

**Diskussion der kinematischen und isotropen Verfestigung
für poröse Medien**

Diplomarbeit Nr. 94/5

Hasan Göksu
Dezember 1994



**Diskussion der kinematischen und isotropen Verfestigung
für poröse Medien**

Diplomarbeit Nr. 94/5

Hasan Göksu
Dezember 1994

Betreuer: Prof. Dr.-Ing. R. de Boer
Dr.-Ing. J. Bluhm

FACHGEBIET MECHANIK - FACHBEREICH BAUWESEN

Diplomaufgabe

für Herrn cand.-Ing. Hasan Göksu
Matrikelnummer 863991

Spröde und granulare Materialien weisen häufig ein ausgeprägtes plastisches Materialverhalten auf. Somit spielen die Fließbedingung und die Fließregel eine wichtige Rolle bei der Entwicklung konstitutiver Modelle zur Beschreibung der plastischen Deformationsanteile von spröden und granularen Stoffen.

In der Diplomarbeit mit dem Thema

„Diskussion der kinematischen und isotropen Verfestigung für poröse Medien“

soll der Einfluß der 5-parametrischen single-surface-Fließbedingung bzw. der modifizierten Fließbedingung von *de Boer & Dresenkamp* im Hinblick auf ein isotrop verfestigendes Materialmodell untersucht werden. Desweiteren ist eine für granulare Stoffe entwickelte Fließregel im Rahmen der kinematischen Verfestigung zu diskutieren, und anhand von Beispielen sollen plastische Volumendeformationen beschrieben werden.



i.A.

(Dr.-Ing. J. Bluhm, AR)

Inhaltsübersicht

1. Einleitung
2. Annahmen und Voraussetzungen
3. Stoffunabhängige Grundgleichungen
4. Verfestigungsmodelle in der Plastizitätstheorie
 - 4.1 Isotrope Verfestigung
 - 4.2 Kinematische Verfestigung
 - 4.3 Isotrope und kinematische Verfestigung
5. Fünfparametrische Fließbedingung von *de Boer* und *Dresenkamp* [1988]
 - 5.1 Untersuchung der Konvexität
 - 5.1.1 Konvexität in der Deviatorebene
 - 5.1.2 Konvexität in der hydrostatischen Ebene
 - 5.2 Diskussion der Fließbedingung
 - 5.3 Übergang zu anderen Fließbedingungen durch Variation der Parameter
 - 5.3.1 Der Sonderfall: *Drucker & Prager* [1952]
 - 5.3.2 Der Sonderfall: *von Mises* [1913]
 - 5.3.3 Der Sonderfall: *Green* [1972]
 - 5.3.3 Der Sonderfall: *Tresca* [1864]
6. Fließregel
 - 6.1 Beispiele
7. Schlußbemerkungen
8. Literaturverzeichnis
9. Anhang

1. Einleitung

Spröde und granulare Materialien, welche in der Boden- und Felsmechanik vorkommen, weisen ein sehr komplexes Werkstoffverhalten auf und die auftretenden Verformungen sind überwiegend plastisch.

Die Aufgabe der Plastizitätstheorie besteht darin, geeignete konstitutive Beziehungen zu entwickeln, die zur Beschreibung des elastisch-plastischen Formänderungsverhaltens notwendig sind und mit denen das Spannungs-Verformungs-Verhalten granularer Materialien unter beliebigen Belastungszuständen möglichst zutreffend wiedergegeben werden kann.

Zur Beschreibung des plastischen Materialverhaltens ist es notwendig eine Fließbedingung zu formulieren, die das Einsetzen plastischer Formänderungen angibt und den eventuell vorhandenen Verfestigungsbereich beschreibt und zum anderen eine Fließregel zur Bestimmung der plastischen Verzerrungssinkremente.

In der vorliegenden Arbeit wird die 5-parametrig single-surface Fließbedingung von *de Boer & Dresenkamp* [1988] diskutiert. Die in der Fließbedingung enthaltenen Parameter sind im allgemeinen vom Werkstoff abhängig und müssen anhand von Versuchsergebnissen angepaßt werden. Der Einfluß der Parameter auf die Form der Fließbedingung wird im Hinblick auf isotrop verfestigende Materialverhalten diskutiert.

Anschließend wird noch gezeigt, daß die 5-parametrig Fließbedingung von *de Boer & Dresenkamp* [1988] als Sonderfall einige bekannte Fließbedingungen enthält.

Als ein weiteres Verfestigungsmodell wird die kinematische Verfestigung in Verbindung mit der 5-parametrig Fließbedingung vorgestellt und anhand von Beispielen erläutert. Verwendet wird dabei die Fließregel von *Bluhm* [1994], die als eine Erweiterung der Fließregel von *de Boer*, siehe *de Boer & Lade* [1991] zu verstehen ist. Der Einfluß der in der Fließregel auftretenden Parameter wird erläutert.

2. Annahmen und Voraussetzungen

Mehrkomponentenkontinua wie spröde und granulare Medien, mit der sich die vorliegende Arbeit befaßt, sind aus sich gegeneinander abgrenzenden Stoffen zusammengesetzt. Sie bestehen einerseits aus einem porösen Festkörpergerüst, welches wiederum aus verschiedenartigen Festkörperanteilen bestehen kann und andererseits aus Porenräumen, die mit Gas und/oder Flüssigkeit gefüllt sind.

Damit sich das Verhalten spröder und granularer Medien mit den Methoden der Kontinuumsmechanik beschreiben läßt, müssen die im folgenden erwähnten Voraussetzungen eingehalten werden.

Eine dieser wichtigen Voraussetzungen für poröse Medien ist die Vorstellung verschmierter Modellkörper. In dieser Modellvorstellung geht man davon aus, daß jede Komponente für sich gleichzeitig mit den übrigen Komponenten das gesamte Volumen des betrachteten Körpers einnimmt (*de Boer & Ehlers* [1986]).

Die oben erwähnte Modellvorstellung, in der nicht mehr das Verhalten einzelner Komponenten im Medium, sondern das Verhalten einer Gruppe von Komponenten betrachtet wird, ist im Grunde eine statistische Mittelwertbildung. In dieser Modellvorstellung müssen die Volumenelemente, bezogen auf die Gesamtabmessungen der betrachteten Körper, klein sein. Aber aufgrund der Mittelwertbildung dürfen die Volumenelemente auch eine bestimmte Mindestgröße nicht unterschreiten, da es sonst zu Streuungen kommen würde.

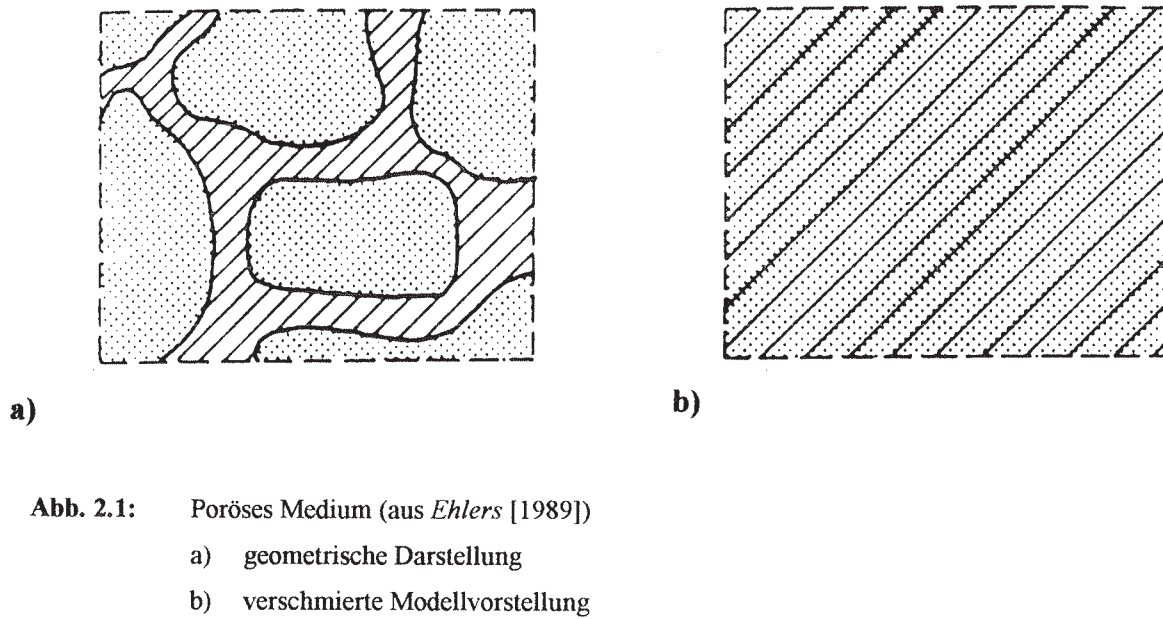
Für den Fall, daß sämtliche Konstituierende dieselbe Bewegung erfahren, können die Stoffe als Einkomponentenkontinua betrachtet werden (*Dresenkamp* [1987]).

Im weiteren werden auftretende bleibende Deformationen zeitunabhängig und somit als plastisch vorausgesetzt.

Außerdem wird ein starr-plastisches Werkstoffverhalten angenommen, welches für die in der vorliegende Arbeit zu beschreibenden Materialien zu einer Vernachlässigung der elastischen Werkstoffeigenschaften führt.

Die konstitutiven Beziehungen für spröde und granulare Medien sollen im wesentlichen das Stoffverhalten bis zum Bruchzustand beschreiben.

In **Abb. 2.1** wird die oben erwähnte Modellvorstellung für poröse Medien verdeutlicht.



3. Stoffunabhängige Grundgleichungen

Der Spannungszustand eines beliebigen materiellen Punktes im Kontinuum wird durch den Spannungstensor S vollständig beschrieben. Dieser kann additiv in einen deviatorischen Anteil S^D und in einen kugelsymmetrischen Anteil S^K zerlegt werden:

$$S = S^D + S^K \quad (3.1)$$

mit dem kugelsymmetrischen Anteil

$$S^K = \frac{1}{3}(S \cdot I) I \quad (3.2)$$

und dem deviatorischen Anteil

$$S^D = S - \frac{1}{3}(S \cdot I) I \quad (3.3)$$

Die Größe I kennzeichnet den Identitätstensor. Das Skalarprodukt

$$I_s = S \cdot I \quad (3.4)$$

ist die erste Invariante des Spannungstensors S . Für die weiteren Ausführungen werden noch die zweite und dritte Invariante des Spannungsdeviators S^D benötigt:

$$II_{S^D} = \frac{1}{2} S^D \cdot S^D, \quad (3.5)$$

$$III_{S^D} = \frac{1}{3} S^D \cdot S^D S^D \quad (3.6)$$

bzw.

$$III_{S^D} = \det S^D. \quad (3.6. a)$$

Die Invarianten sind skalarwertige Größen des Spannungstensors S bzw. des Spannungsdeviators S^D , die unabhängig vom gewählten Basissystem sind, und werden für die Diskussion der fünfparametrischen Fließbedingung von *Dresenkamp* [1987] und *de Boer & Dresenkamp* [1988] sowie der modifizierten Fließbedingung benötigt.

4. Verfestigungsmodelle in der Plastizitätstheorie

Im Gegensatz zu elastischen Verformungen, die nach Entlastung wieder vollständig zurückgehen, hinterlassen plastisch verformte Körper irreversible (plastische) Verformungsanteile. Für beliebige Be- und Entlastungsprozesse besteht kein eindeutiger Zusammenhang mehr zwischen Spannungen und Verzerrungen. Demnach können zu einem Spannungszustand unterschiedliche Verzerrungszustände gehören, während elastisch verformte Körper immer einen eindeutigen Zusammenhang zwischen Spannung und Verzerrung aufweisen.

Die Aufgabe der Plastizitätstheorie ist, die plastischen Verformungsanteile mit der Formulierung einer Fließbedingung und einer Fließregel zu erfassen.

