



T.C.
MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN VOLTERRA VE FREDHOLM
İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER ÜZERİNE

Mehmet Şükrü TEKİN

ENFORMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HATAY
OCAK-2015



T.C.
MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN VOLTERRA VE FREDHOLM
İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER ÜZERİNE

MEHMET ŞÜKRÜ TEKİN

ENFORMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HATAY
OCAK-2015

T.C.
MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN VOLTERRA VE FREDHOLM
İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER ÜZERİNE

MEHMET ŞÜKRÜ TEKİN
ENFORMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yrd. Doç. Dr. Turgut YELOĞLU danışmanlığında hazırlanan bu tez **16/01/2015** tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Turgut YELOĞLU
Başkan

Yrd. Doç. Dr. Sertan ALKAN
Üye

Yrd. Doç. Dr. Sinan YAŞAR
Üye

Kod No: 809

Prof. Dr. İsmail Hakkı KARAHAN
Enstitü Müdürü

Bu çalışma tarafından desteklenmiştir.

Proje No:

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

16/01/2015

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını ve tez üzerinde Yükseköğretim Kurulu tarafından hiçbir değişiklik yapılamayacağı için tezin bilgisayar ekranında görüntülendiğinde asıl nüsha ile aynı olması sorumluluğunun tarafıma ait olduğunu beyan ederim.

Mehmet Şükrü TEKİN

ÖZET

LİNEER OLMAYAN VOLTERRA VE FREDHOLM İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ ÜZERİNE

Tez esas olarak beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümünde söz konusu denklemler ile ilgili tarihte yapılan bir takım çalışmalara yer verilmiş olup, bilimsel alanda karşımıza çıkmasından bahsedilmiştir. İkinci bölümünde Diferensiyel Denklem, Lineer Diferensiyel Denklem, Lineer Olmayan Diferensiyel Denklem, İntegral Denklemler gibi kavramları tanıtmaya ve örneklendirmeye yer verilmiştir. Üçüncü bölümünde bu tezin esas konusu olan Lineer olmayan Volterra ve Fredholm İntegro Diferensiyel Denklemlerini tanıtmaya, denklemlerin formunu açıklamaya ve bu denklemler ile ilgili bir takım çözüm metotlarına değinilmiştir. Dördüncü bölümünde üçüncü bölümde değinilen denklemler ile ilgili örnekler incelenmiş ve çözüm metotları kullanılarak çözülmeye çalışılmıştır. Beşinci ve son bölümde ise integral denklemler, Lineer Olmayan Volterra ve Lineer Olmayan Fredholm İntegro Diferensiyel denklemlerin uygulama alanları belirtilmiş ve matematiğin bazı temel konularından faydalanılarak bu çalışmanın ortaya konulduğuna değinilmiştir.

2015, 46 sayfa.

Anahtar Kelimeler: Integro-Diferensiyel Denklemler, Nonlineer, Volterra ve Fredholm

ABSTRACT

ON THE NONLINEAR VOLTERRA AND FREDHOLM INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

This thesis mainly consist of five parts. In the first section is given to a number of studies related to the historical mentioned equations are mentoined appear in the scientific field. The second section is given to Diferential Equations, Linear Diferential Equations, Nonlinear Diferential Equations in which illustrate and introduce concepts such as Integral Equations. In the third part of the main subject of this thesis Nonlinear Volterra and Fredholm Integro Diferantial Equations to introduce Diferential Equations and explain the form of the equation. We focused on a number of solutions methods related to these equations. In the fourth section is examined with examples in the third part of the equations and solved using solutions methods. In the fifth and last section is stated integral equations and Nonlinear Fredholm and Nonlinear Fredholm integral equations application areas and this thesis has been produced by benefit some mathematical basic topics.

2015, 46 pages.

Key Words: Integro-Differential Equation, Nonlinear, Volterra and Fredholm

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez konusunun belirlenmesinde, araştırılması ve yazımı sırasında sahip olduğu bilgi birikimi ve tecrübesi ile çalışmayı yönlendiren ve her türlü yardımı esirgemeyen saygıdeğer danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Turgut YELOĞLU' na saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım sırasında desteklerini esirgemeyen dostum Akın KAHRAMAN' a ağabeylerim ve kıymetli eşime çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	I
ABSTRACT.....	II
TEŞEKKÜR.....	III
İÇİNDEKİLER	IV
SİMGELER DİZİNİ.....	VI
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	4
2.1. İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması.....	4
2.1.1 Volterra İntegral Denklem.....	4
2.1.2 Fredholm İntegral Denklem.....	6
2.1.3 Volterra-Fredholm İntegral Denklemler.....	6
2.1.4 Tekil İntegral Denklemler	7
2.2 İntegro-Diferensiyel Denklemlerin Sınıflandırılması	9
2.2.1 Volterra İntegro- Diferensiyel Denklem	9
2.2.2 Fredholm İntegro-Diferensiyel Denklem	10
2.2.3 Volterra- Fredholm İntegro-Diferensiyel Denklem.....	10
2.3 Lineer ve Homojen Denklemler	11
2.3.1 Lineer ve Lineer Olmayan Denklemler	11
2.3.2 Homojen ve Homojen Olmayan Denklemler	12
2.4 Laplace Dönüşümü	13
2.4.1 Laplace Dönüşümü Özellikleri.....	13
2.4.2 Ters Laplace Dönüşümü	14
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	15
3.1. Lineer Olmayan Volterra İntegro-Diferensiyel Denklemler	15
3.1.1 İkinci Dereceden Lineer Olmayan Volterra İntegro-Diferensiyel Denklemler. 15	
3.1.1.1 Birleştirilmiş Laplace Dönüşümü ve Adomian Ayrışma Metodu	16
3.1.1.2 Değişken Yenileme Metodu	18
3.1.1.3 Seri Çözüm Metodu.....	19
3.1.2 Birinci Dereceden Lineer Olmayan Volterra İntegro-Diferensiyel Denklemler 21	
3.1.2.1 Birleştirilmiş Laplace Dönüşüm-Adomian Ayrışma Metodu	21

3.1.2.2 İkinci Dereceye Dönüşen Lineer Olmayan Volterra İntegro Diferensiyel Denklemler	23
3.2 Lineer Olmayan Fredholm İntegro-Diferensiyel Denklemleri.....	25
3.2.1 Direkt Hesaplama Yöntemi	26
3.2.1 Değişken Yenileme Metodu	27
3.2.1 Seri Çözüm Metodu.....	28
3.3 Homojen Lineer Olmayan Fredholm İntegro-Diferensiyel Denklemler.....	29
3.3.1 Direkt Hesaplama Metodu.....	29
4.ARAŞTIRMA BULGULARI	31
Test Problemi 4.1.....	31
Test Problemi 4.2.....	32
Test Problemi 4.3.....	34
Test Problemi 4.4.....	35
Test Problemi 4.5.....	35
Test Problemi 4.6.....	36
Test Problemi 4.7.....	37
Test Problemi 4.8.....	38
Test Problemi 4.9.....	40
Test Problemi 4.10.....	41
Test Problemi 4.11	42
Test Problemi 4.12.....	43
Test Problemi 4.13.....	44
5. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	45
KAYNAKLAR	46
ÖZGEÇMİŞ.....	47

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

$K(x,t)$: Çekirdek Fonksiyonu (İntegral Denklemin Çekirdeği)
λ	: Sabit bir parametre
Σ	: Nitelik İndeksi
\int	: İntegral
lim	: Limit
$\frac{dy}{dx}$: y ' nin x ' e göre Birinci Mertebeden Türevi
$\frac{d^i y}{dx^i}$: y ' nin x ' göre i . Mertebeden Türevi
L	: Laplace Operatörü
$L\{f\}$: f Fonksiyonunun Laplace Dönüşümü
Ω	: Reel Sayıların Kapalı Bir Alt Kümesi
R	: Reel Sayılar Kümesi
A_i	: Adomian Polinomları

KISALTMALAR

LOVİDD	: Lineer Olmayan Volterra İntegro-Diferensiyel Denklem
LOFİDD	: Lineer Olmayan Fredholm İntegro-Diferensiyel Denklem
LOVİD	: Lineer Olmayan Volterra İntegral Denklem
LOFİD	: Lineer Olmayan Fredholm İntegral Denklem

1.GİRİŞ

Genellikle karşılaşılan diferensiyel denklemler bilinmeyen bir fonksiyonun türevlerinden oluşan denklemlerdir. Türev bir fonksiyonun bir nokta veya hemen yakınındaki bir nokta kullanılarak bulunduğundan dolayı diferensiyel denklemlere yerel denklemler de denilebilir. İntegral Denklemler ise bütün uzay üzerinden integral alınmasını gerektirdiğinden dolayı bu denklemler daha evrenseldir diyebiliriz. Tabiat olayları incelendiğinde bu olayların diferensiyel denklemler ile ifade edilebileceği görünür.

İntegral denklemleri ilk olarak 1782 yılında Pier Simon LAPLACE, Fizik ve Astronomi alanında kullanmıştır. Fakat integral denklem kavramı 1888 yılında Bois REYMOND tarafından ele alınmış ve bu ismi vermiştir. Daha öncesinde 1822 yılında Veau B. FOURIER, trigonometrik serilerden yararlanarak ısı problemlerinin çözümünde kullanılan

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sin xy. \varphi(y) dy \\ f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos xy. \varphi(y) dy \end{aligned} \quad (1.1)$$

formüllerine ait

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sin xy. f(x) dx \\ \varphi(y) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos xy. f(x) dx \end{aligned} \quad (1.2)$$

denklemlerini vermiştir (Porter ve Stirling, 1990).

1823 yılında ise Abel mekanik bir problem ile uğraşırken bu problem ile ilgili

$$f(x) = \int_a^a \frac{\varphi(y)}{(x-y)^2} dy, \quad f(0) = 0, \quad 0 < a < 1 \quad (1.3)$$

denklemini formüle edip 1826 yılında çözümünü vermiştir. Bu denklemin $a=0$ ve $a = \frac{1}{2}$ halinde elde edilen denklem Abel' in karşılaştığı orijinal denklem olup, denklem ile ilişkili ve çok bilinen toutochrone (eşit zaman) problemi ise ilk olarak HUYGENS tarafından çözülmüştür. İntegral sınırlarından biri değişken olan ve bilinmeyen φ fonksiyonu integralin hem içinde hem dışında bulunan

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, y)\varphi(y)dy \quad (1.4)$$

integral denklemi Poisson tarafından elde edilmiştir. Burada φ çözümü λ ' nın kuvvetleri cinsinden verilmiştir. Ancak çözüme ilişkin serinin yakınsaklığı Poisson tarafından gösterilmeyip daha sonraları 1830 yılında Liouville tarafından ispatlanmıştır. Bir S yüzeyi içerisinde $\Delta F = 0$ Laplace denklemini sağlayan ve S yüzeyinin sınırında bir değer alan F fonksiyonun bulunması problemi olan Drichlet probleminin bir integral denklem çözümüne eşdeğer olduğu 1870 yılında Liouville tarafından λ parametresinin bir açılımı olarak verildi. Bu çözümün daha önceden Poisson ve Liouville 'in kullandığı ardışık yaklaştırma metoduna karşılık gelir.

İntegral sınırlarından birinin x değişkeni olduğu lineer integrallere ait çalışmalar 1860-1940 yılları arasında yaşamış olan İtalyan matematikçi Vita VOLTERRA tarafından yayımlanmıştır

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy \quad (1.4)$$

integral denklemi ise ilk olarak 1990 yılında, 1866-1927 yılları arasında yaşamış olan Eric İvan FREDHOLM tarafından araştırılmıştır. Fredholm, Volterra' nın 1884' te sunmuş olduğu benzer yaklaşım problemlerini ele alıp 1903' te makalesini yayımlamıştır (Aksoy, 1983).

