \\ &\quad + (0.51125121323679365350e-7)s^6 - (0.265474827440006082e-8)s^7 \\ &\quad - (0.375422281387518710e-12)s^8 \\ \lambda_{2,3,8}(s) &= 2 - 0.36s + (0.1440006840e-1)s^2 - (0.2016144390e-2)s^3 \\ &\quad + (0.14028992415325916897e-3)s^4 - (0.66737500674790190095e-5)s^5 \\ &\quad + (0.62009319497854453872e-6)s^6 - (0.182140175617380585e-7)s^7 \\ &\quad + (0.135378409022336634e-8)s^8 \\ \lambda_{3,3,8}(s) &= 1 - (0.33566403e-17)s + (0.2879978167e-1)s^2 - (0.1535520855e-2)s^3 \\ &\quad + (0.11858208476804165249e-3)s^4 - (0.98370644603114900703e-5)s^5 \\ &\quad + (0.27132052877468975108e-6)s^6 - (0.181082634810400629e-7)s^7 \\ &\quad - (0.542761804901356615e-9)s^8\end{aligned}$$

ve  $M=12$  için  $\lambda_{1,3,12}(s)$ ,  $\lambda_{2,3,12}(s)$  ve  $\lambda_{3,3,12}(s)$  çözümleri

$$\begin{aligned}\lambda_{1,3,12}(s) &= 3 - 0.24s + (0.1200000213e-1)s^2 - (0.1600006280e-2)s^3 \\ &\quad + (0.40007989033036299518e-4)s^4 - (0.3205159633343687925e-5)s^5 \\ &\quad + (0.54869213108772501487e-7)s^6 - (0.30031136406378551744e-8)s^7 \\ &\quad - (0.15406570162062899843e-9)s^8 + (0.64756218829999972655e-10)s^9 \\ &\quad - (0.11146449221863870452e-10)s^{10} + (0.962367044516319605e-12)s^{11} \\ &\quad - (0.341428735671940710e-13)s^{12} \\ \lambda_{2,3,12}(s) &= 2 - 0.36s + (0.1439998842e-1)s^2 - (0.2015959458e-2)s^3 \\ &\quad - (0.65465773734096565467e-5)s^5 + (0.56322026457587102976e-6)s^6 \\ &\quad + (0.8217378932431681842e-9)s^7 - (0.34654155170366735142e-8)s^8 \\ &\quad + (0.87749430238463071356e-9)s^9 - (0.10520163396707396149e-9)s^{10} \\ &\quad + (0.726591974348176796e-11)s^{11} - (0.215631609946456374e-12)s^{12} \\ &\quad + (0.14009280276378765566e-3)s^4 \\ \lambda_{3,3,12}(s) &= 1.000000000 + (0.1299094549e-14)s + (0.2880000137e-1)s^2 - (0.1536004047e-2)s^3 \\ &\quad + (0.11904468826689763095e-3)s^4 - (0.10078439437293377548e-4)s^5 \\ &\quad + (0.34420961695530258433e-6)s^6 - (0.30476855805398702609e-7)s^7 \\ &\quad + (0.39156842394349476919e-9)s^8 + (0.30593571392982465949e-10)s^9 \\ &\quad - (0.11939358784085760158e-10)s^{10} + (0.982389658517330959e-12)s^{11} \\ &\quad - (0.352290027708864965e-13)s^{12}\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Şimdi de  $N=3$  ve  $M=5,8,12$  için  $d_{3,5}$ ,  $d_{3,8}$  ve  $d_{3,12}$  uzaklık fonksiyonlarını hesaplayalım.

$$\begin{aligned} d_{3,5}(s) = & 6 + (0.8556000000e-18)s + (0.4268095000e-3)s^2 - (0.5157398364e-3)s^3 \\ & + (0.2545326316e-3)s^4 - (0.6401173350e-4)s^5 + (0.8905176270e-5)s^6 \\ & - (0.7591869264e-6)s^7 + (0.4950358019e-7)s^8 - (0.2667900043e-8)s^9 \\ & + (0.8582203158e-10)s^{10} \big|^{(1/2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{3,8}(s) = & -6 + (0.6713280600e-17)s + (0.7569400000e-6)s^2 - (0.1682810400e-5)s^3 \\ & - (0.1180485734e-8)s^9 + (0.1227263308e-9)s^{10} - (0.1034269139e-10)s^{11} \\ & + (0.6867809216e-12)s^{12} - (0.4124143704e-13)s^{13} + (0.1970301372e-14)s^{14} \\ & - (0.6897463523e-16)s^{15} + (0.1538140845e-17)s^{16} + (0.1647747946e-5)s^4 \\ & - (0.9006991601e-6)s^5 + (0.3010942234e-6)s^6 - (0.6517411539e-7)s^7 \\ & + (0.9851211499e-8)s^8 \big|^{(1/2)} \end{aligned}$$

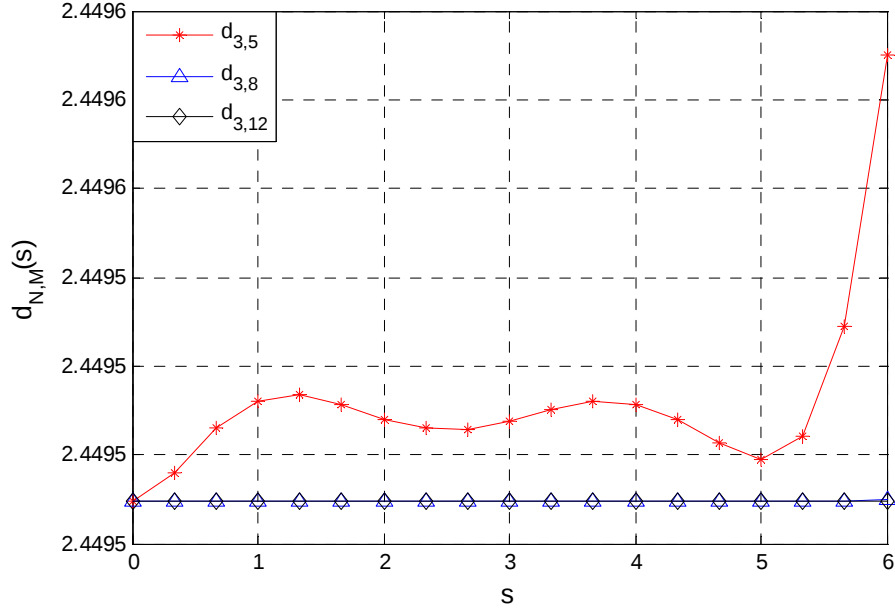
$$\begin{aligned} d_{3,12}(s) = & -(0.2598189098e-14)s - (0.6184000000e-7)s^2 + (0.2173019999e-6)s^3 \\ & - (0.3587678527e-6)s^4 + (0.3529530780e-6)s^5 - (0.2274271641e-6)s^6 \\ & + (0.1008681760e-6)s^7 - (0.3164476926e-7)s^8 + (0.7116523201e-8)s^9 \\ & - (0.1153498187e-8)s^{10} + (0.1359995605e-9)s^{11} - (0.1216856367e-10)s^{12} \\ & - 6 + (0.1362622024e-17)s^{18} - (0.2359919955e-18)s^{19} + (0.2487902530e-19)s^{20} \\ & - (0.1855714632e-20)s^{21} + (0.9466957833e-22)s^{22} - (0.2998590775e-23)s^{23} \\ & + (0.4409017276e-25)s^{24} + (0.9281701077e-12)s^{13} - (0.6785193695e-13)s^{14} \\ & + (0.4419665935e-14)s^{15} - (0.2119930593e-15)s^{16} + (0.2243683526e-17)s^{17} \big|^{(1/2)} \end{aligned}$$

$d_{N,M}$  uzaklık fonksiyonunun  $N=3$  ve  $M=5,8,12$  değerleri için  $[0, 2\pi]$  aralığından seçilmiş bazı değerlerde nümerik sonuçları Tablo 6.5 de gösterilmiştir.

**Tablo 6.5.** Örnek 6.5'in  $d_{N,M}$  uzaklık fonksiyonunun  $N=3$  ve  $M=5,8,12$  değerleri için sayısal sonuçları

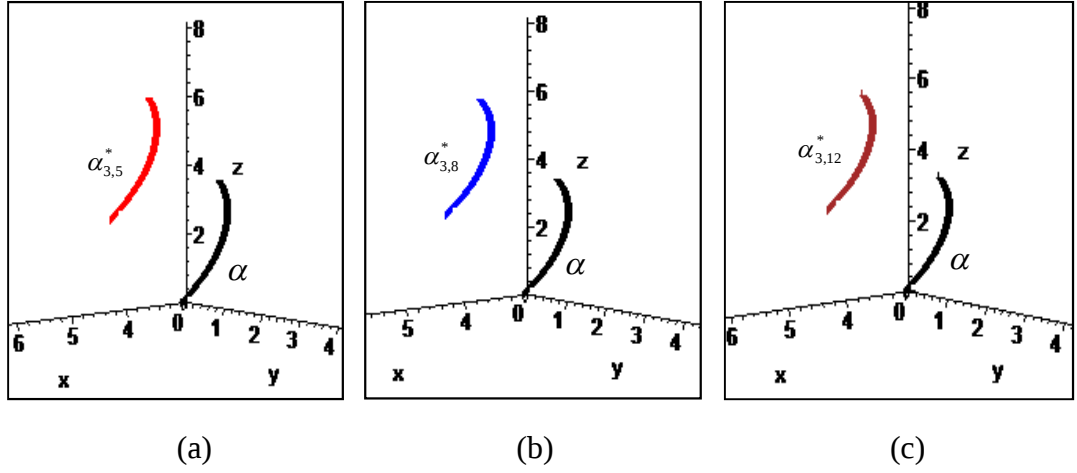
| $s_i$    | $d_{3,5}(s_i)$ | $d_{3,8}(s_i)$ | $d_{3,12}(s_i)$ |
|----------|----------------|----------------|-----------------|
| 0        | 2.449489743    | 2.449489743    | 2.449489743     |
| $\pi/2$  | 2.449512037    | 2.449489732    | 2.449489743     |
| $\pi$    | 2.449508687    | 2.449489731    | 2.449489743     |
| $3\pi/2$ | 2.449501590    | 2.449489733    | 2.449489743     |
| $2\pi$   | 2.449686299    | 2.449490262    | 2.449489727     |

Tablo 6.5 deki değerler (6.7) ile karşılaştırıldığında  $M$  değeri arttıkça gerçek çözüme oldukça yaklaşıldığı açık bir şekilde görülmektedir. Şimdi  $d_{N,M}$  uzaklık fonksiyonunun  $N=3$  ve  $M=5,8,12$  değerleri için grafiklerini çizelim.



**Şekil 6.9.** Örnek 6.5'in uzaklık fonksiyonlarının karşılaştırılması

Ayrıca Şekil 6.9 dan görülmektedir ki  $M$  değeri artırıldığında çözümün doğruluğu artmaktadır. Çünkü  $d_{N,M}$  fonksiyonu sabit kalmaktadır. Buradan Lucas sıralama metodunun bu tip denklem sistemlerinin çözümünde oldukça etkili olduğu söylenebilir. Son olarak, Lucas sıralama yöntemiyle  $N=3$  ve  $M=5,8,12$  değerleri için bulduğumuz  $\lambda_{i,N,M}$ ,  $(i=1,2,3)$  değerlerini, (6.5) ile verilen Bishop eğriliklerini ve  $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$  değerlerini (2.78)'de yerlerine yazarsak,  $\alpha$  eğrisinin sabit genişlikli ( $d=\sqrt{6} \cong 2.449489743$ ) olduğu  $\alpha_{3,5}^*$ ,  $\alpha_{3,8}^*$  ve  $\alpha_{3,12}^*$  eğrileri elde edilir. Aşağıdaki grafik  $\alpha$  ile  $\alpha_{3,5}^*$ ,  $\alpha_{3,8}^*$  ve  $\alpha_{3,12}^*$  eğrilerinin grafiklerini göstermektedir.



**Şekil 6.10.** Örnek 6.5'in  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_{3,5}^*$ ,  $\alpha_{3,8}^*$  ve  $\alpha_{3,12}^*$  eğrilerinin grafikleri

Şekil 6.10 (a),  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_{3,5}^*$  eğrisinin grafiği; (b),  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_{3,8}^*$  eğrisinin grafiği; (c),  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_{3,12}^*$  eğrisinin grafiğini göstermektedir.

**Örnek 6.6.** Örnek 6.4 de verilen (6.10) denklem sisteminin yaklaşık çözümlerini bu kez de, Bölüm 4.2.5 ve 4.2.6 da bahsedilen normal formdaki lineer denklem sistemlerinin çözümü için Lucas sıralama yöntemini kullanarak bulmaya çalışalım.  $\lambda_1(s)$ ,  $\lambda_2(s)$  ve  $\lambda_3(s)$  için başlangıç koşulları

$$\lambda_1(0) = 4, \lambda_2(0) = 3, \lambda_3(0) = 2$$

olsun.  $N = 3$  için  $\lambda_{1,3}(s)$ ,  $\lambda_{2,3}(s)$  ve  $\lambda_{3,3}(s)$  kesilmiş (sonlu) Lucas seri çözümleri

$$\lambda_{i,3}(s) = \sum_{n=0}^3 a_{i,n} L_n(s), \quad (i = 1, 2, 3)$$

şeklindedir. Şimdi yaklaşık çözümlerin  $a_{i,n}$  ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) katsayılarını hesaplayalım.

(4.96) dan, (6.10) sistemi için temel matris denklemi

$$\{\overline{\mathbf{SBD}} - \overline{\mathbf{PSD}}\} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

şeklinde yazılabilir. Bölüm 4.2.5 ve 4.2.6 da bahsedilen yöntem kullanılarak  $N = 3$  için (6.10) probleminin yaklaşık çözümleri

$$\begin{aligned} \lambda_{1,3}(s) = & 3.99999999999999976 + 0.56249999999999979183s - 0.118159582260970022s^2 \\ & + (0.755696025590118278e - 3)s^3 \end{aligned}$$

$$\lambda_{2,3}(s) = 2.999999999999998886 - 0.7499999999999977719s - (0.490684516041400357e - 1)s^2 \\ - (0.863829547989536373e - 2)s^3$$

$$\lambda_{3,3}(s) = 1.99999999999999944 - (0.1738e - 16)s - 0.126743095627038588s^2 \\ - (0.635027397197632586e - 2)s^3$$

olarak hesaplanır. Şimdi de düzeltilmiş Lucas polinom çözümlerini hesaplayalım.

$M = 5$  için hata probleminin  $e_{1,3,5}(s)$ ,  $e_{2,3,5}(s)$  ve  $e_{3,3,5}(s)$  tahmini hata fonksiyonları

$$e_{1,3,5}(s) = (0.115792e - 15) - (0.48278e - 16)s - (0.10592814515296624696e - 1)s^2 \\ + (0.48936108400598793220e - 2)s^3 - (0.574182640827129764e - 3)s^4 \\ - (0.398092377342915606e - 6)s^5$$

$$e_{2,3,5}(s) = (0.110800e - 15) + (0.68880e - 16)s - (0.582341769543054474e - 2)s^2 \\ + (0.6582764247904182580e - 2)s^3 - (0.220507268882497338e - 2)s^4 \\ + (0.229237733244132026e - 3)s^5$$

$$e_{3,3,5}(s) = -(0.5208e - 17) + (0.878e - 18)s + (0.5217776113941741824e - 2)s^2 \\ + (0.52744261245124026e - 4)s^3 - (0.955857908655742724e - 3)s^4 \\ + (0.153968352688833854e - 3)s^5$$

şeklinde hesaplanır ve böylece

$$\lambda_{1,3,5}(s) = 4 + 0.5625s - 0.1287523968s^2 + (0.5649306866e - 2)s^3 - (0.574182640827129764e - 3)s^4 \\ - (0.398092377342915606e - 6)s^5$$

$$\lambda_{2,3,5}(s) = 3 - 0.75s - (0.5489186930e - 1)s^2 - (0.2055531232e - 2)s^3 \\ - (0.220507268882497338e - 2)s^4 + (0.229237733244132026e - 3)s^5$$

$$\lambda_{3,3,5}(s) = 2 - (0.16502e - 16)s - 0.1215253195s^2 - (0.6297529711e - 2)s^3 \\ - (0.955857908655742724e - 3)s^4 + (0.153968352688833854e - 3)s^5$$

düzeltilmiş Lucas polinom çözümleri elde edilir. Benzer şekilde  $M = 8$  için

$\lambda_{1,3,8}(s)$ ,  $\lambda_{2,3,8}(s)$  ve  $\lambda_{3,3,8}(s)$  çözümleri

$$\lambda_{1,3,8}(s) = 4 + 0.5625s - 0.1289037535s^2 + (0.5856029575e - 2)s^3 - (0.470011391807362240e - 9)s^8 \\ - (0.66916631573841903372e - 3)s^4 + (0.17485431039698528570e - 4)s^5 \\ - (0.12237102764843514779e - 5)s^6 + (0.708041263169429574e - 8)s^7$$

$$\lambda_{2,3,8}(s) = 3 - 0.75s - (0.5268482008e - 1)s^2 - (0.4258537654e - 2)s^3 \\ - (0.14598850087267640890e - 2)s^4 + (0.14909012722202518803e - 3)s^5 \\ - (0.862242004613312720e - 6)s^6 - (0.532022665405169424e - 6)s^7 \\ + (0.152358000011123310e - 6)s^8$$

$$\lambda_{3,3,8}(s) = 2 - (0.62553754e - 15)s - 0.1171555968s^2 - (0.1105462535e - 1)s^3 \\ + (0.207171926315852148e - 6)s^8 + (0.99723085884447246216e - 3)s^4 \\ - (0.20652320037504410154e - 3)s^5 + (0.32224353129523393384e - 4)s^6 \\ - (0.247627152401833822e - 5)s^7$$

ve  $M=12$  için  $\lambda_{1,3,12}(s)$ ,  $\lambda_{2,3,12}(s)$  ve  $\lambda_{3,3,12}(s)$  çözümleri

$$\begin{aligned}\lambda_{1,3,12}(s) = & 4 + 0.5625s - 0.1289061713s^2 + (0.5859096680e - 2)s^3 \\ & + (0.17888738930352518670e - 4)s^5 - (0.11469606207620394099e - 5)s^6 \\ & - (0.72447154583784520248e - 7)s^7 + (0.24980193429140654508e - 7)s^8 \\ & - (0.46749327793118677120e - 8)s^9 + (0.52933788985384676497e - 9)s^{10} \\ & - (0.345395643867698520e - 10)s^{11} + (0.987831432711629414e - 12)s^{12} \\ & - (0.67093700085342017043e - 3)s^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{2,3,12}(s) = & 3 - 0.75s - (0.5273431986e - 1)s^2 - (0.4150600864e - 2)s^3 \\ & - (0.15617552435357123337e - 2)s^4 + (0.20124123690092956175e - 3)s^5 \\ & - (0.16262599695236356647e - 4)s^6 + (0.20478090290819656178e - 5)s^7 \\ & - (0.63562805729829601050e - 7)s^8 + (0.43941707990508476487e - 8)s^9 \\ & + (0.45247908437631040080e - 9)s^{10} - (0.342098730768307083e - 10)s^{11} \\ & + (0.219103625672695240e - 11)s^{12}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{3,3,12}(s) = & 2 - (0.3590928838e - 13)s - 0.1171874940)s^2 - (0.1098634877e - 1)s^3 \\ & + (0.93463293015169408968e - 3)s^4 - (0.17598279613954829942e - 3)s^5 \\ & + (0.23960078975909630494e - 4)s^6 - (0.13343874157086964634e - 5)s^7 \\ & + (0.16281679834302081948e - 6)s^8 - (0.65276232722751405622e - 8)s^9 \\ & + (0.70066580773551859468e - 9)s^{10} - (0.268494109188560302e - 10)s^{11} \\ & + (0.168152929639306764e - 11)s^{12}\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Şimdi de  $N=3$  ve  $M=5,8,12$  için  $d_{3,5}$ ,  $d_{3,8}$  ve  $d_{3,12}$  uzaklık fonksiyonlarını hesaplayalım.

$$\begin{aligned}d_{3,5}(s) = & 21 + (0.66008e - 16)s + (0.5637137800e - 2)s^2 - (0.4457256070e - 2)s^3 \\ & + (0.2601951647e - 3)s^4 + (0.6583434966e - 3)s^5 - (0.1902094270e - 3)s^6 \\ & + (0.2896678351e - 5)s^7 + (0.5270698945e - 5)s^8 - (0.7161708390e - 6)s^9 \\ & + (0.2884384319e - 7)s^{10} \big|^{(1/2)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_{3,8}(s) = & -21 - (0.2502150160e - 14)s - (0.1896887200e - 3)s^2 + (0.4739804915e - 3)s^3 \\ & + (0.9638992042e - 7)s^9 + (0.9775752335e - 7)s^{10} - (0.2277025867e - 7)s^{11} \\ & + (0.1970702598e - 13)s^{16} + (0.3074791857e - 8)s^{12} - (0.2914779609e - 9)s^{13} \\ & + (0.1946237366e - 10)s^{14} - (0.8639054092e - 12)s^{15} - (0.4798045896e - 5)s^8 \\ & - (0.5407098109e - 3)s^4 + (0.3536978450e - 3)s^5 - (0.1424048665e - 3)s^6 \\ & + (0.3527720152e - 4)s^7 \big|^{(1/2)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{3,12}(s) = & (0.1436371535e-12)s + (0.93644e-6)s^2 - (0.3399586508e-5)s^3 \\
& - (0.5397317826e-5)s^5 + (0.3274641873e-5)s^6 - (0.1295464986e-5)s^7 \\
& + (0.3284790544e-6)s^8 - (0.4712444679e-7)s^9 + (0.9477253102e-9)s^{10} \\
& + (0.1194263082e-8)s^{11} - (0.3235512306e-9)s^{12} + (0.5675836807e-10)s^{13} \\
& - (0.8305838241e-11)s^{14} + (0.1032570255e-11)s^{15} - (0.1058660348e-12)s^{16} \\
& + (0.8967421338e-14)s^{17} - (0.6215522815e-15)s^{18} + (0.3285921837e-16)s^{19} \\
& - (0.1110976913e-17)s^{20} + (0.2072487550e-20)s^{21} + (0.2314615263e-20)s^{22} \\
& - (0.1278525371e-21)s^{23} + (0.2948910043e-23)s^{24} + 21 + (0.5626612672e-5)s^4 \big|^{(1/2)}
\end{aligned}$$

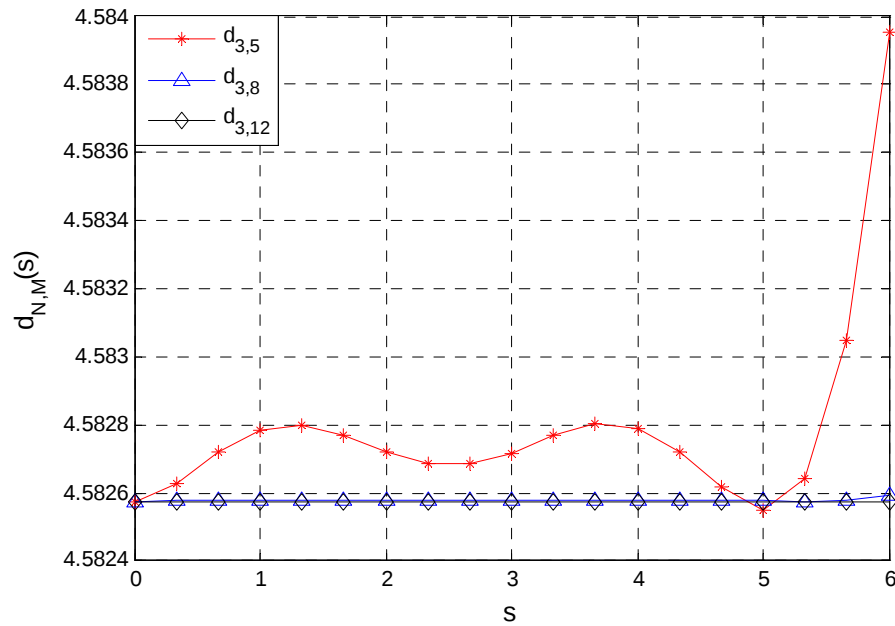
$d_{N,M}$  uzaklık fonksiyonunun  $N=3$  ve  $M=5,8,12$  değerleri için  $[0,2\pi]$  aralığından seçilmiş bazı değerlerde nümerik sonuçları Tablo 6.6 da gösterilmiştir.

**Tablo 6.6.** Örnek 6.6'nın  $d_{N,M}$  uzaklık fonksiyonunun

$N=3$  ve  $M=5,8,12$  değerleri için sayısal sonuçları

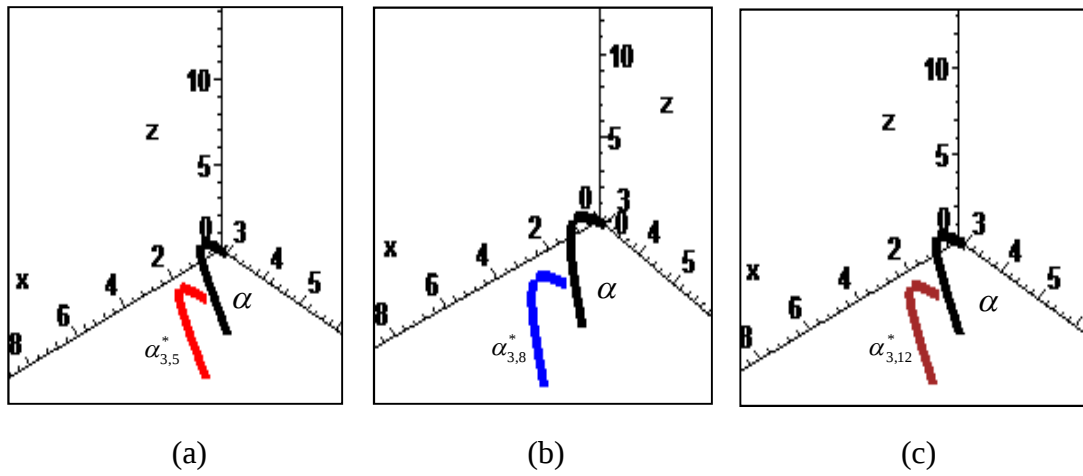
| $s_i$    | $d_{3,5}(s_i)$ | $d_{3,8}(s_i)$ | $d_{3,12}(s_i)$ |
|----------|----------------|----------------|-----------------|
| 0        | 4.582575695    | 4.582575695    | 4.582575695     |
| $\pi/2$  | 4.582780924    | 4.582577128    | 4.582575698     |
| $\pi$    | 4.582738519    | 4.582577181    | 4.582575698     |
| $3\pi/2$ | 4.582604423    | 4.582577423    | 4.582575696     |
| $2\pi$   | 4.585227382    | 4.582663518    | 4.582575648     |

Tablo 6.6 deki değerler (6.11) ile karşılaştırıldığında  $M$  değeri arttıkça gerçek çözüme oldukça yaklaşıldığı açık bir şekilde görülmektedir. Şimdi  $d_{N,M}$  uzaklık fonksiyonunun  $N=3$  ve  $M=5,8,12$  değerleri için grafiklerini çizelim.



**Şekil 6.11.** Örnek 6.6'nın uzaklık fonksiyonlarının karşılaştırılması

Ayrıca Şekil 6.11 den görülmektedir ki  $M$  değeri artırıldığında çözümün doğruluğu artmaktadır. Çünkü  $d_{N,M}$  fonksiyonu sabit kalmaktadır. Buradan Lucas sıralama metodunun bu tip denklem sistemlerinin çözümünde oldukça etkili olduğu söylenebilir. Son olarak, Lucas sıralama yöntemiyle  $N=3$  ve  $M=5,8,12$  değerleri için bulduğumuz  $\lambda_{i,N,M}$ ,  $(i=1,2,3)$  değerlerini, (6.9) ile verilen Bishop eğriliklerini ve  $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$  değerlerini (2.78)'de yerlerine yazarsak,  $\alpha$  eğrisinin sabit genişlikli ( $d = \sqrt{21} \cong 4.582575695$ ) olduğu  $\alpha_{3,5}^*$ ,  $\alpha_{3,8}^*$  ve  $\alpha_{3,12}^*$  eğrileri elde edilir. Aşağıdaki grafik  $\alpha$  ile  $\alpha_{3,5}^*$ ,  $\alpha_{3,8}^*$  ve  $\alpha_{3,12}^*$  eğrilerinin grafiklerini göstermektedir.



Şekil 6.12. Örnek 6.6'nın  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_{3,5}^*$ ,  $\alpha_{3,8}^*$  ve  $\alpha_{3,12}^*$  eğrilerinin grafikleri

Şekil 6.12 (a),  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_{3,5}^*$  eğrisinin grafiği; (b),  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_{3,8}^*$  eğrisinin grafiği; (c),  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_{3,12}^*$  eğrisinin grafiğini göstermektedir.

## 7. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA KÜRESEL EĞRİLERİ KARAKTERİZE EDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

### 7.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Küresel Eğrileri Karakterize Eden Diferensiyel Denklemlerin Çözümü için Taylor Sıralama Yöntemi

3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı olmayan, regüler küresel eğrileri karakterize eden ve eğrinin konum vektörü ve türevlerine bağlı 3. mertebeden değişken katsayılı lineer diferensiyel denklemi Bölüm 3.1 de (3.18) ile verilmişti. (3.18) denklemi incelendiğinde, eğer küresel bir eğrinin hızı, eğriliği ve burulması verilirse ya da bilinirse, küresel eğrinin denklemi yaklaşık çözüm metodları vasıtasıyla belirlenebilmektedir. Bu bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayında küresel eğrileri karakterize eden lineer diferensiyel denkleminin çözümü için Taylor sıralama metodu kullanılacaktır. Bu amaçla aşağıda verilen küresel eğri örneğini inceleyelim.

**Örnek 7.1.**  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow E^3$  tanımlı

$$\alpha(t) = \left( \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos(t), \sin\left(\frac{t}{2}\right) \sin(t), \cos\left(\frac{t}{2}\right) \right)$$

*Clelies* eğrisini göz önüne alalım [64].  $\alpha$  eğrisi birim küre üzerinde yatan, birim hızlı olmayan regüler bir eğridir.  $\alpha$  eğrisinin hızı, eğriliği ve burulması sırasıyla aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$v(t) = \|\alpha'(t)\| = \frac{1}{2} \sqrt{-4\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) + 5} \quad (7.1)$$

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{48\cos^4\left(\frac{t}{2}\right) - 156\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) + 125}}{\left(-4\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) + 5\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (7.2)$$

$$\tau(t) = \frac{12\left(2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - 5\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{48\cos^4\left(\frac{t}{2}\right) - 156\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) + 125}. \quad (7.3)$$

O halde  $\alpha$  küresel eğrisini karakterize eden (3.18) lineer diferensiyel denklemi  $\bar{m} = 0$  için

$$p_3(t)\alpha'''(t) + p_2(t)\alpha''(t) + p_1(t)\alpha'(t) + p_0(t)\alpha(t) = 0 \quad (7.4)$$

şeklinde yazılır. Burada

$$p_3(t) = \frac{6 \cos\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right) \left(4 \cos^4\left(\frac{t}{2}\right) - 16 \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) + 15\right)}{64 \cos^6\left(\frac{t}{2}\right) - 240 \cos^4\left(\frac{t}{2}\right) + 300 \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - 125}$$

$$p_2(t) = \frac{9 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \left(4 \cos^4\left(\frac{t}{2}\right) - 12 \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) + 5\right)}{64 \cos^6\left(\frac{t}{2}\right) - 240 \cos^4\left(\frac{t}{2}\right) + 300 \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - 125}$$

$$p_1(t) = \frac{3 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right) \left(4 \cos^4\left(\frac{t}{2}\right) - 40 \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) + 75\right)}{2 \left(64 \cos^6\left(\frac{t}{2}\right) - 240 \cos^4\left(\frac{t}{2}\right) + 300 \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - 125\right)}$$

$$p_0(t) = -\frac{9}{4} \frac{4 \cos^6\left(\frac{t}{2}\right) - 24 \cos^4\left(\frac{t}{2}\right) + 45 \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - 25}{64 \cos^6\left(\frac{t}{2}\right) - 240 \cos^4\left(\frac{t}{2}\right) + 300 \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - 125}$$

şeklinde. Şimdi  $\alpha$  eğrisini  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$  olarak düşünelim. O halde, (7.4) eşitliği  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$  ve  $\alpha_3(t)$  için aşağıdaki gibi sağlanır.

$$p_3(t)\alpha_1'''(t) + p_2(t)\alpha_1''(t) + p_1(t)\alpha_1'(t) + p_0(t)\alpha_1(t) = 0 \quad (7.5)$$

$$p_3(t)\alpha_2'''(t) + p_2(t)\alpha_2''(t) + p_1(t)\alpha_2'(t) + p_0(t)\alpha_2(t) = 0 \quad (7.6)$$

$$p_3(t)\alpha_3'''(t) + p_2(t)\alpha_3''(t) + p_1(t)\alpha_3'(t) + p_0(t)\alpha_3(t) = 0. \quad (7.7)$$

Kabul edelim ki  $\alpha$  küresel eğrisinin parametrik denklemi bilinmesin. Ancak hızı, eğriliği ve burulması biliniyor olsun. Bölüm 4.1.1 ve 4.1.2 de verilen Taylor sıralama metodunu kullanarak, ve (7.5), (7.6) ve (7.7) denklemleri yardımıyla  $\alpha$  eğrisinin parametrik denklemini bulalım. Sonra, elde edilen yaklaşık denklemi,  $\alpha$  eğrisinin gerçek denklemiyle karşılaştırarak, yaklaşık çözümün gerçek çözüme ne kadar yakın olduğunu tablo ve grafikler yardımıyla gösterelim.