Werkstoffe, die ein ideal elastisch-plastisches Materialverhalten aufweisen, können Spannungszustände durch elastische Verformungen aufnehmen, bis ein Spannungspunkt auf der Fließbedingung, also die Fließgrenze, erreicht ist. Von nun an nehmen die Verformungen zu, ohne daß eine Spannungserhöhung eintritt. Hierbei stellt die Fließbedingung eine Grenze dar, die rechnerisch nicht überschritten werden darf. Diese Grenze wird als Bruchfläche gekennzeichnet. Auf dieser wird unbegrenztes Verformungsvermögen vorausgesetzt.

Sich verfestigende Werkstoffe, wie z.B. spröde und granulare Materialien, weisen, im Gegensatz zu Werkstoffen mit ideal elastisch-plastischem Materialverhalten schon vor dem Erreichen der Beanspruchungsgrenze plastische Verformungsanteile auf. Mit zunehmender Beanspruchung verfestigt sich das Material bis zum Erreichen der Beanspruchungsgrenze. Also ist hier die Fließbedingung nicht die Bruchbedingung. Die Differenz zwischen der Fließbedingung und der Bruchbedingung gibt die Verfestigung an und wird mit der Fließregel beschrieben.

Demnach sind für eine Berechnung nach der Plastizitätstheorie, zusätzlich zu der Fließbedingung, die oben erwähnte Bruchbedingung und die Fließregel, welche weitere Informationen über das Werkstoffverhalten angeben, erforderlich.

Im folgenden werden nun zwei Verfestigungsmodelle zur Beschreibung des plastischen Materialverhaltens vorgestellt. Es ist zum einen das Modell der isotropen Verfestigung, zum anderen das Modell der kinematischen Verfestigung. Desweiteren wird auch auf eine Kombination beider Modelle, dem isotropen und kinematischen Verfestigungsmodell, eingegangen.

4.1 Isotrope Verfestigung

Die Anfangsfließfläche, welche sich bei einem verfestigenden Material innerhalb der Bruchfläche befindet, beschreibt Spannungszustände, bei denen erstmalig plastische Verformungen auftreten. Gerade diese, zusätzlich zu den elastischen Verformungen auftretenden plastischen Verformungen, ermöglichen eine weitere Spannungsaufnahme und somit eine Verfestigung.

Beim Modell der isotropen Verfestigung weitet sich der elastische Bereich, somit auch die Anfangsfließfläche, mit ansteigender Belastung im Hauptspannungsraum auf, bis die Fließfläche die Bruchfläche berührt. Danach ist keine weitere Verfestigung mehr möglich und es kommt zum Bruch. Da die Form der Fließbedingung durch eine Anzahl von Parametern beeinflusst wird, müssen sich diese bei der isotropen Verfestigung infolge der Zunahme der plastischen Verformungen verändern. Somit sind die Materialparameter bei der isotropen Verfestigung eine Funktion der plastischen Arbeit.

Das Modell der isotropen Verfestigung ist leider einer Einschränkung unterworfen. Bei zyklischen Belastungen in entgegengesetzter Belastungsrichtung würde bei diesem Verfestigungsmodell das Fließen bei betragsmäßig immer größer werdenden Spannungszuständen eintreten, welches dem realen Verhalten der Werkstoffe nicht entspricht. Effekte, wie z.B. der Bauschinger Effekt (siehe Abschnitt 4.2), lassen sich mit dem isotropen Verfestigungsmodell nicht mehr beschreiben.

In **Abb. 4.1.1** ist das Modell der isotropen Verfestigung anhand von zwei Abbildungen verdeutlicht. Im Spannungs-Dehnungs-Diagramm (**Abb. 4.1.1. b**) ist der Verfestigungsbereich durch die Punkte A und B eingegrenzt. Der Punkt A kennzeichnet dabei einen Spannungszustand, bei dem erstmals plastisches Fließen einsetzt. Der Punkt B markiert das Ende der Verfestigung.

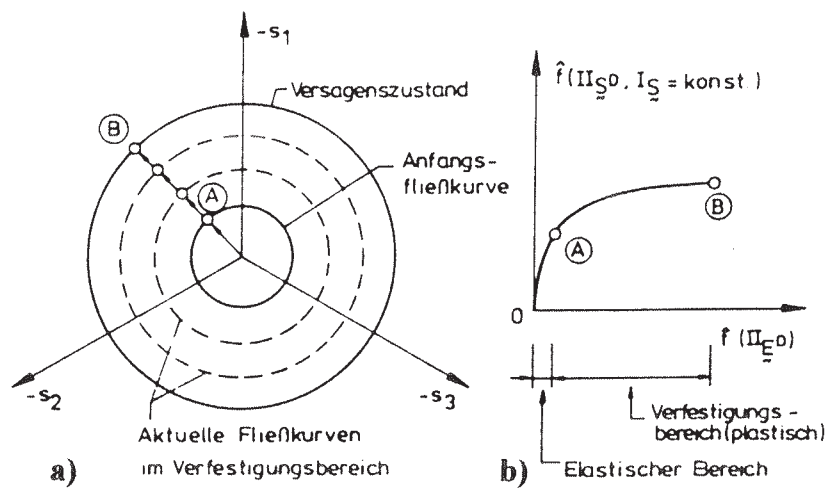


Abb. 4.1.1: Das Modell der isotropen Verfestigung (aus *Brauns* [1989])

- a) geometrische Darstellung in der Deviatorebene ($I_s = \text{konst.}$)
- b) Spannungs-Dehnungs-Diagramm gemäß Versuch

4.2 Kinematische Verfestigung

Im Gegensatz zum isotropen Verfestigungsmodell, bei der sich die Anfangsfließfläche bis zum Erreichen der Bruchgrenze aufweitet, wird die Anfangsfließfläche beim kinematischen Verfestigungsmodell innerhalb der Bruchfläche translatorisch verschoben (siehe **Abb. 4.2.1**). Dabei bleibt die Form und Größe des Fließkörpers unverändert, woraus sich die Folgerung ergibt, daß die werkstoffabhängigen Materialparameter, welche die Form der Fließbedingung beeinflussen, für dieses Verfestigungsmodell konstant sind.

Berührt die Anfangsfließfläche die Bruchfläche, so ist keine weitere Verfestigung mehr möglich.

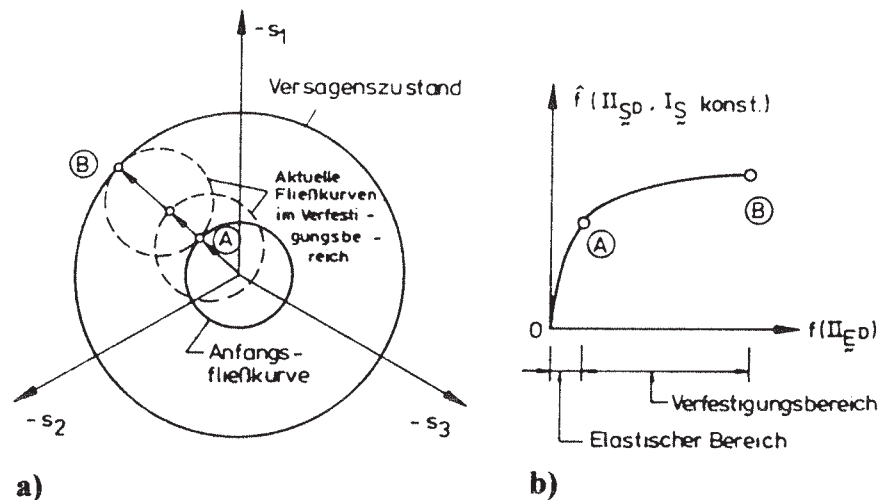


Abb. 4.2.1: Das Modell der kinematischen Verfestigung (aus *Brauns* [1989])

- a) geometrische Darstellung in der Deviatorebene ($I_S = \text{konst.}$)
- b) Spannungs-Dehnungs-Diagramm gemäß Versuch

Um die Lage der sich im Hauptspannungsraum verschiebenden Anfangsfläche beschreiben zu können, benötigt man zusätzlich zum Bruchkriterium die Fließregel, die Verfestigungsfunktion und die Angabe eines Richtungstensors.

Wenn der Tensor S die Lage des aktuellen Spannungspunktes und der Tensor Z die aktuelle Lage des Ursprungs der Anfangsfläche kennzeichnet, gibt der Tensor

$$S_k = S - Z \quad (4.2.1)$$

die Richtung der Verschiebung der Anfangsfließfläche an.

Der Tensor Z in (4.2.1) kennzeichnet den sogenannten Translationstensor der kinematischen Verfestigung (back-stress Tensor). Dieser ist das Ergebnis der Entwicklung konstitutiver Beziehungen zur Beschreibung des Materialverhaltens im plastischen Verfestigungsbereich. Damit dieser Richtungstensor in der Fließbedingung im Verfestigungsbereich auch eingeht, müssen die unter Abschnitt 3 vorgestellten Invarianten durch die folgenden Ausdrücke

$$I_k = S_k \cdot I = (S - Z) \cdot I, \quad (4.2.2)$$

$$II_{k^p} = \frac{1}{2} S_k^D \cdot S_k^D = \frac{1}{2} (S^D - Z^D) \cdot (S^D - Z^D) \quad (4.2.3)$$

und

$$III_{k^p} = \frac{1}{3} S_k^D \cdot S_k^D S_k^D = \frac{1}{3} (S^D - Z^D) \cdot (S^D - Z^D) (S^D - Z^D) \quad (4.2.4)$$

bzw.

$$III_{k^p} = \det(S^D - Z^D) \quad (4.2.4. a)$$

ersetzt werden.

Der Bauschinger-Effekt (siehe *Betten* [1985]), welcher eine bei Belastungsumkehr häufig zu beobachtende Erscheinung ist, kann im Gegensatz zum isotropen Verfestigungsmodell mit dem kinematischen Verfestigungsmodell erfaßt werden. Dabei erfolgt der Übergang vom elastischen in den plastischen Bereich nach Umkehr der Belastungsrichtung bei einem betragsmäßig geringeren Wert, als nach einer Wiederbelastung im gleichen Richtungssinn (siehe Belastungspfad (3)-(4) in **Abb. 4.2.2. b**).

In Abb. 4.2.2 wird das Modell der kinematischen Verfestigung und der Bauschinger-Effekt veranschaulicht.

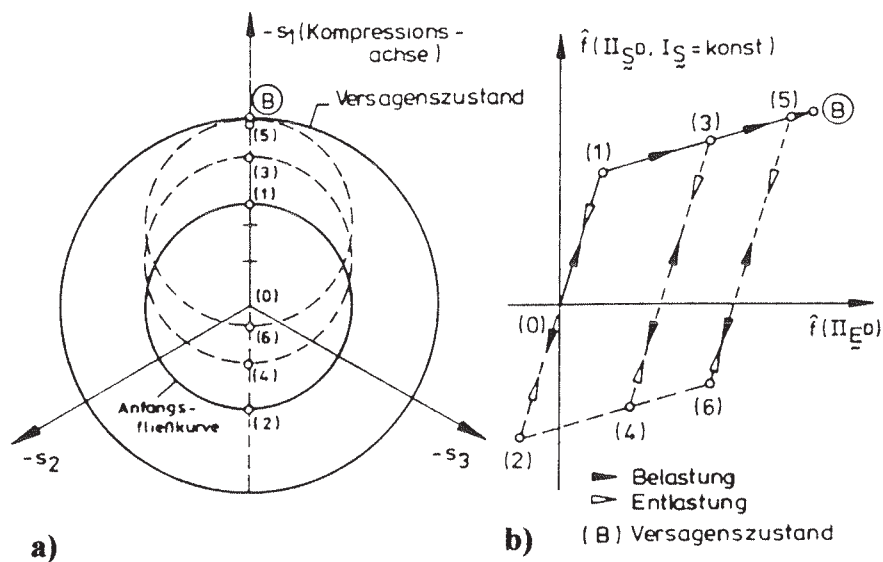


Abb. 4.2.2: Das Modell der kinematischen Verfestigung (aus Brauns [1989])

- a) geometrische Darstellung der Verfestigung in der Deviatorebene ($I_S = \text{konst.}$)
- b) Änderung der Fließgrenze bei zyklischen, rein deviatorischen Spannungsänderungen eines Kompressionsversuches

4.3 Isotrope und kinematische Verfestigung

Mit der Kombination der isotropen und kinematischen Verfestigung lassen sich Verfestigungsvorgänge, die unter komplexen Spannungspfaden auftreten, beschreiben. Dabei weitet sich die Anfangsfließfläche zum einen, wie bei der isotropen Verfestigung, in alle Richtungen des Hauptspannungsraumes auf, und zum anderen verschiebt sie sich translatorisch, wie bei der kinematischen Verfestigung, bis die Bruchfläche erreicht wird. Dann ist der Versagenszustand erreicht und eine weitere Verfestigung ist nicht mehr möglich.

