

**EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**  
**(YÜKSEK LİSANS TEZİ)**

**YILDIZLARDA AÇISAL MOMENTUM**  
**PROBLEMLERİ ÜZERİNE**

**Mehmet ÖZDİL**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mutlu YILDIZ**

**Astronomi ve Uzay Bilimleri Anabilim Dalı**

**Bilim Dalı Kodu : 402.02.01**

**Sunuş Tarihi : 15.06.2015**

**Bornova-İZMİR**

**2015**



Mehmet ÖZDİL tarafından yüksek lisans tezi olarak sunulan “Yıldızlarda Açısal Momentum Problemleri Üzerine” başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 15.06.2015 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

**Jüri Üyeleri:**

**İmza**

<b>Jüri Başkanı</b>	:	.....
<b>Raportör Üye</b>	:	.....
<b>Üye</b>	:	.....



# EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

## ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Yıldızlarda açısal momentum problemleri üzerine” başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

.... / .... / 20..

İmzası

Adı-Soyadı



**ÖZET****YILDIZLARDA AÇISAL MOMENTUM PROBLEMLERİ ÜZERİNE**

ÖZDİL, Mehmet

Yüksek Lisans Tezi, Astronomi ve Uzay Bilimleri Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mutlu YILDIZ

Mayıs 2015, 46 sayfa

Yıldızların çökmeye dayalı oluşum süreçleri incelendiğinde, dönme hareketinin doğal, kaçınılmaz bir özellik olduğu görülmektedir. Dönme hareketi (ya da açısal momentum) yıldız içyapısında temel yapı denklemi olan hidrostatik denge denklemini doğrudan etkilemektedir. Yıldızların tayf sınıfına göre yüzey dönme özellikleri yarım asırdır gayet iyi bilinmektedir. Yıldızların derin iç katmanlarında dönme profilinin ne şekilde olduğuna ilişkin bilgimiz ise sınırlıydı. Yakın zamanda Kepler ve CoRoT uzay teleskoplarının verileri sayesinde bu konuda çok ciddi ilerlemeler oldu. Bugünkü gözlemlere göre yıldız içyapısında açısal momentum dağılımı çok çeşitlilik göstermektedir. Bu çeşitliliğin sebebi henüz aydınlığa kavuşmamıştır. Bu nedenle açısal momentum evriminin incelenmesi gereklidir.

Bu tez kapsamında açısal momentum taşınımında rol oynayan meridyonel çevrim mekanizması ayrıntılı olarak incelenmiş ve geçerliliği tartışılmıştır. Diğer taşınım mekanizmaları olan makaslama kararsızlığı, diferansiyel dönme ve çekim dalgalarına da ayrıntılı yer verilmiştir. Ayrıca meridyonel çevrimin diğer mekanizmalarla olan etkileşimi de incelenmiştir. Çalışma kapsamında meridyonel çevrim denklemleri kullanılarak bir model oluşturulmuştur.  $1.5 M_{\odot}$  ve  $2.4 M_{\odot}$ 'lik yıldızların model verileri kullanılarak açısal momentum taşınım denklemi sayısal olarak çözülmüştür. Bu hesaplamayla yarıçap boyunca dönme hızlarının nasıl değiştiği ortaya konulmuştur. Elde edilen sonuçlara göre, yıldızın özeğinden zarf kısmına net açısal momentum aktarımı gerçekleşmektedir. Örneğin,  $1.5 M_{\odot}$ 'lik modelde kütlelerin %70'lik özek kısmından dıştaki zarfa açısal momentum taşınmaktadır. Meridyonel çevrimin açısal momentum taşınımına olan katkısı görülmüş fakat başka taşınım mekanizmalarına ihtiyaç olduğu saptanmıştır.

**Anahtar sözcükler:** astrofizik, dönme, açısal momentum taşınımı, meridyonel çevrim, asterosismoloji



**ABSTRACT****ANGULAR MOMENTUM PROBLEMS IN THE STARS**

ÖZDİL, Mehmet

MSc in Astronomy and Space Sciences

Supervisor: Prof. Dr. Mutlu YILDIZ

May 2015, 50 page .

Rotation (or angular momentum) is a natural and indispensable result of contraction during formation of stars. It directly affects the hydrostatic equilibrium. Spectral class dependence of the rotational properties are known fairly well for half a century. Data about rotation profile in the deep inner layers was unfortunately very limited. Recently, there are great progresses in this field, thanks to the Kepler and CoRoT space missions. According to the observations, there are sharp gradients for angular momentum throughout interior of many stars. The reason of this gradients is not understood, yet. Therefore, studies of angular momentum is an essential task in stellar astrophysics

In this thesis, meridional circulation, which is thought to be major mechanism responsible from angular momentum transport, is investigated in detail, and its validity is discussed. Other transport mechanisms, namely, shear instability, differential rotation and gravity waves are considered. Interaction of meridional circulation with other angular momentum transport mechanisms is also investigated. A computer code is developed for angular momentum transport due to meridional circulation. Angular momentum transport equation is solved numerically for zero age main sequence models with  $M=1.5 M_{\odot}$  and  $2.4 M_{\odot}$ . We obtain time variation of the rotational speed inside these models. According to the results, there is a net angular momentum transport from core to outer layers. For example, for  $1.5 M_{\odot}$  model, angular momentum is transported from core with 70% of total mass to the outer layers. Meridional circulation is the one of main transport mechanisms, but some other transportation mechanisms are required.

**Key Words:** astrophysics, rotation, angular momentum transport, meridional circulation, asteroseismology



## TEŞEKKÜR

**Bu tez çalışmasının fikrinin oluşumunda ve tezin ortaya konmasında katkıları benden esirgemeyen saygıdeğer hocam Prof. Dr. Mutlu YILDIZ'a teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarım sırasında ki yardımlarından dolayı araştırma görevlisi Zeynep ÇELİK ve doktora öğrencisi Cenk KAYHAN'a teşekkür ederim.**

**Ayrıca tüm eğitim hayatım boyunca maddi manevi beni destekleyen aileme, sevgilime ve dostlarıma teşekkür ederim.**

**Bu çalışma 112T989 nolu TÜBİTAK projesince desteklenmiştir.**



**İÇİNDEKİLER**Sayfa

ÖZET .....	vii
ABSTRACT .....	ix
TEŞEKKÜR .....	xi
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	xv
ÇİZELGELER DİZİNİ .....	xvii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ .....	xix
1. GİRİŞ .....	1
2. DÖNEN YILDIZLARDA MEKANİK VE ISISAL DENGE .....	5
2.1 Tekdüze Dönen Yıldızlarda Mekanik Denge .....	5
2.2 Diferansiyel Dönme: Kabuksal Dönme Durumu .....	8
2.3 Dönen Yıldızlarda Isısal Dengenin Yarattığı Frenleme .....	9
3. DÖNEN YILDIZLARDA ÇEVİRİMLER VE BAŞLICA KARARSIZLIKLAR .....	11
3.1 Elementler ve Açısal Momentumun Taşınımı .....	11
3.2 Meridyonel Çevrim .....	13
3.3 Diferansiyel Dönen Yıldızlarda Yatay Türbülans .....	17
3.4 Makaslama Kararsızlığı ile Karışma ve Diğer Kararsızlıklar .....	18
4. AÇISAL MOMENTUM TAŞINIMI .....	21
4.1 Taşınım Denklemi .....	21
4.2 Makaslama Etkisi ile Açısal Momentum Taşınımı .....	23
4.3 Kabuksal Dönmenin Bazı Özellikleri .....	25
4.4 Kabuksal Dönme ile Taşınım .....	26
4.5 Sınır Koşulları .....	29
4.6 İç Çekim Dalgaları ile Açısal Momentum Taşınımı .....	30
5. KEPLER YILDIZLARINDA ASTEROSİSMİK BULGULARA GÖRE İÇ DÖNME ÖZELLİKLERİ .....	35

**İÇİNDEKİLER (DEVAM)**

	<u>Sayfa</u>
5.1 KIC 9244992.....	36
5.2 KIC 11145123.....	37
5.3 KIC 8366239.....	37
5.4 KIC 10526294.....	37
6. AÇISAL MOMENTUM ÜZERİNE HESAPLAMALAR .....	39
6.1 Kuram.....	39
6.2 Hesaplamalar.....	39
6.3 Sonuçlar.....	40
7.SONUÇLAR VE TARTIŞMA .....	45
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	47
ÖZGEÇMİŞ .....	50

## ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1. Çeşitli dönme hızları $\omega = \Omega/\Omega_{crit}$ için yıldızların yüzey şekilleri.....	7
3.1 Meridyonel çevrim akımlarının $20M_{\odot}$ ve $5.2R_{\odot}$ 'lik bir yıldız modelinde şematik gösterimi.....	16
4.1 Teorik hesaplamalarda kullanılan ABCD birim kütle elemanın şematik gösterimi.....	22
4.2 Sadece konvektif katmanın iç kenarında $v = \omega/2\pi$ frekansının fonksiyonu olarak çeşitli $\ell$ değerleri için $1M_{\odot}$ 'lik yıldız modelinde açısal momentum parlaklığı.....	33
5.1 Yüzey çekimleri ( $\log g$ ) sismik olarak hesaplanan $0.7-3 M_{\odot}$ 'lik yıldızların özek dönme frekansları gösterimi.....	36
6.1 Model A, $1.5 M_{\odot}$ kütesine sahip yıldızın evrim sürecinde merkezden yüzeye oluşan farklı dönme hızlarının gösterimi .....	42
6.2 Model B, $2.4 M_{\odot}$ kütesine sahip yıldızın evrim sürecinde merkezden yüzeye oluşan farklı dönme hızlarının gösterimi .....	43



## ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

6.1 Model A ve Model B için elde edilen sonuçlar .....	43
--	----



## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$J$	Açısal Momentum
$R$	Yarıçap
$\Omega$	Açısal Hız
$P$	Basınç
$\nabla$	Gradyent
$\Phi$	Gravitasyonel Potansiyel
$\vartheta$	Açısal Yükseklik
$V$	Potansiyel Enerji
$g$	Çekim İvmesi
$w$	Dönme Eksenine Olan Uzaklık
$\psi$	Toplam Potansiyel Enerjisi
$\rho$	Yoğunluk
$R_p$	Kutup Yarıçapı
$\Omega_{crit}$	Kritik Dönme Sınırı
$P_2$	İkinci Legender Polinomu
$S_p$	Toplam Eşbasınç Yüzeyi
$\partial\sigma$	Yüzey Elemanı
$\epsilon$	Toplam Enerji Üretimi
$\epsilon_{nucl}$	Nükleer Enerji Üretimi
$\epsilon_\nu$	Nötrino Kaybı

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ(Devam)

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
D	Difüzyon Katsayısı
$\epsilon_{grav}$	Gravitasyonel Enerji Üretimi
$l$	Ortalama Serbest Yol Uzunluğu
$v$	Ortalama Hız
M	Toplam Kütle
S	Birim Başına Düşen Entropi
$\kappa$	Isısal İletkenlik
$C_p$	Özısı
$\vec{\nabla}_h$	Yatay Gradyent
U	Meridyonel Çevrim Hızı
$\nabla_{ad}$	Adyabatik Sıcaklık Gradyenti
$\nabla_{rad}$	Radyatif Sıcaklık Gradyenti
$\odot$	Güneş
Kt	Bir Deniz Miline Eşit Hız Birimi
$t_{dif}$	Difüzyon Zaman Ölçeği
$Ri$	Richardson Kriteri
N	Brunt-Väisälä Frekansı
$H_p$	Basınç Ölçek Yüksekliği
K	Isısal Yayınım

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ(Devam)

<b><u>Simgeler</u></b>	<b><u>Açıklama</u></b>
$\mathcal{M}$	Kuvvet Momentumu
$\mu$	Ortalama Molekül Ağırlığı
$\eta_v$	Dinamik Viskozite
$k$	Dalga Sayısı
$\mathcal{F}_{kin}$	Kinetik Enerji Akısı
$\mathcal{F}_{ang}$	Açısal Momentum Akısı
$\mathcal{L}_{ang}$	Açısal Momentum Parlaklığı
<b><u>Kısaltmalar</u></b>	
ES	Eddington-Sweet
KH	Kelvin-Helmholtz
COROT	Convection Rotation and Planetary Transits
SYAK	Sıfır Yaş Ana Kolu



## 1.GİRİŞ

20. yüzyılın ilk yarısında temelleri atılan kuantum mekaniği ile atom, molekül ve çekirdek fiziğinin modern teorilerinin geliştirilmesinde etkin olarak kullanılmaya başlanan temel bir nicelik olarak *açısai momentum*; makroskopik sistemlerin hareketlerini açıklarken göz ardı edilemeyecek kadar güçlü bir kavramdır. Yüzeysel bir bakış açısıyla dahi belki de makro ve mikro dünya arasında güçlü bir köprü olabilecek açısai momentum kavramının kolayca açıklanabilir ve anlaşılabilir olabileceğini düşünmek de bilimin işleyişine aykırı bir tutum olarak kabul edilmesi gereklidir. Bu anlayışla, ben de bu çalışmamda yıldızlarda açısai momentum problemlerini konu edindim.

Son zamanlarda teknoloji ile birlikte gelişen yüksek çözünürlüklü tayflar CoRoT ve Kepler uydularının gözlem verileriyle zenginleşen asterosismik bilgilerin ışığında yıldızların içyapılarındaki diferansiyel dönme hakkında çok daha fazla bilgi edinme fırsatı bulduk. Bu bilgiler bizlere, özellikle yıldız evriminde kullanılan birçok modelin çıktısında değişikliklere ihtiyacımız olduğunu gösterdi. Bunun sebebi, yıldızların dönüyor olması her ne kadar alışlagelmiş bir durum gibi gözüксе de yapılan modellemelerin başlangıç koşullarında yıldızların katı cisim gibi döndüğü varsayımdır. Oysaki yıldızların parlaklığı, yarıçapı, ömrü, yüzeylerindeki element bollukları, süpernova patlamalarının doğası ve yıldız kalıntılarının doğası gibi yıldız fiziğinde çokça ele alınan konular, yıldızın temel özelliklerinden birisi olan dönme göz ardı edilerek ele alınamaz. Tüm yıldızlar bir ölçüde doğumlarından ölümlerine kadar dönerler. Bu nedenle açısai momentum evrimi yıldız evrimini anlamamızda önemli bir kavramdır.

Yıldız fiziğinde dönmenin etkisini en genel haliyle 4 ayrı madde halinde inceleysek;

- **Hidrostatik Denge Üzerine olan Etkisi;** Yıldızın dönmesi hidrostatik dengede merkezkaç kuvveti olarak gözlemlenir. Bu etki yıldız yüzeyinin şekillenmesinde çok önemlidir. Dolayısı ile yüzey sıcaklığı ve çekimsel dağılımın hesaplanmasında önemlidir.

- **Kütle Kaybı Üzerine Olan Etkisi;** Çok hızlı dönen yıldızlarda daha çok gözlenmekle beraber tüm yıldızlarda kütle kaybının izotropisi bozulur. Bunun anlamı kütle kaybının belirli bir düzende ve ölçüde olmadığıdır. Bu etki etkin bir şekilde gözlemlenmektedir.
- **Kimyasal Kompozisyonun Karışması Üzerine Olan Etkisi;** İç bölgelerde meydana gelen değişiklikler açısal momentum ve elementlerin transferine sebep olan çevrim akımları üretirler. Diferansiyel dönme aynı zamanda transfer süreçlerine katkıda bulunan başka kararsızlığa da yol açmaktadır.
- **Manyetik Alan Üzerine Olan Etkisi;** Dış manyetik alanın varlığı bilindiği üzere yıldızda bir frenleme etkisi yaparak yıldızı yavaşlatma eğilimi gösterir. Katı cisim gibi dönen iç manyetik alanın varlığı belki de yıldızın dönmesi ile birebir bağlantılıdır. Fakat bu noktada radyatif bölgede diferansiyel dönme ile beraber dinamo etkisinin varlığı gerçek bir belirsizliğe yol açmaktadır.