(7.5), (7.6) ve (7.7) lineer diferensiyel denklemlerinin yaklaşık çözümlerini Bölüm 4.1.1 ve 4.1.2 de bahsedilen Taylor sıralama metodunu kullanarak bulmaya çalışalım.  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$  ve  $\alpha_3(t)$  için başlangıç koşullarını

$$\alpha_1(0) = 0, \alpha_1'(0) = 0,5 \alpha_1''(0) = 0$$

$$\alpha_2(0) = 0, \alpha_2'(0) = 0, \alpha_2''(0) = 1$$

$$\alpha_3(0) = 1, \alpha_3'(0) = 0, \alpha_3''(0) = -0,25$$

olarak kabul edelim.  $N = 4$  için  $\alpha_{1,4}(t)$ ,  $\alpha_{2,4}(t)$  ve  $\alpha_{3,4}(t)$  kesilmiş (sonlu) Taylor seri çözümleri

$$\alpha_{i,4}(t) = \sum_{n=0}^4 a_{i,n} t^n, \quad (i=1,2,3)$$

şeklindedir. Şimdi yaklaşık çözümlerin  $a_{i,n}$ ,  $(n=0,1,2,3,4)$  Taylor katsayılarını hesaplayalım.  $a=0$ ,  $b=2\pi$  ve  $N=4$  için sıralama noktalarının kümesi

$$\left\{ t_0=0, t_1=\frac{\pi}{2}, t_2=\pi, t_3=\frac{3\pi}{2}, t_4=2\pi \right\}$$

olur. (4.9) dan (7.5), (7.6) ve (7.7) denklemleri için temel matris denklemi

$$\left\{ \sum_{k=0}^3 \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

şeklinde yazılabilir. Bölüm 4.1.1 ve 4.1.2 de bahsedilen yöntem kullanılarak  $N=4$  için (7.5), (7.6) ve (7.7) diferensiyel denklemlerinin Taylor polinom çözümleri

$$\alpha_{1,4}(t) = 0.5t - 0.1033282130t^3 + (0.1145284738e-1)t^4$$

$$\alpha_{2,4}(t) = 0.5t^2 - 0.2389089492t^3 + (0.2231474722e-1)t^4$$

$$\alpha_{3,4}(t) = 1 - 0.125t^2 + (0.402468024e-2)t^3 + (0.1160878758e-2)t^4$$

olarak hesaplanır. Şimdi düzeltilmiş Taylor polinom çözümlerini hesaplamak için

$$p_3(t)e_{1,4}'''(t) + p_2(t)e_{1,4}''(t) + p_1(t)e_{1,4}'(t) + p_0(t)e_{1,4}(t) = -R_{1,4}$$

$$p_3(t)e_{2,4}'''(t) + p_2(t)e_{2,4}''(t) + p_1(t)e_{2,4}'(t) + p_0(t)e_{2,4}(t) = -R_{2,4}$$

$$p_3(t)e_{3,4}'''(t) + p_2(t)e_{3,4}''(t) + p_1(t)e_{3,4}'(t) + p_0(t)e_{3,4}(t) = -R_{3,4}$$

hata problemlerini ele alalım. Burada

$$R_{1,4}(t) = p_3(t)\alpha_{1,4}'''(t) + p_2(t)\alpha_{1,4}''(t) + p_1(t)\alpha_{1,4}'(t) + p_0(t)\alpha_{1,4}(t) \quad (7.8)$$

$$R_{2,4}(t) = p_3(t)\alpha_{2,4}'''(t) + p_2(t)\alpha_{2,4}''(t) + p_1(t)\alpha_{2,4}'(t) + p_0(t)\alpha_{2,4}(t) \quad (7.9)$$

$$R_{3,4}(t) = p_3(t)\alpha_{3,4}'''(t) + p_2(t)\alpha_{3,4}''(t) + p_1(t)\alpha_{3,4}'(t) + p_0(t)\alpha_{3,4}(t) \quad (7.10)$$

şeklinde tanımlıdır. Taylor metodu kullanılarak  $M=5$  için (7.8), (7.9) ve (7.10) hata problemlerinin  $e_{1,4}(t)$ ,  $e_{2,4}(t)$  ve  $e_{3,4}(t)$  e göre  $e_{1,4,5}(t)$ ,  $e_{2,4,5}(t)$  ve  $e_{3,4,5}(t)$  tahmini hata fonksiyonları

$$e_{1,4,5}(t) = -0.335907497173856t^3 + 0.147313131409366t^4 - (0.145247901898805e-1)t^5$$

$$e_{2,4,5}(t) = -0.238494768939145t^3 + 0.107194187070776t^4 - (0.106643265202803e-1)t^5$$

$$e_{3,4,5}(t) = -(0.534227066634374e-2)t^3 + (0.236392621307804e-2)t^4 - (0.227723623348449e-3)t^5$$

şeklinde hesaplanır ve böylece

$$\alpha_{1,4,5}(t) = 0.5t - 0.439235710173856t^3 + 0.158765978789366t^4 - (0.145247901898805e-1)t^5$$

$$\alpha_{2,4,5}(t) = 0.5t^2 - 0.477403732659852t^3 + 0.129508940184441t^4 - (0.106643270822346e-1)t^5$$

$$\alpha_{3,4,5}(t) = 1 - 0.125t^2 - (0.131759042634374e - 2)t^3 + (0.352480497107804e - 2)t^4 \\ - (0.227723623348449e - 3)t^5$$

düzeltilmiş Taylor polinom çözümleri elde edilir. Benzer şekilde  $M=8$  için

$\alpha_{1,4,8}(t)$ ,  $\alpha_{2,4,8}(t)$  ve  $\alpha_{3,4,8}(t)$  çözümleri

$$\alpha_{1,4,8}(t) = 0.5t + 0.306532517056142t^3 - 0.444149877790954t^4 + 0.174641378425833t^5 \\ - (0.286041010308220e - 1)t^6 + (0.194021504746415e - 2)t^7 - (0.356421786063175e - 4)t^8$$

$$\alpha_{2,4,8}(t) = 0.5t^2 + 0.224416934602420t^3 - 0.248981367149786t^4 + (0.213310866985958e - 1)t^5 \\ + (0.147212033202718e - 1)t^6 - (0.335862945004204e - 2)t^7 + (0.204842661233543e - 3)t^8$$

$$\alpha_{3,4,8}(t) = 1 - 0.125t^2 + (0.786484791878541e - 4)t^3 + (0.254398434286040e - 2)t^4 \\ + (0.192975825917942e - 4)t^5 - (0.256951006374681e - 4)t^6 \\ + (0.630291718752619e - 6)t^7 + (0.407318056026991e - 7)t^8$$

ve  $M=13$  için  $\alpha_{1,4,13}(t)$ ,  $\alpha_{2,4,13}(t)$  ve  $\alpha_{3,4,13}(t)$  çözümleri

$$\alpha_{1,4,13}(t) = 0.5t - 0.260159293976231t^3 - (0.161070304372495e - 1)t^4 + (0.463758051711661e - 1)t^5 \\ - (0.994411202731779e - 2)t^6 + (0.301680584134767e - 2)t^7 \\ - (0.156181212030253e - 2)t^8 + (0.410442616957696e - 3)t^9 \\ - (0.538286023944469e - 4)t^{10} + (0.350818758175806e - 5)t^{11} \\ - (0.901861821780739e - 7)t^{12} - (0.128635393103690e - 9)t^{13}$$

$$\alpha_{2,4,13}(t) = 0.5t^2 - (0.644390281743329e - 29)t^3 - (0.941255551379305e - 1)t^4 \\ - (0.975021829148709e - 2)t^5 + (0.148597408316881e - 1)t^6 \\ - (0.359012106559670e - 2)t^7 + (0.101866486794180e - 2)t^8 \\ - (0.359724805763832e - 3)t^9 + (0.768035094158171e - 4)t^{10} \\ - (0.889333083528139e - 5)t^{11} + (0.533825196318890e - 6)t^{12} \\ - (0.132048881471986e - 7)t^{13}$$

$$\alpha_{3,4,13}(t) = 1 - 0.125t^2 - 80.478550860524667e - 5)t^3 + (0.261129210889764e - 2)t^4 \\ - (0.646687847064703e - 5)t^5 - (0.174553753081556e - 4)t^6 \\ - (0.197121287819242e - 5)t^7 + (0.738436345544460e - 6)t^8 \\ - (0.146014744041513e - 6)t^9 + (0.225456832408564e - 7)t^{10} \\ - (0.233230077011794e - 8)t^{11} + (0.140911257749131e - 9)t^{12} \\ - (0.377664244831449e - 11)t^{13}$$

şeklinde hesaplanır. Böylece,  $N=4$  ve  $M=5,8,13$  değerleri için bulduğumuz  $\alpha_{i,N,M}(t)$

( $i=1,2,3$ ) değerlerini

$$\alpha_{N,M}(t) = (\alpha_{1,N,M}(t), \alpha_{2,N,M}(t), \alpha_{3,N,M}(t)) \quad (7.11)$$

ifadesinde yerlerine yazarsak  $\alpha_{N,M}(t) \cong \alpha(t)$  eğrisinin parametrik denklemi bulunmuş

olur. Şimdi  $N=4$  ve  $M=5,8,13$  değerleri için  $[0,2\pi]$  aralığından seçilmiş bazı

değerlerde düzeltilmiş mutlak hata fonksiyonlarını karşılaştıralım.

**Tablo 7.1.** Örnek 7.1'in düzeltilmiş mutlak hata fonksiyonunun ( $|E_{1,N,M}(t)|$ ) $N = 4$  ve  $M = 5, 8, 13$  için sayısal sonuçları

| $t_i$    | Düzeltilmiş Mutlak Hata Fonksiyonu $ E_{1,N,M}(t)  =  \alpha_1(t) - \alpha_{1,N,M}(t) $ |                    |                     |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|---------------------|
|          | $ E_{1,4,5}(t_i) $                                                                      | $ E_{1,4,8}(t_i) $ | $ E_{1,4,13}(t_i) $ |
| 0        | 0                                                                                       | 0                  | 0                   |
| $\pi/3$  | 0.058173644                                                                             | 0.276326782        | 0.003207947         |
| $2\pi/3$ | 0.085536718                                                                             | 0.703709754        | 0.006979003         |
| $\pi$    | 0.027889660                                                                             | 0.276844872        | 0.001712788         |
| $4\pi/3$ | 0.392355453                                                                             | 0.457343477        | 0.005464294         |
| $5\pi/3$ | 1.485986002                                                                             | 0.382910285        | 0.003901470         |
| $2\pi$   | 0.602819010                                                                             | 0.673769869        | 0.000112941         |

**Tablo 7.2.** Örnek 7.1'in düzeltilmiş mutlak hata fonksiyonunun ( $|E_{2,N,M}(t)|$ ) $N = 4$  ve  $M = 5, 8, 13$  için sayısal sonuçları

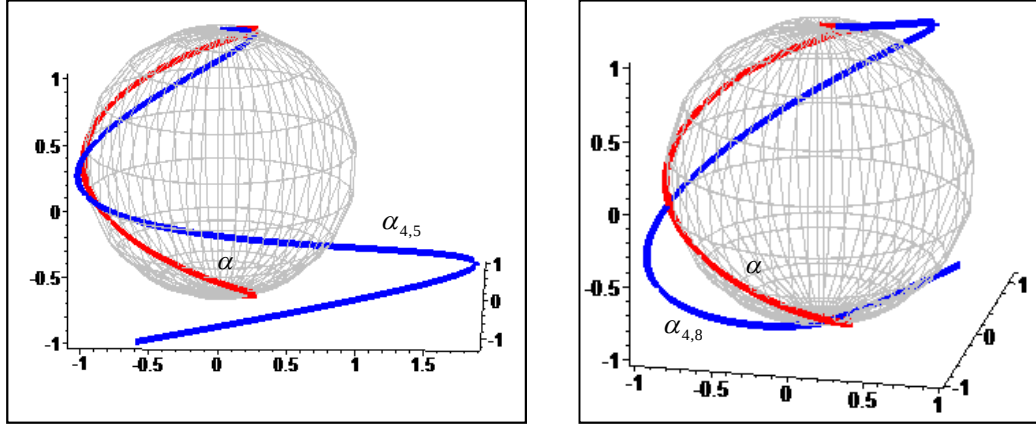
| $t_i$    | Düzeltilmiş Mutlak Hata Fonksiyonu $ E_{2,N,M}(t)  =  \alpha_2(t) - \alpha_{2,N,M}(t) $ |                    |                     |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|---------------------|
|          | $ E_{2,4,5}(t_i) $                                                                      | $ E_{2,4,8}(t_i) $ | $ E_{2,4,13}(t_i) $ |
| 0        | 0                                                                                       | 0                  | 0                   |
| $\pi/3$  | 0.290627523                                                                             | 0.115529299        | 0.001898866         |
| $2\pi/3$ | 0.880524058                                                                             | 0.298494268        | 0.004123563         |
| $\pi$    | 0.515855919                                                                             | 0.120235439        | 0.001005615         |
| $4\pi/3$ | 0.553938355                                                                             | 0.187144236        | 0.003241810         |
| $5\pi/3$ | 0.982495177                                                                             | 0.141415749        | 0.002345254         |
| $2\pi$   | 1.267126934                                                                             | 1.162168131        | 0.000939576         |

**Tablo 7.3.** Örnek 7.1'in Düzeltilmiş mutlak hata fonksiyonunun ( $|E_{3,N,M}(t)|$ ) $N = 4$  ve  $M = 5, 8, 13$  için sayısal sonuçları

| $t_i$    | Düzeltilmiş Mutlak Hata Fonksiyonu $ E_{3,N,M}(t)  =  \alpha_3(t) - \alpha_{3,N,M}(t) $ |                    |                     |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|---------------------|
|          | $ E_{3,4,5}(t_i) $                                                                      | $ E_{3,4,8}(t_i) $ | $ E_{3,4,13}(t_i) $ |
| 0        | 0                                                                                       | 0                  | 0                   |
| $\pi/3$  | 0.000664255                                                                             | 0.000037769        | 0.000004898         |
| $2\pi/3$ | 0.001771290                                                                             | 0.000096218        | 0.000010733         |
| $\pi$    | 0.000893987                                                                             | 0.000037848        | 0.000002726         |
| $4\pi/3$ | 0.001401580                                                                             | 0.000062162        | 0.000008286         |
| $5\pi/3$ | 0.003040737                                                                             | 0.000050637        | 0.000005814         |
| $2\pi$   | 0.001924820                                                                             | 0.000213786        | 0.000007663         |

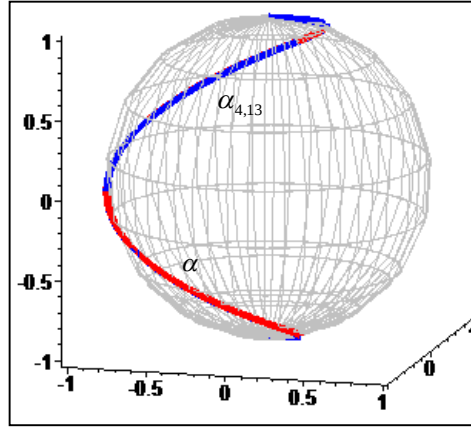
Tablo 7.1, Tablo 7.2 ve Tablo 7.3 ten görülmektedir ki  $M$  değeri artırıldığında yaklaşık çözümler gerçek çözüme oldukça yaklaşmaktadır. Dolayısıyla çözümün

doğruluğu artmaktadır. Son olarak (7.11) ile ifade edilen  $\alpha_{N,M}$  eğrilerinin ve  $\alpha$  eğrisinin grafiklerini çizerek grafikleri inceleyelim.



(a)

(b)



(c)

**Şekil 7.1.** Örnek 7.1'in  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_{4,5}$ ,  $\alpha_{4,8}$  ve  $\alpha_{4,13}$  eğrilerinin grafikleri

Şekil 7.1 (a)  $\alpha$  ile  $\alpha_{4,5}$  eğrilerinin grafiklerini, (b)  $\alpha$  ile  $\alpha_{4,8}$  eğrilerinin grafiklerini, (c) ise  $\alpha$  ile  $\alpha_{4,13}$  eğrilerinin grafiklerini göstermektedir. Grafikler incelendiğinde kesme sınırı artırıldığında yaklaşık olarak hesaplanan  $\alpha_{N,M}$  eğrilerinin grafiklerinin  $\alpha$  eğrisinin grafiğine benzediği görülmektedir. Hatta Şekil 7.1 (c) den görülmektedir ki  $\alpha_{4,13}$  eğrisinin grafiği tamamen  $\alpha$  eğrisinin grafiği gibi olmuştur. O halde kesme sınırı ne kadar artırılırsa, sonucun kesinliği ve doğruluğu o derece artmaktadır.

## 7.2. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Küresel Eğrileri Karakterize Eden Diferensiyel Denklemlerin Çözümü için Lucas Sıralama Yöntemi

3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı olmayan, regüler küresel eğrileri karakterize eden ve eğrinin konum vektörü ve türevlerine bağlı 3. mertebeden değişken katsayılı (3.18) lineer diferensiyel denkleminin yaklaşık çözümünü bu kez de Bölüm 4.2.1 ve 4.2.2 de verdiğimiz Lucas sıralama metodunu kullanılarak bulmaya çalışalım. Aşağıda verilen örneği inceleyelim.

**Örnek 7.2.** Örnek 7.1 de verilen (7.5), (7.6) ve (7.7) lineer diferensiyel denklemlerini bu kez de Bölüm 4.2.1 ve 4.2.2 de bahsedilen değişken katsayılı lineer diferensiyel denklemlerin çözümü için Lucas sıralama yöntemini kullanarak bulmaya çalışalım.

$N = 4$  için  $\alpha_{1,4}(t)$ ,  $\alpha_{2,4}(t)$  ve  $\alpha_{3,4}(t)$  kesilmiş (sonlu) Lucas seri çözümleri

$$\alpha_{i,4}(t) = \sum_{n=0}^4 a_{i,n} L_n(t), \quad (i = 1, 2, 3)$$

şeklinde. Şimdi yaklaşık çözümlerin  $a_{i,n}$ ,  $(n = 0, 1, 2, 3, 4)$  Lucas katsayılarını hesaplayalım.  $a = 0$ ,  $b = 2\pi$  ve  $N = 4$  için sıralama noktalarının kümesi

$$\left\{ t_0 = 0, t_1 = \frac{\pi}{2}, t_2 = \pi, t_3 = \frac{3\pi}{2}, t_4 = 2\pi \right\}$$

olur. (4.59) dan (7.5), (7.6) ve (7.7) denklemleri için temel matris denklemi

$$\left\{ \sum_{k=0}^3 \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k \mathbf{D}^T \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

şeklinde yazılabilir. Bölüm 4.2.1 ve 4.2.2 de bahsedilen yöntem kullanılarak  $N = 4$  için (7.5), (7.6) ve (7.7) diferensiyel denklemlerinin Lucas polinom çözümleri

$$\alpha_{1,4}(t) = 0.4999999996t - 0.1033282131t^3 + (0.1145284738e - 1)t^4$$

$$\alpha_{2,4}(t) = -(0.26e - 9) + 0.5t^2 - 0.2389089492t^3 + (0.2231474722e - 1)t^4$$

$$\alpha_{3,4}(t) = 0.9999999995 + (0.2e - 10)t - 0.125t^2 + (0.402468024e - 2)t^3 + (0.1160878758e - 2)t^4$$

olarak hesaplanır. Şimdi düzeltilmiş Lucas polinom çözümlerini hesaplamak için

$$p_3(t)e_{1,4}'''(t) + p_2(t)e_{1,4}''(t) + p_1(t)e_{1,4}'(t) + p_0(t)e_{1,4}(t) = -R_{1,4}$$

$$p_3(t)e_{2,4}'''(t) + p_2(t)e_{2,4}''(t) + p_1(t)e_{2,4}'(t) + p_0(t)e_{2,4}(t) = -R_{2,4}$$

$$p_3(t)e_{3,4}'''(t) + p_2(t)e_{3,4}''(t) + p_1(t)e_{3,4}'(t) + p_0(t)e_{3,4}(t) = -R_{3,4}$$

hata problemlerini ele alalım. Burada

$$R_{1,4}(t) = p_3(t)\alpha_{1,4}'''(t) + p_2(t)\alpha_{1,4}''(t) + p_1(t)\alpha_{1,4}'(t) + p_0(t)\alpha_{1,4}(t) \quad (7.12)$$

$$R_{2,4}(t) = p_3(t)\alpha_{2,4}'''(t) + p_2(t)\alpha_{2,4}''(t) + p_1(t)\alpha_{2,4}'(t) + p_0(t)\alpha_{2,4}(t) \quad (7.13)$$

$$R_{3,4}(t) = p_3(t)\alpha_{3,4}'''(t) + p_2(t)\alpha_{3,4}''(t) + p_1(t)\alpha_{3,4}'(t) + p_0(t)\alpha_{3,4}(t) \quad (7.14)$$

şeklinde tanımlıdır. Lucas metodu kullanılarak  $M = 5$  için (7.8), (7.9) ve (7.10) hata problemlerinin  $e_{1,4}(t)$ ,  $e_{2,4}(t)$  ve  $e_{3,4}(t)$  e göre  $e_{1,4,5}(t)$ ,  $e_{2,4,5}(t)$  ve  $e_{3,4,5}(t)$  tahmini hata fonksiyonları

$$e_{1,4,5}(t) = (0.222044604925031e-15)t - 0.335907477291688t^3 + 0.147313123124575t^4 - (0.145247893504105e-1)t^5$$

$$e_{2,4,5}(t) = -(0.138777878078145e-15) + (0.111022302462516e-15)t - (0.555111512312578e-16)t^2 - 0.238494735315633t^3 + 0.107194173804204t^4 - (0.106643253034255e-1)t^5$$

$$e_{3,4,5}(t) = -(0.173472347597681e-17) + (0.346944695195361e-17)t - (0.534226555720575e-2)t^3 + (0.236392416157558e-2)t^4 - (0.227723431226885e-3)t^5$$

şeklinde hesaplanır ve böylece

$$\alpha_{1,4,5}(t) = 0.499999999600000t - 0.439235690391688t^3 + 0.158765970504575t^4 - (0.145247893504105e-1)t^5$$

$$\alpha_{2,4,5}(t) = -(0.260000138777878e-9) + 0.5t^2 - 0.477403684515633t^3 + 0.129508921024204t^4 + (0.111022302462516e-15)t - (0.106643253034255e-1)t^5$$

$$\alpha_{3,4,5}(t) = 0.999999999500000 + (0.200000034694470e-10)t - 0.125t^2 + (0.352480291957558e-2)t^4 - (0.227723431226885e-3)t^5 - (0.131758531720575e-2)t^3$$

düzeltilmiş Lucas polinom çözümleri elde edilir. Benzer şekilde  $M = 8$  için

$\alpha_{1,4,8}(t)$ ,  $\alpha_{2,4,8}(t)$  ve  $\alpha_{3,4,8}(t)$  çözümleri

$$\alpha_{1,4,8}(t) = 0.499999999599978t + 0.306532559723370t^3 - 0.444149870356995t^4 - (0.186620060767598e-13) - (0.532907051820075e-14)t^2 + (0.174641358983243)t^5 - (0.286040945209451e-1)t^6 + (0.194021418478947e-2)t^7 - (0.356421367872731e-4)t^8$$

$$\alpha_{2,4,8}(t) = -(0.259996639461156e-9) + 0.499999999999996t^2 + 0.224416858744376t^3 - 0.248981167081697t^4 + (0.128196064874686e-13)t + (0.213309695850870e-1)t^5 + (0.147212321823962e-1)t^6 - (0.335863274832651e-2)t^7 + (0.204842806713442e-3)t^8$$

$$\alpha_{3,4,8}(t) = 0.999999999500000 + (0.199999702454266e-10)t - 0.125t^2 + (0.787720390942864e-4)t^3 + (0.254392355708362e-2)t^4 + (0.192991422948481e-4)t^5 - (0.256915769161762e-4)t^6 + (0.629632428667440e-6)t^7 + (0.407675668361376e-7)t^8$$

ve  $M = 13$  için  $\alpha_{1,4,13}(t)$ ,  $\alpha_{2,4,13}(t)$  ve  $\alpha_{3,4,13}(t)$  çözümleri

$$\begin{aligned}\alpha_{1,4,13}(t) = & 0.499999999599173t - 0.260125216685152t^3 - (0.161578050696862e-1)t^4 \\ & - (0.375578231641654e-11) - (0.454118933077138e-11)t^2 \\ & + (0.464218823180868e-1)t^5 - (0.997436281466191e-2)t^6 \\ & + (0.303085602484618e-2)t^7 - (0.156638931981066e-2)t^8 \\ & + (0.411485747537591e-3)t^9 - (0.539918403345653e-4)t^{10} \\ & + (0.352490067494012e-5)t^{11} - (0.911934775912629e-7)t^{12} \\ & - (0.101566509306906e-9)t^{13}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{2,4,13}(t) = & -(0.257271019489540e-9) + 0.500000000001660t^2 - (0.646796711174480e-2)t^3 \\ & - (0.940898075448491e-1)t^4 - (0.803453640963370e-12)t \\ & + (0.534514547759334e-6)t^{12} - (0.132234193418015e-7)t^{13} \\ & - (0.978240920331576e-2)t^5 + (0.148807268548122e-1)t^6 \\ & - (0.359982011372225e-2)t^7 + (0.102181351910415e-2)t^8 \\ & - (0.360440584949504e-3)t^9 + (0.769153381880423e-4)t^{10} \\ & - (0.890477068009215e-5)t^{11}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{3,4,13}(t) = & 0.999999999499971 + (0.201201043977291e-10)t - 0.125000000000007t^2 \\ & + (0.412274200171665e-5)t^3 + (0.259806624082214e-2)t^4 \\ & + (0.553872304938226e-5)t^5 - (0.253558352879775e-4)t^6 \\ & + (0.170714609813919e-5)t^7 - (0.462427797626050e-6)t^8 \\ & + (0.128169082819624e-6)t^9 - (0.204317393646569e-7)t^{10} \\ & + (0.207431984062146e-8)t^{11} - (0.125009847463864e-9)t^{12} \\ & + (0.337713469364518e-11)t^{13}\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Böylece,  $N = 4$  ve  $M = 5, 8, 13$  değerleri için bulduğumuz  $\alpha_{i,N,M}(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) değerlerini

$$\alpha_{N,M}(t) = (\alpha_{1,N,M}(t), \alpha_{2,N,M}(t), \alpha_{3,N,M}(t)) \quad (7.15)$$

ifadesinde yerlerine yazarsak  $\alpha_{N,M}(t) \cong \alpha(t)$  eğrisinin parametrik denklemi bulunmuş olur. Şimdi  $N = 4$  ve  $M = 5, 8, 13$  değerleri için  $[0, 2\pi]$  aralığından seçilmiş bazı değerlerde düzeltilmiş mutlak hata fonksiyonlarını karşılaştıralım.