Die Größe, Form und Lage der aktuellen Fließfläche wird bei diesem Verfestigungsmodell ebenfalls, wie bei den zuvor erwähnten Verfestigungsmodellen, zum einen über den in der Fließbedingung enthaltenen Translationsterm, und zum anderen über die werkstoffabhängigen Materialparameter gesteuert.

Der Translationsterm wird dabei, analog zum kinematischen Verfestigungsmodell, in Abhängigkeit des plastischen Verzerrungszustandes und die Materialparameter, analog zum isotropen Verfestigungsmodell, als Funktion der plastischen Arbeit angegeben.

In **Abb. 4.3.1** ist das kombinierte Verfestigungsmodell in der Deviatorenebene des Hauptspannungsraumes dargestellt.

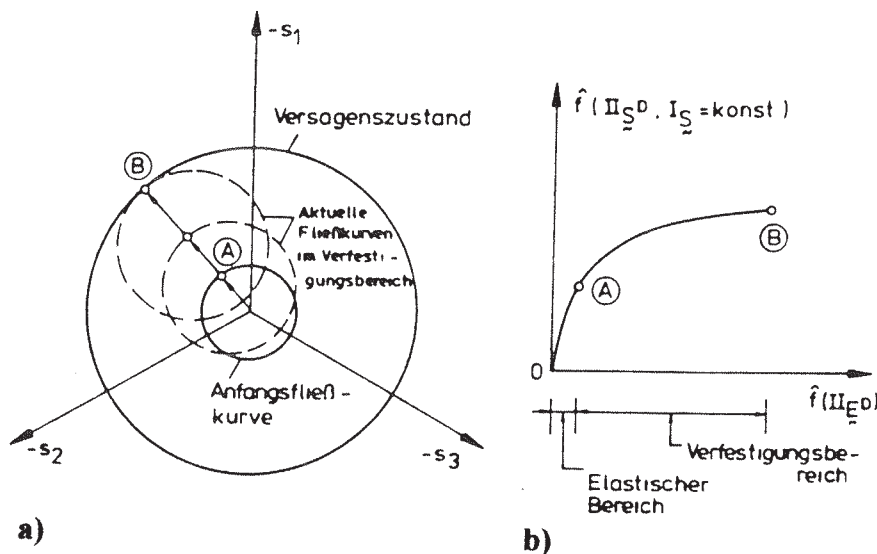


Abb. 4.3.1: Das kombinierte Verfestigungsmodell (aus Brauns [1989])

- a) geometrische Darstellung der Verfestigung in der Deviatorenebene ($I_3 = \text{konst.}$)
- b) Spannungs-Dehnungs-Diagramm gemäß Versuch

5. Fünfparametrische Fließbedingung von *de Boer & Dresenkamp* [1988]

Zur Beschreibung elasto-plastischer Materialien ist es bezüglich der Modellbildung erforderlich, eine Bedingung zu formulieren, die den elastischen Bereich vom plastischen abgrenzt. Diese Bedingung wird als Fließbedingung, Fließkriterium oder Fließfunktion bezeichnet.

Im folgenden wird die Fließbedingung als eine Bedingung verstanden, die nicht nur das erstmalige Einsetzen plastischer Verformungen kennzeichnet, sondern auch im Verfestigungsbereich den elastischen vom plastischen Bereich abgrenzt.

Das Einsetzen plastischer Deformationen poröser Medien, welche aus einem Festkörperskelett mit flüssigkeits und/oder gasgefüllten Poren bestehen, hängt im Gegensatz zu metallischen Werkstoffen vom hydrostatischen Spannungszustand ab. Weiterhin zeigen Versuchsergebnisse, daß poröse Medien allein unter einer rein hydrostatischen Beanspruchung plastische Deformationen aufweisen. Deshalb ist es notwendig, eine Fließbedingung zu formulieren, die das Einsetzen plastischer Deformationen in Abhängigkeit vom hydrostatischen Spannungszustand beschreibt und mit der auch das Auftreten plastischer Deformationen infolge einer rein hydrostatischen Belastung erfaßt. Dies kann z.B. dadurch erreicht werden, indem eine kegelförmige, mit zunehmenden hydrostatischem Druck sich aufweitende Fließbedingung bei höherer hydrostatischer Beanspruchungen mit einer Kappe geschlossen wird. Man nennt diese Fließbedingungen, die aus mindestens zwei Funktionen bestehen, auch „Kappenmodelle“.

In Cambridge wurde vor etwa zwanzig Jahren als Resultat von Versuchen an weichen Tonen eine kegelförmige Fließfläche entwickelt, die mit einer Kappe geschlossen wurde, deren Lage, und Form durch ein Verfestigungsgesetz festgelegt wurde. Dieses Verfestigungsgesetz ist eine Funktion der plastischen Volumenänderungen (*Schad* [1979]).

Ein Nachteil dieser Kappenmodelle ist, daß sie aus mindestens zwei Funktionen bestehen, damit infolge einer reinen hydrostatischen Beanspruchung keine unendlich große elastische Dehnungen auftreten. Diese Kappenmodelle enthalten eine Unstetigkeitsstelle beim Übergang von der ersten in die zweite Funktion.

Verbesserungen in der Beschreibung des plastischen Materialverhaltens von granularen und spröden Werkstoffen wurden durch sogenannte single-surface Fließbedingungen erreicht, wie sie z.B. von *Desai* [1982] und *Lade* [1984] formuliert wurden.

Ebenso entwickelten *Dresenkamp* [1987] und *de Boer & Dresenkamp* [1988] eine fünfparametrische single-surface Fließbedingung, die von der *de Boer*'schen Bruchbedingung für granulare Stoffe abgeleitet wurde.

Die Fließbedingung von *de Boer & Dresenkamp* [1988] für spröde und granulare Materialien

$$F = F(I_s, II_{s^p}, III_{s^p}) = \sqrt{\Phi} \left(1 + \gamma \mathfrak{G} \right)^{\frac{1}{m}} + \delta I_s^2 + \beta I_s^2 - \kappa = 0 \quad (5.1)$$

mit

$$\Phi = II_{s^p} + \frac{1}{2} \alpha^2 I_s^2, \quad (5.1. a)$$

$$\mathfrak{G} = \frac{III_{s^p}}{\sqrt{\Phi^m}} \sqrt{II_{s^p}^{m-3}}, \quad (5.1. b)$$

$$m = 3.0. \quad (5.1. c)$$

ist eine Fließbedingung, die sich wie die zuvor erwähnten anderen Fließbedingungen von *Lade* [1984] und *Desai* [1982] erst mit zunehmender hydrostatischen Beanspruchung aufweitet, aber sich dann infolge der volumetrischen Verfestigung bei höherem hydrostatischen Druck wieder schließt und aus einer Funktion besteht.

Durch die Verwendung der *Reuß*'schen Variablen

$$r = \sqrt{2 II_{s^p}} \quad (5.2)$$

und

$$\theta = \frac{1}{3} \arcsin \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{III_{s^p}}{II_{s^p} \sqrt{II_{s^p}}} \right) \quad (5.3)$$

bzw.

$$\sin(3\theta) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{III_{s^p}}{II_{s^p} \sqrt{II_{s^p}}} \quad (5.3. a)$$

wobei, wie in **Abb. 5.1** dargestellt, r den Radius und θ den Winkel in der Deviatorebene kennzeichnen, läßt sich die Fließbedingung (5.1) auf die folgende Form bringen:

$$F = F(I_s, r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(r^2 + \alpha^2 I_s^2)^{\frac{m}{2}} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \gamma r^m \sin(3\theta) \right]^{\frac{1}{m}} + \delta I_s^2 + \beta I_s - \kappa = 0 . \quad (5.4)$$

Hierbei stellen α , β , γ , δ und κ werkstoffabhängige Parameter dar, die durch Anpassen der Fließbedingung an Versuchsergebnisse bestimmt werden müssen. Auf den Einfluß dieser Materialparameter wird an anderer Stelle näher eingegangen.

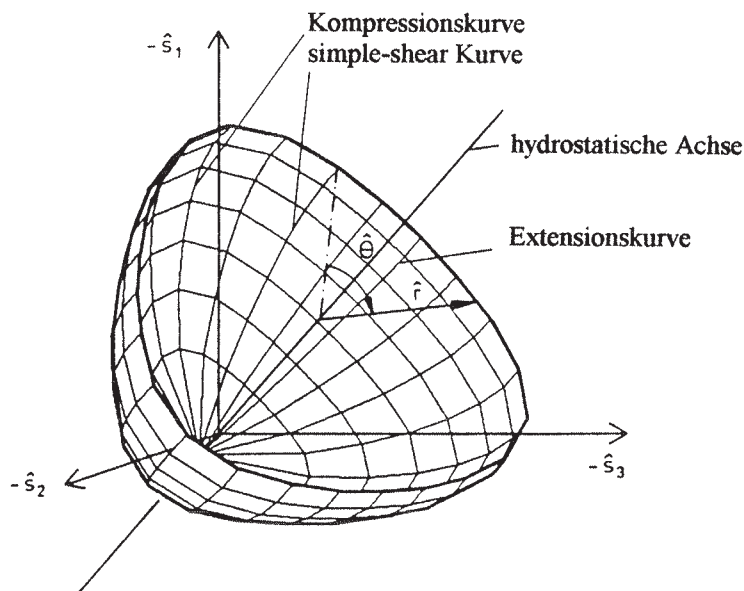


Abb. 5.1: Darstellung der *Reuß*'schen Variablen im Hauptspannungsraum
(aus *Bluhm* [1992])

Die Fließbedingung (5.4) hat im allgemeinen vier Nullstellen bzgl. der hydrostatischen Achse (siehe *Bluhm* [1992]). Diese sind, wie in **Abb. 5.2** erkennbar, die Schnittpunkte I_{01} , I_{02} , I_{03} und I_{04} der Fließfunktion im Hauptspannungsraum mit der hydrostatischen Achse. Relevant sind nur die Nullstellen I_{02} und I_{03} , weil die Fließbedingung (5.4) nur in diesem Bereich eine geschlossene Funktion im Hauptspannungsraum darstellt.