Fizik, mühendislik, uygulamalı matematik dallarındaki diferensiyel denklemlerin çözülebilmesi için önce integral denkleme çevrilip, çözümlere daha iyi yaklaşılması

gerekliliği vardır. Uygulamalı bilim dallarında problemler birden fazla denklemlerle ifade edilebileceği düşünölecek olursa çok bilinmeyen içeren diferansiyel, integral ve integro diferansiyel denklemlerin çözümlerinin araştırılması güncelliğini korumaktadır. Yakın tarihimizde bu tür denklemler ve denklem sistemleri statik, mekanik, fizik, mukavemet, akışkanlar mekaniği, kuantum mekaniği, elektromanyetik, dalga kırınımları gibi alanlarda ortaya çıkan birçok diferansiyel denklem, integral denklem şeklinde kullanılmaktadır (Karaca, 2008).

Bu alandaki çalışmalar 19. yüzyılın başlarında dağınık bir şekilde olmasına karşın bu yüzyılın sonlarından 21. yüzyıl başlarına kadar daha bilinçli çalışmaların yapıldığı bilinmektedir. Bunlardan bazıları, Lineer Olmayan Volterra İntegral Denklemler (Miller, 1967), Lineer Olmayan Diferansiyel ve İntegral Denklemlere Giriş (Davis, 1967), Volterra Denklemler için Analitik ve Nümerik Metotlar (Linz, 1985), Birinci dereceden Volterra İntegro Diferansiyel Denklemler için Yüksek Dereceden Çözüm Yöntemleri (Abdelkhani, 1993), Yüksek Mertebeden Lineer Olmayan Volterra ve Fredholm İntegro Diferansiyel Denklemler için Taylor Polinom Çözümü (Maleknejat ve Mahmoudi, 2003), Lineer Olmayan İntegral Denklem Çözümü için Genel Metotlar ile Geliştirilmiş Ayrışma Metodunu Karşılaştırma Çalışması (Wazwaz, 2006) başlıklı çalışmalardır.

Bu çalışmadaki amacımız Lineer Olmayan Volterra ve Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemlerini tanımak, bu denklemlerin çözümünde ele alınan, Seri Çözüm Metodu (Series Solutions Method), Değişken Yenileme Metodu (Variational İteration Method), Laplace Dönüşümü-Adomian Ayrışma Metodu (Laplace Transfom-Adomian Decomposition Method) gibi tam ve yaklaşık çözümler veren metotlar üzerinde durmaktır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde değineceğimiz denklemlerin temel kuramlarına değineceğiz. Yani integral denklemler ile ilgili temel bazı kavram ve tanımlar gösterilecektir.

2.1 İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması

İntegral Denklemler, integral sınırlarına, bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonun integralin içinde veya dışında bulunması bağlı olarak değişik sınıflandırma şekilleri vardır. Bu bölümde Volterra İntegral Denklem, Fredholm İntegral Denklem, Volterra-Fredholm İntegral Denklem ve Tekil İntegral Denklemlerini ele alacağız.

Genel olarak x değişkenine bağlı $u(x)$ fonksiyonu bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t)u(t)dt \quad (2.1)$$

formunda verilen denklemlere integral denklem denilir. Bu denklemdeki $h(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları integralin sınırlarıdır. λ sabit bir parametre olup, $K(x,t)$ fonksiyonu x ve t değişkenlerine bağlı bilinen bir fonksiyondur. Bu $K(x,t)$ fonksiyonu çekirdek fonksiyon veya integralin çekirdeği olarak isimlendirilir. Bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonu integral işaretinin sadece içerisinde veya hem içerisinde hem de dışında bulunabilir (Wazwaz, 2011).

2.1.1 Volterra İntegral Denklem

Volterra Diferensiyel Denklemi integral sınırlarından en az bir tanesinin değişken olduğu denklemlerdir. Bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonu sadece integral işaretinin içerisinde yani

$$f(x) = \int_0^x K(x,t)u(t)dt \quad (2.2)$$

denklemleri ile verildiği gibi ise bu integral denklemlere birinci dereceden Volterra İntegral Denklem denir. Ancak bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonu integral işaretinin hem içinde hem de dışında bulunabilir. Yani

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)dt \quad (2.3)$$

eşitliği ile verilen denklemlere de ikinci dereceden Volterra İntegral Denklem denir (Xu, 2006).

Örneğin

$$e^{-x} = \int_0^x e^{(t-x)}u(t)dt \quad (2.4)$$

ve

$$5x + x^3 = \int_0^x (5 + 3x - 3t)u(t)dt \quad (2.5)$$

şeklinde verilen denklemler birinci dereceden Volterra Diferensiyel denklemlerdir. Aşağıda verilen denklemler de ikinci dereceden Volterra Diferensiyel denklemlere örnek olarak gösterilebilir.

$$u(x) = 5 - \int_0^x u(t)dt \quad (2.6)$$

ve

$$u(x) = x + \int_0^x (x-t)u(t)dt \quad (2.7)$$

2.1.2 Fredholm İntegral Denklemler

İntegral sınırlarına göre sınıflandırılabilen bir diğer denklem olan Fredholm İntegral Denkleminde integral sınırları sabittir. Volterra Diferensiyel Denkleminde olduğu gibi bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonu integral işaretinin içinde veya dışında da bulunabilir. Birinci dereceden Fredholm İntegral Denklemlerde $u(x)$ fonksiyonu integral işaretinin içerisinde yer alır. Birinci dereceden Fredholm İntegral Denklem genel formu

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt \quad (2.8)$$

eşitliği ile verilir. $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonu integral işaretinin hem içinde hem de dışında ise denkleme ikinci dereceden Fredholm İntegral Denklem (Xu, 2006) denir. Bu denklemlerin genel formu aşağıdaki eşitlikte verilmiştir.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \quad (2.9)$$

Örnek olarak

$$\frac{\sin x + \cos x}{x^2} = \int_0^1 \sin(xt)u(t)dt \quad (2.10)$$

eşitliği ile verilen denklem birinci dereceden bir Fredholm İntegral Denklemdir. Aşağıda verilen denklem örneği de ikinci dereceden Fredholm İntegral Denklemlere örnek olarak gösterilir.

$$u(x) = x + \frac{7}{8} \int_{-1}^1 (x-t)u(t)dt \quad (2.11)$$

2.1.3 Volterra-Fredholm İntegral Denklemler

Volterra-Fredholm İntegral Denklemleri parabolik sınır değer problemlerinde, canlılar arasındaki salgınların yayılması ile ilgili matematiksel modellemelerde ve

fiziksel, biyolojik modellemelerde karşımıza çıkmaktadır. Volterra-Fredholm İntegral Denklemler literatürde karşımıza aşağıda yazıldığı gibi iki formda bulunur (Yousefi ve ark., 2006).

$$u(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x K_1(x,t)u(t)dt + \lambda_2 \int_a^b K_2(x,t)u(t)dt \quad (2.12)$$

ve

$$u(x,t) = f(x,t) + \lambda \int_0^t \int_{\Omega} F(x,t,\varepsilon,\tau,u(\varepsilon,\tau))d\varepsilon d\tau, \quad (x,t) \in \Omega x[0,T] \quad (2.13)$$

(2.13) denklemindeki $f(x,t)$ ve $F(x,t,\varepsilon,\tau,u(\varepsilon,\tau))$ fonksiyonları $D = \Omega x[0,T]$ üzerindeki analitik fonksiyonlardır. Ω ise R^n , $n=1,2,3$ uzayının kapalı bir alt kümesidir.

Bu denklemler göz önüne alındığında (2.12) denkleminde Volterra ve Fredholm integral denklemleri ayrık olmasına karşın (2.13) denkleminde karışık olarak verilmiştir. Üstelik her iki denklem de bilinmeyen $u(x)$ ve $u(x,t)$ fonksiyonları integral işaretinin hem içinde hem de dışındadır. Bu durum ikinci dereceden integral denklemlerin karakteristik özelliğidir. Şayet bilinmeyen fonksiyonlar sadece integral işaretinin içinde ise bu denklem birinci dereceden integral denklem olur. Aşağıda bu formlarda bulunan denklemlere örnek verilmiştir.

$$u(x) = 6x + 3x^2 - 5 - \int_0^x xu(t)dt - \int_0^1 tu(t)dt$$

$$u(x,t) = x + t^4 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - \int_0^t \int_0^1 (\tau - \varepsilon)d\varepsilon d\tau$$

2.1.4 Tekil İntegral Denklemler

İntegral denklemlerin integralin sınır değerlerine göre sınıflandırma şekillerinden biri de tekil yada tekil olmayan integral denklem sınıflandırmasıdır. Hatırlayacağımız gibi Fredholm İntegral Denklemlerinde sınır değerler sabit değerler olduğundan dolayı,

Volterra İntegral Denklemler de ancak bu sınıflandırmanın yapılacağı anlaşılır. Birinci dereceden ve ikinci dereceden Volterra Diferensiyel Denklemler sırasıyla

$$f(x) = \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t)u(t)dt \quad (2.14)$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t)u(t)dt \quad (2.15)$$

eşitlikleri ile verildiğini daha önce belirtmiştik. İntegral sınırlarından biri veya her ikisinin sonsuz olması durumunda bu denklemlere tekil integral denklem denir. Ayrıca $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu $a < x < b$, $a < t < b$ için sürekli değilse bu integral denkleme de tekil integral denklem denilmektedir (Duman, 2008).

Burada üzerinde duracağımız birinci dereceden Volterra Diferensiyel Denklem

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^a} u(t)dt, \quad 0 < a < 1 \quad (2.16)$$

ya da

$$u(x) = f(x) + \int_0^x \frac{1}{(x-t)^a} u(t)dt, \quad 0 < a < 1 \quad (2.17)$$

eşitliği ile verilen ikinci dereceden Volterra Diferensiyel Denklem formu olacaktır. Verilen bu iki denkleme $a \in (0,1)$ olduğundan dolayı normalleştirilmiş Abel İntegral Denklem (zayıf tekil integral denklem) denir (Duman, 2008).

Özel olarak $a = 1/2$ için

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t)dt \quad (2.18)$$

eşitliği yazılabilir. Elde edilen bu denkleme de Abel tekil integral denklemi denir. Bu denklemden integralin üst sınırının x olduğuna dikkat edilmelidir.

Abel integral denklemi, normalleştirilmiş Abel integral denklemi ve zayıf tekil integral denklemleri aşağıda sırasıyla örneklendirilmiştir (Wazwaz, 2011).

$$\sqrt{x} = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t) dt \quad (2.19)$$

$$x^3 = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{3}}} u(t) dt \quad (2.20)$$

$$u(x) = 1 + \sqrt{x} + \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{3}}} u(t) dt \quad (2.21)$$

2.2 İntegro-Diferensiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

İntegro-Diferensiyel Denklemler integral ve türev operatörlerinin her ikisini de içeren denklemlerdir. Bu denklemler birçok bilimsel alanda karşımıza çıkmaktadır. Özellikle de başlangıç veya sınır değer problemlerini integral denklemlere dönüştürürken karşımıza sıkça çıkmaktadır.