Katı cisim dönmesi gösteren cisimlerde toplam açısal momentum;  $J = k^2 R^2 \Omega(r)$  ifadesi ile verilir. Burada k sabit, R yıldız yarıçapı, r herhangi bir noktanın merkeze olan uzaklığı ve  $\Omega$  ise açısal hızı ifade etmektedir. Dışarıdan hiç dönme momenti uygulanmadığı zaman sistemin açısal momentumu korunur. Anakol öncesi evresi boyunca yıldızın büzülmesi ile  $\Omega$ 'nın sürekli olarak büyümesi fiziksel bir zorunluluktur. Aynı şekilde altdev ve kırmızı dev evrelerinde genişleyen yıldız katmanlarının da yavaşlaması gerekir. Gözlemlere göre düşük kütleli yıldızlar yaşamlarının büyük bir kısmında yavaşlamakta ve yarıçap doğrultusunda farklı dönme hızları şekillenmektedir. Yıldızın merkeze doğru çöken katmanlarının beklenen dönme hızından daha yavaş ve aynı zamanda genişleyen bölgelerinin de beklenenden daha hızlı döndüğü görülmüştür. Bunun anlamı açısal momentumun yıldızın içinde merkezden dışarıya doğru transfer edildiğidir. Bu problemin çözümü için bu transfere neden olan frenleme sürecinin ve mekanizmalarının saptanması ve modellenmesi gerekmektedir.

Günümüzde yıldızlardaki açısal momentum ile ilgili problemlere, Güneş benzeri yıldızlar için asterosismoloji ile cevap aranırken büyük kütleli yıldızlar için gözlemlere yaklaşan kuramsal modellemeler ile cevap aranmaktadır. Günümüzde açısal momentum evrimini inceleyen birçok yayın mevcuttur; Talon (2008),

Maeder (2009a), Pinsonneault (2010), Bouvier (2013), Palacios (2013), Mathis (2013), Montalban and Noels (2013) vb.



## 2.DÖNEN YILDIZLARDA MEKANİK VE ISISAL DENGE

Dönen yıldızlarda denge ve kararlılık uzun yıllar önce Lebowitz (1967) tarafından çalışıldı ve yayınlandı. Pratikte nötron yıldızı ve beyaz cüce gibi yüksek yoğunluklu yıldızlar hariç tüm yıldızlarda Roche Modeli uygulanabilir. Bu model merkezkaç kuvvetine rağmen etkili kütle çekiminin maddeyi merkezde yoğunlaştırdığını varsayar. Roche Modeline göre yıldız kütlelerinin tamamında dönmeye ayrılan enerji toplam potansiyel enerjinin sadece %1'lik bölümüne karşılık gelir.

Dönen yıldızların fiziksel özellikleri  $\Omega(r)$ 'nın yıldız içindeki dağılımına bağlıdır. Yapılan ayrıntılı modeller diferansiyel dönme içerirken, daha basit yaklaşım olan durum katı cisim dönmesidir.

### 2.1 Tekdüze Dönen Yıldızlarda Mekanik Denge

İlk olarak hidrostatik dengede  $\Omega$ 'nın sabit olduğunu kabul ediyoruz. Basınç gradyenti,

$$\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P = -\vec{\nabla} \Phi + \frac{1}{2} \Omega^2 \vec{V}(r \sin \vartheta)^2 \quad (2.1)$$

Bu denklemde  $\rho$  yoğunluk,  $\Phi$  gravitasyonel potansiyel ve  $\vartheta$  açısall yüksekliktir.  $\Phi$  bize çekim ivmesini veriyor,

$$\vec{g} = -\vec{\nabla} \Phi = -(GM_r/r^2) \vec{r}/r \quad (2.2)$$

$\vec{g}$ 'nin bileşenleri  $(-g, 0, 0)$  ve  $g = \partial \Phi / \partial r$ . Eğer  $\Omega$  sabit veya silindirik bir simetriye sahip ise merkezkaç ivmesi potansiyelden ( $V$ ) hesaplanabilir.  $\omega$  dönme ekseninden olan uzaklığı ifade etmektedir;  $\omega = r \sin \vartheta$ .

Sabit  $\Omega$  durumunda;  $-\vec{\nabla} V = \Omega^2 \vec{\omega}$  olur ve böylece;

$$V = -\frac{1}{2} \Omega^2 \omega^2 \quad (2.3)$$

potansiyeli elde ederiz.

Toplam potansiyel enerji,  $\psi = \Phi + V$ . Poisson denklemini kullanarak;  $\nabla^2\psi = \nabla^2\Phi + \nabla^2V$ ,  $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$  eşitliğini elde ederiz. Böylece, merkezkaç kuvveti potansiyelden elde edilmiş olur;

$$(\nabla^2V)_{\omega} = \omega^{-1}\partial(-\omega^2\Omega^2)/\partial\omega = -2\Omega^2$$

Poisson denklemi,

$$\nabla^2\psi = 4\pi G\rho - 2\Omega^2 \quad (2.4)$$

halini alır ve hidrostatik denge denklemi;

$$\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P = -\vec{\nabla}\psi = \vec{g}_{eff} \quad (2.5)$$

olur.

Bu ifadelerin anlamı basıncın eşpotansiyel çizgileri üzerinde sabit olduğudur. Eşpotansiyel ve eşbasınç çizgileri çakışmış durumdadır ve yıldızın barotropik (sıkıştırılabilir) olduğunu söylenebilir (Maeder and Meynet, 2012).

Denklem (2.5) gösteriyor ki yoğunluk ayrıca  $\psi$ 'nin de bir fonksiyonudur. Buradan yola çıkarak  $P=P(\rho,T)$  ve ayrıca  $T=T(\psi)$  olacaktır.

Yıldız yüzeyi eş potansiyeldir.  $r$  yarıçapında ve  $\vartheta$  açısız yüksekliğinde ( $\vartheta=0$  kutup noktası) toplam potansiyel,

$$\psi(r, \vartheta) = -\frac{GM_r}{r} - \frac{1}{2}\Omega^2 r^2 \sin^2\vartheta \quad (2.6)$$

olur. Yıldızın toplam kütlesi için,  $\vartheta$  açısız yüksekliğinde yıldızın yarıçapı  $R(\vartheta)$ 'dir. Merkezkaç kuvvetinin sıfır olduğu kutuplarda potansiyel  $GM/R_p$  olur ( $R_p$ , kutup noktalarının yarıçapı). Bu düzeltme yıldız yüzeyinde potansiyelin sabit olmasından ileri gelir;

$$\frac{GM}{R} + \frac{1}{2}\Omega^2 r^2 \sin^2\vartheta = \frac{GM}{R_p} \quad (2.7)$$

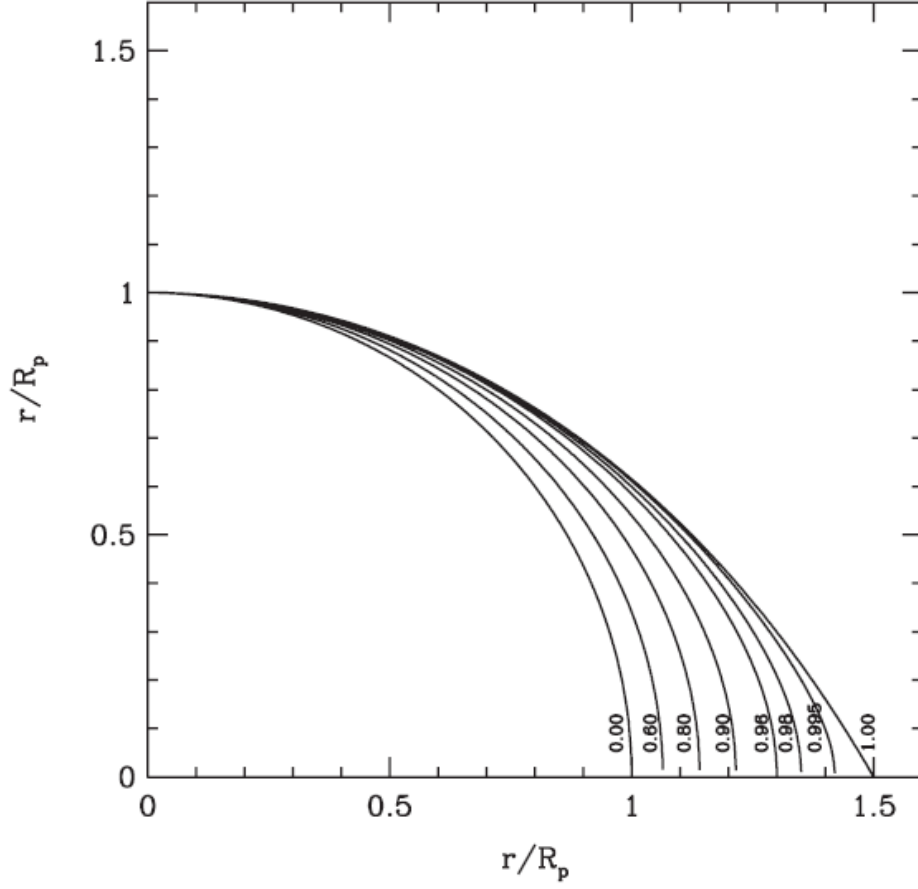
Bu eşitlik ayrıca  $\Omega$ 'nın eşpotansiyel yüzeyde sabit olduğu durumlara diferansiyel dönme üzerine de uygulanabilir. Roche modelinin şekli farklı dönme hızları için Şekil (2,1)'de gösterilmiştir. Gravitasyonel potansiyel ve merkezkaç kuvvetinden elde edilen yerçekimi denklem (2.5)'te verilmiştir.

$\vec{e}_r$  ve  $\vec{e}_\vartheta$  radyal ve enlemsel birim vektörler olmak üzere;

$$g_{eff} = \left[ -\frac{GM}{R^2(\vartheta)} + \Omega^2 R(\vartheta) \sin^2 \vartheta \right] \vec{e}_r + [\Omega^2 R(\vartheta) \sin \vartheta \cos \vartheta] \vec{e}_\vartheta \quad (2.8)$$

olur.

Burada dikkat edilmesi gereken nokta, çekim vektörü ile yarıçap vektörünün paralel olmadığıdır.



**Şekil 2.1** Çeşitli dönme hızları  $\omega = \Omega/\Omega_{crit}$  için yıldızların yüzey şekilleri. x eksenine ekvator düzlemindeki yarıçap ve y eksenine de kutup eksenindeki yarıçaptır. Grafik, yıldızın, dönme eksenine dik doğrultuda bakıldığında nasıl görüneceğini betimlemektedir (Meynet, and Maeder, 2011).

## 2.2 Diferansiyel Dönme: Kabuk Dönme Durumu

Kabuk dönme (Zahn, 1992) olarak da adlandırılan, en çok çalışılan durumlardan biri olan diferansiyel dönme, tüm eşbasınç eğrisi üzerinde  $\Omega$ 'nın sabit olduğunu söyler

$$\Omega(r, \vartheta) = \bar{\Omega}(r) + \Omega_2(r)P_2(\cos\vartheta) \quad (2.9)$$

$P_2$ , ikinci Legender polinomu ile bu dönme yasasının eşpotansiyel eğrileri üzerinde  $\Omega$ 'yı sabit olmaya zorlayan güçlü yatay türbülans hareketi sonucu olduğu düşünülüyor. Çünkü dikey yönde kararlı yoğunluk tabakalaşmaları türbülansın zayıflamasına neden olur. Eşbasınç eğrilerinin küresel yüzeyler ile çakışması durumunda, denklem (2.9),  $\Omega(r, \vartheta)$  için bazı sınırlamalar getirir. Aslında kabuksal dönme sadece düşük ya da orta dönme hızları için uygulanabilir ki bu durum kararlı değildir. Sabit  $\psi$  ile tanımlanan yüzey aynı zamanda eşbasınçlı olarak tanımlanır ve bu yüzeyler eşpotansiyel değildir. Yani yıldızlar barokliniktir (Meynet and Maeder, 1997).

Diferansiyel dönen yıldızların içyapı denklemlerini yazarken gerekli düzeltmeleri en aza indirmek amacıyla dönmeyen yıldız modellemelerine yakın denklemler yazılabilir (Meynet and Maeder, 1997).  $r_p$  ile eşbasınç eğrileri arasındaki ilişki hacim ( $V_p$ ) hesabı yardımı ile de görülebilir;  $V_p \equiv (4\pi/3)r_p^3 \cdot g_{eff}$  gibi eşbasınç yüzeyde sabit olmayan nicelikler için, ortalama değer;

$$\langle g_{eff} \rangle = \left( \frac{1}{S_p} \right)_{\psi=st} g_{eff} \partial\sigma, \quad (2.10)$$

$S_p$ , toplam eşbasınç yüzeyi ve  $\partial\sigma$ , yüzey elemanı olup;

$\partial\sigma = r^2 \sin\vartheta d\varphi d\vartheta$ . Lagrangien koordinatlarda yıldız içyapı denklemleri; hidrostatik denge denklemi, kütle korunumu denklemi, enerji üretimi denklemi ve enerji transferi denklemi;

$$\frac{dP}{dM_p} = - \frac{GM_p}{4\pi r_p^2} f_p, \quad (2.11)$$

$$\frac{dr_p}{dM_p} = \frac{1}{4\pi r_p^2 \bar{\rho}}, \quad (2.12)$$

$$\frac{dL_p}{dM_p} = \epsilon_{nucl} - \epsilon_{\vartheta} + \epsilon_{grav} \quad (2.13)$$

$$f_P = \frac{4\pi r_P^4}{GM_P S_P} \frac{1}{\langle g_{eff}^{-1} \rangle} \text{ ve } f_T = \left( \frac{4\pi r_P^4}{S_P} \right)^2 \frac{1}{\langle g_{eff} \rangle \langle g_{eff}^{-1} \rangle} \text{ olmak üzere;}$$

$$\frac{d \ln T}{d M_P} = - \frac{GM_P}{4\pi r_P^4} f_P \min \left( \nabla_{ad}, \nabla_{rad} \frac{f_T}{f_P} \right) \quad (2.14)$$

olarak yazılır (Meynet and Maeder, 1997).  $\epsilon_{nucl}$ ,  $\epsilon_\theta$  ve  $\epsilon_{grav}$  sırasıyla nükleer enerji üretimi, nötrino kaybı ve gravitasyonel enerji üretimidir.  $\nabla_{ad}$  ve  $\nabla_{rad}$  adyabatik ve radyatif sıcaklık gradyentleridir ( $d \ln T / d \ln P$ ).  $\bar{\rho}$  ise iki eşbasınç yüzeyinin arasındaki ortalama yoğunluktur. Yukarıda yazılan denklemler genel denklemlere nazaran diferansiyel dönen yıldız modellerine küçük düzeltmeler ile uyum gösterir. Sonuç olarak ortalama koordinat  $r_P$ , eşbasınç yüzeyin toplam kütesinin bir fonksiyonudur.

### 2.3 Dönen Yıldızlarda Isısal Dengenin Yarattığı Frenleme

Dönme hareketi iç ısısal dengeyi büyük oranda etkiler. Daha önce de bahsettiğimiz gibi, yıldızın şekli mükemmel küre olmadığından eşpotansiyel çizgileri enlemin ( $\theta$ ) bir fonksiyonu olur. Eşpotansiyel çizgileri kutup noktasına yaklaştıkça tek bir noktada birleşirken ekvator bölgesinde daha ayrık bir görüntü verir. Radyatif akı bazı enlemlerde eşpotansiyel eğrilerin arasında bölgesel gradyent ile orantılıdır. Eğer bölgesel enerji kaybı veya kaynağı yok ise eşpotansiyel eğri boyunca toplam enerji korunur. Böylece kutup bölgesinde akıda bir yığılma meydana gelirken ekvatorial bölgede eksiklik oluşur. Bu ısısal dengesizlik meridyen boyunca büyük ölçekli çevrimsel akımları yaratır. Bu akımlarda kimyasal kompozisyonun karışmasına ve açısal momentum taşınımına katkıda bulunur (Maeder and Meynet, 2012).



### 3.DÖNEN YILDIZLARDA ÇEVİRİMLER VE BAŞLICA KARARSIZLIKLAR

Dönme hareketi, yıldız içinde diferansiyel dönmeden doğabilecek birçok çevrim akımı ve farklı farklı türbülans hareketlerinin oluşumuna sebep olur. Tüm bu akım ve hareketler yıldız içindeki madde ve açısal momentum transferine katkıda bulunur.