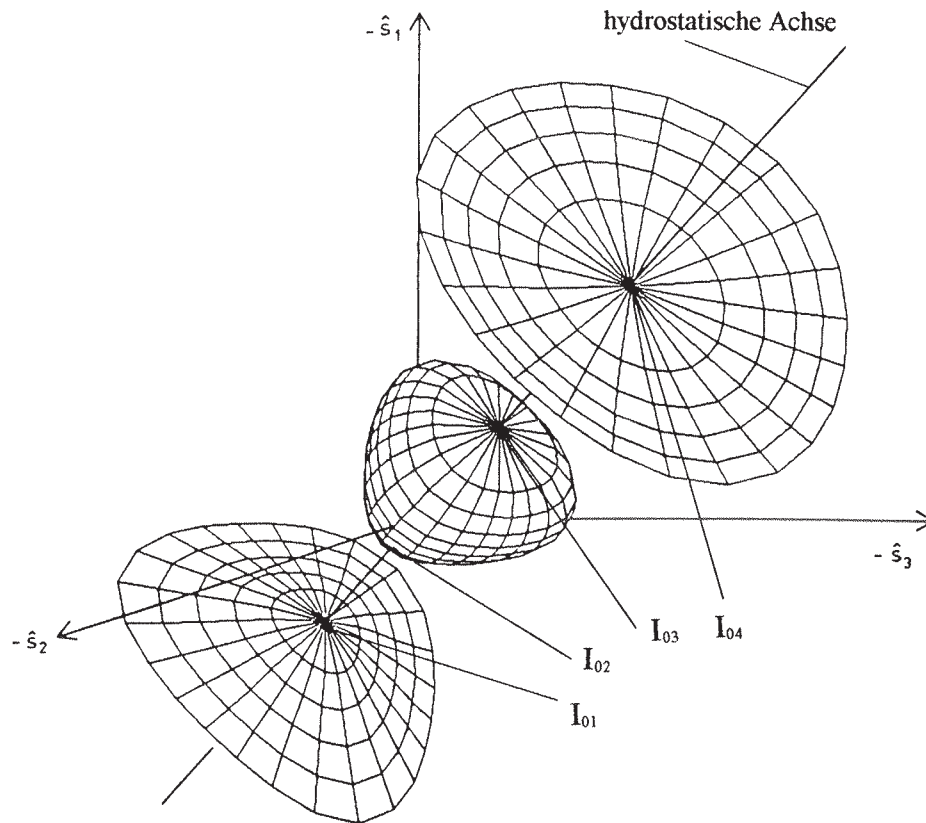


Abb. 5.2: Allgemeine Darstellung der Funktion $F(I_s, r, \theta) = 0$ im Hauptspannungsraum (aus Bluhm [1992])

De Boer & Dresenkamp [1988] stellten die Fließbedingung mit $m=3.0$ vor:

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(r^2 + \alpha^2 I_s^2 \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \gamma r^3 \sin(3\theta) \right]^{\frac{1}{3}} + \delta I_s^2 + \beta I_s - \kappa = 0 \quad (5.5)$$

Im Fachgebiet Mechanik der Universität-GH Essen wurden anschließend zwei Modifikationen der Fließbedingung (5.5) veröffentlicht. Der Hauptgrund dieser Modifikationen war, eine bessere Approximation der Deviatorschnittkurven an eine dreieckförmige Sektionskurve mit ausgerundeten Ecken zu erhalten.

Die von *Bücker*, siehe *Bücker & Bluhm* [1994] mit $m=4.0$ modifizierte Fließbedingung

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(r^2 + \alpha^2 I_s^2)^2 + \frac{2}{3\sqrt{3}} \gamma r^4 \sin(3\theta) \right]^{\frac{1}{4}} + \delta I_s^2 + \beta I_s - \kappa = 0 \quad (5.6)$$

und die Modifikation von *Bluhm* [1992] mit $m=4.5$,

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(r^2 + \alpha^2 I_s^2)^{\frac{9}{4}} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \gamma r^{\frac{9}{2}} \sin(3\theta) \right]^{\frac{2}{9}} + \delta I_s^2 + \beta I_s - \kappa = 0, \quad (5.7)$$

passen sich bei niedrigen hydrostatischen Drücken in den Kompressionspunkten der Deviatorschnittkurven besser in die Ecken eines außenherum gedachten Dreieckes an, als die von *de Boer & Dresenkamp* [1988] mit $m=3.0$. Der Einfluß von m wird im Zusammenhang mit dem Konvexitätsnachweis in der Deviatorebene (siehe Kap. 5.1.1) verdeutlicht.

Wie schon oben erwähnt, kann man mit der Größe m verschiedene Approximationen an dreieckförmige Sektionskurven in der Deviatorebene erreichen. Dies ist sicherlich deshalb von großer Bedeutung, weil Deviatorschnittkurven aus Versuchsergebnissen bei anfänglich kleineren hydrostatischen Beanspruchungen Dreiecke mit ausgerundeten Ecken darstellen. Diese gehen allmählich, wie in **Abb. 5.3** erkennbar, bei höheren Beanspruchungen in kreisförmige Deviatorkurven über.

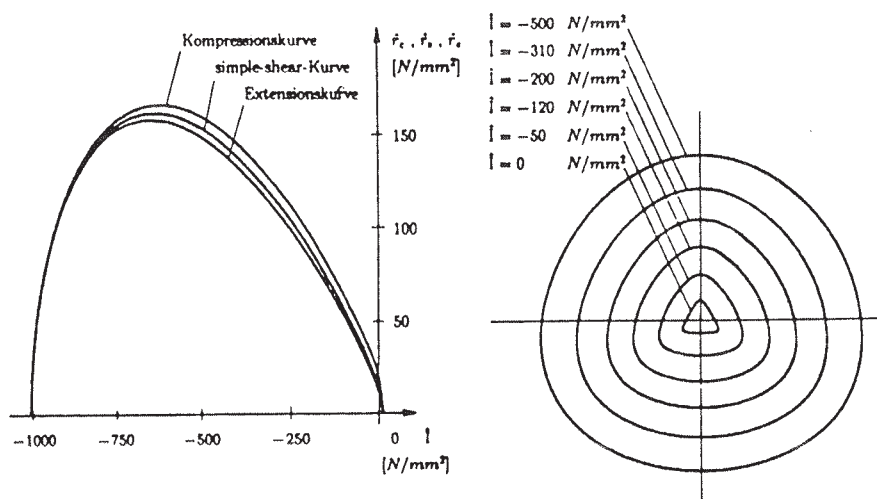


Abb. 5.3: Typischer Verlauf der Fließbedingung in der hydrost. Ebene und in der Deviatorebene ($\alpha=0.5$, $\beta=0.4444$, $\gamma=2.083$, $\delta=0.0001 \text{ mm}^2$, $\kappa=10 \text{ N/mm}^2$, $m=4.5$)

5.1 Untersuchung der Konvexität

Bei der Aufstellung einer Fließbedingung liefert die Konvexitätsbedingung eine Beschränkung, ob die Fließbedingung zulässig ist oder nicht, denn in der Theorie des plastischen Potentials fallen alle konkaven Fließbedingungen im Hinblick auf die Fließregel und das Stabilitätskriterium weg (siehe *Betten* [1985]). Im folgenden wird auch im Rahmen dieser Arbeit von konvexen Fließbedingungen ausgegangen, nicht aber von der Formulierung eines plastischen Potentials bzgl. der Fließregel.

Das Stabilitätskriterium enthält das skalare Produkt der Vektoren $(\sigma_{ij} - {}^0\sigma_{ij})$ und des Zuwachses der plastischen Verzerrung $d^p \varepsilon_{ij}$.

Aus der Bedingung des Stabilitätskriteriums

$$(\sigma_{ij} - {}^0\sigma_{ij}) d^p \varepsilon_{ij} = |(\sigma_{ij} - {}^0\sigma_{ij})| |d^p \varepsilon_{ij}| \cos \varphi \geq 0 \quad (5.1.1)$$

erhält man, daß der Winkel φ in **Abb. 5.1.1** stets kleiner oder höchstens gleich 90° sein darf.

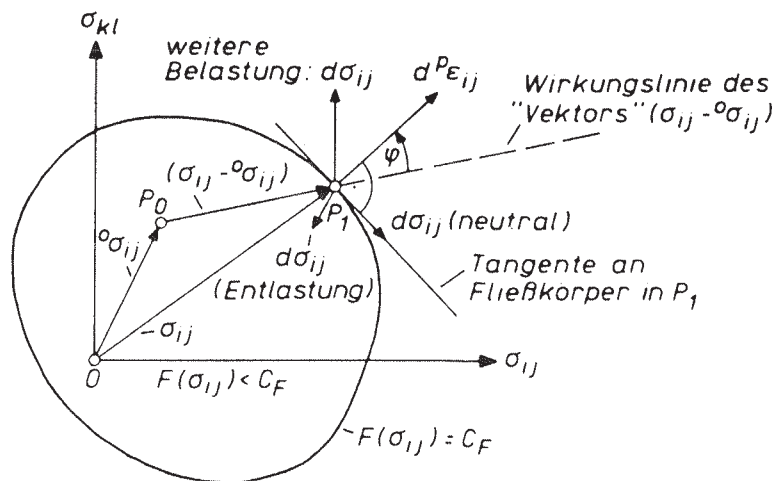


Abb. 5.1.1: Konvexer Körper im 9-dimensionalen Spannungsraum
(aus *Betten* [1985])

Die Konvexität einer Fließbedingung kann geometrisch folgendermaßen interpretiert werden:

Ein Körper (und somit seine Oberfläche) ist dann konvex, wenn er zu je zwei Punkten (Randpunkte einbegriffen) auch deren Verbindungsgerade ganz enthält. Andernfalls ist er konkav (siehe **Abb. 5.1.2**).

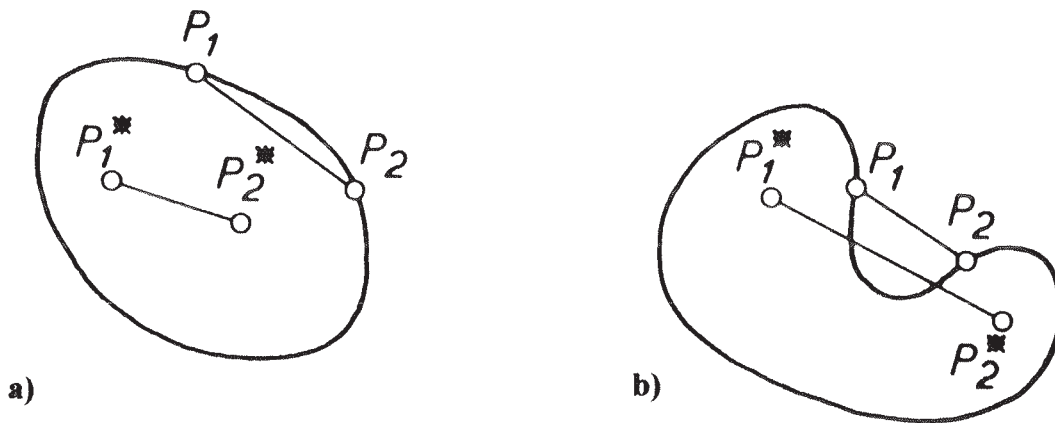


Abb. 5.1.2: Konvexer Körper im 9-dimensionalen Spannungsraum (aus *Betten* [1985])

- a) überall konvexer Körper (Eikörper)
- b) teilweise konkaver Körper

5.1.1 Konvexität in der Deviatorebene

Die Versuchsauswertung in der Deviatorebene, die erst seit der Durchführung echter Dreiaxialversuche möglich ist, erfaßt den Einfluß der mittleren Hauptspannung auf die Festigkeitseigenschaften. Diese liefern Ergebnisse, die auf einer stetigen, konvexen und dreieckförmigen Deviatorschnittkurve liegen.

Die Festigkeit der Werkstoffe wie Beton, Fels oder Boden nimmt bei konstantem hydrostatischen Druck mit wachsender mittlerer Hauptspannung, also zum Extensionspunkt hin ($\theta = 30^\circ$), ab (siehe Abb. 5.1.1.1).

