

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İDEALİSTİK ESNEK GAMMA HALKALARINDA BULANIK İZOMORFİZMA
TEOREMLERİ**

ELİF AKTAŞ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
DOÇ. DR. BAYRAM ALİ ERSOY**

İSTANBUL, 2015

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**İDEALİSTİK ESNEK GAMMA HALKALARINDA BULANIK İZOMORFİZMA
TEOREMLERİ**

Elif AKTAŞ tarafından hazırlanan tez çalışması 05.08.2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Bayram Ali ERSOY
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Bayram Ali ERSOY
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Ünsal TEKİR
Marmara Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Erdoğan Mehmet ÖZKAN
Yıldız Teknik Üniversitesi

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen danışmanım Sayın Doç. Dr. Bayram Ali ERSOY'a ve Arş. Gör. Serkan ONAR'a teşekkür ederim. Ayrıca manevi desteklerini eksik etmeyip her zaman yanımda olan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Temmuz, 2015

Elif AKTAŞ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ	vi
ÇİZELGE LİSTESİ	vii
ÖZET	ix
ABSTRACT	ix
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	1
1.3 Hipotez	2
BÖLÜM 2	
TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1 Klasik Cebirde Grup Yapısı	3
2.2 Klasik Cebirde Grup Homomorfizması Yapısı ve Temel Teoremleri	6
2.3 Klasik Cebirde Halka Yapısı	9
2.4 Klasik Cebirde Halka Homomorfizması Yapısı ve Temel Teoremleri	10
2.5 Klasik Cebirde İdeal Yapısı	11
BÖLÜM 3	
BULANIK KÜMEYE GİRİŞ	12
3.1 Bulanık Kümeler	12
3.2 Bulanık Alt Grup, Bulanık Alt Halka ve Bulanık İdealler	14
BÖLÜM 4	
ESNEK KÜMELER	18
4.1 Esnek Kümeler	18
4.2 Esnek Halkalar	29

4.3	İdealistik Esnek Halkalar	36
4.4	Esnek Halkalar için İzomorfizma Teoremleri	38
4.5	Esnek Halkaların Bulanık İdealleri ve Bulanık İzomorfizma Teoremleri ...	40
BÖLÜM 5		
GAMMA HALKALARI		46
5.1	Gamma Halkaları.....	46
BÖLÜM 6		
ESNEK GAMMA HALKALARI		51
6.1	Esnek Gamma Halkaları	51
6.2	İdealistik Esnek Gamma Halkaları	55
6.3	İdealistik Esnek Gamma Halkalarında İzomorfizma Teoremleri.....	57
6.4	Asal İdealistik Esnek Gamma Halkaları	61
BÖLÜM 7		
7.1	İdealistik Esnek Gamma Halkalarında Bulanık İdealler.....	64
7.2	İdealistik Esnek Gamma Halkalarında Bulanık İzomorfizma Teoremleri .	73
BÖLÜM 8		
SONUÇ VE ÖNERİLER		87
KAYNAKLAR.....		88
ÖZGEÇMİŞ.....		91

SİMGE LİSTESİ

$<$	Alt grup
$\triangleleft$	Normal alt grup
$\wedge$	Minimum veya infimum
$\vee$	Maksimum veya supremum
μ	Bulanık(fuzzy) alt küme
$[0,1]^X$	X ' in bulanık kuvvet kümesi
$1_Y(x)$	Karakteristik fonksiyon
$\chi_Y(x)$	Karakteristik fonksiyon
$a_y(x)$	$[0,1]$ – singleton
y_a	$[0,1]$ – singleton
$\mu(X)$	μ ' nün görüntüsü
$im(\mu)$	μ ' nün görüntüsü
μ^*	μ ' nün destekleyicisi
μ_a	μ ' nün seviye alt kümesi
$f(\mu)$	μ ' nün f altındaki görüntüsü
$f^{-1}(\nu)$	ν ' nin f altındaki ters görüntüsü
$\mu \circ \nu$	μ ve ν 'nin nokta çarpımı
μ^{-1}	μ ' nün tersi
$L(G)$	G grubunun tüm bulanık alt gruplarının kümesi
μ_*	$\mu_* = \{x \in G \mid \mu(x) = \mu(0)\}$
$LI(R)$	R halkasının tüm bulanık ideallerinin kümesi
0_M	M 'nin sıfır elemanı
$\nu _{\nu^*}$	ν 'nin ν^* 'a kısıtlanması
$\mu \times \sigma(x, y)$	μ ve σ 'nın kartezyen çarpımı
G_μ	$G_\mu = \{g \in G \mid \mu(g) = \mu(0)\}$
$P^*(A)$	A kümesinin tüm alt kümelerinin kümesi
$F^*(A)$	A kümesinin boştan farklı tüm bulanık alt kümelerinin kümesi

$F(X)$	$X \rightarrow [0,1]$ e tüm bulanık kümeler
μ_A	A bulanık kümesi
$\mu_A(x)$	x 'in A 'ya ait olma derecesi
$f^{-1}(B)$	B bulanık kümesinin ters görüntüsü
$\mu_{f^{-1}}(B)$	B bulanık kümesinin ters görüntüsünün üyelik fonksiyonu
G_t	Seviye alt kümesi
$P(U)$	Kuvvet Kümesi
(F, A)	Esnek Küme
$\neg E$	Değil küme
$(F, A)^c$	Esnek kümenin tümleyeni
$\tilde{\wedge}$	Esnek gamma halkalarında "VE" operatörü
$\tilde{\vee}$	Esnek gamma halkalarında "VEYA" operatörü
$\tilde{\cap}$	Esnek gamma halkalarında kesişim operatörü
$\tilde{\cup}$	Esnek gamma halkalarında birleşim operatörü
$\tilde{\triangleright}$	Esnek halkalarda ideal
$\tilde{\triangleright}_{\Gamma}$	Esnek gamma halkalarda ideal
$\sim_{\Gamma}$	Esnek gamma halkalarda homomorfik görüntü
$\cong_{\Gamma}$	Esnek gamma halkalarda izomorfik görüntü
(f, g)	Esnek gamma halka homomorfizması
μ_x	$\mu_x = \{y \in R \mid x \sim_{\Gamma} y \in R\}$ olacak şekilde x 'i içeren denklik sınıfı
$(F / \mu, A)$	μ tarafından indirgenmiş (F, A) 'nın bir esnek gamma bölüm halkası
R / μ	$R / \mu = \{\mu_x \mid x \in R\}$ R 'deki tüm denklik sınıflarının kümesi
R_{μ}	$R_{\mu} = \{x \in R \mid \mu(x) = \mu(0)\}$

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 4. 1 Esnek kümenin çizelge gösterimi	20
Çizelge 4. 2 $+$ işlemine göre cayley çizelgesi	31
Çizelge 4. 3 $\bullet$ işlemine göre cayley çizelgesi	31

İDEALİSTİK ESNEK GAMMA HALKALARINDA BULANIK İZOMORFİZMA TEOREMLERİ

Elif AKTAŞ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Bayram Ali ERSOY

Bu tezde klasik cebirdeki izomorfizma kavramı bulanık cebirde incelenmiştir. Birinci bölümde literatür özeti verilmiştir. İkinci bölümde klasik cebirdeki grup, halka, homomorfizma yapıları incelenmiş, ideal yapılarına yer verilmiştir. Üçüncü bölümde bulanık küme teorisine giriş yapılarak bulanık alt grup, bulanık alt halka, bulanık idealler incelenmiştir. Dördüncü bölümde esnek küme, esnek halka ve idealistik esnek halka ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiş, esnek halkalarda izomorfizma teoremleri ifade edilmiştir. Beşinci bölümde gamma halka yapısı incelenmiş ve örnekler ile açıklanmıştır. Altıncı bölümde esnek gamma halka, idealistik esnek gamma halka ve gamma izomorfizma teoremlerine yer verilmiştir. Yedinci bölümde idealistik esnek gamma halkalarında bulanık idealler; tanım, örnek ve teoremler yardımıyla açıklanmıştır. Son olarak ise idealistik esnek gamma halkaları için birinci, ikinci ve üçüncü bulanık gamma izomorfizma teoremleri ifade edilip ispatlanmış ve temel bazı sonuçlara ulaşılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Bulanık ideal, Esnek halka, Bölüm halkaları, Gamma halkaları, idealistik esnek gamma halkaları, Gamma homomorfizmaları, Bulanık gamma izomorfizma teoremleri.

FUZZY ISOMORPHISM THEOREMS OF IDEALISTIC SOFT GAMMA RINGS

Elif AKTAŞ

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Adviser: Assoc. Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY

In this thesis the concept of isomorphism of classical algebra is analyzed within the context of the fuzzy algebra. In the first chapter the literature is given. In the second chapter we gave the basic definitions related to classical algebra; groups, rings, homomorphism, ideal. Then in the third chapter; fuzzy set is defined and fuzzy subgroup, fuzzy subring, fuzzy subideals are investigated. In the fourth chapter some basic definitions and theorems are given about soft sets, soft rings, idealistic soft rings. Also it includes three soft isomorphism theorems. In the fifth chapter gamma rings are studied with definitions, theorems and instances. In the sixth chapter soft gamma rings, idealistic soft gamma rings are demonstrated together with definitions and theorems, also given isomorphism theorems for them. In the last chapter several theorems and definitions are given which are related to fuzzy ideals of soft gamma rings had been added. Fuzzy isomorphism theorems of idealistic soft gamma rings (first, second and third fuzzy gamma isomorphism theorems), their proofs and several basic conclusions had been given.

Keywords: Fuzzy ideals, Soft rings, Quotient rings, Gamma rings, Idealistic soft gamma rings, Gamma homomorphisms, Fuzzy isomorphism theorems.

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

1.1 Literatür Özeti

Molodstov [1] 1999 yılında esnek küme kavramını bilinen teorik yaklaşımların beraberinde getirdikleri sorundan arınmış, belirsizliklerle ilgili yeni bir araç olarak meydana getirmiştir. Esnek küme teorisi pürüzsüzlük fonksiyonları, Rieman integrasyonu, Perran integrasyonu, ölçme teori, oyun teori, karar verme gibi çok farklı alanlarda uygulamaya geçirilmiştir. Maji esnek kümeler [2,3,4] makaleleriyle yeni bir yön vermiştir. Chen [5,6,7] esnek kümelerin parametrisasyon indirgemesi için yeni bir tanım sunmuş ve bu tanımları rough kümedeki ilgili nitelik indirgemesi yapılarıyla karşılaştırmıştır. Aktaş [8] esnek küme teorisinin temel yapılarını çalışmış, kavramları grup teoriye uyarlamıştır. Bulanık ve rough kümelerle karşılaştırmış ve aralarındaki farkı açıklamak için çeşitli örneklerle baş vurmuştur. Belirsizliklerle ilgili küme teorisinin cebirsel yapıları bazı yazarlar tarafından çalışılmıştır. Jun [9,10,11] esnek kümeleri BCK/BCI cebirlerine uygulayıp temel kavramlarını oluşturmuş, özelliklerini araştırmış ve esnek yarı-halkaları incelemiştir. Jun, Öztürk ve Park [12, 13] ile birlikte Esnek WS-cebiri ve esnek kümenin halkalardaki uygulaması üzerine çalışmıştır. Feng [11,14] esnek yarı halkaların yapısını araştırmıştır. Ma [15] Γ – halkalar ve yarı halkaların tanımlarını incelemiştir. Liu [16,17,18] esnek halkaların özelliklerini ifade etmiş ve üç izomorfizma teoremini kurmuştur.

Bulanık küme kavramı ve bulanık işlemler Zadeh [19,20] tarafından tanıtılmış ve birçok bilimsel alanda yaygın olarak kullanılmıştır. Rosenfeld [21] 1971 yılında bu kavramı grup ve grupoid teoriye uygulamıştır. 1982 yılında Liu [22] bulanık alt halka ve bulanık

idealleri tanımlamış ve bunlar üzerinde çalışmalar yapmıştır. Literatürde bulanık cebirsel yapılarla ilgili bir çok makale vardır. Foster [23], 1979 yılında bulanık topolojik grupları incelemiştir. Das [24], 1981 yılında bulanık gruplar ve seviye alt grupları çalışmıştır. Akgül [25], 1988’de bulanık grupların bazı temel özelliklerini araştırmıştır. Dixit [26] 1992’de bulanık halka, Asaad ve Abou-Zaid [27] 1993 , Ersoy [28] 1999 yılında bulanık gruplar üzerine araştırmalar yapmıştır. Gupta [29] 2001, Ersoy [30] 2004, Keskin [31] 2006 yılında bulanık halkalarda genelleştirilmiş kartezyen çarpımı araştırmışlardır. Öztürk [32] bulanık Γ – halkalara yeni bir bakış açısı getirmiştir. Bulanık bölüm halkaları ve bulanık izomorfizmaların çeşitli yapıları Feng, Liu, Xiang ve Zhan [16,17,18] gibi araştırmacılar tarafından incelenmiştir.

1.2 Tezin Amacı

Bu çalışma klasik cebirdeki izomorfizma teoremleri, bulanık küme teorisi, esnek küme teorisi üzerindeki izomorfizma teoremleri arasındaki bağıntılarla ilgilidir. Esnek gamma halkalar ve bulanık idealler incelenerek idealistik esnek gamma halkalarında bulanık izomorfizma teoremlerini kurmak amaçlanmıştır. Bu çalışma, bu alanda araştırma yapmak isteyenlere temel kaynak teşkil edecek niteliktedir.

1.3 Hipotez

Bu çalışmada bulanık ideallerden faydalanılarak idealistik esnek gamma halkalarında bulanık izomorfizma teoremleri ifade edilip ispatlanmış ve temel bazı sonuçlar elde edilmiştir.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamızın içinde yer alan temel tanım ve teoremleri vereceğiz.

2.1 Klasik Cebirde Grup Yapısı

Tanım 2.1 G boştan farklı bir küme, $\circ$ da G üzerinde tanımlı bir ikili işlem olmak üzere, aşağıdaki aksiyomları sağlayan $(G, \circ)$ cebirsel yapısına grup denir.

(G1) Her $a, b \in G$ için $a \circ b \in G$ dir. (kapalılık özelliği)

(G2) Her $a, b, c \in G$ için $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ dir. (birleşme özelliği)

(G3) Her $a \in G$ için $a \circ e = a = e \circ a$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır. (birim elemanın varlığı)

(G4) Her $a \in G$ için $a \circ b = e = b \circ a$ olacak şekilde bir $b \in G$ vardır. (ters elemanın varlığı) [33].

Tanım 2.2 $(G, \circ)$ bir grup ve her $a, b \in G$ için $a \circ b = b \circ a$ (değişme özelliği) ise bu gruba değişmeli veya abelyen grup denir [33].

Tanım 2.3 $(G, \circ)$ bir grup ve H de G 'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer H kümesi G 'de tanımlanan $\circ$ işlemine göre bir grup oluyorsa H 'ye G 'nin bir alt grubu denir [33].

Tanım 2.4 Bir grubun kendinden ve birimden farklı bir alt grubuna öz alt grup denir [33].

Teorem 2.1 $(G, \circ)$ bir grup $\emptyset \neq H \subset G$ olsun. H 'nin bir alt grup olması için gerek ve yeter koşul

(i) $a, b \in H$ için $a \circ b \in H$ ve

(ii) $\forall a \in H$ için $a^{-1} \in H$ olmasıdır [33].

Teorem 2.2 $(G, \circ)$ grubunun, boş olmayan bir alt kümesinin, alt grup olması için gerek ve yeter koşul $\forall a, b \in H$ için, $a \circ b^{-1} \in H$ (veya $a^{-1} \circ b \in H$) olmasıdır [33].

Teorem 2.3 Bir grubun bir takım alt gruplarının arakesiti de bir alt gruptur [33].

Tanım 2.5 G bir grup ve H, K iki alt kümesi olsunlar.

$$HK = \{hk : h \in H, k \in K\} \quad (2.1)$$

ye H ile K kümelerinin çarpımı denir [33].

Teorem 2.4 $H, K; G$ 'nin alt grupları olsun. HK çarpımının da G 'nin alt grubu olması için gerek ve yeter koşul $HK = KH$ olmasıdır [33].

Tanım 2.6 G bir grup ve $H < G$ olsun. G de $\equiv$ bağıntısı,

$$a \equiv b(\text{mod } H) \Leftrightarrow ab^{-1} \in H \quad (2.2)$$

ile tanımlanır [33].

Tanım 2.7 $H < G$ alt grubuna göre Tanım 2.6 da tanımlanan $\equiv$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısına göre bir $a \in G$ elemanının sınıfı

$$\bar{a} = Ha = \{ha : h \in H\} \quad (2.3)$$

alt kümesidir. Ha 'ya, H alt grubuna göre a 'nın sağ denklik sınıfı denir [33].

Teorem 2.5 G bir grup ve $H < G$ olsun. $a \equiv b(\text{mod } H) \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$

ile tanımlı $\equiv$ bağıntısı G de bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısına göre $a \in G$ elemanının sınıfı $aH = \{ah : h \in H\}$ alt kümesidir. aH 'ye H alt grubuna göre a 'nın sol denklik sınıfı denir [33].

Sonuç 2.1 G bir grup ve $H < G$ olsun.

(i) G grubu H 'ye göre tanımlanan sağ (sol) denklik sınıflarının birleşimidir.

(ii) H 'ye göre tanımlanan herhangi iki sağ (sol) denklik sınıfları ya aynıdır ya da ayrıktır.

(iii) $\forall a, b \in G$ için $Ha = Hb \Leftrightarrow ab^{-1} \in H, aH = bH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$

(iv) $\forall a \in G$ için Ha, H ve aH sınıflarının eleman sayısı aynıdır.

(v) G grubunun, H 'ye göre tanımlanan sağ ve sol denklik sınıflarının sayısı aynıdır. Bu sayıya H alt grubunun G içindeki indeksi denir ve $(G : H)$ ile gösterilir [33].

Teorem 2.6 (Lagrange Teoremi) G bir grup ve $H < G$ ise

$$o(G) = (G : H) \cdot o(H) \quad (2.4)$$

Özel olarak, sonlu bir grubun her alt grubunun mertebesi grubun mertebesini böler [33].

Teorem 2.7 H ve K bir G grubunun sonlu iki alt grubu iseler,

$$o(HK) = \frac{o(H)o(K)}{o(H \cap K)} \quad (2.5)$$

dır [33].

Teorem 2.8 $N < G$ olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(i) $\forall a \in G, \forall x \in N$ için $axa^{-1} \in N$ dir.

(ii) $\forall a \in G$ için $aNa^{-1} \subset N$ dir.

(iii) $\forall a \in G$ için $aNa^{-1} = N$ dir.

(iv) $\forall a \in G$ için $aN = Na$ dır [33].

Tanım 2.8 Teorem 2.8'deki denklik koşullarından birini sağlayan G 'nin bir N alt grubuna normal alt grup denir ve $N \triangleleft G$ ile gösterilir.

Tanım 2.9 $N \triangleleft G$ olsun. G 'nin N 'ye göre sağ (veya sol) denklik sınıfı kümesi G/N ile gösterilir [33].

Teorem 2.9 $N \triangleleft G$ ise G/N 'de çarpma işlemi $\forall aN, bN \in G/N$ için

$(aN) \cdot (bN) = (ab)N$ ile tanımlansın. Bu çarpım kalan sınıflarından alınan a, b temsilcilerinden bağımsızdır [33].

Teorem 2.10 $N \triangleleft G$ ise G/N bir gruptur [33].

Tanım 2.10 $N \triangleleft G$ ise G/N grubuna, G 'nin N 'ye göre bölüm grubu denir [33].

Teorem 2.11 G sonlu bir grup ve $N \triangleleft G$ ise G/N de sonlu bir grup ve $|G/N| = \frac{|G|}{|N|}$ dir [33].

Not 1 G toplamsal bir grup ise değışmeli olacağından her alt grubu normal olur. Bu durumda her alt grubuna göre bölüm grubu tanımlanabilir. $N < G$ ve $a \in G$ ise a 'nın denklik sınıfı $a + N = \{a + x : x \in N\}$ dir [33].

Örnek 2.1 $N = \langle 4 \rangle = 4\mathbb{Z}$ alt grubuna göre $\mathbb{Z}/N$ bölüm grubu $\{N, 1+N, 2+N, 3+N\}$ dir. Çünkü herhangi bir $n \in \mathbb{Z}$ alındığında $n = 4q + r, 0 \leq r < 4$ olacak şekilde $\exists q, r \in \mathbb{Z}$ olur. Bu durumda n tam sayısı bu 4 sınıftan birine ait olur. Sonuç olarak $\mathbb{Z}/N = \mathbb{Z}_4$ dır [33].

Teorem 2.12 Bir grubun indeksi 2 olan altgrubu normaldir [33].

Teorem 2.13 $N \triangleleft G$ ve $N < K < G$ ise $N \triangleleft K$ ve $K/N < G/N$ dir. Eğer ayrıca $N < K \triangleleft G$ ise $K/N \triangleleft G/N$ dir. Tersine G/N 'nin alt grupları $N < K < G$ olmak üzere K/N şeklinde ve normal alt grupları da $N < K \triangleleft G$ olmak üzere K/N şeklindedir [33].

2.2 Klasik Cebirde Grup Homomorfizması Yapısı ve Temel Teoremleri

Tanım 2.11 $(G, \cdot)$ ve $(G', \cdot')$ iki grup ve $f : G \rightarrow G'$ bir fonksiyon olsun. Her $a, b \in G$ için $f(a \cdot b) = f(a) \cdot' f(b)$ ise f ye G 'den G' 'ye bir homomorfizma denir [33].

Tanım 2.12 $f : G \rightarrow G'$, her $a \in G$ için $(e, G$ grubunun birim elemanı ve e', G' grubunun birim elemanı olmak üzere) $f(a) = e'$ ise f G 'den G' 'ye bir homomorfizmadır. Bu homomorfizmaya aşık homomorfizma adı verilir [33].

Örnek 2.2 G reel sayıların toplamsal grubu ve G' sıfırdan farklı reel sayıların çarpımsal grubu olsun. $f(a) = 2^a$ ile tanımlı f fonksiyonu, her $a, b \in \mathbb{R}$ için $f(a+b) = 2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b = f(a)f(b)$ eşitliğini sağlar. Bu durumda f bir homomorfizmadır [33].

Teorem 2.14 $f : G \rightarrow G'$ bir homomorfizma olsun.

(i) $f(e) = e'$ ve

(ii) Her $a \in G$ için $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ dir [33].

İspat

(i) $a \in G$ ise $f(a) = f(ae) = f(a)f(e)$ ve G' bir grup olduğundan $f(a)^{-1}$ ile soldan çarpılarak $f(e) = e'$ elde edilir.

(ii) Her $a \in G$ için $f(a)f(a^{-1}) = f(aa^{-1}) = f(e) = e'$ olur. Her iki taraf $f(a)^{-1}$ ile çarpılırsa $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ elde edilir.

Teorem 2.15 $f : G \rightarrow G'$ bir homomorfizma olsun.

(i) G' nin her alt grubunun f altındaki görüntüsü, G' nin bir alt grubudur.

(ii) G' nin her alt grubunun f altındaki ters görüntüsü, G nin bir alt grubudur [33].

Teorem 2.16 $f : G \rightarrow G'$ bir homomorfizma olsun.

(i) f örten ise G nin her normal alt grubunun f altındaki görüntüsü, G' nin bir normal alt grubudur.

(ii) G' nin her normal alt grubunun f altındaki ters görüntüsü, G nin bir normal alt grubudur [33].

Tanım 2.13 $f : G \rightarrow G'$ bir homomorfizma ise

$$f^{-1}(e') = \{a \in G : f(a) = e'\} \quad (2.6)$$

kümesine f homomorfizmasının çekirdeği denir ve $\text{Çek}f$ ile gösterilir [33].

Teorem 2.17 $f : G \rightarrow G'$ homomorfizmasının birebir olması için gerek ve yeter koşul $\text{Çek}f = \{e\}$ olmasıdır [33].

Tanım 2.14 Örten ve birebir olan homomorfizmaya izomorfizma denir. Eğer G ve G' grupları arasında bir izomorfizma varsa bu gruplara izomorf gruplar denir ve $G \cong G'$ ile gösterilir [33].

Teorem 2.18 (Doğal Homomorfizma) G bir grup ve $N \triangleleft G$ ise $\forall a \in G$ için, $f(a) = Na$ ile tanımlı $f : G \rightarrow G/N$ bir örten homomorfizmadır ve $\text{Çek}f = N$ dir [33].

Teorem 2.19 $f : G \rightarrow G'$ bir homomorfizma olsun. Eğer f birebir ve örten fonksiyon ise f , G 'den G' 'ye bir izomorfizmadır ve $G \cong G'$ ile gösterilir. G 'den G' 'ye bir izomorfizma varsa bu izomorfizmaya otomorfizma adı verilir [34].

Teorem 2.20 $f : G \rightarrow G'$ bir izomorfizma olsun.

- (i) $f^{-1} : G' \rightarrow G$ bir izomorfizmadır.
- (ii) G nin değişmeli olması için gerek ve yeter koşul G' nün değişmeli olmasıdır.
- (iii) Her $a \in G$ için $o(a) = o(f(a))$.
- (iv) G 'nin devirli olması için gerek ve yeter koşul G' 'nün devirli olmasıdır [34].

Örnek 2.3 n bir pozitif tamsayı olmak üzere $f : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}/\langle n \rangle$ olacak şekilde her $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$ için $f(\bar{a}) = a + \langle n \rangle$ ile tanımlansın.

$$\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow n \mid a - b \Leftrightarrow a - b = nq \text{ olacak şekilde } \exists q \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a - b \in \langle n \rangle$$

$$\Leftrightarrow a + \langle n \rangle = b + \langle n \rangle \Leftrightarrow f(\bar{a}) = f(\bar{b})$$

Bu durumda f fonksiyonu iyi tanımlı ve birebir fonksiyondur.

$$f(\bar{a} + \bar{b}) = f(\overline{a+b}) = (a+b) + \langle n \rangle = (a + \langle n \rangle) + (b + \langle n \rangle) = f(\bar{a}) + f(\bar{b})$$

ile homomorfizma koşulu sağlanır. Bu durumda f fonksiyonu $\mathbb{Z}_n$ 'den $\mathbb{Z}/\langle n \rangle$ 'ye bir izomorfizmadır [34].

Teorem 2.21 (1. İzomorfizma Teoremi) $f : G \rightarrow G'$ bir homomorfizma olsun. Bu durumda $f(G)$, G' 'nün alt grubudur ve $G/\text{Çekf} \cong G'$ olur [34].

Teorem 2.22 (2. İzomorfizma Teoremi) H ve K , G grubunun alt grupları ve $K \triangleleft G$ dir. Bu durumda $H/H \cap K \cong (HK)/K$ [34].

Teorem 2.23 (3. İzomorfizma Teoremi) H_1 ve H_2 , G grubunun normal alt grupları ve

$$H_1 \subseteq H_2 \text{ dir. Bu durumda } (G/H_1) / (H_2/H_1) \cong (G/H_2) \text{ dir [34].}$$

2.3 Klasik Cebirde Halka Yapısı

Tanım 2.5 Boş kümeden farklı bir R kümesinde $(+)$ ve $(\cdot)$ sembolleri ile gösterilen iki işlem tanımlanmış olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $(R, +, \cdot)$ iki işlemli cebirsel yapıya bir halka denir.

(R1) Her $a, b, c \in R$ için $a + (b + c) = (a + b) + c$ dir.

(R2) Her $a, b \in R$ için $a + b = b + a$ dir.

(R3) Her $a \in R$ için $a + 0 = a$ şartını sağlayan R 'nin bir 0 elemanı olmalıdır.

(R4) Her $a \in R$ için $a + (-a) = 0$ şartını sağlayan bir $-a \in R$ olmalıdır.

(R5) Her $a, b, c \in R$ için $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ dir.

(R6) Her $a, b, c \in R$ için $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ dir.

(R7) Her $a, b, c \in R$ için $(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$ dir [33].

Tanım 2.16 Her $a, b \in R$ için $a \cdot b = b \cdot a$ ise R 'ye değişimli halka denir [33]

Tanım 2.17 Her $a \in R$ için $ae = e = ea$ olacak şekilde bir $e \in R$ var ise e 'ye birim eleman; R 'ye de birim elemanlı halka denir [33].

Tanım 2.18 R bir halka ve I , R 'nin boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun.