**Tablo 7.4.** Örnek 7.2'nin düzeltilmiş mutlak hata fonksiyonunun  $(|E_{1,N,M}(t)|)$  $N = 4$  ve  $M = 5, 8, 13$  için sayısal sonuçları

| $t_i$    | Düzeltilmiş Mutlak Hata Fonksiyonu $ E_{1,N,M}(t)  =  \alpha_1(t) - \alpha_{1,N,M}(t) $ |                    |                     |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|---------------------|
|          | $ E_{1,4,5}(t_i) $                                                                      | $ E_{1,4,8}(t_i) $ | $ E_{1,4,13}(t_i) $ |
| 0        | 0                                                                                       | 011866e-13         | 0.3756e-11          |
| $\pi/3$  | 0.058173632                                                                             | 0.276326840        | 0.003215525         |
| $2\pi/3$ | 0.085536668                                                                             | 0.703709963        | 0.006995609         |
| $\pi$    | 0.027889603                                                                             | 0.276845034        | 0.001717034         |
| $4\pi/3$ | 0.392355438                                                                             | 0.457343549        | 0.005477075         |
| $5\pi/3$ | 1.485985927                                                                             | 0.382910418        | 0.003910408         |
| $2\pi$   | 0.602818793                                                                             | 0.673770187        | 0.000128008         |

**Tablo 7.5.** Örnek 7.2'nin düzeltilmiş mutlak hata fonksiyonunun  $(|E_{2,N,M}(t)|)$  $N = 4$  ve  $M = 5, 8, 13$  için sayısal sonuçları

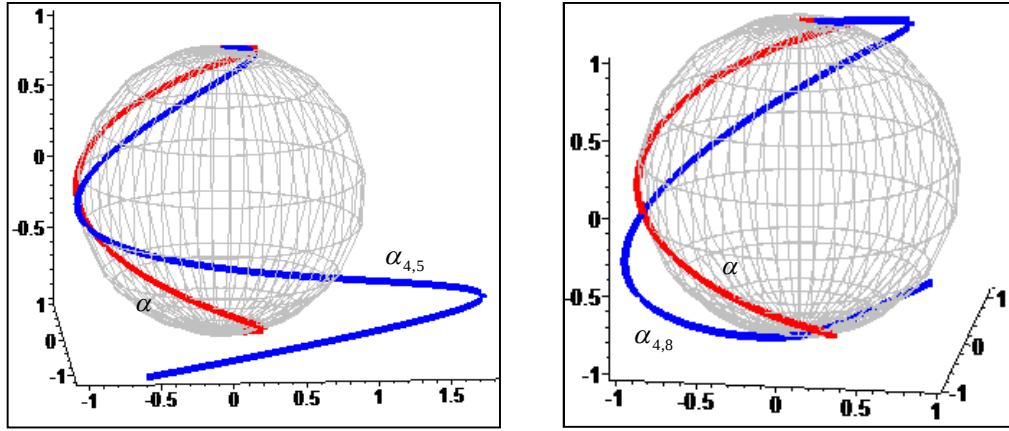
| $t_i$    | Düzeltilmiş Mutlak Hata Fonksiyonu $ E_{2,N,M}(t)  =  \alpha_2(t) - \alpha_{2,N,M}(t) $ |                    |                     |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|---------------------|
|          | $ E_{2,4,5}(t_i) $                                                                      | $ E_{2,4,8}(t_i) $ | $ E_{2,4,13}(t_i) $ |
| 0        | 0.2600e-9                                                                               | 0.2600e-9          | 0.2573e-9           |
| $\pi/3$  | 0.290627483                                                                             | 0.115529399        | 0.001906142         |
| $2\pi/3$ | 0.880523887                                                                             | 0.298494761        | 0.004139286         |
| $\pi$    | 0.515855720                                                                             | 0.120235950        | 0.001009328         |
| $4\pi/3$ | 0.553938273                                                                             | 0.187144292        | 0.003254205         |
| $5\pi/3$ | 0.982494585                                                                             | 0.141416172        | 0.002353825         |
| $2\pi$   | 1.267127566                                                                             | 1.162168851        | 0.000950739         |

**Tablo 7.6.** Örnek 7.2'nin düzeltilmiş mutlak hata fonksiyonunun  $(|E_{3,N,M}(t)|)$  $N = 4$  ve  $M = 5, 8, 13$  için sayısal sonuçları

| $t_i$    | Düzeltilmiş Mutlak Hata Fonksiyonu $ E_{3,N,M}(t)  =  \alpha_3(t) - \alpha_{3,N,M}(t) $ |                    |                     |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|---------------------|
|          | $ E_{3,4,5}(t_i) $                                                                      | $ E_{3,4,8}(t_i) $ | $ E_{3,4,13}(t_i) $ |
| 0        | 0.5000e-9                                                                               | 0.5000e-9          | 0.5000e-9           |
| $\pi/3$  | 0.000664249                                                                             | 0.000037843        | 0.000001268         |
| $2\pi/3$ | 0.001771263                                                                             | 0.000096440        | 0.000002810         |
| $\pi$    | 0.000893956                                                                             | 0.000037970        | 0.000000754         |
| $4\pi/3$ | 0.001401566                                                                             | 0.000062277        | 0.000002133         |
| $5\pi/3$ | 0.003040652                                                                             | 0.000050771        | 0.000001526         |
| $2\pi$   | 0.001924771                                                                             | 0.000213768        | 0.000002288         |

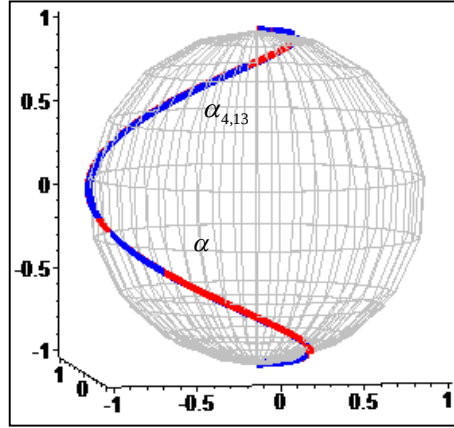
Tablo 7.4, Tablo 7.5 ve Tablo 7.6 dan görülmektedir ki  $M$  değeri artırıldığında yaklaşık çözümler gerçek çözüme oldukça yaklaşmaktadır. Dolayısıyla çözümün

doğruluğu artmaktadır. Son olarak (7.15) ile ifade edilen  $\alpha_{N,M}$  eğrilerinin ve  $\alpha$  eğrisinin grafiğini çizerek grafikleri inceleyelim.



(a)

(b)



(c)

**Şekil 7.2.** Örnek 7.2'nin  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_{4,5}$ ,  $\alpha_{4,8}$  ve  $\alpha_{4,13}$  eğrilerinin grafikleri

Şekil 7.2 (a)  $\alpha$  ile  $\alpha_{4,5}$  eğrilerinin grafiklerini, (b)  $\alpha$  ile  $\alpha_{4,8}$  eğrilerinin grafiklerini, (c) ise  $\alpha$  ile  $\alpha_{4,13}$  eğrilerinin grafiklerini göstermektedir. Grafikler incelendiğinde Lucas polinomuna dayalı kesme sınırı artırıldığında yaklaşık olarak hesaplanan  $\alpha_{N,M}$  eğrilerinin grafiklerinin  $\alpha$  eğrisinin grafiğine benzediği görülmektedir. Hatta Şekil 7.2 (c) den görülmektedir ki  $\alpha_{4,13}$  eğrisinin grafiği tamamen  $\alpha$  eğrisinin grafiği gibi olmuştur. O halde kesme sınırı ne kadar artırılırsa, sonucun kesinliği ve doğruluğu o derece artmaktadır.

## 8. 3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA LORENTZİYEN KÜRESEL EĞRİLERİ KARAKTERİZE EDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

### 8.1. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Lorentziyen Küresel Timelike Eğrileri Karakterize Eden Diferensiyel Denklemlerin Çözümü için Taylor Sıralama Yöntemi

3-boyutlu Minkowski uzayında birim hızlı olmayan, regüler Lorentziyen küresel timelike eğrileri karakterize eden ve eğrinin konum vektörü ve türevlerine bağlı 3. mertebeden değişken katsayılı lineer diferensiyel denklemi Bölüm 3.2.1.1 de (3.36) ile verilmişti. (3.36) denklemi incelendiğinde, eğer Lorentziyen küresel timelike bir eğrinin hızı, eğriliği ve burulması verilirse ya da bilinirse, eğrinin denklemi yaklaşık çözüm metodları vasıtasıyla belirlenebilmektedir. Bu bölümde, 3-boyutlu Mikowski uzayında Lorentziyen küresel timelike eğrileri karakterize eden lineer diferensiyel denklemlerin çözümü için Taylor sıralama metodu kullanılacaktır. Bu amaçla aşağıda verilen Lorentziyen küresel timelike eğri örneğini inceleyelim.

**Örnek 8.1.**  $\alpha : \left[0, \frac{\pi}{5}\right] \rightarrow E_1^3$  tanımlı

$$\alpha(t) = (-4\sin(t), \sin(t/3) - 4\sin(t)\cos(t), \cos(t/3) + 4\sin(t)\sin(t/3))$$

eğrisi Lorentziyen birim küre üzerinde yatan, birim hızlı olmayan regüler bir timelike eğridir.  $\alpha$  eğrisinin hızı, eğriliği ve burulması sırasıyla aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$v(t) = \left( \begin{array}{c} \frac{32}{3}\cos^3(t/3) + 16\cos^2(t/3) + \frac{256}{9}\cos^6(t/3) \\ -\frac{128}{3}\cos^4(t/3) - \frac{17}{9} - 8\cos(t/3) \end{array} \right)^{1/2} \quad (8.1)$$

$$\kappa(t) = \frac{\left( \begin{array}{c} -3889 - 34776\cos(t/3) + 1769472\cos^8(t/3) - 882944\cos^6(t/3) \\ 163200\cos^4(t/3) + 1008\cos^2(t/3) - 1572864\cos^{10}(t/3) \\ -331776\cos^7(t/3) + 248832\cos^5(t/3) - 15840\cos^3(t/3) \\ +524288\cos^{12}(t/3) + 147456\cos^9(t/3) \end{array} \right)^{(1/2)}}{\left( \begin{array}{c} 96\cos^3(t/3) + 144\cos^2(t/3) + 256\cos^6(t/3) \\ -384\cos^4(t/3) - 17 - 72\cos(t/3) \end{array} \right)^{(3/2)}} \quad (8.2)$$

$$\tau(t) = \frac{-48 \begin{pmatrix} -4608 \cos^7(s/3) + 2048 \cos^9(s/3) + 1008 \cos^4(s/3) \\ -136 \cos^3(s/3) - 672 \cos^6(s/3) + 3456 \cos^5(s/3) \\ -378 \cos^2(s/3) - 546 \cos(s/3) + 81 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -3889 - 34776 \cos(s/3) + 1769472 \cos^8(s/3) - 882944 \cos^6(s/3) \\ 163200 \cos^4(s/3) + 1008 \cos^2(s/3) - 1572864 \cos^{10}(s/3) \\ -331776 \cos^7(s/3) + 248832 \cos^5(s/3) - 15840 \cos^3(s/3) \\ +524288 \cos^{12}(s/3) + 147456 \cos^9(s/3) \end{pmatrix}}. \quad (8.3)$$

O halde  $\alpha$  Lorentziyen küresel timelike eğrisini karakterize eden (3.36) lineer diferensiyel denklemi  $m=0$  için

$$p_3(t)\alpha'''(t) + p_2(t)\alpha''(t) + p_1(t)\alpha'(t) + p_0(t)\alpha(t) = 0 \quad (8.4)$$

şeklinde yazılır. Burada

$$p_3(t) = -\frac{\frac{-256}{9} \sin(t/3) \begin{pmatrix} 524288 \cos^{17}(t/3) - 2097152 \cos^{15}(t/3) + 122880 \cos^{14}(t/3) \\ +3440640 \cos^{13}(t/3) - 399360 \cos^{12}(t/3) - 2875904 \cos^{11}(t/3) \\ +506880 \cos^{10}(t/3) + 1199360 \cos^9(t/3) - 180096 \cos^8(t/3) \\ -167040 \cos^7(t/3) - 138432 \cos^6(t/3) - 24832 \cos^5(t/3) \\ +113040 \cos^4(t/3) + 1882 \cos^3(t/3) - 19062 \cos^2(t/3) \\ +1095 \cos(t/3) + 162 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -4913 - 62424 \cos(t/3) + 141557760 \cos^{14}(t/3) + 767520 \cos^3(t/3) \\ -139536 \cos^2(t/3) - 3565824 \cos^6(t/3) + 1554048 \cos^4(t/3) \\ -7216128 \cos^5(t/3) + 106168320 \cos^{11}(t/3) - 70778880 \cos^{13}(t/3) \\ -11280384 \cos^8(t/3) + 18874368 \cos^{15}(t/3) + 68419584 \cos^{10}(t/3) \\ +33509376 \cos^7(t/3) - 81248256 \cos^9(t/3) - 137822208 \cos^{12}(t/3) \\ -75497472 \cos^{16}(t/3) + 16777216 \cos^{18}(t/3) \end{pmatrix}}$$

$$p_2(t) = \frac{\frac{256}{9} \begin{pmatrix} -4608 \cos^7(t/3) + 2048 \cos^9(t/3) + 1008 \cos^4(t/3) \\ -136 \cos^3(t/3) - 672 \cos^6(t/3) + 3456 \cos^5(t/3) \\ +81 - 378 \cos^2(t/3) - 546 \cos(t/3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 768 \cos^9(t/3) - 1728 \cos^7(t/3) + 288 \cos^6(t/3) \\ +1296 \cos^5(t/3) - 432 \cos^4(t/3) - 364 \cos^3(t/3) \\ +162 \cos^2(t/3) + 30 \cos(t/3) - 9 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -4913 - 62424 \cos(t/3) + 141557760 \cos^{14}(t/3) + 767520 \cos^3(t/3) \\ -139536 \cos^2(t/3) - 3565824 \cos^6(t/3) + 1554048 \cos^4(t/3) \\ -7216128 \cos^5(t/3) + 106168320 \cos^{11}(t/3) - 70778880 \cos^{13}(t/3) \\ -11280384 \cos^8(t/3) + 18874368 \cos^{15}(t/3) + 68419584 \cos^{10}(t/3) \\ +33509376 \cos^7(t/3) - 81248256 \cos^9(t/3) - 137822208 \cos^{12}(t/3) \\ -75497472 \cos^{16}(t/3) + 16777216 \cos^{18}(t/3) \end{pmatrix}}$$

$$\begin{aligned}
p_1(t) &= \frac{\frac{256}{81} \sin(t/3)}{\begin{pmatrix} 8192 \cos^{11}(t/3) - 20480 \cos^9(t/3) - 2688 \cos^8(t/3) \\ +18432 \cos^7(t/3) + 4704 \cos^6(t/3) - 4000 \cos^5(t/3) \\ -2520 \cos^4(t/3) - 2048 \cos^3(t/3) + 702 \cos^2(t/3) \\ +546 \cos(t/3) - 81 \end{pmatrix}} \\
&\quad \begin{pmatrix} -4913 - 62424 \cos(t/3) + 141557760 \cos^{14}(t/3) + 767520 \cos^3(t/3) \\ -139536 \cos^2(t/3) - 3565824 \cos^6(t/3) + 1554048 \cos^4(t/3) \\ -7216128 \cos^5(t/3) + 106168320 \cos^{11}(t/3) - 70778880 \cos^{13}(t/3) \\ -11280384 \cos^8(t/3) + 18874368 \cos^{15}(t/3) + 68419584 \cos^{10}(t/3) \\ +33509376 \cos^7(t/3) - 81248256 \cos^9(t/3) - 137822208 \cos^{12}(t/3) \\ -75497472 \cos^{16}(t/3) + 16777216 \cos^{18}(t/3) \end{pmatrix} \\
p_0(t) &= \frac{-\frac{256}{81} \begin{pmatrix} 6561 - 88452 \cos(t/3) + 236880 \cos^2(t/3) + 390744 \cos^3(t/3) \\ -4626368 \cos^6(t/3) + 454692 \cos^4(t/3) + 561000 \cos^8(t/3) \\ +9606144 \cos^{10}(t/3) - 2899584 \cos^7(t/3) - 438048 \cos^5(t/3) \\ -31955968 \cos^{12}(t/3) + 10965504 \cos^9(t/3) - 15482880 \cos^{11}(t/3) \\ +35389440 \cos^{14}(t/3) + 10321920 \cos^{13}(t/3) - 2752512 \cos^{15}(t/3) \\ +4194304 \cos^{18}(t/3) - 18874368 \cos^{16}(t/3) \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -4913 - 62424 \cos(t/3) + 141557760 \cos^{14}(t/3) + 767520 \cos^3(t/3) \\ -139536 \cos^2(t/3) - 3565824 \cos^6(t/3) + 1554048 \cos^4(t/3) \\ -7216128 \cos^5(t/3) + 106168320 \cos^{11}(t/3) - 70778880 \cos^{13}(t/3) \\ -11280384 \cos^8(t/3) + 18874368 \cos^{15}(t/3) + 68419584 \cos^{10}(t/3) \\ +33509376 \cos^7(t/3) - 81248256 \cos^9(t/3) - 137822208 \cos^{12}(t/3) \\ -75497472 \cos^{16}(t/3) + 16777216 \cos^{18}(t/3) \end{pmatrix}}
\end{aligned}$$

şeklindedir. Şimdi  $\alpha$  eğrisini  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$  olarak düşünelim. O halde, (8.4) eşitliği  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$  ve  $\alpha_3(t)$  için aşağıdaki gibi sağlanır.

$$p_3(t)\alpha_1'''(t) + p_2(t)\alpha_1''(t) + p_1(t)\alpha_1'(t) + p_0(t)\alpha_1(t) = 0 \quad (8.5)$$

$$p_3(t)\alpha_2'''(t) + p_2(t)\alpha_2''(t) + p_1(t)\alpha_2'(t) + p_0(t)\alpha_2(t) = 0 \quad (8.6)$$

$$p_3(t)\alpha_3'''(t) + p_2(t)\alpha_3''(t) + p_1(t)\alpha_3'(t) + p_0(t)\alpha_3(t) = 0. \quad (8.7)$$

Kabul edelim ki  $\alpha$  Lorentziyen küresel timelike eğrisinin parametrik denklemi bilinmesin. Ancak hızı, eğriliği ve burulması biliniyor olsun. Bölüm 4.1.1 ve 4.1.2 de verilen Taylor sıralama metodunu kullanarak, ve (8.5), (8.6) ve (8.7) denklemleri yardımıyla  $\alpha$  eğrisinin parametrik denklemini bulalım. Sonra, elde edilen yaklaşık denklemi,  $\alpha$  eğrisinin gerçek denklemiyle karşılaştırarak, yaklaşık çözümün gerçek çözüme ne kadar yakın olduğunu tablo ve grafikler yardımıyla gösterelim.

(8.5), (8.6) ve (8.7) lineer diferensiyel denklemlerinin yaklaşık çözümlerini Bölüm 4.1.1 ve 4.1.2 de bahsedilen Taylor sıralama metodunu kullanarak bulmaya çalışalım.  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$  ve  $\alpha_3(t)$  için başlangıç koşullarını

$$\alpha_1(0) = 0, \alpha_1'(0) = -4, \alpha_1''(0) = 0$$

$$\alpha_2(0) = 0, \alpha_2'(0) = -\frac{11}{3}, \alpha_2''(0) = 0$$

$$\alpha_3(0) = 1, \alpha_3'(0) = 0, \alpha_3''(0) = \frac{23}{9}$$

olarak kabul edelim.  $N = 4$  için  $\alpha_{1,4}(t)$ ,  $\alpha_{2,4}(t)$  ve  $\alpha_{3,4}(t)$  kesilmiş (sonlu) Taylor seri çözümleri

$$\alpha_{i,4}(t) = \sum_{n=0}^4 a_{i,n} t^n, \quad (i = 1, 2, 3)$$

şeklindedir. Şimdi yaklaşık çözümlerin  $a_{i,n}$ ,  $(n = 0, 1, 2, 3, 4)$  Taylor katsayılarını hesaplayalım.  $a = 0$ ,  $b = \frac{\pi}{5}$  ve  $N = 4$  için sıralama noktalarının kümesi

$$\left\{ t_0 = 0, t_1 = \frac{\pi}{20}, t_2 = \frac{2\pi}{20}, t_3 = \frac{3\pi}{20}, t_4 = \frac{\pi}{5} \right\}$$

olur. (4.9) dan (8.5), (8.6) ve (8.7) denklemleri için temel matris denklemi

$$\left\{ \sum_{k=0}^3 \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

şeklinde yazılabilir. Bölüm 4.1.1 ve 4.1.2 de bahsedilen yöntem kullanılarak  $N = 4$  için (8.5), (8.6) ve (8.7) diferensiyel denklemlerinin Taylor polinom çözümleri

$$\alpha_{1,4}(t) = -4t + 0.439591230139095t^3 + (0.962209686038218e - 3)t^4$$

$$\alpha_{2,4}(t) = -3.66666666666667t + 0.402958627627504t^3 + (0.882025545535033e - 3)t^4$$

$$\alpha_{3,4}(t) = 1 + 1.27777777777778t^2 + 0.150461213906055t^3 - 0.256028034443876t^4$$

olarak hesaplanır. Benzer şekilde  $N = 6$  için

$$\alpha_{1,6}(t) = -4t + 0.569765303303711t^3 + (0.321951932669151e - 6)t^4 - (0.184051479867833e - 1)t^5 - (0.982750827382972e - 5)t^6$$

$$\alpha_{2,6}(t) = -3.66666666666667t + 0.522284861361735t^3 + (0.295122604946722e - 6)t^4 - (0.168713856545513e - 1)t^5 - (0.900854925101058e - 5)t^6$$

$$\alpha_{3,6}(t) = 1 + 1.27777777777778t^2 + 0.107421725782842t^3 - 0.246362817333669t^4 - (0.167607067983226e - 1)t^5 + (0.159854429288941e - 1)t^6$$

olarak hesaplanır. Böylece,  $N = 4, 6$  değerleri için bulduğumuz  $\alpha_{i,N}(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) değerlerini

$$\alpha_N(t) = (\alpha_{1,N}(t), \alpha_{2,N}(t), \alpha_{3,N}(t)) \quad (8.8)$$

ifadesinde yerlerine yazarsak  $\alpha_N(t) \equiv \alpha(t)$  eğrisinin parametrik denklemi bulunmuş olur. Şimdi  $N = 4, 6$  değerleri için  $[0, \frac{\pi}{5}]$  aralığından seçilmiş bazı değerlerde tam çözüm ile Taylor polinom çözümlerini karşılaştıralım.

**Tablo 8.1.** Örnek 8.1'in  $\alpha_1(t)$  tam çözümü ile  $\alpha_{1,N}(t)$  Taylor polinom çözümlerinin  $N = 4, 6$  için sayısal sonuçları

| $t_i$    | Tam Çözüm       | Taylor Polinom Çözümleri ( $\alpha_{1,N}(t)$ ) |                     |
|----------|-----------------|------------------------------------------------|---------------------|
|          | $\alpha_1(t_i)$ | $\alpha_{1,4}(t_i)$                            | $\alpha_{1,6}(t_i)$ |
| 0        | 0               | 0                                              | 0                   |
| $\pi/30$ | -0.418113853    | -0.418374087                                   | -0.418224945        |
| $\pi/15$ | -0.831646763    | -0.833717645                                   | -0.832530999        |
| $\pi/10$ | -1.236067977    | -1.242997601                                   | -1.239027090        |
| $\pi/6$  | -2.000000000    | -2.031220525                                   | -2.013331175        |
| $\pi/5$  | -2.351141009    | -2.404083460                                   | -2.373746620        |

**Tablo 8.2.** Örnek 8.1'in  $\alpha_2(t)$  tam çözümü ile  $\alpha_{2,N}(t)$  Taylor polinom çözümlerinin  $N = 4, 6$  için sayısal sonuçları

| $t_i$    | Tam Çözüm       | Taylor Polinom Çözümleri ( $\alpha_{2,N}(t)$ ) |                     |
|----------|-----------------|------------------------------------------------|---------------------|
|          | $\alpha_2(t_i)$ | $\alpha_{2,4}(t_i)$                            | $\alpha_{2,6}(t_i)$ |
| 0        | 0               | 0                                              | 0                   |
| $\pi/30$ | -0.382959653    | -0.383509579                                   | -0.383372866        |
| $\pi/15$ | -0.759864440    | -0.764241175                                   | -0.763153416        |
| $\pi/10$ | -1.124768205    | -1.139414468                                   | -1.135774833        |
| $\pi/6$  | -1.795967329    | -1.861952148                                   | -1.845553577        |
| $\pi/5$  | -2.091851246    | -2.203743171                                   | -2.175934402        |

**Tablo 8.3.** Örnek 8.1'in  $\alpha_3(t)$  tam çözümü ile  $\alpha_{3,N}(t)$  Taylor polinom çözümlerinin  $N = 4, 6$  için sayısal sonuçları

| $t_i$    | Tam Çözüm       | Taylor Polinom Çözümleri ( $\alpha_{3,N}(t)$ ) |                     |
|----------|-----------------|------------------------------------------------|---------------------|
|          | $\alpha_3(t_i)$ | $\alpha_{3,4}(t_i)$                            | $\alpha_{3,6}(t_i)$ |
| 0        | 1               | 1                                              | 1                   |
| $\pi/30$ | 1.013982790     | 1.014154399                                    | 1.014105945         |
| $\pi/15$ | 1.055576796     | 1.056939268                                    | 1.056557054         |
| $\pi/10$ | 1.123726182     | 1.128282908                                    | 1.127006639         |
| $\pi/6$  | 1.332104108     | 1.352664966                                    | 1.346882990         |
| $\pi/5$  | 1.466977303     | 1.501865250                                    | 1.492037917         |

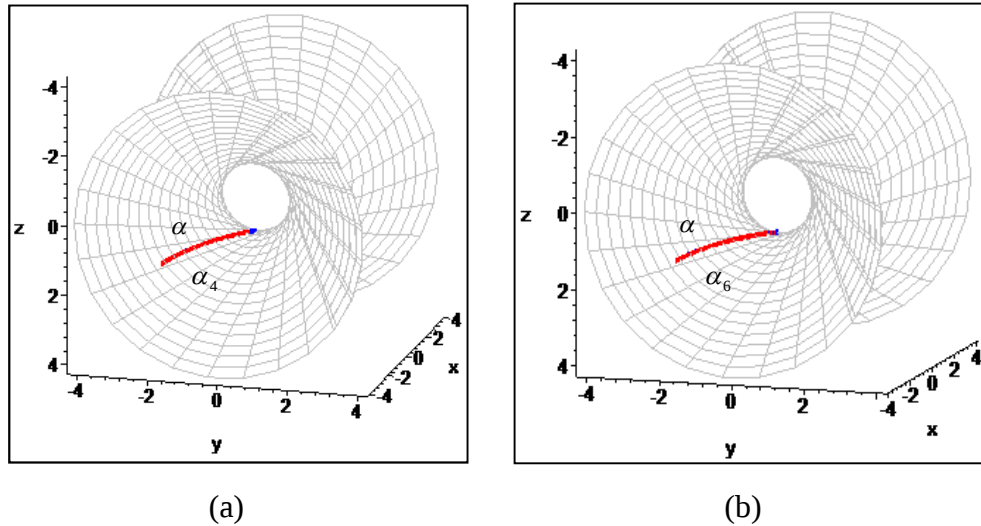
Tablo 8.1, Tablo 8.2 ve Tablo 8.3 den görülmektedir ki  $N$  değeri artırıldığında yaklaşık çözümler gerçek çözüme oldukça yaklaşımaktadır. Şimdi de  $N = 4$  ve  $N = 6$  için asıl mutlak hata fonksiyonlarını karşılaştıralım.

**Tablo 8.4.** Örnek 8.1'in asıl mutlak hata fonksiyonlarının  $(|e_{j,N}(t)|)$

$N = 4, 6$  ve  $j = 1, 2, 3$  için sayısal sonuçları

| $t_i$    | Asıl Mutlak Hata Fonksiyonu $ e_{j,N}(t)  =  \alpha_j(t) - \alpha_{j,N}(t) $ |                  |                  |                  |                  |                  |
|----------|------------------------------------------------------------------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
|          | $ e_{1,4}(t_i) $                                                             | $ e_{1,6}(t_i) $ | $ e_{2,4}(t_i) $ | $ e_{2,6}(t_i) $ | $ e_{3,4}(t_i) $ | $ e_{3,6}(t_i) $ |
| 0        | 0                                                                            | 0                | 0                | 0                | 0                | 0                |
| $\pi/30$ | 0.0002602                                                                    | 0.0001111        | 0.0005500        | 0.0004132        | 0.0001716        | 0.0001232        |
| $\pi/15$ | 0.0020709                                                                    | 0.0008842        | 0.0043767        | 0.0032890        | 0.0013625        | 0.0009803        |
| $\pi/10$ | 0.0069296                                                                    | 0.0029591        | 0.0146463        | 0.0110066        | 0.0045567        | 0.0032805        |
| $\pi/6$  | 0.0312205                                                                    | 0.0133312        | 0.0659848        | 0.0495862        | 0.0205609        | 0.0147789        |
| $\pi/5$  | 0.0529425                                                                    | 0.0226056        | 0.1118920        | 0.0840832        | 0.0348879        | 0.0250606        |

Tablo 8.4 den  $N$  değeri arttığında hatanın küçüldüğü ve tam çözüme oldukça yaklaşıldığı görülmektedir.



**Şekil 8.1.** Örnek 8.1'in  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_4$  ve  $\alpha_6$  eğrilerinin grafikleri

(8.8) ile ifade edilen  $\alpha_N$  eğrilerinin ve  $\alpha$  eğrisinin grafikleri Şekil 8.1'de gösterilmiştir. Şekil 8.1 (a)  $\alpha$  ile  $\alpha_4$  eğrilerinin grafiklerini, (b)  $\alpha$  ile  $\alpha_6$  eğrilerinin grafiklerini göstermektedir. Grafikler incelendiğinde kesme sınırı artırıldığında yaklaşık olarak hesaplanan  $\alpha_N$  eğrilerinin grafiklerinin  $\alpha$  eğrisinin grafiğine

benzediği görülmektedir. O halde kesme sınırı ne kadar artırılırsa, sonucun kesinliği ve doğruluğu o derece artmaktadır.

## 8.2. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Lorentziyen Küresel Timelike Eğrileri Karakterize Eden Diferensiyel Denklemlerin Çözümü için Lucas Sıralama Yöntemi

3-boyutlu Minkowski uzayında birim hızlı olmayan, regüler Lorentziyen küresel timelike eğrileri karakterize eden ve eğrinin konum vektörü ve türevlerine bağlı 3. mertebeden değişken katsayılı (3.36) lineer diferensiyel denkleminin yaklaşık çözümünü bu kez de Bölüm 4.2.1 ve 4.2.2 de verdiğimiz Lucas sıralama yöntemi kullanılarak bulmaya çalışalım. Aşağıda verilen örneği inceleyelim.

**Örnek 8.2.** Örnek 8.1 de verilen (8.5), (8.6) ve (8.7) lineer diferensiyel denklemlerini bu kez de Bölüm 4.2.1’de bahsedilen değişken katsayılı lineer diferensiyel denklemlerin çözümü için Lucas sıralama yöntemini kullanarak bulmaya çalışalım.  $N = 4$  için  $\alpha_{1,4}(t)$ ,  $\alpha_{2,4}(t)$  ve  $\alpha_{3,4}(t)$  kesilmiş (sonlu) Lucas seri çözümleri

$$\alpha_{i,4}(t) = \sum_{n=0}^4 a_{i,n} L_n(t), \quad (i=1,2,3)$$

şeklindedir. Şimdi yaklaşık çözümlerin  $a_{i,n}$ ,  $(n=0,1,2,3,4)$  Lucas katsayılarını

hesaplayalım.  $a=0$ ,  $b=\frac{\pi}{5}$  ve  $N=4$  için sıralama noktalarının kümesi

$$\left\{ t_0=0, t_1=\frac{\pi}{20}, t_2=\frac{2\pi}{20}, t_3=\frac{3\pi}{20}, t_4=\frac{\pi}{5} \right\}$$

olur. (4.59) dan (8.5), (8.6) ve (8.7) denklemleri için temel matris denklemi

$$\left\{ \sum_{k=0}^3 \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k \mathbf{D}^T \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

şeklinde yazılabilir. Bölüm 4.2.1 ve 4.2.2 de bahsedilen yöntem kullanılarak  $N=4$  için (8.5), (8.6) ve (8.7) diferensiyel denklemlerinin Lucas polinom çözümleri

$$\begin{aligned} \alpha_{1,4}(t) = & (0.310862446895044e-14) - 4t + (0.355271367880050e-14)t^2 + 0.439644563529852t^3 \\ & + (0.937197861506034e-3)t^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{2,4}(t) = & (0.284971699016090e-14) - 3.66666666666666t + (0.325650964527746e-14)t^2 \\ & + 0.403007516569031t^3 + (0.859098039713864e-3)t^4 \end{aligned}$$

$$\alpha_{3,4}(t) = 1 - (0.710542735760100e - 14)t + 1.27777777777778t^2 + 0.150571713643536t^3 - 0.256068251339149t^4$$

olarak hesaplanır. Benzer şekilde  $N = 6$  için

$$\alpha_{1,6}(t) = -(0.174082970261225e - 12) - 3.99999999999650t + (0.154543045027822e - 12)t^2 + 0.569764899386740t^3 + (0.321720353468891e - 6)t^4 - (0.184050838682026e - 1)t^5 - (0.983215193350873e - 5)t^6$$

$$\alpha_{2,6}(t) = -(0.159576036873376e - 12) - 3.66666666666346t + (0.141664457942170e - 12)t^2 + 0.522284491104512t^3 + (0.294910324013145e - 6)t^4 - (0.168713268791857e - 1)t^5 - (0.901280593904966e - 5)t^6$$

$$\alpha_{3,6}(t) = 0.99999999999943 - (0.818545231595635e - 11)t + 1.27777777777757t^2 + 0.107421129853719t^3 - 0.246362818405203t^4 - (0.167606105396771e - 1)t^5 + (0.159854351213369e - 1)t^6$$

şeklinde hesaplanır. Böylece,  $N = 4, 6$  değerleri için bulduğumuz  $\alpha_{i,N}(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) değerlerini

$$\alpha_N(t) = (\alpha_{1,N}(t), \alpha_{2,N}(t), \alpha_{3,N}(t)) \quad (8.9)$$

ifadesinde yerlerine yazarsak  $\alpha_N(t) \cong \alpha(t)$  eğrisinin parametrik denklemi bulunmuş olur. Şimdi  $N = 4, 6$  değerleri için  $[0, \frac{\pi}{5}]$  aralığından seçilmiş bazı değerlerde tam çözüm ile Lucas polinom çözümlerini karşılaştıralım.