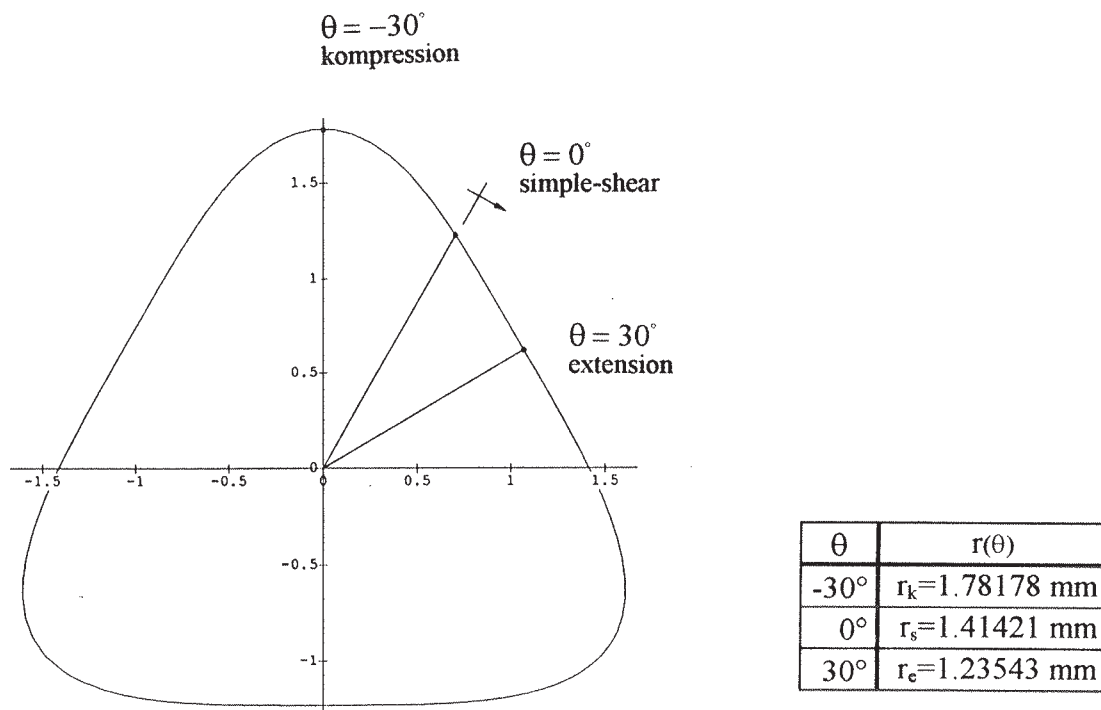


Abb. 5.1.1.1: Abnahme der Festigkeit in Abhängigkeit des Belastungspfad

($\alpha=1.0$, $\beta=1.0$, $\gamma=1.2990$, $\delta=0.1 \text{ mm}^2$, $\kappa=1.0 \text{ N/mm}^2$, $m=3.0$, $I=0.0 \text{ N/mm}^2$)

Mit Hilfe der *Reuß'schen* Variablen ist eine graphische Darstellung und somit eine geometrische Interpretation der Fließbedingung möglich. In der Deviatorebene liefert die Fließbedingung eine durch Polarkoordinaten formulierbare Funktion (siehe Gl. 5.4). In dieser Funktion wird die erste Invariante des Spannungstensors S als konstant angesehen.

Der Radius r hingegen ist wiederum eine Funktion von θ , so daß gilt:

$$F = F(I_s = \text{konst.}, r(\theta), \theta) = F(\theta) . \quad (5.1.1.1)$$

Für den Nachweis der Konvexität der Sektionskurven in der Deviatorebene ist es ausreichend, den Nachweis an der Stelle $I_s = 0$ zu führen. Somit vereinfacht sich der Ausdruck aus Gl. (5.4) wie folgt:

$$F(\theta) = F(I_s = 0, r(\theta), \theta) = \frac{r}{\sqrt{2}} \left[1 + \frac{2}{3\sqrt{3}} \gamma \sin(3\theta) \right]^{\frac{1}{m}} - \kappa = 0 . \quad (5.1.1.1. a)$$

Die Konvexität in der Deviatorebene ist gegeben, wenn für die Krümmung K der Kurve gilt:

$$K = \frac{[r(\theta)]^2 + 2[r'(\theta)]^2 - r(\theta) r''(\theta)}{\sqrt{([r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2)^3}} \geq 0 . \quad (5.1.1.2)$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird nun

$$r = r(\theta) \quad (5.1.1.2. a)$$

verwendet. Somit erhält man

$$K = \frac{r^2 + 2r'^2 - r r''}{\sqrt{(r^2 + r'^2)^3}} \geq 0 . \quad (5.1.1.3)$$

Darin sind r' und r'' die Ableitungen

$$r' = \frac{\partial r}{\partial \theta} \quad (5.1.1.3. a)$$

und

$$r'' = \frac{\partial^2 r}{\partial (\theta)^2} . \quad (5.1.1.3. b)$$

In **Abb. 5.1.1.2** ist die Funktion der Krümmung aus Gl. (5.1.1.3) und deren Ableitungsfunktion (Funktion über die Steigung der Krümmung) dargestellt. Man erkennt aus der Graphik, daß die Krümmung K , wie aus der allgemeinen Kurvendiskussion schon bekannt, ihre Extrema dort hat, wo die Ableitungsfunktion K' einen Nulldurchgang hat.

Relevant ist hier das Minimum der Funktion K , weil es nicht im negativen Bereich, also im dritten und vierten Quadranten liegen darf, denn die Konvexitätsbedingung läßt nur positive Krümmungen der Deviatorkurven zu. Aus der Forderung der Konvexität $K \geq 0$ geht auch hervor, daß die Funktion der Krümmung in diesem Bereich gegen die horizontale Achse tangiert, wo die Krümmung in diesem Fall den Grenzwert Null besitzt. Wertet man diese Funktion auf diesem relevanten Bereich für $m=3.0$ numerisch aus, erhält man eine Restriktion für den Parameter γ und gleichzeitig die kritische Stelle in der Deviatorebene, an der die Konvexität gerade noch eingehalten wird.

Für $m=3.0$ ist der Nulldurchgang von K' bei $\theta = 30^\circ$ (Extensionspunkt).

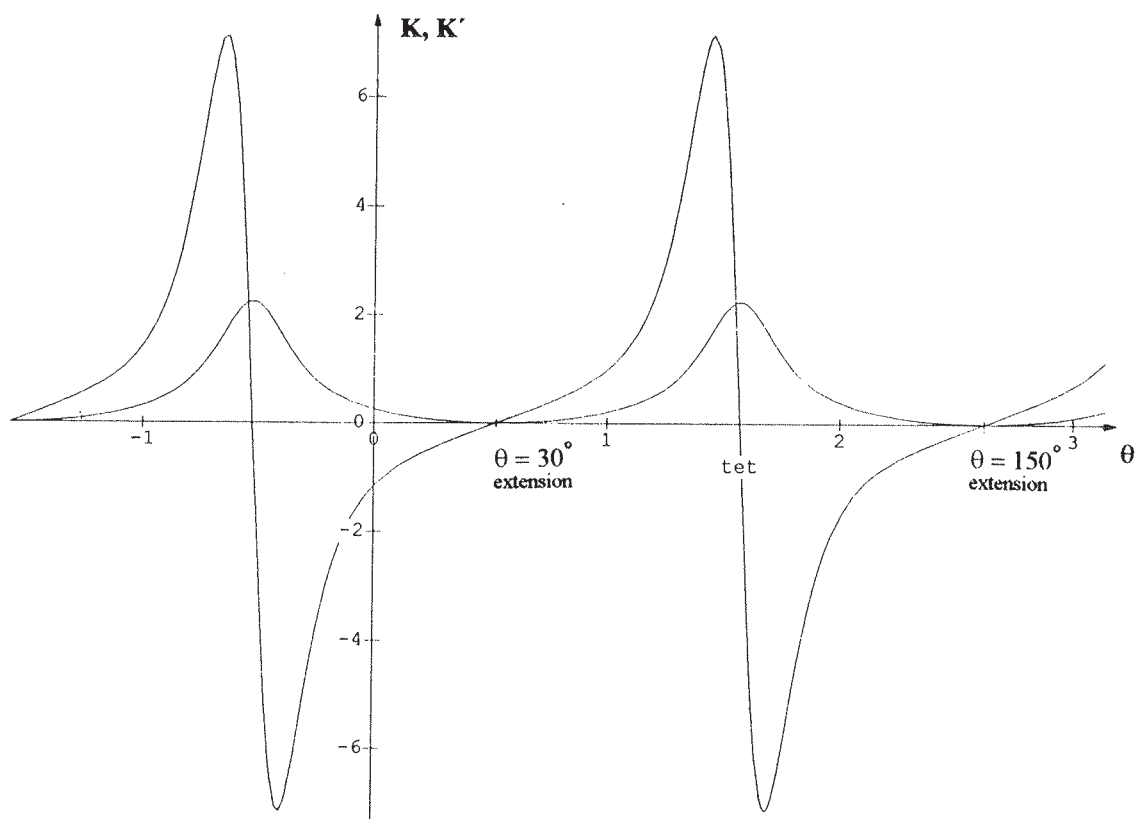


Abb. 5.1.1.2: Verlauf der Krümmung K und der Steigung der Krümmung K' in der Deviatorebene für $\gamma=1.2990$, $\kappa=1.0 \text{ N/mm}^2$, $m=3.0$ (Erstellt mit KONVEX, siehe Anhang).

Für

$$r^2 + r'^2 > 0 \quad (5.1.1.4)$$

ist die Konvexität garantiert, wenn die folgende Bedingung eingehalten wird:

$$r^2 + 2r'^2 - rr'' \geq 0 \quad (5.1.1.5)$$

Im folgenden wird jedoch der Konvexitätsnachweis nicht mit der reduzierten Krümmung nach Gleichung (5.1.1.5), sondern mit der Krümmung nach Gleichung (5.1.1.3) geführt, weil die Auswertung numerisch erfolgt und daher zu keinem zusätzlichen Rechenaufwand führt.

Durch Umstellen der Gleichung (5.1.1.1. a) nach r erhält man den Ausdruck

$$r = r(\theta) = \frac{\kappa\sqrt{2}}{\sqrt[m]{1 + \frac{2}{3\sqrt{3}}\gamma \sin(3\theta)}} = \kappa\sqrt{2} \left[1 + \frac{2}{3\sqrt{3}}\gamma \sin(3\theta) \right]^{-\frac{1}{m}} \quad (5.1.1.6)$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise werden folgende Substitutionen vorgenommen:

$$A = \kappa\sqrt{2} \quad , \quad (\text{konst.}) \quad (5.1.1.6. \text{ a})$$

$$B = \frac{2}{3\sqrt{3}}\gamma \quad , \quad (\text{konst.}) \quad (5.1.1.6. \text{ b})$$

$$C = \sin(3\theta) \quad . \quad (\text{var.}) \quad (5.1.1.6. \text{ c})$$

Somit läßt sich der Radius r wie folgt beschreiben:

$$r = \frac{A}{\sqrt[m]{1+BC}} = A(1+BC)^{-\frac{1}{m}} \quad (5.1.1.7)$$

Die Auswertungen der Ableitungen r' und r'' liefern

$$r' = \frac{\partial r}{\partial \theta} = -\frac{1}{m} A B C' (1 + B C)^{-\frac{1}{m}-1} \quad (5.1.1.8)$$

und

$$r'' = \frac{\partial^2 r}{\partial (\theta)^2} = \frac{1}{m} A B (1 + B C)^{-\frac{1}{m}-1} \left[-C'' + \left(\frac{1}{m} + 1 \right) B C'^2 (1 + B C)^{-1} \right]. \quad (5.1.1.8. a)$$

Die noch fehlenden Ableitungen C' und C'' in den Gleichungen (5.1.1.8) und (5.1.1.8. a) sind:

$$C' = \frac{\partial C}{\partial \theta} = 3 \cos(3\theta) \quad (5.1.1.9)$$

und

$$C'' = \frac{\partial^2 C}{\partial (\theta)^2} = -9 \sin(3\theta). \quad (5.1.1.9. a)$$

Setzt man nun C' und C'' in den Gleichungen (5.1.1.8) und (5.1.1.8. a) ein, diese wiederum in die Konvexitätsbedingung (5.1.1.3), so erhält man einen sehr unübersichtlichen und komplexen Gesamtausdruck für die Beschränkung der Krümmung in der Deviatorebene.

In diesem Ausdruck sind κ und m immer vorgegeben. γ und θ jedoch müssen aus der Konvexitätsbedingung nach Gl. (5.1.1.3) für $K \geq 0$, genaugenommen für $K=0$ im relevanten Bereich, bestimmt werden.

Im folgenden wird der zuvor erwähnte Gesamtausdruck für die Beschränkung der Krümmung für verschiedene Werte von m numerisch mit dem Programm KONVEX1 für Maple (siehe Anhang), ausgewertet. Der Parameter κ bleibt hierbei unverändert.