(i) Her $a, b \in I$ ve her $r \in R$ için $a - b \in I$, $ra \in I$ ise I ya R 'nin bir sol ideali denir.

(ii) Her $a, b \in I$ ve her $r \in R$ için $a - b \in I$, $ar \in I$ ise I ya R 'nin bir sağ ideali denir.

(iii) I , R 'nin hem sağ hem de sol ideali ise I ya kısaca R 'nin bir idealidir denir [33].

Örnek 2.4 $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ halkasında her $p \in \mathbb{Z}$ asal sayısı için $I = p\mathbb{Z}$ alt halkası bir idealdir [33].

Teorem 2.24 R bir halka ve I , R 'nin bir ideali olsun. Her $r \in R$ için $r + I = \{r + a \mid a \in I\}$ şeklindeki tüm kosetlerin kümesi R/I ile gösterilirse, $\forall r_1 + I, r_2 + I \in R/I$ için;

$$(r_1 + I) + (r_2 + I) = (r_1 + r_2) + I$$

$$(r_1 + I)(r_2 + I) = r_1 r_2 + I$$

şeklinde tanımlanan toplama ve çarpma işlemlerine göre R/I bir halkadır.

Tanım 2.19 R bir halka ve I , R 'nin bir ideali olsun. $(R/I, +, \cdot)$ halkasına R 'nin I idealine göre bölüm halkası denir [33].

Örnek 2.5 $R = \mathbb{Z}$ halkasında $I = 3\mathbb{Z}$ ideali için $R/I = \{I + 0, I + 1, I + 2\}$ bölüm halkası elde edilir [33].

2.4 Klasik Cebirde Halka Homomorfizması Yapısı ve Temel Teoremleri

Tanım 2.20 $(R, +, \cdot)$ ve $(R', +', \cdot')$ iki halka olmak üzere $f : R \rightarrow R'$ bir fonksiyon olsun. Her $a, b \in R$ için;

$$f(a + b) = f(a) + ' f(b) \quad (2.7)$$

$$f(a \cdot b) = f(a) \cdot ' f(b) \quad (2.8)$$

koşulları sağlanıyorsa f 'ye R 'den R' ye bir homomorfizma denir [33].

R halkasından R' halkasına bir f homomorfizması

(i) f bire-bir ise bir monomorfizma,

(ii) f örten ise bir epimorfizma,

(iii) f bire-bir ve örten ise izomorfizma, olarak adlandırılır.

R halkasından R' halkasına f bir izomorfizma ise f^{-1} de R' halkasından R halkasına bir izomorfizmadır. R halkasından R halkasına bir izomorfizmaya da otomorfizma denir [33].

Tanım 2.21 f , R halkasından R' halkasına bir homomorfizma olsun. $0'$, R' halkasının toplamsal birimini belirtmek üzere;

$$\text{Çek} f = \{a \in R \mid f(a) = 0'\} \quad (2.9)$$

kümesine f 'nin çekirdeği denir [33].

Örnek 2.6 n pozitif tamsayısı ile üretilen $\langle n \rangle = \{qn \mid q \in \mathbb{Z}\}$ idealini ele alalım. $a \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $\langle n \rangle$ nin $\mathbb{Z}$ kümesindeki kosetleri, $a + \langle n \rangle = \{a + qn \mid q \in \mathbb{Z}\}$ ve

$Z/\langle n \rangle$ bölüm halkası, $Z/\langle n \rangle = \{a + \langle n \rangle \mid a \in Z\}$ şeklindedir. $(Z_n, +_n)$ halkasından $(Z/\langle n \rangle, +)$ halkasına $f : Z_n \rightarrow Z/\langle n \rangle$, $f([a]) = a + \langle n \rangle$ dönüşümü bir izomorfizmadır.

$$f([a] +_n [b]) = f([a+b]) = (a+b) + \langle n \rangle = (a + \langle n \rangle) + (b + \langle n \rangle) = f([a]) + f([b])$$

$$f([a] \cdot_n [b]) = f([ab]) = (ab) + \langle n \rangle = (a + \langle n \rangle)(b + \langle n \rangle) = f([a]) \cdot f([b])$$

eşitliklerinden f 'nin Z_n den $Z/\langle n \rangle$ üzerine bir izomorfizma olduğu görülür [34].

Teorem 2.25 (1. İzomorfizma Teoremi) f , R halkasından R' halkasına bir izomorfizma olsun. Bu durumda $f(R)$, R' halkasının bir idealidir ve $R/\text{Çekf} \cong f(R)$ dir [34].

Teorem 2.26 (2. İzomorfizma Teoremi) I ve J bir R halkasının iki ideali olsun. $I/(I \cap J) \cong (I+J)/J$ dir [34].

Teorem 2.27 (3. İzomorfizma Teoremi) I_1 ve I_2 bir R halkasının iki ideali ve $I_1 \subseteq I_2$ olsun. $(R/I_1) / (I_2/I_1) \cong (R/I_2)$ dir [34].

2.5 Klasik Cebirde İdeal Yapısı

Tanım 2.22 P , R 'nin bir ideali ve R 'nin A ve B idealleri için $AB \subset P$ olduğunda $A \subset P$ veya $B \subset P$ oluyorsa P idealine asal ideal denir [33].

Teorem 2.28 R 'nin bir P idealinin asal olması için gerek ve yeter koşul $a, b \in R$ için $ab \in P \Rightarrow a \in P$ veya $b \in P$ olmasıdır [33].

Örnek 2.8 Z tamsayılar halkasında $P = \{3k \mid k \in Z\}$ ideali bir asal idealdir [33].

Tanım 2.23 R değişmeli bir halka ve Q , R 'nin bir ideali olsun. Her $a, b \in R$, $ab \in Q$ ve $a \notin Q$ için, $b^n \in Q$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı varsa Q idealine bir asallanabilir ideal denir [33].

Tanım 2.24 R değişmeli bir halka ve I , R 'nin bir ideali olsun. I idealinin radikali, $\sqrt{I} = \{a \in R \mid a^n \in I, n \in Z^+\}$ şeklinde tanımlanır [33].

BÖLÜM 3

BULANIK KÜMEYE GİRİŞ

3.1 Bulanık Kümeler

Tanım 3.1 X herhangi bir küme olmak üzere, $\mu: X \rightarrow [0,1]$ şeklinde tanımlanan μ fonksiyonuna X 'in bulanık (fuzzy) alt kümesi denir. X 'in bütün bulanık alt kümelerinin oluşturduğu kümeye X 'in bulanık kuvvet kümesi denir ve $[0,1]^X$ şeklinde gösterilir [19].

Tanım 3.2 $\mu \in [0,1]^X$ olmak üzere $\{\mu(x): x \in X\}$ ile tanımlanan kümeye μ 'nün görüntü kümesi denir ve $\mu(X)$ ya da $\text{Im}(\mu)$ şeklinde gösterilir [19].

Tanım 3.3 $\mu \in [0,1]^S$ olmak üzere,

$$\mu^* = \{x | \mu(x) > 0, x \in S\} \quad (3.1)$$

kümesine μ 'nün destekleyicisi denir. Eğer μ^* sonlu bir küme ise μ 'ye sonlu bulanık alt küme, μ^* sonsuz bir küme ise μ 'ye de sonsuz bulanık alt küme denir. Ayrıca $1 \in \mu(X)$ ise μ 'ye X 'in birimli bulanık alt kümesi denir [19].

Tanım 3.4 $Y \subseteq X$ ve $a \in [0,1]$ olmak üzere $a_Y \in [0,1]^X$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$a_Y(x) = \begin{cases} a; & x \in Y \\ 0; & x \notin Y \end{cases} \quad (3.2)$$

Özel olarak; eğer $Y = \{y\}$ ise a_Y kümesi $a_{\{y\}}$ veya y_a şeklinde ifade edilir, $[0,1]$ – nokta (point) veya $[0,1]$ – singleton ile adlandırılır.

Eğer $a=1$ ise,

$$1_Y(x) = \chi_Y(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in Y \\ 0 & ; x \in X \setminus Y \end{cases} \quad (3.3)$$

fonksiyonuna karakteristik fonksiyon denir [19].

Tanım 3.5 $\mu, \nu \in [0,1]^X$ olmak üzere $\forall x \in X$ için $\mu(x) \leq \nu(x)$ ise ν bulanık alt kümesi, μ bulanık alt kümesini kapsar denir ve $\mu \subseteq \nu$ şeklinde gösterilir [20].

Tanım 3.6 $\mu, \nu \in [0,1]^X$ olmak üzere $\mu \cap \nu, \mu \cup \nu \in [0,1]^X$ kümeleri şu şekilde tanımlanır: $\forall x \in X$ için,

$$(\mu \cap \nu)(x) = \mu(x) \wedge \nu(x) \quad (3.4)$$

$$(\mu \cup \nu)(x) = \mu(x) \vee \nu(x) \quad (3.5)$$

Tanım 3.7 $\mu \in [0,1]^X$ olmak üzere $a \in [0,1]$ için,

$$\mu_a = \{ x: x \in X, \mu(x) \geq a \} \quad (3.6)$$

kümesine μ nün seviye alt kümesi denir [20].

Teorem 3.1 $\mu, \nu \in [0,1]^X$ olmak üzere, aşağıdaki ifadeler doğrudur.

$$\text{i) } \mu \subseteq \nu, a \in [0,1] \Rightarrow \mu_a \subseteq \nu_a$$

$$\text{ii) } a \leq b, a, b \in [0,1] \Rightarrow \mu_b \subseteq \mu_a$$

$$\text{iii) } \mu = \nu \Leftrightarrow \mu_a = \nu_a, \forall a \in [0,1] \text{ [20].}$$

Tanım 3.8 X, Y herhangi iki küme ve $\mu \in [0,1]^X, \nu \in [0,1]^Y$ ayrıca $f: X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olsun. $f(\mu) \in [0,1]^Y$ ve $f^{-1}(\nu) \in [0,1]^X$ bulanık alt kümeler olmak üzere $\forall y \in Y$ için,

$$f(\mu)(y) = \begin{cases} \vee \{ \mu(x) : x \in X, f(x) = y \} ; & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & ; f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} \quad (3.7)$$

$\forall x \in X$ için,

$$f^{-1}(\nu)(x) = \nu[f(x)] \quad (3.8)$$

şeklindeki fonksiyonlara sırasıyla f 'nin μ altındaki görüntüsü ve f 'nin ν altındaki ters görüntüsü denir [20].

3.2 Bulanık Alt Grup, Bulanık Alt Halka ve Bulanık İdealler

Bu bölümde G daima birimi e olan ve çarpımsal ikili işleme sahip keyfi bir grubu, R ise değişmeli bir halkayı temsil edecek. Grup ve halkanın bulanık alt kümelerinde bazı işlemler tanımlayıp ardından sırasıyla bulanık alt grup, bulanık alt halka ve bulanık ideal tanımlarını vereceğiz. Daha sonra ise bulanık asal ideal, bulanık idealin radikali ve bulanık asallanabilir ideal kavramları verilecek.

Tanım 3.9 G bir grup ve $\forall \mu, \nu \in [0,1]^G$ bulanık kümeleri olmak üzere, $\forall x \in G$ için

$$(\mu \circ \nu)(x) = \vee \{ \mu(y) \wedge \nu(z) : y, z \in G, yz = x \} \quad (3.9)$$

$$\mu^{-1}(x) = \mu(x^{-1}). \quad (3.10)$$

$\mu \circ \nu$ işlemine μ ve ν nün nokta çarpımı, μ^{-1} ifadesine μ bulanık alt kümesinin tersi denir [19].

Tanım 3.10 G bir grup ve $\mu \in [0,1]^G$ olsun. Eğer μ aşağıdaki koşulları sağlıyorsa μ ye G 'nin bulanık (fuzzy) alt grubu denir [20].

$$(G1) \quad \forall x, y \in G \text{ için, } \mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$$

$$(G2) \quad \forall x \in G \text{ için, } \mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$$

G nin tüm bulanık alt gruplarının kümesini $L(G)$ ile gösterelim.

Tanım 3.11 $\mu \in L(G)$ olmak üzere,

$$\mu_* = \{x \in G : \mu(x) = \mu(e)\} \quad (3.11)$$

şeklinde tanımlanır [19].

Ayrıca $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\forall x \in G$ için (G1) koşulundan $\mu(x^n) \geq \mu(x)$ elde edilir.

Teorem 3.2 $\mu \in L(G)$ olmak üzere, $\forall x \in G$ için;

$$(1) \mu(e) \geq \mu(x);$$

$$(2) \mu(x) = \mu(x^{-1})$$

olur [19].

Teorem 3.3 H bir grup ve $\nu \in L(H)$ olsun. $f : G \rightarrow H$ dönüşümü bir homomorfizma ise $f^{-1}(\nu) \in L(G)$ olur [19].

R değişmeli halkasının bulanık alt kümelerinde bazı işlemler tanımlayalım.

Tanım 3.12 R bir halka μ ve ν R halkasının bulanık alt kümeleri olsun. $\mu + \nu$, $-\mu$, $\mu - \nu$, $\mu \circ \nu$ bulanık alt kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanır. $\forall x \in R$,

$$(\mu + \nu)(x) = \vee \{ \mu(y) \wedge \nu(z) \mid y, z \in R, y + z = x \}, \quad (3.12)$$

$$(-\mu)(x) = \mu(-x), \quad (3.13)$$

$$(\mu - \nu)(x) = \vee \{ \mu(y) \wedge \nu(z) \mid y, z \in R, y - z = x \}, \quad (3.14)$$

$$(\mu \circ \nu)(x) = \vee \{ \mu(y) \wedge \nu(z) \mid y, z \in R, yz = x \}. \quad (3.15)$$

$\mu + \nu$, $\mu - \nu$ ve $\mu \circ \nu$ sırasıyla μ ve ν nün toplamı, farkı ve nokta çarpımı olarak adlandırılır. $-\mu$, μ nün negatifi olarak tanımlanır. Tanımdan $\mu + \nu = \nu + \mu$ ve $\mu - \nu = \mu + (-\nu)$ olur. R halkası değişmeli olduğundan $\forall \mu, \nu \in [0, 1]^R$ için $\mu \circ \nu = \nu \circ \mu$ dir [19].

Tanım 3.13 $\mu, \nu \in [0,1]^R$ olsun. $\forall x \in R$ için $\mu\nu \in [0,1]^R$,

$$(\mu\nu)(x) = \bigvee_{i=1}^n \{ \bigwedge_{i=1}^n (\mu(y_i) \wedge \nu(z_i)) \mid y_i, z_i \in R, 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^n y_i z_i = x \} \quad (3.16)$$

şeklinde tanımlanır. R değişmeli olduğundan $\forall \mu, \nu \in [0,1]^R$ için $\mu\nu = \nu\mu$ olur.

Tanım 3.14 R bir halka ve μ, R halkasının bulanık alt kümesi olsun. Bu durumda eğer,

$$(R1) \quad \mu(x-y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \quad \forall x, y \in R$$

$$(R2) \quad \mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \quad \forall x, y \in R$$

şartları sağlanırsa μ 'ye R halkasının bulanık alt halkası denir.

R 'nin tüm bulanık alt halkalarının kümesini $L(R)$ ile gösterelim [19].

Tanım 3.15 $\mu, (R1)$ şartını sağlasın. Eğer $\mu,$

$$(R3) \quad \mu(xy) \geq \mu(x) \vee \mu(y) \quad \forall x, y \in R$$

şartını da sağlıyorsa R halkasının bulanık ideali olarak adlandırılır [22].

R nin tüm bulanık ideallerinin kümesini $LI(R)$ ile göstereceğiz. R bir halka; μ, R nin bulanık ideali ise, bu durumda;

$$\mu_* = \{x \in R \mid \mu(x) = \mu(0)\} \quad (3.17)$$

şeklinde alabiliriz.

$\mu \in [0,1]^R$ olsun. R halkası değişmeli olduğundan μ nün (R3) koşulunu sağlaması için gerek ve yeter koşul

$$\mu(xy) \geq \mu(x) \quad \forall x, y \in R \quad (3.18)$$

olmasıdır [19].

Teorem 3.4 $\mu, \nu \in LI(R)$ olsun. Bu durumda;

- (1) $\mu(0) \geq \mu(x) \quad \forall x \in R$
- (2) R halkası birimli ise, $\mu(1) \leq \mu(x) \quad \forall x \in R$
- (3) $x, y \in R$ olsun. $\mu(x-y) = \mu(0)$ ise $\mu(x) = \mu(y)$ olur.
- (4) μ_* R 'nin bir idealidir.
- (5) μ^* R 'nin bir idealidir.
- (6) $\mu_* \cap \nu_* \subseteq (\mu \cap \nu)_*$ [22].

Tanım 3.16 $\xi, \mu, \nu \in LI(R)$ olsun. ξ sabit olmamak üzere, $\mu \circ \nu \subseteq \xi$ iken $\mu \subseteq \xi$ veya $\nu \subseteq \xi$ oluyorsa ξ idealeine R 'nin bulanık asal ideali denir [22].

Teorem 3.5 $\xi, \mu, \nu \in LI(R)$ olsun. ξ sabit olmamak üzere, ξ idealinin R 'nin bulanık asal ideali olması için gerek ve yeter koşul $\mu \nu \subseteq \xi$ iken $\mu \subseteq \xi$ veya $\nu \subseteq \xi$ olmasıdır [22].

Tanım 3.17 $c \in [0,1]$ ve $1 \neq c$ olsun. $\forall a, b \in [0,1]$ için $a \wedge b \leq c$ iken $a \leq c$ veya $b \leq c$ oluyorsa c elemanına $[0,1]$ in bir asal elemanıdır denir [22].

$\xi \in LI(R)$, $\xi \subseteq \mu$ ve $\xi_* \subseteq \mu_*$ olacak şekilde R 'nin tüm bulanık asal μ ideallerinin kümesini P_ξ ile göstereceğiz.

Tanım 3.18 $\xi \in LI(R)$ olmak üzere,

$$\sqrt{\xi} = \begin{cases} \bigcap \{ \mu : \mu \in P_\xi \}; & P_\xi \neq \emptyset \\ 1_R & ; P_\xi = \emptyset \end{cases} \quad (3.19)$$

şeklinde tanımlanan $\sqrt{\xi}$ ifadesine bulanık ξ idealinin radikali denir [22].

Teorem 3.6 ξ , R 'nin sabit bir bulanık ideali olsun. Bu durumda $\sqrt{\xi} = 1_R$ olur [22].

Tanım 3.19 $\xi, \mu, \nu \in LI(R)$ olsun. ξ sabit olmamak üzere, $\mu \circ \nu \subseteq \xi$ iken $\mu \subseteq \xi$ veya $\nu \subseteq \sqrt{\xi}$ oluyorsa ξ idealeine R 'nin bulanık asallanabilir ideali denir [22].

BÖLÜM 4

ESNEK KÜMELER

Bu bölümde çalışmamızın içinde yer alan esnek kümelerle ilgili temel tanım, teoremleri ve bazı temel özellikleri vereceğiz.

4.1 Esnek Kümeler

Tanım 4.1 U evrensel küme ve E parametrelerin bir kümesi olsun. $P(U)$, U 'nun kuvvet kümesi ve $A \subset E$ olarak gösterilsin. (F, A) sıralı ikilisi U üzerinde esnek küme olarak adlandırılır, burada $F : A \rightarrow P(U)$ ile verilen bir tasvirdir. Diğer bir ifadeyle, U üzerinde bir esnek küme, U evreninin alt kümelerinin parametrize edilmiş bir ailesidir. $\varepsilon \in A$ için $F(\varepsilon)$, (F, A) esnek kümesinin ε -yaklaşımlı elemanlarının cümlesi olarak göz önüne alınabilir [1].

Örnek 4.1 Kabul edelim ki, U göz önüne alınan şartlar altındaki evlerin kümesi ve E parametrelerin kümesi olsun. Her bir parametre bir kelime ya da cümledir. $E = \{pahalı, güzel, ahşap, ucuz, etrafı bahçeli, modern, iyi durumda, kötü durumda\}$ olarak alalım. Bu durumda bir esnek küme tanımlamak, pahalı evler, güzel evler ve diğerlerini belirtmek anlamına gelir. (F, E) esnek kümesi, Mr. X 'in satın alacağı "evlerin çekiciliği"ni belirtiyor. Sonraki tartışmalarımız için aynı örneği daha detaylı olarak aşağıda göz önüne alalım. Kabul edelim ki $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ ile verilen U evreninde 6 ev olsun ve e_1 "pahalı" parametresini, e_2 "güzel" parametresini, e_3 "ahşap" parametresini, e_4 "ucuz" parametresini, e_5 "bahçeli" parametresini göstermek üzere,

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ şeklinde verilsin. Kabul edelim ki $F(e_1) = \{h_2, h_4\}$, $F(e_2) = \{h_1, h_3\}$, $F(e_3) = \{h_3, h_4, h_5\}$, $F(e_4) = \{h_1, h_3, h_5\}$ ve $F(e_5) = \{h_1\}$ olsun. (F, E) esnek kümesi U kümesinin alt kümelerinin $\{F(e_i), i=1, 2, 3, \dots\}$ parametrize edilmiş bir ailesidir ve bir nesnenin yaklaşık tanımlarının bir koleksiyonunu verir. Göz önüne alınan F tasviri “evler(.)” şeklindedir. Burada nokta (.), bir $e \in E$ parametresi ile doldurulur. Bu yüzden, $F(e_1)$ fonksiyonel değeri $\{h_2, h_4\}$ kümesi olan “pahalı evler” anlamına gelmektedir.

Bu nedenle, biz (F, E) esnek kümesi aşağıdaki gibi yaklaşımların bir koleksiyonu olarak gösterebiliriz;

$$(F, E) = \left\{ \begin{array}{l} (pahalı\ evler, \{h_2, h_4\}), (güzel\ evler, \{h_1, h_3\}), \\ (tahta\ evler, \{h_3, h_4, h_5\}), \\ (ucuz\ evler, \{h_1, h_3, h_5\}), (bahçeli\ evler, \{h_1\}) \end{array} \right\}$$

Burada her bir yaklaşımın iki kısmı vardır.

- i. Bir tahmini p ; ve
- ii. Bir v yaklaşık değer kümesi (veya basitçe v değer kümesi)

Örneğin *pahalı evler*, $\{h_2, h_4\}$ yaklaşımı için biz, aşağıdaki özelliklere sahibiz.

- i. Tahmini isim yaklaşık evlerdir.
- ii. Yaklaşık değer kümesi veya değer kümesi $\{h_2, h_4\}$ ’tür.

Çizelge 4.1 Esnek kümenin çizelge gösterimi

U	“pahalı”	“güzel”	“ahşap”	“ucuz”	“bahçeli”
h_1	0	1	0	1	1
h_2	1	0	0	0	0
h_3	0	1	1	1	0
h_4	1	0	1	0	0
h_5	0	0	1	1	0
h_6	0	0	0	0	0

Bu yüzden bir (F, E) esnek kümesi;

$$(F, E) = \{(p_1, v_1), (p_2, v_2), \dots, (p_n, v_n)\} \quad (4.1)$$

olacak şekilde yaklaşımların koleksiyonu olarak gösterilebilir. Bir esnek kümeyi bir bilgisayarda depolamak ve kodlamak için, esnek kümenin yerini tutan Tablo 4.1’deki ifadeyle temsil edebiliriz [35].

Tanım 4.2 (F, E) esnek kümesinin tüm değer kümelerinin sınıfına, esnek kümenin değer sınıfı denir ve $C_{(F, E)}$ ile gösterilir. Yukarıdaki örnek için, $C_{(F, E)} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ şeklindedir. Açıkça $C_{(F, E)} \subseteq P(U)$ kapsaması doğrudur [35].

Tanım 4.3 U üzerinde (F, A) ve (G, B) esnek kümeleri için, eğer

(i) $A \subseteq B$ ve

(ii) $\forall \varepsilon \in A$ için $F(\varepsilon)$ ve $G(\varepsilon)$ özdeş yaklaşımlar ise;

(F, A) , (G, B) 'nin esnek alt kümesidir diyebiliriz ve $(F, A) \subseteq (G, B)$ ile gösteririz.

Eğer (G, B) , (F, A) 'nin esnek alt kümesi ise (F, A) 'ya (G, B) 'nin esnek üst kümesidir denir ve $(F, A) \supseteq (G, B)$ ile gösterilir [1].

Tanım 4.4 Eğer (F, A) , (G, B) 'nin esnek alt kümesi ve (G, B) de (F, A) 'nın esnek kümesi ise (F, A) ve (G, B) esnek kümelerine U üzerinde esnek eşittir denir [1].

Örnek 4.2 $A = \{e_1, e_3, e_5\} \subset E$ ve $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} \subset E$ şeklinde olsun. Açıkça $A \subset B$ 'dir. (F, A) ve (G, B) aynı $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ evrensel kümesi üzerinde $G(e_1) = \{h_2, h_4\}$, $G(e_2) = \{h_1, h_3\}$, $G(e_3) = \{h_3, h_4, h_5\}$, $G(e_5) = \{h_1\}$, $F(e_1) = \{h_2, h_4\}$, $F(e_3) = \{h_3, h_4, h_5\}$ ve $F(e_5) = \{h_1\}$ olacak şekilde iki esnek küme olsun. Bu durumda $(F, A) \subseteq (G, B)$ dir [35].

Tanım 4.5 $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ parametrelerin bir kümesi olsun. $\neg E$ ile gösterilen DEĞİL küme $\neg E = \{\neg e_1, \neg e_2, \neg e_3, \dots, \neg e_n\}$ ile tanımlanır. Burada $\neg e_i = \text{değil } e_i$ her i için [36].

Önerme 4.1 Aşağıdaki sonuçlar aşikardır.

(i) $\neg(\neg A) = A$

(ii) $\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$

(iii) $\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$ [36].

Örnek 4.3 Örnek 4.1'de verilen örnek düşünülürse $\neg E = \{\text{pahalı değil, güzel değil, ahşap değil, ucuz değil, bahçeli değil, modern değil, iyi durumda değil, kötü durumda değil}\}$ şeklinde yazılır [35].

Tanım 4.6 Bir (F, A) esnek kümesinin $(F, A)^c$ ile gösterilen tümleyeni $(F, A)^c = (F^c, \neg A)$ olarak tanımlanır. Burada $F^c : \neg A \rightarrow P(U)$, $F^c(\alpha) = U - F(\neg \alpha)$, $\forall \alpha \in \neg A$ ile verilen bir dönüşümdür.

F^c 'yi F 'nin esnek tümleyen fonksiyonu olarak isimlendirelim. Açıkça, $(F^c)^c = F$ ile aynıdır ve $((F, A)^c)^c = (F, A)$ şeklindedir [36].

Örnek 4.4 Örnek 4.1 gözönüne alınırsa

$(F, E)^c = \{(\text{pahalı olmayan evler}, \{h_1, h_3, h_5, h_6\}),$
 $(\text{güzel olmayan evler}, \{h_2, h_4, h_5, h_6\}), (\text{ahşap olmayan evler}, \{h_1, h_2, h_6\}), (\text{ucuz olmayan}$
 $\text{evler}, \{h_2, h_4, h_6\}), (\text{bahçeli olmayan evler}, \{h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\})\}$ şeklinde yazılır [35].

Tanım 4.7 Eğer $\forall \varepsilon \in A$ için $F(\varepsilon) = \emptyset$ (boş küme) ise U üzerinde bir (F, A) esnek kümesi boş esnek küme olarak isimlendirilir ve $\emptyset$ ile gösterilir [36].

Örnek 4.5 Kabul edelim ki U , göz önüne alınan şartlar altındaki ahşap evlerin kümesi ve A parametrelerin bir kümesi olsun. $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ ile verilen U evreninde beş ev olsun ve $B = \{\text{tuğla}, \text{çamur}, \text{çelik}, \text{taş}\}$ şeklinde verilsin. (F, A) esnek kümesi “evlerin yapımı” olarak tanımlansın. Tuğladan yapılan evler anlamına gelen $F(\text{tuğla})$; çamurdan yapılan evler anlamına gelen $F(\text{çamur})$; çelikten yapılan evler anlamına gelen $F(\text{çelik})$; taştan yapılan evler anlamına gelen $F(\text{taş})$ olarak tanımlanan (F, A) esnek kümesi yaklaşımlarının bir koleksiyonu olarak

$$(F, A) = \left\{ (\text{Tuğladan yapılan evler}, \emptyset), (\text{çamurdan yapılan evler}, \emptyset), \right. \\ \left. (\text{çelikten yapılan evler}, \emptyset), (\text{taştan yapılan evler}, \emptyset) \right\}$$

şeklinde yazılır. Burada (F, A) boş esnek kümedir [35].