**Tablo 8.5.** Örnek 8.2'nin  $\alpha_1(t)$  tam çözümü ile  $\alpha_{1,N}(t)$  Lucas polinom çözümlerinin  $N = 4, 6$  için sayısal sonuçları

| $t_i$    | Tam Çözüm       | Lucas Polinom Çözümleri ( $\alpha_{1,N}(t)$ ) |                     |
|----------|-----------------|-----------------------------------------------|---------------------|
|          | $\alpha_1(t_i)$ | $\alpha_{1,4}(t_i)$                           | $\alpha_{1,6}(t_i)$ |
| 0        | 0               | 0.3109e-14                                    | -0.1741e-12         |
| $\pi/30$ | -0.418113853    | -0.418374028                                  | -0.418224945        |
| $\pi/15$ | -0.831646763    | -0.833717203                                  | -0.832531002        |
| $\pi/10$ | -1.236067977    | -1.242996191                                  | -1.239027103        |
| $\pi/6$  | -2.000000000    | -2.031214749                                  | -2.013331231        |
| $\pi/5$  | -2.351141009    | -2.404074129                                  | -2.373746715        |

**Tablo 8.6.** Örnek 8.2'nin  $\alpha_2(t)$  tam çözümü ile  $\alpha_{2,N}(t)$  Lucas polinom çözümlerinin  $N = 4, 6$  için sayısal sonuçları

| $t_i$    | Tam Çözüm       | Lucas Polinom Çözümleri ( $\alpha_{2,N}(t)$ ) |                     |
|----------|-----------------|-----------------------------------------------|---------------------|
|          | $\alpha_2(t_i)$ | $\alpha_{2,4}(t_i)$                           | $\alpha_{2,6}(t_i)$ |
| 0        | 0               | 0.2850e-14                                    | -0.1596e-12         |
| $\pi/30$ | -0.382959653    | -0.383509526                                  | -0.383372866        |
| $\pi/15$ | -0.759864440    | -0.764240770                                  | -0.763153419        |
| $\pi/10$ | -1.124768205    | -1.139413175                                  | -1.135774844        |
| $\pi/6$  | -1.795967329    | -1.861946854                                  | -1.845553628        |
| $\pi/5$  | -2.091851246    | -2.203734618                                  | -2.175934488        |

**Tablo 8.7.** Örnek 8.2'nin  $\alpha_3(t)$  tam çözümü ile  $\alpha_{3,N}(t)$  Lucas polinom çözümlerinin  $N = 4, 6$  için sayısal sonuçları

| $t_i$    | Tam Çözüm       | Lucas Polinom Çözümleri ( $\alpha_{3,N}(t)$ ) |                     |
|----------|-----------------|-----------------------------------------------|---------------------|
|          | $\alpha_3(t_i)$ | $\alpha_{3,4}(t_i)$                           | $\alpha_{3,6}(t_i)$ |
| 0        | 1               | 1                                             | 0.999999999         |
| $\pi/30$ | 1.013982790     | 1.014154521                                   | 1.014105945         |
| $\pi/15$ | 1.055576796     | 1.056940206                                   | 1.056557049         |
| $\pi/10$ | 1.123726182     | 1.128285942                                   | 1.127006621         |
| $\pi/6$  | 1.332104108     | 1.352677806                                   | 1.346882909         |
| $\pi/5$  | 1.466977303     | 1.501886392                                   | 1.492037778         |

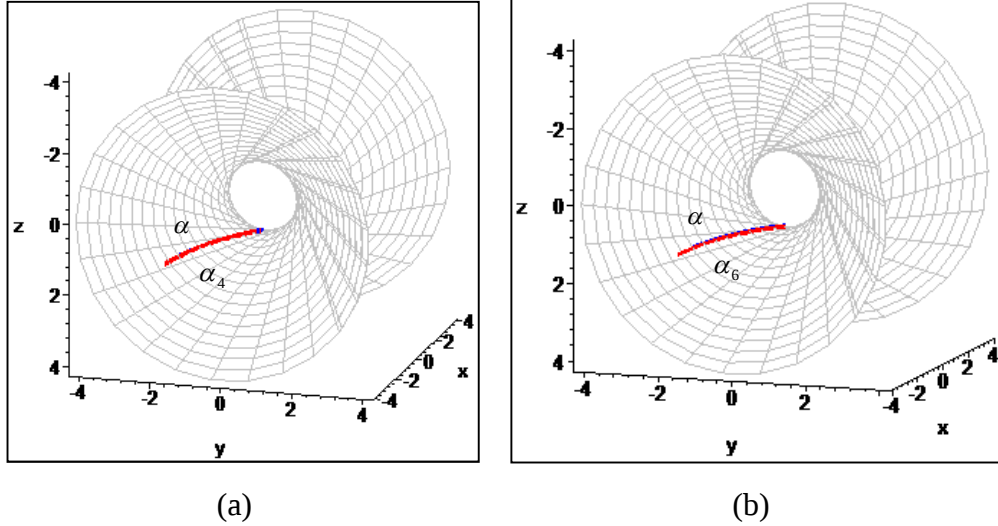
Tablo 8.5, Tablo 8.6 ve Tablo 8.7 den görülmektedir ki  $N$  değeri artırıldığında yaklaşık çözümler gerçek çözüme oldukça yaklaşmaktadır. Şimdi de  $N = 4$  ve  $N = 6$  için asıl mutlak hata fonksiyonlarını karşılaştıralım.

**Tablo 8.8.** Örnek 8.2'nin asıl mutlak hata fonksiyonlarının ( $|e_{j,N}(t)|$ )

$N = 4, 6$  ve  $j = 1, 2, 3$  için sayısal sonuçları

| $t_i$    | Asıl Mutlak Hata Fonksiyonu $ e_{j,N}(t)  =  \alpha_j(t) - \alpha_{j,N}(t) $ |                  |                  |                  |                  |                  |
|----------|------------------------------------------------------------------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
|          | $ e_{1,4}(t_i) $                                                             | $ e_{1,6}(t_i) $ | $ e_{2,4}(t_i) $ | $ e_{2,6}(t_i) $ | $ e_{3,4}(t_i) $ | $ e_{3,6}(t_i) $ |
| 0        | 0.3109e-14                                                                   | 0.1741e-12       | 0.2850e-14       | 0.1596e-12       | 0.3560e-14       | 0.5684e-13       |
| $\pi/30$ | 0.0002604                                                                    | 0.0001111        | 0.0005499        | 0.0004132        | 0.0001717        | 0.0001232        |
| $\pi/15$ | 0.0020709                                                                    | 0.0008842        | 0.0043763        | 0.0032890        | 0.0013634        | 0.0009803        |
| $\pi/10$ | 0.0069282                                                                    | 0.0029591        | 0.0146450        | 0.0110066        | 0.0045598        | 0.0032804        |
| $\pi/6$  | 0.0312148                                                                    | 0.0133312        | 0.0659795        | 0.0495863        | 0.0205737        | 0.0147788        |
| $\pi/5$  | 0.0529331                                                                    | 0.0226058        | 0.1118834        | 0.0840832        | 0.0349091        | 0.0250605        |

Tablo 8.8 den  $N$  değeri arttığında hatanın küçüldüğü ve tam çözüme oldukça yaklaşıldığı görülmektedir. Ayrıca Örnek 8.1 ve Örnek 8.2 deki sonuçlar karşılaştırıldığında Lucas polinom çözümlerinin Taylor polinom çözümlerine oldukça yakın olduğu görülmektedir.



Şekil 8.2. Örnek 8.2'nin  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_4$  ve  $\alpha_6$  eğrilerinin grafikleri

(8.9) ile ifade edilen  $\alpha_N$  eğrilerinin ve  $\alpha$  eğrisinin grafikleri Şekil 8.2'de gösterilmiştir. Şekil 8.2 (a)  $\alpha$  ile  $\alpha_4$  eğrilerinin grafiklerini, (b)  $\alpha$  ile  $\alpha_6$  eğrilerinin grafiklerini göstermektedir. Grafikler incelendiğinde kesme sınırı artırıldığında yaklaşık olarak hesaplanan  $\alpha_N$  eğrilerinin grafiklerinin  $\alpha$  eğrisinin grafiğine benzediği görülmektedir. O halde kesme sınırı ne kadar artırılırsa, sonucun kesinliği ve doğruluğu o derece artmaktadır.

### 8.3. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Aslinormali Timelike Olan Lorentziyen Küresel Spacelike Eğrileri Karakterize Eden Diferensiyel Denklemlerin Çözümü için Taylor Sıralama Yöntemi

3-boyutlu Minkowski uzayında birim hızlı olmayan, regüler aslinormali timelike olan Lorentziyen küresel spacelike eğrileri karakterize eden ve eğrinin konum vektörü ve türevlerine bağlı 3. mertebeden değişken katsayılı lineer diferensiyel denklemi Bölüm 3.2.1.2'de (3.54) ile verilmişti. (3.54) denklemi incelendiğinde, eğer aslinormali timelike olan Lorentziyen küresel spacelike bir

eğrinin hızı, eğriliği ve burulması verilirse ya da bilinirse, eğrinin denklemi yaklaşık çözüm metodları vasıtasıyla belirlenebilmektedir. Bu bölümde, 3-boyutlu Minkowski uzayında aslinormali timelike olan Lorentziyen küresel spacelike eğrileri karakterize eden lineer diferensiyel denklemlerin çözümü için Taylor sıralama metodu kullanılacaktır. Bu amaçla aşağıda verilen spacelike eğri örneğini inceleyelim.

**Örnek 8.3.**  $\alpha : \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \rightarrow E_1^3$  tanımlı

$$\alpha(t) = \left( \sinh\left(t + \frac{\pi}{60}\right), \cosh\left(t + \frac{\pi}{60}\right) \cos(t), \cosh\left(t + \frac{\pi}{60}\right) \sin(t) \right)$$

eğrisi aslinormali timelike olan Lorentziyen birim küre üzerinde yatan, birim hızlı olmayan regüler bir spacelike eğridir.  $\alpha$  eğrisinin hızı, eğriliği ve burulması sırasıyla aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$v(t) = \sinh\left(t + \frac{\pi}{60}\right) \quad (8.10)$$

$$\kappa(t) = \frac{\left( \begin{aligned} &-16 \sinh(\pi/60) \cosh^3(\pi/60) \sinh(t) \cosh^3(t) - 2 \cosh^4(t) \\ &-2 \cosh^4(\pi/60) - \cosh^2(t) - \cosh^2(\pi/60) + 16 \cosh^4(\pi/60) \cosh^2(t) \\ &+ 16 \cosh^2(\pi/60) \cosh^4(t) + 8 \sinh(\pi/60) \cosh(\pi/60) \sinh(t) \cosh^3(t) \\ &+ 8 \sinh(\pi/60) \cosh^3(\pi/60) \sinh(t) \cosh(t) - 16 \cosh^4(\pi/60) \cosh^4(t) \\ &- 10 \cosh^2(\pi/60) \cosh^2(t) + 2 \sinh(\pi/60) \cosh(\pi/60) \sinh(t) \cosh(t) \end{aligned} \right)^{1/2}}{\left( \begin{aligned} &2 \sinh(\pi/60) \cosh(\pi/60) \sinh(t) \cosh(t) \\ &-\cosh^2(t) - \cosh^2(\pi/60) + 2 \cosh^2(\pi/60) \cosh^2(t) \end{aligned} \right)^{3/2}} \quad (8.11)$$

$$\tau(t) = \frac{2 \left( \begin{aligned} &-\sinh(\pi/60) \sinh(t) \cosh^2(t) + 4 \cosh^3(\pi/60) \cosh^3(t) \\ &+ 4 \sinh(\pi/60) \cosh^2(\pi/60) \sinh(t) \cosh^2(t) \\ &- 3 \cosh(\pi/60) \cosh^3(t) - 3 \cosh^3(\pi/60) \cosh(t) \\ &+ 2 \cosh(\pi/60) \cosh(t) - \sinh(\pi/60) \cosh^2(\pi/60) \sinh(t) \end{aligned} \right)}{\left[ \begin{aligned} &-\cosh^2(t) - \cosh^2(\pi/60) + 2 \cosh^2(\pi/60) \cosh^2(t) \\ &+ 2 \sinh(\pi/60) \cosh(\pi/60) \sinh(t) \cosh(t) \\ &\cdot \left( \begin{aligned} &4 \cosh^2(\pi/60) \cosh^2(t) - 2 \cosh^2(t) - 2 \cosh^2(\pi/60) - 1 \\ &+ 4 \sinh(\pi/60) \cosh(\pi/60) \sinh(t) \cosh(t) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right]} \quad (8.12)$$

O halde aslinormali timelike olan Lorentziyen küresel  $\alpha$  spacelike eğrisini karakterize eden (3.54) lineer diferensiyel denklemi  $m=0$  için

$$p_3(t)\alpha'''(t) + p_2(t)\alpha''(t) + p_1(t)\alpha'(t) + p_0(t)\alpha(t) = 0 \quad (8.13)$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\begin{aligned}
p_3(t) &= \frac{2 \begin{pmatrix} -1.66085402 \cosh^6(t) + 1.0890202 \cosh^7(t) \sinh(t) + 0.1056325459 \\ +0.431236323 \cosh^8(t) - 4.2579185 \cosh^5(t) \sinh(t) \\ -1.008209037 \cosh^2(t) - 2.052439052 \cosh(t) \sinh(t) \\ +5.22129963 \cosh^3(t) \sinh(t) + 2.132193779 \cosh^4(t) \end{pmatrix}}{\left(1.005488128 \cosh^2(t) + 0.1049112569 \cosh(t) \sinh(t) - 1.002744064\right)^4} \\
p_2(t) &= \frac{-2 \begin{pmatrix} 2535.577578 \cosh^6(t) + 26.11963150 \cosh^{17}(t) \sinh(t) - 3233.55 \cosh^{12}(t) \\ +4714.85 \cosh^{10}(t) + 35.47 \cosh^{18}(t) - 1609.210355 \cosh^7(t) \sinh(t) \\ -0.30189265 - 335.15 \cosh^{16}(t) - 1703.078 \cosh^{11}(t) \sinh(t) \\ -4381.79207 \cosh^8(t) + 2116.865436 \cosh^9(t) \sinh(t) \\ +828.7375968 \cosh^{13}(t) \sinh(t) - 224.7019 \cosh^{15}(t) \sinh(t) \\ +713.5872703 \cosh^5(t) \sinh(t) + 1380.11 \cosh^{14}(t) - 836.10283 \cosh^4(t) \\ +120.8839863 \cosh^2(t) + 11.5525693 \cosh(t) \sinh(t) \\ -160.0735528 \cosh^3(t) \sinh(t) \end{pmatrix}}{\left[ \begin{pmatrix} (1.005488128 \cosh^2(t) + 0.1049112570 \cosh(t) \sinh(t) - 1.002744064)^5 \\ \cdot (2.010976256 \cosh^2(t) + 0.2098225139 \cosh(t) \sinh(t) - 3.005488128)^2 \\ \cdot \begin{pmatrix} 0.4219480932 \cosh^3(t) \sinh(t) + 2.04402551 \cosh^4(t) + 3.013735380 \\ -5.06048989 \cosh^2(t) - 0.5257078175 \cosh(t) \sinh(t) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right]} \\
p_1(t) &= \frac{8 \begin{pmatrix} 967.34287 \cosh^{19}(t) \sinh(t) - 1739.510423 \cosh^6(t) - 3135.32 \cosh^{17}(t) \sinh(t) \\ +10692.01 \cosh^{12}(t) - 8413.056183 \cosh^{10}(t) - 2870 \cosh^{18}(t) \\ +4248.18 \cosh^7(t) \sinh(t) + 1.455653277 + 6136.920729 \cosh^{16}(t) \\ +10672.5 \cosh^{11}(t) \sinh(t) + 15 \cosh^{23}(t) \sinh(t) + 867.8 \cosh^{20}(t) \\ +12.8685304 \cosh^{24}(t) + 4657.167927 \cosh^8(t) - 8063.63 \cosh^9(t) \sinh(t) \\ -157.15 \cosh^{22}(t) - 10048.97 \cosh^{13}(t) \sinh(t) + 6728 \cosh^{15}(t) \sinh(t) \\ -1486.28600 \cosh^5(t) \sinh(t) - 177.232 \cosh^{21}(t) \sinh(t) - 9723.392496 \cosh^{14}(t) \\ +402.3126889 \cosh^4(t) - 47.43101347 \cosh^2(t) - 29.42572295 \cosh(t) \sinh(t) \\ +310.79346 \cosh^3(t) \sinh(t) \end{pmatrix}}{\left[ \begin{pmatrix} 0, 4219480932 \cosh^3(t) \sinh(t) + 2.04402551 \cosh^4(t) + 3.013735380 \\ -5.06048989 \cosh^2(t) - 0.5257078175 \cosh(t) \sinh(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (1.005488128 \cosh^2(t) + 0.1049112570 \cosh(t) \sinh(t) - 1.002744064)^8 \\ \cdot (2.010976256 \cosh^2(t) + 0.2098225139 \cosh(t) \sinh(t) - 3.005488128)^2 \end{pmatrix} \right]}
\end{aligned}$$

$$p_0(t) = -4 \frac{\left( \begin{aligned} &4.9974299 \cosh^{19}(t) \sinh(t) - 338.8382 \cosh^6(t) - 44.255793 \cosh^{17}(t) \sinh(t) \\ &+ 0.025267073 + 1026.87 \cosh^{12}(t) - 1080.66 \cosh^{10}(t) - 61.5661 \cosh^{18}(t) \\ &+ 271.2530429 \cosh^7(t) \sinh(t) + 262.1 \cosh^{16}(t) + 527.4108185 \cosh^{11}(t) \sinh(t) \\ &+ 6.4147488 \cosh^{20}(t) + 755.729 \cosh^8(t) - 473.5173 \cosh^9(t) \sinh(t) \\ &- 379.486 \cosh^{13}(t) \sinh(t) + 171.340 \cosh^{15}(t) \sinh(t) \\ &- 93.392488 \cosh^5(t) \sinh(t) - 648.2 \cosh^{14}(t) + 88.49792 \cosh^4(t) \\ &- 10.3204766 \cosh^2(t) - 0.988045441 \cosh(t) \sinh(t) \\ &+ 16.6373109 \cosh^3(t) \sinh(t) \end{aligned} \right)}{\left[ \begin{aligned} &(1.005488128 \cosh^2(t) + 0.1049112570 \cosh(t) \sinh(t) - 1.002744064)^8 \\ &\cdot (2.010976256 \cosh^2(t) + 0.2098225139 \cosh(t) \sinh(t) - 3.005488128)^2 \end{aligned} \right]}$$

şeklindedir. Şimdi  $\alpha$  eğrisini  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$  olarak düşünelim. O halde, (8.13) eşitliği  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$  ve  $\alpha_3(t)$  için aşağıdaki gibi sağlanır.

$$p_3(t)\alpha_1'''(t) + p_2(t)\alpha_1''(t) + p_1(t)\alpha_1'(t) + p_0(t)\alpha_1(t) = 0 \quad (8.14)$$

$$p_3(t)\alpha_2'''(t) + p_2(t)\alpha_2''(t) + p_1(t)\alpha_2'(t) + p_0(t)\alpha_2(t) = 0 \quad (8.15)$$

$$p_3(t)\alpha_3'''(t) + p_2(t)\alpha_3''(t) + p_1(t)\alpha_3'(t) + p_0(t)\alpha_3(t) = 0. \quad (8.16)$$

Kabul edelim ki aslinormali timelike olan Lorentziyen küresel  $\alpha$  spacelike eğrisinin parametrik denklemi bilinmesin. Ancak hızı, eğriliği ve burulması biliniyor olsun. Bölüm 4.1.1 ve 4.1.2 de verilen Taylor sıralama metodunu kullanarak, ve (8.14), (8.15) ve (8.16) denklemleri yardımıyla  $\alpha$  eğrisinin parametrik denklemini bulalım. Sonra, elde edilen yaklaşık denklemi,  $\alpha$  eğrisinin gerçek denklemiyle karşılaştırarak, yaklaşık çözümün gerçek çözüme ne kadar yakın olduğunu tablo ve grafikler yardımıyla gösterelim.

(8.14), (8.15) ve (8.16) lineer diferensiyel denklemlerinin yaklaşık çözümlerini Bölüm 4.1.1 ve 4.1.2 de bahsedilen Taylor sıralama metodunu kullanarak bulmaya çalışalım.  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$  ve  $\alpha_3(t)$  için başlangıç koşullarını

$$\alpha_1(0) = \sinh(\pi/60), \alpha_1'(0) = \cosh(\pi/60), \alpha_1''(0) = \sinh(\pi/60)$$

$$\alpha_2(0) = \cosh(\pi/60), \alpha_2'(0) = \sinh(\pi/60), \alpha_2''(0) = 0$$

$$\alpha_3(0) = 0, \alpha_3'(0) = \cosh(\pi/60), \alpha_3''(0) = 2 \sinh(\pi/60)$$

olarak kabul edelim.  $N=4$  için  $\alpha_{1,4}(t)$ ,  $\alpha_{2,4}(t)$  ve  $\alpha_{3,4}(t)$  kesilmiş (sonlu) Taylor seri çözümleri

$$\alpha_{i,4}(t) = \sum_{n=0}^4 a_{i,n} t^n, \quad (i=1,2,3)$$

şeklindedir. Şimdi yaklaşık çözümlerin  $a_{i,n}$ , ( $n = 0, 1, 2, 3, 4$ ) Taylor katsayılarını hesaplayalım.  $a = 0$ ,  $b = \frac{\pi}{6}$  ve  $N = 4$  için sıralama noktalarının kümesi

$$\left\{ t_0 = 0, t_1 = \frac{\pi}{24}, t_2 = \frac{\pi}{12}, t_3 = \frac{\pi}{8}, t_4 = \frac{\pi}{6} \right\}$$

olur. (4.9) dan (8.14), (8.15) ve (8.16) denklemleri için temel matris denklemi

$$\left\{ \sum_{k=0}^3 \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

şeklinde yazılabilir. Bölüm 4.1.1 ve 4.1.2 de bahsedilen yöntem kullanılarak  $N = 4$  için (8.14), (8.15) ve (8.16) diferensiyel denklemlerinin Taylor polinom çözümleri

$$\alpha_{1,4}(t) = (0.5238380546e-1) + 1.001371092t + (0.2619190273e-1)t^2 + 0.155328368314554t^3 + (0.162923296542157e-1)t^4$$

$$\alpha_{2,4}(t) = 1.001371092 + (0.5238380546e-1)t - (0.155005584539046e-1)t^3 - 0.169406600714006t^4$$

$$\alpha_{3,4}(t) = 1.001371092t + (0.5238380546e-1)t^2 + 0.381447132640242t^3 - (0.577429773613733e-1)t^4$$

olarak hesaplanır. Benzer şekilde  $N = 6$  için

$$\alpha_{1,6}(t) = (0.5238380546e-1) + 1.001371092t + (0.2619190273e-1)t^2 + 0.166875997791725t^3 + (0.225226603100175e-2)t^4 + (0.814742554272576e-2)t^5 + (0.381451360615523e-3)t^6$$

$$\alpha_{2,6}(t) = 1.001371092 + (0.5238380546e-1)t - (0.175146740694982e-1)t^3 - 0.166705517958811t^4 - (0.228244496320014e-2)t^5 + (0.693046434412105e-3)t^6$$

$$\alpha_{3,6}(t) = 1.001371092t + (0.5238380546e-1)t^2 + 0.333912835418192t^3 - (0.319183972679741e-1)t^5 - (0.299282546188688e-2)t^6 - (0.461586210276685e-3)t^4$$

olarak hesaplanır. Böylece,  $N = 4, 6$  değerleri için bulduğumuz  $\alpha_{i,N}(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) değerlerini

$$\alpha_N(t) = (\alpha_{1,N}(t), \alpha_{2,N}(t), \alpha_{3,N}(t)) \quad (8.17)$$

ifadesinde yerlerine yazarsak  $\alpha_N(t) \equiv \alpha(t)$  eğrisinin parametrik denklemi bulunmuş olur. Şimdi  $N = 4, 6$  değerleri için  $[0, \frac{\pi}{6}]$  aralığından seçilmiş bazı değerlerde tam çözüm ile Taylor polinom çözümlerini karşılaştıralım.

**Tablo 8.9.** Örnek 8.3'ün  $\alpha_1(t)$  tam çözümü ile  $\alpha_{1,N}(t)$  Taylor polinom çözümlerinin  $N = 4, 6$  için sayısal sonuçları

| $t_i$     | Tam Çözüm       | Taylor Polinom Çözümleri ( $\alpha_{1,N}(t)$ ) |                     |
|-----------|-----------------|------------------------------------------------|---------------------|
|           | $\alpha_1(t_i)$ | $\alpha_{1,4}(t_i)$                            | $\alpha_{1,6}(t_i)$ |
| 0         | 0.052383805     | 0.052383805                                    | 0.052383805         |
| $\pi/36$  | 0.140080464     | 0.140073553                                    | 0.140080454         |
| $\pi/18$  | 0.228844573     | 0.228794816                                    | 0.228844512         |
| $\pi/12$  | 0.319352540     | 0.319200970                                    | 0.319352363         |
| $\pi/9$   | 0.412294059     | 0.411968070                                    | 0.412293686         |
| $5\pi/36$ | 0.508377370     | 0.507794846                                    | 0.508376707         |
| $\pi/6$   | 0.608334654     | 0.607402706                                    | 0.608333566         |

**Tablo 8.10.** Örnek 8.3'ün  $\alpha_2(t)$  tam çözümü ile  $\alpha_{2,N}(t)$  Taylor polinom çözümlerinin  $N = 4, 6$  için sayısal sonuçları

| $t_i$     | Tam Çözüm       | Taylor Polinom Çözümleri ( $\alpha_{2,N}(t)$ ) |                     |
|-----------|-----------------|------------------------------------------------|---------------------|
|           | $\alpha_2(t_i)$ | $\alpha_{2,4}(t_i)$                            | $\alpha_{2,6}(t_i)$ |
| 0         | 1.001371092     | 1.001371092                                    | 1.001371092         |
| $\pi/36$  | 1.005921149     | 1.005922315                                    | 1.005921122         |
| $\pi/18$  | 1.010265809     | 1.010274186                                    | 1.010265634         |
| $\pi/12$  | 1.013985689     | 1.014011205                                    | 1.013985170         |
| $\pi/9$   | 1.016427067     | 1.016482084                                    | 1.016425946         |
| $5\pi/36$ | 1.016701048     | 1.016799739                                    | 1.016699014         |
| $\pi/6$   | 1.013683031     | 1.013841294                                    | 1.013679647         |

**Tablo 8.11.** Örnek 8.3'ün  $\alpha_3(t)$  tam çözümü ile  $\alpha_{3,N}(t)$  Taylor polinom çözümlerinin  $N = 4, 6$  için sayısal sonuçları

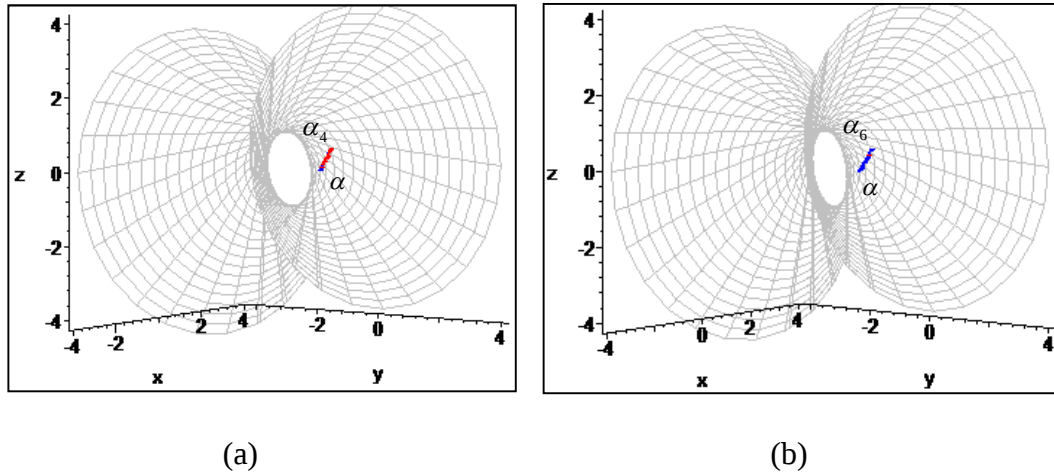
| $t_i$     | Tam Çözüm       | Taylor Polinom Çözümleri ( $\alpha_{3,N}(t)$ ) |                     |
|-----------|-----------------|------------------------------------------------|---------------------|
|           | $\alpha_3(t_i)$ | $\alpha_{3,4}(t_i)$                            | $\alpha_{3,6}(t_i)$ |
| 0         | 0               | 0                                              | 0                   |
| $\pi/36$  | 0.088006697     | 0.088035189                                    | 0.088006758         |
| $\pi/18$  | 0.178137120     | 0.178342340                                    | 0.178137519         |
| $\pi/12$  | 0.271696646     | 0.272321892                                    | 0.271697830         |
| $\pi/9$   | 0.369949198     | 0.371293912                                    | 0.369951763         |
| $5\pi/36$ | 0.474095485     | 0.476498096                                    | 0.474100153         |
| $\pi/6$   | 0.585250171     | 0.589093768                                    | 0.585257882         |

Tablo 8.9, Tablo 8.10 ve Tablo 8.11 den görülmektedir ki  $N$  değeri artırıldığına yaklaşık çözümler gerçek çözüme oldukça yaklaşmaktadır. Şimdi de  $N = 4$  ve  $N = 6$  için asıl mutlak hata fonksiyonlarını karşılaştıralım.

**Tablo 8.12.** Örnek 8.3'ün asıl mutlak hata fonksiyonlarının ( $|e_{j,N}(t)|$ ) $N = 4, 6$  ve  $j = 1, 2, 3$  için sayısal sonuçları

| $t_i$     | Asıl Mutlak Hata Fonksiyonu $ e_{j,N}(t)  =  \alpha_j(t) - \alpha_{j,N}(t) $ |                  |                  |                  |                  |                  |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
|           | $ e_{1,4}(t_i) $                                                             | $ e_{1,6}(t_i) $ | $ e_{2,4}(t_i) $ | $ e_{2,6}(t_i) $ | $ e_{3,4}(t_i) $ | $ e_{3,6}(t_i) $ |
| 0         | 0.2422e-10                                                                   | 0.2422e-10       | 0.4101e-9        | 0.4101e-7        | 0                | 0                |
| $\pi/36$  | 0.6911e-5                                                                    | 0.9522e-8        | 0.1167e-5        | 0.2649e-7        | 0.2849e-4        | 0.6105e-7        |
| $\pi/18$  | 0.4976e-4                                                                    | 0.6152e-7        | 0.8376e-5        | 0.1755e-6        | 0.2052e-3        | 0.3991e-6        |
| $\pi/12$  | 0.1516e-3                                                                    | 0.1772e-6        | 0.2552e-4        | 0.5191e-6        | 0.6252e-3        | 0.1183e-5        |
| $\pi/9$   | 0.3260e-3                                                                    | 0.3725e-6        | 0.5502e-4        | 0.1121e-5        | 0.1345e-2        | 0.2565e-5        |
| $5\pi/36$ | 0.5825e-3                                                                    | 0.6626e-6        | 0.9869e-4        | 0.2035e-5        | 0.2403e-2        | 0.4668e-5        |
| $\pi/6$   | 0.9319e-3                                                                    | 0.1086e-5        | 0.1583e-3        | 0.3385e-5        | 0.3844e-2        | 0.7710e-5        |

Tablo 8.12'den  $N$  değeri arttığında hatanın küçüldüğü, sıfıra yaklaştığı ve tam çözüme oldukça yaklaşıldığı görülmektedir.