2.2.1 Volterra İntegro-Diferensiyel Denklem

Volterra İntegro-Diferensiyel Denklemler, integral işaretinin denklemin hem içinde hem de dışında bulunduğu, ayrıca $u^{(n)}(x)$, $n \geq 1$ türevlerini ve bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonunu içerisinde bulundurduğu denklemlerdir. Bu denklemlerde integral sınırlarının en az biri değişkendir. Ayrıca bu denklemlerde türev ve integral operatörleri aynı denklem içerisinde bulunur. Volterra İntegro-Diferensiyel Denklemler ile ilgili bilmemiz gereken diğer bir diğer şey ise denklem çözümü yapılırken başlangıç şartlarının verilmesi gerekliliğidir. Bu denklemin genel formu (Ahmed ve Elzaki, 2013)

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)dt \quad (2.22)$$

eşitliği ile verilir. Burada $u^{(n)}$, $u(x)$ fonksiyonunun n . mertebeden türevini gösterir.

Yani bu denklemler

$$u'(x) = -1 + \frac{1}{2}x^2 - xe^x - \int_0^x tu(t)dt, \quad u(0) = -1 \quad (2.23)$$

ve

$$u''(x) + u'(x) = 4 - x(\sin x + \cos x) - \int_0^x tu(t)dt, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = -2 \quad (2.24)$$

formundaki denklemlerdir.

2.2.2 Fredholm İntegro-Diferensiyel Denklem

Fredholm İntegro-Diferensiyel Denklemler, Volterra İntegro-Diferensiyel Denklemlerde olduğu gibi bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonu ve türevleri içeren denklemlerdir. Bu denklemlerde integral sınırları sabit olup integral ve türev operatörleri aynı denkleme bulunur. Volterra İntegro-Diferensiyel denklemlerde olduğu gibi bu denklemlerde de başlangıç şartları verilmelidir. Fredholm İntegro-Diferensiyel Denklemlerin genel formu

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \quad (2.25)$$

şeklidir (Wazwaz ve Khuri, 1996).

Aşağıda verilen denklemler de bu sınıfa girer.

$$u'(x) = 2 - \frac{1}{3}x + \int_0^1 xu(t)dt \quad (2.26)$$

$$u''(x) + u'(x) = x - \cos x - \int_0^{\pi/3} xtu(t)dt \quad (2.27)$$

2.2.3 Volterra-Fredholm İntegro-Diferensiyel Denklemler

Volterra-Fredholm İntegral Denklemleri integral operatörünün yanı sıra bir veya daha fazla adi türev barındırır. Bu denklemler

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x K_1(x,t)u(t)dt + \lambda_2 \int_a^x K_2(x,t)u(t)dt \quad (2.28)$$

ve

$$u^{(n)}(x,t) = f(x,t) + \lambda_1 \int_0^t \int_{\Omega} F(x,t,\varepsilon,\tau,u(\varepsilon,\tau))d\varepsilon d\tau, \quad (x,t) \in \Omega \times [0, T] \quad (2.29)$$

eşitlikleri ile verildiği gibi literatürde bu iki formda bulunur. Bu denklemlere ait kısmi çözüm belirleyebilmek için başlangıç koşullarının verilmesi gerekmektedir. Volterra-Fredholm İntegro-Diferensiyel Denklemler ile ilgili aşağıda örnekler verilmiştir (Wazwaz, 2011).

$$u'(x) = 24x + x^4 - 3 - \int_0^x (x-t)u(t)dt - \int_0^1 tu(t)dt, \quad u(0) = 1 \quad (2.30)$$

$$u'(x,t) = 3 + t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - \int_0^x \int_0^1 (\tau - \varepsilon)d\varepsilon d\tau, \quad u(0,t) = t^3 \quad (2.31)$$

2. 3 Lineer Denklemler ve Homojen Denklemler

İntegro Denklemler ve İntegro-Diferensiyel Denklemleri lineerlik ve homojenlik açısından da sınıflandırmak mümkündür. Bu sınıflandırma denklemlerin çözümünde büyük rol oynar.

2. 3. 1 Lineer ve Lineer Olmayan Denklemler

$u(x)$ bilinmeyen fonksiyonu integral içerisinde tek ise o integral denkleme ya da İntegro-Diferensiyel denkleme lineerdir denir. Ancak $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonu integral işareti içerisinde birden fazla ise veya denklem $u(x)$ fonksiyonunun e^u , $\cos u$, $\ln(1+u)$ gibi lineer olmayan fonksiyonlarını içeriyorsa o denkleme de lineer olmayan denklem denir (Ergün, 2010).

Örnek olarak aşağıda verilen denklemler gösterilebilir.

$$u(x) = 2 - \int_0^x (x-t)u(t)dt \quad (2.32)$$

$$u(x) = 6 - \int_0^2 (x-t)u(t)dt \quad (2.33)$$

$$u(x) = 5 + \int_0^x (1+x-t)u^4(t)dt \quad (2.34)$$

$$u'(x) = 3 + \int_0^3 xte^{u(t)} dt \quad (2.35)$$

(2.32) ve (2.33) denklemleri sırasıyla Lineer Volterra ve Fredholm İntegral Denklemlerdir. (2.34) ve (2.35) denklemleri de sırasıyla lineer olmayan Volterra İntegral Denklem ve Lineer olmayan Fredholm İntegro-Diferensiyel denklemlerdir.

2.3.2 Homojen Denklemler ve Homojen Olmayan Denklemler

İkinci dereceden İntegral Denklemler ve İntegro Diferensiyel Denklemler homojen ve homojen olmayan denklemler olarak sınıflandırılabilir. Denklemden $f(x)$ fonksiyonu sıfır ise denklem homojen, aksi takdirde homojen olmayan denklem olarak isimlendirilir. Ancak bu sınıflandırmanın ikinci dereceden denklemler için yapıldığını unutmamamız gerekir. Homojen denklemlere örnek olarak

$$u(x) = \cos x + \int_0^x xtu(t)dt \quad (2.36)$$

$$u(x) = x + \int_0^1 (x-t)^2 u(t)dt \quad (2.37)$$

denklemleri gösterilebilir. Homojen olmayan denklemlere ise aşağıda verilen denklemler örnek olarak gösterilebilir.

$$u(x) = \int_0^x (1+x-t)u^4(t)dt \quad (2.38)$$

$$u''(x) = \int_0^x xtu(t)dt, \quad u(0) = 2, \quad u'(0) = 1 \quad (2.39)$$

Bu denklemler $f(x)=0$ olduğundan dolayı homojen denklemlerdir (Ergün, 2010; Wazwaz, 2011).

2. 4 Laplace Dönüşümü

Bu çalışmada ilerleyen bölümlerde çözüm metotlarını ele alırken Laplace dönüşümünü sıkça ele alacağımızdan dolayı genel hatlarıyla Laplace dönüşümünü bu bölümde ele alacağız.

$[0, \infty)$ aralığında tanımlı bir $f(x)$ fonksiyonu için eğer $\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)dx$ integrali mevcut ise s ' nin bir fonksiyonu olan

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)dx \quad (2.40)$$

denklemine f 'nin Laplace dönüşümü denir. f ' nin Laplace dönüşüm $L\{f(x)\} = F(s)$ veya $L\{f\} = F$ biçiminde gösterilir. s reel veya kompleks bir değişken, L ise Laplace Operatörüdür.

Ayrıca $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-sx} f(x)dx$ limiti var ise integral mevcuttur (Çağlayan ve ark. 2012).

2.4.1 Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Laplace Dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahiptir (Çağlayan ve ark., 2012).

i. Laplace dönüşümü lineerdir. Yani C_1, C_2 keyfi sabitler f_1, f_2 fonksiyonları da Laplace dönüşümü mevcut iki fonksiyonu ise $L\{C_1f_1 + C_2f_2\} = C_1L\{f_1\} + C_2L\{f_2\}$ şeklindedir.

ii. $L\{f(x)\} = F(s)$ ise $L\{e^{ax}f(x)\} = F(s-a)$ şeklindedir.

iii. $L\{f(x)\} = F(s)$ ise $L\{f(ax)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$ şeklindedir.

iv. $L\{f(x)\} = F(s)$ ise $L\{(-1)^n x^n f(x)\} = \frac{d^n F(s)}{ds^n}$ şeklindedir.

v. $L\{f(x)\} = F(s)$ ve $G(x) \begin{cases} 0, & 0 < x < a \\ f(x-a), & x > a \end{cases}$ ise $L\{G(x)\} = e^{-as}F(s)$ şeklindedir.

2.4.2 Ters Laplace Dönüşümü

Laplace dönüşümünde verilen bir fonksiyonun $\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$ integrali yardımıyla $F(s)$ fonksiyonuna dönüşümünü ele almıştık. Bunu da sembolik olarak $L\{f(x)\} = F(s)$ ile göstermiştik. Ters Laplace dönüşümünde ise verilen bir $F(s)$ fonksiyonunu göz önünde bulunduralım. Eğer $L\{f(x)\} = F(s)$ olacak şekilde bir $f(x)$ fonksiyonu var ise f fonksiyonuna F fonksiyonunun Ters Laplace Dönüşümü denir. F fonksiyonunun Ters Laplace Dönüşümü $f = L^{-1}\{F\}$ veya $f(x) = L^{-1}\{F(s)\}$ şeklinde gösterilir (Çağlayan ve ark., 2012).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1 Lineer Olmayan Volterra İntegro Diferensiyel Denklem

Lineer ve Lineer olmayan Volterra İntegral Denklemler, toplumsal konular ile ilgili problemlerde, hastalıkların yayılmasında, cihaz üretimi gibi pek çok bilimsel alanda karşımıza çıkmaktadır.

Lineer Olmayan Volterra İntegro Diferensiyel Denklemleri (LOVIDD), en az bir değişkene göre integrallenebilen denklemlerdir. Bu bölümde çözüm metotlarını inceleyeceğimiz İkinci dereceden bir LOVIDD' in standart formu

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)F(u(t))dt \quad (3.1)$$

eşitliği ile verilir (Ahmed ve Elzaki, 2013).

Birinci dereceden LOVIDD' in standart formu ise

$$\int_0^x K_1(x,t)F(u(t))dt + \int_0^x K_2(x,t)u^{(n)}(t)dt = f(x), K_2(x,x) \neq 0 \quad (3.2)$$

denklemi ile verilir. Denklemdaki $u^{(n)}(x)$, $u(x)$ fonksiyonunun n . dereceden bir türevidir. Bu denklemlerdeki $K(x,t)$, $K_1(x,t)$ ve $K_2(x,t)$ çekirdek fonksiyonları ve $f(x)$ fonksiyonu gerçek değerli fonksiyonlardır. $F(u(x))$ fonksiyonu ise $u(x)$ fonksiyonunun $u^2(x)$, $\sin(u(x))$ ve $e^{u(x)}$ fonksiyonları gibi lineer olmayan bir fonksiyonudur (Wazwaz, 2011).

3.1.1 İkinci Dereceden Lineer Olmayan Volterra İntegro Diferensiyel Denklem

İkinci dereceden LOVIDD' ler ısı transferi, genel difüzyon yöntemleri gibi fiziksel alanlarda karşımıza çıkmaktadır. Bu kısımda türev ve diferensiyel operatörlerini içerisinde bulunduran Lineer Volterra İntegro Diferensiyel Denklemleri, LOVIDD' e çevireceğiz. İkinci dereceden bir LOVIDD' i

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)F(u(t))dt$$

denklemini ile göstermiştik. Burada $u^{(n)}(x) = \frac{d^{(n)}u}{dx^{(n)}}$ ve $F(u(x))$ fonksiyonu, $u(x)$ fonksiyonunun lineer olmayan bir fonksiyonudur. Bu denklem türev ve diferensiyel operatörlerinin her ikisini de içerir. LOVİDD' in $u(x)$ özel çözümünü belirlemek için başlangıç koşullarının belirlenmesi gerekir (Wazwaz, 2011).