Tanım 4.8 Eğer $\forall \varepsilon \in A$ için $F(\varepsilon) = U$ ise U üzerinde bir (F, A) esnek kümesi mutlak esnek küme olarak isimlendirilir ve $\tilde{A}$ ile gösterilir. Açıkça $\tilde{A}^c = \emptyset$ ve $\emptyset^c = \tilde{A}$ dır [36].

Örnek 4.6 Kabul edelim ki U , göz önüne alınan şartlar altındaki ahşap evlerin kümesi ve B parametrelerin bir kümesi olsun. $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ ile verilen U evreninde beş ev olsun ve $B = \{\text{tuğla değil, çamur değil, çelik değil, taş değil}\}$ şeklinde verilsin. (G, B) esnek kümesi “evlerin yapımı” olarak tanımlansın. Tuğla olmayan evler anlamına gelen $G(\text{tuğla değil})$; çamur olmayan evler anlamına gelen $G(\text{çamur değil})$; çelik olmayan evler anlamına gelen $G(\text{çelik değil})$; taş olmayan evler anlamına gelen $G(\text{taş değil})$ olarak tanımlanan (G, B) esnek kümesi yaklaşımlarının bir koleksiyonunu olarak

$$(G, B) = \left\{ \left(\text{tuğla olmayan evler}, \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\} \right), \left(\text{çamur olmayan evler}, \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\} \right), \right. \\ \left. \left(\text{çelik olmayan evler}, \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\} \right), \left(\text{taş olmayan evler}, \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\} \right) \right\}$$

şeklinde yazılır. Burada (G, B) mutlak esnek kümedir [35].

Tanım 4.9 Eğer (F, A) ve (G, B) iki esnek küme ise, $(F, A) \wedge (G, B)$ ile gösterilen " $(F, A) \vee (G, B)$ " işlemi $(F, A) \wedge (G, B) = (H, A \times B)$ ile tanımlanır. Burada $H(\alpha, \beta) = F(\alpha) \cap G(\beta), \forall (\alpha, \beta) \in A \times B$ (4.2)

şeklindedir [1].

Örnek 4.7 “evlerin pahası” ile tanımlanan (F, A) ve “evlerin çekiciliği” olarak tanımlanan (G, B) esnek kümelerini göz önüne alınsın. Kabul edelim ki, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}\}$ $A = \{\text{çok pahalı, pahalı, ucuz}\}$ ve $B = \{\text{güzel, bahçeli, ucuz}\}$ şeklinde verilsin. $F(\text{çok pahalı}) = \{h_2, h_4, h_7, h_8\},, F(\text{pahalı}) = \{h_1, h_3, h_5\}, F(\text{ucuz}) = \{h_6, h_9, h_{10}\}, G(\text{güzel}) = \{h_2, h_3, h_7\}, G(\text{bahçeli}) = \{h_5, h_6, h_8\}, G(\text{ucuz}) = \{h_6, h_9, h_{10}\}$ olsun. Bu durumda $(F, A) \wedge (G, B) = (H, A \times B)$ olduğundan burada $H(\text{çok pahalı, güzel}) = \{h_2, h_7\},, H(\text{çok pahalı, bahçeli}) = \{h_8\}, H(\text{çok pahalı, ucuz}) = \emptyset, H(\text{pahalı, güzel}) = \{h_3\}, H(\text{pahalı, bahçeli}) = \{h_5\}, H(\text{pahalı, ucuz}) = \emptyset, H(\text{ucuz, güzel}) = \emptyset, H(\text{ucuz, bahçeli}) = \{h_6\}, H(\text{ucuz, ucuz}) = \{h_6, h_9, h_{10}\}$ şeklindedir [35].

Tanım 4.10 (F, A) ve (G, B) iki esnek küme olmak üzere $(F, A) \vee (G, B)$ ile gösterilen " $(F, A) \vee (G, B)$ " işlemi $(F, A) \vee (G, B) = (O, A \times B)$ ile tanımlanır. Burada $O(\alpha, \beta) = F(\alpha) \cup G(\beta), \forall (\alpha, \beta) \in A \times B$ (4.3)

şeklindedir [1].

Örnek 4.8 Örnek 4.7 göz önüne alınsın. Bu durumda $(F, A) \vee (G, B) = (O, A \times B)$ olduğundan burada $O(\text{çok pahalı, güzel}) = \{h_2, h_3, h_4, h_7, h_8\}$,
 $O(\text{çok pahalı, bahçeli}) = \{h_2, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8\}$,
 $O(\text{çok pahalı, ucuz}) = \{h_2, h_4, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}\}$, $O(\text{pahalı, güzel}) = \{h_1, h_2, h_3, h_5, h_7\}$,
 $O(\text{pahalı, bahçeli}) = \{h_1, h_3, h_5, h_6, h_8\}$, $O(\text{pahalı, ucuz}) = \{h_1, h_3, h_5, h_6, h_9, h_{10}\}$,
 $O(\text{ucuz, güzel}) = \{h_2, h_3, h_6, h_7, h_9, h_{10}\}$, $O(\text{ucuz, bahçeli}) = \{h_5, h_6, h_8, h_9, h_{10}\}$,
 $O(\text{ucuz, ucuz}) = \{h_6, h_9, h_{10}\}$ şeklindedir [35].

Önerme 4.2 Aşağıdaki işlemler De Morgan kurallarını sağlar.

- (i) $((F, A) \vee (G, B))^c = (F, A)^c \wedge (G, B)^c$
- (ii) $((F, A) \wedge (G, B))^c = (F, A)^c \vee (G, B)^c$ [36].

İspat

(i) Kabul edelim ki, $(F, A) \vee (G, B) = (O, A \times B)$ olsun. Bu durumda

$((F, A) \vee (G, B))^c = (O, A \times B)^c = (O^c, \neg(A \times B))$ şeklindedir. Buradan

$$\begin{aligned} (F, A)^c \wedge (G, B)^c &= (F^c, \neg A) \cap (G^c, \neg B) \\ &= (J, \neg A \times \neg B) \\ &= (J, \neg(A \times B)) \end{aligned}$$

burada $J(x, y) = F^c(x) \cap G^c(y)$ elde edilebilir. $(\neg\alpha, \neg\beta) \in \neg(A \times B)$ alalım. Bu takdirde;

$$\begin{aligned}
O^c(\neg\alpha, \neg\beta) &= U - O(\alpha, \beta) \\
&= U - [F(\alpha) \cup G(\beta)] \\
&= [U - F(\alpha)] \cap [U - G(\beta)] \\
&= F^c(\neg\alpha) \cap G^c(\neg\beta) \\
&= J(\neg\alpha, \neg\beta)
\end{aligned}$$

O^c ve J aynıdır. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

(ii) Kabul edelim ki, $(F, A) \cap (G, B) = (H, A \times B)$ olsun. Bu durumda,

$((F, A) \cap (G, B))^c = (H, A \times B)^c = (H^c, \neg(A \times B))$ şeklindedir. Burada

$$\begin{aligned}
(F, A)^c \cup (G, B)^c &= (F^c, \neg A) \cup (G^c, \neg B) \\
&= (K, \neg A \times \neg B) \\
&= (K, \neg(A \times B))
\end{aligned}$$

burada $K(x, y) = F^c(x) \cup G^c(y)$ elde edilir. Şimdi $(\neg\alpha, \neg\beta) \in \neg(A \times B)$ alalım. Bu takdirde;

$$\begin{aligned}
H^c(\neg\alpha, \neg\beta) &= U - H(\alpha, \beta) \\
&= U - [F(\alpha) \cap G(\beta)] \\
&= [U - F(\alpha)] \cup [U - G(\beta)] \\
&= F^c(\neg\alpha) \cup G^c(\neg\beta) \\
&= K(\neg\alpha, \neg\beta)
\end{aligned}$$

H^c ve K aynıdır. Bundan dolayı ispat tamamlanır.

Tanım 4.11 U üzerinde (F, A) ve (G, B) esnek kümelerinin birleşimi, (H, C) dir.

Burada; $C = A \cup B$ olmak üzere $\forall e \in C$ için,

$$H(e) = \begin{cases} F(e) & \text{eğer } e \in A - B, \\ G(e) & \text{eğer } e \in B - A, \\ F(e) \cup G(e) & \text{eğer } e \in A \cap B, \end{cases} \quad (4.4)$$

ile tanımlanır. Bunu $(F, A) \tilde{\cup} (G, B) = (H, C)$ şeklinde yazarız [1].

Yukarıdaki örnekte, $(F, A) \tilde{\cup} (G, B) = (H, C)$ olduğundan burada;

$$H(\text{çok pahalı}) = \{h_2, h_4, h_7, h_8\}, \quad H(\text{pahalı}) = \{h_1, h_3, h_5\}, \quad H(\text{ucuz}) = \{h_2, h_3, h_7\},$$

$$H(\text{güzel}) = \{h_2, h_3, h_7\}, \quad H(\text{bahçeli}) = \{h_5, h_6, h_8\} \text{ şeklindedir.}$$

Tanım 4.12 U üzerinde (F, A) ve (G, B) esnek kümelerinin kesişimi, (H, C) dir.

Burada; $C = A \cap B$ olmak üzere $\forall e \in C$ için, $H(e) = F(e)$ veya $H(e) = G(e)$, (her ikisinde aynı küme olduğunda) ile tanımlanır. Bu ifade

$$(F, A) \tilde{\cap} (G, B) = (H, C) \quad (4.5)$$

şeklinde gösterilir [1].

Yukarıdaki örnekte (F, A) ve (G, B) esnek kümelerin kesişimi (H, C) dir. Burada;

$$A \cap B = C = \{\text{ucuz}\} \text{ olduğundan } H(\text{ucuz}) = \{h_2, h_3, h_7\} \text{ şeklindedir.}$$

Aşağıdaki sonuçlar açıktır.

Önerme 4.3

- (i) $(F, A) \tilde{\cup} (F, A) = (F, A)$
- (ii) $(F, A) \tilde{\cap} (F, A) = (F, A)$
- (iii) $(F, A) \tilde{\cup} \emptyset = (F, A)$, burada $\emptyset$ boş esnek kümedir.

$$(iv) \quad (F, A) \tilde{\cap} \emptyset = \emptyset$$

$$(v) \quad (F, A) \tilde{\cup} \tilde{A} = \tilde{A}, \text{ burada } \tilde{A} \text{ mutlak esnek kümedir.}$$

$$(vi) \quad (F, A) \tilde{\cap} \tilde{A} = (F, A) \text{ [36].}$$

Önerme 4.4

$$(i) \quad ((F, A) \tilde{\cup} (G, B))^c = (F, A)^c \tilde{\cap} (G, B)^c$$

$$(ii) \quad ((F, A) \tilde{\cap} (G, B))^c = (F, A)^c \tilde{\cup} (G, B)^c \text{ [36].}$$

İspat

$$(i) \quad \text{Kabul edelim ki } (F, A) \tilde{\cup} (G, B) = (H, C) \text{ olsun. Burada;}$$

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & \text{eğer } \alpha \in A - B, \\ G(\alpha) & \text{eğer } \alpha \in B - A, \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & \text{eğer } \alpha \in A \cap B, \end{cases}$$

şeklindedir. Bu takdirde, $((F, A) \tilde{\cup} (G, B))^c = (H, A \cup B)^c = (H^c, \neg A \cup \neg B)$ şeklindedir.

$H^c(\neg\alpha) = U - H(\alpha)$, $\forall \neg\alpha \in \neg A \cup \neg B$ alalım. Bu takdirde,

$$H^c(\neg\alpha) = \begin{cases} F^c(\neg\alpha) & \text{eğer } \neg\alpha \in \neg A - \neg B, \\ G^c(\neg\alpha) & \text{eğer } \neg\alpha \in \neg B - \neg A, \\ F^c(\neg\alpha) \cup G^c(\neg\alpha) & \text{eğer } \neg\alpha \in \neg A \cap \neg B, \end{cases}$$

şeklindedir. Tekrar, $(F, A)^c \tilde{\cup} (G, B)^c = (F^c, \neg A) \tilde{\cup} (G^c, \neg B) = (K, \neg A \cup \neg B)$ dir.

Burada,

$$K(\neg\alpha) = \begin{cases} F^c(\neg\alpha) & \text{eğer } \neg\alpha \in \neg A - \neg B, \\ G^c(\neg\alpha) & \text{eğer } \neg\alpha \in \neg B - \neg A, \\ F^c(\neg\alpha) \cup G^c(\neg\alpha) & \text{eğer } \neg\alpha \in \neg A \cap \neg B, \end{cases}$$

H^c ve K aynıdır. Bu durumda ispat tamamlanır.

(ii) Kabul edelimki $((F, A) \tilde{\cap} (G, B))^c$ olsun. Bu takdirde,

$$((F, A) \tilde{\cap} (G, B))^c = (H^c, \neg A \cap \neg B)$$

dir. Şimdi $(F, A)^c \tilde{\cap} (G, B)^c = (F^c, \neg A) \tilde{\cap} (G^c, \neg B) = (K, \neg A \cap \neg B)$ alalım. Burada,

$\forall \neg \alpha \in \neg A \cap \neg B$ için

$$K(\neg \alpha) = F^c(\neg \alpha) \text{ veya } K(\neg \alpha) = G^c(\neg \alpha)$$

$$K(\neg \alpha) = F(\alpha) \text{ veya } K(\neg \alpha) = G(\alpha)$$

$$K(\neg \alpha) = H(\alpha), \text{ burada } \alpha \in A \cap B$$

$$K(\neg \alpha) = H^c(\neg \alpha)$$

K ve H^c aynı fonksiyonlardır. Bu yüzden ispat tamamlanmıştır.

Önerme 4.5 Eğer $(F, A), (G, B)$ ve (H, C) U üzerinde üç esnek küme ise bu durumda aşağıdakiler geçerlidir.

$$(i) \quad (F, A) \tilde{\cup} ((G, B) \tilde{\cup} (H, C)) = ((F, A) \tilde{\cup} (G, B)) \tilde{\cup} (H, C)$$

$$(ii) \quad (F, A) \tilde{\cap} ((G, B) \tilde{\cap} (H, C)) = ((F, A) \tilde{\cap} (G, B)) \tilde{\cap} (H, C)$$

$$(iii) \quad (F, A) \tilde{\cap} ((G, B) \tilde{\cup} (H, C)) = ((F, A) \tilde{\cap} (G, B)) \tilde{\cup} ((F, A) \tilde{\cap} (H, C))$$

$$(iv) \quad (F, A) \tilde{\cup} ((G, B) \tilde{\cap} (H, C)) = ((F, A) \tilde{\cup} (G, B)) \tilde{\cap} ((F, A) \tilde{\cup} (H, C)) \quad [36].$$

Önerme 4.6 $(F, A), (G, B)$ ve (H, C) U üzerinde üç esnek küme olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$(i) \quad (F, A) \tilde{\vee} ((G, B) \tilde{\vee} (H, C)) = ((F, A) \tilde{\vee} (G, B)) \tilde{\vee} (H, C)$$

$$(ii) \quad (F, A) \tilde{\wedge} ((G, B) \tilde{\wedge} (H, C)) = ((F, A) \tilde{\wedge} (G, B)) \tilde{\wedge} (H, C)$$

$$(iii) \quad (F, A) \tilde{\wedge} ((G, B) \tilde{\vee} (H, C)) = ((F, A) \tilde{\wedge} (G, B)) \tilde{\vee} ((F, A) \tilde{\wedge} (H, C))$$

$$(iv) \quad (F, A) \tilde{\vee} ((G, B) \tilde{\wedge} (H, C)) = ((F, A) \tilde{\vee} (G, B)) \tilde{\wedge} ((F, A) \tilde{\vee} (H, C)) \quad [36].$$

4.2 Esnek Halkalar

Bu bölüm boyunca R bir halka ve A boştan farklı bir küme olarak alınacaktır. A kümesinin elemanları ve R arasında ikili bir bağıntı kurulacak ve bunun için ρ bağıntısından yararlanılacaktır.

$F : A \rightarrow P(R)$ fonksiyonu

$$F(x) = \{y \in R \mid (x, y) \in \rho, x \in A, y \in R\} \quad (4.6)$$

ile tanımlansın.

Tanım 4.13 R bir halka olmak üzere (F, A) , R üzerinde esnek küme olsun. Eğer her $x \in A$ için $F(x)$, R 'nin alt halkası ise (F, A) 'ya R üzerinde esnek halka denir [16].

Örnek 4.9 $R = M_n$, $A = M_n$ halkaları olsun. $F(x) = \{y \mid x\rho y \Leftrightarrow xy = 0\}$. Her $x \in A$ için $F(x)$ 'in R 'nin alt halkası olduğu doğrulanabilir. Buradan (F, A) , R üzerinde esnek halkadır [16].

Önerme 4.7 R bir halka olmak üzere (F, A) ve (H, B) $A \cap B \neq \emptyset$ olacak şekilde R üzerinde iki esnek halka olsunlar. Bu durumda $(F, A) \tilde{\cap} (H, B)$, R üzerinde esnek halkadır [16].

İspat (F, A) ve (H, B) esnek halkalarının kesişimi (U, C) dir. $C = A \cap B$ ve her $x \in C$ için $U(x) = F(x)$ veya $U(x) = H(x)$ olarak tanımlanır. $(F, A) \tilde{\cap} (H, B) = (U, C)$ ile gösterilir. Bu durumda (U, C) , R üzerinde esnek kümedir. (F, A) ve (H, B) esnek halkalar olduğundan her $x \in A$ için $F(x)$, her $x \in B$ için $H(x)$, R 'nin alt halkasıdır. O halde $U(x)$, R 'nin alt halkasıdır. Sonuç olarak $(F, A) \tilde{\cap} (H, B)$ R üzerinde esnek halkadır [16].

Önerme 4.8 R bir halka olmak üzere (F, A) ve (H, B) R üzerinde iki esnek halka olsun. Eğer $A \cap B = \emptyset$ ise $(F, A) \tilde{\cup} (H, B)$, R üzerinde esnek halkadır [16].

İspat İki esnek halkanın birleşimi tanımından $(F, A) \tilde{\cup} (H, B) = (U, C)$ olacak şekilde yazılır. $A \cap B = \emptyset$ olduğundan her $x \in C$ için $x \in A - B$ veya $x \in B - A$ dir. Eğer

$x \in A - B$ ise $U(x) = F(x)$ R 'nin alt halkasıdır, eğer $x \in B - A$ ise $U(x) = H(x)$ R 'nin alt halkasıdır. Bu durumda her $x \in C$ için $U(x)$ R 'nin alt halkasıdır. Sonuç olarak $A \cap B = \emptyset$ ise $(F, A) \dot{\cup} (H, B)$ R üzerinde esnek halkadır.

Örnek 4.10 $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

(F, A) , $\mathbb{Z}_6$ üzerinde esnek küme olsun öyle ki $A = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$, her $x \in A$ için $F(x) = \{y \in \mathbb{Z}_6 \mid x \rho y \Leftrightarrow xy = \bar{0}\}$ ile $F : A \rightarrow P(\mathbb{Z}_6)$ fonksiyonu tanımlanmıştır. Bu durumda $F(\bar{2}) = \{\bar{0}, \bar{3}\}$, $F(\bar{3}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$, $F(\bar{4}) = \{\bar{0}, \bar{3}\}$, $F(\bar{5}) = \{\bar{0}\}$ $\mathbb{Z}_6$ 'nın alt halkalarıdır. Bu takdirde (F, A) , $\mathbb{Z}_6$ üzerinde esnek halkadır.

(H, B) , $\mathbb{Z}_6$ üzerinde esnek küme olsun öyle ki $B = \{\bar{4}\}$, her $x \in B$ için $H(x) = \{\bar{0}\} \cup \{y \in \mathbb{Z}_6 \mid x + y \in \{\bar{0}, \bar{2}\}\}$ ile $H : B \rightarrow P(\mathbb{Z}_6)$ fonksiyonu tanımlanmıştır. Bu durumda $H(\bar{4}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$, $\mathbb{Z}_6$ nin alt halkasıdır. Bu takdirde (H, B) , $\mathbb{Z}_6$ üzerinde esnek halkadır.

$(W, C) = (F, A) \dot{\cup} (H, B)$ olsun. $W(\bar{4}) = F(\bar{4}) \cup H(\bar{4}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ olduğundan (W, C) , $\mathbb{Z}_6$ nin alt halkası değildir [16].

Önerme 4.9 R bir halka olmak üzere (F, A) ve (H, B) , R üzerinde esnek halkalar olsun. Bu durumda $(F, A) \dot{\wedge} (H, B)$ de R üzerinde esnek halkadır [37].

İspat: Her $(x, y) \in A \times B$ için $U(x, y) = F(x) \cap H(y)$ iken $(F, A) \dot{\wedge} (H, B) = (U, A \times B)$ olarak tanımlanmıştı. (F, A) ve (H, B) esnek halka olduğundan $F(x)$ ve $H(y)$, R 'nin alt halkalarıdır. $F(x) \cap H(y)$ kesişimleri de alt halka olacaktır. Bu durumda her $(x, y) \in A \times B$ için $U(x, y)$ de R 'nin alt halkası olur. Dolayısıyla $(F, A) \dot{\wedge} (H, B)$, R üzerinde esnek halkadır.

Tanım 4.14 R bir halka olmak üzere (F, A) , R üzerinde bir esnek halka olsun. Eğer her $x \in A$ için $F(x) = \{0\}$ ise (F, A) 'ya R üzerinde aşık (trivial) esnek halka, eğer $x \in A$ için $F(x) = R$ ise (F, A) 'ya R üzerinde mutlak (absolute) esnek halka denir [16].

Örnek 4.11 $R = M_2$, $A = GL_2$ ve her $x \in A$ için $F(x) = \{y \mid x\rho y \Leftrightarrow xy = 0\}$. Her $x \in A$ için $F(x) = \{0\}$, bu durumda (F, A) , R üzerinde aşikar esnek halkadır.

Şimdi $K = \{0, a, b, c\}$ aşağıdaki Cayley tablosuna göre bir halka olsun.

Çizelge 4.2 $+$ işlemine göre cayley çizelgesi Çizelge 4.3 $\bullet$ işlemine göre cayley çizelgesi

$+$	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

$\bullet$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	0	0	b
b	0	0	0	0
c	0	b	0	a

Eğer $B = K$ ise her $x \in B$ için $H(x) = \{y \in K \mid x\rho y \Leftrightarrow xy \in \{0, a, b\}\}$ ile $H : B \rightarrow P(K)$ fonksiyonu tanımlansın. Her $x \in B$ için $H(x) = K$ olur, bu durumda (H, B) , K üzerinde mutlak esnek halkadır [16].

Önerme 4.10 (1) R ve K birer halka olmak üzere, (F, A) R üzerinde esnek halka ve $f : R \rightarrow K$ bir homomorfizma olsun. Eğer her $x \in A$ $f(x) = Çekf$ ise bu durumda $(f(F), A)$, K üzerinde aşikar esnek halka olur.

(2) R ve K birer halka olmak üzere (F, A) , R üzerinde mutlak esnek halka ve $f : R \rightarrow K$ bir epimorfizma olsun. Bu durumda $(f(F), A)$, K üzerinde mutlak esnek halka olur [16].

İspat (1) $f(F(x)) = \{0\}$ olacak şekilde $x \in A$ mevcut olsun. Tanım 4.14'ten $(f(F), A)$ K üzerinde aşikar esnek halka olur.

(2) (F, A) R üzerinde mutlak esnek halka ise açıktır ki $F(x) = R$. Her $x \in A$ için $f(F(x)) = f(R) = K$ olur, Bu durumda $(f(F), A)$ K üzerinde mutlak esnek halkadır.

Tanım 4.15 R bir halka olmak üzere (F, A) ve (H, B) , R üzerinde esnek halkalar olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa (H, B) 'ye (F, A) 'nın esnek alt halkası denir.

(i) $B \subset A$

(ii) Her $x \in B$ için $H(x)$, $F(x)$ 'in alt halkasıdır [37].

Örnek 4.12 $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

(F, A) , $\mathbb{Z}_6$ üzerinde esnek küme olsun öyle ki $A = \mathbb{Z}_6$, her $x \in A$ için

$F(x) = \{y \in \mathbb{Z}_6 \mid x\rho y \Leftrightarrow xy \in \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}\}$ ile $F : A \rightarrow P(\mathbb{Z}_6)$ fonksiyonu tanımlanmıştır. Bu durumda

$F(\bar{0}) = \mathbb{Z}_6$, $F(\bar{1}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$, $F(\bar{2}) = \mathbb{Z}_6$, $F(\bar{3}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$, $F(\bar{4}) = \mathbb{Z}_6$, $F(\bar{5}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ $\mathbb{Z}_6$ nin alt halkalarıdır. Bu durumda (F, A) , $\mathbb{Z}_6$ üzerinde esnek halkadır.

(H, B) , $\mathbb{Z}_6$ üzerinde esnek küme olsun öyle ki $B = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$, her $x \in B$ için $H(x) = \{y \in \mathbb{Z}_6 \mid x\rho y \Leftrightarrow xy = \{\bar{0}\}\}$ ile $H : B \rightarrow P(\mathbb{Z}_6)$ fonksiyonu tanımlanmıştır. Bu durumda $H(\bar{0}) = \mathbb{Z}_6$, $F(\bar{0})$ 'nin alt halkası, $H(\bar{1}) = \{\bar{0}\}$, $F(\bar{1})$ 'nin alt halkası, $H(\bar{2}) = \{\bar{0}, \bar{3}\}$, $F(\bar{2})$ 'nin alt halkasıdır. Bu durumda (H, B) , (F, A) 'nin esnek alt halkasıdır [16].

Önerme 4.11 R bir halka olmak üzere, (F, A) ve (H, B) , R üzerinde esnek halkalar olsun.

(i) $(F, A) \tilde{\cap} (H, A)$, R üzerinde esnek halkadır.

(ii) Her $x \in A$ iken $F(x) \subset H(x)$ ise (F, A) , (H, A) 'nin alt halkasıdır [37].

Tanım 4.16 R bir halka olmak üzere $(F_i, A_i)_{i \in I}$, R üzerinde esnek halkaları olsun. Bu esnek halkalarının kesişimi (G, B) olarak tanımlansın, (G, B) aşağıdaki koşulları sağlar;

(i) $B = \bigcap_{i \in I} A_i$

(ii) Her $e \in B$ iken $G(e) = F_{i_0}(e)$ olacak şekilde $i_0 \in I$ vardır [37].

Tanım 4.17 R bir halka olmak üzere $(F_i, A_i)_{i \in I}$, R üzerinde esnek halkaları olsun. Bu durumda

(1) $B = \prod_{i \in I} A_i$ iken $(G, B) = \tilde{\wedge}_{i \in I} (F_i, A_i)$ esnek halkasıdır ve her $e = (e_i)_{i \in I} \in B$ için $G(e) = \bigcap_{i \in I} F_i(e_i)$.

(2) $B = \prod_{i \in I} C_i$ iken $(G, C) = \tilde{\vee}_{i \in I} (F_i, A_i)$ esnek halkadır ve her $e = (e_i)_{i \in I} \in C$ için $G(e) = \bigcup_{i \in I} F_i(e_i)$ [37].

Önerme 4.12 R bir halka olmak üzere (F, A) , R üzerinde esnek halka ve $\{(H_i, K_i) | i \in I\}$, (F, A) 'nin esnek alt halkalarının ailesi olsun.

(1) $\bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset$ ise $\tilde{\bigcap}_{i \in I} (H_i, K_i)$, (F, A) 'nin alt halkasıdır.

(2) $\tilde{\bigwedge}_{i \in I} (H_i, K_i)$, $\tilde{\bigwedge}_{i \in I} (F, A)$ 'nin alt halkasıdır.

(3) Her $i, j \in I$ için $i \neq j$ iken $K_i \cap K_j = \emptyset$ ise $\tilde{\bigcup}_{i \in I} (H_i, K_i)$, (F, A) 'nin alt halkasıdır [36].

(4) Her $i, j \in I$ için $K_i \cap K_j = \emptyset$ iken $\tilde{\bigvee}_{i \in I} (H_i, K_i)$, (F, A) 'nin esnek alt halkasıdır [37].