#### 3.1 Elementler ve Açısal Momentumun Taşınımı

Evrende ilk olduğu gibi aynı şekilde sonsuza dek duran hiç bir şey yoktur. Yıldız içindeki elementlerin sentezlenmesi de bunun bir örneğidir. Klasik evrim modelleri, örneğin Güneş için radyatif bölgede ve özekte elementlerin hep aynı yerde kaldığını varsayar. Böyle bir varsayım mikroskopik difüzyonu yok saymış olur ve bu difüzyon elementlerin ve açısal momentumun taşınımına önemli katkılar sağlayan bir taşınım mekanizmasıdır. Ayrıca yıldız evrimini ve nükleosentez süreçlerini çok yakından etkiler (Maeder, 2009b).

Difüzyon, kaotik hareketler sonucu meydana gelen bir taşınım sürecidir. Ortamda bir ya da birkaç niceliğin gradyenti ile meydana gelir. Örneğin basınç, sıcaklık, açısal momentum gibi. Gradyent difüzyonun miktarını belirler.

Konveksiyon da aynı difüzyon süreçleri gibi davranır. Ama difüzyon ile arasında önemli farklar vardır. Konveksiyon elementleri çok kısa zamanda (*dinamik zaman ölçeği*) karıştırır. Difüzyon süreçleri ise daha uzun zaman dilimlerinde (*ısısal zaman ölçeği*) gerçekleşir. Difüzyon sanki ortamda homojen bir şekilde dağılım gösteren bir değer gibi (*örnek olarak sıcaklık gradyenti verilebilir*) davranır. Bu durum nükleer elementlerin ayrışmasını sağlayan mikroskopik ve atomik difüzyondur ve başlangıçta düzgün yayılmış elementler için gradyent oluşturur.

Adveksiyon ise büyük kütle elemanlarının bir akım içinde yer değiştirmesidir. Birçok yıldız modelinde adveksiyon ve difüzyon eş kabul edilir ve bu durum oldukça yanlıştır.

Adveksiyona örnek olarak dünyadaki para çevrimini verebiliriz. Eğer bu çevrimi difüzyon olarak düşünersek paranın düzgün bir şekilde zengin kesimden fakir kesime akması gerektiğini söyledik. Fakat biliyoruz ki para ne yazık ki tam tersi bir yönde hareket ediyor. Bu adveksiyona tipik bir örnektir. İşte bu sebeple difüzyon ve adveksiyon aynı denklemlerle birlikte çalışamaz.

Yıldız içindeki madde taşınımının birçok etkisi difüzyon katsayısına ( $D$ ) bağlı olan difüzyon süreçleri olarak düşünülebilir. Gazların kinetik teorisine göre izotropik çalkantılı ortamda ortalama hız  $v$  ve ortalama serbest yol uzunluğu  $l$  olmak üzere difüzyon katsayısı ;  $D = (1/3)lv$  'dir. Kütle içindeki  $i$  parçacık kesri  $X_i$  olarak tanımlanır ve eğer kimyasal kompozisyonda bir gradyent mevcut ise  $\vec{\nabla}X_i$  şeklinde gösterilir.  $i$  tane parçacığın difüzyon hızı;  $\vec{v}_i = -(D/X_i)\vec{\nabla}X_i$  olur. Kimsiyal elementlerin difüzyon eşitliği süreklilik denkleminde elde edilir,

$$\rho \frac{\partial X_i}{\partial t} \Big|_{M_r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \rho r^2 D \frac{\partial X_i}{\partial r} \right) \quad (3.1)$$

Merkezdeki ve yüzeydeki sınır koşullarımız ;  $\partial X_i / \partial r \Big|_{M_r=0} = \partial X_i / \partial r \Big|_{M_r=R} = 0$  olur. Burada  $M$  toplam kütleyle ifade eder. (düz.  $M_r=?$ )

Diferansiyel dönen yıldızlarda, açısal hızın ( $\Omega$ ) evrimi her  $r$  değeri için ayrı ayrı hesaplanabilirse bunun anlamı  $\Omega(r, t)$  için tam bir açıklamaya sahip olduğumuzdur.  $\Omega(r, t)$ 'nin değeri elementlerin karışımına büyük ölçüde etki eder ve aynı şekilde  $\Omega(r, t)$ 'nin evrimi elementlerin karışım süreçlerine ve dağılımlarına bağlılık gösterir. Açısal momentum transferini hesaplamak için denklemin türevini almak hiç de kolay bir iş değildir. Diferansiyel dönme için eşitliğin Lagrangien formu (Zahn, 1992; Maeder, 2009a);

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} (r^2 \bar{\Omega})_{M_r} = \frac{1}{5r^2} \frac{\partial}{\partial r} [\rho r^4 \bar{\Omega} U_2(r)] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \rho D r^4 \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial r} \right) \quad (3.2)$$

Burada  $\bar{\Omega}$  eşbasınç eğrisi üzerindeki ortalama  $\Omega$  değeridir.  $U_2$  ise bir sonraki bölümde ayrıntılı anlatılacak meridyonel çevrim hızının radyal bileşenidir. Eşitliğin sağ tarafındaki birinci terim advektif taşınım terimi iken ikinci terim ise denklem (3.1)'deki difüzyon terimidir. Her ne kadar genel olarak element taşınım difüzyonu için türbülans ve çevrim akımlarının etkileri eşdeğer kabul edilmiş ise de benzeri ya da hiç düşünülmemiş farklı terimler de içeriyor olabilir (Maeder and Meynet, 2012).

$U_2$ ,  $\bar{\Omega}$ 'nın üçüncü türevini içerdiğinden denklemin çözümünün çok büyük hassasiyetle yapılması gereklidir. Sınır koşullarında momentum taşınımı olmadığı düşünülürse sınır koşullarımız  $\partial\Omega/\partial r = 0$  olacaktır. Diğer iki sınır koşulumuz taşınım denkleminin integral alınarak elde edilir. Alt ve üst limitlerimiz;

$$r = r_b \text{ için } \frac{1}{5}\rho r^4 \bar{\Omega} U_2|_{r_b} = \frac{d}{dt} \left[ \bar{\Omega} \int_0^{r_b} r^4 \rho dr \right],$$

$$r = r_t \text{ için } -\frac{1}{5}\rho r^4 \bar{\Omega} U_2|_{r_t} = \frac{d}{dt} \left[ \bar{\Omega} \int_{r_t}^R r^4 \rho dr \right] + M_\Omega \quad (3.3)$$

olacaktır.

Radyal bileşen  $U_2$  hızı yüzeyde ve merkezde sıfırdır.

### 3.2 Meridyonel Çevrim

Meridyonel çevrim problemi Eddington (~1960) zamanından beri çalışılan ve günümüzde hala gündemdeki yerini koruyan bir problemdir. Bu problem belki de astrofiziğin bir alt dalı olarak çok yavaş ilerleyen alanlardan birisidir. Fiziksel olarak meridyonel çevrim, eşpotansiyel eğriler ya da katmanlaşan yüzeyler sebebiyle oluşur. Meridyonel çevrim, merkezkaç etkisinden dolayı kutup bölgelerine daha yakındır ve ekvatoryal bölgede daha çok yer kaplar. Radyatif akı eşpotansiyel eğriler arasındaki mesafeye bağlı olarak çekim kuvveti ile doğru orantılıdır. Fakat kutup eksenine doğru bu akıda fazlalık ve ekvatoryal bölgede ise bir eksiklik mevcuttur. Bu ısıl dengesizlik meridyen düzleminde büyük ölçekli çevrim hareketlerinin oluşmasına zemin hazırlar.

Fakat bu noktada çok fazla fiziksel problem mevcuttur. Meridyonel çevrim çözümlerinde açılal momentum korunmamaktadır. Bu sebeple meridyonel çevrimin gerçekliği defalarca sorgulandı. Meridyonel çevrimin olmadığı çözümler öngörüldü. Fakat bu çözümlerin neredeyse hepsi basit fizik yasalarını dahi hiç sayıyordu. Meridyonel çevrimdeki bu enerji problemi 1992 yılında Zahn tarafından çözüldü. Bu çözüm aynı anda hem ısıl denge hem Poisson hem de açılal momentum korunumu eşitliklerini içeriyor. Zahn'ın bulduğu çözüm bu konuda atılmış en büyük adımdır.

Tabi ki bugün hala anlaşılammış noktalar fazlasıyla mevcuttur. Özellikle meridyonel çevrimin diferansiyel dönme ve yatay türbülans ile olan etkileşimi anlaşılammıştır. Yatay katmanlar üzerindeki diferansiyel dönme miktarı bu etkileşimleri destekleyen bilgiler içermektedir.

Diferansiyel dönme için çevrim hızının türevi gerçekten çok uzun süren bir işlemdir (Zahn, 1992; Maeder and Zahn, 1998). Enerjinin korunumu eşitliği ile başlıyoruz;

$$\rho T \frac{dS}{dt} = \vec{\nabla} \cdot (x \vec{\nabla} T) + \rho \epsilon - \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_h \quad (3.4)$$

Birim başına düşen entropi  $S$  ile ifade edilirken ısısal iletkenlik  $x$  ile ifade edilmektedir.  $\epsilon$  ise nükleer enerji üretim oranıdır.  $D_h$  difüzyon katsayısı ile yatay türbülansa bağlı olarak ısısal enerji akısı  $\vec{F}_h = -D_h \rho C_p \vec{\nabla}_h T$  'dir. Sabit basınç altındaki özısı  $C_p$  ve yatay gradyent  $\vec{\nabla}_h$  ile tanımlanır. İzobarlar üzerinde, değişkenlerin ortalamaları, Legendre polinomu ( $P_2(\cos\vartheta)$ ) kadar genişler.  $\vartheta$  açısall yükseklik olmak üzere örneğin sıcaklık üzerindeki değişim;

$$T(P, \vartheta) = \tilde{T}(P) + \tilde{T}(P) P_2(\cos\vartheta) \quad (3.5)$$

şeklinde olacaktır.

Meridyonel çevrim akımının yarattığı etkiyi karakterize eden başlıca nicelik yine meridyonel çevrim hızıdır.  $U_2(r)$  meridyonel çevrim hızının radyal bileşeninin genliği ve  $V_2(r)$  yatay bileşeninin genliği olmak üzere meridyonel çevrim hızı;

$$\vec{U} = U_2(r) P_2(\cos\vartheta) \vec{e}_r + V_2(r) \frac{dP_2(\cos\vartheta)}{d\vartheta} \vec{e}_\vartheta \quad (3.6)$$

şeklinde ifade edilir.  $U_2(r)$ 'nin genel ifadesi;

$$U_2(r) = \frac{P}{\bar{\rho} \bar{g} C_p \bar{T} [\nabla_{ad} - \nabla + (\varphi/\delta) \nabla_\mu]} \times \left[ \frac{L(r)}{M_*(r)} (E_\Omega + E_\mu) \right], \quad (3.7)$$

$\nabla_\mu = (d \ln \mu / d \ln P)$ ,  $\varphi = (\partial \ln \rho / \partial \ln \mu)_{P,T}$ ,  $\delta = -(\partial \ln \rho / \partial \ln T)_{P,\mu}$  olmak üzere ve  $E_\Omega$ ,  $\Omega$ 'nın 3. dereceden türevini ve  $E_\mu$  ortalama moleküler ağırlığının 2. dereceden türevini içerir.

Homojen ortamda tekdüze dönen bir yıldızda en önemli terim;

$$E_{\Omega} \approx \frac{8}{3} \left[ 1 - \frac{\Omega^2}{2\pi G \bar{\rho}} \right] \left[ \frac{\Omega^2 r^3}{GM_r} \right]. \quad (3.8)$$

Bu terim merkezkaç kuvvetinin çekim kuvvetine oranıyla orantılıdır. Köşeli parantez içindeki 2. terim Gratton-Öpik adı ile anılır. Yerel ortalama yoğunluğun ihmal edilebildiği derin iç bölgelerde bu terim, dış bölgelerde daha baskın olması nedeniyle ihmal edilebilir.  $U_2$  ifadesinin karakteri sadece Gratton-Öpik terimi tarafından belirlenmez. Genellikle iç bölgelerdeki kütle elemanı kutup eksenine boyunca yukarı doğru hareket ederken dış bölgelerdeki kütle elemanları da ters yönde aşağıya hareket ederler (Şekil 3.1). Bunun anlamı dış bölgedeki kütle elemanı içeriye açısal momentum taşırken iç bölgedeki kütle elemanı da dış bölgeye açısal momentum taşır. Fakat  $\Omega$  ve  $\mu$ 'nün türevlerine bağlı olan çevrim modelleri kabul gören yıldız modellerine göre farklılık gösterebilir.

Çevrim hızları üst anakol yıldızlarında birkaç  $cms^{-1}$  mertebesindedir. Yıldız modellerinde kabul edildiği üzere dönmenin tekdüze olduğu anakolun başlangıç evresindeki yıldızlarda çevrim hızları çok daha büyüktür. Anakol evresi zaman ölçeğinin küçük bir yüzdesinde yıldızın dengeye ulaşmasıyla beraber çevrim hızı da büyük ölçüde azalır. Eddington-Sweet (ES) zaman ölçeği olarak da adlandırılan çevrim zaman ölçeği yıldız yarıçapının çevrim hızına bölümüyle orantılıdır,

$$t_{ES} \approx \frac{R}{U_2(R)} \approx \frac{GM^2}{LR} \frac{GM}{\Omega^2 R^3} \approx \frac{t_{KH}}{\Omega^2 R^3 / GM} \quad (3.9)$$

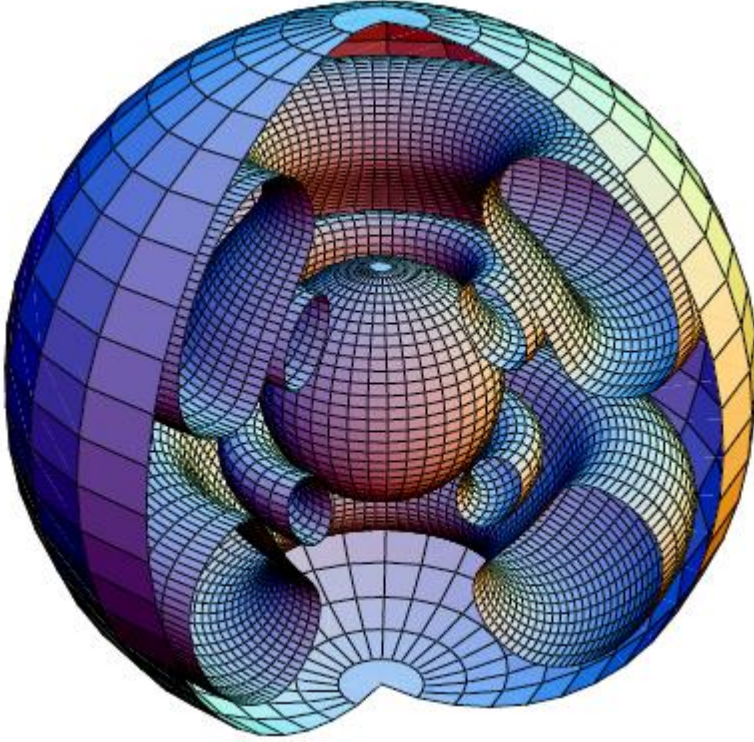
$t_{KH}$  Kelvin-Helmholtz zaman ölçeği adı verilen yıldızların ısısal zaman ölçeğini (Güneş için yaklaşık  $3 \times 10^7$  yıl mertebesinde) ifade eder. Çevrim zaman ölçeği yaklaşık olarak Kelvin-Helmholtz zaman ölçeğinin, merkezkaç kuvvetinin çekim kuvvetine oranı ( $\Omega^2 R^3 / GM$ ) ile bölümüne eşittir. Böylece  $t_{ES}$ 'nin de  $t_{KH}$ 'in birkaç katı olduğu görülebilir.