İkinci dereceden LOVİDD çözmek için birçok yöntem mevcuttur. Biz bu çözümlerden Birleştirilmiş Laplace Dönüşüm-Adomian Ayırışma Metoduna, Değişken Yenileme Metoduna ve Seri Çözüm Metoduna değineceğiz.

3.1.1.1 Birleştirilmiş Laplace Dönüşüm – Adomian Ayırışma Metodu

Bu bölümde e^{x-t} , $\cos(x-t)$ ve $\sin(x-t)$ gibi $(x-t)$ ' ye bağlı $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonları üzerinde duracağız. Yani $(x-t)$ farkına bağlı

$$u^{(i)}(x) = f(x) + \int_0^x K(x-t)F(u(t))dt \quad (3.3)$$

eşitliği ile verilen LOVİDD' i birleştirilmiş Laplace dönüşüm metodu ile çözmek için $u(x)$ fonksiyonunun türetilmiş Laplace dönüşümünü yani

$$L\{u^{(i)}(x)\} = s^{(i)}L\{u(x)\} - s^{i-1}u(0) - s^{i-2}u'(0) - \dots - u^{(i-1)}(0) \quad (3.4)$$

eşitliğini temel alacağız. Bu eşitlikten aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$L\{u'(x)\} = sL\{u(x)\} - u(0) = sU(s) - u(0),$$

$$L\{u''(x)\} = s^2L\{u(x)\} - su(0) - u'(0) = s^2U(s) - su(0) - u'(0),$$

$$L\{u'''(x)\} = s^3L\{u(x)\} - s^2u(0) - su'(0) - u''(0) = s^3U(s) - s^2u(0) - su'(0) - u''(0),$$

$$\begin{aligned} L\{u^{IV}(x)\} &= s^4 L\{u(x)\} - s^3 u(0) - s^2 u'(0) - s u''(0) - u'''(0) \\ &= s^4 U(s) - s^3 u(0) - s^2 u'(0) - s u''(0) - u'''(0), \end{aligned}$$

benzer şekilde daha yüksek dereceler için de Laplace dönüşümleri yazılabilir. Burada $U(s) = L\{u(x)\}$ şeklindedir. (3.3) denkleminin her iki tarafına Laplace Dönüşümü uygulanırsa

$$s^i L\{u(x)\} - s^{i-1} u(0) - s^{i-2} u'(0) - \dots - u^{(i-1)}(0) = L\{f(x)\} + L\{K(x-t)\} L\{Fu(t)\} \quad (3.5)$$

eşitliği elde edilir ya da benzer olarak bu denklem

$$L\{u(x)\} = \frac{1}{s} u(0) + \frac{1}{s^2} u'(0) + \dots + \frac{1}{s^i} u^{(i-1)}(0) + \frac{1}{s^i} L\{f(x)\} + \frac{1}{s^i} L\{K(x-t)\} L\{F(u(t))\} \quad (3.6)$$

şeklinde de yazılabilir. (3.6) denklemindeki lineer olmayan $F(u(x))$ terimi için Adomian Ayrışma Metodu uygulamamız gerekir. Bunun için lineer $u(x)$ terimini

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \quad (3.7)$$

ile verildiği gibi sonsuz seri toplamı şeklinde yazmalıyız. Buradaki $u_n(x)$, ($n \geq 0$) ardışık yaklaşımları belirlenir. (3.6) denkleminin sağ tarafında bulunan lineer olmayan $F(u(x))$ terimi A_n formundaki Adomian polinomlarının sonsuz bir serisi olarak

$$F(u(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x), \quad A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[F\left(\sum_{i=0}^n x^i u_i \right) \right]_{x=0}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.8)$$

eşitliğinde verildiği şekilde gösterilecektir. Denklemdeki A_n , ($n \geq 0$) Adomian polinomunun lineer olmayan tüm formları elde edilebilir. Elde edilen bu eşitlikler neticesinde (3.7) ve (3.8) denklemlerinin (3.6) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$L\left\{\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\right\} = \frac{1}{s}u(0) + \frac{1}{s^2}u'(0) + \dots + \frac{1}{s^i}u^{(i-1)}(0) + \frac{1}{s^i}L\{f(x)\} + \frac{1}{s^i}L\{K(x-t)\}L\left\{\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)\right\} \quad (3.9)$$

elde edilir ki bu ifade de

$$L\{u_0(x)\} = \frac{1}{s}u(0) + \frac{1}{s^2}u'(0) + \dots + \frac{1}{s^i}u^{(i-1)}(0) + \frac{1}{s^i}L\{f(x)\} \quad (3.10)$$

$$L\{u_{k+1}(x)\} = \frac{1}{s^i}L\{K(x-t)\}L\{A_k(x)\}, \quad k \geq 0$$

şeklinde yazılabilir. (3.10) denklemin ilk kısmında ters Laplace dönüşümü uygulanırsa A_0 olarak tanımlanacak olan $u_0(x)$ elde edilir. Bu (3.10) denkleminin ikinci kısmında verilen u_{k+1} , $k \geq 0$ bileşeninin belirlenmesine neden olacaktır (Wazwaz, 2011).

3.1.1.2 Değişken Yenileme Metodu

Değişken Yenileme Metodu lineer ve lineer olmayan problemler de çözüm veren bir yöntemdir. i . dereceden bir LOVİDD' in standart formu

$$u^{(i)}(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)F(u(t))dt \quad (3.11)$$

denklemini ile verilmişti. Burada $u^{(i)}(x) = \frac{d^{(i)}u}{dx^{(i)}}$ ve $F(u(x))$, $u(x)$ fonksiyonunun lineer olmayan bir fonksiyonuydu ve burada tam çözümün belirlenebilmesi için başlangıç koşullarının tanımlanması gerekir. Bu metot yaklaşık çözümler vereceğinden hata fonksiyonu yazmamız gerekir. LOVİDD' in hata fonksiyonunu aşağıda verildiği gibi yazabiliriz

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(\varepsilon) \left(u_n^{(i)}(\varepsilon) - f(\varepsilon) - \int_0^\varepsilon K(\varepsilon, r) F(\tilde{u}_n(r)) dr \right) d\varepsilon. \quad (3.12)$$

Bu yöntemi uygulamak temelde iki adımdan oluşur. İlk olarak sınır değerler kullanarak ve parçalı integrasyon yoluyla tanımlanabilen Langrange çarpanı belirlenmelidir. Bu çarpan λ olarak gösterilir. λ Bir sabit veya bir fonksiyon olabilir. λ belirlendikten sonra bir iterasyon formülü ile $u(x)$ çözümünün $u_{n+1}(x)$, $n \geq 0$ ardışık yaklaşımlar belirlenir.

Bu yaklaşımlar belirlenirken u_0 (sıfır yaklaşımı) herhangi bir fonksiyon olabilir ancak u_0 fonksiyonunun belirlenmesinde başlangıç şartlarının kullanılmasında fayda vardır. Yani sıfırcı dereceden yakınsak seçilen Langrange çarpanları

$$u' + f(u(\varepsilon), u'(\varepsilon)) = 0, \lambda = -1, u_0(x) = u(0)$$

$$u'' + f(u(\varepsilon), u'(\varepsilon), u''(\varepsilon)) = 0, \lambda = \varepsilon - x, u_0(x) = u(0) + u'(0)x \quad (3.13)$$

$$u''' + f(u(\varepsilon), u'(\varepsilon), u''(\varepsilon), u'''(\varepsilon)) = 0, \lambda = -\frac{1}{2!}(\varepsilon - x)^2, u_0(x) = u(0) + u'(0)x + \frac{1}{2!}u''(0)x^2$$

eşitlikleri ile elde edilir. Sonuç olarak çözüm,

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) \quad (3.14)$$

limiti ile verilir (Wazwaz, 2011).

3.1.1.3 Seri Çözüm Metodu

Bu metot temel olarak analitik fonksiyonların Taylor serisinden oluşmaktadır. Herhangi bir b noktasını komşuluğunda Taylor serisi gibi tüm mertebeden türevleri içeriyor ise $u(x)$ fonksiyonu gerçek değerli bir analitik fonksiyon olarak isimlendirilir. Yani,

$$u_k(x) = \sum_{n=0}^k \frac{u^n(b)}{n!} (x-b)^n \quad (3.15)$$

denklemini b ' nin bir a komşuluğunda $u(x)$ ' e yakınsar. Daha sade ve genel bir ifadeyle $x = 0$ noktasındaki Taylor serisi,

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (3.16)$$

şeklinde yazılabilir.

Taylor seri metodu veya seri çözüm metodunu bu bölümde LOVIDD çözümünde kullanıp, aşağıda (3.17) denklemini ile verilen LOVIDD' nin $u(x)$ çözümünü analitik varsayacağız.

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)F(u(t))dt, \quad u^k(0) = k!a_k, \quad 0 \leq k \leq n-1 \quad (3.17)$$

(3.16) denkleminde verilen Taylor serisindeki a_n katsayıları ardışık bir şekilde hesaplanacaktır. İlk olarak a_n katsayılarını belirleyebilmek için

$$a_0 = u(0), \quad a_1 = u'(0), \quad a_2 = \frac{1}{2!}u''(0), \quad a_3 = \frac{1}{3!}u'''(0) \quad (3.18)$$

gibi başlangıç şartları kullanılmalıdır. Diğer a_n katsayılarını (3.17)' de verilen LOVIDD ve seri çözüm metodu uygulayarak belirleyeceğiz. (3.17) denkleminin her iki tarafında (3.16) denklemini yerine yazılırsa

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)^{(n)} = T(f(x)) + \lambda \int_0^x K(x,t)F\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) dt \quad (3.19)$$

eşitliği elde edilir. Denkleminde $T(f(x))$, $f(x)'$ in Taylor serisidir. Bu şekilde (3.17) denklemini (3.19) denklemine dönüştür. Burada integrallenebilen ve bilinmeyen $F(u(x))$ fonksiyonu yerine t^n , $n \geq 0$ terimi integrallenecektir. Seri çözüm aradığımızdan dolayı

$f(x)$ fonksiyonu trigonometrik, üstel fonksiyonlar gibi temel fonksiyonlar içeriyorsa Taylor seri açılımında $f(x)$ ' i içeren fonksiyonlar kullanılmalıdır.

İlk olarak (3.19) denkleminin sağ tarafının integralini alıp x' in kuvvetlerinden oluşan katsayıları bir araya getirip $a_j, j \geq 0$ da öz yinelemeli ilişkiyi belirlemek için elde edilen denklemin her iki yanına x' in kuvvetlerinden oluşan katsayılar denklemini uygulayacağız. Burada bu katsayıların bazıları başlangıç şartlarını belirlemede kullanılacaktır. $a_j, j \geq 0$ katsayısı belirlendikten sonra (3.16)' da türetilen katsayılar seri çözümde yerine yazılacaktır (Wazwaz, 2011).

3.1.2 Birinci Dereceden LOVİDD

Birinci dereceden LOVİDD standart formu

$$\int_0^x K_1(x,t)F(u(t))dt + \int_0^x K_2(x,t)u^{(i)}(t)dt = f(x), \quad K_2(x,t) \neq 0 \quad (3.20)$$

denklemleri ile verilmiştir. Denklemlerdeki $u^{(i)}(x), u(x)$ fonksiyonunun i . dereceden türevidir. $K_1(x,t)$ ve $K_2(x,t)$ çekirdek fonksiyonları, $f(x)$ gerçek değerli bir fonksiyon ve $f(u(x)), u(x)$ fonksiyonunun lineer olmayan bir fonksiyonudur. Denklemin tam çözümü için başlangıç şartları belirlenmelidir. Birinci dereceden LOVİDD (3.20) denklemindeki ikinci integralinin alınması ile denklem ikinci dereceden LOVİDD' e dönüştürülebilir. Burada biz birinci dereceden LOVİDD ile ilgili Birleştirilmiş Laplace Dönüşüm-Adomian Ayrıştırma Metodunu ve ikinci dereceden LOVİDD' e dönüşümü ele alacağız (Wazwaz, 2011).