Önerme 4.13 R ve K birer halka olmak üzere (F, A) ve (H, B) , R üzerinde esnek halkalar ve (H, B) , (F, A) 'nin esnek alt halkası olsun. Eğer $f : R \rightarrow K$ bir homomorfizma ise $(f(F), A)$ ve $(f(H), B)$, K da esnek halkalardır ve $(f(H), B)$, $(f(F), A)$ 'nin esnek alt halkasıdır [16].

İspat $f : R \rightarrow K$ bir homomorfizma olduğundan her $x \in A$ ve her $y \in B$ için $f(F(x))$ ve $f(H(y))$, K üzerinde esnek halkalardır. Buradan $(f(F), A)$ ve $(f(H), B)$ de K üzerinde esnek halkalardır. Eğer (H, B) , (F, A) 'nin alt grubu ise her $y \in B$ için $H(y)$, $F(y)$ 'nin ve $f(H(y))$, $f(F(y))$ 'nin esnek alt grubudur. Tanım 4.15'ten $(f(H), B)$, $(f(F), A)$ 'nin esnek alt halkasıdır.

Tanım 4.18 R bir halka olmak üzere (F, A) , R üzerinde esnek halka olsun. Eğer her $x \in B$ için $H(x)$, $F(x)$ 'in ideali ise (H, B) 'ya (F, A) esnek ideali denir [16].

Not 4.1 (F, A) 'nın R üzerindeki her esnek ideali (F, A) 'nın esnek alt halkasıdır fakat (F, A) 'nın her esnek alt halkası (F, A) 'nın esnek ideali değildir.

Örnek 4.13 $R = M_2$, $A = M_2$ ve $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \neq 0 \right\}$. (F, A) , R üzerinde mutlak esnek halka ve her $x \in B$ için $H(x) = \{y \in R \mid xy = 0\}$. Bu durumda (H, B) , (F, A) 'nın esnek alt halkasıdır fakat ideali değildir [16].

Önerme 4.14 R bir halka olmak üzere (F, A) , R üzerinde esnek halka ve $\{(H_i, K_i) \mid i \in I\}$, (F, A) 'nın esnek ideallerinin ailesi olsun.

(1) $\bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset$ ise $\tilde{\bigcap}_{i \in I} (H_i, K_i)$, (F, A) 'nın esnek idealidir.

(2) $\tilde{\bigcap}_{i \in I} (H_i, K_i)$, $\tilde{\bigcap}_{i \in I} (F, A)$ 'nın esnek idealidir.

(3) Her $i, j \in I$ için $i \neq j$ iken $K_i \cap K_j = \emptyset$ ise $\tilde{\bigcup}_{i \in I} (H_i, K_i)$, (F, A) 'nın esnek idealidir [36].

(4) Her $i, j \in I$ için $K_i \cap K_j = \emptyset$ iken $\tilde{\bigcup}_{i \in I} (H_i, K_i)$, (F, A) 'nın esnek idealidir [37].

Önerme 4.15 R bir halka olmak üzere (F, A) , R üzerinde esnek halka olsun.

$U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ iken R üzerindeki her (G_1, U_1) ve (G_2, U_2) için;

$$(G_1, U_1) \tilde{\triangleleft} (F, A), (G_2, U_2) \tilde{\triangleleft} (F, A) \Rightarrow (G_1, U_1) \cap (G_2, U_2) \tilde{\triangleleft} (F, A) \text{ olur [37].}$$

Önerme 4.16 R bir halka olmak üzere (F, A) , R üzerinde esnek halka olsun. I ve J ayrık iken R üzerindeki her (G, I) ve (H, J) esnek kümeleri için;

$$(G, I) \tilde{\triangleleft} (F, A), (H, J) \tilde{\triangleleft} (F, A) \Rightarrow (G, I) \cup (H, J) \tilde{\triangleleft} (F, A) \text{ [37].}$$

Tanım 4.19 R ve K birer halka olmak üzere (F, A) ve (H, B) , sırasıyla R ve K üzerinde esnek halkalardır. Eğer $f : R \rightarrow K$ ve $g : A \rightarrow B$ iki fonksiyon ise (f, g) 'ye homomorfizma denir. Eğer;

(i) $f : R \rightarrow K$ bir epimorfizma

(ii) $g : A \rightarrow B$ bir örten fonksiyon

(iii) her $x \in A$ için $f(F(x)) = H(g(x))$

ise (f, g) , (F, A) 'dan (H, B) 'ye bir esnek homomorfizmadır ve $(f, g) : (F, A) \sim (H, B)$ ile gösterilir. Eğer f izomorfizma ve g bijektif fonksiyon ise (f, g) 'ye (F, A) 'dan (H, B) 'ye bir esnek izomorfizma denir. $(f, g) : (F, A) \simeq (H, B)$ ile gösterilir [16].

Örnek 4.14 $(\mathbb{Z}, +, \times)$ ve $(\mathbb{Z}_m, \oplus, \otimes)$ halkaları göz önüne alınsın. $f(k) = \bar{k}$ ile $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_m$ homomorfizması ve $g(k) = \bar{k}$ ile $g : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}_m$ bir bijektif fonksiyon tanımlansın. $F : \mathbb{Z}^+ \rightarrow P(\mathbb{Z})$ ve $F(x) = \{5kx \mid k \in \mathbb{Z}\}$ olsun. Eğer $H : \mathbb{Z}_m \rightarrow P(\mathbb{Z}_m)$ ve $H(\bar{u}) = \{\overline{uk} \mid k \in 5\mathbb{Z}\}$ ise $F(x) = 5x\mathbb{Z}$ olur. Açıkça görülür ki $(F, \mathbb{Z}^+)$ ve $(H, \mathbb{Z}_m)$ sırasıyla $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Z}_m$ üzerinde esnek halkalardır. $f(F(x)) = \{5kx \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ve $H(g(x)) = \{\overline{xs} \mid s \in 5\mathbb{Z}\}$ olduğundan $f(F(x)) = H(g(x))$ 'tir. $(f, g) : (F, \mathbb{Z}^+) \rightarrow (H, \mathbb{Z}_m)$ bir homomorfizmadır [16].

Önerme 4.17 R ve K birer halka olmak üzere (F, A) , R üzerinde esnek halka ve (H, B) , K üzerinde esnek küme olsun. Eğer (F, A) ve (H, B) arasında esnek homomorfizma varsa (H, B) , K üzerinde esnek halkadır [37].

İspat $(f, g) : (F, A) \rightarrow (H, B)$ bir esnek homomorfizma olsun. (F, A) , R üzerinde esnek halka olduğundan $F(R) = K$ da halkadır. Her $y \in B$ için $g(x) = y$ olacak şekilde $x \in A$ vardır. Buradan $H(y) = H(g(x)) = f(F(x))$, K halkasının alt halkasıdır. O halde (H, B) , K üzerinde esnek halkadır.

Önerme 4.18 R ve K birer halka olmak üzere (F, A) ve (H, B) sırasıyla R ve K üzerinde esnek halka olsunlar. Eğer $(f, g) : (F, A) \rightarrow (H, B)$ homomorfizma ve (F_1, A_1)

, (F, A) 'nin esnek alt halkası olsun. Bu durumda $(H, g(A_1))$, (H, B) 'nin esnek alt halkasıdır [37].

İspat $(f, g): (F, A) \rightarrow (H, B)$ homomorfizma ve (F_1, A_1) , (F, A) 'nin esnek alt halkası ise $g(A_1) \subset B$ ve $H(y)$, K üzerinde esnek alt halkadır. Buradan $(H, g(A_1))$, (H, B) nin esnek alt halkasıdır.

4.3 İdealistik Esnek Halkalar

Tanım 4.20 R bir halka olmak üzere (F, A) , R üzerinde esnek halka olsun. Eğer her $x \in A$ için $F(x)$, R 'nin ideali ise (F, A) 'ya R üzerinde idealistik esnek halka denir [37].

Örnek 4.15 Örnek 4.12'deki (F, A) , $\mathbb{Z}_6$ üzerinde idealistik esnek halkadır [16].

Not 4.2 Bir halkanın her ideali alt halka olduğundan R üzerindeki her idealistik esnek halka M üzerinde esnek halkadır fakat tersi doğru değildir.

Örnek 4.16 $R = M_2$, $A = M_2$ birer halka olsunlar ve $F(x) = \{y \in R \mid xy = 0\}$. (F, A) 'nin

R üzerinde esnek halka olduğu açıktır $x_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda

$F(x_0) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \dots \right\}$ R 'nin ideali değildir. Bu takdirde

(F, A) , R üzerinde idealistik esnek halka değildir [16].

Önerme 4.19 R bir halka olmak üzere (F, A) ve (F, B) , R üzerinde esnek halkalardır ve $B \subseteq A \subseteq M$ dir. Eğer (F, A) , R üzerinde idealistik esnek halka ise (F, B) de idealistik esnek halkadır [37].

Önerme 4.20 R bir halka olmak üzere (F, A) ve (H, B) , R üzerinde idealistik esnek halkalar olsun. Eğer $A \cap B \neq \emptyset$ ise $(F, A) \tilde{\cap} (H, B)$ de R üzerinde idealistik esnek halkadır [37].

Önerme 4.21 R bir halka olmak üzere (F, A) ve (H, B) , R üzerinde idealistik esnek halkalar olsun. Eğer $A \cap B = \emptyset$ ise $(F, A) \dot{\cup} (H, B)$ de R üzerinde idealistik esnek halkadır [37].

Önerme 4.22 R bir halka olmak üzere (F, A) ve (H, B) , R üzerinde idealistik esnek halkalar olsun. Bu durumda $(F, A) \tilde{\wedge} (H, B)$ de R üzerinde idealistik esnek halkadır [37].

Tanım 4.21 R bir halka olmak üzere (F, A) , R üzerinde idealistik esnek halka olsun. Eğer her $x \in A$ için $F(x) = \{0\}$ (sırasıyla, $F(x) = R$) ise (F, A) 'ya aşık (sırasıyla, mutlak) idealistik esnek halka denir [37].

Önerme 4.23 $f : R \rightarrow K$ bir halka epimorfizması olsun. Eğer (F, A) , R halkası üzerinde idealistik esnek halka ise $(f(F), A)$, K halkası üzerinde idealistik esnek halka olur [37].

İspat Her $x \in A$ için $F(x)$, R halkasının ideali olduğu için $f(F)(x) = f(F(x))$, K halkasının idealidir ve aynı zamanda örten homomorfik görüntüsü de K halkasının idealidir. Buradan $(f(F), A)$, K halkası üzerinde idealistik esnek halka olur.

Önerme 4.24 $f : R \rightarrow K$ bir halka epimorfizması ve (F, A) , R halkası üzerinde idealistik esnek halka olsun.

(i) Eğer her $x \in A$ için $F(x) = \text{Çek}(f)$ ise $(f(F), A)$, K halkası üzerinde aşık idealistik esnek halka olur.

(ii) Eğer (F, A) mutlak ise $(f(F), A)$, K halkası üzerinde mutlak idealistik esnek halka olur [37].

İspat (i) Kabul edelim ki her $x \in A$ için $F(x) = \text{Çek}(f)$ olsun. Her $x \in A$ için $f(F)(x) = f(F(x)) = \{0_K\}$ olur. Tanım 4.21 ve önerme 4.23 ten $(f(F), A)$, K halkası üzerinde aşık idealistik esnek halka olur.

(ii) Kabul edelim ki (F, A) mutlak olsun. Her $x \in A$ için $F(x) = R$ olur. Buradan her $x \in A$ için $f(F)(x) = f(F(x)) = f(R) = K$ dir. Tanım 4.21 ve Önerme 4.23 ten $(f(F), A)$, K halkası üzerinde mutlak idealistik esnek halka olur.

Önerme 4.25 R ve K birer halka olmak üzere (F, A) , R üzerinde idealistik esnek halka olsun. (H, B) , K üzerinde esnek küme olsun. Eğer (F, A) ve (H, B) arasında esnek homomorfizma varsa (H, B) , K üzerinde idealistik esnek halkadır [16].

İspat $(f, g): (F, A) \rightarrow (H, B)$ bir esnek homomorfizma olsun. (F, A) , R üzerinde idealistik esnek halka olduğundan $F(R) = K$ da halkadır. Her $y \in B$ için $g(x) = y$ olacak şekilde $x \in A$ vardır. Buradan $H(y) = H(g(x)) = f(F(x))$, K halkasının idealidir. Bu takdirde (H, B) , K üzerinde idealistik esnek halkadır.

4.4 Esnek Halkalar İçin İzomorfizma Teoremleri

Teorem 4.1 (1. İzomorfizma Teoremi) R ve K birer halka olmak üzere (F, A) ve (H, B) sırasıyla R ve K üzerinde idealistik esnek halkalar olsun. (f, g) fonksiyonu (F, A) 'dan (H, B) 'ye bir esnek homomorfizma ve her $x \in A$ için $\zeta_{ekf} \subset F(x)$ olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanır.

1. $x \in A$ olmak üzere $I(x) = F(x) / \zeta_{ekf}$ ve $J(x) = f(F(x))$ iken $(I, A) \simeq (J, A)$
2. g bijektif fonksiyon ise $(I, A) \simeq (H, B)$ [16].

İspat 1. ζ_{ekf} , R 'nin idealidir ve buradan R / ζ_{ekf} bir halkadır. Bu nedenle her $x \in A$ için ζ_{ekf} , $F(x)$ 'in idealidir ve $F(x) / \zeta_{ekf}$ bir halkadır. $F(x) / \zeta_{ekf}$ daima R / ζ_{ekf} 'in bir idealidir. Her $x \in A$ için $J(x) = f(F(x)) = H(g(x))$ 'in K 'nin ideali olduğu görülür. Bu durumda (J, A) , K 'nin idealistik esnek halkasıdır.

$\bar{f}: R / \zeta_{ekf} \rightarrow K$ fonksiyonu her $a \in R$ için $\bar{f}(a + \zeta_{ekf}) = f(a)$ olarak tanımlansın. $\bar{f}$ 'nin R / ζ_{ekf} 'ten K 'ya bijektif fonksiyon olduğu açıktır. Her $a, b \in R$ için;

$$\begin{aligned}
 \bar{f}((a + \zeta_{ekf}) + (b + \zeta_{ekf})) &= \bar{f}((a + b) + \zeta_{ekf}) \\
 &= f(a + b) = f(a) + f(b) \\
 &= \bar{f}(a + \zeta_{ekf}) + \bar{f}(b + \zeta_{ekf}) \\
 \bar{f}((a + \zeta_{ekf})(b + \zeta_{ekf})) &= \bar{f}((ab) + \zeta_{ekf}) \\
 &= f(ab) = f(a)f(b)
 \end{aligned}$$

$$= \bar{f}(a + \zeta ekf) \bar{f}(b + \zeta ekf)$$

Bu durumda $\bar{f}$ bir izomorfizmadır.

$\bar{g}: A \rightarrow A$ fonksiyonu $\bar{g}(x) = x$ olarak tanımlansın. $\bar{g}$, A' 'dan A üzerine biyektif fonksiyondur. $\bar{f}(I(x)) = \bar{f}(F(x)/\zeta ekf) = f(F(x)) = J(x) = J(\bar{g}(x))$ elde edilir.

Buradan $(\bar{f}, \bar{g})$ bir izomorfizmadır, öyleyse $(I, A) \simeq (J, A)$ olur

2. $\bar{f}: R/\zeta ekf \rightarrow K$ fonksiyonu $\bar{f}(r + \zeta ekf) = f(r)$ olacak şekilde tanımlansın. Bu durumda $\bar{f}$, $R/\zeta ekf$ 'den K 'ya bir izomorfizmadır. $\bar{g}$ biyektif fonksiyon olduğundan ve $\bar{f}(I(x)) = \bar{f}(F(x)/\zeta ekf) = f(F(x)) = H(g(x))$ olduğundan $(I, A) \simeq (H, B)$.

Teorem 4.2 R bir halka olmak üzere (F, A) , R üzerinde idealistik esnek halka olsun.

$P(x) = H(x)/(M \cap N)$, $Q(x) = (H(x) + N)/N$, $S(x) = I(x)/(M \cap N)$,
 $T(x) = (I(x) + M)/M$, $M = \bigcap_{x \in B} H(x)$, $N = \bigcap_{x \in C} I(x)$ iken (H, B) ve (I, C) , (F, A) 'nın idealleri ise $(P, B) \sim (Q, B)$ ve $(S, C) \sim (T, C)$ dir [16].

İspat Öncelikle $K = \left\langle \bigcup_{x \in B} H(x) \right\rangle$ ve $L = \left\langle \bigcup_{x \in C} I(x) \right\rangle$ olsun. $M = \bigcap_{x \in B} H(x)$, R 'nin bir idealidir. Açık olarak görülür ki M , K 'nın da idealidir ve buradan $M \cap N$ de K 'nın idealidir. O halde (P, B) , $K/(M \cap N)$ halkasının idealistik esnek halkası olur. (Q, B) de $(K + N)/N$ halkasının idealistik esnek halkası olur.

$f: K/M \cap N \rightarrow (K + N)/N$ fonksiyonu $f(k + M \cap N) = k + N$ olacak şekilde ve $g: B \rightarrow B$ fonksiyonu $g(x) = x$ olacak şekilde tanımlansın. Buradan g biyektif fonksiyonken $f(P(x)) = f(H(x)/M \cap N) = (H(x) + N)/N = Q(x) = Q(g(x))$ olur, dolayısıyla f , $K/M \cap N$ 'den $(K + N)/N$ 'ye homomorfizmadır. Bu durumda $(P, B) \sim (Q, B)$ olur.

Aynı şekilde $(S, C) \sim (T, C)$ de ispatlanabilir.

Teorem 4.3 (2. İzomorfizma Teoremi) R bir halka olmak üzere (F, A) , R üzerinde idealistik esnek halka olsun. $P(x) = H(x)/(M \cap N)$, $Q(x) = (H(x) + N)/N$,

$N = \bigcap_{x \in C} I(x)$ iken (H, B) ve (I, C) , her $x \in B$ için $H(x) = M$ olacak şekilde (F, A) 'nın idealleri ise $(P, B) \simeq (Q, B)$ dir [16].

İspat Teorem 4.2'deki gibi ispatlanabilir.

Teorem 4.4 (3. İzomorfizma Teoremi) R bir halka olmak üzere (F, A) , R üzerinde idealistik esnek halka ve $P(x) = (F(x)/N) / (M/N)$, $Q(x) = F(x)/M$, $M = \bigcap_{x \in B \cap C} H(x)$, $N = \bigcap_{x \in B \cap C} I(x)$ olsun. $B \cap C \neq \emptyset$ iken her $x \in B \cap C$ için $I(x) \subset H(x)$ olacak şekilde (H, B) ve (I, C) , (F, A) 'nın idealleri ise $(P, B \cap C) \simeq (Q, B \cap C)$ dir [16].

İspat $M = \bigcap_{x \in B \cap C} H(x)$ ve $N = \bigcap_{x \in B \cap C} I(x)$, R 'nin idealleridir ve N, M 'nin idealidir.

Açıktır ki $(P, B \cap C)$, $(R/N) / (M/N)$ halkası üzerinde idealistik esnek halka ve $(Q, B \cap C)$, R/M halkası üzerinde idealistik esnek halkadır.

$f : (R/N) / (M/N) \rightarrow R/M$ olacak şekilde bir $f(r + N + (M/N)) = r + M$ fonksiyonu ve $g : B \cap C \rightarrow B \cap C$ olacak şekilde bir $g(x) = x$ fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda f fonksiyonu $(R/N) / (M/N)$ 'den R/M 'ye bir izomorfizmadır. g biyektif fonksiyondur ve $f(P(x)) = f\left((F(x)/N) / (M/N)\right) = F(x)/M = Q(g(x))$ olur. Buradan $(P, B \cap C) \simeq (Q, B \cap C)$ dir.

4.5 Esnek Halkaların Bulanık idealleri ve Bulanık İzomorfizma Teoremleri

Tanım 4.22 R bir halka olmak üzere (F, A) , R üzerinde bir esnek halka ve μ , R 'nin bulanık alt kümesi olsun. Eğer her $t \in A, x, y \in F(t)$ için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa μ 'ye (F, A) 'nın bulanık alt halkası denir.

(i) $\mu(x - y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$

(ii) $\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$ [17].

Tanım 4.23 R bir halka olmak üzere (F, A) , R üzerinde bir idealistik esnek halka ve μ , R 'nin bulanık alt kümesi olsun. Eğer her $t \in A, x, y \in F(t)$ için, aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa μ 'ye (F, A) 'nin bulanık ideali denir.

$$(i) \mu(x - y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$$

$$(ii) \mu(xy) \geq \mu(x) \vee \mu(y) [17].$$

Not 4.2 (1) R bir halka olmak üzere (F, A) , R üzerinde idealistik esnek halka ve μ , R 'nin bulanık alt kümesi olsun. μ 'nün (F, A) 'nin bulanık ideali olması için gerek ve yeter koşul her $t \in A$ için μ 'nün $F(t)$ 'nin bulanık ideali olmasıdır.

(2) R bir halka olmak üzere (F, A) , R üzerinde idealistik esnek halka olsun. Eğer μ , R 'nin bulanık ideali ise μ , (F, A) 'nin da bulanık idealidir. Tersisi doğru değildir [17].

Örnek 4.17 $S = \mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ ve $A = \{\bar{1}, \bar{2}\}$ olacak şekilde her $x \in A$ için; $F(\bar{x}) = \{\bar{y} \in S \mid \bar{x} \rho \bar{y} \Leftrightarrow \overline{xy} = \bar{0}\}$ ile tanımlanan $F : A \rightarrow P(S)$ fonksiyonu için (F, A) ikilisi S üzerinde bir esnek halkadır. Bu durumda;

$$F(\bar{1}) = \{\bar{0}\}, F(\bar{2}) = \{\bar{0}, \bar{3}\} \text{ olur ve } (F, A), S \text{ üzerinde bir idealistik esnek halkadır.}$$

μ , $\mathbb{Z}_6$ halkasının bir bulanık alt kümesi olsun.

$$\mu(\bar{x}) = \begin{cases} 0.8; & \bar{x} \in \{\bar{0}, \bar{5}\} \\ 0.1; & \bar{x} \in \{\bar{1}, \bar{3}\} \\ 0.5; & \text{aksi takdirde} \end{cases} \text{ olarak tanımlandığında her } t \in A, \bar{x}, \bar{y} \in F(t) \text{ için}$$

$$\mu(\bar{x} - \bar{y}) \geq \mu(\bar{x}) \wedge \mu(\bar{y})$$

$\mu(\overline{xy}) \geq \mu(\bar{x}) \vee \mu(\bar{y})$ sağlanır. Buradan μ , (F, A) 'nin bulanık idealidir.

Fakat μ , S 'nin bulanık ideali değildir çünkü $\mu(\bar{5} - \bar{2}) = \mu(\bar{3}) < \mu(\bar{5}) \wedge \mu(\bar{2})$ dir [17].

Önerme 4.26 R bir halka olmak üzere (F, A) , R üzerinde bir idealistik esnek halka ve μ , R 'nin bulanık alt kümesi olsun. μ 'nün (F, A) 'nin bulanık ideali olması için gerek ve yeter koşul her $x \in A$ ve $t \in [0, 1]$ için $U(t, x) = \{r \in F(x) \mid \mu(r) \geq t\}$ 'in $F(x)$ 'in ideali olmasıdır [17].

μ R halkası üzerinde bir bulanık idealdir. $\forall x, y \in R$ için R üzerinde bir denklik bağıntısı tanımlayalım.

$$x \sim y \Leftrightarrow \mu(x - y) = \mu(0) \quad (4.7)$$

Buradaki 0 R 'nin sıfır elemanıdır.

Teorem 4.5 " $\sim$ " R halkası üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

Her $x, y \in R$ iken x 'i içeren denklik sınıfı

$$\mu_x = \{y \in R \mid x \sim y \in R\} \quad (4.8)$$

olacak şekilde tanımlanır.

R 'deki tüm denklik sınıflarının kümesi de

$$R / \mu = \{\mu_x \mid x \in R\} \quad (4.9)$$

ile verilsin.

R / μ halkası üzerinde iki işlem tanımlanacaktır. Her $x, y \in R$ olsun.

$$\mu_x + \mu_y = \mu_{x+y} \quad (4.10)$$

$$\mu_x \mu_y = \mu_{xy} \quad (4.11)$$

Bu işlemler iyi tanımlıdır ve R / μ de halkadır [17].

Yardımcı Teorem 4.1 R bir halka olmak üzere I, R 'nin bir ideali ve μ, R 'nin bir bulanık ideali olsun.

1. Eğer μ, I 'ya kısıtlanırsa, μ_I ile gösterilir. μ_I, I 'nın bulanık idealidir.

2. $I / \mu_I, R / \mu_I$ 'nin idealidir [17].

Kolaylık olması için μ_I yerine μ kullanılsın.

R bir halka olmak üzere μ, R 'nin bir bulanık ideali ve $(F, A), R$ üzerinde idealistik esnek halkadır. Her $x \in A$ için $\mu, F(x)$ 'e kısıtlanırsa her $x \in A$ için $\mu, F(x)$ 'in bulanık ideali olur ve $F(x) / \mu, R / \mu$ 'nün idealidir. Buradan;

$$F / \mu : A \rightarrow P(R / \mu)$$

$$x \rightarrow (F / \mu)(x) = F(x) / \mu \quad (4.12)$$

olarak tanımlanabilir [17].

Teorem 4.6 R bir halka olmak üzere μ , R 'nin bir bulanık ideali ve (F, A) , R üzerinde bir idealistik esnek halka olsun. Bu durumda;

1. μ , (F, A) 'nın bulanık idealidir.
2. $(F / \mu, A)$, R / μ üzerinde bir idealistik esnek halkadır [17].

Notasyon 4.1 $(F / \mu, A)$; μ bulanık ideali tarafından indirgenmiş (F, A) 'nın bir esnek bölüm halkası olarak adlandırılır [17].

Örnek 4.18 $S = \mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ ve $A = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ olacak şekilde her $\bar{x} \in A$ için $F(\bar{x}) = \{\bar{y} \in S \mid \bar{x} \rho \bar{y} \Leftrightarrow \overline{xy} = \bar{0}\}$ ile tanımlanan $F : A \rightarrow P(S)$ fonksiyonu için (F, A) ikilisi S üzerinde bir esnek halkadır. Bu durumda;

$F(\bar{0}) = \mathbb{Z}_6$, $F(\bar{1}) = \{\bar{0}\}$, $F(\bar{2}) = \{\bar{0}, \bar{3}\}$ S 'nin idealidir. (F, A) , S üzerinde bir idealistik esnek halkadır.

μ , $\mathbb{Z}_6$ halkasının bir bulanık alt kümesi olsun.

$$\mu(\bar{x}) = \begin{cases} 0.8 & \bar{x} \in \{\bar{0}, \bar{3}\} \\ 0.2 & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad \text{olarak tanımlandığında her } t \in A, \bar{x}, \bar{y} \in F(t) \text{ için}$$

$$\mu(\bar{x} - \bar{y}) \geq \mu(\bar{x}) \wedge \mu(\bar{y})$$

$\mu(\overline{xy}) \geq \mu(\bar{x}) \vee \mu(\bar{y})$ sağlanır. Buradan μ , (F, A) 'nın bulanık idealidir.

$$(F / \mu)(\bar{0}) = F(\bar{0}) / \mu = \{\{\bar{0}, \bar{3}\}, \{\bar{2}, \bar{5}\}, \{\bar{1}, \bar{4}\}\}$$

$$(F / \mu)(\bar{1}) = F(\bar{1}) / \mu = \{\{\bar{0}\}\}$$

$$(F / \mu)(\bar{2}) = F(\bar{2}) / \mu = \{\{\bar{0}, \bar{3}\}\} \quad [17].$$

Yardımcı teorem 4.2 R bir halka olmak üzere μ ve ν idealleri R 'nin bulanık ideali iseler, $\mu \cap \nu$ de R 'nin bulanık idealidir [17].

Teorem 4.7 R bir halka olmak üzere (F, A) ; R üzerinde bir idealistik esnek halka, μ ve ν , (F, A) 'nın iki bulanık ideali olsun. Bu durumda $\mu \cap \nu$ de (F, A) 'nın bulanık idealidir [17].

R bir halka ve μ , R 'de bulanık ideal olsun.

$$R_\mu = \{x \in R \mid \mu(x) = \mu(0)\}$$

ile gösterilir. Bu durumda R_μ , R 'nin idealidir [17].