Meridyonel çevrim hem açısal momentum hem de kimyasal element taşınması sebebiyle gerçekten çok önemli bir niceliktir. Diferansiyel dönen yıldızlarda yatay türbülansın varlığı her iki taşınımı da farklı şekillerde etkiler. Kimyasal elementlerin taşınımının meridyonel çevrim ve yatay türbülans ile olan etkileşimi difüzyon süreçleri ile sonuçlanır (Chaboyer and Zahn, 1992). Difüzyon katsayısı;

$$D_{eff} = \frac{(rU_z)^2}{30D_h}, \quad (3.10)$$

olmak üzere, bir sonraki bölümde daha ayrıntılı olarak anlatılacak olan  $D_h$  yatay türbülansdan gelen difüzyon katsayısıdır. Denklem (3.10) sadece  $D_h$  teriminin,  $rU_r$  ve dikey difüzyon katsayısından büyük olduğu durumlar için geçerlidir.

Denklem (3.2) adveksiyon ve difüzyon ile ilgili terimleri içerir. Sonuç olarak yatay hareketlerin açısız momentum taşınımına olan etkisi açısız momentumun korunumunu etkiler. Gerçekten, türbülans net açısız momentum akısı olmadan da var olabilir fakat sayısal modellerde gösterildiği gibi türbülans hareketleri hızların kabuklara dağılımına olan etkisini devam ettirir (Charbonneau, 1992).



**Şekil 3.1** Meridyonel çevrim akımlarının  $20M_{\odot}$  ve  $5.2R_{\odot}$  'lık bir yıldız modelinde şematik gösterimi. Anakol evresinin başında  $Y=0.30$ ,  $Z=0.02$  ve  $v_{ini} = 300\text{km/s}$ 'dir. Şekil  $M_r$  'nin bir fonksiyonu olarak çizilmiştir. Yarım kürenin üst bölgesinin sağ tarafında madde saat yönünün tersine dönerken, özeğe yakın bölgede saat yönünde dönmektedir. Bu modelde özek bölgesi konvektiftir. Konvektif özek  $1.7 R_{\odot}$  yarıçap değerine sahiptir (Meynet and Maeder, 2002).

### 3.3 Diferansiyel Dönen Yıldızlarda Yatay Türbülans

Dönme ve özellikle diferansiyel dönme yıldızda bir takım türbülans hareketlerinin oluşmasına yol açar. Yaşadığımız dünyada bunun örnekleri, batı rüzgarları ya da jet stream rüzgarları (Saatte 50 deniz milinden daha hızlı rüzgarların bulunduğu dar bir şerit) olarak karşımıza çıkar. Yıldız içinde türbülans hareketlerinin en güçlü olduğu bölge radyatif katmandır (Zahn, 1992). Bu türbülanslar yatay yönde daha güçlüdür. Dikey yöndeki sabit sıcaklık gradyenti bu akışkan hareketlerine karşı bir kuvvet oluşturur. Yatay viskoziteyi tanımlarken kullanılan difüzyon katsayısı ( $D_h$ ) yatay türbülansı tanımlarken çok baskındır. Bu türbülansların var olduğuna dair birçok gözlemsel işaret vardır (Maeder, 2009).  $D_h$  ifadesi tam olarak belirli bir tanımlama değildir ve şu an önerilen 3 farklı formu vardır (Zahn, 1992; Maeder 2003; Mathis, Palacios, and Zahn, 2004). Couette-Taylor deneyinde kullanılan, Mathis ve arkadaşlarının önerdiği form diğer ikisine göre çok daha fenomenolojiktir. Mathis ve arkadaşlarının ve Maeder'in deneylerinden yapılan çıkarımlar ve sonuçlar, daha parlak yıldızlara doğru gittikçe Zahn'ın bulgularıyla benzerlik gösterir.

Difüzyon katsayısı  $l^2/t_{dif}$ 'e benzer bir davranış gösterir.  $l$  karakteristik uzunluk ( $r$  yarıçap uzunluğu gibi) ve  $t_{dif}$  difüzyon zaman ölçeğidir. Böylece bu noktada dikkat edilmesi gereken nokta zaman ölçeğinin doğru saptanmasıdır. Zahn çalışmalarında bu zaman ölçeğini  $t_{dif} \sim r/V_2$  şeklinde tanımlar.  $V_2$  ifadesi denklem (3.5)'de geçen ifade ile aynıdır ve  $V_2 \sim U_2/3$  olarak gösterilir. Mathis ve arkadaşlarının çalışmalarında zaman ölçeği  $t_{dif} \sim 1/\beta\Omega_2$  olarak tanımlanır.  $\Omega_2$  ifadesi Denklem (2.9)'da tanımlanmıştır ve  $\beta$  sabit bir değere sahiptir;  $1.5 \times 10^{-5}$  olup deneysel (ampirik) yollar ile elde edilmiştir. Maeder ise çalışmalarında zaman ölçeğini  $t_{dif} \sim (r/\Omega_2 V_2)^{1/2}$  şeklinde tanımlamıştır. Halihazırda hangi zaman ölçeğinin kullanılacağı konusunda kesin bir fikir yoktur, fakat son ikisi sayısal olarak hesaplanabilir durumdadır (Maeder and Meynet, 2012).

### 3.4 Makaslama Kararsızlığı ile Karışma ve Diğer Kararsızlıklar

İki komşu katman arasındaki yatay hız farkı makaslama kararsızlığının oluşmasına neden olur. Dikey yönde oluşan yoğunluk tabakalaşması (*r yarıçap eksenini boyunca*) yıldızın dengede kalmasını sağlar. Richardson kriteri olarak bilinen kararsızlık kriteri;

$$Ri \equiv \frac{g}{\rho} \frac{d\rho/dz}{(dV/dz)^2} < Ri_{crit} \quad (3.11)$$

şeklinde verilir. Kritik Richardson sayısı genel olarak 1/4 olarak alınır fakat 1 alındığı çalışmalar da var (Canuto, 2002). Bu kriterin bize söylediği: eğer diferansiyel hareketin enerjisi ( $Ri_{crit}\rho(\delta V)^2$ ), maddenin dikey yönde yer değiştirmesi için gereken enerjiden ( $g\delta\rho\delta z$ ) fazla ise kararsızlık meydana gelir. Kriter Brunt-Väisälä frekansı  $N$  ile tanımlanabilir. Kütle çekim kuvvetinin geri çağırıcı etkisi altında frekans

$$Ri \equiv \frac{N^2}{(dV/dz)^2} < Ri_{crit} \text{ ifadesi ile beraber,}$$

$$N^2 = \frac{g\delta}{H_p} \left( \nabla_{ad} - \nabla + \frac{\varphi}{\delta} \nabla_{\mu} \right) \quad (3.12)$$

şeklinde gösterilir.  $H_p$  basınç ölçek yüksekliğidir ve  $H_p = -\frac{dr}{dP} P$  şeklinde ifade edilir.

Yoğunluk tabakalaşması, aslında, yüksek  $\mu$  gradyentine sahip bölgelerde makaslama kararsızlığının oluşumunu engeller. Fakat yayılmış akışkanın ısısal yayılımını ısısal tabakalaşmayı daha kararlı duruma getirir. Belki de bu durum bu önemli karışma halinin başlıca nedenidir. Denklem (3.11)'in sağ tarafı  $vl/6K$  ile çarpılır ( $v$  ve  $l$  sırasıyla dikey yöndeki hareketin hızı ve uzunluğudur,  $6$  sayısı ise küresellikten gelir).  $K$  ifadesi ısısal yayılımını verir,  $K = 4acT^3/3\kappa\rho^2C_p$ .  $a$  ve  $c$  yıldız içyapı ile ilgili sabitlerdir. Kriter,

$$Ri \equiv \frac{N^2}{(dV/dz)^2} \frac{vl}{6K} < Ri_{crit} \quad (3.13)$$

halini alır (Zahn, 1992; Maeder, 1995).  $\mu$  sabiti için dikey difüzyon katsayısı kolayca tanımlanabilir. Bir başka öneri ise güçlü girdapların türbülans difüzyonuna olan etkisinin dikkate alınması şeklindedir.

$$D_{shear} = \frac{1}{3}vl = 2Ri_{crit}K \frac{(dv/dz)^2}{N^2}. \quad (3.14)$$

Bu katsayı homojen ortamda açısıl momentum ve elementlerin transferini verir (Maeder, 2009b). Kuramsal olarak makaslama meydana gelen türbülans, ısısal gradyenti çok az etkiler fakat buna rağmen genellikle göz ardı edilir.

$\mu$  değerinin değişken olduğu bölgelerde durum oldukça farklıdır. Yatay türbülans hareketi türbülans girdapları ve bu girdapların çevre bölgeleri arasındaki farkları azaltma eğilimi gösterir. Böylece geri çağırıcı kuvvetin şiddeti azalır ve makaslama kararsızlığı ön plana çıkar. Sonuç olarak katsayı aşağıdaki gibi yazılır (Talon and Zahn, 1997);

$$N_{T,ad}^2 = \frac{g\delta}{H_P}(\nabla_{ad} - \nabla) \text{ ve } N_{\mu}^2 = \frac{g}{H_P}\varphi\nabla_{\mu} \text{ eşitlikleri ile,}$$

$$D_{shear} = 2Ri_{crit} \frac{(dv/dz)^2}{N_{T,ad}^2/(K+D_h) + (N_{\mu}^2/D_h)} \quad (3.15)$$



#### 4. AÇISAL MOMENTUM TAŞINIMI

Tüm taşınım süreçleri difüzyon gibi kolay bir şekilde ele alınamaz. Fakat özel bir durum olan meridyonel çevrimin yarattığı adveksiyonun açısai momentum taşınımına olan etkisi incelenebilir olması sebebiyle önemli bir durumdur. Bu bölümde göreceğimiz üzere, açısai momentum taşınımını düzenleyen denklem difüzyon eşitliğinden gelen farklı terimler de içerir.

Dönen yıldızlarda, açısai hız  $\Omega$ 'nın evrimi yıldızın her yarıçap değeri için ayrı ayrı takip edilebilmelidir ki,  $\Omega(r, t)$  için tam bir açıklama elde edebilelim.  $\Omega(r, t)$ 'nin değeri elementlerin karışım süreçlerini de etkiler ve dolayısıyla  $\Omega(r, t)$ 'nin evrimi ayrıca ortalama moleköl ağırlığının ( $\mu$ ) yıldız içindeki dağılımına bağımlıdır. Böylece yıldız içyapısında dönme hızı ve elementlerin dağılımları arasında çok güçlü bir bağlantı olduğunu söyleyebiliriz.

##### 4.1 Taşınım Denklemi

Şekil (4.1)'de gösterilen ABCD sınırlarındaki dikey eksen etrafında  $\Omega = \dot{\varphi}$  hızı ile dönen birim hacmi ele alalım. Bu birim hacmin kütlesi  $\rho r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi dr$  ve açısai momentum  $J$ 'nin bileşeni dönme eksenini ile aynı yöndedir.

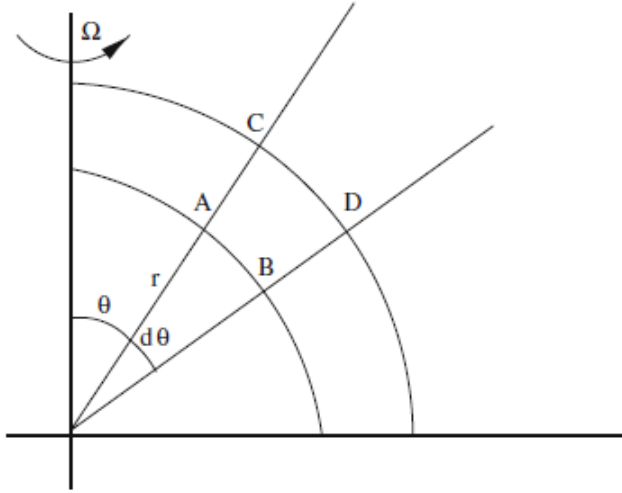
$$dJ = \rho r^4 \sin^3\vartheta d\vartheta d\varphi d\Omega \quad (4.1)$$

Diğer bileşenler ise sıfırdır. Lagrange koordinat sisteminde hareket eden akışkan kütle elemanın açısai momentumunun türevi,

$$\rho r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi dr \frac{d}{dt} (r^2 \sin^2\vartheta \Omega)_{M_r}. \quad (4.2)$$

Türev daha açık bir şekilde ifade edilirse, ilk olarak,

$$\rho \frac{d}{dt} (r^2 \sin^2\vartheta \Omega)_{M_r} = \frac{d}{dt} (\rho r^2 \sin^2\vartheta \Omega)_{M_r} - r^2 \sin^2\vartheta \Omega \left. \frac{d\rho}{dt} \right|_{M_r} \quad (4.3)$$



**Şekil 4.1** Teorik hesaplamalarda kullanılan birim kütle elemanın şematik gösterimi. Dikey bir eksen etrafında dönen ABCD kütle elemanının momentumu hesaplanır. A noktasının yarıçap üzerindeki koordinatı  $r$  ve açısal yüksekliği de  $\theta$  ile gösterilir (Maeder, 2009b).

Lagrange ve Euler türevleri arasındaki ilişkiyi kullanarak sıradaki eşitliği elde ediyoruz,

$$\begin{aligned} & \rho \frac{d}{dt} (r^2 \sin^2 \theta \Omega) M_r \\ &= \frac{d}{dt} (\rho r^2 \sin^2 \theta \Omega)_r + U \cdot \nabla (\rho r^2 \sin^2 \theta \Omega) - r^2 \sin^2 \theta \Omega \frac{d\rho}{dt} \Big|_{M_r} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Burada  $U$  akışkan hareketlerinin hızını ifade ediyor.

$$\frac{d\rho}{dt} \Big|_{M_r} = \frac{d\rho}{dt} \Big|_r + U \cdot \nabla \rho \quad (4.5)$$

eşitliğini ve kütlelenin sürekliliği eşitliğini  $[(\partial \rho / \partial t)]_r = -\nabla \cdot (\rho \cdot U)$  ] kullanarak

$$\frac{d\rho}{dt} \Big|_{M_r} + \rho \nabla \cdot U = 0 \quad (4.6)$$

eşitliği elde edilir. Bu denklemi 4.4 denklemine dahil edersek,

$$\rho \frac{d}{dt} (r^2 \sin^2 \theta \Omega)_{M_r} = \frac{d}{dt} (\rho r^2 \sin^2 \theta \Omega)_r + \nabla \cdot (U \rho r^2 \sin^2 \theta \Omega) \quad (4.7)$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlik açısal momentum  $J$ 'nin türevini veriyor. Bu türev hacim elemanına uygulanan kuvvetlerin momentumuna eşittir.

$$\frac{dJ}{dt} = \mathcal{M}. \quad (4.8)$$

Dönen akışkan elemanın üzerine çok çeşitli kuvvetler uygulanıyor olabilir. Bir sonraki bölümde iç bölgelerdeki diferansiyel dönme sebebiyle meydana gelen makaslamanın yarattığı moment üzerinde duracağız.

#### 4.2 Makaslama Etkisi ile Açısal Momentum Taşınımı

İlk olarak dikey ya da radyal makaslama en önemli durum olan ve dinamik viskoziteyi  $\eta_v$  dikey yönde inceleyelim. Makaslama nedeniyle bazı kuvvetler hacim elemanının yüzeyine uygulanır. Şekil (4.1)'de anlatıldığı gibi dikey eksen etrafında dönen birim hacim yüzeyine uygulanan kuvvet,

$$\eta_v \frac{dv_\varphi}{dr} = \eta_v r \sin\vartheta \frac{d\Omega}{dr}. \quad (4.9)$$

AB şeklinde tanımlanan yüzeye viskoz kuvvetinin bir benzeri uygulanıyor;

$$F_{AB} = \eta_v r^3 \sin^2\vartheta \frac{d\Omega}{dr} d\vartheta d\varphi .$$

Bu kuvvetin momentumu  $\mathcal{M} = r \times F_{AB}$  şeklindedir. Sonuç olarak viskozitenin momentum kuvvetine olan katkısı,

$$F_{AB} r \sin\vartheta \sin\frac{\pi}{2} = \eta_v r^4 \sin^3\vartheta \frac{d\Omega}{dr} dv d\varphi \quad (4.10)$$

şeklinde gösterilir. ABCD hacim elemanının mesafeye göre kazandığı moment,

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \eta_v r^4 \sin^3\vartheta d\vartheta d\varphi \frac{\partial\Omega}{\partial r} \right) dr \quad (4.11)$$

eşitliği ile gösterilir. Şimdi  $d\Omega/dv = 0$  olduğu durumdaki teğet makaslama etkisini hesaplayalım. Yatay viskozite  $\eta_v$  ile birlikte teğet makaslamanın yüzeye uyguladığı kuvvet  $\eta_v r \sin v [\partial\Omega/(r\partial\vartheta)]$  şeklindedir. Böylece hacim elemanı dönerken AC yüzeyine uygulanan kuvveti  $\eta_v r \sin^2\vartheta \left( \frac{\partial\Omega}{\partial\vartheta} \right) dr d\varphi$  şeklinde gösterebiliriz.