**Şekil 8.3.** Örnek 8.3'ün  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_4$  ve  $\alpha_6$  eğrilerinin grafikleri

(8.17) ile ifade edilen  $\alpha_N$  eğrilerinin ve  $\alpha$  eğrisinin grafikleri Şekil 8.3'de gösterilmiştir. Şekil 8.3 (a)  $\alpha$  ile  $\alpha_4$  eğrilerinin grafiklerini, (b)  $\alpha$  ile  $\alpha_6$  eğrilerinin grafiklerini göstermektedir. Grafikler incelendiğinde kesme sınırı artırıldığında yaklaşık olarak hesaplanan  $\alpha_N$  eğrilerinin grafiklerinin  $\alpha$  eğrisinin grafiğine benzediği görülmektedir. O halde kesme sınırı ne kadar artırılırsa, sonucun kesinliği ve doğruluğu o derece artmaktadır.

#### 8.4. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Aslinormali Timelike Olan Lorentziyen Küresel Spacelike Eğrileri Karakterize Eden Diferensiyel Denklemlerin Çözümü için Lucas Sıralama Yöntemi

3-boyutlu Minkowski uzayında birim hızlı olmayan, regüler aslinormali timelike olan Lorentziyen küresel spacelike eğrileri karakterize eden ve eğrinin konum vektörü ve türevlerine bağlı 3. mertebeden değişken katsayılı (3.54) lineer diferensiyel denkleminin yaklaşık çözümünü bu kez de Bölüm 4.2.1 ve 4.2.2 de verdiğimiz Lucas sıralama yöntemi kullanılarak bulmaya çalışalım. Aşağıda verilen örneği inceleyelim.

**Örnek 8.4.** Örnek 8.3 de verilen (8.14), (8.15) ve (8.16) lineer diferensiyel denklemlerini bu kez de Bölüm 4.2.1 ve 4.2.2 de bahsedilen değişken katsayılı lineer diferensiyel denklemlerin çözümü için Lucas sıralama yöntemini kullanarak bulmaya çalışalım.  $N=4$  için  $\alpha_{1,4}(t)$ ,  $\alpha_{2,4}(t)$  ve  $\alpha_{3,4}(t)$  kesilmiş (sonlu) Lucas seri çözümleri

$$\alpha_{i,4}(t) = \sum_{n=0}^4 a_{i,n} L_n(t), \quad (i=1,2,3)$$

şeklindedir. Şimdi yaklaşık çözümlerin  $a_{i,n}$ ,  $(n=0,1,2,3,4)$  Lucas katsayılarını hesaplayalım.  $a=0$ ,  $b=\frac{\pi}{6}$  ve  $N=4$  için sıralama noktalarının kümesi

$$\left\{ t_0=0, t_1=\frac{\pi}{24}, t_2=\frac{\pi}{12}, t_3=\frac{\pi}{8}, t_4=\frac{\pi}{6} \right\}$$

olur. (4.59) dan (8.14), (8.15) ve (8.16) denklemleri için temel matris denklemi

$$\left\{ \sum_{k=0}^3 \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k \mathbf{D}^T \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

şeklinde yazılabilir. Bölüm 4.2.1 ve 4.2.2 de bahsedilen yöntem kullanılarak  $N=4$  için (8.14), (8.15) ve (8.16) diferensiyel denklemlerinin Lucas polinom çözümleri

$$\alpha_{1,4}(t) = (0.523838054600005e-1) + 1.001371092t + (0.2619190273e-1)t^2 + 0.145846897022499t^3 + (0.218214823830924e-1)t^4$$

$$\alpha_{2,4}(t) = 1.001371092 + (0.523838054599902e-1)t + (0.111022302462516e-15)t^2 - (0.141016337097418e-1)t^3 - 0.170113029619232t^4$$

$$\alpha_{3,4}(t) = -(0.155431223447522e-14) + 1.00137109199999t + (0.523838054599999e-1)t^2 + 0.421354840595269t^3 - (0.811032367365204e-1)t^4$$

olarak hesaplanır. Benzer şekilde  $N=6$  için

$$\alpha_{1,6}(t) = (0.523838054599998e-1) + 1.001371092t + (0.2619190273e-1)t^2 + 0.166817410304978t^3 \\ + (0.232797416370609e-2)t^4 + (0.803128824880316e-2)t^5 + (0.469763066499846e-3)t^6$$

$$\alpha_{2,6}(t) = 1.00137109199999 + (0.5238380546e-1)t - (0.111022302462516e-15)t^2 \\ - (0.176024121897183e-1)t^3 - 0.166509277308460t^4 - (0.264374063204905e-2)t^5 \\ + (0.967600972090591e-3)t^6$$

$$\alpha_{3,6}(t) = (0.118134668714021e-14) + 1.001371092t + (0.5238380546e-1)t^2 + 0.334023866736036t^3 \\ - (0.764241526996903e-3)t^4 - (0.313427402785330e-1)t^5 - (0.342684572817366e-2)t^6$$

şeklinde hesaplanır. Böylece,  $N = 4, 6$  değerleri için bulduğumuz  $\alpha_{i,N}(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) değerlerini

$$\alpha_N(t) = (\alpha_{1,N}(t), \alpha_{2,N}(t), \alpha_{3,N}(t)) \quad (8.18)$$

ifadesinde yerlerine yazarsak  $\alpha_N(t) \cong \alpha(t)$  eğrisinin parametrik denklemi bulunmuş

olur. Şimdi  $N = 4, 6$  değerleri için  $[0, \frac{\pi}{6}]$  aralığından seçilmiş bazı değerlerde tam çözüm ile Lucas polinom çözümlerini karşılaştıralım.

**Tablo 8.13.** Örnek 8.4'ün  $\alpha_1(t)$  tam çözümü ile  $\alpha_{1,N}(t)$  Lucas polinom çözümlerinin  $N = 4, 6$  için sayısal sonuçları

| $t_i$     | Tam Çözüm       | Lucas Polinom Çözümleri ( $\alpha_{1,N}(t)$ ) |                     |
|-----------|-----------------|-----------------------------------------------|---------------------|
|           | $\alpha_1(t_i)$ | $\alpha_{1,4}(t_i)$                           | $\alpha_{1,6}(t_i)$ |
| 0         | 0.052383805     | 0.052383805                                   | 0.052383805         |
| $\pi/36$  | 0.140080464     | 0.140067572                                   | 0.140080419         |
| $\pi/18$  | 0.228844573     | 0.228749537                                   | 0.228844254         |
| $\pi/12$  | 0.319352540     | 0.319056813                                   | 0.319351553         |
| $\pi/9$   | 0.412294059     | 0.411646888                                   | 0.412291876         |
| $5\pi/36$ | 0.508377370     | 0.507207620                                   | 0.508373357         |
| $\pi/6$   | 0.608334654     | 0.606457242                                   | 0.608328097         |

**Tablo 8.14.** Örnek 8.4'ün  $\alpha_2(t)$  tam çözümü ile  $\alpha_{2,N}(t)$  Lucas polinom çözümlerinin  $N = 4, 6$  için sayısal sonuçları

| $t_i$     | Tam Çözüm       | Lucas Polinom Çözümleri ( $\alpha_{2,N}(t)$ ) |                     |
|-----------|-----------------|-----------------------------------------------|---------------------|
|           | $\alpha_2(t_i)$ | $\alpha_{2,4}(t_i)$                           | $\alpha_{2,6}(t_i)$ |
| 0         | 1.001371092     | 1.001371092                                   | 1.001371092         |
| $\pi/36$  | 1.005921149     | 1.005923204                                   | 1.005921074         |
| $\pi/18$  | 1.010265809     | 1.010280967                                   | 1.010265299         |
| $\pi/12$  | 1.013985689     | 1.014032988                                   | 1.013984161         |
| $\pi/9$   | 1.016427067     | 1.016531096                                   | 1.016423752         |
| $5\pi/36$ | 1.016701048     | 1.016890344                                   | 1.016695019         |
| $\pi/6$   | 1.013683031     | 1.013989011                                   | 1.013673241         |

**Tablo 8.15.** Örnek 8.4'ün  $\alpha_3(t)$  tam çözümü ile  $\alpha_{3,N}(t)$  Lucas polinom çözümlerinin  $N = 4, 6$  için sayısal sonuçları

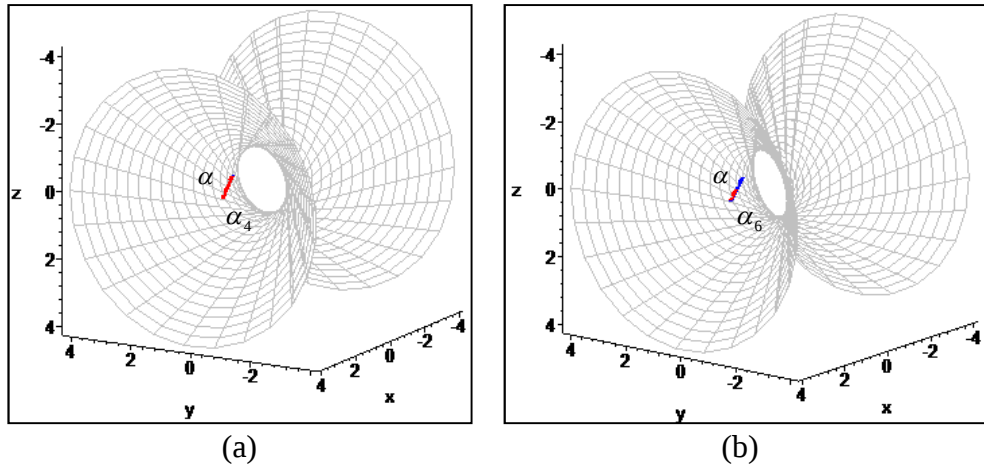
| $t_i$     | Tam Çözüm       | Lucas Polinom Çözümleri ( $\alpha_{3,N}(t)$ ) |                     |
|-----------|-----------------|-----------------------------------------------|---------------------|
|           | $\alpha_3(t_i)$ | $\alpha_{3,4}(t_i)$                           | $\alpha_{3,6}(t_i)$ |
| 0         | 0               | -0.1543e-14                                   | 0.1181e-14          |
| $\pi/36$  | 0.088006697     | 0.088060356                                   | 0.088006817         |
| $\pi/18$  | 0.178137120     | 0.178532836                                   | 0.178137909         |
| $\pi/12$  | 0.271696646     | 0.272928237                                   | 0.271698968         |
| $\pi/9$   | 0.369949198     | 0.372644469                                   | 0.369954190         |
| $5\pi/36$ | 0.474095485     | 0.476966555                                   | 0.474104515         |
| $\pi/6$   | 0.585250171     | 0.593066634                                   | 0.585264783         |

Tablo 8.13, Tablo 8.14 ve Tablo 8.15 den görülmektedir ki  $N$  değeri artırıldığına yaklaşık çözümler gerçek çözüme oldukça yaklaşmaktadır. Şimdi de  $N = 4$  ve  $N = 6$  için asıl mutlak hata fonksiyonlarını karşılaştıralım.

**Tablo 8.16** Örnek 8.4'ün asıl mutlak hata fonksiyonlarının ( $|e_{j,N}(t)|$ ) $N = 4, 6$  ve  $j = 1, 2, 3$  için sayısal sonuçları

| $t_i$     | Asıl Mutlak Hata Fonksiyonu $ e_{j,N}(t)  =  \alpha_j(t) - \alpha_{j,N}(t) $ |                  |                  |                  |                  |                  |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
|           | $ e_{1,4}(t_i) $                                                             | $ e_{1,6}(t_i) $ | $ e_{2,4}(t_i) $ | $ e_{2,6}(t_i) $ | $ e_{3,4}(t_i) $ | $ e_{3,6}(t_i) $ |
| 0         | 0.2422e-10                                                                   | 0.2422e-10       | 0.4101e-9        | 0.4101e-9        | 0.1554e-14       | 0.1181e-14       |
| $\pi/36$  | 0.1289e-4                                                                    | 0.4462e-7        | 0.2055e-5        | 0.7513e-7        | 0.5366e-4        | 0.1200e-6        |
| $\pi/18$  | 0.9504e-4                                                                    | 0.3191e-6        | 0.1516e-4        | 0.5107e-6        | 0.3957e-3        | 0.7896e-6        |
| $\pi/12$  | 0.2957e-3                                                                    | 0.9872e-6        | 0.4730e-4        | 0.1528e-5        | 0.1232e-2        | 0.2322e-5        |
| $\pi/9$   | 0.6472e-3                                                                    | 0.2183e-5        | 0.1040e-3        | 0.3315e-5        | 0.2695e-2        | 0.4992e-5        |
| $5\pi/36$ | 0.1170e-2                                                                    | 0.4013e-5        | 0.1893e-3        | 0.6030e-5        | 0.4871e-2        | 0.9031e-5        |
| $\pi/6$   | 0.1877e-2                                                                    | 0.6557e-5        | 0.3060e-3        | 0.9791e-5        | 0.7816e-2        | 0.1461e-4        |

Tablo 8.16'dan  $N$  değeri arttığında hatanın küçüldüğü ve tam çözüme oldukça yaklaşıldığı görülmektedir. Ayrıca Örnek 8.3 ve Örnek 8.4'deki sonuçlar karşılaştırıldığında Lucas polinom çözümlerinin Taylor polinom çözümlerine oldukça yakın olduğu görülmektedir.

**Şekil 8.4.** Örnek 8.4'ün  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_4$  ve  $\alpha_6$  eğrilerinin grafikleri

(8.18) ile ifade edilen  $\alpha_N$  eğrilerinin ve  $\alpha$  eğrisinin grafikleri Şekil 8.4'de gösterilmiştir. Şekil 8.4 (a)  $\alpha$  ile  $\alpha_4$  eğrilerinin grafiklerini, (b)  $\alpha$  ile  $\alpha_6$  eğrilerinin grafiklerini göstermektedir. Grafikler incelendiğinde kesme sınırı artırıldığında yaklaşık olarak hesaplanan  $\alpha_N$  eğrilerinin grafiklerinin  $\alpha$  eğrisinin grafiğine benzediği görülmektedir. O halde kesme sınırı ne kadar artırılırsa, sonucun kesinliği ve doğruluğu o derece artmaktadır.

### 8.5. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Binormali Timelike Olan Lorentziyen Küresel Spacelike Eğrileri Karakterize Eden Diferensiyel Denklemlerin Çözümü için Taylor Sıralama Yöntemi

3-boyutlu Minkowski uzayında birim hızlı olmayan, regüler binormali timelike olan Lorentziyen küresel spacelike eğrileri karakterize eden ve eğrinin konum vektörü ve türevlerine bağlı 3. mertebeden değişken katsayılı lineer diferensiyel denklemi Bölüm 3.2.1.3’de (3.72) ile verilmişti. (3.72) denklemi incelendiğinde, eğer binormali timelike olan Lorentziyen küresel spacelike bir eğrinin hızı, eğriliği ve burulması verilirse ya da bilinirse, eğrinin denklemi yaklaşık çözüm metodları vasıtasıyla belirlenebilmektedir. Bu bölümde, 3-boyutlu Minkowski uzayında binormali timelike olan Lorentziyen küresel spacelike eğrileri karakterize eden lineer diferensiyel denklemlerin çözümü için Taylor sıralama metodu kullanılacaktır. Bu amaçla aşağıda verilen spacelike eğri örneğini inceleyelim.

**Örnek 8.5.**  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow E_1^3$  tanımlı

$$\alpha(t) = (\cos(t/3), \sin(t) + \cos(t/3)\cos(t), \cos(t) - \cos(t/3)\sin(t))$$

eğrisi binormali timelike olan Lorentziyen birim küre üzerinde yatan, birim hızlı olmayan regüler bir spacelike eğridir.  $\alpha$  eğrisinin hızı, eğriliği ve burulması sırasıyla aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$v(t) = (\cos^2(t/3) - (2/3)\sin(t/3) + 1)^{(1/2)} \quad (8.19)$$

$$\kappa(t) = \frac{-(-186\sin(t/3) - 156\cos^2(t/3)\sin(t/3) + 98\cos^2(t/3) + 72\cos^4(t/3) + 189)^{(1/2)}}{(-3\cos^2(t/3) + 2\sin(t/3) - 3)(9\cos^2(t/3) - 6\sin(t/3) + 9)^{(1/2)}} \quad (8.20)$$

$$\tau(t) = \frac{(24\cos^2(t/3)\sin(t/3) + 42\sin(t/3) + 46\cos^2(t/3) - 43)}{186\sin(t/3) + 156\cos^2(t/3)\sin(t/3) - 98\cos^2(t/3) - 72\cos^4(t/3) - 189}. \quad (8.21)$$

O halde binormali timelike olan Lorentziyen küresel  $\alpha$  spacelike eğrisini karakterize eden (3.72) lineer diferensiyel denklemi  $m=0$  için

$$p_3(t)\alpha'''(t) + p_2(t)\alpha''(t) + p_1(t)\alpha'(t) + p_0(t)\alpha(t) = 0 \quad (8.22)$$

şeklinde yazılır. Burada

$$p_3(t) = - \frac{(0.3703703704e-1)\cos(t/3) \left( 630\cos^4(t/3) + 216\cos^4(t/3)\sin(t/3) + 143\cos^2(t/3) - 722 \right)}{\left( -54\cos^4(t/3)\sin(t/3) - 100\cos^2(t/3)\sin(t/3) - 62\sin(t/3) \right) + 63 + 81\cos^2(t/3) + 45\cos^4(t/3) + 27\cos^6(t/3)}$$

$$p_2(t) = \frac{(0.1234567901e-1) \left( \begin{aligned} &648 \cos^6(t/3) - 1674 \cos^4(t/3) \sin(t/3) - 150 \cos^4(t/3) \\ &+ 198 \cos^2(t/3) + 253 \cos^2(t/3) \sin(t/3) + 722 \sin(t/3) - 723 \end{aligned} \right)}{\left( \begin{aligned} &-54 \cos^4(t/3) \sin(t/3) - 100 \cos^2(t/3) \sin(t/3) - 62 \sin(t/3) \\ &+ 63 + 81 \cos^2(t/3) + 45 \cos^4(t/3) + 27 \cos^6(t/3) \end{aligned} \right)}$$

$$p_1(t) = - \frac{(0.1234567901e-1) \cos(t/3) \left( \begin{aligned} &1860 \cos^4(t/3) + 432 \cos^4(t/3) \sin(t/3) - 214 \cos^2(t/3) \sin(t/3) \\ &+ 1932 \cos^2(t/3) + 3613 \sin(t/3) - 3612 \end{aligned} \right)}{\left( \begin{aligned} &-54 \cos^4(t/3) \sin(t/3) - 100 \cos^2(t/3) \sin(t/3) - 62 \sin(t/3) \\ &+ 63 + 81 \cos^2(t/3) + 45 \cos^4(t/3) + 27 \cos^6(t/3) \end{aligned} \right)}$$

$$p_0(t) = \frac{(0.4115226337e-2) \left( \begin{aligned} &-1800 \cos^2(t/3) \sin(t/3) - 2208 \cos^4(t/3) \sin(t/3) + 3612 \sin(t/3) \\ &- 3613 - 676 \cos^4(t/3) + 576 \cos^6(t/3) + 3704 \cos^2(t/3) \end{aligned} \right)}{\left( \begin{aligned} &-54 \cos^4(t/3) \sin(t/3) - 100 \cos^2(t/3) \sin(t/3) - 62 \sin(t/3) \\ &+ 63 + 81 \cos^2(t/3) + 45 \cos^4(t/3) + 27 \cos^6(t/3) \end{aligned} \right)}$$

şeklinde. Şimdi  $\alpha$  eğrisini  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$  olarak düşünelim. O halde, (8.22) eşitliği  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$  ve  $\alpha_3(t)$  için aşağıdaki gibi sağlanır.

$$p_3(t)\alpha_1'''(t) + p_2(t)\alpha_1''(t) + p_1(t)\alpha_1'(t) + p_0(t)\alpha_1(t) = 0 \quad (8.23)$$

$$p_3(t)\alpha_2'''(t) + p_2(t)\alpha_2''(t) + p_1(t)\alpha_2'(t) + p_0(t)\alpha_2(t) = 0 \quad (8.24)$$

$$p_3(t)\alpha_3'''(t) + p_2(t)\alpha_3''(t) + p_1(t)\alpha_3'(t) + p_0(t)\alpha_3(t) = 0. \quad (8.25)$$

Kabul edelim ki binormali timelike olan Lorentziyen küresel  $\alpha$  spacelike eğrisinin parametrik denklemi bilinmesin. Ancak hızı, eğriliği ve burulması biliniyor olsun. Bölüm 4.1.1 ve 4.1.2 de verilen Taylor sıralama metodunu kullanarak, ve (8.23), (8.24) ve (8.25) denklemleri yardımıyla  $\alpha$  eğrisinin parametrik denklemini bulalım. Sonra, elde edilen yaklaşık denklemi,  $\alpha$  eğrisinin gerçek denklemiyle karşılaştırarak, yaklaşık çözümün gerçek çözüme ne kadar yakın olduğunu tablo ve grafikler yardımıyla gösterelim.

(8.23), (8.24) ve (8.25) lineer diferensiyel denklemlerinin yaklaşık çözümlerini Bölüm 4.1.1 ve 4.1.2 de bahsedilen Taylor sıralama metodunu kullanarak bulmaya çalışalım.  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$  ve  $\alpha_3(t)$  için başlangıç koşullarını

$$\alpha_1(0) = 1, \alpha_1'(0) = 0, \alpha_1''(0) = -\frac{1}{9}$$

$$\alpha_2(0) = 1, \alpha_2'(0) = 1, \alpha_2''(0) = -\frac{10}{9}$$

$$\alpha_3(0) = 1, \alpha_3'(0) = -1, \alpha_3''(0) = -1$$

olarak kabul edelim.  $N=4$  için  $\alpha_{1,4}(t)$ ,  $\alpha_{2,4}(t)$  ve  $\alpha_{3,4}(t)$  kesilmiş (sonlu) Taylor seri çözümleri



$$\begin{aligned}\alpha_{3,13}(t) = & 1 - t - 0.5t^2 + 0.221930461707007254t^3 + (0.421167050392465825e - 1)t^4 \\ & - (0.185235942125547836e - 1)t^5 - (0.112652699145066038e - 2)t^6 \\ & + (0.639723822411397692e - 3)t^7 + (0.520074999055264442e - 4)t^8 \\ & - (0.205553992579377010e - 4)t^9 - (0.129181392927862904e - 5)t^{10} \\ & + (0.713267370942502477e - 6)t^{11} - (0.697571089117534662e - 7)t^{12} \\ & + (0.228357407550778494e - 8)t^{13}\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Böylece,  $N = 4, 7, 13$  değerleri için bulduğumuz  $\alpha_{i,N}(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) değerlerini

$$\alpha_N(t) = (\alpha_{1,N}(t), \alpha_{2,N}(t), \alpha_{3,N}(t)) \quad (8.26)$$

ifadesinde yerlerine yazarsak  $\alpha_N(t) \cong \alpha(t)$  eğrisinin parametrik denklemi bulunmuş olur. Şimdi  $N = 4, 7, 13$  değerleri için  $[0, 2\pi]$  aralığından seçilmiş bazı değerlerde tam çözüm ile Taylor polinom çözümlerini karşılaştıralım.

**Tablo 8.17.** Örnek 8.5'in  $\alpha_1(t)$  tam çözümü ile  $\alpha_{1,N}(t)$  Taylor polinom çözümlerinin  $N = 4, 7, 13$  için sayısal sonuçları

| $t_i$    | Tam Çözüm       | Taylor Polinom Çözümleri ( $\alpha_{1,N}(t)$ ) |                     |                      |
|----------|-----------------|------------------------------------------------|---------------------|----------------------|
|          | $\alpha_1(t_i)$ | $\alpha_{1,4}(t_i)$                            | $\alpha_{1,7}(t_i)$ | $\alpha_{1,13}(t_i)$ |
| 0        | 1               | 1                                              | 1                   | 1                    |
| $\pi/3$  | 0.939692621     | 0.940029882                                    | 0.939699846         | 0.939692674          |
| $2\pi/3$ | 0.766044443     | 0.767535726                                    | 0.766068213         | 0.766044597          |
| $\pi$    | 0.499999999     | 0.501747968                                    | 0.500029735         | 0.500000783          |
| $4\pi/3$ | 0.173648178     | 0.172705239                                    | 0.173669817         | 0.173648306          |
| $5\pi/3$ | -0.173648178    | -0.178745641                                   | -0.173642329        | -0.173648136         |
| $2\pi$   | -0.499999999    | -0.500949660                                   | -0.500043856        | -0.499999949         |

**Tablo 8.18.** Örnek 8.5'in  $\alpha_2(t)$  tam çözümü ile  $\alpha_{2,N}(t)$  Taylor polinom çözümlerinin  $N = 4, 7, 13$  için sayısal sonuçları

| $t_i$    | Tam Çözüm       | Taylor Polinom Çözümleri ( $\alpha_{2,N}(t)$ ) |                     |                      |
|----------|-----------------|------------------------------------------------|---------------------|----------------------|
|          | $\alpha_2(t_i)$ | $\alpha_{2,4}(t_i)$                            | $\alpha_{2,7}(t_i)$ | $\alpha_{2,13}(t_i)$ |
| 0        | 1               | 1                                              | 1                   | 1                    |
| $\pi/3$  | 1.335871714     | 1.510487683                                    | 1.140552426         | 1.336163597          |
| $2\pi/3$ | 0.483003182     | 1.220001383                                    | -0.162154346        | 0.483849248          |
| $\pi$    | -0.500000000    | 0.497487925                                    | -1.307703888        | -0.498992936         |
| $4\pi/3$ | -0.952849493    | -0.341068271                                   | -1.541001635        | -0.952149385         |
| $5\pi/3$ | -0.952849493    | -1.032645187                                   | -1.112798404        | -0.952693244         |
| $2\pi$   | -0.499999999    | -1.367183211                                   | 0.707706930         | -0.501038411         |

**Tablo 8.19.** Örnek 8.5'in  $\alpha_3(t)$  tam çözümü ile  $\alpha_{3,N}(t)$  Taylor polinom çözümlerinin  $N = 4, 7, 13$  için sayısal sonuçları

| $t_i$    | Tam Çözüm       | Taylor Polinom Çözümleri ( $\alpha_{3,N}(t)$ ) |                     |                      |
|----------|-----------------|------------------------------------------------|---------------------|----------------------|
|          | $\alpha_3(t_i)$ | $\alpha_{3,4}(t_i)$                            | $\alpha_{3,7}(t_i)$ | $\alpha_{3,13}(t_i)$ |
| 0        | 1               | 1                                              | 1                   | 1                    |
| $\pi/3$  | -0.313797681    | -0.304683035                                   | -0.402529238        | -0.313886075         |
| $2\pi/3$ | -1.163413948    | -1.226284927                                   | -1.453584384        | -1.163670718         |
| $\pi$    | -0.999999999    | -1.014543102                                   | -1.362624376        | -1.000305881         |
| $4\pi/3$ | -0.349616267    | 0.285050890                                    | -0.613518551        | -0.349829083         |
| $5\pi/3$ | 0.349616267     | 1.831251374                                    | 0.272474175         | 0.349567041          |
| $2\pi$   | 1               | 1.987058549                                    | 0.550087076         | 1.000871263          |

Tablo 8.17, Tablo 8.18 ve Tablo 8.19'dan görülmektedir ki  $N$  değeri artırıldığında yaklaşık çözümler gerçek çözüme oldukça yaklaşmaktadır. Şimdi de  $N = 4$ ,  $N = 7$  ve  $N = 13$  için asıl mutlak hata fonksiyonlarını karşılaştıralım.

**Tablo 8.20.** Örnek 8.5'in asıl mutlak hata fonksiyonunun ( $|e_{1,N}(t)|$ )

$N = 4, 7, 13$  için sayısal sonuçları

| $t_i$    | Asıl Mutlak Hata Fonksiyonu $ e_{1,N}(t)  =  \alpha_1(t) - \alpha_{1,N}(t) $ |                  |                   |
|----------|------------------------------------------------------------------------------|------------------|-------------------|
|          | $ e_{1,4}(t_i) $                                                             | $ e_{1,7}(t_i) $ | $ e_{1,13}(t_i) $ |
| 0        | 0                                                                            | 0                | 0                 |
| $\pi/3$  | 0.337262e-3                                                                  | 0.722485e-5      | 0.531018e-7       |
| $2\pi/3$ | 0.149128e-2                                                                  | 0.237697e-4      | 0.154030e-6       |
| $\pi$    | 0.174797e-2                                                                  | 0.297355e-4      | 0.182785e-6       |
| $4\pi/3$ | 0.942939e-3                                                                  | 0.216392e-4      | 0.128274e-6       |
| $5\pi/3$ | 0.509746e-2                                                                  | 0.584902e-5      | 0.415931e-7       |
| $2\pi$   | 0.949660e-3                                                                  | 0.438564e-4      | 0.502275e-6       |

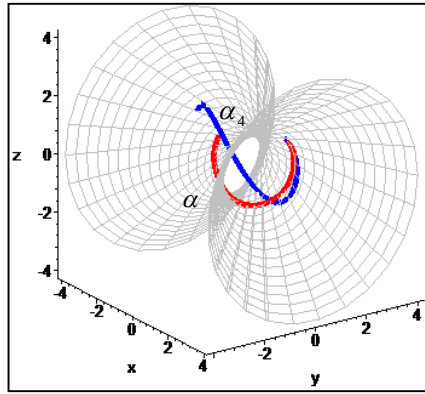
**Tablo 8.21.** Örnek 8.5'in asıl mutlak hata fonksiyonunun  $(|e_{2,N}(t)|)$  $N = 4, 7, 13$  için sayısal sonuçları

| $t_i$    | Asıl Mutlak Hata Fonksiyonu $ e_{2,N}(t)  =  \alpha_2(t) - \alpha_{2,N}(t) $ |                  |                   |
|----------|------------------------------------------------------------------------------|------------------|-------------------|
|          | $ e_{2,4}(t_i) $                                                             | $ e_{2,7}(t_i) $ | $ e_{2,13}(t_i) $ |
| 0        | 0                                                                            | 0                | 0                 |
| $\pi/3$  | 0.174615                                                                     | 0.195319         | 0.000292          |
| $2\pi/3$ | 0.736998                                                                     | 0.645157         | 0.000846          |
| $\pi$    | 0.997488                                                                     | 0.807704         | 0.001007          |
| $4\pi/3$ | 0.611781                                                                     | 0.588152         | 0.000700          |
| $5\pi/3$ | 0.079796                                                                     | 0.159949         | 0.000156          |
| $2\pi$   | 0.867183                                                                     | 1.207707         | 0.001038          |

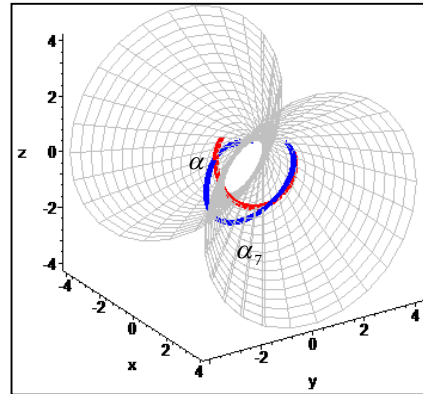
**Tablo 8.22.** Örnek 8.5'in asıl mutlak hata fonksiyonunun  $(|e_{3,N}(t)|)$  $N = 4, 7, 13$  için sayısal sonuçları

| $t_i$    | Asıl Mutlak Hata Fonksiyonu $ e_{3,N}(t)  =  \alpha_3(t) - \alpha_{3,N}(t) $ |                  |                   |
|----------|------------------------------------------------------------------------------|------------------|-------------------|
|          | $ e_{3,4}(t_i) $                                                             | $ e_{3,7}(t_i) $ | $ e_{3,13}(t_i) $ |
| 0        | 0                                                                            | 0                | 0                 |
| $\pi/3$  | 0.009115                                                                     | 0.088732         | 0.000088          |
| $2\pi/3$ | 0.062871                                                                     | 0.290170         | 0.000257          |
| $\pi$    | 0.014543                                                                     | 0.362624         | 0.000306          |
| $4\pi/3$ | 0.634667                                                                     | 0.263902         | 0.000213          |
| $5\pi/3$ | 1.481635                                                                     | 0.077142         | 0.000049          |
| $2\pi$   | 0.987059                                                                     | 0.449913         | 0.000871          |

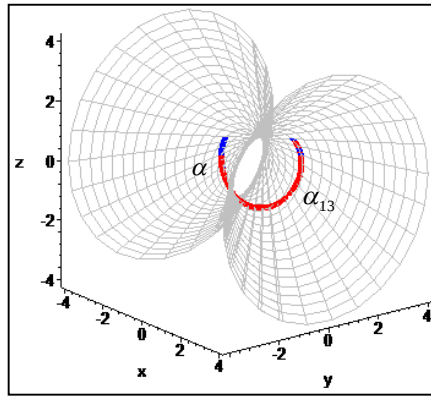
Tablo 8.20, Tablo 8.21 ve Tablo 8.22'den  $N$  değeri arttığında hatanın küçüldüğü, sifıra yaklaştığı ve tam çözüme oldukça yaklaşıldığı görülmektedir.