Yardımcı Teorem 4.3 R bir halka olmak üzere μ , R 'nin bir bulanık ideali ve (F, A) , R üzerinde bir idealistik esnek halka olsun. Her $t \in A$ olmak üzere;

$F_\mu(t) = \{x \in F(t) \mid \mu(x) = \mu(0)\}$ dir. Bu durumda (F_μ, A) , R_μ halkası üzerinde idealistik esnek halkadır [17].

Yardımcı Teorem 4.4 R bir halka olmak üzere μ , R 'nin bir bulanık ideali olsun. R / R_μ 'nün bulanık alt kümesi olan ve her $x \in R$ için $\mu^*(x + R_\mu) = \mu(x)$ ile tanımlanan μ^* , R / R_μ 'nün bulanık idealidir [17].

Teorem 4.8 R bir halka olmak üzere μ , R 'nin bir bulanık ideal ve (F, A) , R üzerinde bir idealistik esnek halka olsun. Her $t \in A$ için $R_\mu \subset F(t)$ olmak üzere

1. Her $t \in A$ için $(F / R_\mu)(t) = F(t) / R_\mu$ iken $(F / R_\mu, A)$, R / R_μ üzerinde idealistik esnek halkadır.

2. Teorem 4.4'te tanımlanan μ^* (R / R_μ 'nün bulanık alt kümesi idi), $(F / R_\mu, A)$ idealistik esnek halkasının bulanık idealidir [17].

Yardımcı Teorem 4.5 R ve K birer halka olmak üzere $f : R \rightarrow K$ bir epimorfizma ve μ , R 'nin bulanık ideali ise $f(\mu)$, K 'nin bulanık idealidir [17].

Yardımcı Teorem 4.6 R ve K birer halka olmak üzere $f : R \rightarrow K$ bir homomorfizma olsun ve μ , R 'nin bulanık ideali ve ν , K 'nin bulanık ideali olsun.

1. f bir epimorfizma ise $f(f^{-1}(\nu)) = \nu$

2. μ , $\check{C}ekf$ üzerinde sabit ise $f^{-1}(f(\mu)) = \mu$ [17].

Teorem 4.9 R ve K birer halka olmak üzere $f : R \rightarrow K$ bir homomorfizma ve ν , K 'de bir bulanık ideal ise $f^{-1}(\nu)$, R 'nin bir bulanık idealidir [17].

Teorem 4.10 (1. Bulanık İzomorfizma Teoremi)

R ve K birer halka olmak üzere (F, A) ve (H, B) sırasıyla R ve K üzerinde idealistik esnek halka olsun. Eğer (f, g) fonksiyonu (F, A) 'dan (H, B) 'ye bir esnek homomorfizma ve $\check{C}ekf \subset R_\mu$ olacak şekilde μ bulanık idealse;

1. $(F / \mu, A) \simeq (f(F) / f(\mu), A)$

2. g bijektif fonksiyon ise $(F / \mu, A) \simeq (H / f(\mu), B)$ [17].

Teorem 4.11 (2. Bulanık İzomorfizma Teoremi)

R bir halka olmak üzere (F, A) , R üzerinde idealistik esnek halka olsun. μ ve ν $\mu(0) = \nu(0)$ olacak şekilde R 'nin iki bulanık idealidir.

$((F_\mu + F_\nu) / \nu, A) \simeq (F_\mu / \mu \cap \nu, A)$ [17].

Teorem 4.12 (3. Bulanık İzomorfizma Teoremi) R bir halka olmak üzere (F, A) , R üzerinde idealistik esnek halka olsun. μ ve ν her $t \in A$ için $F_\mu(t) = R_\mu$ olacak şekilde R 'nin bulanık idealleridir.

$\left((F / \nu) / (F_\mu / \nu), A \right) \simeq (F / \mu, A)$ [17].

GAMMA HALKALARI

5.1 Gamma Halkaları

Şimdi, Γ – halkalarının tanımını ve bir Γ – halkanın ideal tanımını vereceğiz.

Tanım 5.1 S ve Γ iki toplamsal abelyan grup olsunlar. Eğer $S \times \Gamma \times S \rightarrow S$ olacak şekilde bir dönüşüm $(a, \alpha, b) \mapsto a\alpha b$ olmak üzere aşağıdaki durumları sağlarsa S 'ye Γ – halka denir; her $a, b, c \in S$ ve her $\alpha, \beta \in \Gamma$ için,

$$(i) (a + b)\alpha c = a\alpha c + b\alpha c,$$

$$(ii) a\alpha(b + c) = a\alpha b + a\alpha c,$$

$$(iii) a(\alpha + \beta)b = a\alpha b + a\beta b,$$

$$(iv) a\alpha(b\beta c) = (a\alpha b)\beta c.$$

S 'nin bir alt kümesi olan A , S Γ – halkanın bir sol (sağ) ideali; S 'nin bir toplamsal alt grubudur ve $S\Gamma A = \{x\alpha y \mid x \in S, \alpha \in \Gamma, y \in A\}$ olmak üzere $S\Gamma A \subset A$ ($S\Gamma A \subset A$) şeklindedir. Eğer A hem sol ideal hemde bir sağ ideal ise, bu durumda A S 'nin bir Γ – ideali (gamma ideali) olarak adlandırılır [14].

Tanım 5.2 S ve K iki Γ – halka ve f , S 'den K 'ya bir dönüşüm olsun. $\forall a, b \in S$ ve $\alpha \in \Gamma$ için;

$$f(a + b) = f(a) + f(b) \tag{5.1}$$

$$f(a\alpha b) = f(a)\alpha f(b) \quad (5.2)$$

oluyorsa f 'ye bir Γ – homomorfizma denir [15].

Tanım 5.3 μ, S Γ – halkasında bulanık küme olmak üzere $\forall x, y \in S$ ve $\alpha \in \Gamma$ için aşağıdaki koşulları sağlarsa μ 'ye S Γ – halkasının bir bulanık ideali denir.

$$(i) \mu(x - y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$$

$$(ii) \mu(x\alpha y) \geq \mu(x) \vee \mu(y) \quad [14].$$

Örnek 5.1 Toplamsal ve abelyan grupları göz önüne alalım.

$$M = \{[\bar{0} \ \bar{0} \ \bar{0}], [\bar{1} \ \bar{0} \ \bar{0}], [\bar{1} \ \bar{1} \ \bar{0}], [\bar{0} \ \bar{1} \ \bar{0}]\} \subset (\mathbb{Z}_2)_{1 \times 3} \text{ ve}$$

$$\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{bmatrix} \right\} \subset (\mathbb{Z}_2)_{3 \times 1} \text{ işlem olarak matris toplamı alınmıştır.}$$

$$M \times \Gamma \times M \rightarrow M$$

$(a, \alpha, b) \rightarrow a\alpha b$ olacak şekilde tanımlansın.

$$a) \ a = [\bar{0} \ \bar{0} \ \bar{0}], b = [\bar{1} \ \bar{0} \ \bar{0}], c = [\bar{1} \ \bar{1} \ \bar{0}] \in M \text{ ve } \alpha = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix} \in \Gamma \text{ için } \Gamma -$$

halka şartları sağlanır mı kontrol edelim.

(i)

$$([\bar{0} \ \bar{0} \ \bar{0}] + [\bar{1} \ \bar{0} \ \bar{0}]) \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{bmatrix} [\bar{1} \ \bar{1} \ \bar{0}] = [\bar{1} \ \bar{0} \ \bar{0}] \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{bmatrix} [\bar{1} \ \bar{1} \ \bar{0}] = [\bar{0}][\bar{1} \ \bar{1} \ \bar{0}] = [\bar{0} \ \bar{0} \ \bar{0}]$$

$$\begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix} [\bar{0}] \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix} + [\bar{0}] \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}$$

$a = [\bar{0} \ \bar{0} \ \bar{0}]$ için (ii), (iii) ve (iv) de sağlanır.

b) $a = [\bar{1} \ \bar{1} \ \bar{0}], b = [\bar{0} \ \bar{1} \ \bar{0}], c = [\bar{1} \ \bar{0} \ \bar{0}] \in M$ ve $\alpha = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix} \in \Gamma$ için $\Gamma -$

halka şartları sağlanır mı kontrol edelim.

(i)

$$([\bar{1} \ \bar{1} \ \bar{0}] + [\bar{0} \ \bar{1} \ \bar{0}]) \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} = [\bar{1} \ \bar{0} \ \bar{0}] \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} = [\bar{0}] \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} = [\bar{1}] \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} + [\bar{1}] \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}$$

(ii)

$$\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{bmatrix} ([\bar{0} \ \bar{1} \ \bar{0}] + [\bar{1} \ \bar{0} \ \bar{0}]) = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix} = [\bar{1}] \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{bmatrix} [\bar{0} \ \bar{1} \ \bar{0}] + \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{bmatrix} [\bar{1} \ \bar{0} \ \bar{0}] = [\bar{1}] [\bar{0} \ \bar{1} \ \bar{0}] + [\bar{1}] \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix}$$

(iii)

$$[\bar{1} \quad \bar{1} \quad \bar{0}] \left(\begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix} \right) [\bar{0} \quad \bar{1} \quad \bar{0}] = [\bar{1} \quad \bar{1} \quad \bar{0}] \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{bmatrix} [\bar{0} \quad \bar{1} \quad \bar{0}] = [\bar{1}] [\bar{0} \quad \bar{1} \quad \bar{0}] = [\bar{0} \quad \bar{1} \quad \bar{0}]$$

$$[\bar{1} \quad \bar{1} \quad \bar{0}] \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{bmatrix} [\bar{0} \quad \bar{1} \quad \bar{0}] + [\bar{1} \quad \bar{1} \quad \bar{0}] \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix} [\bar{0} \quad \bar{1} \quad \bar{0}] = [\bar{1}] [\bar{0} \quad \bar{1} \quad \bar{0}] + [\bar{0}] [\bar{0} \quad \bar{1} \quad \bar{0}] = [\bar{0} \quad \bar{1} \quad \bar{0}]$$

(iv)

$$[\bar{1} \quad \bar{1} \quad \bar{0}] \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{bmatrix} ([\bar{0} \quad \bar{1} \quad \bar{0}] \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix} [\bar{1} \quad \bar{0} \quad \bar{0}]) = [\bar{1} \quad \bar{1} \quad \bar{0}] \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{bmatrix} [\bar{0} \quad \bar{0} \quad \bar{0}] = [\bar{1}] [\bar{0} \quad \bar{0} \quad \bar{0}] = [\bar{0} \quad \bar{0} \quad \bar{0}]$$

$$([\bar{1} \quad \bar{1} \quad \bar{0}] \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{bmatrix} [\bar{0} \quad \bar{1} \quad \bar{0}]) \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix} [\bar{1} \quad \bar{0} \quad \bar{0}] = ([\bar{1}] [\bar{0} \quad \bar{1} \quad \bar{0}]) \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix} [\bar{1} \quad \bar{0} \quad \bar{0}] = [\bar{0} \quad \bar{0} \quad \bar{0}]$$

a) ve b) den her $a, b, c \in M$ ve her $\alpha, \beta \in \Gamma$ için koşullar sağlanır. Bu durumda M Γ – halkadır [12].

Örnek 5.2 $S = \mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$, $\Gamma = \mathbb{Z}$ olsun.

$$S \times \Gamma \times S \rightarrow S$$

$(a, \alpha, b) \rightarrow a\alpha b$ olacak şekilde tanımlansın ve her $a, b \in S$ ve $\alpha \in \Gamma$ için $\bar{a}\alpha\bar{b} = \overline{a\alpha b}$ olsun.

Her $a, b, c \in S$ ve her $\alpha, \beta \in \Gamma$ için,

(i) $(a+b)\alpha c = a\alpha c + b\alpha c,$

(ii) $a\alpha(b+c) = a\alpha b + a\alpha c,$

(iii) $a(\alpha + \beta)b = a\alpha b + a\beta b,$

(iv) $a\alpha(b\beta c) = (a\alpha b)\beta c.$

sağlanır. Bu durumda S bir Γ – halkadır [16].

ESNEK GAMMA HALKALARI

6.1 Esnek Gamma Halkaları

Bu bölümde M boştan farklı küme olmak üzere bir Γ – halka ve burada R için M ’nin bir elemanı, Γ ’nin bir elemanı ve M ’nin bir elemanı arasındaki keyfi bir üçlü bağıntısı olarak bahsedeceğiz. Yani $R, M \times \Gamma \times M$ ’nin bir alt kümesidir aksi takdirde bu durum açıklanamaz. Küme değer fonksiyonunu $F : N \rightarrow P(M)$ olarak gösteririz ve her $a \in N$ için, $F(a) = \{b \in M \mid R(a\alpha b); \forall \alpha \in \Gamma\}$ olarak tanımlanabilir. Bu durumda (F, N) çifti A üzerinde bir esnek kümedir [37].

Tanım 6.1 M bir Γ – halka olmak üzere (F, N) , M üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer her $a \in N \subset M$ olmak üzere $F(a)$, M ’nin bir alt Γ – halkası ise (F, N) ’ye M üzerinde bir esnek Γ – halka denir [37].

Örnek 6.1 Toplamsal ve abelyan grupları göz önüne alalım.

$$M = \{[\bar{0} \ \bar{0} \ \bar{0}], [\bar{1} \ \bar{0} \ \bar{0}], [\bar{1} \ \bar{1} \ \bar{0}], [\bar{0} \ \bar{1} \ \bar{0}]\} \subset (\mathbb{Z}_2)_{1 \times 3} \text{ ve}$$

$$\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{bmatrix} \right\} \subset (\mathbb{Z}_2)_{3 \times 1} \text{ işlem olarak matris toplamı alınmıştır.}$$

$$M \times \Gamma \times M \rightarrow M$$

$$(a, \alpha, b) \rightarrow a\alpha b \text{ olacak şekilde tanımlansın.}$$

Her $a, b, c \in M$ ve her $\alpha, \beta \in \Gamma$ için,

$$(i) (a+b)\alpha c = a\alpha c + b\alpha c,$$

$$(ii) a\alpha(b+c) = a\alpha b + a\alpha c,$$

$$(iii) a(\alpha + \beta)b = a\alpha b + a\beta b,$$

$$(iv) a\alpha(b\beta c) = (a\alpha b)\beta c. \text{ olur. Bu durumda } M \text{ } \Gamma - \text{ halkadır.}$$

$$N = \{[\bar{0} \quad \bar{0} \quad \bar{0}], [\bar{1} \quad \bar{1} \quad \bar{0}]\} \subset M \text{ ve } F : N \rightarrow P(M)$$

Her $a \in N$ için

$$F(a) = \{b \in M \mid R(a\alpha b) \Leftrightarrow a\alpha b \in \{[\bar{0} \quad \bar{0} \quad \bar{0}], [\bar{1} \quad \bar{1} \quad \bar{0}], [\bar{0} \quad \bar{1} \quad \bar{0}]\}, \forall \alpha \in \Gamma\}$$

$$F([\bar{0} \quad \bar{0} \quad \bar{0}]) = \{[\bar{0} \quad \bar{0} \quad \bar{0}]\} \text{ ve } F([\bar{1} \quad \bar{1} \quad \bar{0}]) = \{[\bar{0} \quad \bar{0} \quad \bar{0}], [\bar{1} \quad \bar{1} \quad \bar{0}], [\bar{0} \quad \bar{1} \quad \bar{0}]\}$$

M Γ – halkasının alt halkalarıdır. Bu durumda (F, N) , M ’nin esnek Γ – halkasıdır [37].

Teorem 6.1 M bir Γ – halka olmak üzere (F, A) ve (G, B) , M üzerinde esnek Γ – halkalar olsun. Bu durumda $(F, A) \tilde{\wedge} (G, B)$ de M üzerinde esnek Γ – halkadır [37].

İspat: Her $(x, y) \in A \times B$ için $H(x, y) = F(x) \cap G(y)$ iken $(F, A) \tilde{\wedge} (G, B) = (H, A \times B)$ olarak tanımlanmıştı. (F, A) ve (G, B) esnek halka olduğundan $F(x)$ ve $G(y)$, M Γ – halkasının alt Γ – halkalarıdır. $F(x) \cap G(y)$ kesişimleri de alt Γ – halka olacaktır. Bu durumda her $(x, y) \in A \times B$ için $H(x, y)$ de M Γ – halkasının alt Γ – halkası olur. Dolayısıyla $(F, A) \tilde{\wedge} (G, B)$, M Γ – halkası üzerinde esnek Γ – halkasıdır.

Tanım 6.2 M bir Γ – halka olmak üzere (F, A) ve (G, B) , M üzerinde esnek Γ – halkalar olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa (G, B) ’ye (F, A) ’nın esnek alt Γ – halkası denir.

$$(i) B \subset A$$

$$(ii) \text{ Her } x \in B \text{ için } G(x), F(x) \text{’in alt } \Gamma - \text{ halkasıdır [37].}$$

Önerme 6.1 M bir Γ –halka olmak üzere (F, A) ve (G, B) , M üzerinde esnek Γ –halkalar olsun.

(i) $(F, A) \tilde{\cap} (G, A)$ M üzerinde esnek Γ –halkadır.

(ii) her $x \in A$ iken $F(x) \subset G(x)$ ise (F, A) , (G, A) 'nın alt Γ –halkadır [37].

Tanım 6.3 M bir Γ –halka olmak üzere $(F_i, A_i)_{i \in I}$, M üzerinde esnek Γ –halkaları olsun. Bu esnek Γ –halkalarının kesişimi (G, B) olarak tanımlansın, (G, B) aşağıdaki koşulları sağlar;

(i) $B = \bigcap_{i \in I} A_i$

(ii) Her $e \in B$ iken $G(e) = F_{i_0}(e)$ olacak şekilde $i_0 \in I$ vardır [37].

Tanım 6.4 M bir Γ –halka olmak üzere $(F_i, A_i)_{i \in I}$ M üzerinde esnek Γ –halkaları olsun. Bu durumda;

(1) $B = \prod_{i \in I} A_i$ iken $(G, B) = \tilde{\bigwedge}_{i \in I} (F_i, A_i)$ esnek Γ –halkasıdır ve her $e = (e_i)_{i \in I} \in B$ için $G(e) = \bigcap_{i \in I} F_i(e_i)$.

(2) $B = \prod_{i \in I} C_i$ iken $(G, C) = \tilde{\bigvee}_{i \in I} (F_i, A_i)$ esnek Γ –halkasıdır ve her $e = (e_i)_{i \in I} \in C$ için $G(e) = \bigcup_{i \in I} F_i(e_i)$ [37].

Teorem 6.2 M bir Γ –halka olmak üzere (F, A) , M üzerinde esnek Γ –halka olsun.

I indeks kümesi olmak üzere $\{(F_i, A_i)_{i \in I} \mid i \in I\}$, (F, A) 'nın esnek alt Γ –halkalarının boştan farklı bir ailesi ise

(1) $\bigcap_{i \in I} (F_i, A_i)$, (F, A) 'nın esnek alt Γ –halkasıdır.

(2) $\tilde{\bigwedge}_{i \in I} (F_i, A_i)$, (F, A) 'nın esnek alt Γ –halkasıdır.

(3) Her $i, j \in I$ için $A_i \cap A_j = \emptyset$ iken $\tilde{\bigvee}_{i \in I} (F_i, A_i)$, (F, A) 'nın esnek alt Γ –halkasıdır [37].

Tanım 6.5 M bir Γ – halka olmak üzere (F, N) , M üzerinde esnek Γ – halka olsun.

Aşağıdaki koşullar sağlanırsa (G, U) ya (F, N) ’nin esnek sol(sağ) ideali denir.

(i) $U \subset N$

(ii) Her $x \in U$ için $F(x)\Gamma G(x) \subset G(x)$ ($G(x)\Gamma F(x) \subset G(x)$) [37].

Örnek 6.2 Toplamsal ve abelyan grupları göz önüne alalım.

$$M = \{[\bar{0} \ \bar{0} \ \bar{0}], [\bar{1} \ \bar{0} \ \bar{0}], [\bar{1} \ \bar{1} \ \bar{0}], [\bar{0} \ \bar{1} \ \bar{0}]\} \subset (\mathbb{Z}_2)_{1 \times 3} \text{ ve}$$

$$\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{bmatrix} \right\} \subset (\mathbb{Z}_2)_{3 \times 1} \text{ işlem olarak matris toplamı alınmıştır.}$$

$$M \times \Gamma \times M \rightarrow M$$

$(a, \alpha, b) \rightarrow a\alpha b$ olacak şekilde tanımlansın.

Örnek 5.1’den M ’nin Γ – halkası olduğu biliniyor.

$$N = \{[\bar{0} \ \bar{0} \ \bar{0}], [\bar{1} \ \bar{1} \ \bar{0}]\} \subset M \text{ ve } F : N \rightarrow P(M)$$

Her $a \in N$ için

$$F(a) = \{b \in M \mid R(a\alpha b) \Leftrightarrow a\alpha b \in \{[\bar{0} \ \bar{0} \ \bar{0}], [\bar{1} \ \bar{1} \ \bar{0}], [\bar{0} \ \bar{1} \ \bar{0}]\}, \forall \alpha \in \Gamma\}$$

için (F, N) ’nin M ’nin esnek Γ – halkası olduğu biliniyor. (Örnek 6.1)

$$U = \{[\bar{0} \ \bar{0} \ \bar{0}], [\bar{1} \ \bar{1} \ \bar{0}]\} \subseteq N \text{ olsun ve } G : U \rightarrow P(N) \text{ fonksiyonu her } a \in U \text{ için}$$

$$G(a) = \{b \in N \mid R(a\alpha b) \Leftrightarrow a\alpha b \in \{[\bar{0} \ \bar{0} \ \bar{0}]\}, \forall \alpha \in \Gamma\} \text{ olacak şekilde tanımlansın.}$$

Bu durumda;

(i) $U \subset N$

$$(ii) F([\bar{0} \ \bar{0} \ \bar{0}])\Gamma G([\bar{0} \ \bar{0} \ \bar{0}]) \subset G([\bar{0} \ \bar{0} \ \bar{0}]),$$

$$G([\bar{0} \ \bar{0} \ \bar{0}])\Gamma F([\bar{0} \ \bar{0} \ \bar{0}]) \subset G([\bar{0} \ \bar{0} \ \bar{0}]) \text{ ve}$$

$$F([\bar{1} \ \bar{1} \ \bar{0}])\Gamma G([\bar{1} \ \bar{1} \ \bar{0}]) \subset G([\bar{1} \ \bar{1} \ \bar{0}]),$$

$$G([\bar{1} \quad \bar{1} \quad \bar{0}])\Gamma F([\bar{1} \quad \bar{1} \quad \bar{0}]) \subset G([\bar{1} \quad \bar{1} \quad \bar{0}])$$

olduğundan M Γ –halkası üzerinde olan (G, U) ’ya (F, N) ’nin esnek ideali denir ve $(G, U) \tilde{\triangleleft}_{\Gamma} (F, N)$ ile gösterilir [37].

Teorem 6.3 M bir Γ –halka olmak üzere (F, A) , M üzerinde esnek Γ –halka olsun. $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ iken M üzerindeki her (G_1, U_1) ve (G_2, U_2) için

$$(G_1, U_1) \tilde{\triangleleft}_{\Gamma} (F, A), (G_2, U_2) \tilde{\triangleleft}_{\Gamma} (F, A) \Rightarrow (G_1, U_1) \cap (G_2, U_2) \tilde{\triangleleft}_{\Gamma} (F, A) \text{ olur [37].}$$

Teorem 6.4 M bir Γ –halka olmak üzere (F, A) , M üzerinde esnek Γ –halka olsun. I ve J ayrık iken M üzerindeki her (G, I) ve (H, J) esnek kümeleri için

$$(G, I) \tilde{\triangleleft}_{\Gamma} (F, A), (H, J) \tilde{\triangleleft}_{\Gamma} (F, A) \Rightarrow (G, I) \tilde{\cup} (H, J) \tilde{\triangleleft}_{\Gamma} (F, A) \text{ [37].}$$

Teorem 6.5 M bir Γ –halka olmak üzere (F, A) , M üzerinde esnek Γ –halka olsun.

J indeks kümesi olmak üzere $\left\{ (F_j, A_j)_{j \in J} \right\}$, (F, A) ’nın esnek alt Γ –halkalarının boştan farklı bir ailesi ise

$$(1) \bigcap_{j \in J} (F_j, A_j) \tilde{\triangleleft}_{\Gamma} (F, A),$$

$$(2) \bigwedge_{j \in J} (F_j, A_j) \tilde{\triangleleft}_{\Gamma} (F, A),$$

$$(3) \text{ her } j, k \in J \text{ için } I_j \cap I_k = \{0\} \text{ iken } \bigvee_{j \in J} (F_j, A_j) \tilde{\triangleleft}_{\Gamma} (F, A) \text{ [37].}$$

6.2 İdealistik Esnek Gamma Halkaları

Tanım 6.6 M bir Γ –halka olmak üzere (F, A) , M üzerinde esnek Γ –halka olsun. Eğer her $x \in A$ için $F(x)$, M Γ –halkasının ideali ise (F, A) ’ya M üzerinde idealistik esnek Γ –halka denir [37].

Bir Γ –halkanın her ideali alt Γ –halka olduğundan M üzerindeki her idealistik esnek Γ –halka M üzerinde esnek Γ –halkadır fakat tersi doğru değildir.

Örnek 6.3 $S = \mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ ve (F, A) , S üzerinde bir esnek halka olsun.

$A = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ ve $F : A \rightarrow P(S)$ fonksiyonu her $x \in A$ için

$F(\bar{x}) = \{\bar{y} \in S \mid R(\bar{x}\alpha\bar{y}) \Leftrightarrow \overline{x\alpha y} \in \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}\}$ ile tanımlanmıştır. Bu durumda

$F(\bar{0}) = \mathbb{Z}_6$, $F(\bar{1}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$, $F(\bar{2}) = \mathbb{Z}_6$ dir.

$\Gamma = \mathbb{Z}$ olsun ve her $x, y \in S$ ve $\alpha \in \Gamma$ için $\bar{x}\alpha\bar{y} = \overline{x\alpha y}$ olsun. Bu durumda S bir Γ – halkadır ve (F, A) , S üzerinde bir idealistik esnek Γ – halkadır [37].

Önerme 6.2 M bir Γ – halka olmak üzere (F, A) ve (F, B) , M üzerinde esnek Γ – halkalar ve $B \subseteq A \subseteq M$ olsun. Eğer (F, A) , M üzerinde idealistik esnek Γ – halka ise (F, B) de idealistik esnek Γ – halkadır [37].

Teorem 6.6 M bir Γ – halka olmak üzere (F, A) ve (G, B) , M üzerinde idealistik esnek Γ – halkalar olsun. Eğer $A \cap B \neq \emptyset$ ise $(F, A) \tilde{\cap} (G, B)$ de M üzerinde idealistik esnek Γ – halkadır [37].

Teorem 6.7 M bir Γ – halka olmak üzere (F, A) ve (G, B) , M üzerinde idealistik esnek Γ – halkalar olsun. Eğer $A \cap B = \emptyset$ ise $(F, A) \tilde{\cup} (G, B)$ de M üzerinde idealistik esnek Γ – halkadır [37].

Teorem 6.8 M bir Γ – halka olmak üzere (F, A) ve (G, B) , M üzerinde idealistik esnek Γ – halkalar olsun. Bu durumda $(F, A) \tilde{\cap} (G, B)$ de M üzerinde idealistik esnek Γ – halkadır [37].

Tanım 6.7 M bir Γ – halka olmak üzere (F, A) , M üzerinde idealistik esnek Γ – halka olsun. Eğer her $x \in A$ için $F(x) = \{0\}$ (sırasıyla, $F(x) = M$) ise (F, A) ’ya aşık (sırasıyla mutlak) idealistik esnek Γ – halka denir [37].

Yardımcı Teorem 6.1 $f : M \rightarrow N$ bir Γ – halka epimorfizması olsun. Eğer (F, A) , M Γ – halka üzerinde idealistik esnek Γ – halka ise $(f(F), A)$ N Γ – halkası üzerinde idealistik esnek Γ – halka olur [37].

İspat Her $x \in A$ için $F(x)$, M Γ -halkanın ideali olduğu için $f(F)(x) = f(F(x))$, N Γ -halkanın idealidir ve aynı zamanda örten homomorfik görüntüsü de N Γ -halkanın idealidir. Buradan $(f(F), A)$, N Γ -halkası üzerinde idealistik esnek Γ -halka olur.