Bei der numerischen Auswertung mit KONVEX1 werden κ und m vorgegeben. Somit ist der Ausdruck K , der die Krümmung der Deviatorschnittkurven angibt, nur noch eine Funktion von θ und γ :

$$K = K(\theta, \gamma) \geq 0 . \quad (5.1.1.10)$$

Da die Konvexität noch bei einer Nullkrümmung gewährleistet ist, wird die Funktion der Krümmung K zu Null gesetzt und ist somit graphisch, wie in **Abb. 5.1.1.3** zu sehen, darstellbar. Hierbei stellt der Parameter γ die vertikale Achse und der Parameter θ die horizontale Achse dar.

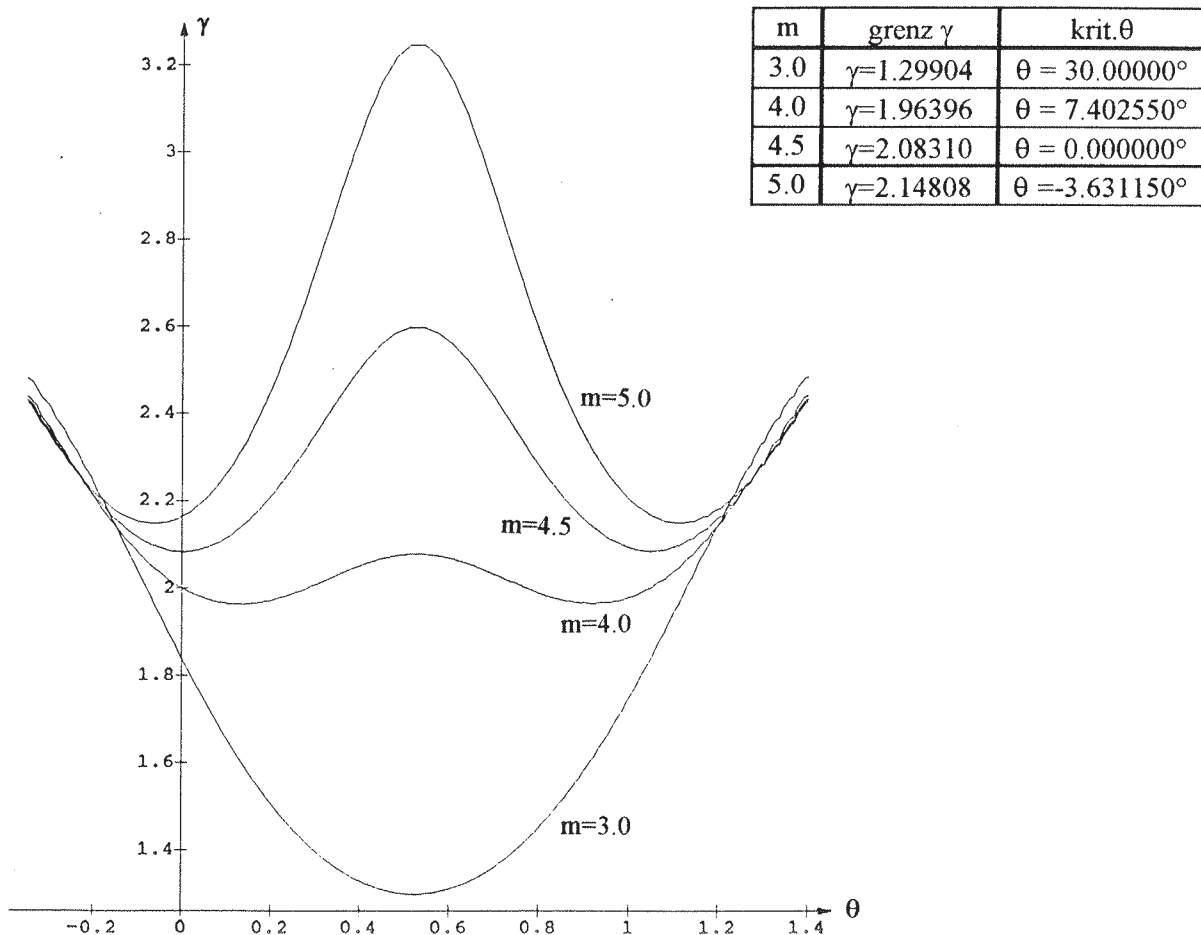


Abb. 5.1.1.3: Darstellung der Funktion $K(\theta, \gamma) = 0$ für verschiedene Werte von m
mit $\kappa=1.0 \text{ N/mm}^2$ (Erstellt mit KONVEX1, siehe Anhang)

Die numerische Auswertung für

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa \geq 0$$

liefert folgende Ergebnisse:

Für den Parameter $\kappa=1.0$ und $m=3.0$, erhält man folgende Restriktion des Parameters γ :

$$0 \leq \gamma \leq 1.299038 . \quad (5.1.1.11)$$

Wie man in der Graphik (**Abb. 5.1.1.3**) auch erkennt, ist dieser Wert für γ der Minimum der Funktion $K(\theta, \gamma) = 0$. Die Stelle auf der horizontalen Achse hingegen gibt uns den Wert für θ an, der ebenfalls durch die Auswertung zu $\theta = 30^\circ$ bestimmt wurde. Dieser Punkt in der Deviatorebene ist der Extensionspunkt.

Für den Parameter $\kappa=1.0$ und $m=4.0$ erhält man folgende Restriktion des Parameters γ :

$$0 \leq \gamma \leq 1.963961 . \quad (5.1.1.12)$$

Die Auswertung der Funktion $K(\theta, \gamma) = 0$ liefert uns $\theta = 7.402550^\circ$.

Für $\kappa=1.0$ und $m=4.5$ erhält man folgende Restriktion des Parameters γ :

$$0 \leq \gamma \leq 2.083095 . \quad (5.1.1.13)$$

Auf der horizontalen Achse korrespondiert dazu der Wert $\theta = 0^\circ$, welcher in der Deviatorebene den simple-shear Punkt kennzeichnet.

Die letzte Kurve in der Graphik mit $\kappa=1.0$ und $m=5.0$ liefert schließlich die folgende Restriktion für γ

$$0 \leq \gamma \leq 2.148082, \quad (5.1.1.14)$$

wobei sich daraus $\theta = -3.631150^\circ$ ermitteln läßt.

Die **Abb. 5.1.1.4** verdeutlicht die Übergänge von konvexen zu konkaven Sektionskurven in der Deviatorebene an der Stelle $I=0$ für $m=3.0$, $m=4.0$ und $m=4.5$.

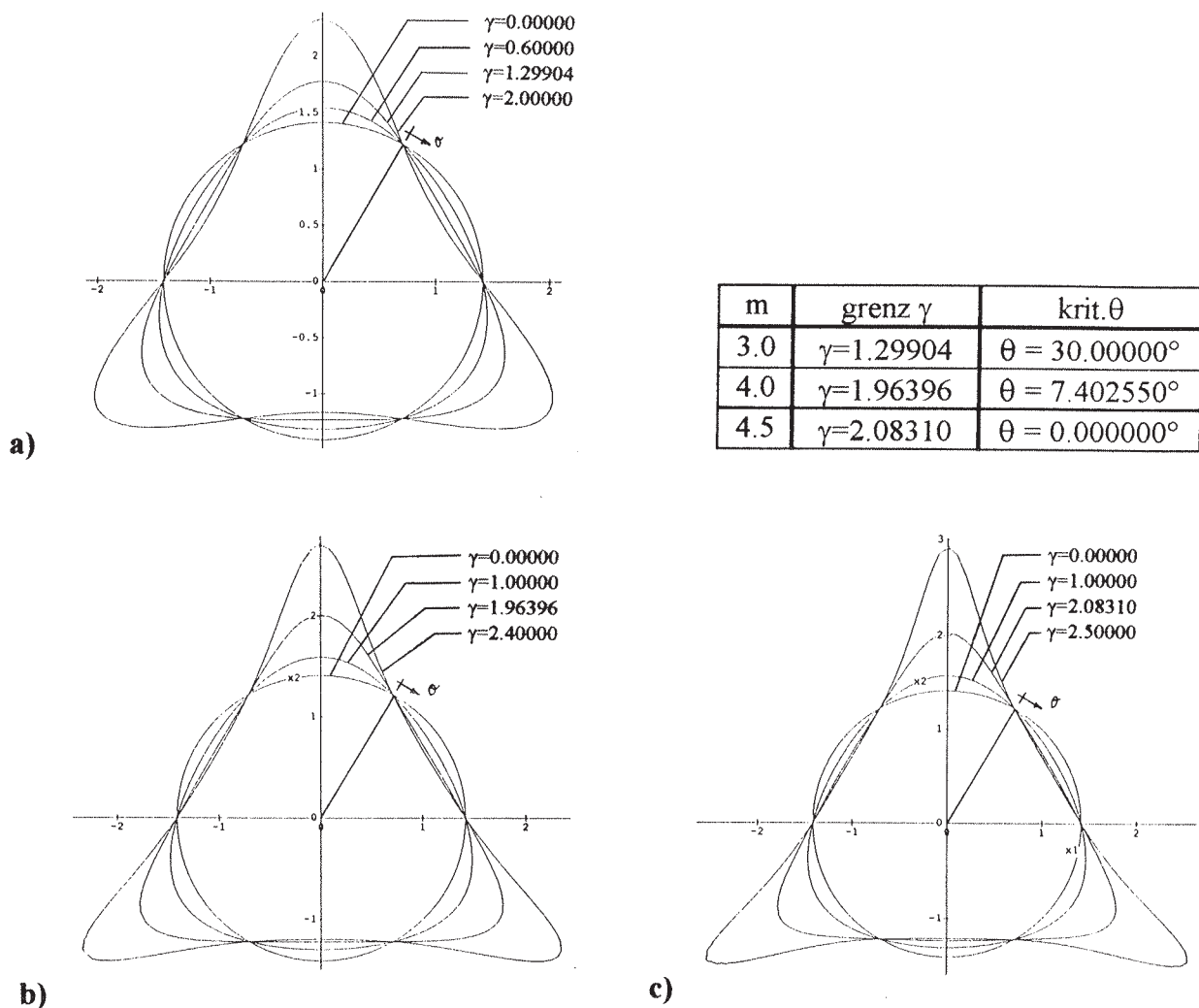


Abb. 5.1.1.4: Übergang von konvexen zu konkaven Sektionskurven in der Deviatorebene für $\alpha=1.0$, $\beta=1.0$, $\delta=0.1 \text{ mm}^2$, $\kappa=1.0 \text{ N/mm}^2$, $I=0.0 \text{ N/mm}^2$ (Erstellt mit DISKUS)

a) $m=3.0$, grenz $\gamma=1.29904$

b) $m=4.0$, grenz $\gamma=1.96396$

c) $m=4.5$, grenz $\gamma=2.08310$

In **Abb. 5.1.1.5** sind die Deviatorschnittkurven der oben ausgewählten θ - γ Wertepaare dargestellt, worin auch zu erkennen, ist daß das Optimum bei $m=4.5$ liegt.