3.1.2.1 Birleştirilmiş Laplace Dönüşüm – Adomian Ayrıştırma Metodu

Bu metodu ikinci dereceden LOVİDD için önceki bölümde de kullanmıştık. Burada biz her ikisi de $(x-t)$ farkına bağlı olan $K_1(x,t)$ ve $K_2(x,t)$ çekirdek fonksiyonlarına odaklanacağız. Ayrıca f_1, f_2 birer fonksiyon olmak üzere $(f_1 + f_2)(x)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünün

$$L\{(f_1 + f_2)(x)\} = L\left\{\int_0^x f_1(x,t)f_2(t)dt\right\} = F_1(s)F_2(s) \quad (3.21)$$

ve

$$L\{u^{(n)}(x)\} = s^n L\{u(x)\} - s^{n-1}u(0) - s^{n-2}u'(0) - \dots - u^{(n-1)}(0) \quad (3.22)$$

olduğunu biliyoruz. (3.20) denkleminin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$L\{K_1(x-t)*F(u(x))\} + L\{K_2(x-t)*u^{(i)}(x)\} = L\{f(x)\} \quad (3.23)$$

elde edilir. Elde edilen bu denklem

$$K_1(s)L\{F(u(x))\} + K_2(s)L\{u^{(i)}(x)\} = \mathcal{O}(s) \quad (3.24)$$

eşitliği ile verildiği gibi yazılabilir. Bu denklemde

$$\mathcal{O}(s) = L\{F(x)\}, \quad K_1(s) = L\{K_1(x)\}, \quad K_2(s) = L\{K_2(x)\} \quad (3.25)$$

şeklinindedir. (3.22) denklemini kullanarak ve $U(s)$ için çözüm yapılırsa,

$$U(s) = \frac{\mathcal{O}(s) + K_2(s)\Gamma(s) - K_1(s)L\{f(u(x))\}}{s^i K_2(s)} \quad (3.26)$$

elde edilir. Burada

$$\Gamma(s) = s^{i-1}u(0) + s^{i-2}u'(0) + \dots + u^{(i-1)}(0) \quad \text{ve} \quad U(s) = L\{u(x)\} \quad \text{elde edilir.}$$

Lineer olmayan $f(u(x))$ terimini bulmak için (3.26) denkleminde verilen Adomian Ayrıştırma Metoduna başvurulur. Diğer taraftan (3.26) denkleminin sağ tarafındaki $f(u(x))$ lineer olmayan terimi Adomian polinomları olarak

$$f(u(x)) = \sum_0^{\infty} A_n(x) \quad (3.27)$$

şeklinde yazılabilir. $A_n, n \geq 0$ Adomian polinomları,

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[F \left(\sum_{i=0}^n \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0} \quad n=1,2,\dots \quad (3.28)$$

eşitliği ile bulunur. $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ olduğunu biliyoruz. Bu eşitlik ve (3.27) eşitliği (3.26) denkleminde yerine yazılırsa

$$L \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \right\} = \frac{1}{s} u(0) + \frac{1}{s^2} u'(0) + \dots + \frac{1}{s^i} u^{i-1}(0) + \frac{\emptyset(s)}{s^i K_2(s)} - \frac{K_1(s)}{s^i K_2(s)} L \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \right\} \quad (3.29)$$

eşitliği elde edilir. Bu metodu uygularken aşağıda verilen eşitliklerden de faydalanılır.

$$U_0(s) = \frac{1}{s} u(0) + \frac{1}{s^2} u'(0) + \dots + \frac{1}{s^i} u^{i-1}(0) + \frac{\emptyset(s)}{s^i K_2(s)} \quad (3.30)$$

$$L \{ u_{k+1}(x) \} = - \frac{K_1(s)}{s^i K_2(s)} L \{ A_k(x) \}, \quad k \geq 0$$

Bu denklemlerde ayrıca

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{K_1(s)}{s^i K_2(s)} = 0 \quad (3.31)$$

eşitliği vardır. (3.30) denkleminin ilk tarafına ters Laplace uygulanması ile A_0 olarak tanımlanabilecek $u_0(x)$ terimi elde edilecektir. Bu dönüşüm $u_k, k \geq 0$ bileşeninin tam olarak belirlenmesine neden olacaktır (Wazwaz, 2011).

3.1.2.2 İkinci Dereceden LOVİDD' e Dönüşüm

Bu bölümde birinci dereceden verilen bir LOVİDD' i ikinci dereceden Lineer olmayan Volterra İntegro-Diferensiyel Denkleme dönüştüreceğiz.

Birinci dereceden bir LOVİDD,

$$\int_0^x K_1(x,t) F(u(t)) dt + \int_0^x K_2(x,t) u^{(i)}(t) dt = f(x), \quad K_2(x,x) \neq 0 \quad (3.32)$$

formundaydı. Genel formunu değiştirmeden daha yüksek mertebeden denklemler yazılabilir. Örneğin birinci ve ikinci mertebeden türevleri içeren denklemler sırasıyla aşağıda verilmiştir.

$$\int_0^x K_1(x,t)F(u(t))dt + \int_0^x K_2(x,t)u'(t)dt = f(x), \quad K_2(x,x) \neq 0 \quad (3.33)$$

ve

$$\int_0^x K_1(x,t)F(u(t))dt + \int_0^x K_2(x,t)u''(t)dt = f(x), \quad K_2(x,x) \neq 0 \quad (3.34)$$

Yukarıda verilen (3.33) denklemindeki ikinci integral alınırrsa,

$$\int_0^x K_1(x,t)F(u(t))dt + K_2(x,x)u(x) - K_2(x,0)u(0) - \int_0^x \frac{\partial K_2(x,t)}{\partial t}u(t)dt = f(x) \quad (3.35)$$

ya da benzer şekilde

$$u(x) = \frac{f(x)}{K_2(x,x)} + \frac{K_2(x,0)}{K_2(x,x)}u(0) + \frac{1}{K_2(x,x)} \int_0^x \frac{\partial(K_2(x,t))}{\partial t}u(t)dt - \frac{1}{K_2(x,x)} \int_0^x K_1(x,t)F(u(t))dt, \quad K_2(x,x) \neq 0 \quad (3.36)$$

lineer olmayan Volterra integral denklemi elde edilir. (3.36) da verilen denklem ikinci dereceden LOVIDD' dir. Benzer şekilde (3.34) denklemini ele alalım. Bu denklemin ikinci integrali alınırrsa,

$$\int_0^x K_1(x,t)F(u(t))dt + K_2(x,x)u'(x) - K_2(x,0)u'(0) - \int_0^x \frac{\partial K_2(x,t)}{\partial t}u'(t)dt = f(x), \quad K_2(x,x) \neq 0 \quad (3.37)$$

ya da benzer şekilde

$$u'(x) = \frac{f(x)}{K_2(x,x)} + \frac{K_2(x,0)}{K_2(x,x)}u'(0) + \frac{1}{K_2(x,x)} \int_0^x \frac{\partial(K_2(x,t))}{\partial t} u'(t) dt - \frac{1}{K_2(x,x)} \int_0^x K_1(x,t)F(u(t))dt, \quad K_2(x,x) \neq 0 \quad (3.38)$$

ikinci dereceden LOVİDD elde edilmiş olur. Burada eğer birinci dereceden LOVİDD, $u(x)$ ' in birinci dereceden türevini içeriyorsa (3.26) da verilen ikinci dereceden LOVİDD elde edilir. Ancak birinci dereceden LOVİDD $u^{(i)}$, $i \geq 2$ derecelerinden türev içeriyorsa (3.38) de verilen ikinci dereceden LOVİDD elde edilecektir (Wazwaz, 2011).

3.2 Linear Olmayan Fredholm İntegro-Diferensiyel Denklemler

Bu bölümdeki amacımız Linear Olmayan Fredholm İntegro-Diferensiyel denklemleri tanıtip (LOFİDD), LOVİDD' de kullandığımız metotları kullanarak ikinci dereceden Linear Olmayan Fredholm İntegro-Diferensiyel Denklemleri LOVİDD' de kullanılan yöntemleri kullanarak çözüm elde etmektir

İkinci dereceden LOFİDD formu

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 K(x,t)F(u(t))dt \quad (3.39)$$

şeklinde dir. LOVİDD ' ler de belirtildiği gibi burada $u^{(n)}(x)$, $u(x)$ fonksiyonunun n . dereceden türevidir. $K(x,t)$ Çekirdeği ve $f(x)$ fonksiyonu gerçek değerli fonksiyonlar ve $F(u(t))$, $u(x)$ fonksiyonunun lineer olmayan bir fonksiyonudur (Wazwaz ve Khuri, 1996).

Bu bölümde daha çok değişkenlerine ayrılabilen veya (dejenere) olmuş çekirdek fonksiyonlarını ele alacağız. Ayrılabilir veya dejenere olmuş bir çekirdek, her biri bir değişkene bağlı iki fonksiyonunun çarpımlarının toplamı olarak,

$$K(x,t) = \sum_{i=1}^n g_i(x)h_i(t) \quad (3.40)$$

şeklinde yazılabilir (Malabahrami, 2014).

LOFİDD çözümü için değişik analitik ve nümerik metotlar ele alınabilir. Biz bu bölümde LOFİDD' leri çözmek için Direkt Hesaplama Yöntemi, Değişken Yenileme ve Taylor Seri Çözüm Metodunu ele alacağız.

3.2.1 Direkt Hesaplama Yöntemi

LOFİDD genel formunu bozmadan

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)F(u(t))dt, \quad u^{(k)}(0) = b_k, \quad 0 \leq k \leq n-1 \quad (3.41)$$

şeklinde yazılabilir. Burada b_k başlangıç şartıdır. Çekirdek fonksiyonu ise

$$K(x,t) = \sum_{i=1}^n g_i(x)h_i(t) \quad (3.42)$$

formunda yazılabilir. (3.42) denkleminin (3.41) denkleminde yerine yazılmasıyla,

$$\begin{aligned} u^{(n)}(x) = & f(x) + g_1(x) \int_a^b h_1(t)F(u(t))dt + g_2(x) \int_a^b h_2(t)F(u(t))dt \\ & + \dots + g_n(x) \int_a^b h_n(t)F(u(t))dt \end{aligned} \quad (3.43)$$

ifadesi elde edilir. Denklemlerdeki her bir integral t değişkenine bağlıdır. Bu her bir integralin sabit bir sayıya denk geldiğini gösterir.

$$a_i = \int_a^b h_i(t)F(u(t)), \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.44)$$

integralleri sabit sayılara karşılık geldiğinden dolayı denklem

$$u^{(n)}(x) = f(x) + a_1g_1(x) + a_2g_2(x) + \dots + a_ng_n(x) \quad (3.45)$$

eşitliğine dönüşür (Wazwaz ve Khuri, 1996).