Teorem 6.9 $f : M \rightarrow N$ bir Γ -halka epimorfizması ve (F, A) , M Γ -halkası üzerinde idealistik esnek Γ -halka olsun.

(i) Eğer her $x \in A$ için $F(x) = \text{Çek}(f)$ ise $(f(F), A)$, N Γ -halkası üzerinde aşikar idealistik esnek Γ -halka olur.

(ii) Eğer her (F, A) mutlaksa $(f(F), A)$, N Γ -halkası üzerinde mutlak idealistik esnek Γ -halka olur [37].

İspat (i) Kabul edelim ki her $x \in A$ için $F(x) = \text{Çek}(f)$ olsun. Her $x \in A$ için $f(F)(x) = f(F(x)) = \{0_N\}$ olur. Tanım 6.7 ve Yardımcı Teorem 6.1 den $(f(F), A)$, N Γ -halkası üzerinde aşikar idealistik esnek Γ -halka olur.

(ii) Kabul edelim ki (F, A) mutlak olsun. Her $x \in A$ için $F(x) = M$ olur. Buradan her $x \in A$ için $f(F)(x) = f(F(x)) = f(M) = N$ dir. Tanım 6.7 ve Yardımcı Teorem 6.1'den $(f(F), A)$, N Γ -halkası üzerinde mutlak idealistik esnek Γ -halka olur.

6.3 İdealistik Esnek Gamma Halkalarında İzomorfizma Teoremleri

Tanım 6.8 R ve K Γ -halkalar olmak üzere (F, A) ve (H, B) sırasıyla R ve K üzerinde idealistik esnek Γ -halkalar olsun. Eğer $f : R \rightarrow K$ ve $g : A \rightarrow B$ iki fonksiyon iken aşağıdaki koşullar sağlanırsa (f, g) 'ye esnek Γ -halka homomorfizması denir.

(i) f , R 'den K 'ya Γ -halka homomorfizması

(ii) g örten fonksiyon

(iii) Her $x \in A$ için $f(F(x)) = H(g(x))$.

Bu durumda (F, A) 'dan (H, B) 'ye esnek Γ -halka homomorfizması vardır denir ve $(F, A) \sim_{\Gamma} (H, B)$ ile gösterilir. Eğer f Γ -halka izomorfizması ve g bijektif fonksiyon

ise (f, g) için (F, A) 'dan (H, B) 'ye esnek Γ -halka izomorfizması denir ve $(F, A) \simeq_{\Gamma} (H, B)$ ile gösterilir [37].

Örnek 6.4 $S = \mathbb{Z}$, $K = \mathbb{Z}_m$ ve $\Gamma = \mathbb{Z}$ olsun. Her $\bar{x}, \bar{y} \in K$ ve $\alpha \in \Gamma$ için $\bar{x}\alpha\bar{y} = \overline{x\alpha y}$ olarak tanımlansın. Her $x, y \in S$ ve $\alpha \in \Gamma$ için de $x\alpha y$ genel çarpım olsun. S ve K 'nın Γ -halkası olduğu açıktır. $k \in \mathbb{Z}$ için $f(k) = \bar{k}$ olacak şekilde f ile $\mathbb{Z}$ 'den $\mathbb{Z}_m$ 'ye bir Γ -halka homomorfizması tanımlayalım. $k \in \mathbb{Z}^+$ için $g, g(k) = \bar{k}$ olacak şekilde $\mathbb{Z}^+$ 'dan $\mathbb{Z}_m$ 'ye örten bir fonksiyon olsun.

$F: \mathbb{Z}^+ \rightarrow P(\mathbb{Z})$ ve $F(x) = \{5kx | k \in \mathbb{Z}\}$, $H: \mathbb{Z}_m \rightarrow P(\mathbb{Z}_m)$ ve $H(\bar{u}) = \{\bar{uk} | k \in 5\mathbb{Z}\}$ dir. Bu durumda $(F, \mathbb{Z}^+)$ ve $(H, \mathbb{Z}_m)$ sırasıyla $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Z}_m$ üzerinde idealistik esnek Γ -halkasıdır. $f(F(x)) = \{\overline{5kx} | k \in \mathbb{Z}\}$ ve $H(g(x)) = \{\bar{xs} | s \in 5\mathbb{Z}\}$ olduğundan $f(F(x)) = H(g(x))$ çıkarımını yapabiliriz. O halde (f, g) , $(F, \mathbb{Z}^+)$ 'dan $(H, \mathbb{Z}_m)$ 'ye esnek Γ -halka homomorfizmasıdır [18].

Esnek Γ -halka homomorfizması tanımı kullanılarak bazı önermeler elde edilebilir.

Önerme 6.3 R ve K birer Γ -halka olmak üzere (F, A) , R üzerinde idealistik esnek Γ -halka ve (H, B) , K üzerinde esnek küme olsun. Eğer (f, g) , (F, A) 'dan (H, B) 'ye esnek Γ -homomorfizma ise (H, B) de K üzerinde idealistik esnek Γ -halkadır [18].

İspat (f, g) , (F, A) 'dan (H, B) 'ye esnek Γ -homomorfizma ve (F, A) , R üzerinde idealistik esnek Γ -halka olsun. $f(R) = K$ bir Γ -halkadır ve her $y \in B$ için $g(x) = y$ olacak şekilde $x \in A$ vardır. Buradan $H(y) = H(g(x)) = f(F(x))$, K 'nın idealidir. Sonuç olarak (H, B) de K Γ -halkası üzerinde idealistik esnek Γ -halkadır.

Önerme 6.4 R ve K Γ -halkalar olmak üzere (F, A) ve (H, B) , sırasıyla R ve K üzerinde idealistik esnek Γ -halkalar olsun. Eğer (f, g) , (F, A) 'dan (H, B) 'ye esnek Γ -homomorfizma ve (F_1, A_1) , (F, A) 'nın esnek ideali ise $(H, g(A_1))$ de (H, B) 'nin esnek idealidir [18].

İspat $(f, g), (F, A)$ 'dan (H, B) 'ye esnek Γ -homomorfizma ve $(F_1, A_1), (F, A)$ üzerinde esnek ideal olduğundan $g(A_1) \subset B$ ve her $y \in g(A_1)$ için $H(y), K$ üzerinde esnek idealdir. Buradan $(H, g(A_1)), (H, B)$ 'nin esnek idealdir.

Şimdi izomorfizma teoremleri verilecektir.

Teorem 6.10 (1. Γ -İzomorfizma Teoremi) R ve K Γ -halkalar olmak üzere (F, A) ve (H, B) sırasıyla R ve K üzerinde idealistik esnek Γ -halkalar olsun. $(f, g), (F, A)$ 'dan (H, B) 'ye bir esnek Γ -homomorfizma ve her $x \in A$ için $\zeta ekf \subset F(x)$ olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanır.

1. $x \in A$ olmak üzere $I(x) = F(x) / \zeta ekf$ ve $J(x) = f(F(x))$ iken $(I, A) \simeq_{\Gamma} (J, A)$
2. g biyektif fonksiyon ise $(I, A) \simeq_{\Gamma} (H, B)$ [18].

İspat 1. ζekf , R 'nin idealidir ve buradan $R / \zeta ekf$ bir Γ -halkadır. Bu nedenle her $x \in A$ için ζekf , $F(x)$ 'in idealidir ve $F(x) / \zeta ekf$ bir Γ -halkadır. $F(x) / \zeta ekf$ daima $R / \zeta ekf$ 'in bir idealidir. Her $x \in A$ için $J(x) = f(F(x)) = H(g(x))$ 'in K 'nın ideali olduğu görülür. Bu durumda $(J, A), K$ 'nın idealistik esnek Γ -halkasıdır.

$\bar{f} : R / \zeta ekf \rightarrow K$ fonksiyonu her $a \in R$ için $\bar{f}(a + \zeta ekf) = f(a)$ olarak tanımlansın. $\bar{f}$ 'nin $R / \zeta ekf$ 'ten K 'ya biyektif fonksiyon olduğu açıktır. Her $a, b \in R, \alpha \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned}
 \bar{f}((a + \zeta ekf) + (b + \zeta ekf)) &= \bar{f}((a + b) + \zeta ekf) \\
 &= f(a + b) = f(a) + f(b) \\
 &= \bar{f}(a + \zeta ekf) + \bar{f}(b + \zeta ekf) \\
 \bar{f}((a + \zeta ekf)\alpha(b + \zeta ekf)) &= \bar{f}((a\alpha b) + \zeta ekf) \\
 &= f(a\alpha b) = f(a)\alpha f(b) \\
 &= \bar{f}(a + \zeta ekf)\alpha \bar{f}(b + \zeta ekf)
 \end{aligned}$$

Bu durumda $\bar{f}$ bir Γ -izomorfizmadır.

$\bar{g}: A \rightarrow A$ fonksiyonu $\bar{g}(x) = x$ olarak tanımlansın. $\bar{g}$, A 'dan A üzerine biyektif fonksiyondur. $\bar{f}(I(x)) = \bar{f}(F(x)/Çekf) = f(F(x)) = J(x) = J(\bar{g}(x))$ elde edilir. Buradan $(\bar{f}, \bar{g})$ bir Γ -izomorfizmadır, öyleyse $(I, A) \simeq_{\Gamma} (J, A)$ olur.

2. $\bar{f}: R/Çekf \rightarrow K$ fonksiyonu $\bar{f}(r+Çekf) = f(r)$ olacak şekilde tanımlansın. Bu durumda $\bar{f}$, $R/Çekf$ 'den K 'ya bir Γ -izomorfizmadır. $\bar{g}$ biyektif fonksiyon olduğundan ve $\bar{f}(I(x)) = \bar{f}(F(x)/Çekf) = f(F(x)) = H(g(x))$ olduğundan $(I, A) \simeq_{\Gamma} (H, B)$ dir.

Teorem 6.11 R bir Γ -halka olmak üzere (F, A) , R üzerinde idealistik esnek Γ -halka olsun. $P(x) = H(x)/(M \cap N)$, $Q(x) = (H(x) + N)/N$, $S(x) = I(x)/(M \cap N)$, $T(x) = (I(x) + M)/M$, $M = \bigcap_{x \in B} H(x)$, $N = \bigcap_{x \in C} I(x)$ iken (H, B) ve (I, C) , (F, A) 'nin idealleri ise $(P, B) \sim_{\Gamma} (Q, B)$ ve $(S, C) \sim_{\Gamma} (T, C)$ dir [18].

İspat Öncelikle $K = \left\langle \bigcup_{x \in B} H(x) \right\rangle$ ve $L = \left\langle \bigcup_{x \in C} I(x) \right\rangle$ olsun. $M = \bigcap_{x \in B} H(x)$, R 'nin bir idealidir. Açık olarak görülür ki M , K 'nin de idealidir ve buradan $M \cap N$ de K 'nin idealidir. Bu durumda (P, B) , $K/(M \cap N)$ 'nin idealistik esnek Γ -halka olur. (Q, B) de $(K + N)/N$ 'nin idealistik esnek Γ -halka olur.

$f: K/(M \cap N) \rightarrow (K + N)/N$ fonksiyonu $f(k + M \cap N) = k + N$ ile ve $g: B \rightarrow B$ fonksiyonu $g(x) = x$ ile tanımlansın. Buradan g biyektif fonksiyonken $f(P(x)) = f(H(x)/(M \cap N)) = (H(x) + N)/N = Q(x) = Q(g(x))$ olur, dolayısıyla f , $K/(M \cap N)$ 'den $(K + N)/N$ 'ye Γ -homomorfizmadır. Bu durumda $(P, B) \sim_{\Gamma} (Q, B)$ olur.

Aynı şekilde $(S, C) \sim_{\Gamma} (T, C)$ de ispatlanabilir.

Teorem 6.12 (2. Γ -İzomorfizma Teoremi) R bir Γ -halka olmak üzere (F, A) , R üzerinde idealistik esnek Γ -halka olsun. $P(x) = H(x)/(M \cap N)$, $Q(x) = (H(x) + N)/N$, iken (H, B) ve (I, C) , $H(x) = M$ olacak şekilde (F, A) 'nin idealleri ise $(P, B) \simeq_{\Gamma} (Q, B)$ dir [18].

İspat Teorem 6.11'deki gibi ispatlanabilir.

Teorem 6.13 (3. Γ – İzomorfizma Teoremi) R bir Γ – halka olmak üzere (F, A) , R üzerinde idealistik esnek Γ – halka ve $P(x) = \left(\frac{(F(x)/N)}{(M/N)} \right)$, $Q(x) = F(x)/M$, $M = \bigcap_{x \in B \cap C} H(x)$, $N = \bigcap_{x \in B \cap C} I(x)$ olsun. $B \cap C \neq \emptyset$ iken her $x \in B \cap C$ için $I(x) \subset H(x)$ olacak şekilde (H, B) ve (I, C) , (F, A) 'nın idealleri ise $(P, B \cap C) \approx_{\Gamma} (Q, B \cap C)$ dir [18].

İspat $M = \bigcap_{x \in B \cap C} H(x)$ ve $N = \bigcap_{x \in B \cap C} I(x)$, R 'nin idealleridir ve N , M 'nin idealidir.

Açıktır ki $(P, B \cap C)$, $\frac{(R/N)}{(M/N)}$ üzerinde idealistik esnek Γ – halka ve $(Q, B \cap C)$, R/M üzerinde idealistik esnek Γ – halkadır.

$f : \frac{(R/N)}{(M/N)} \rightarrow R/M$ olacak şekilde bir $f(r + N + (M/N)) = r + M$ fonksiyonu ve $g : B \cap C \rightarrow B \cap C$ olacak şekilde bir $g(x) = x$ fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda f foksiyonu $\frac{(R/N)}{(M/N)}$ 'den R/M 'ye bir Γ – izomorfizmadır. g bijektif foksiyondur ve $f(P(x)) = f\left(\frac{(F(x)/N)}{(M/N)}\right) = F(x)/M = Q(g(x))$ olur. Buradan $(P, B \cap C) \approx_{\Gamma} (Q, B \cap C)$ dir.

6.4 Asal İdealistik Esnek Gamma Halkaları

Tanım 6.9 R bir Γ – halkası olsun. Her M ve N ideal çifti için $M\Gamma N \subset P$ ise yani $M \subset P$ veya $N \subset P$ ise P 'ye R 'nin asal ideali denir [38].

Tanım 6.10 R bir Γ – halkası olmak üzere (F, A) , R üzerinde esnek küme olsun. Her $x \in A$ için $F(x)$, R 'nin asal ideali ise (F, A) 'ya asal idealistik esnek Γ – halka denir [18].

Örnek 6.6 $S = \mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$, (F, A) , S üzerinde esnek küme olsun.

$A = \{\bar{1}, \bar{2}\}$ ve $F : A \rightarrow P(S)$ fonksiyonu her $x \in A$ için

$F(\bar{x}) = \{\bar{y} \in S \mid R(\bar{x}, \bar{y}) \Leftrightarrow \overline{xy} = \bar{0}\}$ olacak şekilde tanımlanmıştır. Bu durumda

$F(\bar{1}) = \{\bar{0}\}$, $F(\bar{2}) = \{\bar{0}, \bar{3}\}$ olur. $\Gamma = \mathbb{Z}$ olsun ve her $x, y \in S$ ve $\alpha \in \Gamma$ için $\bar{x}\alpha\bar{y} = \overline{x\alpha y}$ olsun. Bu durumda S bir Γ – halkadır ve (F, A) , S üzerinde bir asal idealistik esnek Γ – halkadır [18].

Teorem 6.14 R bir Γ – halka olmak üzere (F, A) , R üzerinde idealistik esnek Γ – halka ve her $x \in A$ için $I \subset F(x)$ olacak şekilde I , R ’nin bir ideali olsun. Bu durumda (F, A) ’nın asal olması için gerek ve yeter koşul $(F/I, A)$ ’nın asal olmasıdır [18].

İspat $(F/I, A)$ aşıkarak R/I üzerinde idealistik esnek Γ – halkadır. Eğer (F, A) asalsa her M ve N ideal çifti için $M\Gamma N \subset P$, yani $M \subset P$ veya $N \subset P$ olur. $(F/I, A)$ ’nın asal olmadığını kabul edelim. Öyleyse $(M_0/I)\Gamma(N_0/I) \subset F(x)/I$ fakat $M_0/I \not\subset F(x)/I$ ve $N_0/I \not\subset F(x)/I$ olacak şekilde R/I ’nin idealleri M_0/I ve N_0/I ’dir. Buradan $x+I \in M_0/I$, $x+I \notin F(x)/I$ ise $x \in M_0$ fakat $x \notin F(x)$ olur. Sonuç olarak $M_0 \not\subset F(x)$ dir.

Aynı yolla $y \in N_0$ fakat $y \notin F(x)$ olduğu gösterilir.

Tersine, kabul edelim ki $(F/I, A)$ asal olsun. Eğer (F, A) asal değilse $M\Gamma N \subset F(x)$ fakat $M, N \not\subset F(x)$ olacak şekilde R ’nin idealleri M ve N dir. Buradan $(M/I)\Gamma(N/I) \subset F(x)/I$ fakat $M/I, N/I \not\subset F(x)/I$ olacak şekilde çelişki elde edilir.

Teorem 6.15 R ve K Γ – halkaları ve $f : R \rightarrow K$ bir Γ – epimorfizmasıdır. (F, A) , R üzerinde asal idealistik esnek Γ – halkası ise $(f(F), A)$ da K üzerinde asal idealistik esnek Γ – halkasıdır [18].

İspat (F, A) , R üzerinde idealistik esnek Γ – halka olduğundan her $x \in A$ için $F(x)$, R ’nin asal idealidir. R ’nin her M ve N ideal çifti için $M\Gamma N \subset F(x)$ yani $M \subset F(x)$ veya $N \subset F(x)$ ’tir. Şimdi kabul edelim ki M' ve N' , K ’nin iki ideali olsun. Bu durumda R ’nin her $x \in A$ için $f(M) = M'$ ve $f(N) = N'$ olacak şekilde iki M ve N ideali vardır. Eğer her $x \in A$ için $M'\Gamma N' \subset f(F(x))$ ise

$f(M\Gamma N) = f(M)\Gamma f(N) \subset f(F(x))$, $M\Gamma N \subset F(x)$. Buradan $M \subset F(x)$ veya $N \subset F(x)$ ve $M' \subset f(F(x))$ veya $N' \subset f(F(x))$ olur. Bu da gösterir ki her $x \in A$ için $f(F(x))$, K ’nin asal idealidir ve $(f(F), A)$, K ’nin asal idealistik esnek Γ – halkasıdır.

Teorem 6.16 R ve K Γ – halkalar olmak üzere (F, A) ve (H, B) sırasıyla R ve K üzerinde idealistik esnek Γ – halkalar olsun. Eğer (F, A) asalsa ve (H, B) ile arasında Γ – homomorfizma varsa (H, B) de asaldır [18].

İspat (f, g) , (F, A) ’dan (H, B) ’ye bir Γ – homomorfizma olsun. Her $y \in B$ için $y = g(x)$ olacak şekilde $x \in A$ mevcuttur. O halde $H(y) = H(g(x)) = f(F(x))$. K ’nın her M' ve N' ideali için R ’nin $f(M) = M'$ ve $f(N) = N'$ olacak şekilde M ve N idealleri vardır.

Eğer $M' \cap N' \subset H(y) = f(F(x)) \Rightarrow M \cap N \subset F(x) \Rightarrow M \subset F(x)$ veya $N \subset F(x)$ olur. Buradan $M' \subset f(F(x)) = H(g(x)) = H(y)$ veya $N' \subset f(F(x)) = H(g(x)) = H(y)$ dir. Sonuç olarak (H, B) asaldır.

Teorem 6.17 (F, A) ve (H, B) , R üzerinde iki asal idealistik esnek Γ – halka olsun.

1. Eğer $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow (F, A) \tilde{\cap} (H, B)$, R üzerinde asal idealistik esnek Γ – halkadır.
2. Eğer $A \cap B = \emptyset \Rightarrow (F, A) \tilde{\cup} (H, B)$, R üzerinde asal idealistik esnek Γ – halkadır.
3. $(F, A) \tilde{\wedge} (H, B)$, R üzerinde asal idealistik esnek Γ – halkasıdır [18].

İDEALİSTİK ESNEK GAMMA HALKALARINDA BULANIK İZOMORFİZMA TEOREMLERİ

7.1 İdealistik Esnek Gamma Halkalarında Bulanık İdealler

Tanım 7.1 R bir Γ – halka olmak üzere (F, A) , R üzerinde bir esnek Γ – halka ve μ , R ’nin bulanık alt kümesi olsun. Eğer her $t \in A, x, y \in F(t)$ ve $\alpha \in \Gamma$ için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa μ ’ye (F, A) ’nin bulanık alt halkası denir.

(i) $\mu(x - y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$

(ii) $\mu(x\alpha y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$ [39].

Tanım 7.2 R bir Γ – halka olmak üzere (F, A) , R üzerinde bir idealistik esnek Γ – halka ve μ , R ’nin bulanık alt kümesi olsun. Eğer her $t \in A, x, y \in F(t)$ ve $\alpha \in \Gamma$ için, aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa μ ’ye (F, A) ’nin bulanık ideali denir.

(i) $\mu(x - y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$

(ii) $\mu(x\alpha y) \geq \mu(x) \vee \mu(y)$ [39].

Not 7.1 (1) R bir Γ – halka olmak üzere (F, A) , R üzerinde idealistik esnek Γ – halka ve μ , R ’nin bulanık alt kümesi olsun. μ ’nün (F, A) ’nin bulanık ideali olması için gerek ve yeter koşul her $t \in A$ için μ ’nün $F(t)$ ’nin bulanık ideali olmasıdır.

(2) R bir Γ – halka olmak üzere (F, A) , R üzerinde idealistik esnek Γ – halka olsun. Eğer μ , R ’nin bulanık ideali ise μ , (F, A) ’nın da bulanık idealidir. Tersi doğru değildir [18].

Örnek 7.1 $S = \mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ ve $A = \{\bar{1}, \bar{2}\}$ olmak üzere her $x \in A$ için

$F(\bar{x}) = \{\bar{y} \in S \mid \bar{x} \rho \bar{y} \Leftrightarrow \overline{xy} = \bar{0}\}$ ile tanımlanan $F : A \rightarrow P(S)$ fonksiyonu için (F, A)

ikilisi S üzerinde bir esnek halkadır. $\Gamma = \mathbb{Z}$ olsun ve her $x, y \in S$ ve $\alpha \in \Gamma$ için $\bar{x} \alpha \bar{y} = \overline{x \alpha y}$ olsun. Bu durumda $F(\bar{1}) = \{\bar{0}\}$, $F(\bar{2}) = \{\bar{0}, \bar{3}\}$ olur ve (F, A) , S üzerinde bir idealistik esnek halkadır. μ , $\mathbb{Z}_6$ halkasının bir bulanık alt kümesi olsun.

$$\mu(\bar{x}) = \begin{cases} 0.8 & \bar{x} \in \{\bar{0}, \bar{5}\} \\ 0.1 & \bar{x} \in \{\bar{1}, \bar{3}\} \\ 0.5 & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad \text{olarak tanımlandığında her } t \in A, \bar{x}, \bar{y} \in F(t) \text{ için}$$

$$\mu(\bar{x} - \bar{y}) \geq \mu(\bar{x}) \wedge \mu(\bar{y})$$

$\mu(\bar{x} \alpha \bar{y}) \geq \mu(\bar{x}) \vee \mu(\bar{y})$ sağlar. Buradan μ , (F, A) ’nin bulanık idealidir.

Fakat μ , S nin bulanık ideali değildir çünkü $\mu(\bar{5} - \bar{2}) = \mu(\bar{3}) < \mu(\bar{5}) \wedge \mu(\bar{2})$ dir [18].

Önerme 7.1 R bir Γ – halka olmak üzere (F, A) , R üzerinde bir idealistik esnek Γ – halka ve μ , R ’nin bulanık alt kümesi olsun. μ ’nün (F, A) ’nin bulanık ideali olması için gerek ve yeter koşul her $x \in A$ ve $t \in [0, 1]$ için $U(t, x) = \{r \in F(x) \mid \mu(r) \geq t\}$ ’in $F(x)$ ’in ideali olmasıdır [18].

μ bir R Γ – halka üzerinde bulanık idealdir. $\forall x, y \in R$ için R üzerinde bir denklik bağıntısı tanımlayalım.

$$x \sim_{\Gamma} y \Leftrightarrow \mu(x - y) = \mu(0) \quad (7.1)$$

Buradaki 0 , R ’nin sıfır elemanıdır.

Teorem 7.1 " $\sim_{\Gamma}$ " R Γ – halka üzerinde bir denklik bağıntısıdır [18].

İspat

a) Her $x \in R$ olmak üzere $\mu(x - x) = \mu(0) \Rightarrow x \sim_{\Gamma} x$

b) Her $x, y \in R$ olmak üzere, eğer

$$x \sim_{\Gamma} y \Rightarrow \mu(x - y) = \mu(0)$$

$$\mu(-(y - x)) = \mu(y - x) = \mu(0) \Rightarrow y \sim_{\Gamma} x$$

c) Her $\forall x, y, z \in R$ olmak üzere eğer $x \sim_{\Gamma} y$ ve $y \sim_{\Gamma} z$ ise

$$\mu(x - y) = \mu(0) \text{ ve } \mu(y - z) = \mu(0) \text{ dir.}$$

i. $\mu(x - z) = \mu(x - y + y - z)$

$$\geq \mu(x - y) \wedge \mu(y - z)$$

$$= \mu(0) \wedge \mu(0) = \mu(0)$$

$$\mu(x - z) \geq \mu(0)$$

ii. $\mu(0) = \mu(x - x + y - y + z - z)$

$$= \mu((x - y) + (y - z) + (z - x))$$

$$\geq \mu(x - y) \wedge \mu(y - z) \wedge \mu(z - x)$$

$$= \mu(0) \wedge \mu(0) \wedge \mu(x - z)$$

$$= \mu(x - z)$$

$$\mu(0) \geq \mu(x - z)$$

i ve ii den $\mu(x - z) = \mu(0)$ bulunur ve $x \sim_{\Gamma} z$ dir.

d) Her $x, y, z \in R$ olmak üzere eğer $x \sim_{\Gamma} y$ ise

$$\mu(x - y) = \mu(0)$$

$$\mu((x + z) - (y + z)) = \mu(x - y) = \mu(0) \Rightarrow (x + z) \sim_{\Gamma} (y + z)$$

bulunur.

e) Her $x, y, u, v \in R$ olmak üzere, eğer $x \sim_{\Gamma} y$ ve $u \sim_{\Gamma} v$ ise d)'den

$$(x + u) \sim_{\Gamma} (y + u)$$

$$(y + u) \sim_{\Gamma} (y + v)$$

olur ve c'den $(x+u) \sim_{\Gamma} (y+v)$ bulunur.

Aynı şekilde

$$(x+v) \sim_{\Gamma} (y+v)$$

$$(y+v) \sim_{\Gamma} (y+u)$$

$$\Rightarrow (x+v) \sim_{\Gamma} (y+u)$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Her $x, y \in R$ ve $\alpha \in \Gamma$ iken x 'i içeren denklik sınıfı

$$\mu_x = \{y \in R \mid x \sim_{\Gamma} y\} \quad (7.2)$$

olacak şekilde tanımlanır.

R 'deki tüm denklik sınıflarının kümesi de

$$R / \mu = \{\mu_x \mid x \in R\} \quad (7.3)$$

ile verilsin.

R / μ halkası üzerinde iki işlem tanımlanacaktır. Her $x, y \in R$ ve $\alpha \in \Gamma$ olsun.

$$\mu_x + \mu_y = \mu_{x+y} \quad (7.4)$$

$$\mu_x \alpha \mu_y = \mu_{x\alpha y} \quad (7.5)$$

Bu işlemler iyi tanımlıdır ve R / μ de Γ -halkadır [18].