(a)



(b)



(c)

**Şekil 8.5.** Örnek 8.5'in  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_4$ ,  $\alpha_7$  ve  $\alpha_{13}$  eğrilerinin grafikleri

(8.27) ile ifade edilen  $\alpha_N$  eğrilerinin ve  $\alpha$  eğrisinin grafikleri Şekil 8.5'de gösterilmiştir. Şekil 8.5 (a)  $\alpha$  ile  $\alpha_4$  eğrilerinin grafiklerini, (b)  $\alpha$  ile  $\alpha_7$  eğrilerinin grafiklerini, (c)  $\alpha$  ile  $\alpha_{13}$  eğrilerinin grafiklerini göstermektedir. Grafikler incelendiğinde kesme sınırı artırıldığında yaklaşık olarak hesaplanan  $\alpha_N$  eğrilerinin grafiklerinin  $\alpha$  eğrisinin grafiğine benzediği görülmektedir. O halde kesme sınırı ne kadar artırılırsa, sonucun kesinliği ve doğruluğu o derece artmaktadır.

### 8.6. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Binormali Timelike Olan Lorentziyen Küresel Spacelike Eğrileri Karakterize Eden Diferensiyel Denklemlerin Çözümü için Lucas Sıralama Yöntemi

3-boyutlu Minkowski uzayında birim hızlı olmayan, regüler binormali timelike olan Lorentziyen küresel spacelike eğrileri karakterize eden ve eğrinin konum vektörü ve türevlerine bağlı 3. mertebeden değişken katsayılı (3.72) lineer diferensiyel denkleminin yaklaşık çözümünü bu kez de Bölüm 4.2.1 ve 4.2.2 de verdiğimiz Lucas sıralama yöntemi kullanılarak bulmaya çalışalım. Aşağıda verilen örneği inceleyelim.

**Örnek 8.6.** Örnek 8.5 de verilen (8.23), (8.24) ve (8.25) lineer diferensiyel denklemlerini bu kez de Bölüm 4.2.1 ve 4.2.2 de bahsedilen değişken katsayılı lineer diferensiyel denklemlerin çözümü için Lucas sıralama yöntemini kullanarak bulmaya çalışalım.  $N=4$  için  $\alpha_{1,4}(t)$ ,  $\alpha_{2,4}(t)$  ve  $\alpha_{3,4}(t)$  kesilmiş (sonlu) Lucas seri çözümleri

$$\alpha_{i,4}(t) = \sum_{n=0}^4 a_{i,n} L_n(t), \quad (i=1,2,3)$$

şeklindedir. Şimdi yaklaşık çözümlerin  $a_{i,n}$ ,  $(n=0,1,2,3,4)$  Lucas katsayılarını hesaplayalım.  $a=0$ ,  $b=2\pi$  ve  $N=4$  için sıralama noktalarının kümesi

$$\left\{ t_0=0, t_1=\frac{\pi}{2}, t_2=\pi, t_3=\frac{3\pi}{2}, t_4=2\pi \right\}$$

olur. (4.59) dan (8.23), (8.24) ve (8.25) denklemleri için temel matris denklemi

$$\left\{ \sum_{k=0}^3 \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k \mathbf{D}^T \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

şeklinde yazılabilir. Bölüm 4.2.1 ve 4.2.2 de bahsedilen yöntem kullanılarak  $N=4$  için (8.23), (8.24) ve (8.25) diferensiyel denklemlerinin Lucas polinom çözümleri

$$\alpha_{1,4}(t) = 0.9999999996 - (0.5555555555e-1)t^2 + (0.43802995e-3)t^3 + (0.374478869e-3)t^4$$

$$\alpha_{2,4}(t) = 1+t-0.5555555556t^2 + (0.650757575e-1)t^3 - (0.183502497e-2)t^4$$

$$\alpha_{3,4}(t) = 0.9999999994 - t - 0.5t^2 + 0.2821210045t^3 - (0.2757104231e-1)t^4$$

olarak hesaplanır. Benzer şekilde  $N=7$  için

$$\begin{aligned} \alpha_{1,7}(t) = & 1 - (0.134034493573520e-16)t - (0.555555555555552e-1)t^2 \\ & + (0.142096342344552e-4)t^3 + (0.503803487266913e-3)t^4 + (0.352595969518132e-5)t^5 \\ & - (0.257443722062980e-5)t^6 + (0.733323854791909e-7)t^7 \end{aligned}$$

$$\alpha_{2,7}(t) = 1.00000000000001 + t - 0.55555555555546t^2 - 0.542273045134405t^3 \\ + 0.336742357103311t^4 - (0.693470196595196e-1)t^5 + (0.601517219705502e-2)t^6 \\ - (0.170662315274227e-3)t^7$$

$$\alpha_{3,7}(t) = 1.00000000000001 - 0.99999999999996t - 0.49999999999993t^2 \\ + (0.415255469345884e-1)t^3 + 0.185128282591445t^4 - (0.716591529804859e-1)t^5 \\ + (0.103489991186205e-1)t^6 - (0.538776942515938e-3)t^7$$

ve  $N=13$  için

$$\alpha_{1,13}(t) = -(0.82623500310625164e-13)t + 1.000000000000029568 \\ + (0.202986329542256372e-12)t^{13} - (0.55555555555484223529e-1)t^2 \\ + (0.20516970368381507749e-6)t^3 + (0.51408728227196451624e-3)t^4 \\ + (0.29500928169869341475e-6)t^5 - (0.20977070941073889322e-5)t^6 \\ + (0.88542627333386120912e-7)t^7 - (0.25037734213812933787e-7)t^8 \\ + (0.66253919697254619062e-8)t^9 - (0.10618921672967082969e-8)t^{10} \\ + (0.11186739638627630484e-9)t^{11} - (0.707491245733875124e-11)t^{12}$$

$$\alpha_{2,13}(t) = 0.9999999999983355808t + 1.0000000000000411517 \\ + (0.68069883867317778807e-4)t^9 - (0.14930244832586518618e-4)t^{10} \\ + (0.15543620600004870534e-5)t^{11} - (0.790078028772890682e-7)t^{12} \\ + (0.156783542209032026e-8)t^{13} - 0.5555555555530241305t^2 \\ - 0.16567095412568548245t^3 + (0.68327256614496824788e-1)t^4 \\ + (0.10000180838673711866e-1)t^5 - (0.51769355144667328366e-2)t^6 \\ + (0.43725439539843274832e-3)t^7 - (0.11592003042372044118e-3)t^8$$

$$\alpha_{3,13}(t) = -1.0000000000008764170t + 1.0000000000003092788 \\ - (0.12926438577520130840e-5)t^{10} + (0.71334324188455064170e-6)t^{11} \\ - (0.697610536947303010e-7)t^{12} + (0.228366121276693090e-8)t^{13} \\ - 0.49999999999940245810t^2 + 0.22193068378054161822t^3 \\ - (0.18523282853427607389e-1)t^5 - (0.11267252041285260188e-2)t^6 \\ + (0.63981174661244250898e-3)t^7 + (0.51980353172792199826e-4)t^8 \\ + (0.42116366036911639020e-1)t^4 - (0.20549613509757398552e-4)t^9$$

şeklinde hesaplanır. Böylece,  $N = 4, 7, 13$  değerleri için bulduğumuz  $\alpha_{i,N}(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) değerlerini

$$\alpha_N(t) = (\alpha_{1,N}(t), \alpha_{2,N}(t), \alpha_{3,N}(t)) \quad (8.27)$$

ifadesinde yerlerine yazarsak  $\alpha_N(t) \cong \alpha(t)$  eğrisinin parametrik denklemi bulunmuş olur. Şimdi  $N = 4, 7, 13$  değerleri için  $[0, 2\pi]$  aralığından seçilmiş bazı değerlerde tam çözüm ile Lucas polinom çözümlerini karşılaştıralım.

**Tablo 8.23.** Örnek 8.6'nın  $\alpha_1(t)$  tam çözümü ile  $\alpha_{1,N}(t)$  Lucas polinom çözümlerinin  $N = 4, 7, 13$  için sayısal sonuçları

| $t_i$    | Tam Çözüm       | Lucas Polinom Çözümleri ( $\alpha_{1,N}(t)$ ) |                     |                      |
|----------|-----------------|-----------------------------------------------|---------------------|----------------------|
|          | $\alpha_1(t_i)$ | $\alpha_{1,4}(t_i)$                           | $\alpha_{1,7}(t_i)$ | $\alpha_{1,13}(t_i)$ |
| 0        | 1               | 0.999999999                                   | 1                   | 1                    |
| $\pi/3$  | 0.939692621     | 0.940029882                                   | 0.939699846         | 0.939692683          |
| $2\pi/3$ | 0.766044443     | 0.767535726                                   | 0.766068212         | 0.766044624          |
| $\pi$    | 0.499999999     | 0.501747968                                   | 0.500029734         | 0.500000215          |
| $4\pi/3$ | 0.173648178     | 0.172705239                                   | 0.173669816         | 0.173648329          |
| $5\pi/3$ | -0.173648178    | -0.178745641                                  | -0.173642329        | -0.173648126         |
| $2\pi$   | -0.499999999    | -0.500949660                                  | -0.500043858        | -0.4999999465        |

**Tablo 8.24.** Örnek 8.6'nın  $\alpha_2(t)$  tam çözümü ile  $\alpha_{2,N}(t)$  Lucas polinom çözümlerinin  $N = 4, 7, 13$  için sayısal sonuçları

| $t_i$    | Tam Çözüm       | Lucas Polinom Çözümleri ( $\alpha_{2,N}(t)$ ) |                     |                      |
|----------|-----------------|-----------------------------------------------|---------------------|----------------------|
|          | $\alpha_2(t_i)$ | $\alpha_{2,4}(t_i)$                           | $\alpha_{2,7}(t_i)$ | $\alpha_{2,13}(t_i)$ |
| 0        | 1               | 1                                             | 1                   | 1                    |
| $\pi/3$  | 1.335871714     | 1.510487683                                   | 1.140552437         | 1.336162958          |
| $2\pi/3$ | 0.483003182     | 1.220001383                                   | -0.162154310        | 0.483847394          |
| $\pi$    | -0.500000000    | 0.497487925                                   | -1.307703843        | -0.498995144         |
| $4\pi/3$ | -0.952849493    | -0.341068271                                  | -1.541001600        | -0.952150915         |
| $5\pi/3$ | -0.952849493    | -1.032645187                                  | -1.112798378        | -0.952693474         |
| $2\pi$   | -0.499999999    | -1.367183211                                  | 0.707707046         | -0.501043542         |

**Tablo 8.25.** Örnek 8.6'nın  $\alpha_3(t)$  tam çözümü ile  $\alpha_{3,N}(t)$  Lucas polinom çözümlerinin  $N = 4, 7, 13$  için sayısal sonuçları

| $t_i$    | Tam Çözüm       | Lucas Polinom Çözümleri ( $\alpha_{3,N}(t)$ ) |                     |                      |
|----------|-----------------|-----------------------------------------------|---------------------|----------------------|
|          | $\alpha_3(t_i)$ | $\alpha_{3,4}(t_i)$                           | $\alpha_{3,7}(t_i)$ | $\alpha_{3,13}(t_i)$ |
| 0        | 1               | 0.999999999                                   | 1                   | 1                    |
| $\pi/3$  | -0.313797681    | -0.304683036                                  | -0.402529236        | -0.313886007         |
| $2\pi/3$ | -1.163413948    | -1.226284928                                  | -1.453584376        | -1.163670521         |
| $\pi$    | -0.999999999    | -1.014543102                                  | -1.362624366        | -1.000305645         |
| $4\pi/3$ | -0.349616267    | 0.285050890                                   | -0.613518540        | -0.349828908         |
| $5\pi/3$ | 0.349616267     | 1.831251373                                   | 0.272474198         | 0.349567186          |
| $2\pi$   | 1               | 1.987058548                                   | 0.550087143         | 1.000871487          |

Tablo 8.23, Tablo 8.24 ve Tablo 8.25'den görülmektedir ki  $N$  değeri artırıldığına yaklaşık çözümler gerçek çözüme oldukça yaklaşmaktadır. Şimdi de  $N = 4$ ,  $N = 7$  ve  $N = 13$  için asıl mutlak hata fonksiyonlarını karşılaştıralım.

**Tablo 8.26.** Örnek 8.6'nın asıl mutlak hata fonksiyonunun ( $|e_{1,N}(t)|$ ) $N = 4, 7, 13$  için sayısal sonuçları

| $t_i$    | Asıl Mutlak Hata Fonksiyonu $ e_{1,N}(t)  =  \alpha_1(t) - \alpha_{1,N}(t) $ |                  |                   |
|----------|------------------------------------------------------------------------------|------------------|-------------------|
|          | $ e_{1,4}(t_i) $                                                             | $ e_{1,7}(t_i) $ | $ e_{1,13}(t_i) $ |
| 0        | 0.4e-9                                                                       | 0.22e-15         | 0.29668e-14       |
| $\pi/3$  | 0.337262e-3                                                                  | 0.722456e-5      | 0.623586e-7       |
| $2\pi/3$ | 0.149128e-2                                                                  | 0.237688e-4      | 0.180915e-6       |
| $\pi$    | 0.174797e-2                                                                  | 0.297342e-4      | 0.214867e-6       |
| $4\pi/3$ | 0.942939e-3                                                                  | 0.216383e-4      | 0.151233e-6       |
| $5\pi/3$ | 0.509746e-2                                                                  | 0.584869e-5      | 0.512413e-7       |
| $2\pi$   | 0.949660e-3                                                                  | 0.438578e-4      | 0.534755e-6       |

**Tablo 8.27.** Örnek 8.6'nın asıl mutlak hata fonksiyonunun ( $|e_{2,N}(t)|$ ) $N = 4, 7, 13$  için sayısal sonuçları

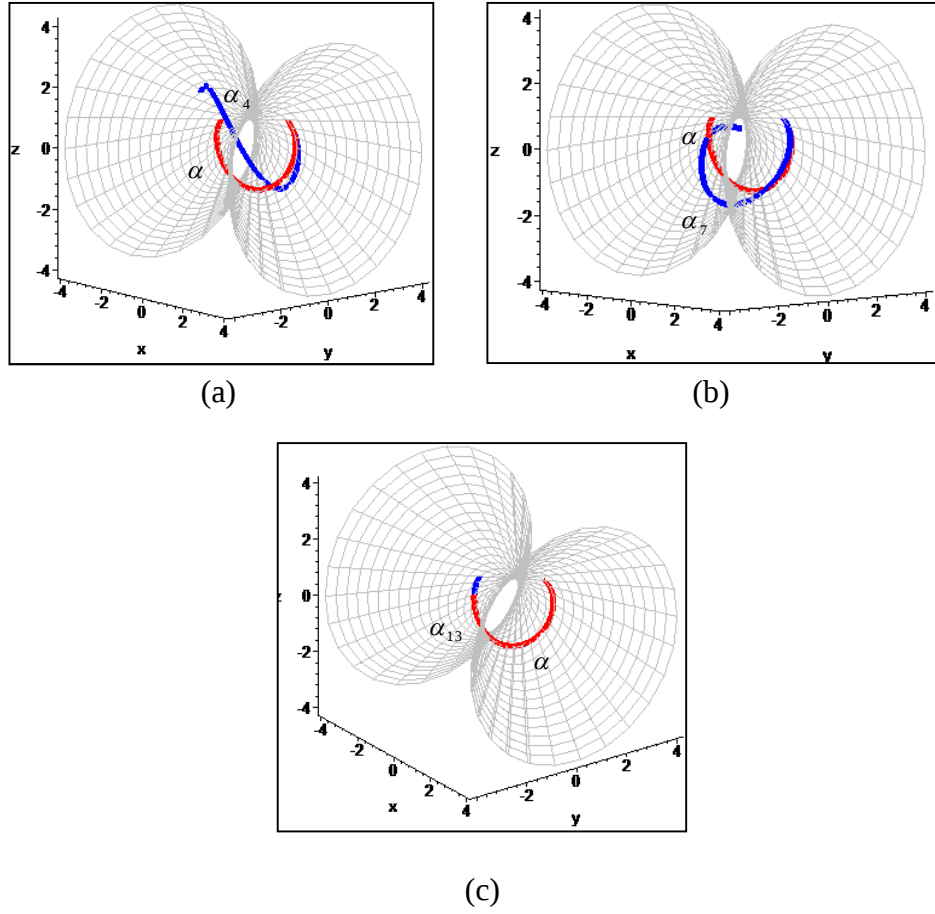
| $t_i$    | Asıl Mutlak Hata Fonksiyonu $ e_{2,N}(t)  =  \alpha_2(t) - \alpha_{2,N}(t) $ |                  |                   |
|----------|------------------------------------------------------------------------------|------------------|-------------------|
|          | $ e_{2,4}(t_i) $                                                             | $ e_{2,7}(t_i) $ | $ e_{2,13}(t_i) $ |
| 0        | 0                                                                            | 0.1044e-13       | 0.411517e-13      |
| $\pi/3$  | 0.174616                                                                     | 0.195319         | 0.000291          |
| $2\pi/3$ | 0.736998                                                                     | 0.645157         | 0.000844          |
| $\pi$    | 0.997488                                                                     | 0.807704         | 0.001005          |
| $4\pi/3$ | 0.611781                                                                     | 0.588152         | 0.000699          |
| $5\pi/3$ | 0.079796                                                                     | 0.159949         | 0.000156          |
| $2\pi$   | 0.867183                                                                     | 1.207707         | 0.001044          |

**Tablo 8.28.** Örnek 8.6'nın asıl mutlak hata fonksiyonunun ( $|e_{3,N}(t)|$ ) $N = 4, 7, 13$  için sayısal sonuçları

| $t_i$    | Asıl Mutlak Hata Fonksiyonu $ e_{3,N}(t)  =  \alpha_3(t) - \alpha_{3,N}(t) $ |                  |                   |
|----------|------------------------------------------------------------------------------|------------------|-------------------|
|          | $ e_{3,4}(t_i) $                                                             | $ e_{3,7}(t_i) $ | $ e_{3,13}(t_i) $ |
| 0        | 0.6e-9                                                                       | 0.822e-14        | 0.3092788e-12     |
| $\pi/3$  | 0.009115                                                                     | 0.088732         | 0.000088          |
| $2\pi/3$ | 0.062871                                                                     | 0.290170         | 0.000257          |
| $\pi$    | 0.014543                                                                     | 0.362624         | 0.000306          |
| $4\pi/3$ | 0.634667                                                                     | 0.263902         | 0.000213          |
| $5\pi/3$ | 1.481635                                                                     | 0.077142         | 0.000049          |
| $2\pi$   | 0.987059                                                                     | 0.449913         | 0.000871          |

Tablo 8.26, Tablo 8.27 ve Tablo 8.28'den  $N$  değeri arttığında hatanın küçüldüğü ve tam çözüme oldukça yaklaşıldığı görülmektedir. Ayrıca Örnek 8.5 ve Örnek 8.6 daki

sonuçlar karşılaştırıldığında Lucas polinom çözümlerinin Taylor polinom çözümlerine oldukça yakın olduğu görülmektedir.



**şekil 8.6.** rnek 8.6'nın  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_4$ ,  $\alpha_7$  ve  $\alpha_{13}$  eğrilerinin grafikleri

(8.28) ile ifade edilen  $\alpha_N$  eğrilerinin ve  $\alpha$  eğrisinin grafikleri şekil 8.6'da gösterilmiştir. şekil 8.6 (a)  $\alpha$  ile  $\alpha_4$  eğrilerinin grafiklerini, (b)  $\alpha$  ile  $\alpha_7$  eğrilerinin grafiklerini ve (c)  $\alpha$  ile  $\alpha_{13}$  eğrilerinin grafiklerini göstermektedir. Grafikler incelendiğinde kesme sınırı artırıldığında yaklaşık olarak hesaplanan  $\alpha_N$  eğrilerinin grafiklerinin  $\alpha$  eğrisinin grafiğine benzediği görülmektedir. O halde kesme sınırı ne kadar artırılırsa, sonucun kesinliği ve doğruluğu o derece artmaktadır.

## 9. 3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA HİPERBOLİK KÜRESEL EĞRİLERİ KARAKTERİZE EDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

### 9.1. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Aslinormali Timelike Olan Hiperbolik Küresel Spacelike Eğrileri Karakterize Eden Diferensiyel Denklemlerin Çözümü için Taylor Sıralama Yöntemi

3-boyutlu Minkowski uzayında birim hızlı olmayan, regüler aslinormali timelike olan hiperbolik küresel spacelike eğrileri karakterize eden ve eğrinin konum vektörü ve türevlerine bağlı 3. mertebeden değişken katsayılı lineer diferensiyel denklemi Bölüm 3.2.2.1’de (3.90) ile verilmişti. (3.90) denklemi incelendiğinde, eğer aslinormali timelike olan hiperbolik küresel spacelike bir eğrinin hızı, eğriliği ve burulması verilirse ya da bilinirse, eğrinin denklemi yaklaşık çözüm metodları vasıtasıyla belirlenebilmektedir. Bu bölümde, 3-boyutlu Minkowski uzayında aslinormali timelike olan hiperbolik küresel spacelike eğrileri karakterize eden lineer diferensiyel denklemlerin çözümü için Taylor sıralama metodu kullanılacaktır. Bu amaçla aşağıda verilen spacelike eğri örneğini inceleyelim.

**Örnek 9.1.**  $\alpha : \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \rightarrow E_1^3$  tanımlı

$$\alpha(t) = (\cosh(t), \sinh(t) \sin(t/3), \sinh(t) \cos(t/3))$$

eğrisi aslinormali timelike olan hiperbolik birim küre üzerinde yatan, birim hızlı olmayan regüler bir spacelike eğridir.  $\alpha$  eğrisinin hızı, eğrilik ve burulması sırasıyla aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$v(t) = \left( (-8/3) \cosh^4(t/3) + \cosh^2(t/3) + (16/9) \cosh^6(t/3) + (8/9) \right)^{(1/2)} \quad (9.1)$$

$$\kappa(t) = \frac{\left( \begin{array}{l} -8640 \cosh^8(t/3) + 7680 \cosh^{10}(t/3) + 2768 \cosh^6(t/3) \\ + 1518 \cosh^4(t/3) - 2560 \cosh^{12}(t/3) - 873 \cosh^2(t/3) + 512 \end{array} \right)^{(1/2)}}{\left( -24 \cosh^4(t/3) + 9 \cosh^2(t/3) + 16 \cosh^6(t/3) + 8 \right)^{(3/2)}} \quad (9.2)$$

$$\tau(t) = \frac{6 \sinh(t/3) \left( \begin{array}{l} 68 \sinh^2(t/3) - 4352 \sinh^2(t/3) \cosh^6(t/3) - 7056 \cosh^6(t/3) \\ - 816 \sinh^2(t/3) \cosh^2(t/3) + 4032 \cosh^8(t/3) \\ + 3780 \cosh^4(t/3) - 567 \cosh^2(t/3) + 3264 \sinh^2(t/3) \cosh^4(t/3) \end{array} \right)}{\left( \begin{array}{l} 8640 \cosh^8(t/3) - 7680 \cosh^{10}(t/3) - 2768 \cosh^6(t/3) \\ - 1518 \cosh^4(t/3) + 2560 \cosh^{12}(t/3) + 873 \cosh^2(t/3) - 512 \end{array} \right)} \quad (9.3)$$

O halde aslinormali timelike olan hiperbolik küresel  $\alpha$  spacelike eğrisini karakterize eden (3.90) lineer diferensiyel denklemi  $m=0$  için

$$p_3(t)\alpha'''(t) + p_2(t)\alpha''(t) + p_1(t)\alpha'(t) + p_0(t)\alpha(t) = 0 \quad (9.4)$$

şeklinde yazılır. Burada

$$p_3(t) = \frac{0.22222 \cosh(t/3) \sinh(t/3) \begin{pmatrix} 20480 \cosh^{16}(t/3) - 81920 \cosh^{14}(t/3) + 134400 \cosh^{12}(t/3) \\ -110848 \cosh^{10}(t/3) + 43120 \cosh^8(t/3) - 3168 \cosh^6(t/3) \\ -20953 \cosh^4(t/3) + 18955 \cosh^2(t/3) - 3468 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 512 + 4096 \cosh^{18}(t/3) - 18432 \cosh^{16}(t/3) + 34560 \cosh^{14}(t/3) \\ -28416 \cosh^{12}(t/3) + 1008 \cosh^{10}(t/3) + 14904 \cosh^8(t/3) \\ -6567 \cosh^6(t/3) - 2664 \cosh^4(t/3) + 1728 \cosh^2(t/3) \end{pmatrix}}$$

$$p_2(t) = \frac{-0.22222 \sinh^2(t/3) \begin{pmatrix} 61440 \cosh^{16}(t/3) - 215040 \cosh^{14}(t/3) + 303360 \cosh^{12}(t/3) \\ -249344 \cosh^{10}(t/3) + 145168 \cosh^8(t/3) - 58088 \cosh^6(t/3) \\ -5857 \cosh^4(t/3) + 8177 \cosh^2(t/3) - 1156 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 512 + 4096 \cosh^{18}(t/3) - 18432 \cosh^{16}(t/3) + 34560 \cosh^{14}(t/3) \\ -28416 \cosh^{12}(t/3) + 1008 \cosh^{10}(t/3) + 14904 \cosh^8(t/3) \\ -6567 \cosh^6(t/3) - 2664 \cosh^4(t/3) + 1728 \cosh^2(t/3) \end{pmatrix}}$$

$$p_1(t) = \frac{(0.9876543210e-1) \sinh(t/3) \cosh(t/3) (16 \cosh^4(t/3) - 16 \cosh^2(t/3) + 3) \cdot \begin{pmatrix} 8960 \cosh^{12}(t/3) - 26880 \cosh^{10}(t/3) + 30240 \cosh^8(t/3) \\ -25456 \cosh^6(t/3) + 18339 \cosh^4(t/3) - 5814 \cosh^2(t/3) + 2312 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 512 + 4096 \cosh^{18}(t/3) - 18432 \cosh^{16}(t/3) + 34560 \cosh^{14}(t/3) \\ -28416 \cosh^{12}(t/3) + 1008 \cosh^{10}(t/3) + 14904 \cosh^8(t/3) \\ -6567 \cosh^6(t/3) - 2664 \cosh^4(t/3) + 1728 \cosh^2(t/3) \end{pmatrix}}$$

$$p_0(t) = \frac{-(.4938271605e-1) \sinh^2(t/3) \begin{pmatrix} 102400 \cosh^{16}(t/3) - 358400 \cosh^{14}(t/3) + 505600 \cosh^{12}(t/3) \\ -538880 \cosh^{10}(t/3) + 488560 \cosh^8(t/3) - 266360 \cosh^6(t/3) \\ +141289 \cosh^4(t/3) - 43112 \cosh^2(t/3) + 4624 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 512 + 4096 \cosh^{18}(t/3) - 18432 \cosh^{16}(t/3) + 34560 \cosh^{14}(t/3) \\ -28416 \cosh^{12}(t/3) + 1008 \cosh^{10}(t/3) + 14904 \cosh^8(t/3) \\ -6567 \cosh^6(t/3) - 2664 \cosh^4(t/3) + 1728 \cosh^2(t/3) \end{pmatrix}}$$

şeklinde. Şimdi  $\alpha$  eğrisini  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$  olarak düşünelim. O halde, (9.4) eşitliği  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$  ve  $\alpha_3(t)$  için aşağıdaki gibi sağlanır.

$$p_3(t)\alpha_1'''(t) + p_2(t)\alpha_1''(t) + p_1(t)\alpha_1'(t) + p_0(t)\alpha_1(t) = 0 \quad (9.5)$$

$$p_3(t)\alpha_2'''(t) + p_2(t)\alpha_2''(t) + p_1(t)\alpha_2'(t) + p_0(t)\alpha_2(t) = 0 \quad (9.6)$$

$$p_3(t)\alpha_3'''(t) + p_2(t)\alpha_3''(t) + p_1(t)\alpha_3'(t) + p_0(t)\alpha_3(t) = 0. \quad (9.7)$$

Kabul edelim ki aslinormali timelike olan hiperbolik küresel  $\alpha$  spacelike eğrisinin parametrik denklemi bilinmesin. Ancak hızı, eğriliği ve burulması biliniyor olsun. Bölüm 4.1.1 ve 4.1.2 de verilen Taylor sıralama metodunu kullanarak, ve (9.5), (9.6) ve (9.7) denklemleri yardımıyla  $\alpha$  eğrisinin parametrik denklemini

bulalım. Sonra, elde edilen yaklaşık denklemi,  $\alpha$  eğrisinin gerçek denklemiyle karşılaştırarak, yaklaşık çözümün gerçek çözüme ne kadar yakın olduğunu tablo ve grafikler yardımıyla gösterelim.

(9.5), (9.6) ve (9.7) lineer diferensiyel denklemlerinin yaklaşık çözümlerini Bölüm 4.1.1 ev 4.1.2 de bahsedilen Taylor sıralama metodunu kullanarak bulmaya çalışalım.  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$  ve  $\alpha_3(t)$  için başlangıç koşullarını

$$\alpha_1(0)=1, \alpha_1'(0)=0, \alpha_1''(0)=1$$

$$\alpha_2(0)=0, \alpha_2'(0)=0, \alpha_2''(0)=\frac{2}{3}$$

$$\alpha_3(0)=0, \alpha_3'(0)=1, \alpha_3''(0)=0$$

olarak kabul edelim.  $N=4$  için  $\alpha_{1,4}(t)$ ,  $\alpha_{2,4}(t)$  ve  $\alpha_{3,4}(t)$  kesilmiş (sonlu) Taylor seri çözümleri

$$\alpha_{i,4}(t) = \sum_{n=0}^4 a_{i,n} t^n, \quad (i=1,2,3)$$

şeklinde. Şimdi yaklaşık çözümlerin  $a_{i,n}$ ,  $(n=0,1,2,3,4)$  Taylor katsayılarını hesaplayalım.  $a=0$ ,  $b=\pi/3$  ve  $N=4$  için sıralama noktalarının kümesi

$$\left\{ t_0=0, t_1=\frac{\pi}{12}, t_2=\frac{\pi}{6}, t_3=\frac{\pi}{4}, t_4=\frac{\pi}{3} \right\}$$

olur. (4.9) dan (9.5), (9.6) ve (9.7) denklemleri için temel matris denklemi

$$\left\{ \sum_{k=0}^3 \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

şeklinde yazılabilir. Bölüm 4.1.1 ve 4.1.2 de bahsedilen yöntem kullanılarak  $N=4$  için (9.5), (9.6) ve (9.7) diferensiyel denklemlerinin Taylor polinom çözümleri

$$\alpha_{1,4}(t) = 1 - (0.8574567501e-11)t + 0.4999999999t^2 - (0.6705259207e-2)t^3 + (0.4821115094e-1)t^4$$

$$\alpha_{2,4}(t) = -(0.6572606355e-11)t + 0.3333333334t^2 - (0.8496306387e-2)t^3 + (0.5768276018e-1)t^4$$

$$\alpha_{3,4}(t) = 1.000000001t - (0.1541015748e-9)t^2 + 0.1133347644t^3 - (0.2311212619e-2)t^4$$

olarak hesaplanır. Benzer şekilde  $N=7$  için

$$\alpha_{1,7}(t) = 1 + 0.5t^2 + (0.136169683104814e-4)t^3 + (0.416152579975646e-1)t^4 + (0.112524385499135e-3)t^5 + (0.124859990491677e-2)t^6 + (0.926764066506713e-4)t^7$$

$$\alpha_{2,7}(t) = 0.333333333333333t^2 + (0.102605169599220e-4)t^3 + (0.493438489669451e-1)t^4 + (0.855900557515573e-4)t^5 + (0.167539254212260e-2)t^6 + (0.727117849644484e-4)t^7$$

$$\alpha_{3,7}(t) = t + 0.111103511257694t^3 + (0.279214915646087e - 4)t^4 - (0.469642559834504e - 3)t^5 \\ + (0.654454624666734e - 4)t^6 - (0.213847071577344e - 3)t^7$$

olarak hesaplanır. Böylece,  $N = 4, 7$  değerleri için bulduğumuz  $\alpha_{i,N}(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) değerlerini

$$\alpha_N(t) = (\alpha_{1,N}(t), \alpha_{2,N}(t), \alpha_{3,N}(t)) \quad (9.8)$$

ifadesinde yerlerine yazarsak  $\alpha_N(t) \equiv \alpha(t)$  eğrisinin parametrik denklemi bulunmuş olur. Şimdi  $N = 4, 7$  değerleri için  $[0, \frac{\pi}{3}]$  aralığından seçilmiş bazı değerlerde tam çözüm ile Taylor polinom çözümlerini karşılaştıralım.