Kuvvetin ürettiği momentumu hesaplamak için  $r \sin \vartheta$  ile denklemi çarpıyoruz.

AC yüzeyinden BD yüzeyine geçerken kazanılan moment;

$$\frac{\partial}{r \partial \vartheta} \left( \eta_v r^2 \sin^3 \vartheta dr d\varphi \frac{\partial \Omega}{\partial v} \right) dr. \quad (4.12)$$

Artık 4.7, 4.8, 4.11, 4.12 denklemlerini kullanarak açısal momentum değişimini yazarak kütle elemanının açısal momentumunun taşınım eşitliğini daha kolay elde ederiz;

$$\rho r^2 \sin \vartheta \frac{d}{dt} (r^2 \sin^2 \vartheta \Omega)_{Mr} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \eta_v r^4 \sin^3 \vartheta \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \eta_v r^2 \sin^3 \vartheta \frac{\partial \Omega}{\partial v} \right). \quad (4.13)$$

Dinamik viskozite katsayısını kinematik katsayısı açısından ifade etmiş olduk.  $v_v = \eta_v / \rho$  ve  $v_h = \eta_h / \rho$ 'dir. Kinematik viskozite katsayısı ayrıca kimyasal elementlerin difüzyon katsayısı D'dir. Denklem (4.13)'ü  $r^2 \sin v$  ile bölelim,

$$\rho \frac{d}{dt} (r^2 \sin^2 \vartheta \Omega)_{Mr} = \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \rho D_v r^4 \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial v} \left( \rho D_h \sin^3 \vartheta \frac{\partial \Omega}{\partial v} \right). \quad (4.14)$$

Biz denklem (4.7)'nin ilk terimini elde etmiş olduk. Şimdi küresel koordinatlarda diverjansı elde edelim ve son olarak açısal momentum taşınımını anlatan eşitliği elde edelim;

$$\begin{aligned} \rho r^2 \sin \vartheta \frac{d}{dt} (r^2 \sin^2 \vartheta \Omega)_{Mr} &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho r^2 \sin^2 \vartheta \Omega)_r + \nabla \cdot [U \rho r^2 \sin^2 \vartheta \Omega] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho r^2 \sin^2 \vartheta \Omega)_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^4 \sin^2 \vartheta U_r \Omega) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\rho r^2 \sin^3 \vartheta U_v \Omega) \\ &= \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \rho D_v r^4 \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \rho D_h \sin^3 \vartheta \frac{\partial \Omega}{\partial \vartheta} \right). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Burada  $U_r$  ve  $U_\vartheta$  sırasıyla çevrim hızının dikey bileşeni yatay bileşenidir. Evrim süresince,  $U_\vartheta$  hiçbir değişim olmazken,  $\dot{r}$  hızı için büzülme ya da genişleme  $U_r$  ile bağımlılık gösterir;  $U_r \rightarrow U_r + \dot{r}$ . Hiçbir varsayım  $\Omega$ 'nın yıldız içinde dağılımına göre yapılmamıştır. Bu sebeple yukarıdaki eşitlik genel bir eşitliktir. Kabuk dönme durumunda, bu eşitlik fiziksel döngüyü açıklamayı oldukça basit bir şekilde anlatmaktadır.

### 4.3 Kabuk Dönmenin Bazı Özellikleri

İç bölgelerdeki dönme ile ilgili Zahn'ın 1992 yayınındaki varsayımı esasen yıldız merkezine olan uzaklığa bağımlı olduğu şeklindedir. Enleme ise görece daha az bağımlıdır. Bunun sebebi, izobarlar üzerinde  $\Omega$ 'nın sabit kalmasını sağlayacak gücü üreten yatay türbülanstır.  $\hat{\Omega} \ll \bar{\Omega}$  olmak üzere,

$$\Omega(r, \vartheta) = \bar{\Omega}(r) + \hat{\Omega}(r, \vartheta) \quad (4.16)$$

yazabiliyoruz ( $\vartheta$  açısall yükseklik). Yatay ortalama  $\bar{\Omega}$ , katı cisim dönmesinde olduğu gibi açısall hız olarak düşünölmüş ve gerçek kabuk ile aynı açısall momentuma sahip olduğu düşünölmüşür. Yani,

$$\bar{\Omega} = \frac{\int_0^\pi \Omega(r, \vartheta) \sin^3 \vartheta d\vartheta}{\int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta} \quad (4.17)$$

Bu ortalamanın gerekçesi, ortalamanın kabuk üzerinde tanımlanmış ortalama açısall momentumdan elde ediliyor olmasıdır. Genel olarak, tanımlı bir küre üzerindeki vektör alanı küresel harmonikleri temsil eder. Eğer alan eksene göre simetrik ise küresel fonksiyonlar ile ifade edilebilir. Böylece meridyonel çevrim

$$U = \sum_{l>1} U_l(r) P_l(\cos \vartheta) e_r + \sum_{l>1} V_l(r) \frac{dP_l(\cos \vartheta)}{d\vartheta} e_\vartheta \quad (4.18)$$

şeklinde ifade edilebilir (Zahn, 1992). Burada eşitliğin sağ tarafındaki birinci terim  $U_r$  ve ikinci terim de  $U_\vartheta$ 'dir.  $e_r$  ve  $e_\vartheta$  radyal ve açısall yükseklik doğrultularında birim vektörlerdir. Sadece radyal bileşen kimyasal karışıma ve açısall momentum taşınımına yol açtığından ötürü sadece onu ele alıyoruz. Legender polinomunu  $P_2(\cos \vartheta) = \frac{1}{2}(3\cos^2 \vartheta - 1)$  şeklinde ikinci dereceden sınırlıyoruz.

$$U = U_2(r) P_2(\cos \vartheta) e_r + V_2(r) \frac{dP_2(\cos \vartheta)}{d\vartheta} e_\vartheta \quad (4.19)$$

Sıfırncı dereceden polinomlar bu denklemde var olamazlar. Çünkü bu polinomların değerleri sabittir ve hızın sıfır olmasına izin vermezler. Ardışık tek sayılı polinomlar ( $P_3, P_5 \dots$ ) ise ekvatora göre simetrik değillerdir ve bu sebeple sıfır kabul edilirler. Gerçekten ilginç olan durum ise çevrimin sadece  $l = 2$  bileşeni açısall momentum taşınımının net miktarına olanak sağlar.  $P_4$  terimide Mathis and Zahn (2004) yayınında özel bir durum olarak incelenmiştir.

Süreklilik denkleminin anelastik yaklaşım içinde uygulanması ile  $V_2$  terimi elde edilir (Zahn, 1992). Küresel koordinatlarda, sabit durumdaki  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx 0\right)$  (anelastik yaklaşımı tanımlıyor) süreklilik;

$$\nabla \cdot (\rho U) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho U_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \rho \sin \vartheta V_2 \frac{dP_2(\cos \vartheta)}{d\vartheta} \right) = 0 \quad (4.20)$$

$dP_2/d\vartheta = -3\cos\vartheta\sin\vartheta$  eşitliği ile,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho U_r) &= -\frac{\rho V_2}{r \sin \vartheta} (3\sin^3 \vartheta - 6\sin \vartheta \cos^2 \vartheta) \\ &= -\frac{\rho V_2}{r} (3 - 9\cos^2 \vartheta) = 6 \frac{\rho V_2}{r} P_2(\cos \vartheta) \end{aligned} \quad (4.21)$$

denklemini elde edilir. Denklem (4.19)'dan,  $P_2(\cos \vartheta)$  ile sadeleştirme sonucu

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} [\rho r^2 U_2(r)] - 6\rho V_2(r) = 0 \quad (4.22)$$

denklemini elde edilir.  $U_2(r)$ 'nin bilindiği üzere bu denklem  $V_2(r)$ 'yi ve meridyonel hızın yatay bileşenini ( $U_\vartheta = V_2(r) \frac{dP_2(\cos \vartheta)}{d\vartheta}$ ) sağlar. Yıldızın evrimi sırasında, çevrim hızıyla beraber büzülme ve genişlemeyi de ele almalıyız. Bu nedenle

$$U_r = U_2(r)P_2(\cos \vartheta) + \dot{r} \quad (4.23)$$

yazabiliriz. Meridyonel çevrim modelleri yıldız evrimi boyunca  $U_r$  ve  $U_\vartheta$ 'den elde edilir.

#### 4.4 Kabuksal Dönme ile Taşınım

Kabuksal dönme durumunda dikey yöndeki açısal momentum taşınımının daha önce elde ettiğimiz eşitlikler yardımıyla hesaplayacağız. İlk olarak 4.15 denklemini  $\sin v dv$  ile çarpıp 0'dan  $\pi$ 'ye kadar  $\vartheta$ 'ye göre integral işlemi uygulayacağız. 4.15 denkleminin terimlerini 4.23 denklemini göz önüne alarak sırasıyla inceleyelim:

İlk terim:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial t} (\rho r^2 \sin^2 \vartheta \Omega)_r \sin \vartheta d\vartheta &= \frac{\partial}{\partial t} \rho r^2 \int_0^\pi \Omega(r, \vartheta) \sin^3 \vartheta d\vartheta \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho r^2 \bar{\Omega})_r \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Bu bize  $\bar{\Omega}$ 'nın neden 4.17 ifadesi ile tanımlandığını gösterir. Burada  $\vartheta$ 'nin ihmal edilmesi ile başka  $\rho$  değerleri de elde edinilir.

İkinci terim:

$$\int_0^\pi \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^4 \sin^2 \vartheta (U_r + \dot{r}) \Omega(r, \vartheta)) \sin \vartheta d\vartheta. \quad (4.25)$$

Terim  $P_2(\cos \vartheta)$  içerdiğinden  $U_r$  ile birlikte düşünmemiz gerekiyor:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^4 U_2(r) \bar{\Omega}(r)) \int_0^\pi \sin^3 \vartheta \frac{1}{2} (3 \cos^2 \vartheta - 1) d\vartheta \quad (4.26)$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^4 U_2(r) \bar{\Omega}(r)) \left[ \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta - \frac{3}{2} \int_0^\pi \sin^5 \vartheta d\vartheta \right] \quad (4.27)$$

$$= -\frac{1}{5} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^4 U_2(r) \bar{\Omega}(r)) \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta, \quad (4.28)$$

Burada  $\int_0^\pi \sin^5 \vartheta d\vartheta = (4/5) \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta$  denkleminde yararlandık. Büzülme ya da genişleme terimi olan  $\dot{r}$ ,  $U_2(r)$ 'nin  $(-1/5)$  katsayısını içermemesinin aksine

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^4 \bar{\Omega}(r)) \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta \quad (4.29)$$

halini alır.

Üçüncü terim:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\rho r^2 \sin^3 \vartheta U_v \Omega(r, \vartheta)) \sin \vartheta d\vartheta &= \rho r \bar{\Omega}(r) \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial \vartheta} (U_\vartheta \sin^3 \vartheta) d\vartheta \\ &= -3 \rho r \bar{\Omega}(r) V_2(r) \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin^4 \vartheta \cos \vartheta) d\vartheta = 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

Burada 4.22 denkleminde yararlandık.

Dördüncü terim:

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \rho D_h r^4 \frac{\partial \Omega(r, \vartheta)}{\partial r} \right) \sin \vartheta d\vartheta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \rho D_h r^4 \frac{\partial \Omega(r, \vartheta)}{\partial r} \right) \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta \quad (4.31)$$

burada  $D_h$  katsayısının  $\vartheta$ 'den bağımsız olduğu varsayılır.

Beşinci terim:

$$\frac{\partial \Omega(r, \vartheta)}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \bar{\Omega}(r)}{\partial \vartheta} = 0 \quad (4.32)$$

kabuk dönmenin olduğu varsayımıyla beraber beşinci terim sıfır olur.

Bu beş terimin 4.15 denklemine olan katkısını bir araya getirip denklemi  $\int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta$  ile çarpar isek son olarak,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho r^2 \bar{\Omega})_r = \frac{1}{5r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^4 \bar{\Omega} [U_2(r) - 5\dot{r}]) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \rho D_v r^4 \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial r} \right) \quad (4.33)$$

Bu denklem açısal momentum taşınımının Euler gösterimidir. Bu denklem hakkında birkaç açıklama yapmak gerekirse:

- $\dot{r}$  terimi sadece anakol öncesi evresi ve nükleer büzülme evresinde için önem taşır. Çevrim tarafından taşınan  $\Omega$ 'nın karakteristik zaman ölçeği ile Eddington-Sweet zaman ölçeği arasındaki ilişki  $t_{ES} \approx t_{KH} (\Omega^2 R / g_s)^{-1}$  şeklindedir. Burada  $g_s$  yüzeydeki çekimi,  $t_{KH}$  Kelvin-Helmholtz zaman ölçeğini simgeler. Açık bir biçimde  $t_\Omega$ ,  $t_{KH}$ 'dan daha uzundur. Kelvin-Helmholtz zaman ölçeğinde evrim aşamalarında, anakol evresi haricinde  $\dot{r}$  baskın bir parametredir.
- $U_2(r)$ 'nin pozitif olduğu bölgelerde (genel olarak kütleli yıldızlarda radyatif katmanın alt bölgeleri)  $\dot{r} > 0$  ile yıldızın genişlemesi, genişlemenin çevrime olan etkisini engeller. Bu durumun aksine  $U_2(r)$ 'nin negatif olduğu dış bölgelerde yıldızın genişlemesi çevrimi güçlendirmektedir.
- Şekil (3.1)'de görüldüğü gibi  $U_2(r)$ 'nin pozitif olduğu bölgelerde açısal momentum taşınımı dışarıdan içe doğru oluyor.
- Eğer genel olarak  $\Omega$  dışarıya doğru azalıyor ise, açısal momentum da dışarıya doğru taşınıyor demektir.

$\dot{r}$  terimi sadece Euler gösteriminde (denklem 4.33) görülür. Açısal momentum taşınım denkleminin Lagrange formu sıvı kütle elemanı baz alınarak basitçe,

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} (r^2 \bar{\Omega})_{M_r} = \frac{1}{5r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^4 \bar{\Omega} U_2(r)) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \rho D_v r^4 \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial r} \right) \quad (4.34)$$

şeklinde verilir. Bu şekilde yıldızın büzülmesinin ya da genişlemesinin açısal momentum dağılımı üzerindeki etkisi denkleme eklenmiş oldu. Bu denklem günümüzde uygulanan evrim modellerinde  $\Omega$ 'nın hesaplanmasında kullanılıyor. Bu çalışma kapsamında da denklem (4.34) kullanılarak hesaplamaların yapıldığı bir bilgisayar programı yazıldı.