İyi tanımlıdır: Her $x_1, x_2, y_1, y_2 \in R, \alpha \in \Gamma$;

i) $\mu_{x_1} = \mu_{x_2}$ ve $\mu_{y_1} = \mu_{y_2}$ iken $\mu_{x_1+y_1} = \mu_{x_2+y_2}$ midir?

$$\mu_{x_1} = \mu_{x_2} \Rightarrow \mu(x_1 - x_2) = \mu(0) \text{ ve } \mu_{y_1} = \mu_{y_2} \Rightarrow \mu(y_1 - y_2) = \mu(0) \text{ 'dır.}$$

$$\begin{aligned} \mu((x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)) &= \mu((x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)) \geq \mu(x_1 - x_2) \wedge \mu(y_1 - y_2) \\ &= \mu(0) \wedge \mu(0) = \mu(0) \end{aligned}$$

$$\mu((x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)) = \mu(0) \Leftrightarrow \mu_{x_1+y_1} = \mu_{x_2+y_2} .$$

ii) $\mu_{x_1} = \mu_{x_2}$ ve $\mu_{y_1} = \mu_{y_2}$ iken $\mu_{x_1 \alpha y_1} = \mu_{x_2 \alpha y_2}$ midir?

$$\mu(x_2 \alpha y_2 - x_1 \alpha y_1) = \mu(x_2 \alpha y_2 - x_2 \alpha y_1 + x_2 \alpha y_1 - x_1 \alpha y_1) = \mu(x_2 \alpha (y_2 - y_1) + \alpha y_1 (x_2 - x_1))$$

$$\geq (\mu(x_2) \vee \mu(y_2 - y_1)) \wedge (\mu(y_1) \vee \mu(x_1 - x_2))$$

$$= \mu(0) \wedge \mu(0) = \mu(0)$$

$$\mu(x_2 \alpha y_2 - x_1 \alpha y_1) = \mu(0) \Leftrightarrow \mu_{x_1 \alpha y_1} = \mu_{x_2 \alpha y_2}.$$

R / μ Γ – halkadır: Her $x, y, z \in R$ ve $\alpha, \beta \in \Gamma$ olmak üzere;

$R / \mu \times \Gamma \times R / \mu \rightarrow R / \mu$ fonksiyonu $(\mu_x, \alpha, \mu_y) \rightarrow \mu_{x \alpha y}$ ile tanımlansın.

$(x + \mu, \alpha, y + \mu) \rightarrow x \alpha y + \mu$ ile de gösterilebilir.

i. $(\mu_x + \mu_y) \alpha \mu_z = (x + \mu + y + \mu) \alpha (z + \mu)$

$$= x \alpha z + \mu + y \alpha z + \mu$$

$$= \mu_{x \alpha z} + \mu_{y \alpha z}$$

ii. $\mu_x \alpha (\mu_y + \mu_z) = (x + \mu) \alpha (y + \mu + z + \mu)$

$$= x \alpha y + \mu + x \alpha z + \mu$$

$$= \mu_{x \alpha y} + \mu_{x \alpha z}$$

iii. $\mu_x (\alpha + \beta) \mu_y = (x + \mu) (\alpha + \beta) (y + \mu)$

$$= x \alpha y + \mu + x \beta y + \mu$$

$$= \mu_{x \alpha y} + \mu_{x \beta y}$$

iv. $\mu_x \alpha (\mu_y \beta \mu_z) = (x + \mu) \alpha ((y + \mu) \beta (z + \mu))$

$$= x \alpha y \beta z + \mu$$

$$= (x \alpha y + \mu) \beta (z + \mu)$$

$$= ((x + \mu) \alpha (y + \mu)) \beta (z + \mu)$$

$$= (\mu_x \alpha \mu_y) \beta \mu_z$$

Yardımcı Teorem 7.1 R bir Γ – halka olmak üzere I , R ’nin bir ideali ve μ , R ’nin bir bulanık ideali olsun.

1. Eğer μ , I ’ya kısıtlanırsa, μ_I ile gösterilir. μ_I , I ’nın bulanık idealidir.

2. I / μ_I , R / μ_I ’nin idealidir [18].

Kolaylık olması için μ_I yerine μ kullanılsın.

R bir Γ – halka olmak üzere μ , R ’nin bir bulanık ideali ve (F, A) , R üzerinde idealistik esnek Γ – halkadır. Her $x \in A$ için μ , $F(x)$ ’e kısıtlanırsa her $x \in A$ için μ $F(x)$ ’in bulanık ideali olur ve $F(x) / \mu$, R / μ ’nün idealidir. Buradan;

$$F / \mu : A \rightarrow P(R / \mu)$$

$$x \rightarrow (F / \mu)(x) = F(x) / \mu \quad (7.6)$$

olarak tanımlanabilir [16].

Teorem 7.2 R bir Γ – halka olmak üzere μ , R ’nin bir bulanık ideali ve (F, A) , R üzerinde bir idealistik esnek Γ – halka olsun. Bu durumda

1. μ , (F, A) ’nin bulanık idealidir.

2. $(F / \mu, A)$, R / μ üzerinde bir idealistik esnek Γ – halkadır [16].

Notasyon 7.1 $(F / \mu, A)$; μ bulanık ideali tarafından indirgenmiş (F, A) ’nin bir esnek Γ – bölüm halkası olarak adlandırılır [16].

Örnek 7.2 $S = \mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ ve $A = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ olmak üzere her $\bar{x} \in A$ için $F(\bar{x}) = \{\bar{y} \in S \mid \bar{x} \rho \bar{y} \Leftrightarrow \overline{xy} = \bar{0}\}$ ile tanımlanan $F : A \rightarrow P(S)$ fonksiyonu için (F, A) ikilisi S üzerinde bir esnek halkadır.. $\Gamma = \mathbb{Z}$ olsun ve her $x, y \in S$ ve $\alpha \in \Gamma$ için $\bar{x} \alpha \bar{y} = \overline{x \alpha y}$ olsun. Bu durumda;

$F(\bar{0}) = \mathbb{Z}_6$, $F(\bar{1}) = \{\bar{0}\}$, $F(\bar{2}) = \{\bar{0}, \bar{3}\}$ S ’nin idealidir. (F, A) , S üzerinde bir idealistik esnek Γ – halkadır.

μ , $\mathbb{Z}_6$ halkasının bir bulanık alt kümesi olsun.

$$\mu(\bar{x}) = \begin{cases} 0.8 & \bar{x} \in \{\bar{0}, \bar{3}\} \\ 0.2 & \text{aksi takdirde} \end{cases} \text{ olarak tanımlandığında her } t \in A, \bar{x}, \bar{y} \in F(t) \text{ için;}$$

$$\mu(\bar{x} - \bar{y}) \geq \mu(\bar{x}) \wedge \mu(\bar{y})$$

$\mu(\bar{x}\alpha\bar{y}) \geq \mu(\bar{x}) \vee \mu(\bar{y})$ sağlanır. Buradan $\mu, (F, A)$ 'nın bulanık idealidir.

$$(F / \mu)(\bar{0}) = F(\bar{0}) / \mu = \{\{\bar{0}, \bar{3}\}, \{\bar{2}, \bar{5}\}, \{\bar{1}, \bar{4}\}\}$$

$$(F / \mu)(\bar{1}) = F(\bar{1}) / \mu = \{\{\bar{0}\}\}$$

$$(F / \mu)(\bar{2}) = F(\bar{2}) / \mu = \{\{\bar{0}, \bar{3}\}\}$$

Bu durumda $(F / \mu, A), \mu$ bulanık ideali tarafından indirgenmiş (F, A) 'nın bir esnek Γ – bölüm halkasıdır [18].

Yardımcı teorem 7.2 R bir Γ – halka olmak üzere μ ve ν idealleri R 'nin bulanık ideali iseler, $\mu \cap \nu$ de R 'nin bulanık idealidir [18].

İspat

Her $x, y \in R, \alpha \in \Gamma$

$$1. \mu \cap \nu(x - y) = \mu(x - y) \cap \nu(x - y)$$

$$\geq (\mu(x) \wedge \mu(y)) \wedge (\nu(x) \wedge \nu(y))$$

$$= (\mu(x) \wedge \nu(x)) \wedge (\mu(y) \wedge \nu(y))$$

$$= \mu \cap \nu(x) \wedge \mu \cap \nu(y)$$

$$2. \mu \cap \nu(x\alpha y) = \mu(x\alpha y) \cap \nu(x\alpha y)$$

$$\geq (\mu(x) \vee \mu(y)) \wedge (\nu(x) \vee \nu(y))$$

$$= (\mu(x) \wedge \nu(x)) \vee (\mu(y) \wedge \nu(y))$$

$$= \mu \cap \nu(x) \vee \mu \cap \nu(y)$$

Bu durumda $\mu \cap \nu$ de R Γ – halkasının bulanık idealidir.

Teorem 7.3 R bir Γ –halka olmak üzere (F, A) , R üzerinde bir idealistik esnek Γ –halka ve μ ve ν , (F, A) ’nın iki bulanık ideali olsun. Bu durumda $\mu \cap \nu$ de (F, A) ’nın bulanık idealidir [18].

İspat $F : A \rightarrow P(R)$

$$t \rightarrow F(t)$$

μ ve ν bulanık idealler ise her $t \in A$, $x, y \in F(t)$, $\alpha \in \Gamma$

$$\mu(x - y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \text{ ve } \mu(x\alpha y) \geq \mu(x) \vee \mu(y)$$

$$\nu(x - y) \geq \nu(x) \wedge \nu(y) \text{ ve } \nu(x\alpha y) \geq \nu(x) \vee \nu(y)$$

$$1. \mu \cap \nu(x - y) = \mu(x - y) \cap \nu(x - y)$$

$$\geq (\mu(x) \wedge \mu(y)) \wedge (\nu(x) \wedge \nu(y))$$

$$= (\mu(x) \wedge \nu(x)) \wedge (\mu(y) \wedge \nu(y))$$

$$= \mu \cap \nu(x) \wedge \mu \cap \nu(y)$$

$$2. \mu \cap \nu(x\alpha y) = \mu(x\alpha y) \cap \nu(x\alpha y)$$

$$\geq (\mu(x) \vee \mu(y)) \wedge (\nu(x) \vee \nu(y))$$

$$= (\mu(x) \wedge \nu(x)) \vee (\mu(y) \wedge \nu(y))$$

$$= \mu \cap \nu(x) \vee \mu \cap \nu(y)$$

O halde $\mu \cap \nu$, (F, A) esnek Γ –halkasının bulanık idealleridir.

R bir Γ –halkası ve μ , R de bulanık ideal olsun.

$$R_\mu = \{x \in R \mid \mu(x) = \mu(0)\} \quad (7.7)$$

ile gösterilir. Bu durumda R_μ , R ’nin idealidir.

Yardımcı Teorem 7.3 R bir Γ –halka olmak üzere μ , R ’nin bir bulanık ideali ve (F, A) , R üzerinde bir idealistik esnek Γ –halka olsun. Her $t \in A$ olmak üzere

$F_\mu(t) = \{x \in F(t) \mid \mu(x) = \mu(0)\}$ dir. Bu durumda (F_μ, A) , R_μ üzerinde idealistik esnek Γ –halkadır [18].

Teorem 7.4 R bir Γ – halka olmak üzere μ , R ’nin bir bulanık ideali olsun. R / R_μ ’nün bulanık alt kümesi olan ve her $x \in R$ için $\mu^*(x + R_\mu) = \mu(x)$ ile tanımlanan μ^* ideali, R / R_μ ’nün bulanık idealidir [18].

İspat Her $x, y \in R$, $\alpha \in \Gamma$

$$1. \mu^*(x - y + R_\mu) = \mu(x - y)$$

$$\geq \mu(x) \wedge \mu(y)$$

$$= \mu^*(x + R_\mu) \wedge \mu^*(y + R_\mu)$$

$$2. \mu^*(x\alpha y + R_\mu) = \mu(x\alpha y)$$

$$\geq \mu(x) \vee \mu(y)$$

$$= \mu^*(x + R_\mu) \vee \mu^*(y + R_\mu)$$

O halde μ^* , R / R_μ ’nün bulanık idealidir.

Teorem 7.5 R bir Γ – halka olmak üzere μ , R ’nin bir bulanık ideali ve (F, A) , R üzerinde bir idealistik esnek Γ – halka olsun. Her $t \in A$ için $R_\mu \subset F(t)$ olmak üzere;

1. Her $t \in A$ için $(F / R_\mu)(t) = F(t) / R_\mu$ iken $(F / R_\mu, A)$, R / R_μ üzerinde idealistik esnek Γ – halkadır.

2. Teorem 7.4’te tanımlanan μ^* (R / R_μ ’nün bulanık alt kümesi idi), $(F / R_\mu, A)$ idealistik esnek Γ – halkasının bulanık idealidir [18].

İspat

1. R bir Γ – halka olmak üzere μ , R ’nin bir bulanık idealidir, bu durumda her $x, y \in R$, $\alpha \in \Gamma$ için $\mu(x - y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$ ve $\mu(x\alpha y) \geq \mu(x) \vee \mu(y)$ dir.

(F, A) , R üzerinde her $t \in A$ iken $R_\mu \subset F(t)$ olacak şekilde idealistik esnek Γ – halkadır. $F(t)$, R ’nin idealidir ve her $t \in A$ iken R_μ , $F(t)$ ’nin idealidir. Her $t \in A$, $x, y \in F(t)$, $\alpha \in \Gamma$ için;

$$x + R_\mu, y + R_\mu \in F(t) / R_\mu$$

$$(x + R_\mu) - (y + R_\mu) = ((x - y) + R_\mu) \in F(t) / R_\mu$$

$$(x + R_\mu)\alpha(y + R_\mu) = (x\alpha y + R_\mu) \in F(t) / R_\mu$$

Bu takdirde her $t \in A$ için $F(t)$, R 'nin ideali olduğundan $F(t) / R_\mu$, R / R_μ 'nin idealidir.

Bu durumda $(F / R_\mu, A)$, R / R_μ üzerinde idealistik esnek Γ – halkadır.

2. $\mu^*, R / R_\mu$ nün bulanık idealidir. (Teorem 7.4)

Her $t \in A$, $x, y \in F(t)$, $\alpha \in \Gamma$

$$x + R_\mu, y + R_\mu \in F(t) / R_\mu$$

$$\mu^*((x - y) + R_\mu) = \mu(x - y)$$

$$\geq \mu(x) \wedge \mu(y)$$

$$= \mu^*(x + R_\mu) \wedge \mu^*(y + R_\mu)$$

$$\mu^*(x\alpha y + R_\mu) = \mu(x\alpha y)$$

$$\geq \mu(x) \vee \mu(y)$$

$$= \mu^*(x + R_\mu) \vee \mu^*(y + R_\mu)$$

$\mu^*, (F / R_\mu, A)$ esnek Γ – halkasının da bulanık idealidir.

7.2 İdealistik Esnek Gamma Halkalarında Bulanık İzomorfizma Teoremleri

Bu bölümde bulanık ideallerden faydalanılarak idealistik esnek Γ – halkaların bulanık izomorfizma teoremleri kurulacak ve temel bazı teoremler elde edilecektir.

Yardımcı Teorem 7.4 R ve K Γ – halkalar olmak üzere $f : R \rightarrow K$ bir epimorfizma ve μ , R 'nin bulanık ideali ise $f(\mu)$, K 'nin bulanık idealidir.

İspat $f : R \rightarrow K$ fonksiyonu $\mu \rightarrow f(\mu)$ olacak şekilde bir epimorfizmadır. μ , R 'nin bulanık ideali ise her $x, y \in R$ $\mu(x - y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$ ve $\mu(x\alpha y) \geq \mu(x) \vee \mu(y)$ dir.

$\mu \in R, x_1, x_2 \in R, y_1, y_2 \in K, \alpha \in \Gamma$ için;

$$f(\mu)(y) = \begin{cases} \bigvee_{f(x)=y} \mu(x) & \text{eğer } x \in f^{-1}(y) \\ 0 & \text{aksi takdirde} \end{cases} \text{ olarak tanımlıdır.}$$

$f^{-1}(y_1) = \emptyset$ ve $f^{-1}(y_2) = \emptyset$ ise ispat aşıkardır.

$f(x_1) = y_1$ ve $f(x_2) = y_2$ iken

$$\begin{aligned} \text{i) } f(\mu)(y_1 - y_2) &= \bigvee_{f(x_1 - x_2) = y_1 - y_2} \mu(x_1 - x_2) \\ &\geq \bigvee_{f(x_1) = y_1} \mu(x_1) \wedge \bigvee_{f(x_2) = y_2} \mu(x_2) \\ &= f(\mu)(y_1) \wedge f(\mu)(y_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } f(\mu)(y_1 \alpha y_2) &= \bigvee_{f(x_1 \alpha x_2) = y_1 \alpha y_2} \mu(x_1 \alpha x_2) \\ &\geq \bigvee_{f(x_1) = y_1} \mu(x_1) \vee \bigvee_{f(x_2) = y_2} \mu(x_2) \\ &= f(\mu)(y_1) \vee f(\mu)(y_2) . \end{aligned}$$

Yardımcı Teorem 7.5 R ve K Γ – halkalar olmak üzere $f : R \rightarrow K$ bir homomorfizma olsun ve μ , R ’nin bulanık ideali ve ν , K ’nin bulanık ideali olsun. Bu durumda;

$$1. f \text{ epimorfizma ise } f(f^{-1}(\nu)) = \nu$$

$$2. \mu, \text{ Çekf üzerinde sabit ise } f^{-1}(f(\mu)) = \mu$$

İspat 1. $f : R \rightarrow K$ bir homomorfizma ve her $y \in K$ iken $y = f(x)$ olacak şekilde $\exists x \in R$.

$$f(f^{-1}(\nu))(y) = \bigvee \{ f^{-1}(\nu)(x) \mid f(x) = y \}$$

$$f(f^{-1}(\nu))(y) = f(f^{-1}(\nu))(f(x)) \text{ ters görüntü tanımından}$$

$$= f^{-1}(\nu)(x) = \nu(f(x))$$

$$= f^{-1}(\nu)(x) = \nu(f(x)) = \nu(y)$$

Bu durumda $f(f^{-1}(\nu)) = \nu$ olur.

2. μ , $\check{C}ekf$ üzerinde sabit ise $x \in R$ iken

$$f^{-1}(f(\mu))(x) = f(\mu)f(x) = \vee \{ \mu(y) \mid f(x) = f(y) \} = \mu(x).$$

Teorem 7.6 R ve K Γ – halkaları olmak üzere $f : R \rightarrow K$ bir homomorfizma ve ν , K ’nin bir bulanık ideali ise $f^{-1}(\nu)$ R üzerinde bir bulanık idealidir.

İspat $f : R \rightarrow K$ bir homomorfizma olsun. ν , K ’nin bir bulanık ideali ise her $y_1, y_2 \in K$ için $\nu(y_1 - y_2) \geq \nu(y_1) \wedge \nu(y_2)$ ve $\nu(y_1 \alpha y_2) \geq \nu(y_1) \vee \nu(y_2)$ dir.

$$f^{-1}(\nu)(x_1 - x_2) = \nu(f(x_1 - x_2)) \quad f \text{ epimorfizma olduğundan}$$

$$= \nu(f(x_1) - f(x_2)) \geq \nu(f(x_1)) \wedge \nu(f(x_2))$$

$$= f^{-1}(\nu)(x_1) \wedge f^{-1}(\nu)(x_2)$$

$$f^{-1}(\nu)(x_1 \alpha x_2) = \nu(f(x_1 \alpha x_2))$$

$$= \nu(f(x_1) \alpha f(x_2)) \geq \nu(f(x_1)) \vee \nu(f(x_2))$$

$$= f^{-1}(\nu)(x_1) \vee f^{-1}(\nu)(x_2)$$

Bu durumda $f^{-1}(\nu)$ R üzerinde bir bulanık idealidir.

Teorem 7.7 (1. Bulanık Γ – İzomorfizma Teoremi)

R ve K Γ – halkalar olmak üzere (F, A) ve (H, B) sırasıyla R ve K üzerinde idealistik esnek Γ – halkalar olsun. Eğer (f, g) , (F, A) ’dan (H, B) ’ye bir esnek Γ – homomorfizma ve $\check{C}ekf \subset R_\mu$ olacak şekilde μ bir bulanık ideal ise bu durumda;

$$1. (F / \mu, A) \simeq_\Gamma (f(F) / f(\mu), A)$$

$$2. g \text{ biyektif fonksiyon ise } (F / \mu, A) \simeq_\Gamma (H / f(\mu), B)$$

İspat 1. R ve K Γ – halkalar olmak üzere (F, A) , R üzerinde bir idealistik esnek Γ – halka ise her $t \in A$ için $F(t)$, R ’nin idealidir. μ , R ’nin bulanık ideali olduğundan her $x, y \in R$ ve $\alpha \in \Gamma$ için $\mu(x - y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$ ve $\mu(x \alpha y) \geq \mu(x) \vee \mu(y)$ dir.

$(F / \mu)(t) = F(t) / \mu$ ve $F(t) \tilde{\triangleleft}_\Gamma R$ olduğundan $F(t) / \mu \tilde{\triangleleft}_\Gamma R / \mu$. Bu durumda $(F / \mu, A)$, R / μ üzerinde idealistik esnek Γ – halkadır.

$(f, g): (F, A) \rightarrow (H, B)$ esnek Γ – homomorfizma olsun. Her $t \in A$ için $f(F(t)) = H(g(t))$, K üzerinde idealdir ve $(f(F)/f(\mu), A)$, $K/f(\mu)$ üzerinde idealistik esnek Γ – halkadır.

R/μ 'den $K/f(\mu)$ üzerine bir $\tilde{f}$ fonksiyonu tanımlayalım.

$$\tilde{f}: R/\mu \rightarrow K/f(\mu)$$

$$\mu_x \rightarrow \tilde{f}(\mu_x) = (f(\mu))_{f(x)} \text{ olsun.}$$

a) $\tilde{f}$ iyi tanımlıdır:

$$\mu_x = \mu_y \text{ olsun. } \mu(x - y) = \mu(0)$$

$\zeta ekf \subset R_\mu$ olduğundan μ , ζekf üzerinde sabittir. Yardımcı Teorem 7.5'in 2) ispatından

$$f^{-1}(f(\mu)) = \mu$$

$$(f^{-1}(f(\mu)))(x - y) = (f^{-1}(f(\mu)))(0)$$

$$f(\mu)(f(x - y)) = f(\mu)(f(0)) \text{ } f \text{ epimorfizma olduğundan;}$$

$$f(\mu)(f(x) - f(y)) = f(\mu)(0) \Rightarrow (f(\mu))_{f(x)} = (f(\mu))_{f(y)} \Rightarrow \tilde{f}(\mu_x) = \tilde{f}(\mu_y)$$

b) $\tilde{f}$ bir homomorfizmadır:

$$\tilde{f}(\mu_x + \mu_y) = \tilde{f}(\mu_{x+y})$$

$$= (f(\mu))_{f(x+y)} = (f(\mu))_{f(x)+f(y)}$$

$$= (f(\mu))_{f(x)} + (f(\mu))_{f(y)}$$

$$= \tilde{f}(\mu_x) + \tilde{f}(\mu_y)$$

$$\tilde{f}(\mu_x \alpha \mu_y) = \tilde{f}(\mu_{x \alpha y})$$

$$= (f(\mu))_{f(x \alpha y)} = (f(\mu))_{f(x) \alpha f(y)}$$

$$= (f(\mu))_{f(x)} \alpha (f(\mu))_{f(y)}$$

$$= \tilde{f}(\mu_x) \alpha \tilde{f}(\mu_y)$$

c) $\tilde{f}$ bir epimorfizmadır:

f epimorfizma olduğundan her $y \in K$ için $f(x) = y$ olacak şekilde $\exists x \in R$ vardır. Bu durumda her $(f(\mu))_y \in K / f(\mu)$ için $\tilde{f}(\mu_x) = (f(\mu))_y$ olacak şekilde $\exists \mu_x \in R / \mu$ vardır.

d) $\tilde{f}$ bir monomorfizmadır:

$$(f(\mu))_{f(x)} = (f(\mu))_{f(y)}$$

$$\Rightarrow (f(\mu))_{f(x)-f(y)} = (f(\mu))_{(0)}$$

$$(f(\mu))_{f(x-y)} = (f(\mu))_{f(0)}$$

$$(f^{-1}(f(\mu)))(x-y) = (f^{-1}(f(\mu)))(0)$$

$$\mu(x-y) = \mu(0)$$

$$\Rightarrow \mu_x = \mu_y$$

a), b), c) ve d)'den $\tilde{f}$, R / μ 'den $K / f(\mu)$ üzerine bir izomorfizmadır.

$\tilde{g} : A \rightarrow A$ ye $t \rightarrow \tilde{g}(t) = t$ ile tanımlansın. Bu durumda $\tilde{g}$ bijektiftir.

$$\tilde{f}((F / \mu)(t)) = \{ f(\mu)_{f(x)} \mid x \in F(t) \}$$

$$= f(F(t)) / f(\mu) = f(F(\tilde{g}(t))) / f(\mu) = (f(F) / f(\mu))(\tilde{g}(t))$$

$(\tilde{f}, \tilde{g})$ bir izomorfizmadır ve $(F / \mu, A) \simeq_{\Gamma} (f(F) / f(\mu), A)$ olur.

2. g bijektif ise

$$\tilde{f} : R / \mu \rightarrow K / f(\mu)$$

$$\mu_x \rightarrow \tilde{f}(\mu_x) = (f(\mu))_{f(x)} \text{ olarak tanımlansın.}$$

$$\tilde{f}(F / \mu)(t) = \{ f(\mu)_{f(x)} \mid x \in F(t) \} = f(F(t)) / f(\mu) = H(g(t)) / f(\mu)$$

Buradan $(\tilde{f}, g)$ bir izomorfizmadır ve $(F / \mu, A) \simeq_{\Gamma} (H / f(\mu), B)$ olur.

Teorem 7.8 R ve K Γ – halkalar olmak üzere (F, A) ve (H, B) sırasıyla R ve K üzerinde idealistik esnek Γ – halka olsunlar. Eğer (f, g) , (F, A) ’dan (H, B) ’ye esnek Γ – homomorfizma ise ve ν , K ’nın bir bulanık ideali ise bu durumda;

1. $(F / f^{-1}(\nu), A) \simeq_{\Gamma} (f(F) / \nu, A)$
2. g bijektif fonksiyon ise $(F / f^{-1}(\nu), A) \simeq_{\Gamma} (H / \nu, B)$ bulunur.

İspat

Teorem 7.6 dan $(F / f^{-1}(\nu), A)$ ve $(f(F) / \nu, A)$ sırasıyla $R / f^{-1}(\nu)$ ve K / ν üzerinde idealistik esnek Γ – halkalardır.

f epimorfizma olduğundan ve Yardımcı Teorem 7.5 den $\nu = f(f^{-1}(\nu))$ olduğu biliniyor.

Şimdi $\check{C}ekf \subset (R_{f^{-1}(\nu)})$ olduğunu gösterelim.

Her $x \in \check{C}ekf$ için $f(x) = 0 = f(0)$ ve $\nu(f(x)) = \nu(f(0))$

$$(f^{-1}(\nu))(x) = (f^{-1}(\nu))(0)$$

Buradan $x \in R_{f^{-1}(\nu)}$ ve $\check{C}ekf \subset (R_{f^{-1}(\nu)})$ olur.

Teorem 7.7 den $(F / f^{-1}(\nu), A) \simeq_{\Gamma} (f(F) / \nu, A)$ olur.

2. g bijektif fonksiyon ise $(F / f^{-1}(\nu), A) \simeq_{\Gamma} (H / \nu, B)$

Yardımcı Teorem 7.6 R bir Γ – halka olmak üzere S kümesi R ’nin bir alt kümesi olsun. χ_S , R ’nin karakteristik fonksiyonu olmak üzere χ_S ’nin R ’nin bulanık ideali olması için gerek ve yeter koşul S ’nin, R ’nin ideali olmasıdır.