**Tablo 9.1.** Örnek 9.1'in  $\alpha_1(t)$  tam çözümü ile  $\alpha_{1,N}(t)$  Taylor polinom çözümlerinin  $N = 4, 7$  için sayısal sonuçları

| $t_i$     | Tam Çözüm       | Taylor Polinom Çözümleri ( $\alpha_{1,N}(t)$ ) |                     |
|-----------|-----------------|------------------------------------------------|---------------------|
|           | $\alpha_1(t_i)$ | $\alpha_{1,4}(t_i)$                            | $\alpha_{1,7}(t_i)$ |
| 0         | 1               | 1                                              | 1                   |
| $\pi/15$  | 1.022012744     | 1.021963617                                    | 1.022012805         |
| $2\pi/15$ | 1.089020096     | 1.088721237                                    | 1.089020394         |
| $\pi/5$   | 1.203972089     | 1.203242774                                    | 1.203972820         |
| $4\pi/15$ | 1.371929540     | 1.370724490                                    | 1.371930935         |
| $\pi/3$   | 1.600286856     | 1.598588998                                    | 1.600289048         |

**Tablo 9.2.** Örnek 9.1'in  $\alpha_2(t)$  tam çözümü ile  $\alpha_{2,N}(t)$  Taylor polinom çözümlerinin  $N = 4, 7$  için sayısal sonuçları

| $t_i$     | Tam Çözüm       | Taylor Polinom Çözümleri ( $\alpha_{2,N}(t)$ ) |                     |
|-----------|-----------------|------------------------------------------------|---------------------|
|           | $\alpha_2(t_i)$ | $\alpha_{2,4}(t_i)$                            | $\alpha_{2,7}(t_i)$ |
| 0         | 0               | 0                                              | 0                   |
| $\pi/15$  | 0.014716806     | 0.014654569                                    | 0.014716852         |
| $2\pi/15$ | 0.060016497     | 0.059637923                                    | 0.060016721         |
| $\pi/5$   | 0.139401462     | 0.138477335                                    | 0.139402011         |
| $4\pi/15$ | 0.258892401     | 0.257363818                                    | 0.258893451         |
| $\pi/3$   | 0.427308698     | 0.425152123                                    | 0.427310355         |

**Tablo 9.3.** Örnek 9.1'in  $\alpha_3(t)$  tam çözümü ile  $\alpha_{3,N}(t)$  Taylor polinom çözümlerinin  $N = 4, 7$  için sayısal sonuçları

| $t_i$     | Tam Çözüm       | Taylor Polinom Çözümleri ( $\alpha_{3,N}(t)$ ) |                     |
|-----------|-----------------|------------------------------------------------|---------------------|
|           | $\alpha_3(t_i)$ | $\alpha_{3,4}(t_i)$                            | $\alpha_{3,7}(t_i)$ |
| 0         | 0               | 0                                              | 0                   |
| $\pi/15$  | 0.210460124     | 0.210476275                                    | 0.210460089         |
| $2\pi/15$ | 0.427039565     | 0.427137560                                    | 0.427039397         |
| $\pi/5$   | 0.655832314     | 0.656071031                                    | 0.655831901         |
| $4\pi/15$ | 0.902865100     | 0.903257131                                    | 0.902864311         |
| $\pi/3$   | 1.174020998     | 1.174569578                                    | 1.174019789         |

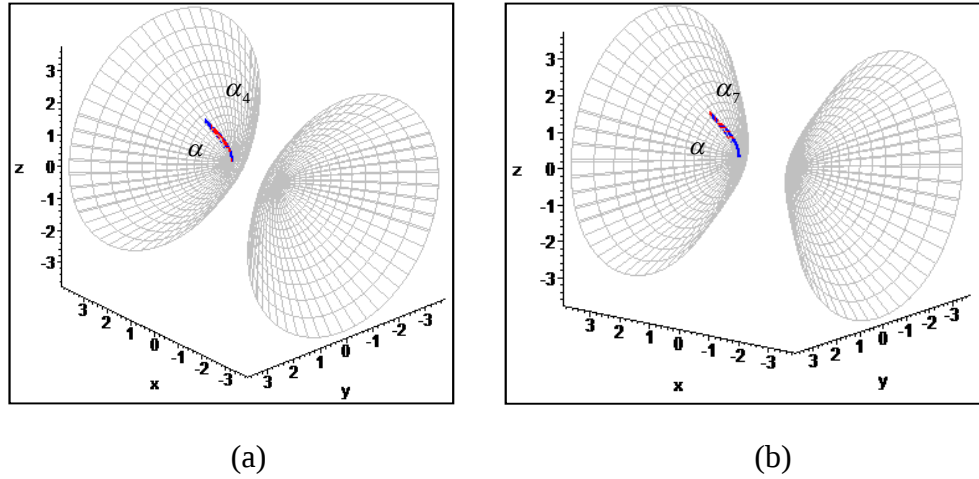
Tablo 9.1, Tablo 9.2 ve Tablo 9.3'den görülmektedir ki  $N$  değeri artırıldığında yaklaşık çözümler gerçek çözüme oldukça yaklaşmaktadır. Şimdi de  $N = 4$  ve  $N = 7$  için asıl mutlak hata fonksiyonlarını karşılaştıralım.

**Tablo 9.4.** Örnek 9.1'in asıl mutlak hata fonksiyonlarının ( $|e_{j,N}(t)|$ )

$N = 4, 7$  ve  $j = 1, 2, 3$  için sayısal sonuçları

| $t_i$     | Asıl Mutlak Hata Fonksiyonu $ e_{j,N}(t)  =  \alpha_j(t) - \alpha_{j,N}(t) $ |                  |                  |                  |                  |                  |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
|           | $ e_{1,4}(t_i) $                                                             | $ e_{1,7}(t_i) $ | $ e_{2,4}(t_i) $ | $ e_{2,7}(t_i) $ | $ e_{3,4}(t_i) $ | $ e_{3,7}(t_i) $ |
| 0         | 0                                                                            | 0                | 0                | 0                | 0                | 0                |
| $\pi/15$  | 0.4913e-4                                                                    | 0.6123e-7        | 0.6224e-4        | 0.4608e-7        | 0.1615e-4        | 0.3458e-7        |
| $2\pi/15$ | 0.2989e-3                                                                    | 0.2975e-6        | 0.3786e-3        | 0.2239e-6        | 0.9800e-4        | 0.1682e-6        |
| $\pi/5$   | 0.7293e-3                                                                    | 0.7304e-6        | 0.9241e-3        | 0.5495e-6        | 0.2387e-3        | 0.4130e-6        |
| $4\pi/15$ | 0.1205e-2                                                                    | 0.1395e-5        | 0.1529e-2        | 0.1049e-5        | 0.3920e-3        | 0.7887e-6        |
| $\pi/3$   | 0.1698e-2                                                                    | 0.2190e-5        | 0.2157e-2        | 0.1657e-5        | 0.5486e-3        | 0.1209e-5        |

Tablo 9.4 den  $N$  değeri arttığında hatanın küçüldüğü, sıfıra yaklaştığı ve tam çözüme oldukça yaklaşıldığı görülmektedir.



**Şekil 9.1.** Örnek 9.1'in  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_4$  ve  $\alpha_7$  eğrilerinin grafikleri

(9.8) ile ifade edilen  $\alpha_N$  eğrilerinin ve  $\alpha$  eğrisinin grafikleri Şekil 9.1'de gösterilmiştir. Şeki 9.1 (a)  $\alpha$  ile  $\alpha_4$  eğrilerinin grafiklerini, (b)  $\alpha$  ile  $\alpha_7$  eğrilerinin grafiklerini göstermektedir. Grafikler incelendiğinde kesme sınırı artırıldığında yaklaşık olarak hesaplanan  $\alpha_N$  eğrilerinin grafiklerinin  $\alpha$  eğrisinin grafiğine benzediği görülmektedir. O halde kesme sınırı ne kadar artırılırsa, sonucun kesinliği ve doğruluğu o derece artmaktadır.

## 9.2. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Aslinormali Timelike Olan Hiperbolik Küresel Spacelike Eğrileri Karakterize Eden Diferensiyel Denklemlerin Çözümü için Lucas Sıralama Yöntemi

3-boyutlu Minkowski uzayında birim hızlı olmayan, regüler aslinormali timelike olan hiperbolik küresel spacelike eğrileri karakterize eden ve eğrinin konum vektörü ve türevlerine bağlı 3. mertebeden değişken katsayılı (3.90) lineer diferensiyel denkleminin yaklaşık çözümünü bu kez de Bölüm 4.2.1 ve 4.2.2 de verdiğimiz Lucas sıralama yöntemi kullanılarak bulmaya çalışalım. Aşağıda verilen örneği inceleyelim.

**Örnek 9.2.** Örnek 9.1'de verilen (9.5), (9.6) ve (9.7) lineer diferensiyel denklemlerini bu kez de Bölüm 4.2.1 ve 4.2.2 de bahsedilen değişken katsayılı lineer

diferensiyel denklemlerin çözümü için Lucas sıralama yöntemini kullanarak bulmaya çalışalım.  $N=4$  için  $\alpha_{1,4}(t)$ ,  $\alpha_{2,4}(t)$  ve  $\alpha_{3,4}(t)$  kesilmiş (sonlu) Lucas seri çözümleri

$$\alpha_{i,4}(t) = \sum_{n=0}^4 a_{i,n} L_n(t), \quad (i=1,2,3)$$

şeklinde. Şimdi yaklaşık çözümlerin  $a_{i,n}$ ,  $(n=0,1,2,3,4)$  Lucas katsayılarını hesaplayalım.  $a=0$ ,  $b=\pi/3$  ve  $N=4$  için sıralama noktalarının kümesi

$$\left\{ t_0=0, t_1=\frac{\pi}{12}, t_2=\frac{\pi}{6}, t_3=\frac{\pi}{4}, t_4=\frac{\pi}{3} \right\}$$

olur. (4.59) dan (9.5), (9.6) ve (9.7) denklemleri için temel matris denklemi

$$\left\{ \sum_{k=0}^3 \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k \mathbf{D}^T \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

şeklinde yazılabilir. Bölüm 4.2.1 ve 4.2.2 de bahsedilen yöntem kullanılarak  $N=4$  için (9.5), (9.6) ve (9.7) diferensiyel denklemlerinin Lucas polinom çözümleri

$$\alpha_{1,4}(t) = 1.000000001 + (0.8e-10)t + 0.4999999999t^2 - (0.6705259143e-2)t^3 + (0.4821115097e-1)t^4$$

$$\alpha_{2,4}(t) = -(0.1e-9) + (0.1e-10)t + 0.3333333332t^2 - (0.8496306314e-2)t^3 + (0.5768276018e-1)t^4$$

$$\alpha_{3,4}(t) = (0.20e-10) + 1.000000001t - (0.245e-9)t^2 + 0.1133347645t^3 - (0.2311212610e-2)t^4$$

olarak hesaplanır. Benzer şekilde  $N=7$  için

$$\begin{aligned} \alpha_{1,7}(t) = & 1.000000000000001 + (0.321964677141295e-14)t + 0.49999999999982t^2 \\ & + (0.136170170019767e-4)t^3 + (0.416152579018929e-1)t^4 + (0.112524468746433e-3)t^5 \\ & + (0.124859987680237e-2)t^6 + (0.926764030831917e-4)t^7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{2,7}(t) = & (0.593969318174459e-14) + (0.621724893790088e-14)t + 0.33333333333308t^2 \\ & + (0.102605697952880e-4)t^3 + (0.493438488386921e-1)t^4 + (0.855901794913905e-4)t^5 \\ & + (0.167539251381577e-2)t^6 + (0.727117689388971e-4)t^7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{3,7}(t) = & -(0.213162820728030e-13) + 1.00000000000001t - (0.142108547152020e-13)t^2 \\ & + 0.111103511231742t^3 + (0.279215858469684e-4)t^4 - (0.469642756956157e-3)t^5 \\ & + (0.654456620594601e-4)t^6 - (0.213847147574997e-3)t^7 \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Böylece,  $N=4,7$  değerleri için bulduğumuz  $\alpha_{i,N}(t)$  ( $i=1,2,3$ ) değerlerini

$$\alpha_N(t) = (\alpha_{1,N}(t), \alpha_{2,N}(t), \alpha_{3,N}(t)) \quad (9.9)$$

ifadesinde yerlerine yazarsak  $\alpha_N(t) \equiv \alpha(t)$  eğrisinin parametrik denklemi bulunmuş

olur. Şimdi  $N=4,7$  değerleri için  $[0, \frac{\pi}{3}]$  aralığından seçilmiş bazı değerlerde tam çözüm ile Lucas polinom çözümlerini karşılaştıralım.

**Tablo 9.5.** Örnek 9.2'nin  $\alpha_1(t)$  tam çözümü ile  $\alpha_{1,N}(t)$  Lucas polinom çözümlerinin  $N = 4, 7$  için sayısal sonuçları

| $t_i$     | Tam Çözüm       | Lucas Polinom Çözümleri ( $\alpha_{1,N}(t)$ ) |                     |
|-----------|-----------------|-----------------------------------------------|---------------------|
|           | $\alpha_1(t_i)$ | $\alpha_{1,4}(t_i)$                           | $\alpha_{1,7}(t_i)$ |
| 0         | 1               | 1.000000001                                   | 1                   |
| $\pi/15$  | 1.022012744     | 1.021963618                                   | 1.022012805         |
| $2\pi/15$ | 1.089020096     | 1.088721238                                   | 1.089020394         |
| $\pi/5$   | 1.203972089     | 1.203242775                                   | 1.203972820         |
| $4\pi/15$ | 1.371929540     | 1.370724449                                   | 1.371930935         |
| $\pi/3$   | 1.600286856     | 1.598588999                                   | 1.600289048         |

**Tablo 9.6.** Örnek 9.2'nin  $\alpha_2(t)$  tam çözümü ile  $\alpha_{2,N}(t)$  Lucas polinom çözümlerinin  $N = 4, 7$  için sayısal sonuçları

| $t_i$     | Tam Çözüm       | Lucas Polinom Çözümleri ( $\alpha_{2,N}(t)$ ) |                     |
|-----------|-----------------|-----------------------------------------------|---------------------|
|           | $\alpha_2(t_i)$ | $\alpha_{2,4}(t_i)$                           | $\alpha_{2,7}(t_i)$ |
| 0         | 0               | -0.1e-9                                       | 0.5940e-14          |
| $\pi/15$  | 0.014716806     | 0.014654569                                   | 0.014716852         |
| $2\pi/15$ | 0.060016497     | 0.059637923                                   | 0.060016721         |
| $\pi/5$   | 0.139401462     | 0.138477335                                   | 0.139402011         |
| $4\pi/15$ | 0.258892401     | 0.257363818                                   | 0.258893451         |
| $\pi/3$   | 0.427308698     | 0.425152123                                   | 0.427310355         |

**Tablo 9.7.** Örnek 9.2'nin  $\alpha_3(t)$  tam çözümü ile  $\alpha_{3,N}(t)$  Lucas polinom çözümlerinin  $N = 4, 7$  için sayısal sonuçları

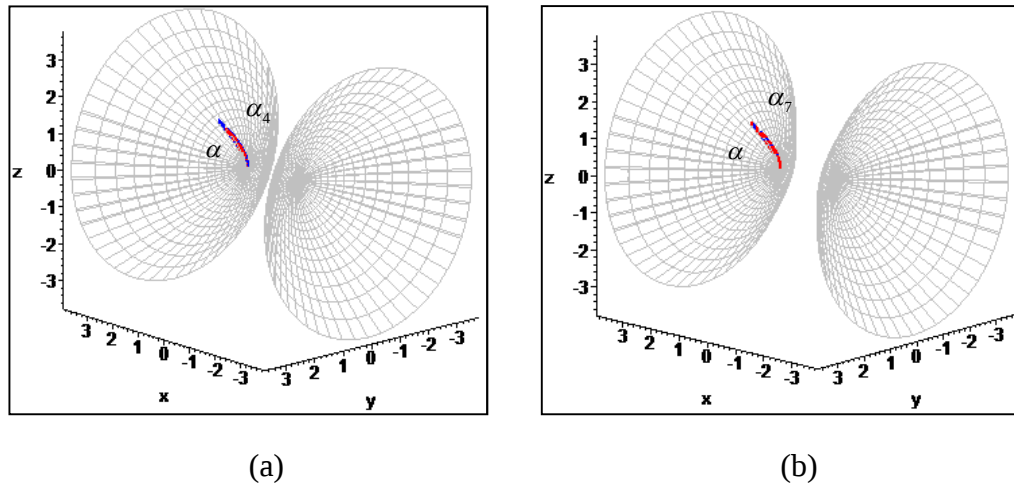
| $t_i$     | Tam Çözüm       | Lucas Polinom Çözümleri ( $\alpha_{3,N}(t)$ ) |                     |
|-----------|-----------------|-----------------------------------------------|---------------------|
|           | $\alpha_3(t_i)$ | $\alpha_{3,4}(t_i)$                           | $\alpha_{3,7}(t_i)$ |
| 0         | 0               | 0.20e-10                                      | -0.2132e-13         |
| $\pi/15$  | 0.210460124     | 0.210476275                                   | 0.210460089         |
| $2\pi/15$ | 0.427039565     | 0.427137560                                   | 0.427039397         |
| $\pi/5$   | 0.655832314     | 0.656071031                                   | 0.655831901         |
| $4\pi/15$ | 0.902865100     | 0.903257132                                   | 0.902864311         |
| $\pi/3$   | 1.174020998     | 1.174569578                                   | 1.174019789         |

Tablo 9.5, Tablo 9.6 ve Tablo 9.7'den görülmektedir ki  $N$  değeri artırıldığına yaklaşık çözümler gerçek çözüme oldukça yaklaşmaktadır. Şimdi de  $N = 4$  ve  $N = 7$  için asıl mutlak hata fonksiyonlarını karşılaştıralım.

**Tablo 9.8.** Örnek 9.2'nin asıl mutlak hata fonksiyonlarının ( $|e_{j,N}(t)|$ ) $N = 4, 7$  ve  $j = 1, 2, 3$  için sayısal sonuçları

| $t_i$     | Asıl Mutlak Hata Fonksiyonu $ e_{j,N}(t)  =  \alpha_j(t) - \alpha_{j,N}(t) $ |                  |                  |                  |                  |                  |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
|           | $ e_{1,4}(t_i) $                                                             | $ e_{1,7}(t_i) $ | $ e_{2,4}(t_i) $ | $ e_{2,7}(t_i) $ | $ e_{3,4}(t_i) $ | $ e_{3,7}(t_i) $ |
| 0         | 0.1e-8                                                                       | 0.1332e-13       | 0.1e-9           | 0.5940e-14       | 0.20e-10         | 0.2132e-13       |
| $\pi/15$  | 0.4913e-4                                                                    | 0.6123e-7        | 0.6224e-4        | 0.4608e-7        | 0.1615e-4        | 0.3458e-7        |
| $2\pi/15$ | 0.2989e-3                                                                    | 0.2975e-6        | 0.3786e-3        | 0.2239e-6        | 0.9800e-4        | 0.1682e-6        |
| $\pi/5$   | 0.7293e-3                                                                    | 0.7304e-6        | 0.9241e-3        | 0.5495e-6        | 0.2387e-3        | 0.4130e-6        |
| $4\pi/15$ | 0.1205e-2                                                                    | 0.1395e-5        | 0.1529e-2        | 0.1049e-5        | 0.3920e-3        | 0.7887e-6        |
| $\pi/3$   | 0.1698e-2                                                                    | 0.2190e-5        | 0.2157e-2        | 0.1657e-5        | 0.5486e-3        | 0.1209e-5        |

Tablo 9.8'den  $N$  değeri arttığında hatanın küçüldüğü ve tam çözüme oldukça yaklaşıldığı görülmektedir. Ayrıca Örnek 9.1 ve Örnek 9.2'deki sonuçlar karşılaştırıldığında Lucas polinom çözümlerinin Taylor polinom çözümlerine oldukça yakın olduğu görülmektedir.

**Şekil 9.2.** Örnek 9.2'nin  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_4$  ve  $\alpha_7$  eğrilerinin grafikleri

(9.9) ile ifade edilen  $\alpha_N$  eğrilerinin ve  $\alpha$  eğrisinin grafikleri Şekil 9.2'de gösterilmiştir. Şekil 9.2 (a)  $\alpha$  ile  $\alpha_4$  eğrilerinin grafiklerini, (b)  $\alpha$  ile  $\alpha_7$  eğrilerinin grafiklerini göstermektedir. Grafikler incelendiğinde kesme sınırı artırıldığında yaklaşık olarak hesaplanan  $\alpha_N$  eğrilerinin grafiklerinin  $\alpha$  eğrisinin grafiğine benzediği görülmektedir. O halde kesme sınırı ne kadar artırılsa, sonucun kesinliği ve doğruluğu o derece artmaktadır.

### 9.3. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Binormali Timelike Olan Hiperbolik Küresel Spacelike Eğrileri Karakterize Eden Diferensiyel Denklemlerin Çözümü için Taylor Sıralama Yöntemi

3-boyutlu Minkowski uzayında birim hızlı olmayan, regüler binormali timelike olan hiperbolik küresel spacelike eğrileri karakterize eden ve eğrinin konum vektörü ve türevlerine bağlı 3. mertebeden değişken katsayılı lineer diferensiyel denklemi Bölüm 3.2.2.2 de (3.108) ile verilmişti. (3.108) denklemi incelendiğinde, eğer binormali timelike olan hiperbolik küresel spacelike bir eğrinin hızı, eğriliği ve burulması verilirse ya da bilinirse, eğrinin denklemi yaklaşık çözüm metodları vasıtasıyla belirlenebilmektedir. Bu bölümde, 3-boyutlu Minkowski uzayında binormali timelike olan hiperbolik küresel spacelike eğrileri karakterize eden lineer diferensiyel denklemlerin çözümü için Taylor sıralama metodu kullanılacaktır. Bu amaçla aşağıda verilen spacelike eğri örneğini inceleyelim.

**Örnek 9.3.**  $\alpha : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow E_1^3$  tanımlı

$$\alpha(t) = (\cosh(t), \sinh(t) \sin(t), \sinh(t) \cos(t))$$

eğrisi binormali timelike olan hiperbolik birim küre üzerinde yatan, birim hızlı olmayan regüler bir spacelike eğridir.  $\alpha$  eğrisinin hızı, eğriliği ve burulması sırasıyla aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$v(t) = \cosh(t) \quad (9.10)$$

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{(2 \cosh^2(t) + 1) \cosh^2(t)}}{\cosh^3(t)} \quad (9.11)$$

$$\tau(t) = \frac{2 \sinh(t)}{2 \cosh^2(t) + 1}. \quad (9.12)$$

O halde binormali timelike olan hiperbolik küresel  $\alpha$  spacelike eğrisini karakterize eden (3.108) lineer diferensiyel denklemi  $m=0$  için

$$p_3(t)\alpha'''(t) + p_2(t)\alpha''(t) + p_1(t)\alpha'(t) + p_0(t)\alpha(t) = 0 \quad (9.13)$$

şeklinde yazılır. Burada

$$p_3(t) = \frac{2 \sinh(t) (\cosh^2(t) + 1)}{\cosh^3(t)}$$

$$p_2(t) = -\frac{2(3\cosh^2(t)+1)\sinh^2(t)}{\cosh^4(t)}$$

$$p_1(t) = 8 \tanh(t)$$

$$p_0(t) = -4 \tanh^2(t)$$

şeklindedir. Şimdi  $\alpha$  eğrisini  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$  olarak düşünelim. O halde, (9.12) eşitliği  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$  ve  $\alpha_3(t)$  için aşağıdaki gibi sağlanır.

$$p_3(t)\alpha_1'''(t) + p_2(t)\alpha_1''(t) + p_1(t)\alpha_1'(t) + p_0(t)\alpha_1(t) = 0 \quad (9.14)$$

$$p_3(t)\alpha_2'''(t) + p_2(t)\alpha_2''(t) + p_1(t)\alpha_2'(t) + p_0(t)\alpha_2(t) = 0 \quad (9.15)$$

$$p_3(t)\alpha_3'''(t) + p_2(t)\alpha_3''(t) + p_1(t)\alpha_3'(t) + p_0(t)\alpha_3(t) = 0. \quad (9.16)$$

Kabul edelim ki binormalı timelike olan hiperbolik küresel  $\alpha$  spacelike eğrisinin parametrik denklemi bilinmesin. Ancak hızı, eğriliği ve burulması biliniyor olsun. Bölüm 4.1.1 ve 4.1.2 de verilen Taylor sıralama metodunu kullanarak, ve (9.14), (9.15) ve (9.16) denklemleri yardımıyla  $\alpha$  eğrisinin parametrik denklemini bulalım. Sonra, elde edilen yaklaşık denklemi,  $\alpha$  eğrisinin gerçek denklemiyle karşılaştırarak, yaklaşık çözümün gerçek çözüme ne kadar yakın olduğunu tablo ve grafikler yardımıyla gösterelim.

(9.14), (9.15) ve (9.16) lineer diferensiyel denklemlerinin yaklaşık çözümlerini Bölüm 4.1.1 ve 4.1.2 de bahsedilen Taylor sıralama metodunu kullanarak bulmaya çalışalım.  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$  ve  $\alpha_3(t)$  için başlangıç koşullarını

$$\alpha_1(0)=1, \alpha_1'(0)=0, \alpha_1''(0)=1$$

$$\alpha_2(0)=0, \alpha_2'(0)=0, \alpha_2''(0)=2$$

$$\alpha_3(0)=0, \alpha_3'(0)=1, \alpha_3''(0)=0$$

olarak kabul edelim.  $N=4$  için  $\alpha_{1,4}(t)$ ,  $\alpha_{2,4}(t)$  ve  $\alpha_{3,4}(t)$  kesilmiş (sonlu) Taylor seri çözümleri

$$\alpha_{i,4}(t) = \sum_{n=0}^4 a_{i,n} t^n, \quad (i=1,2,3)$$

şeklindedir. Şimdi yaklaşık çözümlerin  $a_{i,n}$ ,  $(n=0,1,2,3,4)$  Taylor katsayılarını hesaplayalım.  $a=0$ ,  $b=\pi/2$  ve  $N=4$  için sıralama noktalarının kümesi

$$\left\{ t_0=0, t_1=\frac{\pi}{8}, t_2=\frac{\pi}{4}, t_3=\frac{3\pi}{8}, t_4=\frac{\pi}{2} \right\}$$

olur. (4.9) dan (9.14), (9.15) ve (9.16) denklemleri için temel matris denklemi

$$\left\{ \sum_{k=0}^3 \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

şeklinde yazılabilir. Bölüm 4.1.1 ve 4.1.2 de bahsedilen yöntem kullanılarak  $N = 4$  için (9.14), (9.15) ve (9.16) diferensiyel denklemlerinin Taylor polinom çözümleri

$$\alpha_{1,4}(t) = 1 - (0.2741244331e - 7)t + 0.4999989210t^2 - (0.331378974e - 1)t^3 + (0.6284096065e - 1)t^4$$

$$\alpha_{2,4}(t) = (0.9556200476e - 11)t + 1.000000043t^2 + 0.2397672866t^3 - 0.1539942299t^4$$

$$\alpha_{3,4}(t) = 0.9999999361t + (0.1894873476e - 4)t^2 - 0.2139130636t^3 - 0.1049428601t^4$$

olarak hesaplanır. Benzer şekilde  $N = 7$  için

$$\begin{aligned} \alpha_{1,7}(t) = & 1 + (0.274510637706606e - 20)t + 0.5t^2 + (0.117245000419861e - 3)t^3 \\ & + (0.413751887525128e - 1)t^4 + (0.417876175009255e - 3)t^5 + (0.104712982139867e - 2)t^6 \\ & + (0.146470061101963e - 3)t^7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{2,7}(t) = & (0.150855987621487e - 15) - (0.129952358014291e - 16)t + t^2 \\ & - (0.129450250818089e - 2)t^4 + (0.172172956800840e - 2)t^5 - (0.123288874611806e - 1)t^6 \\ & + (0.366645571211209e - 3)t^7 + (0.542522127656292e - 3)t^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{3,7}(t) = & (0.813036610272039e - 17) + t - 0.332552037609190t^3 - (0.190798328644515e - 2)t^4 \\ & - (0.306920687729086e - 1)t^5 - (0.200153230115654e - 2)t^6 + (0.227391868183924e - 2)t^7 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Böylece,  $N = 4, 7$  değerleri için bulduğumuz  $\alpha_{i,N}(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) değerlerini

$$\alpha_N(t) = (\alpha_{1,N}(t), \alpha_{2,N}(t), \alpha_{3,N}(t)) \quad (9.17)$$

ifadesinde yerlerine yazarsak  $\alpha_N(t) \equiv \alpha(t)$  eğrisinin parametrik denklemi bulunmuş olur. Şimdi  $N = 4, 7$  değerleri için  $[0, \frac{\pi}{2}]$  aralığından seçilmiş bazı değerlerde tam çözüm ile Taylor polinom çözümlerini karşılaştıralım.