#### 4.5 Sınır Koşulları

Açısal momentum transferi için sınır koşulları büyük bir özenle seçilmelidir. Radyatif bölgenin kenarları için dört adet sınır koşuluna ihtiyacımız vardır. Radyatif katmanın tabanı ve tavanı sırasıyla  $r_b$  ve  $r_t$  olarak ifade edilir.  $1.3 M_{\odot}$ 'den daha büyük kütleli yıldızlarda,  $r_t$  ve  $r_b$  sırasıyla yıldızı yüzeyini ve konvektif katmanın tabanını ifade eder. Eğer bu kenarlarda viskoz momentumu yok ise,  $r = r_t$  ve  $r = r_b$  için,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial r} = 0 \quad (4.35)$$

yazılabilir. Bu iki koşul kenarlarda  $\Omega$ 'nın birinci türevinin sürekliliğini sağlar. Bu koşullar ayrıca radyatif katmanın merkeze daha yakın olduğu güneş benzeri yıldızlarda da uygulanabilir. İhtiyacımız olan diğer iki sınır koşulu da açısal momentum transferini ifade eden eşitlikten elde edilir.

$$\frac{1}{5} d[\rho r^4 \bar{\Omega} U_2] = \rho \frac{d}{dt} [r^2 \bar{\Omega}] r^2 dr \quad (4.36)$$

Bu ilişkiyi merkezden yüzeye kadar integre eder isek (ya da tam tersi), merkezde ve yüzeyde birer sınır koşulu elde ederiz:

$$\begin{aligned} r = r_b & \quad \rightarrow \quad \frac{1}{5} \rho r^4 \bar{\Omega} U_2 \Big|_{r_b} = \frac{d}{dt} [\bar{\Omega} \int_0^{r_b} r^4 \rho dr] \\ r = r_t & \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{5} \rho r^4 \bar{\Omega} U_2 \Big|_{r_t} = \frac{d}{dt} [\bar{\Omega} \int_{r_t}^R r^4 \rho dr] + \mathcal{M}_{\Omega} \end{aligned} \quad (4.37)$$

$U_2$ 'nin radyal bileşeni yüzeyde ve merkezde sıfırdır.  $\mathcal{M}_{\Omega}$  yüzeye uygulanan kuvvetin momentum değerini ifade eder. Eğer yıldızda konvektif özek yok ise, yani  $r_b \rightarrow 0$  için birinci sınır koşulumuz  $U_2(r = 0) = 0$  olur. Benzer şekilde eğer yıldızda konvektif katman yok ise, yani  $r_t \rightarrow R$  için ikinci sınır koşulumuz

$U_2(r = R) = 0$  olur. Çözüm merkezde ve yüzeyde sıfıra doğru eğilim gösterir ve bu koşulların uygulanmaması için hali hazırda hiçbir engel yoktur (Maeder, 1999).

#### 4.6 İç Çekim Dalgaları ile Açısal Momentum Taşınımı

Temel başvuru kaynağı: Physics, Formation and Evolution of Rotating Stars, Maeder, (2009).

Son zamanlarda asterosismoloji alanında yaşanan gelişmeler ile birlikte özellikle alt dev ve kırmızı dev yıldızlarının içyapılarının dönme oranları hesaplanabilmektedir. Neredeyse katı cisim gibi bir dönme profiline sahip Güneş'in aksine bu evrimleşmiş yıldızlar, konvektif katmana göre bir hayli hızlı dönen radyatif özek içerirler. Fakat biliyoruz ki eğer açısal momentum taşınımı olmasaydı çok daha hızlı döneceklerdi. Küçük kütleli bu yıldızların evriminde var olan bu açısal momentum taşınımında baskın mekanizmanın çekim dalgaları olduğu sanılmaktadır.

Suya atılan bir taş parçası suya girdiği nokta merkez olmak üzere su yüzeyinde mükemmel daireleri oluşturan dalgalar üretir. Bu dalgalar yüzey çekim dalgalarıdır. Çünkü taş parçası suya ilk temas ettiği bölgede, oradaki suyun yerini değiştirmiştir ve çekim kuvvetinin etkisiyle dalgalar meydana gelmiştir.

Yıldızlarda çekim dalgaları aynen bir konvektif piston görevi görerek radyatif kararlı komşu bölgelere enerji enjekte eder. Bu piston hareketi nedeniyle, akışkan kütle elamanı yukarı ya da aşağı doğru aynı katman içinde ya da farklı yoğunlukta iki bölge arasında yol kat edecektir. Çekim kuvveti hareket eden parçacığı başlangıç noktasına geri getirme eğilimindedir. Sonuç olarak geri dönen parçacık başlangıç noktasını geçecek ve salınım hareketi meydana getirecektir. Bu olay yer değiştirmelere sebebiyet verir ve çekim dalgalarının yayılmasını sağlar. g-mod salınımı adı verilen çekim dalgalarının frekansı yüksek frekansa sahip ses dalgalarına göre oldukça düşüktür.

Yıldız evriminde çekim dalgalarının esas etkisi, yıldızın açısal momentum taşınım kapasitesinde ve dönme üzerindeki etkisinde yatar. Kimyasal elementlerin taşınımında çekim dalgalarının çok büyük bir etkisi yoktur. Özellikle

dalgaların etkileşimi, Coriolis kuvveti ve dalgaların yatay türbülans ile etkileşimi olmak üzere, bu konuda hala çok büyük belirsizlikler mevcuttur.

Yıldızlar alt dev evresine evrimleştikçe düşük frekanslı çekim dalgaları büyük bir oranda zayıflar ve hidrojen yakan kabuk altında ilerleyemez. Bu sayede özeğin dönüşü konvektif katmandan ayrılır. Bu ayrışma alt-dev kolunun hemen başında meydana gelir (yıldızın yüzey sıcaklığı 5500 K civarında iken). Bu sırada çekim dalgaları radyatif katmanın üst bölgelerini yavaşlatmaya devam eder. Bu da gözlenen diferansiyel dönmenin hidrojen yakan kabuk civarından sınırlandırıldığını gösterir. Üst radyatif bölgede güçlenen tork, özek bölgesini açısal momentum taşıyan maddeden koruyarak özeğin hızlanma ivmesini yavaşlatır. Kırmızı dev kolunda meydana gelen bu katman ayrışması tam olarak çekim dalgaları ile ilişkilendirilemez fakat en baskın mekanizma olduğu söylenebilir.

Çekim dalgaları radyatif bölgede yayılır ve yıldız boyunca kinetik enerji ve açısal momentum taşır. Daha önce düşünülenin aksine, çekim dalgaları kimyasal element taşınımına katkıda bulunmazlar.

Çekim dalgaları hızının ( $u$ ) küresel koordinatlardaki bileşenleri ( $u_r, u_\theta, u_\phi$ ) kullanılarak toplam kinetik enerji,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho \langle u^2 \rangle &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2} \rho (u_r^2 + u_\theta^2 + u_\phi^2) \sin\theta d\theta d\phi \\ &= \frac{1}{2} \frac{N^2}{\omega^2} \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho u_r^2 \sin\theta d\theta d\phi = \frac{1}{2} \frac{N^2}{\omega^2} \rho \langle u_r^2 \rangle \end{aligned} \quad (4.38)$$

şeklinde ifade edilir. Bu kinetik enerjinin taşınımı paketler halinde ( $v_g$ ) olduğu düşünülür ve kinetik enerji akısı ifade edilir;

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{kin}(\omega, \ell) &= \frac{1}{2} \rho \langle u^2 \rangle v_g = -\frac{1}{2} \rho \langle u^2 \rangle \frac{(N^2 - \omega^2)}{N^2} \frac{\omega}{k_r} \mathbf{b} \\ &= -\frac{1}{2} \rho \langle u^2 \rangle \left(\frac{\omega}{N}\right)^2 \frac{(N^2 - \omega^2)^{1/2}}{k_h} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Burada,

$$k_r^2 = k_h^2 \left(\frac{N^2}{\omega^2} - 1\right) \quad (4.40)$$

ilişkisi kullanılmıştır.  $k$  ifadesi asterosismolojide dalga sayısıdır ve sırasıyla dikey ve yatay bileşenler  $k_r$  ve  $k_h$ 'dir.  $\omega$  parçacığın salınım frekansı ve  $N$  de Brunt-Väisälä frekansıdır.

Artık salınım frekansı  $\omega$  ile açısal momentum transferinin akısı evrimleştirilir.  $r$ ,  $\nu$  koordinatlarındaki noktada açısal momentum yoğunluğu,  $\varrho \sin \nu u_\varphi$ 'dir ve açısal momentum akısı dikey hız ile çarpılarak elde edilir. Yatay küresel yüzeyde ortalama açısal momentum akısı,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{ang}(\omega, \ell, m) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \varrho r \sin \nu u_\varphi u_r \sin \nu d\nu d\varphi \\ &= -m \frac{r k_r}{\ell(\ell+1)} \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \varrho u_r^2 \sin \nu d\nu d\varphi \end{aligned} \quad (4.41)$$

şeklinde ifade edilir. Denklem (4.16) ve (4.18)'den yararlanılarak, kinetik enerji ile açısal momentum arasındaki ilişki

$$\mathcal{F}_{ang}(\omega, \ell, m) = 2 \frac{m}{\omega} \mathcal{F}_{kin}(\omega, \ell, m) \quad (4.42)$$

elde edilir. Küresel yüzey üstünde  $r$  değeri üzerinde birim zamanda olan değişimi ifade etmek amacıyla ‘‘açısal momentum parlaklığı’’ tanımlanır;

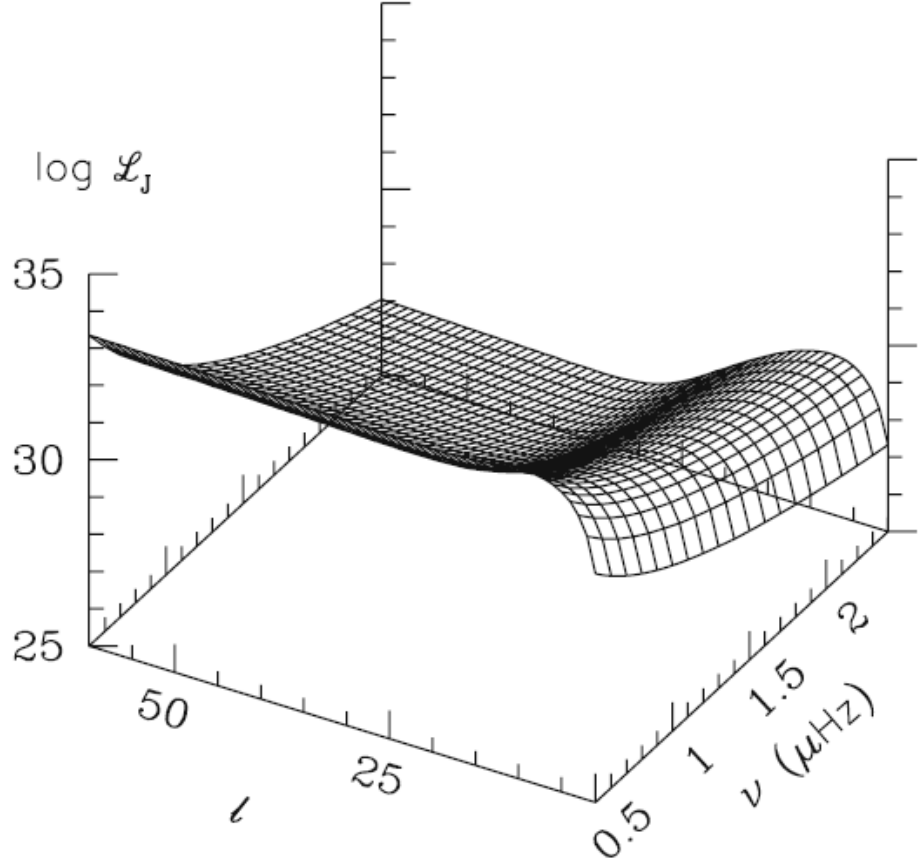
$$\mathcal{L}_{ang}(\omega, \ell, m, r) = 4\pi r^2 \mathcal{F}_{ang}(\omega, \ell, m) \quad (4.43)$$

Adyabatik limitlerde zamandan bağımsız olarak açısal momentum parlaklığı korunur. Konvektif katmanın sınırında ( $r_c$ ) uyarılmış dalgaların toplanması ile toplam açısal momentum elde edilir. Bütün dalgalar  $e^{-\tau/2}$  faktörü nedeniyle sönümlüdür.

$$\mathcal{L}_{ang}(r) = \sum_{\omega, \ell, m} \mathcal{L}_{ang}(\omega, \ell, m, r_c) e^{-\tau(\omega, \ell, r)} \quad (4.44)$$

Parlaklık  $u_r^2$ 'ye bağlı olduğundan, sönümleme faktörü  $e^{-\tau}$  haline gelir. Şekil (4.2) açısal momentum parlaklığının  $1M_\odot$ 'lik yıldız için frekansa ve  $\ell$  derecesine bağlı olduğunu gösterir.  $\omega$  frekansı konvektif katmanın kenarında  $N$  değerinden küçüktür.  $\ell$  değeri konvektif hareketin uzunluğuna göre 1 ile 60'a kadar değer alabilir. Çeşitli  $m$  modlarının aynı değerinde uyarılmış olduğu kabul edilir.  $\mathcal{L}_{ang}$

değeri yüksek frekanslarda artar ve düşük  $\ell$  değerine sahip frekanslar daha çok açısıl momentum taşır. Bu düşük frekanslar daha az emilir.



**Şekil 4.2** Sadece konvektif katmanın iç kenarında  $\nu = \omega/2\pi$  frekansının fonksiyonu olarak çeşitli  $\ell$  değerleri için  $1M_{\odot}$ 'lik yıldız modelinde açısıl momentum parlaklığı (Maeder, 2009b).

Çekim dalgaları ile taşınan açısıl momentum ( $\mathcal{L}_{ang}(r)$ ) birim hacimde ve zamandaki değişimi ifade eden 4.34 denklemine,

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} (r^2 \bar{\Omega})_{Mr} = \frac{1}{5r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^4 \bar{\Omega} U_2(r)) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho D_v r^4 \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial r}) \pm \frac{3}{8\pi} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \mathcal{L}_{ang}(r) \quad (4.45)$$

şeklinde eklenir. Eklenen terimin önündeki artı işareti içe doğru hareket eden dalgayı, eksi işareti de dışa doğru hareket eden dalgayı ifade eder.

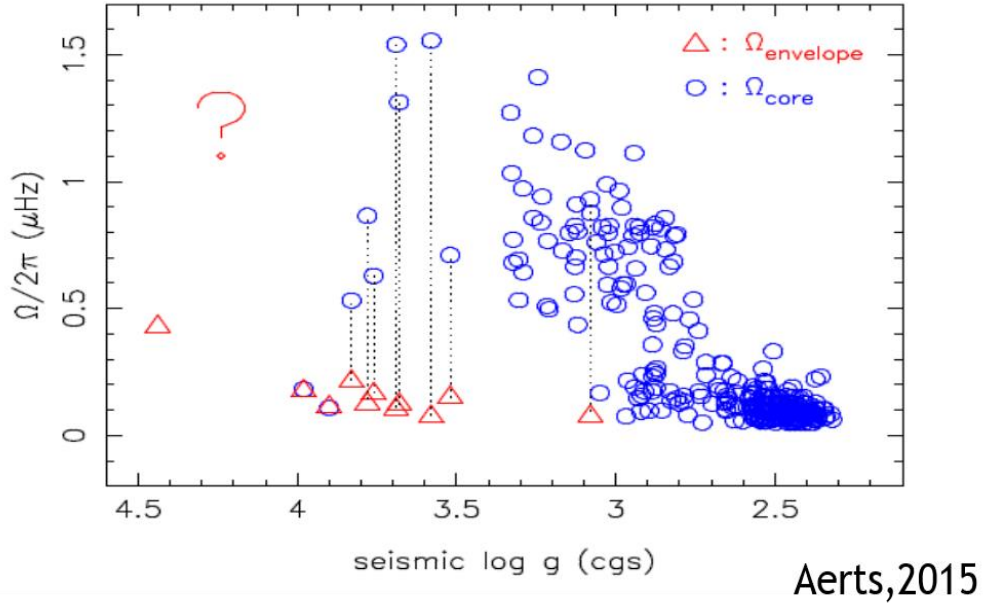


## 5. KEPLER YILDIZLARINDA ASTEROSİSMİK BULGULARA GÖRE İÇ DÖNME ÖZELLİKLERİ

Yıldız içyapısı ve fiziğini anlamamız için en iyi yollardan birisi farklı kütle ve farklı dönme profillerine sahip yıldızlar üzerinde asterosismik yöntemlerin uygulanmasıdır. Gerçekten de yakın zaman kadar yıldız evrimi boyunca iç dönme frekansı  $\Omega(r)$  ölçülemiyordu. Bunun anlamı yıldızın doğumundan itibaren tüm oluşum süreçleri içinde sahip olduğu açısal momentum esasen bilinmiyordu. Çok az anlayabildiğimiz yıldız-disk etkileşimi, yıldız rüzgarları, er yıldız oluşum süreçleri ve yıldızın büzülme evreleri ile yıldızların dönme profilleri ile ilgili sadece basit fikirlerimiz olabilirdi. Açısal momentumun yıldız içindeki dağılımı çok önemlidir ve pratikte bu dağılımı yorumlamak oldukça güçtür. Asterosismoloji  $\Omega(r)$ 'nin koşullarını belirleyebildiğimiz en iyi yöntemdir. Yapılan gözlemler ve incelenen p-modundaki zonklamalar (*Yıldız içinde oluşan dalgalar için iki kuvvet dalgalarının sürekliliği için başrol oynar. Bu kuvvetler basınç(p-mod) ve çekim (g-mod) olarak adlandırılır.*) ile birlikte  $\Omega_{core}/\Omega_{env}$  değeri hakkında bilgi ediniliyor.