İspat R bir Γ – halka olmak üzere S kümesi R ’nin bir alt kümesi olsun. χ_S , R ’nin karakteristik fonksiyonu ise her $x \in R$ için;

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1 & x \in S \\ 0 & x \notin S \end{cases} \text{ dir.}$$

i) χ_S , R ’nin bir bulanık ideali olsun. Bu durumda her $x, y \in R$ için;

$$\chi_S(x - y) \geq \chi_S(x) \wedge \chi_S(y)$$

$$\chi_S(x\alpha y) \geq \chi_S(x) \vee \chi_S(y) \text{ dir.}$$

Her $x, y \in S$ için;

$$\chi_S(x-y) \geq \chi_S(x) \wedge \chi_S(y) = 1 \Rightarrow \chi_S(x-y) = 1 \Rightarrow x-y \in S$$

Her $x \in S, r \in R, \alpha \in \Gamma$ için;

$$\chi_S(x\alpha r) \geq \chi_S(x) \vee \chi_S(r) = 1 \Rightarrow \chi_S(x\alpha r) = 1 \Rightarrow x\alpha r \in S \text{ ve}$$

$$\chi_S(r\alpha x) \geq \chi_S(r) \vee \chi_S(x) = 1 \Rightarrow \chi_S(r\alpha x) = 1 \Rightarrow r\alpha x \in S$$

Bu durumda S, R 'nin idealidir.

ii) S, R 'nin ideali olsun. Bu durumda her $x, y \in S$ için $x-y \in S$ dir. Bu takdirde

a) Her $x, y \in S, \alpha \in \Gamma$ için;

$$\chi_S(x-y) \geq \chi_S(x) \wedge \chi_S(y) \Rightarrow 1 \geq 1 \wedge 1 = 1$$

$$\chi_S(x\alpha y) \geq \chi_S(x) \vee \chi_S(y) \Rightarrow 1 \geq 1 \vee 1 = 1$$

b) Her $x \in S$ ve $y \notin S$ ise $x-y \notin S, \alpha \in \Gamma$ için;

$$\chi_S(x-y) \geq \chi_S(x) \wedge \chi_S(y) \Rightarrow 0 \geq 1 \wedge 0 = 0$$

$$\chi_S(x\alpha y) \geq \chi_S(x) \vee \chi_S(y) \Rightarrow 1 \geq 1 \vee 0 = 1 \text{ (} x\alpha y \in S \text{)}$$

c) Her $x, y \notin S, \alpha \in \Gamma$ için;

$$\chi_S(x-y) \geq \chi_S(x) \wedge \chi_S(y) \Rightarrow 0 \geq 0 \wedge 0 = 0$$

$$\chi_S(x\alpha y) \geq \chi_S(x) \vee \chi_S(y) \Rightarrow 0 \geq 0 \vee 0 = 0$$

Sonuç olarak a), b) ve c) durumlarından her $x, y \in R$ için istenilen koşul sağlanır. Bu durumda χ_S, R 'nin bir bulanık idealidir.

Teorem 7.9 R ve K Γ -halkalar olmak üzere (F, A) ve (H, B) sırasıyla R ve K üzerinde idealistik esnek Γ -halkalar olsun. Eğer $(f, g), (F, A)$ 'dan (H, B) 'ye esnek Γ -homomorfizma ve $\text{Çek}f \subset I$ olmak üzere I, R 'nin bir ideali ise bu durumda;

$$1. (F / \chi_I, A) \simeq_{\Gamma} (f(F) / \chi_{f(I)}, A)$$

2. g bijektif fonksiyon ise $(F / \chi_I, A) \simeq_{\Gamma} (H / \chi_{f(I)}, B)$.

İspat Yardımcı Teorem 7.6'dan χ_I ve $\chi_{f(I)}$ sırasıyla R ve K Γ -halkaları üzerinde bulanık idealler olsunlar. Dolayısıyla χ_I ve $\chi_{f(I)}$ sırasıyla (F, A) ve (H, B) üzerinde bulanık ideallerdir.

Teorem 7.7' de $\mu = \chi_I$ alırsak $R_{\mu} = R_{\chi_I} = I \supset Çekf$ ve $f(\mu) = f(\chi_I) = \chi_{f(I)}$ olur.

Bu durumda;

1. $(F / \chi_I, A) \simeq_{\Gamma} (f(F) / \chi_{f(I)}, A)$

2. g bijektif fonksiyon ise $(F / \chi_I, A) \simeq_{\Gamma} (H / \chi_{f(I)}, B)$

Teorem 7.10 R ve K Γ -halkalar olmak üzere (F, A) ve (H, B) sırasıyla R ve K üzerinde birer idealistik esnek Γ -halka olsunlar. Eğer (f, g) , (F, A) 'dan (H, B) 'ye esnek Γ -homomorfizma ise ve J , K 'nın ideali ise bu durumda;

1. $(F / \chi_{f^{-1}(J)}, A) \simeq_{\Gamma} (f(F) / \chi_J, A)$

2. Eğer g bijektif fonksiyon ise $(F / \chi_{f^{-1}(J)}, A) \simeq_{\Gamma} (H / \chi_J, B)$.

İspat 1. $\chi_{f^{-1}(J)}$ ve χ_J , sırasıyla (F, A) ve (H, B) üzerinde bulanık idealler olduğunu biliyoruz.

$\nu = \chi_J$ Teorem 7.8'den $f^{-1}(\nu) = f^{-1}(\chi_J) = \chi_{f^{-1}(J)}$

Her $x \in R$ için;

i) Eğer $x \in f^{-1}(J)$ ise $f(x) \in J$

$$f^{-1}(\chi_J)(x) = \chi_J(f(x)) = 1 = \chi_{f^{-1}(J)}(x)$$

ii) Eğer $x \notin f^{-1}(J)$ ise $f(x) \notin J$

$$(f^{-1}(\chi_J))(x) = \chi_J(f(x)) = 0 = \chi_{f^{-1}(J)}(x)$$

Buradan $(F / \chi_{f^{-1}(J)}, A) \simeq_{\Gamma} (f(F) / \chi_J, A)$ olur.

2. Eğer g bijektif fonksiyon ise $(F / \chi_{f^{-1}(J)}, A) \simeq_{\Gamma} (H / \chi_J, B)$

Her R Γ -halkası için $R / \chi_{(0)} \simeq_{\Gamma} R$ dir. $R / \chi_{(0)}$ 'in R 'ye eşit olduğu durumu göz önüne alalım. Teorem 7.9'da $I = \check{C}ekf$ aldığımız takdirde aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 7.11 R ve K Γ -halkalar olmak üzere (F, A) ve (H, B) sırasıyla R ve K üzerinde birer idealistik esnek Γ -halka olsunlar. Eğer (f, g) , (F, A) 'dan (H, B) 'ye esnek Γ -homomorfizma ise bu durumda;

1. $(F / \chi_{\check{C}ekf}, A) \simeq_{\Gamma} (f(F), A)$
2. g bijektif fonksiyon ise $(F / \chi_{\check{C}ekf}, A) \simeq_{\Gamma} (H, B)$

I , R Γ -halkası üzerinde bir ideal olsun. R / I bölüm halkası üzerindeki denklik bağıntısı $x \sim_{\Gamma} y$, $x - y \in I$ olacak şekilde " $\sim_{\Gamma}$ " ile tanımlanmıştır. Kolaylık olması için x 'in I idealine göre y 'ye denk olduğu $x \sim_{\Gamma} y(I)$ ile gösterilir. x 'in χ_I bulanık idealine göre y 'ye denk olduğu da $x \sim_{\Gamma} y(\chi_I)$ ile gösterilir.

Yardımcı Teorem 7. 7 Kabul edelim ki I , R Γ -halkası üzerinde bir ideal olsun. Bu durumda $x \sim_{\Gamma} y(I)$ olması için gerek ve yeter koşul $x \sim_{\Gamma} y(\chi_I)$ olmasıdır.

İspat $x \sim_{\Gamma} y(I) \Leftrightarrow x - y \in I \Leftrightarrow \chi_I(x - y) = 1 \Leftrightarrow \chi_I(x - y) = \chi_I(0)$

$$\Leftrightarrow x \sim_{\Gamma} y(\chi_I).$$

Yardımcı Teorem 7.7'den I , R Γ -halkasının bulanık ideali iken $R / I \simeq_{\Gamma} R / \chi_I$ olur.

Teorem 7.9 , 7.10 ve 7.11 uygulamalarından çıkan sonuçlar;

Sonuç 7.1 R ve K Γ -halkalar olmak üzere (F, A) ve (H, B) sırasıyla R ve K üzerinde birer esnek Γ -halka olsunlar. Eğer (f, g) , (F, A) 'den (H, B) 'ye esnek Γ -homomorfizma ve her $t \in A$ için $\check{C}ekf \subset I \subset F(t)$ olacak şekilde I , R 'nin ideali ise bu durumda;

1. $(F / I, A) \simeq_{\Gamma} (f(F) / f(I), A)$
2. g bijektif fonksiyon ise $(F / I, A) \simeq_{\Gamma} (H / f(I), B)$.

Sonuç 7.2 R ve K Γ -halkalar olmak üzere (F, A) ve (H, B) sırasıyla R ve K üzerinde birer esnek Γ -halka olsunlar. Eğer (f, g) , (F, A) 'dan (H, B) 'ye esnek Γ -

homomorfizma ve her $t \in A$ için $f^{-1}(J) \subset F(t)$ olacak şekilde J , K 'nin ideali ise bu durumda;

$$1. (F / f^{-1}(J), A) \simeq_{\Gamma} (f(F) / J, A)$$

$$2. g \text{ bijektif fonksiyon ise } (F / f^{-1}(J), A) \simeq_{\Gamma} (H / J, B).$$

Sonuç 7.3 R ve K Γ -halkalar olmak üzere (F, A) ve (H, B) sırasıyla R ve K üzerinde birer idealistik esnek Γ -halka olsunlar. Eğer (f, g) , her $t \in A$ için $\check{C}ekf \subset F(t)$ olacak şekilde (F, A) 'dan (H, B) 'ye bir esnek Γ -homomorfizma ise bu durumda;

$$1. (F / \check{C}ekf, A) \simeq_{\Gamma} (f(F), A)$$

$$2. g \text{ bijektif fonksiyon ise } (F / \check{C}ekf, A) \simeq_{\Gamma} (H, B)$$

Teorem 7.12 (2. Bulanık Γ -İzomorfizma Teoremi)

R bir Γ -halka olmak üzere (F, A) , R üzerinde idealistik esnek Γ -halka olsun. μ ve ν , $\mu(0) = \nu(0)$ olacak şekilde R 'nin iki bulanık idealidir.

$$((F_{\mu} + F_{\nu}) / \nu, A) \simeq_{\Gamma} (F_{\mu} / \mu \cap \nu, A)$$

İspat $((F_{\mu} + F_{\nu}) / \nu, A)$ 'nın $(R_{\mu} + R_{\nu}) / \nu$ üzerinde idealistik esnek Γ -halka ve $(F_{\mu} / \mu \cap \nu, A)$ 'nın $R_{\mu} / \mu \cap \nu$ üzerinde idealistik esnek Γ -halka olduğu biliniyor.

Her $x \in R_{\mu} + R_{\nu}$, $x = a + b$, $a \in R_{\mu}$, $b \in R_{\nu}$ olacak şekilde seçilir.

$\tilde{f}$ fonksiyonu tanımlayalım.

$$\tilde{f} : (R_{\mu} + R_{\nu}) / \nu \rightarrow R_{\mu} / \mu \cap \nu$$

$$\nu_x \rightarrow \tilde{f}(\nu_x) = (\mu \cap \nu)_a$$

a) $y = c + d$, $c \in R_{\mu}$, $d \in R_{\nu}$ iken $\nu_x = \nu_y$ ise

$$\nu((a + b) - (c + d)) = \nu((a - c) - (d - b)) = \nu(0)$$

Bu durumda $\nu(a - c) = \nu(d - b) = \nu(0)$

$$\Rightarrow (\mu \cap \nu)(a - c) = \mu(a - c) \wedge \nu(a - c)$$

$$= \mu(0) \wedge \nu(a-c)$$

$$= \mu(0) \wedge \nu(0) = (\mu \cap \nu)(0)$$

Buradan $(\mu \cap \nu)_a = (\mu \cap \nu)_c$ demektir. Sonuç olarak $\tilde{f}$ fonksiyonu iyi tanımlıdır.

b) $x = a + b$, $y = c + d$, $a, c \in R_\mu$, $b, d \in R_\nu$ iken her $\nu_x, \nu_y \in (R_\mu + R_\nu) / \nu$, $\alpha \in \Gamma$ için

$$x + y = a + c + b + d$$

$$x\alpha y = (a + b)\alpha(c + d) = a\alpha c + b\alpha c + a\alpha d + b\alpha d$$

$$\tilde{f}(\nu_x + \nu_y) = \tilde{f}(\nu_{x+y}) = (\mu \cap \nu)_{a+c}$$

$$= (\mu \cap \nu)_a + (\mu \cap \nu)_c$$

$$= \tilde{f}(\nu_x) + \tilde{f}(\nu_y)$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(\nu_x + \nu_y) = \tilde{f}(\nu_x) + \tilde{f}(\nu_y)$$

ve R_ν , R' 'nin ideali olduğundan $a\alpha d, b\alpha c, b\alpha d \in R_\nu$. Buradan;

$$\tilde{f}(\nu_x \alpha \nu_y) = \tilde{f}(\nu_{x\alpha y}) = \tilde{f}(\nu_{a\alpha c + b\alpha c + a\alpha d + b\alpha d}) = (\mu \cap \nu)_{a\alpha c}$$

$$= (\mu \cap \nu)_a \alpha (\mu \cap \nu)_c = \tilde{f}(\nu_x) \alpha \tilde{f}(\nu_y)$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(\nu_x \alpha \nu_y) = \tilde{f}(\nu_x) \alpha \tilde{f}(\nu_y)$$

Sonuç olarak $\tilde{f}$ fonksiyonu bir homomorfizmadır.

c) Her $(\mu \cap \nu)_a \in R_\mu / (\mu \cap \nu)$, $b \in R_\nu$ alınır, ise $x = a + b \in R_\mu + R_\nu$ dir. Buradan

$$\tilde{f}(\nu_x) = (\mu \cap \nu)_a \text{ ve } \tilde{f} \text{ bir epimorfizmadır.}$$

d) $x = a + b, y = c + d$ $a, c \in R_\mu$, $b, d \in R_\nu$ olmak üzere her $x, y \in R_\mu + R_\nu$ için, eğer

$$(\mu \cap \nu)_a = (\mu \cap \nu)_c \text{ ise bu durumda } \mu \cap \nu(a-c) = \mu \cap \nu(0) \text{ olur.}$$

$$\mu \cap \nu(a-c) \geq \mu(a-c) \wedge \nu(a-c) = \mu(0) \wedge \nu(0)$$

$$\mu(0) = \nu(0) \text{ ve } \mu(a-c) = \mu(0) \text{ olduğundan } \nu(a-c) = \nu(0) \text{ olur. Buradan}$$

$$\nu(x-y) = \nu(a+b-c-d) = \nu(a-c+b-d)$$

$$\geq \nu(a-c) \wedge \nu(b-d)$$

$$= \nu(0) \wedge \nu(0)$$

$$\Rightarrow \nu_x = \nu_y$$

Bu takdirde $\tilde{f}$ bir monomorfizmadır.

a, b, c, d'den $\tilde{f}$ 'nin $(R_\mu + R_\nu) / \nu$ 'den $R_\mu / \mu \cap \nu$ 'ye bir izomorfizma olduğu söylenebilir.

$\tilde{g}: A \rightarrow A$ fonksiyonu $t \rightarrow \tilde{g}(t) = t$ ile tanımlansın. Bu durumda $\tilde{g}$ bijektiftir.

$$\tilde{f}((F_\mu + F_\nu)(t) / \nu) = F_\mu(t) / \mu \cap \nu = F_\mu(\tilde{g}(t)) / \mu \cap \nu$$

$$\Rightarrow (\tilde{f}, \tilde{g}): ((F_\mu + F_\nu) / \nu, A) \simeq_\Gamma (F_\mu / \mu \cap \nu, A)$$

Sonuç 7.4 R bir Γ – halka olmak üzere ve (F, A) , R üzerinde idealistik esnek Γ – halka ve I, J R üzerinde iki ideal olsunlar. Bu durumda

$$((F_{\chi_I} + F_{\chi_J}) / \chi_J, A) \simeq_\Gamma (F_{\chi_I} / \chi_{I \cap J}, A)$$

Sonuç 7.5 R bir Γ – halka ve (F, A) , R üzerinde idealistik esnek Γ – halka olsun. I, J R üzerinde her $t \in A$ için $F_{\chi_I}(t) \supset J$ olacak şekilde iki ideal olsun. Bu durumda

$$((F_{\chi_I} + F_{\chi_J}) / J, A) \simeq_\Gamma (F_{\chi_I} / I \cap J, A).$$

Teorem 7.13 (3. Bulanık Γ – İzomorfizma Teoremi) R bir Γ – halkası ve (F, A) , R üzerinde idealistik esnek Γ – halka olsun. μ ve ν her $t \in A$ için $F_\mu(t) = R_\mu$ olacak şekilde R 'nin bulanık idealleridir.

$$\left((F / \nu) / (F_\mu / \nu), A \right) \simeq_\Gamma (F / \mu, A)$$

İspat $\left((F / \nu) / (F_\mu / \nu), A \right), (R / \nu) / (R_\mu / \nu)$ üzerinde idealistik esnek Γ – halkadır ve

$(F / \mu, A), R / \mu$ üzerinde idealistik esnek Γ – halkadır.

Bir $\tilde{f}$ tanımlayalım.

$$\tilde{f}: (R / \nu) / (R_\mu / \nu) \rightarrow R / \mu$$

$$\nu_x + R_\mu / \nu \rightarrow \tilde{f}(\nu_x + R_\mu / \nu) = \mu_x$$

a) Eğer

$$\nu_x + R_\mu / \nu = \nu_y + R_\mu / \nu, \text{ öyleyse } \nu_x - \nu_y = \nu_{x-y} \in R_\mu / \nu$$

Bu durumda $x - y \in R_\mu$

$$\mu(x - y) = \mu(0) \text{ ve } \mu(x) = \mu(y)$$

$$\Rightarrow \mu_x = \mu_y \text{ ve } \tilde{f} \text{ iyi tanımlıdır.}$$

b) Her $\nu_x + R_\mu / \nu, \nu_y + R_\mu / \nu \in (R / \nu) / (R_\mu / \nu)$

$$\begin{aligned} \tilde{f}((\nu_x + R_\mu / \nu) + (\nu_y + R_\mu / \nu)) &= \tilde{f}((\nu_x + \nu_y) + R_\mu / \nu) \\ &= \tilde{f}(\nu_{x+y} + R_\mu / \nu) \\ &= \mu_{x+y} = \mu_x + \mu_y \\ &= \tilde{f}(\nu_x + R_\mu / \nu) + \tilde{f}(\nu_y + R_\mu / \nu) \\ \tilde{f}((\nu_x + R_\mu / \nu) \alpha (\nu_y + R_\mu / \nu)) &= \tilde{f}((\nu_x \alpha \nu_y) + R_\mu / \nu) \\ &= \tilde{f}(\nu_{x \alpha y} + R_\mu / \nu) \\ &= \mu_{x \alpha y} = \mu_x \alpha \mu_y \\ &= \tilde{f}(\nu_x + R_\mu / \nu) \alpha \tilde{f}(\nu_y + R_\mu / \nu) \end{aligned}$$

Bu durumda $\tilde{f}$ bir homomorfizmadır.

c) Her $\mu_x \in R / \mu$ için $\tilde{f}(\nu_x + R_\mu / \nu) = \mu_x$ olacak şekilde $\nu_x + R_\mu / \nu \in (R / \nu) / (R_\mu / \nu)$ vardır. Bu durumda $\tilde{f}$ bir epimorfizmadır.

d) $\mu_x = \mu_y$ ise $\mu(x - y) = \mu(0)$ ve $x - y \in R_\mu$

$$\nu_{x-y} = \nu_x - \nu_y \in R_\mu / \nu$$

$$\nu_x + R_\mu / \nu = \nu_y + R_\mu / \nu$$

Bu durumda $\tilde{f}$ bir monomorfizmadır.

a, b, c, d ; $\tilde{f}$ fonksiyonunun bir izomorfizma olduğunu gösterir.

$\tilde{g} : A \rightarrow A$ fonksiyonu $t \rightarrow \tilde{g}(t) = t$ ile tanımlansın. Öyleyse $\tilde{g}$ bijektiftir.

$$\tilde{f} \left(\left((F / \nu) /_{(F_\mu / \nu)} \right) (t) \right) = F(t) / \mu = F(\tilde{g}(t)) / \mu = (F / \mu)(\tilde{g}(t))$$

Bu takdirde $(\tilde{f}, \tilde{g}) : \left((F / \nu) /_{(F_\mu / \nu)}, A \right) \simeq_\Gamma (F / \mu, A)$ dir.

Sonuç 7.6 R bir Γ –halka olmak üzere (F, A) , R üzerinde idealistik esnek Γ –halka olsun. I, J ; her $t \in A$ için $F_{\chi_I}(t) = J$ olacak şekilde R ’nin iki idealidir. Bu durumda

$$\left((F / \chi_I) /_{(J / \chi_I)}, A \right) \simeq_\Gamma (F / \chi_J, A).$$

Sonuç 7.7 R bir Γ –halka ve (F, A) , R üzerinde idealistik esnek Γ –halka olsun. I, J ; her $t \in A$ için $I \subset J$ ve $F_{\chi_I}(t) = J$ olacak şekilde R ’nin iki ideali ise

$$\left((F / I) /_{(J / I)}, A \right) \simeq_\Gamma (F / J, A).$$

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde klasik cebir de dahil olmak üzere bulanık küme teorisi ve esnek küme teorisiyle ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir. Daha çok izomorfizma teoremleri üzerinde durulmuştur. Grup, halka, esnek halka, idealistik esnek Γ – halka üzerindeki izomorfizma teoremleri ve idealistik esnek halkalarda bulanık izomorfizma teoremleri verilmiş ve karşılaştırma imkanı sunulmuştur.

Son olarak idealistik esnek Γ – halkalarda bulanık izomorfizma teoremleri kurulmuş ve ispatlanmıştır. Birinci, ikinci, üçüncü bulanık Γ – izomorfizma teoremleri yardımıyla da temel bazı sonuçlara ulaşılmıştır. Diğer cebirsel yapılarda da benzer işlemler uygulanabilir.

KAYNAKLAR

-
- [1] Molodtsov, D., (1999). "Soft set theory-first results", Comput. Math. Appl., 37: 19-37.
 - [2] Maji, P.K., Roy, A.R. ve Biswas R., (2002). "An application of soft sets in a decision making problem", Comput.Math. Appl., 44: 1077-1083.
 - [3] Maji, P.K., Roy, A.R. ve Biswas R., (2003). "Soft set theory", Comput.Math. Appl., 45 (4-5): 555-562.
 - [4] Roy, A.R. ve Maji, P.K., (2007). "A fuzzy soft set theoretic approach to decision making problems", Journal of Computational and Applied Mathematics, 203 (1): 412-418.
 - [5] Chen, D., Tsang, E.C.C. ve Yeung D.S., (2005). "Some notes on the parameterization reduction of soft sets an", International Conference on Machine Learning and Cybernetics, 3: 1442-1445.
 - [6] Chen, D., Tsang, E.C.C., Yeung, D.S. ve Wang, X., (2005). "The parameterization reduction of soft sets and its applications", Comput. Math. Appl., 49: 757-763.
 - [7] Xiao, Z., Chen, L., Zhong, B. ve Ye S., (2005). "Recognition for Soft Information Based on The Theory of Soft Sets", In Proceedings of ICSSSM-05 (Ed: J.Chen), IEEE, 2: 1104-1106.
 - [8] Aktas, H. ve Cagman N., (2007). "Soft sets and soft groups", Inform. Sci., 177: 2726-2735.
 - [9] Jun, Y.B., (2008). "Soft BCK/BCI-algebras", Comput. Math. Appl., 56: 1408-1413.
 - [10] Jun, Y.B. ve Park, C.H. (2008). "Applications of soft sets in ideal theory of BCK/BCI- algebras", Inform. Sci., 178: 2466-2475.
 - [11] Feng, F., Jun Y.B. ve Zhao X., (2008). "Soft semirings", Computers and Mathematics with Applicaitons, 56 (10): 2621-2628.
 - [12] Park, C.H., Jun, Y.B. ve Öztürk, M.A., (2008). "Soft WS-algebras". Commun., Korean Math. Soc., 23 (3): 313-324.
 - [13] Jun Y.B., Lee D.S ve Öztürk M.A. (2011). "Applications of soft sets in rings" .
 - [14] Ali, M. I., Feng, F., Liu, X., Min, W.K. ve Shabir, M., (2009). "On some new operations in soft set theory", Comput. Math. Appl., 57 (9): 1547-1553.

- [15] Ma, X., Zhan, J., S., (2009). "Generalized Fuzzy h-bi ideals and h-quasi ideals of hemirings", Inform Sci, 179: 1249-1268
- [16] Liu, X., Xiang, D. ve Zhan, J., (2012). "Isomorphism theorems for Soft rings ", Algebra colloquium, 19 (4): 649-656.
- [17] Liu, X., Xiang, D. ve Zhan, J., (2010). "Fuzzy Isomorphism theorems of Soft rings", Neural Computing and Applications, DOI 10.1007/s00521-010-0439-8.
- [18] Liu, X., (2013). "Idealistic Soft Γ – rings ", Journal of Hyperstructures, 2 (2): 136-150.
- [19] Zadeh, L.A., (1965). "Fuzzy sets", Inform. Control., 8: 338-353.
- [20] Zadeh, L.A., (1973). "Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes", IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernics, smc-3:1.
- [21] Rosenfeld, A., (1971). "Fuzzy Groups", Journal of Mathematical Analysis and Appl., 35: 512-517.
- [22] Liu, W., (1982). "Fuzzy invariant subgroups and fuzzy ideals", Fuzzy Sets Syst., 8: 133-139.
- [23] Foster, D.H., (1979). "Fuzzy topological groups", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 67: 549-564.
- [24] Das, P.S., (1981). "Fuzzy Groups and Level Subgroups", Journal of Mathematical Analysis and Appl., 84: 264-269.
- [25] Akgül, M., (1988). "Some properties of fuzzy groups", Journal of mathematical Analysis and Applications, 133: 93-100.
- [26] Dixit, V.N., (1992). "On Fuzzy Rings", Fuzzy Sets and Systems, 49: 205-213.
- [27] Asaad, M. ve Abou-Zaid S., (1993). "Groups and fuzzy subgroups II" ,Fuzzy Sets and Systems, 56: 375 – 377.
- [28] Ersoy, B.A., (1999). Bulanık Gruplar Üzerine, Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [29] Gupta, K.C. ve Kantroo M.K., (2001). "Generalized product of fuzzy subsets of a ring", Fuzzy Sets and Systems, 117: 419-429.
- [30] Ersoy, B.A., (2004). "On the generalization of cartesian product of fuzzy subgroups and ideals", Journal of Engineering and Natural Sciences, 1: 95-100.
- [31] Keskin, E., (2006). Fuzzy Cebirsel Yapılar, Yüksek Lisans Tezi, Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kahramanmaraş.
- [32] Öztürk, M.A., Uçkun, M. ve Jun, Y.B., (2003). "Fuzzy ideals in gamma rings", Turk-J. Math., 27 (3): 369-374.
- [33] Çallıalp, F., (2013). Örneklerle Soyut Cebir, Birsen Yayınevi, İstanbul.
- [34] Malik, D.S., Mordeson, J.M. ve Sen, M.K., (1997). Fundamentals of Abstract Algebra, The McGraw-Hill Companies, Singapore.

- [35] Enginoğlu, S., (2008). Esnek Kümeler ve Esnek Karar Verme Metodları, Yüksek Lisans Tezi, Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Gaziosmanpaşa.
- [36] Mamdani, E.H ve Asillian, S., (1974). "An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller", Int. S. Man. Mach. Studies, 7 (1): 1-13.
- [37] Öztürk, M.A. ve İnan, E., (2011). "Soft Γ – rings and idealistic soft Γ – rings", Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 1 (1): 71-80.
- [38] Dutta, T.K. ve Chanda, T. (2005). "Structures of fuzzy ideals of Γ – ring", Bull. Malays. Math. Sci. Soc., 28: 9-18.
- [39] Dutta, T.K. ve Chanda, T., (2007). "Fuzzy prime ideals in Γ – rings", Bull. Malays. Math. Sci. Soc., 30: 65-73.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	Elif AKTAŞ
Doğum Tarihi ve Yeri	07.12.1991 Yenimahalle
Yabancı Dili	İngilizce
E-posta	elifaktasss@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2013
Lise	Fen-Matematik	Şehremini Anadolu Lisesi	2009

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2014-2015	MEB/Stajyer	Matematik Öğretmeni

YAYINLARI

Bildiri

1. 2015 ICAAMM Aktas, E., Ersoy, B. A., Onar, S. and Davvaz, B., (2015).
8-12 June, “Isomorphism Theorems for Fuzzy Soft Gamma Rings”
İstanbul