**Tablo 9.9.** Örnek 9.3'ün  $\alpha_1(t)$  tam çözümü ile  $\alpha_{1,N}(t)$  Taylor polinom çözümlerinin  $N = 4, 7$  için sayısal sonuçları

| $t_i$     | Tam Çözüm       | Taylor Polinom Çözümleri ( $\alpha_{1,N}(t)$ ) |                     |
|-----------|-----------------|------------------------------------------------|---------------------|
|           | $\alpha_1(t_i)$ | $\alpha_{1,4}(t_i)$                            | $\alpha_{1,7}(t_i)$ |
| 0         | 1               | 1                                              | 1                   |
| $\pi/10$  | 1.049755231     | 1.048932552                                    | 1.049757020         |
| $\pi/5$   | 1.203972089     | 1.198965832                                    | 1.203980694         |
| $3\pi/10$ | 1.477996766     | 1.465971553                                    | 1.478017317         |
| $2\pi/5$  | 1.899097584     | 1.880512503                                    | 1.899134907         |
| $\pi/2$   | 2.509178479     | 2.487842546                                    | 2.509231925         |

**Tablo 9.10.** Örnek 9.3'ün  $\alpha_2(t)$  tam çözümü ile  $\alpha_{2,N}(t)$  Taylor polinom çözümlerinin  $N = 4, 7$  için sayısal sonuçları

| $t_i$     | Tam Çözüm       | Taylor Polinom Çözümleri ( $\alpha_{2,N}(t)$ ) |                     |
|-----------|-----------------|------------------------------------------------|---------------------|
|           | $\alpha_2(t_i)$ | $\alpha_{2,4}(t_i)$                            | $\alpha_{2,7}(t_i)$ |
| 0         | 0               | 0                                              | 0.1506e-15          |
| $\pi/10$  | 0.098685362     | 0.104630295                                    | 0.098693783         |
| $\pi/5$   | 0.394100606     | 0.430257819                                    | 0.394141189         |
| $3\pi/10$ | 0.880482019     | 0.967486739                                    | 0.880578974         |
| $2\pi/5$  | 1.535469371     | 1.670920173                                    | 1.535645519         |
| $\pi/2$   | 2.301298902     | 2.459160187                                    | 2.301538337         |

**Tablo 9.11.** Örnek 9.3'ün  $\alpha_3(t)$  tam çözümü ile  $\alpha_{3,N}(t)$  Taylor polinom çözümlerinin  $N = 4, 7$  için sayısal sonuçları

| $t_i$     | Tam Çözüm       | Taylor Polinom Çözümleri ( $\alpha_{3,N}(t)$ ) |                     |
|-----------|-----------------|------------------------------------------------|---------------------|
|           | $\alpha_3(t_i)$ | $\alpha_{3,4}(t_i)$                            | $\alpha_{3,7}(t_i)$ |
| 0         | 0               | 0                                              | 0.8103e-17          |
| $\pi/10$  | 0.303722314     | 0.306506229                                    | 0.303734318         |
| $\pi/5$   | 0.542432949     | 0.558908968                                    | 0.542490755         |
| $3\pi/10$ | 0.639707632     | 0.680611733                                    | 0.639845712         |
| $2\pi/5$  | 0.498904242     | 0.570484307                                    | 0.499155037         |
| $\pi/2$   | 0.7208e-19      | 0.102862738                                    | 0.000357593         |

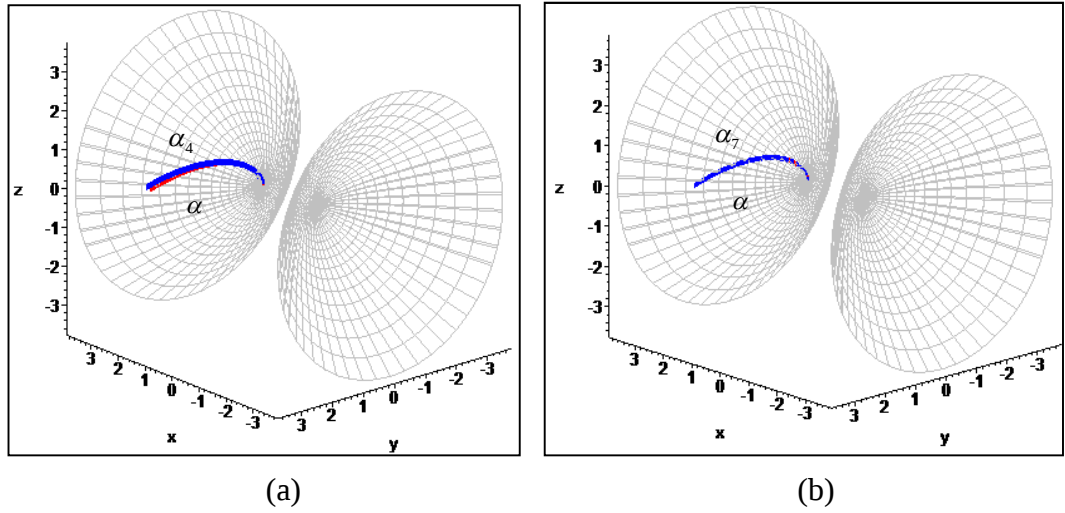
Tablo 9.9, Tablo 9.10 ve Tablo 9.11'den görülmektedir ki  $N$  değeri artırıldığında yaklaşık çözümler gerçek çözüme oldukça yaklaşmaktadır. Şimdi de  $N=4$  ve  $N=7$  için asıl mutlak hata fonksiyonlarını karşılaştıralım.

**Tablo 9.12.** Örnek 9.3'ün asıl mutlak hata fonksiyonlarının ( $|e_{j,N}(t)|$ )

$N = 4, 7$  ve  $j = 1, 2, 3$  için sayısal sonuçları

| $t_i$     | Asıl Mutlak Hata Fonksiyonu $ e_{j,N}(t)  =  \alpha_j(t) - \alpha_{j,N}(t) $ |                  |                  |                  |                  |                  |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
|           | $ e_{1,4}(t_i) $                                                             | $ e_{1,7}(t_i) $ | $ e_{2,4}(t_i) $ | $ e_{2,7}(t_i) $ | $ e_{3,4}(t_i) $ | $ e_{3,7}(t_i) $ |
| 0         | 0                                                                            | 0                | 0                | 0.1509e-15       | 0                | 0.8130e-17       |
| $\pi/10$  | 0.8227e-3                                                                    | 0.1788e-5        | 0.5945e-2        | 0.8421e-5        | 0.2784e-2        | 0.1200e-4        |
| $\pi/5$   | 0.5006e-2                                                                    | 0.8605e-5        | 0.3616e-1        | 0.4058e-4        | 0.1648e-1        | 0.5781e-4        |
| $3\pi/10$ | 0.1203e-1                                                                    | 0.2055e-4        | 0.8700e-1        | 0.9695e-4        | 0.4090e-1        | 0.1381e-3        |
| $2\pi/5$  | 0.1859e-1                                                                    | 0.3732e-4        | 0.1355           | 0.1761e-3        | 0.7158e-1        | 0.2508e-3        |
| $\pi/2$   | 0.2134e-1                                                                    | 0.5345e-4        | 0.1579           | 0.2394e-3        | 0.1029           | 0.3576e-3        |

Tablo 9.12'den  $N$  değeri arttığında hatanın küçüldüğü, sifıra yaklaştığı ve tam çözüme oldukça yaklaşıldığı görülmektedir.



Şekil 9.3. Örnek 9.3'ün  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_4$  ve  $\alpha_7$  eğrilerinin grafikleri

(9.16) ile ifade edilen  $\alpha_N$  eğrilerinin ve  $\alpha$  eğrisinin grafikleri Şekil 9.3'de gösterilmiştir. Şeki 9.3 (a)  $\alpha$  ile  $\alpha_4$  eğrilerinin grafiklerini, (b)  $\alpha$  ile  $\alpha_7$  eğrilerinin grafiklerini göstermektedir. Grafikler incelendiğinde kesme sınırı artırıldığında yaklaşık olarak hesaplanan  $\alpha_N$  eğrilerinin grafiklerinin  $\alpha$  eğrisinin grafiğine benzediği görülmektedir. O halde kesme sınırı ne kadar artırılırsa, sonucun kesinliği ve doğruluğu o derece artmaktadır.

#### 9.4. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Binormali Timelike Olan Hiperbolik Küresel Spacelike Eğrileri Karakterize Eden Diferensiyel Denklemlerin Çözümü için Lucas Sıralama Yöntemi

3-boyutlu Minkowski uzayında birim hızlı olmayan, regüler binormali timelike olan hiperbolik küresel spacelike eğrileri karakterize eden ve eğrinin konum vektörü ve türevlerine bağlı 3. mertebeden değişken katsayılı (3.108) lineer diferensiyel denkleminin yaklaşık çözümünü bu kez de Bölüm 4.2.1 ve 4.2.2 de verdiğimiz Lucas sıralama yöntemi kullanılarak bulmaya çalışalım. Aşağıda verilen örneği inceleyelim.

**Örnek 9.4.** Örnek 9.3’de verilen (9.14), (9.15) ve (9.16) lineer diferensiyel denklemlerini bu kez de Bölüm 4.2.1 ve 4.2.2 de bahsedilen değişken katsayılı lineer diferensiyel denklemlerin çözümü için Lucas sıralama yöntemini kullanarak bulmaya çalışalım.  $N=4$  için  $\alpha_{1,4}(t)$ ,  $\alpha_{2,4}(t)$  ve  $\alpha_{3,4}(t)$  kesilmiş (sonlu) Lucas seri çözümleri

$$\alpha_{i,4}(t) = \sum_{n=0}^4 a_{i,n} L_n(t), \quad (i=1,2,3)$$

şeklindedir. Şimdi yaklaşık çözümlerin  $a_{i,n}$ ,  $(n=0,1,2,3,4)$  Lucas katsayılarını hesaplayalım.  $a=0$ ,  $b=\pi/2$  ve  $N=4$  için sıralama noktalarının kümesi

$$\left\{ t_0=0, t_1=\frac{\pi}{8}, t_2=\frac{\pi}{4}, t_3=\frac{3\pi}{8}, t_4=\frac{\pi}{2} \right\}$$

olur. (4.59) dan (9.14), (9.15) ve (9.16) denklemleri için temel matris denklemi

$$\left\{ \sum_{k=0}^3 \mathbf{P}_k \mathbf{T} \mathbf{B}^k \mathbf{D}^T \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

şeklinde yazılabilir. Bölüm 4.2.1 ve 4.2.2 de bahsedilen yöntem kullanılarak  $N=4$  için (9.14), (9.15) ve (9.16) diferensiyel denklemlerinin Lucas polinom çözümleri

$$\begin{aligned} \alpha_{1,4}(t) = & 1.000019489 + (0.826e-7)t + 0.4999977767t^2 - (0.331378307e-1)t^3 \\ & + (0.6284095691e-1)t^4 \end{aligned}$$

$$\alpha_{2,4}(t) = (0.506e-7) + (0.44e-8)t + 1.000000004t^2 + 0.2397672742t^3 - 0.1539942222t^4$$

$$\alpha_{3,4}(t) = (0.122376e-4) + 0.9999989943t + (0.205931e-4)t^2 - 0.2139125949t^3 - 0.1049428661t^4$$

olarak hesaplanır. Benzer şekilde  $N=7$  için

$$\begin{aligned} \alpha_{1,7}(t) = & 1 + (0.560315682740509e-15)t + 0.500000000000001t^2 + (0.117245005450121e-3)t^3 \\ & + (0.413751889099795e-1)t^4 + (0.417875835038875e-3)t^5 + (0.104713009719933e-2)t^6 \\ & + (0.146469986577800e-3)t^7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{2,7}(t) = & -(0.283106871279415e-14) - (0.204350425470068e-14)t + 0.999999999999998t^2 \\ & + (0.542520984783315e-3)t^3 - (0.129449933125997e-2)t^4 + (0.172172524182061e-2)t^5 \\ & - (0.123288846396159e-1)t^6 + (0.366644881226254e-3)t^7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{3,7}(t) = & -(0.199840144432528e-14) + 0.999999999999999t - (0.166533453693773e-14)t^2 \\ & - 0.332552038122847t^3 - (0.190798216123533e-2)t^4 - (0.306920699331239e-1)t^5 \\ & - (0.200153170882234e-2)t^6 + (0.227391855530474e-2)t^7 \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Böylece,  $N=4,7$  değerleri için bulduğumuz  $\alpha_{i,N}(t)$  ( $i=1,2,3$ ) değerlerini

$$\alpha_N(t) = (\alpha_{1,N}(t), \alpha_{2,N}(t), \alpha_{3,N}(t)) \quad (9.18)$$

ifadesinde yerlerine yazarsak  $\alpha_N(t) \equiv \alpha(t)$  eğrisinin parametrik denklemi bulunmuş olur. Şimdi  $N = 4, 7$  değerleri için  $[0, \frac{\pi}{2}]$  aralığından seçilmiş bazı değerlerde tam çözüm ile Lucas polinom çözümlerini karşılaştıralım.

**Tablo 9.13.** Örnek 9.4'ün  $\alpha_1(t)$  tam çözümü ile  $\alpha_{1,N}(t)$  Lucas polinom çözümlerinin  $N = 4, 7$  için sayısal sonuçları

| $t_i$     | Tam Çözüm       | Lucas Polinom Çözümleri ( $\alpha_{1,N}(t)$ ) |                     |
|-----------|-----------------|-----------------------------------------------|---------------------|
|           | $\alpha_1(t_i)$ | $\alpha_{1,4}(t_i)$                           | $\alpha_{1,7}(t_i)$ |
| 0         | 1               | 1.000019489                                   | 1                   |
| $\pi/10$  | 1.049755231     | 1.048951965                                   | 1.049757020         |
| $\pi/5$   | 1.203972089     | 1.198984954                                   | 1.203980694         |
| $3\pi/10$ | 1.477996766     | 1.465990182                                   | 1.478017317         |
| $2\pi/5$  | 1.899097584     | 1.880053045                                   | 1.899134907         |
| $\pi/2$   | 2.509178479     | 2.487859620                                   | 2.509231925         |

**Tablo 9.14.** Örnek 9.4'ün  $\alpha_2(t)$  tam çözümü ile  $\alpha_{2,N}(t)$  Lucas polinom çözümlerinin  $N = 4, 7$  için sayısal sonuçları

| $t_i$     | Tam Çözüm       | Lucas Polinom Çözümleri ( $\alpha_{2,N}(t)$ ) |                     |
|-----------|-----------------|-----------------------------------------------|---------------------|
|           | $\alpha_2(t_i)$ | $\alpha_{2,4}(t_i)$                           | $\alpha_{2,7}(t_i)$ |
| 0         | 0               | 0.506e-7                                      | -0.2831e-14         |
| $\pi/10$  | 0.098685362     | 0.104630343                                   | 0.098693783         |
| $\pi/5$   | 0.394100606     | 0.430257855                                   | 0.394141189         |
| $3\pi/10$ | 0.880482019     | 0.967486755                                   | 0.880578974         |
| $2\pi/5$  | 1.535469371     | 1.670920162                                   | 1.535645519         |
| $\pi/2$   | 2.301298902     | 2.459160147                                   | 2.301538337         |

**Tablo 9.15.** Örnek 9.4'ün  $\alpha_3(t)$  tam çözümü ile  $\alpha_{3,N}(t)$  lucas polinom çözümlerinin  $N = 4, 7$  için sayısal sonuçları

| $t_i$     | Tam Çözüm       | Lucas Polinom Çözümleri ( $\alpha_{3,N}(t)$ ) |                     |
|-----------|-----------------|-----------------------------------------------|---------------------|
|           | $\alpha_3(t_i)$ | $\alpha_{3,4}(t_i)$                           | $\alpha_{3,7}(t_i)$ |
| 0         | 0               | 0.000012238                                   | -0.1998e-14         |
| $\pi/10$  | 0.303722314     | 0.306518347                                   | 0.303734318         |
| $\pi/5$   | 0.542432949     | 0.558921379                                   | 0.542490755         |
| $3\pi/10$ | 0.639707632     | 0.680624932                                   | 0.639845712         |
| $2\pi/5$  | 0.498904242     | 0.570498873                                   | 0.499155037         |
| $\pi/2$   | 0.7208e-19      | 0.102879333                                   | 0.000357593         |

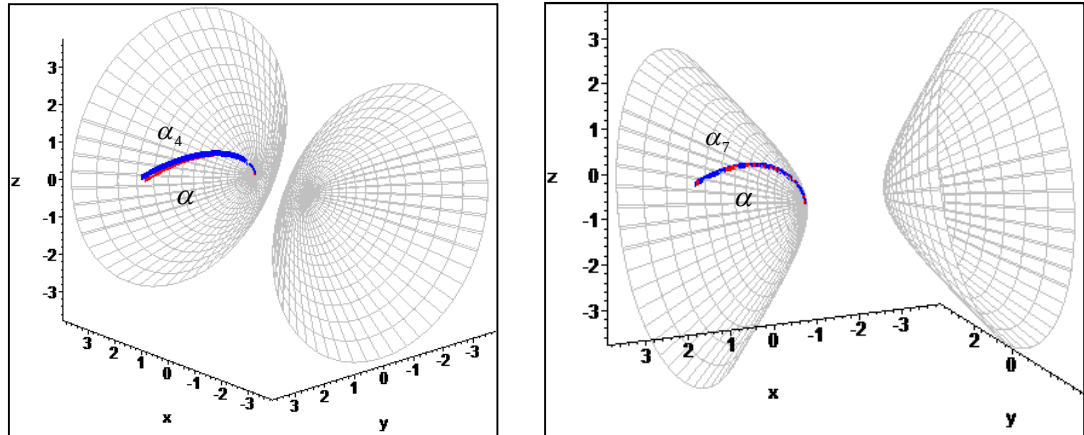
Tablo 9.13, Tablo 9.14 ve Tablo 9.15’den görülmektedir ki  $N$  değeri artırıldığında yaklaşık çözümler gerçek çözüme oldukça yaklaşmaktadır. Şimdi de  $N = 4$  ve  $N = 7$  için asıl mutlak hata fonksiyonlarını karşılaştıralım.

**Tablo 9.16.** Örnek 9.4’ün asıl mutlak hata fonksiyonlarının  $(|e_{j,N}(t)|)$

$N = 4, 7$  ve  $j = 1, 2, 3$  için sayısal sonuçları

| $t_i$     | Asıl Mutlak Hata Fonksiyonu $ e_{j,N}(t)  =  \alpha_j(t) - \alpha_{j,N}(t) $ |                  |                  |                  |                  |                  |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
|           | $ e_{1,4}(t_i) $                                                             | $ e_{1,7}(t_i) $ | $ e_{2,4}(t_i) $ | $ e_{2,7}(t_i) $ | $ e_{3,4}(t_i) $ | $ e_{3,7}(t_i) $ |
| 0         | 0.1949e-4                                                                    | 0.44e-15         | 0.506e-7         | 0.2831e-14       | 0.1224e-4        | 0.1998e-14       |
| $\pi/10$  | 0.8033e-3                                                                    | 0.1788e-5        | 0.5945e-2        | 0.8421e-5        | 0.2796e-2        | 0.1200e-4        |
| $\pi/5$   | 0.4987e-2                                                                    | 0.8605e-5        | 0.3616e-1        | 0.4058e-4        | 0.1649e-1        | 0.5781e-4        |
| $3\pi/10$ | 0.1201e-1                                                                    | 0.2055e-4        | 0.8700e-1        | 0.9695e-4        | 0.4092e-1        | 0.1381e-3        |
| $2\pi/5$  | 0.1857e-1                                                                    | 0.3732e-4        | 0.1355           | 0.1761e-3        | 0.7159e-1        | 0.2508e-3        |
| $\pi/2$   | 0.2132e-1                                                                    | 0.5345e-4        | 0.1579           | 0.2394e-3        | 0.1029           | 0.3576e-3        |

Tablo 9.16’dan  $N$  değeri arttığında hatanın küçüldüğü ve tam çözüme oldukça yaklaşıldığı görülmektedir. Ayrıca Örnek 9.3 ve Örnek 9.4’deki sonuçlar karşılaştırıldığında Lucas polinom çözümlerinin Taylor polinom çözümlerine oldukça yakın olduğu görülmektedir.



(a)

(b)

**Şekil 9.4.** Örnek 9.4’ün  $\alpha$  eğrisi ile  $\alpha_4$  ve  $\alpha_7$  eğrilerinin grafikleri

(9.18) ile ifade edilen  $\alpha_N$  eğrilerinin ve  $\alpha$  eğrisinin grafikleri Şekil 9.4 de gösterilmiştir. Şekil 9.4 (a)  $\alpha$  ile  $\alpha_4$  eğrilerinin grafiklerini, (b)  $\alpha$  ile  $\alpha_7$  eğrilerinin

grafiklerini göstermektedir. Grafikler incelendiğinde kesme sınırı artırıldığında yaklaşık olarak hesaplanan  $\alpha_N$  eğrilerinin grafiklerinin  $\alpha$  eğrisinin grafiğine benzediği görülmektedir. O halde kesme sınırı ne kadar artırılırsa, sonucun kesinliği ve doğruluğu o derece artmaktadır.

## KAYNAKLAR

1. Euler, L., *De Curvis Triangularibus*, Acta Acad. Petropol., 1778 (1780), 3-30.
2. Fujiwara, M., *On Space Curves of Constant Breadth*, Tohoku Mathematical Journal, 1914, 5, 180-184.
3. Barbier, E., *Note sur le problème de l'aiguille et le jeu du joint couvert*, Journal de mathématiques pures et appliquées, 1860, 2(5), 273-286.
4. Blaschke, W., *Leibziger Berichte*, 1917, 67, 290.
5. Ball, N.H., *On ovals*, American Mathematical Monthly, 1930, 37(7), 348-353.
6. Hammer, P.C., *Constant Breadth Curves in the Plane*, Proceedings of the American Mathematical Society, 1955, 6(2), 333-334.
7. Mellish, A.P., *Notes on Differential Geometry*, Annals of Mathematics, 1931, 32(1), 181-190.
8. Smakal, S., *Curves of Constant Breadth*, Czechoslovak Mathematical Journal, 1973, 23(1), 86-94.
9. Reuleaux, F., *The Kinematics of Machinery* (Translated by A. B. W. Kennedy), Dover Pub., New York, 1963, 653 p.
10. Köse, Ö., *Sabit Genişlikli Eğriler ve Yüzeylerin Bazı Özellikleri*, Atatürk Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Erzurum, 1982, 55 s. (Doçentlik Tezi).
11. Köse, Ö., *Düzlemde Ovalar ve Sabit Genişlikli Eğrilerin Bazı Özellikleri*, Doğa Bilim Dergisi, Seri B, 1984, 8(2), 119-126.
12. Köse, Ö., *On Space Curves of Constant Breadth*, Doğa Tr. J. Math, 1986, 10(1), 11-14.
13. Sezer, M., *Differential Equations Characterizing Space Curves of Constant Breadth and a Criterion for These Curves*, Turkish J. of Math, 1989, 13(2), 70-78.
14. Akdoğan, Z., *n-Euclidean Uzayında Sabit Genişlikli Eğriler*, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Erzurum, 1994, 43 s. (Doktora Tezi).
15. Akdoğan, Z., Mağden, A., *Some Characterization of Curves of Constant Breadth in  $E^n$  Space*, Turk J Math, 2001, 25, 433-444.

16. Önder, M., Kocayiğit, H., Candan, E., *Differential Equations Characterizing Timelike and Spacelike Curves of Constant Breadth in Minkowski 3-Space  $E_1^3$* , J. Korean Math. Soc., 2011, 48(4), 849-866.
17. Kocayiğit, H., Önder, M., *Space Curves of Constant Breadth in Minkowski 3-Space*, Annali di Matematica, 2013, 192(5), 805-814.
18. Struik, D.J., *Lectures on Classical Differential Geometry*, Dover Publications Inc., New York, 1961, 232 p.
19. Kühnel, W., *Differential Geometry Curves-Surfaces-Manifolds (Translated by B. Hunt)*, American Mathematical Society, USA, 2006, 392 p.
20. Oprea, J., *Differential Geometry and Its Applications*, Prentice Hall, New Jersey, 1997, 399 p.
21. Wong, Y.C., *A Global Formulation of the Condition for a Curve to Lie in a Sphere*, Monatsh Math, 1963, 67, 363-365.
22. Breuer, S., Gottlieb, D., *Explicit Characterization of Spherical Curves*, Proceedings of the American Mathematical Society, 1971, 27(1), 126-127.
23. Wong, Y.C., *On an Explicit Characterizations of Spherical Curves*, Proceedings of the American Mathematical Society, 1972, 34(1), 239-242.
24. Özdamar, E., Hacısalıhoğlu, H.H., *Characterizations of Spherical Curves in Euclidean  $n$ -Space*, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Tebliğler Dergisi, 1974, 23, 109-125.
25. Mehlum, E., Wimp, J., *Spherical Curves and Quadratic Relationships for Special Functions*, J. Austral. Math. Soc. Ser. B, 1985, 27, 111-124.
26. Sezer, M., *Differential Equations and Integral Characterizations for  $E^4$  Spherical Curves*, Turkish J. of Math, 1989, 13(3), 125-131.
27. Pekmen, Ü., Paşali S., *Some Characterizations of Lorentzian Spherical Spacelike Curves*, Mathematica Moravica, 1999, 3, 33-37.
28. Petrovic-Torgasev, M., Sucurovic, E., *Some Characterizations of Lorentzian Spherical Spacelike Curves with the Timelike and the Null Principal Normal*, Mathematica Moravica, 2000, 4, 83-92.
29. Petrovic-Torgasev, M., Sucurovic, E., *Some Characterizations of the Spacelike, the Timelike and the Null Curves on the Pseudohyperbolic Space  $H_0^2$  in  $E_1^3$* , Kragujevac J. Math., 2000, 22, 71-82.

30. Petrovic-Torgasev, M., Sucurovic, E., *Some Characterizations of the Lorentzian Spherical Timelike and Null Curves*, Mathematica Moravica, 2001, 53, 21-27.
31. Güner, G., Ekmekçi, N., *On the Spherical Curves and Bertrand Curves in Minkowski 3-Space*, J. Math. Comput. Sci., 2012, 2(4), 898-906.
32. Sabuncuoğlu, A., *Diferensiyel Geometri*, Nobel Yayıncılık, Ankara, 2006, 440 s.
33. Hacısalihoğlu, H.H., *Diferensiyel Geometri I. Cilt*, Ankara Yayınları, Ankara 2000, 271 s.
34. Bishop, R.L., *There is More Than One Way to Frame a Curve*, American Mathematical Monthly, 1975, 82(3), 246-251.
35. Hanson, A.J., Ma, H., *Quaternion Frame Approach to Streamline Visualization*, IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 1995, 1(2), 164-174.
36. O'Neill, B., *Semi Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, New York, 1983, 483 p.
37. Uğurlu, H.H., Çalışkan, A., *Darboux Ani Dönme Vektörleri ile Spacelike ve Timelike Yüzeyler Geometrisi*, Celal Bayar Üniversitesi Yayınları, Yayın No:0006, Manisa, 2012, 170 s.
38. Walrave, J., *Curves and Surfaces in Minkowski Space*, K.U. Leuven, Faculty of Sciences, 1995, 147 p. (Ph.D. Thesis).
39. Ünlütürk, Y., Savcı, Ü. Z., *On Non-unit Speed Curves in Minkowski 3-Space*, Scientia Megna, 2012, 8(4), 66-74.
40. Karacan, M.K., Bükcü, B., *Bishop Frame of the Timelike Curve in Minkowski 3-Space*, SDÜ Fen Edebiyat Fakültesi, Fen Dergisi (E-Dergi), 2008, 3(1), 80-90.
41. Bükcü, B., Karacan, M.K., *Bishop Frame of the Spacelike Curve with a Spacelike Principal Normal in Minkowski 3-Space*, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1, 2008, 57(1), 13-22.
42. Bükcü, B., Karacan, M.K., *Bishop Frame of the Spacelike Curve with a Spacelike Binormal in Minkowski 3-Space*, Selçuk J. Appl. Math., 2010, 11(1), 15-25.
43. Filipponi, P., Horadam, A.F., *Second Derivative Sequences of Fibonacci and Lucas Polynomials*, The Fibonacci Quarterly, 1994, 31(3), 194-204.

44. Koshy, T., *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc., 2001, 676 p.
45. Bükcü, B., Karacan, M.K., *The Slant Helices according to Bishop Frame*, World Academy of Science, Engineering and Technology, 2009, 3(11), 853-856.
46. Bükcü, B., Karacan, M.K., *On the Slant Helices according to Bishop Frame of the Timelike Curve in Lorentzian Space*, Tamkang Journal of Mathematics, 2008, 39(3), 255-262.
47. Bükcü, B., Karacan, M.K., *The Slant Helices according to Bishop Frame of the Spacelike Curve in Lorentzian Space*, Journal of Interdisciplinary Mathematics, 2009, 12(5), 691-700.
48. Karamete, A., *Lineer diferensiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümü için Taylor Sıralama Yöntemi*, Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Balıkesir, 1996, 49 s, (Yüksek Lisans Tezi).
49. Karamete, A., *Yüksek Mertebeden Linear İntegro Diferensiyel Denklemlerinin Yaklaşık Çözümü için Taylor Sıralama Yöntemi*, Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Balıkesir, 2001, 70 s, (Doktora Tezi).
50. Keşan, C., *Taylor Polynomial Solutions of Linear Differential Equations*, Applied Mathematics and Computation, 2003, 142(1), 155-165.
51. Sezer, M., Karamete, A., Gülsu, M., *Taylor Polynomial Solutions of Systems of Linear Differential Equations with Variable Coefficients*, International Journal of Computer Mathematics, 2005, 82(6), 755-764.
52. Oliveira, F.A., *Collocation and residual correction*, Numer. Math., 1980, 36, 27-31.
53. Çelik, İ., *Approximate Calculation of Eigenvalues with the Method of Weighted Residuals-Collocation Method*, Applied Mathematics and Computation, 2005, 160(2), 401-410.
54. Çelik, İ., *Collocation Method and Residual Correction Using Chebyshev Series*, Applied Mathematics and Computation, 2006, 174(2), 910-920.
55. Shahmorad, S., *Numerical solution of the general form linear Fredholm-Volterra integro-differential equations by the Tau method with an error estimation*, Applied Mathematics and Computation, 2005, 167(2), 1418-1429.

56. Yüzbaşı, Ş., Sezer, M., *An improved Bessel collocation method with a residual error function to solve a class of Lane-Emden differential equations*, Mathematical and Computer Modelling, 2013, 57(5-6), 1298-1311.
57. Jain, M.K., Iyengar, S.R.K., Saldanha, J.S.V., *Numerical Solution of a Fourth-Order Ordinary Differential Equation*, Journal of Engineering Mathematics, 1977, 11(4), 373-380.
58. Rashidinia, J., Jalilian, R., *Non-polynomial spline for solution of boundary-value problems in plate deflection theory*, International Journal of Computer Mathematics, 2007, 84(10), 1483-1494.
59. Çağlar, H.N., Çağlar, S.H., Twizell, E.H., *The Numerical Solution of Fifth-Order Boundary Value Problems with Sixth Degree B-Spline Functions*, Applied Mathematics Letters, 1999, 12, 25-30.
60. Siddiqi, S.S., Akram, G., Elahi, A., *Quartic spline solution of linear fifth order boundary value problems*, Applied Mathematics and Computation, 2008, 196, 214-220.
61. Akyüz-Daşcıoğlu, A., Sezer, M., *Chebyshev polynomial solutions of systems of high-order linear differential equations with variable coefficients*, Applied Mathematics and Computation, 2003, 144(2-3), 237-247.
62. Davies, A., Crann, D., *The Solution of Differential Equations Using Numerical Laplace Transforms*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 1999, 30(1), 65-79.
63. Thongmoon, M., Pusjuso, S., *The numerical solutions of differential transform method and the Laplace transform method for a system of differential equations*, Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2010, 4, 425-431.
64. Gray, A., *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica (2nd ed.)*, CRC Press, Washington, 1998, 1088 p.
65. Kocayigit, H., Önder, M., Hacısalihoğlu, H. H., *Harmonic 1-Type Curves and Weak Biharmonic Curves in Lorentzian 3-Space*, Analele Stiintifice ale Universitatii Al. I. Cuza din Iasi - Matematica, 2014, 60(1), 109-124.

## ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Muhammed ÇETİN

Doğum Yeri ve Yılı: Uşak, 1981

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : mat.mcetin@hotmail.com

### Eğitim Durumu

Lise : Uşak Şehit Abdülkadir Kılavuz Anadolu Öğretmen Lisesi, 1999

Lisans : Dokuz Eylül Üniversitesi, Buca Eğitim Fakültesi,  
Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi  
Matematik Öğretmenliği, 2004

Yüksek Lisans : Uşak Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,  
Matematik Anabilim Dalı, Geometri Bilim Dalı, 2010