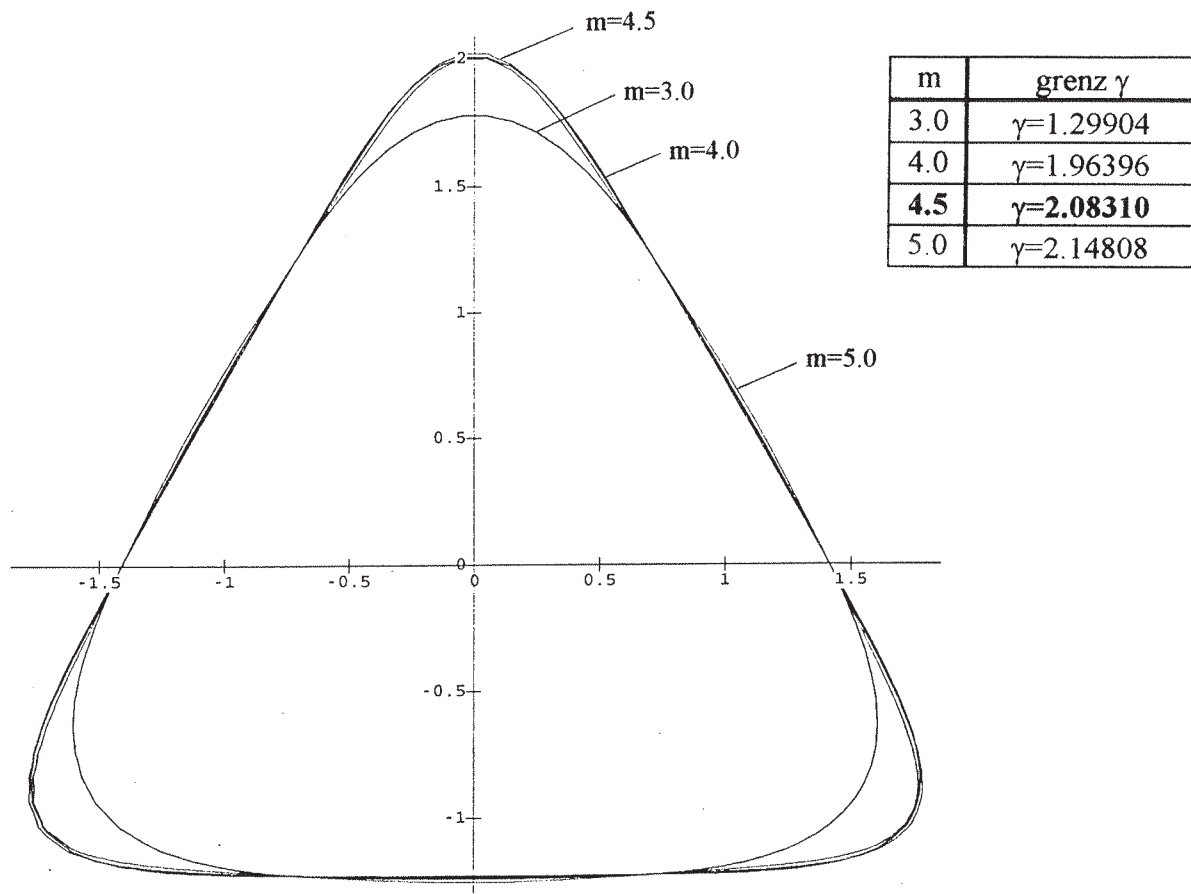


Abb. 5.1.1.5: Einfluß des Parameters m auf die Form der Deviatorschnittkurven für

$$\alpha=1.0, \beta=1.0, \delta=0.1 \text{ mm}^2, \kappa=1.0 \text{ N/mm}^2, l=0.0 \text{ N/mm}^2$$

(Erstellt mit DISKUS, siehe Anhang)

5.1.2 Konvexität in der hydrostatischen Ebene

Die Konvexität in der hydrostatischen Ebene ist gewährleistet, wenn die Fließbedingung bzw. die Sektionskurven der Fließbedingung in der hydrostatischen Ebene keine Wendepunkte haben. Die Untersuchung der Wendepunkte erfolgt, wie aus der allgemeinen Kurvendiskussion bekannt, mit der zweiten Ableitung. Damit diese Bedingung erfüllt werden kann, darf die zweite Ableitung keinen Vorzeichenwechsel haben, also muß der Verlauf der ersten Ableitung monoton sein.

Für den Nachweis der Konvexität in der hydrostatischen Ebene ist es ausreichend, den Nachweis für die simple-shear-Kurve zu führen, da der mit dem Winkel θ gekoppelte Term in Gleichung (5.4) lediglich die Änderung des Verhältnisses der Radien der Meridiankurven für $\theta \neq 0^\circ$ bezüglich des simple-shear-Radius r_s beschreibt. Mit dieser Einschränkung vereinfacht sich die Fließbedingung nach Gleichung (5.4) mit $\theta = 0^\circ$ (simple-shear) auf folgende Form:

$$F = F(I_s, r, \theta = 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{r^2 + \alpha^2 I_s^2} + \delta I_s^2 + \beta I_s - \kappa = 0 \quad (5.1.2.1)$$

Die Umstellung der obigen Gleichung nach r liefert die folgende Funktion für den Radius der simple-shear-Kurve in der hydrostatischen Ebene:

$$r = r(I_s) = \sqrt{2\delta^2 I_s^4 + 4\beta\delta I_s^3 - (\alpha^2 - 2\beta^2 + 4\delta\kappa) I_s^2 - 4\beta\kappa I_s + 2\kappa^2} \quad (5.1.2.2)$$

Im folgenden werden die für den Nachweis der Konvexität benötigten Ableitungen

$$r' = \frac{\partial r}{\partial I_s} \quad (5.1.2.3)$$

und

$$r'' = \frac{\partial^2 r}{\partial I_s^2} \quad (5.1.2.3. a)$$

ermittelt.

Dazu wird folgende Substitution vorgenommen:

$$A = 2\delta^2 I_s^4 + 4\beta\delta I_s^3 - (\alpha^2 - 2\beta^2 + 4\delta\kappa) I_s^2 - 4\beta\kappa I_s + 2\kappa^2 . \quad (5.1.2.4)$$

Somit läßt sich der Radius r wie folgt beschreiben:

$$r = \sqrt{A} = (A)^{\frac{1}{2}} . \quad (5.1.2.5)$$

Die Auswertung der Ableitungen r' und r'' liefern

$$r' = \frac{\partial r}{\partial I_s} = \frac{1}{2} A' A^{-\frac{1}{2}} \quad (5.1.2.6)$$

und

$$r'' = \frac{\partial^2 r}{\partial I_s^2} = \frac{1}{2} A^{-\frac{1}{2}} \left[A'' - \frac{1}{2} (A')^2 A^{-1} \right] . \quad (5.1.2.6. a)$$

Die in den Gleichungen (5.1.2.6) und (5.1.2.6. a) noch fehlenden Ableitungen A' und A'' sind

$$A' = \frac{\partial A}{\partial I_s} = 8\delta^2 I_s^3 + 12\beta\delta I_s^2 - (8\delta\kappa - 4\beta^2 + 2\alpha^2) I_s - 4\beta\kappa \quad (5.1.2.7)$$

und

$$A'' = \frac{\partial^2 A}{\partial I_s^2} = 24\delta^2 I_s^2 + 24\beta\delta I_s - 8\delta\kappa - 4\beta^2 + 2\alpha^2 . \quad (5.1.2.8)$$

Setzt man nun A' und A'' in die Gleichungen (5.1.2.6) und (5.1.2.6. a) ein, so erhält man die benötigte erste und die zweite Ableitung vom Radius r .

Die Untersuchung der Ableitungen erfolgt numerisch.

5.2 Diskussion der Parameter der Fließbedingung

Wie schon zuvor bei den Verfestigungsmodellen erwähnt, ändern sich die Materialparameter der Fließbedingung bei der isotropen Verfestigung im Verlauf der Verfestigung als Funktion der plastischen Arbeit.

Bei der Untersuchung des Einflusses der Parameter auf die Form der Fließbedingung fällt auf, daß die Form der Fließbedingung in der hydrostatischen Ebene und in der Deviatorebene von unterschiedlichen Parametern abhängig ist. Wenn man in der Deviatorebene ist, bleibt der Wert des hydrostatischen Druckes für alle Spannungspunkte in dieser Ebene konstant.

Für

$$I_s = S_{11} + S_{22} + S_{33} = 0 \quad (5.2.1)$$

vereinfacht sich die Fließbedingung aus Gleichung (5.4) wie folgt:

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}} r \sqrt{1 + \frac{2}{3\sqrt{3}} \gamma \sin(3\theta)} - \kappa = 0 \quad (5.2.2)$$

Aus der oberen Gleichung (5.2.2) ist zu erkennen, daß γ und m den Radius r und somit auch die Form der Fließbedingung in der Deviatorebene verändern. Die Parameter α , β , δ und κ hingegen verändern überwiegend die Form der Fließbedingung in der hydrostatischen Ebene jedoch beeinflussen sie, über den hydrostatischen Spannungszustand gekoppelt, auch die Form der Deviatorkurven. Dies ist in **Abb. 5.3** zu sehen, wie für $\gamma=\text{konst.}$ und $m=\text{konst.}$ die bei niedrigen hydrostatischen Beanspruchungen dreieckförmigen Deviatorkurven mit steigendem hydrostatischen Druck immer kreisförmiger werden.

Unabhängig von m erhält man für $\gamma=0$ stets kreisförmige Deviatorschnittkurven, die mit der folgenden Gleichung beschrieben werden:

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}} r - \kappa = 0 \quad (5.2.3)$$

Wie in **Abb. 5.2.1** auch zu sehen ist, werden mit zunehmenden Werten für γ die Deviatorschnittkurven zunehmend dreieckförmiger. Demnach beeinflusst der Parameter γ die Abweichung der Deviatorschnittkurven vom Kreis.

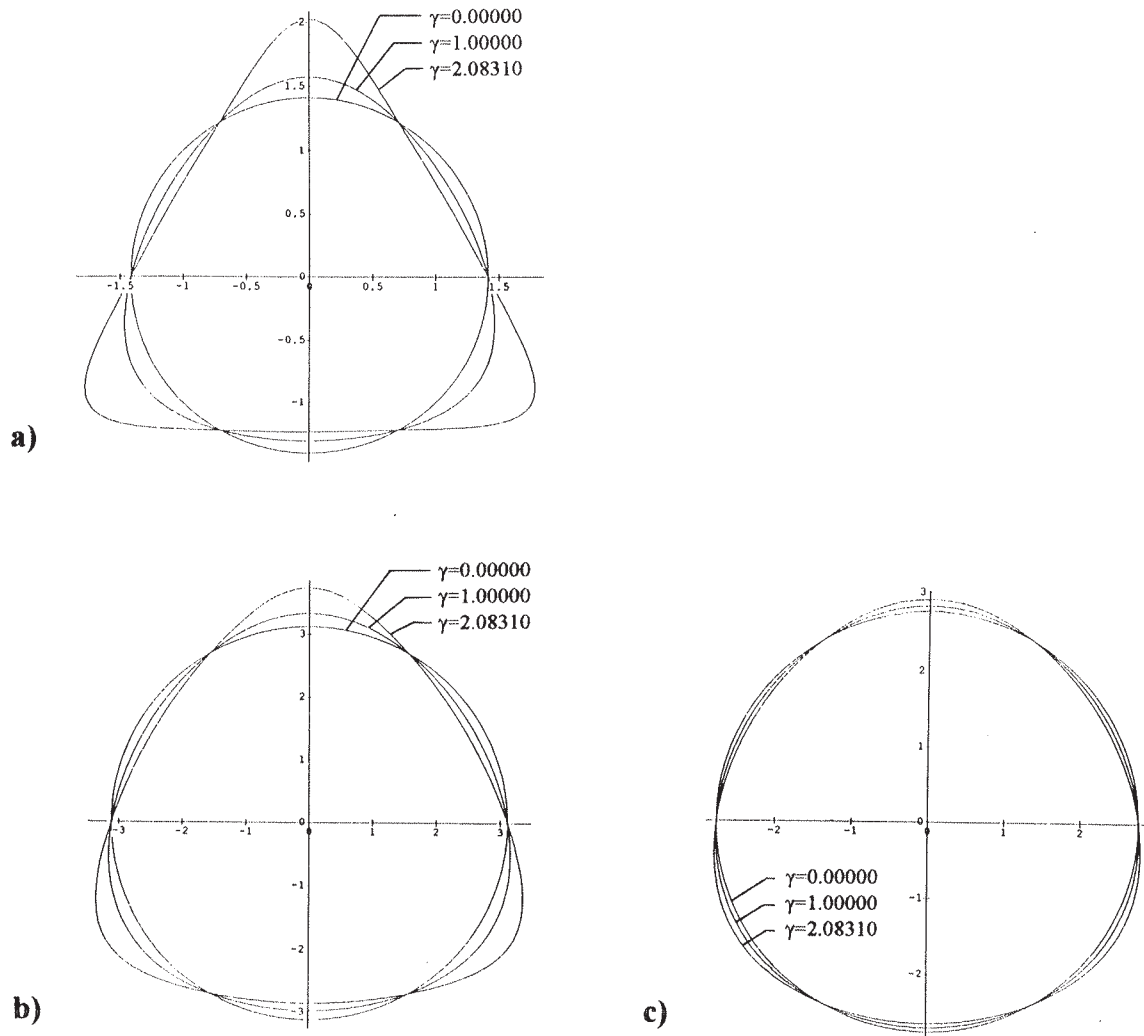


Abb. 5.2.1: Einfluß des Parameters γ auf die Form der Fließbedingung in der Deviatorebene für $\alpha=1.0$, $\beta=1.0$, $\delta=0.1 \text{ mm}^2$, $\kappa=1.0 \text{ N/mm}^2$, $I \leq 0.0 \text{ N/mm}^2$, $m=4.5$ (Erstellt mit DISKUS)

- a) $I=0.0 \text{ N/mm}^2$ grenz $\gamma=2.08310$
- b) $I=-2.1 \text{ N/mm}^2$ grenz $\gamma=2.08310$
- c) $I=-3.9 \text{ N/mm}^2$ grenz $\gamma=2.08310$

Die übrigen Parameter α , β , δ und κ aus der Gleichung (5.4) beeinflussen die Form der Fließbedingung in der hydrostatischen Ebene und, über den hydrostatischen Spannungszustand gekoppelt, auch die Form der Fließbedingung in der Deviatorebene. Im folgenden wird jedoch nur der Einfluß dieser Parameter in der hydrostatischen Ebene untersucht.