(3.45) denkleminin her iki tarafının integrali alınıp ve başlangıç şartları kullanılırsa

$$u(x) = u(0) + xu'(0) + \frac{1}{2!}x^2u''(0) + \dots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}u^{(n-1)}(0) + L^{-1}(f(x) + a_1g_1(x) + a_2g_2(x) + \dots + a_ng_n(x)) \quad (3.46)$$

ifadesi elde edilir. Burada L^{-1} , n . dereceden katlı integral operatörüdür. Bu işlemler neticesinde (3.45) denklemindeki sabitleri belirlemek için çözülebilecek bir cebirsel sistem elde edilir. Elde edilen a_i sabitleri (3.45) de yerine yazıldıktan sonra (3.41) denklemindeki LOFİDD' in $u(x)$ çözümü elde edilir. Burada dikkat edilmesi gerekli husus bir ya da daha fazla a_i , $1 \leq i \leq n$ sabiti için birden fazla değer elde edilmesidir. Bu gayet normaldir çünkü denklem lineer değildir ve $u(x)$ çözümü lineer olmayan problemler için benzer olmayabilir (Wazwaz, 2011).

3.2.2 Değişken Yenileme Metodu

i . dereceden LOFİDD standart formu

$$u^{(i)}(x) = f(x) + \int_0^1 K(x,t)F(u(t))dt \quad (3.47)$$

denkleminde verilmiştir. Burada $u^{(i)}(x) = \frac{d^i u}{dx^i}$ ve $F(u(x))$, $u(x)$ fonksiyonunun lineer olmayan bir fonksiyonuydu. Tam çözümü belirlemek için başlangıç şartları da belirlenmesi gerekir. Fredholm denklemlerde de bu metodu uygularken bir hata fonksiyonu yazılır ve hata fonksiyonu

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^1 \lambda(t) \left(u_n^{(i)}(t) - f(t) - \int_0^t K(t,r)F(\tilde{u}_n(r))dr \right) dt \quad (3.48)$$

eşitliği ile verilir. Bu metodu etkin bir şekilde uygulamak için aşağıda verilen iki adım takip edilmelidir.

i . İlk olarak λ Langrange çarpanı belirlenir. λ çarpanı sınır değerler ve en uygun kısmı integrasyon yolu ile belirlenebilir.

ii. λ çarpanı belirlendikten sonra $u(x)$ çözümünün $u_{n+1}(x)$, $n \geq 0$ ardışık yaklaşımını belirlemek için bir iterasyon formülü kullanılmalıdır. u_0 yaklaşımı herhangi bir fonksiyon seçilebilir. Ancak u_0 yaklaşım fonksiyonunu belirlemek için başlangıç şartlarından yararlanır. Sonuç olarak çözüm,

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) \quad (3.49)$$

denklemleri ile verilir (Wazwaz, 2011).

3.2.3 Seri Çözüm Yöntemi

Seri çözüm metodu temel olarak analitik fonksiyonlar için Taylor serilerine dayanır. Eğer $u(x)$ fonksiyonu $x=0$ dolaylarında

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (3.50)$$

olarak yazılabilen Taylor serisinin tüm mertebelerden oluşan türevini içeriyorsa bu $u(x)$ fonksiyonu analitik bir fonksiyondur. Taylor seri çözüm metodu ya da kısaca ifadesiyle seri çözüm metodunu bu bölümde ikinci dereceden LOFİDD çözümü için kullanırken aşağıda verilen LOFİDD' in $u(x)$ çözümü analitik olduğu varsayacağız.

$$u''(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 K(x,t) F(u(t)) dt, \quad u^k(0) = k! a_k, \quad 0 \leq k \leq (n-1) \quad (3.51)$$

Böylece (3.61) denklemleriyle verilen a_n katsayıları sırasıyla belirlenir. İlk birkaç a_k katsayısı verilen başlangıç koşulları kullanılarak,

$$a_0 = u(0), \quad a_1 u'(0), \quad a_2 = \frac{1}{2!} u''(0), \quad a_3 = \frac{1}{3!} u'''(0) \quad (3.52)$$

şeklinde bulunabilir. Diğer a_k katsayıları ise (3.51) de verilen LOFİDD' e Seri Çözüm Metodu uygulanarak bulunabilir. (3.50) denkleminde verilen ifade kullanarak (3.51) denklemleri düzenlenirse

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)^{(n)} = T(f(x)) + \int_0^1 K(x,t) F \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) dt \quad (3.53)$$

denklemini elde edilir. Burada $T(f(x))$, $f(x)$ Fonksiyonunun Taylor serisidir. Bu denklemdeki $T(f(x))$ bilinmeyen fonksiyonu yerine t^n , $n \geq 0$ teriminin integrali alınacaktır. Öncelikle (3.53) denkleminin sağ tarafındaki integrali alıp, x' in kuvvetlerinden oluşan bu katsayıları yazdıktan sonra denklem yeni hale dönüşmüş olacaktır. Bu denklemin çözümü mevcut ise tam çözüm elde edilebilir. Ama mevcut değilse nümerik çözüm yöntemleri kullanılarak çözüme yaklaşık bir değer bulunur (Wazwaz, 2011)

3.3 Homojen LOFİDD

İkinci dereceden LOFİDD formu

$$u^{(i)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) F(u(t)) dt$$

denklemini ile verilmekteydi. Bu denklemde $f(x) = 0$ durumunda

$$u^{(i)}(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) F(u(t)) dt \quad (3.54)$$

homojen LOFİDD' i elde edilir. Daha önceki bölümlerde de değindiğimiz gibi bu denklemdeki $f(u(t))$, $u(t)$ fonksiyonunun lineer olmayan bir fonksiyonuydu. Tam çözümü bulmak için başlangıç şartları da verilmelidir (Wazwaz, 2011).

Bu bölümde özellikle, değişkenlerine ayrılabilen $K(x,t)$ çekirdeği bulunduran (3.54) denkleminde verilen homojen LOFİDD üzerinde duracağız.

3.3.1 Direkt Hesaplama Metodu

Direk hesaplama yönteminin homojen ya da homojen olmayan LOFİDD' ler de uygulanmasıyla tam çözüm elde edilir. Daha önce de değindiğimiz gibi burada da ayrışabilen yani

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^n g_k(x)h_k(t) \quad (3.55)$$

şeklinde yazılabilen $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonlarını ele alacağız. İlk olarak (3.55) de verilen ifade LOFİDD 'de yerine yazılmasıyla,

$$u^{(i)}(x) = \lambda g_1(x) \int_a^b h_1(t)F(u(t))dt + \lambda g_2(x) \int_a^b h_2(t)F(u(t))dt \\ + \dots + \lambda g_n(x) \int_a^b h_n(t)F(u(t))dt \quad (3.56)$$

eşitliği elde edilir. Bulunan eşitlikteki her bir integral t değişkenine bağlı olduklarından integrallerin alınmasıyla sabit sayılar elde edilecektir. Dolayısıyla denklem

$$u^{(i)}(x) = \lambda a_1 g_1 + \lambda a_2 g_2 + \dots + \lambda a_n g_n \quad (3.57)$$

denklemine dönüşür. Bu denklemdeki a_i katsayıları

$$a_i = \int_a^b h_i(t)F(u(t))dt, \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.58)$$

denklemini ile bulunuyordu. (3.57) denkleminin her iki tarafının 0 ' dan x' e, i . integrali alınır ve başlangıç koşulları da kullanılırsa a_i ve x' in terimlerinden oluşan $u(x)$ için bir ifade elde ederiz. $u(x)$ için elde edilen bu ifade (3.58) denklemde yerine yazılmasıyla a_i , $1 \leq i \leq n$ sabitlerini belirlemek için çözülebilen cebirsel bir sistem elde edilir. (3.58) denklemde verilen a_i değerleri kullanılarak (3.54) deki integral denklemin $u(x)$ çözümü elde edilmiş olur (Wazwaz, 2011).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Test Problemi 4.1

Aşağıda verilen denklemi Birleştirilmiş Laplace Dönüşümü–Adomian Ayırma Metodunu kullanarak çözelim.

$$u'(x) = \frac{9}{4} - \frac{5x}{2} - \frac{x^2}{2} - 3e^{-x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + \int_0^x (x-t)u^2(t)dt, \quad u(0) = 2. \quad (4.1.1)$$

Çözüm:

Verilen denklem bir LOVIDD' dir. Çekirdek fonksiyonu $K(x-t) = x-t$ olduğu görülür. Denklemin her iki tarafına Laplace Dönüşümü uygulanırsa eşitlik

$$L\{u'(x)\} = L\left\{\frac{9}{4} - \frac{5x}{2} - \frac{1}{2}x^2 - 3e^{-x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right\} + L\{(x-t)u^2(x)\} \quad (4.1.2)$$

şeklinde yazılır. Böylece

$$sU(s) - u(0) = \frac{9}{4s} - \frac{5}{2s^2} - \frac{1}{s^3} - \frac{3}{s+1} - \frac{1}{4(s+2)} + \frac{1}{s^2}L\{u^2(x)\} \quad (4.1.3)$$

ya da benzer olarak,

$$U(s) = \frac{2}{s} + \frac{9}{4s^2} - \frac{5}{2s^3} - \frac{1}{s^4} - \frac{3}{s(s+1)} - \frac{1}{4s(s+2)} + \frac{1}{s^3}L\{u^2(x)\} \quad (4.1.4)$$

elde edilir. Sırasıyla (3.7) ve (3.8)'de verilen $u(x)$ dizi varsayımı ve $u^2(x)$ Adomian polinomları (3.10) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$U_0(s) = \frac{2}{s} + \frac{4}{s^2} - \frac{5}{2s^3} - \frac{1}{s^4} - \frac{3}{s(s+1)} - \frac{1}{4s(s+2)} \quad (4.1.5)$$

$$L\{u_{k+1}(x)\} = \frac{1}{s^3}L\{A_k(x)\}, \quad k \geq 0$$

elde edilir. $F(u(x)) = u^2(x)$ için Adomian polinomları

$$\begin{aligned}
A_0 &= u_0, \quad A_1 = 2u_0u_1, \\
A_2 &= 2u_0u_2 + u_1^2, \\
A_3 &= 2u_0u_3 + 2u_1u_2,
\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

ile verilir. (4.1.5)'in ilk kısmında her iki yanına ters Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
u_0(x) &= 2 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{5}{24}x^4 - \frac{7}{120}x^5 + \dots, \\
u_1(x) &= \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + \dots,
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.7) denklemini kullanarak seri çözüm

$$u(x) = 2 - x - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots, \tag{4.1.7}$$

denklemini elde edilir. Bu eşitlik ise

$$u(x) = 1 + e^{-x} \tag{4.1.8}$$

denklemini ile verilen tam çözümüne yakınsar (Wazwaz, 2011).