Kepler uydusunun 2 yıllık gözlemlerinden sonra birçok kırmızı dev üzerinde çalışan Beck et al. (2012) yarıma özelliklerini,  $\Omega(r)$  için kısıtlar türetmek için kullandı. Bu sırada birçok kırmızı dev kapsamlı bir şekilde analiz edildi (Mosser et al., 2012). Bu yazarlar m-mod zonklamaların direk olarak özek dönmesini belirlemede büyük rol oynadığını gösterdi. Şu an özek dönmesi Mosser et al. (2012) tarafından belirlenmiş yüzlerce altdev ve kırmızı dev yıldızına sahibiz. Şekil 5.1'de 0.7 ile 3.0  $M_{\odot}$  kütleli yıldızların dönme frekansları sismik yollarla hesaplanmıştır. Bu veriler yıldız evrimine yeniden ışık tutuyor.

Bu bölümde bu çalışmanın da ilham kaynağı olan literatürde yayınlanan özellikle Kepler yıldızlarının ve teorik modelleme çalışmalarının sonuçları ele alındı. Yıldız evrimi kabaca incelendiğinde yıldızın özek bölgesinin daha hızlı dönmesi olağan bir durumdur. Fakat özellikle asterosismoloji alanında yapılan çalışmalar ile özek bölgesinin dış katmanlara göre 10 kata kadar hızlı döndüğü görülmüştür (Paul et al. 2012). Bu sonuç bilimsel anlamda heyecan verici bir durumdur. Yıldız içyapısı ve evrimini daha iyi anlama isteğimiz sebebiyle açısal momentum kavramının tekrardan incelenme gereksinimi duyulmuştur.



**Şekil 5.1** Yüzey çekimleri ( $\log g$ ) sismik olarak hesaplanan  $0.7-3 M_{\odot}$ 'lik yıldızların özek dönme frekansları gösterimi. Bu frekanslar yıldızların kabaca evrimsel sürecini ifade eder. Hata payları kullanılan sembollerin boyutlarından küçüktür. En soldaki üçgen Güneş'in dış katmanlarına aittir. Güneşin özeğinin dönmesi şuan için hesaplanabilir değildir. Noktalarla birleştirilmiş semboller aynı yıldız aittir. Şekil Mosser et al. (2012), Deheuvels et al. (2012,2014), Beck et al. (2014), Kurtz et al. (2014) ve Saio et al. (2015) yayınlarındaki veriler toplanarak oluşturulmuştur (Aerts, 2015).

### 5.1 KIC 9244992

Kepler uydusunun gözlem verileri kullanılarak F tayf türü bir yıldız olan KIC 9244992 yıldızının asterosismoloji ile dönme profili elde edilmiştir (Saio, 2014). Yapılan çalışmada yıldızın özekten yüzeye kadar frekans verileri kullanılmıştır.

$1.45 M_{\odot}$  kütlesine sahip olan yıldız anakol evresinin sonralarına yaklaşmıştır. Özektaki H bolluğu %1 mertebindedir. Asterosismik yöntemlerle yapılan çalışmanın sonuçlarına göre yıldızın özek bölgesi ortalama bir tam turu 64 günde tamamlarken yüzeye yakın bölgeler 66 gün civarında tamamlar. Bu ve buna benzer sonuçlar gösteriyor ki A-F tayf türü aralığında açısal momentum aktarımı teorik formüllere göre çok daha güçlüdür. Bu sebeple açısal momentum taşınımı için yeni mekanizmalar geliştirilmesi gereklidir.

### **5.2 KIC 11145123**

A tayf türü yıldız olan KIC11145123 bir anakol yıldızdır. KIC11145123'ü diğer yıldızlardan ayıran en önemli özellik yıldızın dış katmanlarının özekten çok az da olsa hızlı dönmesidir. Asterosismik yöntemlerle hesaplanan dönme profili neredeyse katı cisim dönmesine eşdeğerdir. Böylesine bir dönme profilinin oluşması için çok güçlü açısal momentum transfer mekanizmalarının var olduğu düşünülmektedir (Kurtz, 2014).

### **5.3 KIC 8366239**

Asterosismoloji alanında en çok heyecan uyandıran yıldızlardan biridir. Yıldız özeğinin dış katmanlara göre hızlı dönmesi zaten beklenen bir durumdur. Fakat söz konusu yıldız için, özek dış zarftan yaklaşık 10 kat daha hızlı dönüyor. Bu sonuç beklenmiyordu. Daha sonrasında da bu açısal momentum taşınımı için gerekli mekanizmalar üzerinde çalışmalar başladı ve devam ediyor. Şu an için yapılan çalışmalardan en çok göze çarpanlar; Eggenberger et al. (2012), Küker and Rüdiger (2012) ve Beck et al. (2012).

### **5.4 KIC 10526294**

KIC10526294 yıldızı için yapılan asterosismik çalışmalarda 19 adet frekans ayrılması kullanılmıştır. Bu sayede 19 farklı katmanın dönme oranları hesaplanabilmiştir. Bu yıldızı diğerlerinden farklı kılan özelliği ise dış zarfta birbirine ters dönen katmanlarının olduğuna dair ipuçları vardır (Aerts C., 2015, yazılı görüşme). Bu iddia şu an bildiğimiz fizik kuralları ile çelişmektedir. Bu sebeple henüz kabul görmemiş olsa da önümüzdeki yıllarda yapılacak çalışmalar ile aydınlanacağı kesindir.



## 6. AÇISAL MOMENTUM ÜZERİNE HESAPLAMALAR

Bu çalışma kapsamında yıldızların doğumlarından ölümüne kadar katman katman açisal momentum değişiminin incelenmesini hedefleyen bir bilgisayar programı yazıldı. Program kapsamında açisal momentum taşınımı için Jean Paul Zahn'ın eşitliği (Maeder and Zahn, 1998) kullanıldı;

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho r^2 \bar{\Omega})_r = \frac{1}{5r^2} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r^4 \bar{\Omega} U_2(r)) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(\rho \mathbf{v} r^4 \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial r}) = f \quad (6.1)$$

$f$  tanımlaması daha sonra yapılacak işlemlerde kolaylık sağlaması adına yapıldı.

### 6.1 Kuram

Açisal momentum aktarım hesabı için bölüm 4'de ayrıntılı olarak anlatılan açisal momentum taşınımı mekanizması meridyonel çevrim ile ilgili denklemlerden yararlanıldı. Denklem (6.1)'de bulunan  $U_2(r)$  hızı için Maeder and Meynet (2012) tarafından verilen, denklem (3.7) kullanıldı. Denklem (3.7)'de yer alan  $E_\Omega$  değeri denklem (3.8)'den hesaplandı. Programda cgs birim sistemi kullanıldı. Maeder and Meynet (2012) çalışmasında oluşturulan yıldız modellerinde, yıldızların başlangıçta katı cisim gibi döndüğü varsayımı yapılmıştır. Bu çalışma kapsamında ise oluşturulan modelde başlangıç dönme profili farklı kütleli iki yıldız ( $1.5 M_\odot$  ve  $2.4 M_\odot$ ) modelinin sıfır yaş ana kol modellerinden alındı (Yıldız, 2003). Bu sayede katı cisim gibi dönme varsayımından gelen hatalardan kaçınıldı. Denklemlerde yer alan parametrelerin ( $M, R, \rho, T, P, L, \Omega, I, J, \nabla_{ad}, \nabla_{rad}, c_p, \mu, \phi, \delta$ ) başlangıç değerleri için yine aynı modelden yararlanıldı.

### 6.2 Hesaplamalar

Denklem (6.1)'in sağ tarafında birinci terim  $\bar{\Omega}$ 'nın birinci dereceden, ikinci terim ise ikinci dereceden türevlerini içermektedir. Fiziksel niceliklerdeki küçük titremeler, bu türevlerden dolayı büyüyerek zikzaklar oluşturur ve hesaplamayı güçleştirir. Bu nedenle açisal hız profilinde düzleştirme (smoothing) yoluna gidildi. Düzleştirme işlemi için,

$$z_1 = 2.50686 \times 10^{-8} ,$$

$$z_2 = -5.19069 \times 10^{-9} ,$$

$$z_3 = -1.0567 \times 10^{-9} ,$$

$$z_4 = 1.669012 \times 10^{-7} ,$$

$$z_5 = -7.53353 \times 10^{-8}$$

olmak üzere

$$\bar{\Omega}_i = z_5 x^4 + z_4 x^3 + z_3 x^2 + z_2 x + z_1$$

denklemini kullanıldı. Bu işlemden sonra adım adım önce  $E_\Omega$  değeri hesaplandı ve  $U_2(r)$  değeri elde edildi. Uyguladığımız yöntemde  $\rho$  ve  $r$  değerlerinin zamanla değişmediğini varsaydık. Bu durumda  $\frac{\partial}{\partial t}(\rho r^2 \bar{\Omega})_r = \rho r^2 \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial t}$  olur. Her  $r$  değeri için  $\bar{\Omega}$  (denklemin sol tarafındaki) hesaplanmak üzere denklem (6.1)'de yalnız bırakılmıştır.

$$\Delta \bar{\Omega} = \frac{1}{\rho r^2} f \Delta t = \Omega_s - \Omega_b \quad (6.2)$$

Burada s alt indisi son anlamında ve b alt indisi başlangıç anlamındadır. Evrim sonunda oluşan açısal hızı hesaplamak için;

$$\Omega_s = \Omega_b + \Delta \bar{\Omega} \quad (6.3)$$

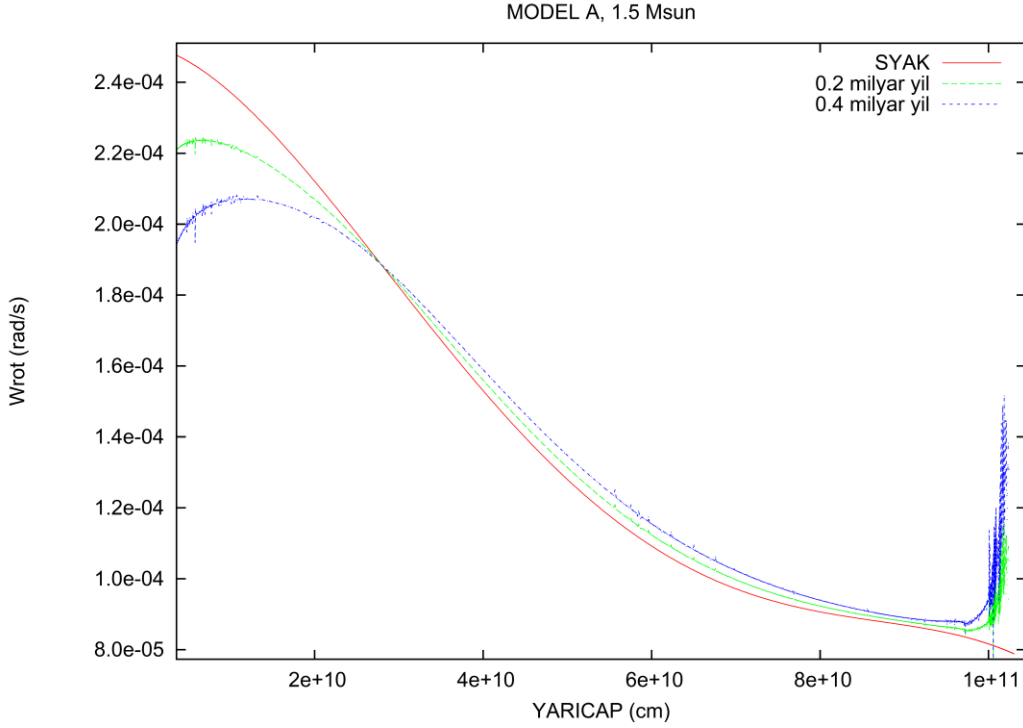
denklemini kullanılır. Denklem (6.2)'de  $\Delta t$  değerine keyfi olarak sırasıyla  $0.2 \times 10^8$ ,  $0.4 \times 10^8$ ,  $1.0 \times 10^8$  yıl değerleri verilerek  $\bar{\Omega}$ 'nin zamanla değişimi incelendi. Bu işlemler  $1.5 M_\odot$ ,  $1.48 R_\odot$  ve  $2.4 M_\odot$ ,  $1.79 R_\odot$ 'lik iki farklı yıldız modeli üzerinde yapıldı ve sonuçlar bir sonraki başlık altında incelenmiştir.

### 6.3 Sonuçlar

Bu çalışma içerisinde de birkaç farklı bölümde vurgulandığı üzere; Yıldızların merkeze doğru çöken katmanlarının beklenen dönme hızından daha yavaş ve aynı zamanda genişleyen bölgelerinin de beklenenden daha hızlı döndüğü görülmüştür. Bunun anlamı yıldızın merkezinden yüzeyine bir açısal momentum

taşınımı olduğudur. Bu sebeple taşınımın sebep olan mekanizmaların modellenmesi gerçek bir ihtiyaçtır. Bu amaç için meridyonel çevrim mekanizması kullanılarak açısal momentum taşınımının yıldız içindeki durumu iki farklı model (MODEL A ve MODEL B) için incelendi.

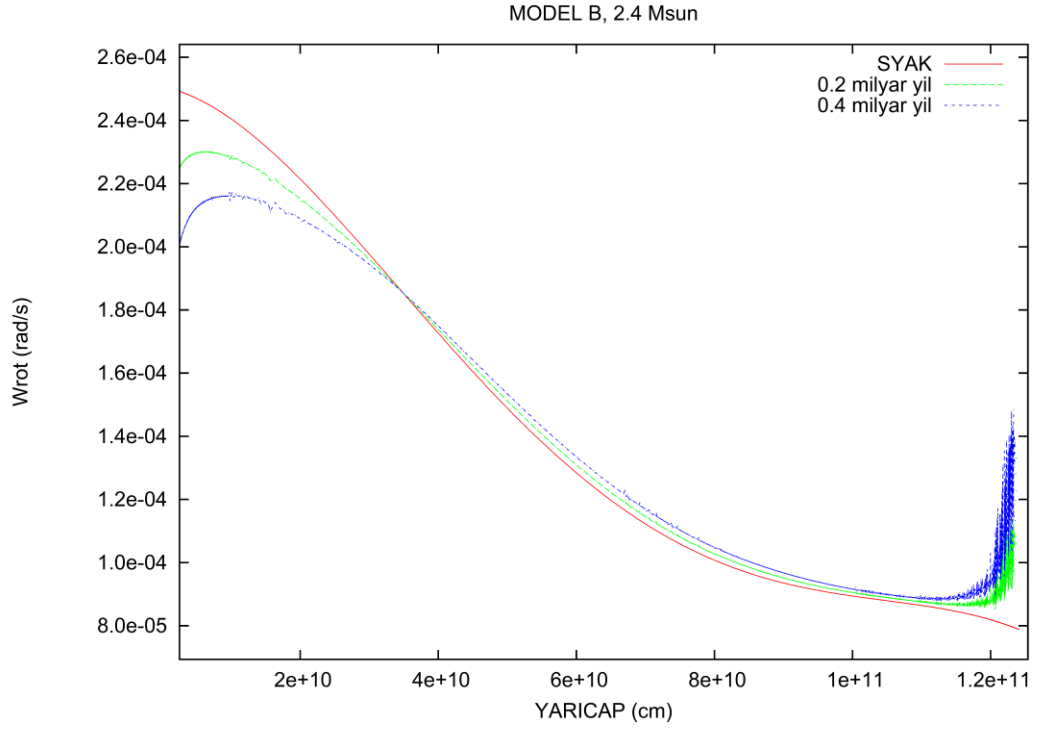
Model A ( $M=1.5M_{\odot}$ ) çıktısı Şekil (6.1) ile verilmiştir. Elde edilen grafiğin yatay eksenini yıldızın yarıçapını, dikey eksenini ise açısal hızı ifade eder. Grafiğin yarıçapa göre sürekli bir azalma eğilimi göstermesi SYAK (sıfır yaş ana kolu) modellerinde yıldızların merkez bölgelerinin dış katmalara göre daha hızlı dönmesinden kaynaklanmaktadır. Grafikte yer alan kırmızı çizgi yıldızın SYAK'na oturduğu zamandaki dönme profilini gösterir. Yeşil ve mavi çizgiler ise sırasıyla yıldızın SYAK'tan itibaren  $0.2 \times 10^8$  ve  $0.4 \times 10^8$  yıl evrimleştikten sonraki dönme profilidir. Her üç çizginin kesiştiği noktada açısal hız sabittir,  $\Delta\Omega/\Delta t = 0$ . Bu nokta yıldızın merkezi ile dış katmanları arasında bir sınır görevi görmektedir. Yıldızın merkezinden bu noktaya kadar olan bölgede, yıldız evrimleştikçe, açısal hızda bir azalma görülür. Bunun anlamı bu bölgeden dış katmanlara açısal momentum aktarıldığıdır. MODEL A için bu nokta %27 lik yarıçapa denk gelmektedir. Bu yarıçap içindeki kütle ise toplam kütlelerin %70'idir. Şekil (6.1)'de çizilen grafikte görüldüğü üzere yıldız yüzeyinde meydana gelen dikleşme durumu dikkat çekicidir. Bu durum, uyguladığımız yöntemde yüzeyden açısal momentum kaybının göz ardı edilmesinden kaynaklanıyor.