Test Problemi 4.2

Aşağıda verilen denklemini Laplace Dönüşümü–Adomian Ayrıştırma Metodunu kullanarak çözelim.

$$u'(x) = -\frac{2}{3}(2 \sin x + \sin(2x)) + \int_0^x \cos(x-t)u^2(t)dt, \quad u(0) = 1. \tag{4.2.1}$$

Çözüm:

Bu test problemi bir LOVİDD' dir. Ayrıca denklemin çekirdek fonksiyonu $K(x-t) = \cos(x-t)$ olduğu görülür. Bu denklemin her iki yanına Laplace Dönüşümü uygulanırsa eşitlik

$$L\{u'(x)\} = L\left\{-\frac{2}{3}(2 \sin x + \sin(2x))\right\} + L\{\cos(x-t)u^2(x)\} \tag{4.2.2}$$

denkleme dönüşür. Böylece

$$sU(s) - u(0) = -\frac{4}{3(s^2 + 1)} - \frac{2}{3(s^2 + 4)} + \frac{s}{s^2 + 1} L\{u^2(x)\} \quad (4.2.3)$$

denklemini elde edilir. Benzer olarak,

$$U(s) = \frac{1}{s} - \frac{4}{3s(s^2 + 1)} - \frac{2}{3s(s^2 + 4)} + \frac{1}{s^2 + 1} L\{u^2(x)\} \quad (4.2.4)$$

eşitliği de yazılabilir. Daha önceden ele aldığımız, sırasıyla (3.7) ve (3.8) denklemlerinde verilen $u(x)$ ve $u^2(x)$ Adomian polinomlarının (3.10) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$U(s) = \frac{2}{s} + \frac{9}{4s^2} - \frac{5}{2s^3} - \frac{1}{s^4} - \frac{3}{s(s+1)} - \frac{1}{4s(s+2)} \quad (4.2.5)$$

$$L\{u_{k+1}(x)\} = \frac{1}{s^3} L\{A_k(x)\}, \quad k \geq 0$$

ifadesi elde edilir. (4.2.5) denkleminin ilk kısmının her iki yanına Ters Laplace dönüşümü uygulandıktan sonra ve (4.2.5) denkleminde verilenlerin ifadelerin kullanılmasıyla

$$u_0(x) = 1 - x^2 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{60}x^6 + \dots,$$

$$u_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{24}x^4 + \frac{37}{720}x^6 + \dots,$$

$$u_2(x) = \frac{1}{22}x^4 - \frac{1}{20}x^6 + \dots,$$

$$u_3(x) = \frac{1}{72}x^6 + \dots$$

eşitlikleri elde edilir. (3.7) denklemini kullanılarak seri çözüm

$$u(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots, \quad (4.2.6)$$

olarak bulunur ki bu ifade

$$u(x) = \cos x \quad (4.2.7)$$

eşitliği ile verilen tam çözümüne yakınsar (Wazwaz, 2011).

Test Problemi 4.3

Aşağıda verilen denklemini Değişken Yenileme Metodu kullanarak çözelim.

$$u'(x) = 1 + e^x - 2xe^x - e^{2x} + \int_0^x e^{x-t} u^2(t) dt, \quad u(0) = 2. \quad (4.3.1)$$

Çözüm:

Verilen denklem bir LOVİDD dir. Bu tip denklemlerde bir hata fonksiyonu yazıldığını ve bu hata fonksiyonunun

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x \left(u_n'(t) - 1 - e^t + 2 + e^t + e^{2t} - \int_0^t e^{t-r} u_n^2(r) dr \right) dt \quad (4.3.2)$$

eşitliği ile verilen denklem gibi olduğunu hatırlayalım. Burada birinci dereceden bir integral denklem için $\lambda = -1$ kullandık. Başlangıç koşullarını keyfi olarak $u_0(x) = u(0) = 2$ seçebiliriz. Bu seçimi hata fonksiyonunda yerine yazarsak

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 2 \\ u_1(x) &= 2 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{8}x^4 - \frac{19}{120}x^5 + \dots, \\ u_2(x) &= 2 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{8}x^5 + \dots, \\ u_3(x) &= 2 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots, \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

eşitlikleri elde edilmiş olur. Benzer şekilde diğer yaklaşık çözümler de yazılabilir. Değişken Yenileme Metodunda $u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x)$ eşitliğinden faydalandığımızı hatırlayalım. O halde bu denklemde tam çözüm

$$u(x) = x + e^x \quad (4.3.4)$$

eşitliği ile verilir (Wazwaz, 2011).

Test Problemi 4.4

Değişken Yenileme Metodunu kullanarak aşağıda verilen LOVİDD' i çözelim.

$$u'(x) = -x + \sec x + \tan x + \int_0^x (1 + u^2(t)) dt, \quad u(0) = 1. \quad (4.4.1)$$

Çözüm:

Bu denklemin hata fonksiyonu

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x \left(u_n'(t) - t - \cos t + \tan t - \tan^2 t - \int_0^t (\sin t + u_n^2(r)) dr \right) dt \quad (4.4.2)$$

şeklinde yazılır. Başlangıç şartlarını $u_0(x) = u(0) = 1$ seçebiliriz. Bu başlangıç şartları hata fonksiyonunda yerine yazılırsa aşağıda verilen yaklaşık değerler elde edilir.

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 0 \\ u_1(x) &= x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{45}x^6 + \frac{17}{315}x^7 + \dots, \\ u_2(x) &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots, \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

şeklinde devam edilebilir. O halde tam çözüm

$$u(x) = \tan x \quad (4.4.4)$$

olarak elde edilir (Wazwaz, 2011).

Test Problemi 4.5

Seri çözüm metodunu kullanarak aşağıdaki denklemi, verilen başlangıç koşulu için çözelim.

$$u'(x) = 1 - e^x + e^{2x} + \int_0^x e^{x-t} (1 - u^2(t)) dt, \quad u(0) = 1. \quad (4.5.1)$$

Çözüm:

Seri Çözüm Metodu konu başlığı altında belirtildiği gibi $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eşitliği ile verilen denklemi (4.6.1) denkleminin her iki tarafında yerine yazılırsa

$$\left(u(x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = T_1 (1 - e^x + e^{2x}) + \int_0^x \left(T_2 (e^{x-t}) \left(1 - \left(\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n) \right)^2 \right) \right) dt \quad (4.5.2)$$

elde edilir. Burada T_1 ve T_2 sırasıyla $x=0$ ve $t=0$ noktalarındaki seri çözümlerdir. Sağ taraftaki integral alındıktan sonra $a_0 = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} & a_1 + 20a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + \dots \\ & = 1 + x + \left(\frac{1}{3} - a_1 \right) x^2 + \left(\frac{7}{6} - \frac{1}{3}a_1^2 - \frac{2}{3}a_2 - \frac{1}{3}a_1 \right) x^3 \\ & + \left(\frac{5}{8} - \frac{1}{12}a_1^2 - \frac{1}{6}a_2 - \frac{1}{12}a_1 - \frac{1}{2}a_3 - \frac{1}{2}a_1a_2 \right) x^4 \\ & + \left(\frac{31}{120} - \frac{1}{60}a_1 - \frac{1}{60}a_1^2 - \frac{1}{30}a_2 - \frac{1}{5}a_2^2 - \frac{2}{5}a_4 - \frac{2}{5}a_1a_3 - \frac{1}{10}a_3 - \frac{1}{10}a_1a_2 \right) \\ & + 0(x^6) \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

eşitliği bulunur. Bu sistem çözümlerse

$$a_n = \frac{1}{n!}, \quad n \geq 0 \quad (4.5.4)$$

elde edilir. Bu ifade de

$$u(x) = e^x \quad (4.5.5)$$

tam çözümünü verir (Wazwaz, 2011).

Test Problemi 4.6

Aşağıda verilen LOVIDD' i $u(0) = u''(0) = 0$, $u'(0) = 1$ başlangıç şartları ile Seri Çözüm Metodunu kullanarak çözelim.

$$u'''(x) = 2 \sec^2 x (1 + 3 \tan^2 x) - \tan x + \int_0^x (1 + u^2(t)) dt. \quad (4.6.1)$$

Çözüm:

Verilen denklemde seri çözüm methodunda ele aldığımız $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eşitliği yerine yazılırsa

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)''' = 2 \sec^2 x (1 + 3 \tan^2 x) - \tan x + \int_0^x \left(1 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)^2 \right) dt \quad (4.6.2)$$

elde edilir. Sağ taraftaki integral alındıktan sonra $a_0 = a_2 = 0$ ve $a_1 = 1$ seçilirse

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, & a_3 &= \frac{1}{3} & a_5 &= \frac{2}{15} \\ a_7 &= \frac{17}{315}, & a_{2k} &= 0 & k &\geq 0 \end{aligned}$$

sonuç olarak seri çözüm

$$u(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots \quad (4.6.3)$$

elde edilir. Bu da

$$u(x) = \tan x \quad (4.6.4)$$

tam çözümüne yakınsar (Wazwaz, 2011).

Test Problemi 4.7

Birinci dereceden verilen aşağıdaki LOVİDD' i Birleştirilmiş Laplace Dönüşüm-Adomian Ayrışma metodu ile çözelim.

$$\int_0^x (x-t)u^2(t)dt + \int_0^x (x-t)u'(t)dt = \frac{7}{8} + \frac{1}{4}x^2 - \cos x + \frac{1}{8}\cos(2x), \quad u(0) = 0. \quad (4.7.1)$$

Bu denklemin her iki yanına Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$\frac{1}{s^2} L\{u^2\}(s) + \frac{1}{s^2} (sU(s) - u(0)) = \frac{7}{8s} + \frac{1}{2s^3} - \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{s^2}{8(s^2 + 1)} \quad (4.7.2)$$

elde edilir. Verilen başlangıç şartını kullanarak $U(s)$ için çözüm yapılırsa,

$$U(s) = \frac{7}{8} + \frac{1}{2s^2} - \frac{s^2}{s^2 + 1} + \frac{s^2}{8(s^2 + 4)} - \frac{1}{s} L\{u^2\}(s) \quad (4.7.3)$$

eşitliği elde edilir. $U(s)$ seri varsayımı ve $u^2(x)$ Adomian polinomları yerine (3.30) denkleminde verilen öz yinelemeli ilişki göz önüne alınır,

$$U_0(s) = \frac{7}{8} + \frac{1}{2s^2} - \frac{s^2}{s^2 + 1} + \frac{s^2}{8(s^2 + 4)}, \quad (4.7.4)$$

$$L\{u_{k+1}(x)\} = -\frac{1}{s} L\{A_k(x)\}, \quad k \geq 0$$

yazılabilir. Bu denklemin ilk kısmına ters Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$u_0(x) = x + \frac{1}{3!}x^3 - \frac{7}{120}x^5 + \dots,$$

$$u_1(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{15}x^5 + \dots, \quad (4.7.5)$$

$$u_2(x) = \frac{2}{15}x^5 + \dots$$

elde edilir. Seri çözüm ise

$$u(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots \quad (4.7.6)$$

Bulunur. Bu çözüm de $u(x) = \sin x$ tam çözümüne yakınsar (Wazwaz, 2011).

Test Problemi 4.8

Aşağıda birinci dereceden verilen LOVİDD' i, ikinci dereceden LOVİDD' e dönüştürerek çözelim

$$\int_0^x u^2(t)dt + \int_0^x (x-t+1)u''(t)dt = \sin x - \cos x - \frac{1}{4}\sin(2x) + 1 + \frac{1}{2}x, \quad u(0) = u'(0) = 1. \quad (4.8.1)$$

Verilen denklem ikinci integral alınıp, başlangıç şartı kullanılırsa,

$$u'(x) = 2 + \frac{3}{2}x + \sin x - \cos x - \frac{1}{4}\sin(2x) - \int_0^x u^2(t)dt - \int_0^x u'(t)dt \quad (4.8.2)$$

elde edilir. Bu denklemi Değişken Yenileme Metodu ile çözeceğiz. Bu denklemin hata fonksiyonu

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x \left(u_n'(t) - 2 - \frac{3}{2}t - \sin t + \cos t + \frac{1}{4}\sin(2t) + \int_0^t (u_n'(r) + u_n^2(r))dr \right) dt \quad (4.8.3)$$

denklemleri elde edilir. $u_0(x) = 1+x$ seçerek başlangıç şartlarını kullanabiliriz. Bu denklem hata fonksiyonunun da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 1+x, \\ u_1(x) &= 1+x - \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{5!}x^5 + \dots, + \\ u_2(x) &= 1+x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{60}x^5 + \dots, \\ u_3(x) &= 1+x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots, \\ &\cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \end{aligned} \quad (4.8.4)$$

ardışık yaklaşımları elde edilir. Tam çözümü ise

$$u(x) = 1 + \sin x \quad (4.8.5)$$

olarak bulunur (Wazwaz, 2011).

Test Problemi 4.9

Aşağıda verilen LOFİDD' i Direkt Hesaplama Metoduyla çözelim.

$$u'(x) = \cos(x) - \frac{\pi^2}{4}x + \int_0^{\pi} xtu^2(t)dt, \quad u(0) = 0. \quad (4.9.1)$$

Çözüm:

Kolaylık sağlaması açısından $a = \int_0^{\pi} tu^2(t)dt$ seçelim. Bu durumda LOFİDD

$$u'(x) = \cos x + \left(a - \frac{\pi^2}{4}\right)x, \quad u(0) = 0 \quad (4.9.2)$$

denkleme dönüşür. Elde edilen bu denklemin her iki tarafının 0' dan x' e integrali alınır ve verilen başlangıç şartı da kullanılarak

$$u(x) = \sin x + \left(\frac{a}{2} - \frac{\pi^2}{8}\right)x^2 \quad (4.9.3)$$

eşitliği bulunur.

$$a = \int_0^{\pi} tu^2(t)dt$$

denkleminde (4.9.3) yerine yazılırsa,

$$a = \frac{\pi^2}{4}, \frac{\pi^8 - 96\pi^3 + 576\pi + 96}{4\pi^6} \quad (4.9.4)$$

elde edilir. Dolayısıyla tam çözüm,

$$u(x) = \sin x + \sin x - \left(\frac{12}{\pi^3} + \frac{72}{\pi^5} + \frac{62}{\pi^6}\right)x^2 \quad (4.9.5)$$

şeklinde elde edilir (Wazwaz, 2011).

Test Problemi 4.10

Aşağıda verilen LOFİDD' i değişken yenileme yöntemi ile verilen başlangıç şartlarını kullanarak çözelim.

$$u'(x) = \cos x - \frac{\pi}{48}x + \frac{1}{24} \int_0^{\pi} xu^2(t)dt, \quad u(0) = 0. \quad (4.10.1)$$

Çözüm:

Hatırlayacağımız gibi LOFİDD' ler de değişken yenileme metodu kullanılarak hata fonksiyonları yazılıyordu. Yukarıda verilen LOFİDD' in hata fonksiyonu o zaman

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x \left(u_n^{(i)}(t) - \cos t + \frac{\pi}{48}t - \frac{1}{24} \int_0^{\pi} tu_n^2(r)dr \right) dt \quad (4.10.2)$$

eşitliği ile verilir. Burada birinci mertebeden İntegro-Diferensiyel Denklemlerde $\lambda = -1$ ve $u(x) = u(0) = 0$ başlangıç koşulunu kullanarak hata fonksiyonunda yerine yazılmasıyla,

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 0 \\ u_1(x) &= \sin x - 0,03272492349x^2, \\ u_2(x) &= \sin x - 0,00663791983x^2, \\ u_3(x) &= \sin x - 0,00156723251x^2, \\ u_4(x) &= \sin x - 0,00038016125x^2, \\ &\cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \end{aligned} \quad (4.10.3)$$

ardışık yaklaşımları elde edilir. (3.60) denkleminin tam çözümü $u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x)$

eşitliği gereği

$$u(x) = \sin x \quad (4.10.4)$$

olarak elde edilir (Wazwaz, 2011).

Test Problemi 4.11

Aşağıda verilen LOFİDD' i verilen başlangıç şartlarını kullanarak değişken yenileme yöntemi ile çözelim.

$$u''(x) = -\cos x - \frac{3\pi}{128}x + \frac{1}{64} \int_0^x xu^2(t)dt, \quad u(0) = 2, \quad u'(0) = 0. \quad (4.11.1)$$

Çözüm:

Verilen bu LOFİDD' in hata fonksiyonu

$$u_{n+1}(x) = u_n - \int_0^x (t-x) \left(u_n''(t) - \cos t + \frac{3\pi}{128}t - \frac{1}{64} \int_0^t tu_n^2(r)dr \right) dt \quad (4.11.2)$$

denkleminde yazıldığı gibidir. Başlangıç şartını $u(x) = u(0) + xu'(0) = 2$ şeklinde seçip hata fonksiyonunun yerine yazılmasıyla,

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 2 \\ u_1(x) &= 1 + \cos x + 0,02045307718x^3, \\ u_2(x) &= 1 + \cos x + 0,00118839931x^3, \\ u_3(x) &= 1 + \cos x + 0,00004332607x^3, \\ &\cdot \quad \quad \quad \cdot \\ &\cdot \quad \quad \quad \cdot \\ &\cdot \quad \quad \quad \cdot \end{aligned} \quad (4.11.3)$$

ardışık yaklaşım değerleri elde edilir. (3.60) denkleminde faydalanırsak tam çözüm,

$$u(x) = 1 + \cos x \quad (4.11.4)$$

olarak bulunur (Wazwaz, 2011).

Test Problemi 4.12

Aşağıda verilen LOFİDD' i seri çözüm yöntemi ile verilen başlangıç şartını kullanarak çözelim.

$$u'(x) = \cos x - \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{3}\right)x + \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi^2}{11}\right) + \frac{1}{12} \int_0^{\pi} (x-t)u^2(t)dt, \quad u(0) = 1. \quad (4.12.1)$$

Çözüm:

(3.61) ifadesinde verilen $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ denklemi (4.19.1) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^1 = T_1 \left(\cos x - \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{3}\right)x + \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi^2}{16}\right) \right) + \frac{1}{12} \int_0^{\pi} (x-t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)^2 dt \quad (4.12.2)$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafındaki integral için $a_0 = 1$ seçilirse,

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_{2n+1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}, \quad n \geq 0 \\ a_{2n} &= 0, \quad n \geq 0 \end{aligned} \quad (4.12.3)$$

elde edilir. Sonuç olarak seri çözüm,

$$= u(x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (4.12.4)$$

eşitliği ile verilir. Bu eşitlik ise

$$u(x) = 1 + \sin x \quad (4.12.5)$$

tam çözümüne yakınsar. (Wazwaz, 2011).

Test Problemi 4.13

Aşağıda verilen LOFİDD' i Direkt Hesaplama Yöntemi ile verilen başlangıç şartını kullanarak çözelim

$$u'(x) = \frac{1}{12} \lambda \int_0^1 x u^2(t) dt, \quad u(0) = 1. \quad (4.13.1)$$

Çözüm:

Bu yöntemde çözümü kolaylaştırmak için,

$$a = \int_0^1 u^2(t) dt \quad (4.13.2)$$

denklemindeki gibi bir eşitlikten faydalandığımızı hatırlayalım. Bu eşitliğin (4.13.1) denkleminde yerine yazılmasıyla,

$$u'(x) = \frac{1}{12} \lambda ax, \quad u(0) = 1 \quad (4.13.3)$$

elde edilir. Elde edilen bu denklemin her iki tarafının 0' dan x ' e integrali alınır ve verilen başlangıç şartının da kullanılmasıyla,

$$u(x) = 1 + \frac{1}{24} \lambda ax \quad (4.13.4)$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlik (4.13.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$a = \frac{2880 - 80\lambda \pm 32\sqrt{8100 - 450\lambda - 5\lambda^2}}{2\lambda^2} \quad (4.13.5)$$

ifadesi bulunur (Wazwaz, 2011).

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Lineer Olmayan Volterra ve Fredholm İntegro Diferensiyel Denklemler Üzerine başlıklı bu tez integral denklemler teorisinin bazı önemli kavramlarını içermekte ve tezde bu kavramlar açıklanmaktadır. Ayrıca tezde integral denklemlerin bazı kategorik sınıflandırmalarına yer verilmiş ve denklem formları açıklanmış, örneklendirme yapılarak tanıtılmaya çalışılmıştır. Tezde genel olarak Lineer Olmayan Volterra ve Fredholm İntegro Diferensiyel Denklem tipleri üzerinde durulmuş olup denklemlerin bilimsel alanda karşımıza çıktığı formlar örneklerle gösterilmiştir. Bu örneklerin çözümünü daha iyi anlayabilmek için Laplace, seri açılımı ve diferensiyel gibi matematiğin bazı temel teorilerini içerisinde bulunduran kavramlar verilmiştir. Bazı durumlarda Lineer Olmayan Volterra ve Fredholm İntegro Diferensiyel Denklem problemlerinin tam çözümleri elde edilemediğinden yaklaşık çözüm yöntemlerine değinilmiştir.

Bu tezde ele alınan denklemler mühendislik, fizik gibi bilimsel alanlarda genellikle mekanik problemlerin incelenmesinde ortaya çıkmış uygulamalı ve güncel bir konu olduğu bilinmektedir. Bu denklemleri çözmek için yaklaşık ve tam çözümler veren Seri Çözüm Metodu, Değişken Yenileme Metodu, Laplace Dönüşüm - Adomian Ayrıştırma Metodu ve Direkt Hesaplama Metodu gibi metotlar ele alınmış olup orijinal sonuçlar ortaya konulabilmektedir. Böylece daha sonraki çalışmalara kaynak teşkil edebilecek bir çalışma ortaya konulmuştur.

KAYNAKLAR

- Ahmed, S.A. and Elzaki, T.M., 2013. The solution of nonlinear Volterra integro differential equations of second kind by combine sumudu transform and adomian decompositions method. **International Journal of Advanced and Innovative Research** (2278-7844), 2: 90-93.
- Çağlıyan, M., Çelik, N. ve Doğan, S., 2012. **Adi diferensiyel denklemler**. Dora Basım Dağıtım, 389 s, Bursa.
- Ergün, Ö., 2010. **Approximate analytic solutions of nonlinear integral equations**. Dokuz Eylül Universty, İzmir, Turkey.
- Karaca, A., 2008. **Fedholm ve Volterra tipi integral denklemler**. ZKÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, 66 s, Zonguldak.
- Molabahrami, A., 2008. Direct computation method for solving a general nonlinear fredholm integro-diferential equation under mixed conditions: Degenerate and non-degenerate kernels. **Journal of Computational and Aplied Mathematics** 282 (2015), 34-43.
- Yousefi, S.A., Lotfi, A. and Dehghan, M., 2009. He's variational iteration method for solving nonlinear mixed Volterra- Fredholm integral equations. **Coputers and Mathematics with Applications** 58(2009), 2172-2176.
- Xu, L., 2006., Variational iteration method for solving integral equatons. **Coputers and Mathematics with Applications** 54 (2007), 1071-1078.
- Wazwaz, A.M. and Khuri, S.A., 1996. Two methods for solving integral equations. **Applied Mathematic and Computation**, 77: 79-89.
- Wazwaz, A.M., 2011. **Linear and Nonlinear integral equations method and applications**. Higher Education Press, p 637, Beijing.

ÖZGEÇMİŞ

Mehmet Şükrü TEKİN 1985 yılında Adıyaman' da doğdu. İlkokul, ortaokul ve liseyi Adıyaman' da tamamladı. Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümüne 2004 yılında yerleşti. 2008 yılında üniversiteyi tamamlamasına altı ay kala Devlet Hava Meydanları İşletmesi Hatay Havalimanı Müdürlüğü' ne memur olarak atanarak 2009 güz döneminde okuldan mezun oldu. 2012 yılı güz döneminde Mustafa Kemal Üniversitesi Enformatik Ana Bilim Dalın' da yüksek lisansa başladı ve 2015 yılı güz döneminde yüksek lisansını bitirdi. Halen Devlet Hava Meydanları İşletmesi Hatay Havalimanı Müdürlüğü' nde ki görevine devam etmektedir.