**Şekil 6.1** Model A,  $1.5 M_{\odot}$  kütesine sahip yıldızın evrim sürecinde merkezden yüzeye oluşan farklı dönme hızlarının gösterimi. Kırmızı renkli çizgi sıfır yaş anakola oturduğu zamandaki  $\Omega$ 'yı ifade ediyor. Yeşil ve mavi renkler sırasıyla yıldızın  $0.2 \times 10^8$  ve  $0.4 \times 10^8$  yıllık evrim sürecinden sonraki dönme profilini ifade ediyor.

Yıldız yüzeyi başlangıçta yaklaşık olarak 102.65 km/s açısal hıza sahiptir.  $0.4 \times 10^8$  yıllık evrim sonunda bu hız yaklaşık 154.37 km/s mertebesine erişmektedir (Çizelge 6.1). Yıldızın ana kol ömrünün milyar yıl mertebesinde olduğu düşünülürse, kısa zamanda meydana gelen bu hız artışı aynı şekilde devam eder ise anakol sonunda kabul edilemez değerlere ulaşır. O halde yıldız, ana kol evrimi boyunca sürekli açısal momentum kaybediyor ya da evrimin bir noktasında açısal momentum aktarımı sonlanıyor çıkarımı yapabiliriz.

Model B ( $M=2.4M_{\odot}$ ) çıktısı Şekil (6.2) ile verilmiştir. Elde edilen grafiğin eksenleri şekil (6.2) ile aynıdır. Model B'de de yıldızın iç katmanları dış katmanlara göre daha hızlı dönmektedir. Grafikteki kırmızı çizgi SYAK'taki dönme profilini temsil ediyor. Yeşil ve mavi çizgiler ise sırasıyla  $0.2 \times 10^8$  ve  $0.4 \times 10^8$  yıllık



**Şekil 6.2** Model B,  $2.4 M_{\odot}$  kütleli yıldızın evrim sürecinde merkezden yüzeye oluşan farklı dönme hızlarının gösterimi. Kırmızı renkli çizgi yıldızın sıfır yaş anakola oturduğu zamandaki  $\Omega$ 'yı ifade ediyor. Yeşil ve mavi renkler sırasıyla yıldızın 0.2 ve 0.4 milyar yıllık evrim sürecinden sonraki dönme profilini ifade ediyor.

**Çizelge 6.1** Model A ve Model B için elde edilen sonuçlar.

MODEL	Yüzey Açısal Hızı (km/s)		$\Delta\Omega/\Delta t = 0$ Noktası	
	Başlangıç	$0.4 \times 10^8$ yıl	KÜTLE	YARIÇAP
<b>A</b>	102.65	154.37	%70	%27
<b>B</b>	97.82	183.03	%70.8	%28

evrim sonucunda oluşan dönme profilleridir. Model B için  $\Delta\Omega/\Delta t = 0$  noktası yıldızın %28'lik yarıçapına karşılık gelmektedir. Bu yarıçap içindeki kütle ise toplam kütlelerin %70.8'idir. Şekil (6.2) ile verilen grafikte görüldüğü üzere yıldız yüzeyindeki dikleşme durumu yine modelde yüzeyden açısal momentum kaybının

göz ardı edilmesinden kaynaklanıyor olabilir. Model B yıldızının başlangıçta yüzey açısal hızı 97.82 km/s olarak hesaplandı.  $0.4 \times 10^8$  yıllık evrim sonunda bu değer 183.03 km/s mertebesine yükseliyor. Kısa zaman dilimi içerisinde meydana gelen bu artışın ana kol evrimi boyunca devam ettiği düşünülürse açısal hız çok büyük değerlere ulaşacaktır. Sonuç olarak çok yüksek değerlerin oluşması fiziksel olarak imkansızdır. Bu sebeple daha farklı taşınım mekanizmalarının olma ihtimali göz önüne alınmalıdır. Hatta meridyonel çevrimin aksine dış katmanlardan iç katmanlara açısal momentum taşınımı dahi olabilir. Literatürde yer alan farklı dönme profilleri (KIC 924492, KIC 11145123, KIC 8366239, KIC 10526294 vb.) açısal momentum taşınımı için çok daha farklı mekanizmaların olduğunu kanıtlar.

## 7.SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Açısal momentum problemleri günümüzde hala tam olarak anlaşılammış durumdadır. Bu sebeptendir ki açısal momentum üzerine var olan problemlerin çözümlenmesi ve anlaşılması insanoğlu adına uzun bir süreçtir. Teorik olarak söylendiği gibi tüm evren kararlı bir yapıya ulaşmak adına birçok kararsızlık zinciri barındırmaktadır. Bu tez kapsamında yıldızların içyapılarında meydana gelen açısal momentum taşınımına neden olan kararsızlıklar ve yıldızlarda gözlenen farklı açısal momentum dağılımları incelenmiştir.

Geri tayf türü yıldızlar için önerilen mekanizmalar günümüzde özellikle uzay konuşlu Kepler ve CoRoT uydularının gözlem verileri ile birlikte desteklenmektedir. Ön tayf türü yıldızlar için ise literatürde sadece modellemeler mevcuttur. Açısal momentum taşınımı için önerilen kararsızlık mekanizmaları sadece geri tayf türü yıldızlarda çalışmaktadır. Son yıllarda gelişen asterosismoloji ile birlikte tüm yıldız türlerinde meydana gelen açısal momentum taşınım süreçlerinin modellenmesi beklenmektedir.

Tez kapsamında Eddington (~1960) zamanından beri ele alınan meridyonel çevrim mekanizmasının Jean Paul Zahn tarafından elde edilen matematiksel ifadesinin günümüzdeki formuna ulaşana dek süreçler incelenmiştir. Bu sürece yatay türbülansın, makaslama kararsızlığının ve çekim dalgalarının etkileri incelenmiş ve denklemlerle ifade edilmiştir. Yıldız iç yapısının temel dinamiklerinden biri olan açısal momentumun hesaplanmasında mevcut mekanizmaların yetersiz olduğu aşıkardır. Açısal momentum taşınımında etkili olan atomik boyutlarda meydana gelen difüzyon süreçleri için yapılan bazı varsayımlarda yapılan hatalara vurgu yapılmıştır.

Yıldızlarda açısal momentum dağılımı o kadar çok farklılık barındırmaktadır ki, özeğin dış katmanlara göre 10 kata kadar hızlı döndüğü KIC8366239 yıldızının (Beck et al., 2012) yanında, dış katmanların özekten az da olsa hızlı döndüğü gözlenen KIC11145123 yıldızının (Kurtz, 2014) varlığı hiç şüphesiz ki hayret verici bir durumdur. Son olarak KIC10526294 için yapılan hesaplamalarda yıldızın dış zarfı içinde birbirine göre ters dönen katmanların varlığına dair ipuçları bulunmuştur (Aerts C., 2015, yazılı görüşme). Bu durum şu

an bilinen fizik kurallarına aykırı bir durumdur. Bu konuda yapılan çalışmalar henüz nihai bir sonuca varamamış olsa dahi, böylesine bir önerme gerçek anlamda ilgi çekicidir.

Klasik yıldız modellemeleri başlangıç koşullarında yıldızların katı cisim gibi döndüğünü kabul etmektedir. Elde edilen sonuçlar göz önüne alındığında bu varsayım yanıltıcı sonuçların çıkmasına neden olmaktadır. Bu sebeple yıldız modellemelerinin yıldız evriminin bir kısmını kapsamak yerine tüm yıldız yaşamını kapsamaması gerçek bir çözümdür.

Asterosismolojik yöntemlerle hesaplanan yıldızların farklı katmanlarının dönme oranları ile daha genel çıkarımlar yapılması beklenmektedir. Şekil (5.1)'de verilen grafiğin bu çıkarımlara öncülük etmesi beklenmektedir.

Şekil (6.1) ve (6.2) ile elde edilen sonuçlar meridyonel çevrimin yıldız içinde geçerli bir mekanizma olduğunun kanıtıdır. Fakat meridyonel çevrimin toplam açısal momentum taşınımında ki payı nedir bilmiyoruz. Bunun yanında hala anlayamadığımız ya da tasvir edemediğimiz mekanizmaların bulunması muhtemeldir.

## KAYNAKLAR DİZİNİ

- Aerts, C.**, The age and interior rotation of stars from asteroseismology, 2015, arXiv:1503.06690v2
- Beck, P. G., et al.**, 2012, Constraining the core-rotation rate in red giants stars from Kepler space photometry, AN, vol.333, issue 10, p.967
- Beck, P. G.**, 2012, Fast core rotation in red-giants stars as revealed by gravity dominated mixed modes, Nature, Volume 481, Issue 7379, pp. 55-57
- Bouvier, J.**, 2013, Improved angular momentum evolution model for solar-like stars, arXiv:1306.2130
- Canuto, V. M.**, 2002, Critical richardson numbers and gravity waves, A&A, v.384, p.1119-1123
- Charbonneau, P.**, 1992, Modeling stellar angular momentum evolution(Invited review), ASP Conference Series, vol. 26, p. 416.
- Deheuvels, S., et al.**, 2012, Seismic evidence for a rapidly rotating core in a lower giant branch star observed with kepler, ApJ, volume 756, issue 1, article id. 19, 16 pp.
- Deheuvels, S., et al.**, 2014, Seismic constraints on the radial dependence of the internal rotation profiles of six Kepler subgiants and young red giants, A&A, volume 564, id.A27, 24 pp.
- Eggenberger, P.**, 2012, Angular momentum transport in stellar interiors constrained by rotational splittings of mixed modes in red giants, A&A 544, L4
- Fuller, J., Lecoanet, D., Cantiello, M., Brown, B.**, 2014 Angular momentum transport via internal gravity waves in evolving stars, Draft version, September 25
- Kurtz, D. W.**, 2014 Asteroseismic measurement of slow, nearly-uniform surface-to-core rotation in the main sequence A star, KIC 11145123, MNRAS, vol.444, issue 1, p.102-116
- Küker, M., Rüdiger, G.**, 2012 Differential rotation and meridional flows of K giants: predictions from mean field theory, AN, vol.333, issue 10, p.1028

**KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)**

- Maeder, A.**, 1995, On the richardson criterion for shear instabilities in rotating stars, A&A, v.299,p.84
- Maeder, A., Meynet, G.**, 1997, Stellar evolution with rotation. I. The computational method and the inhibiting effect of the  $\mu$ -gradient, A&A, v.321,p.465-476
- Maeder, A., Zahn, J. P.**, 1998, Stellar evolution with rotation: III.Meridional circulation with  $\mu$ -gradient and non-stationarity, A&A, 334, p 1000-1006
- Maeder, A.**, 1999, Stellar evolution with rotation IV: von Zeipel's theorem and anisotropic losses of mass and angular momentum, A&A, v.347, p.185-193
- Maeder, A., Meynet, G.**, 2002, Stellar evolution with rotation. VIII. Models at  $Z=10^{-5}$  and CNO yields for early galactic evolution, A&A, v.390, p.561-583
- Maeder, A.**, 2003, Stellar rotation: Evidence for a large horizontal turbulence and its effects on evolution, A&A, v.399, p.263-269
- Maeder, A.**, 2009a, Modeling massive stars with rotation: the case of nitrogen enrichments, arXiv:0810.0657v1
- Maeder, A.**, 2009b, Physics, Formation and Evolution of Rotating Stars:, Astronomy and Astrophysics Library. ISBN 978-3-540-76948-4, Springer Berlin Heidelberg, 2009
- Maeder, A., Meynet, G.**, 2011, Rotating massive stars through the ages, with applications to WR stars, pop III stars and gamma ray burnst, arXiv:1109.6171
- Maeder, A., Meynet, G.**, 2012, Rotating massive stars: from first stars to gammaray bursts, RvMP, vol.84, issue 1, pp. 25-63
- Maeder, A., Meynet, G.**, 2013, The thermoline, richardson, rayleigh-taylor, solberg-hoiland, and GSF criteria in rotating stars, A&A, volume 553, 7pp

**KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)**

- Mathis, S., Palacios, A., Zahn, J.P.,** 2004, On shear-induced turbulence in rotating stars, *A&A*, v.425, p.243-247
- Mathis, S., Zahn, Z. P.,** 2004, Transport and mixing in the radiation zones of rotating stars. I. Hydrodynamical processes, *A&A*, v.425, p.229-242
- Montalban, J., Noels, A.,** 2013, What aspects of stellar physics are we trying to understand through seismic investigations?, 2013ASPC..479..435N
- Mosser, M., Goupil, M. J., Belkacem, K.,** 2012, Spin down of the core rotation in red giants, *A&A*, 548, A10
- Mosser, B. et al.,** 2012, Spin down of the core rotation in red giants, *A&A*, vol. 548, id.A10, 14 pp.
- Mosser, M., Goupil, M. J., Belkacem, K.,** 2013, Transport of angular momentum in solar-like oscillating stars, *Proceeding IAU Symposium No.301*
- Palacios, A.,** 2013, Effect of internal gravity waves on the transport of angular momentum during the pms, SF2A
- Pinsonneault, M. et al.,** 2010, Angular momentum transport in solar-type stars: testing the timescale for core-envelope coupling, arXiv:0911.1121v1
- Saio, H.,** 2014, Asteroseismic measurement of slow, nearly-uniform surface-to-core rotation in the main sequence F star KIC 9244992, *MNRAS*, volume 447, issue 4, p.3264-3277
- Talon, S., Zahn, J. P.,** 1997, Anisotropic diffusion and shear instabilities, *A&A*, v.317, p.749-751
- Talon, S.,** 2008, Transport processes in stars: diffusion, rotation, magnetic fields and internal waves, *EAS*, vol.32, 2008, pp.81-130
- Yıldız, M.,** 2003, Modeling dissimilar components of the eclipsing binary EK Cep: Does the primary star have a rapidly rotating core?, *A&A*, V.409, p.689-695
- Zahn, J. P.,** 1992, Circulation and turbulence in rotating stars, *A&A*, vol. 265, no.1, p. 115-132

## **ÖZGEÇMİŞ**

Mehmet ÖZDİL T.C vatandaşı olup 1990 DENİZLİ, Merkez doğumludur. İlköğretimini İzmir’de Fevzi Özakat İlköğretim Okulu’nda, lise eğitimini İzmir’de Nevvar Salih İşgören Lisesi yabancı dil ağırlıklı programında tamamladıktan sonra 2008 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Astronomi ve Uzay Bilimleri Bölümü’ne kayıtlanmış ve burada lisans eğitimini tamamladıktan sonra 2013 yılında yine Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Astronomi ve Uzay Bilimleri Anabilimdalı Astrofizik Bilim Dalında Yüksek Lisans programına kayıtlanarak burada eğitimine devam etmektedir.