Um den Einfluß eines bestimmten Parameters auf die Form der Fließbedingung zu erkennen, werden bis auf den zu untersuchenden Parameter alle restlichen Parameter konstant gehalten.

Der Einfluß des Parameters α auf die Form der Fließbedingung ist in **Abb. 5.2.2** dargestellt. Darin erkennt man, daß eine Vergrößerung des Parameters α mit zunehmendem hydrostatischen Druck ein Ansteigen der Krümmung in den Meridianschnittkurven verursacht. Dies hat zur Folge, daß die Schnittkurven in der hydrostatischen Ebene früher abknicken und die hydrostatische Achse früher schneiden. Dabei wird die Nullstelle und das Maximum der Kurve mit zunehmenden α kleiner.

Für den Fall, daß Kohäsion vorhanden ist ($\kappa \neq 0$) wird die Spitze im Bereich positiver hydrostatischer Spannung der Fließbedingung in der hydrostatischen Ebene mit zunehmendem α immer mehr ausgerundet. In der Deviatorebene hingegen bleibt die Form der Fließbedingung unverändert.

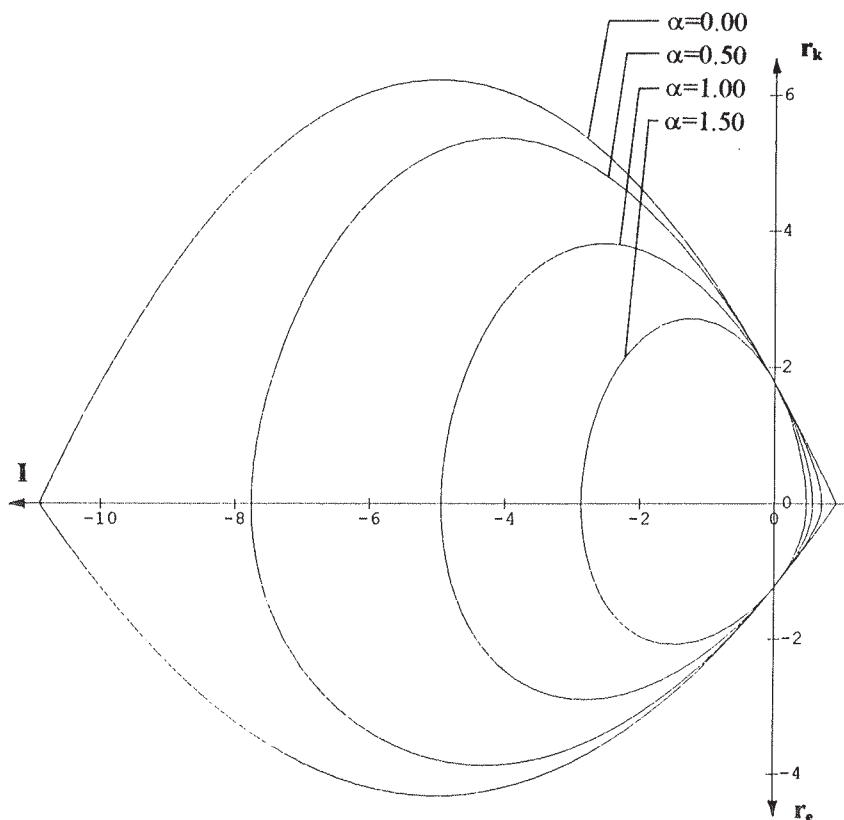


Abb. 5.2.2: Einfluß des Parameters α auf die Form der Fließbedingung in der hydrostatischen Ebene
für $\beta=1.0$, $\delta=0.1 \text{ mm}^2$, $\gamma=1.29904$, $\kappa=1.0 \text{ N/mm}^2$, $m=3.0$
(Erstellt mit DISKUS, siehe Anhang)

Der Parameter β beschreibt den Öffnungswinkel der hydrostatischen Sektionskurven mit der hydrostatischen Achse. Für zunehmende Werte des Parameters β wächst der Öffnungswinkel, somit auch der Maximalwert der Schnittkurve in der hydrostatischen Ebene.

Wie in **Abb. 5.2.3** zu sehen ist, verschiebt sich der Schnittpunkt der Fließbedingung mit der hydrostatischen Achse bei wachsendem β immer weiter vom Koordinatenursprung.

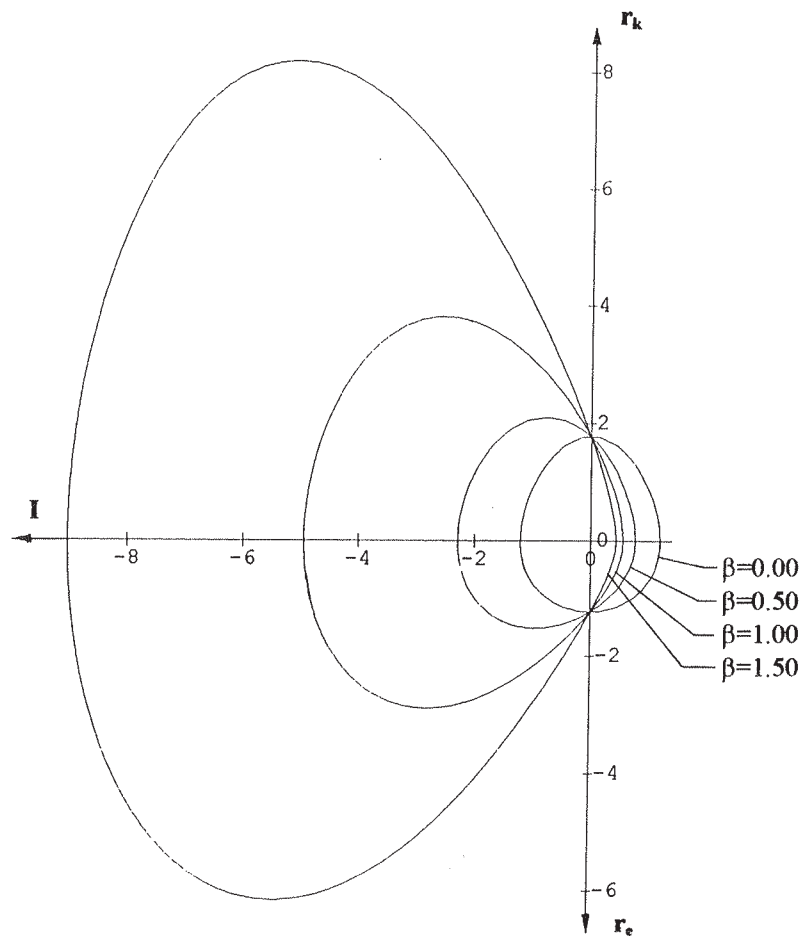


Abb. 5.2.3: Einfluß des Parameters β auf die Form der Fließbedingung in der hydrostatischen Ebene für $\alpha=1.0$, $\delta=0.1 \text{ mm}^2$, $\gamma=1.29904$, $\kappa=1.0 \text{ N/mm}^2$, $m=3.0$
(Erstellt mit DISKUS, siehe Anhang)

Der Parameter δ hat einen ähnlichen Einfluß auf die Abbildung der Fließbedingung in der hydrostatischen Ebene wie der Parameter α . Er verändert auch die Krümmung der Schnittkurven in der hydrostatischen Ebene und somit auch ihre Maximalwerte.

Aber während der Parameter α die Krümmung der Schnittkurven im niedrigen Bereich der hydrostatischen Achse beeinflusst, hat der Parameter δ mehr Einfluß auf die im negativen Sinne hinteren Bereich der hydrostatischen Achse. Dabei nimmt die Krümmung mit zunehmenden Werten des Parameters δ zu, der Maximalwert der Kurven hingegen ab. Gleichzeitig nähert sich der Schnittpunkt der Fließbedingung mit der hydrostatischen Achse zum Ursprung des Hauptspannungsraumes.

In **Abb. 5.2.4** ist der Einfluß des Parameters δ auf die Form der Fließbedingung in der hydrostatischen Ebene verdeutlicht.

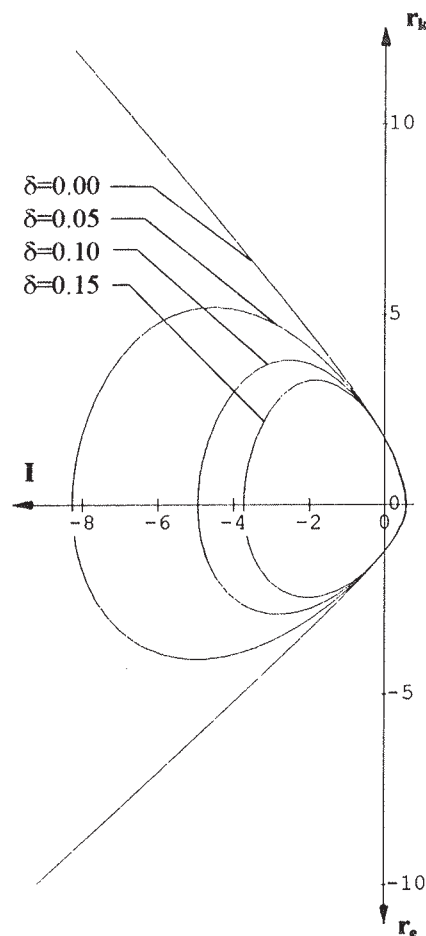


Abb. 5.2.4: Einfluß des Parameters δ auf die Form der Fließbedingung in der hydrostatischen Ebene für $\alpha=1.0$, $\beta=1.0$, $\gamma=1.29904$, $\kappa=1.0 \text{ N/mm}^2$, $m=3.0$ (Erstellt mit DISKUS)

Der Parameter κ berücksichtigt letztlich den Einfluß der Kohäsion der Materialien in der Fließbedingung. Dabei stellt der Wert von κ in der hydrostatischen Ebene den Schnittpunkt der Schnittkurve mit der r -Achse dar ($r = \sqrt{2 \Pi_{s^D}}$).

Für kohäsionslose Stoffe ($\kappa=0$) fällt der Ursprung der Fließbedingung in der hydrostatischen Ebene mit dem Ursprung des Hauptspannungsraumes zusammen.

Weil mit steigenden Werten des Parameters κ der Abschnitt auf der r -Achse auch mit anwächst, erhöht sich der Maximalwert der Meridianschnittkurven. Die Fließbedingung weitet sich in alle Richtungen ziemlich gleichmäßig auf, wobei der Abstand zwischen beiden Nullstellen schwächer anwächst.

In **Abb. 5.2.5** ist der Einfluß des Parameters κ auf die Form der Fließbedingung in der hydrostatischen Ebene dargestellt.

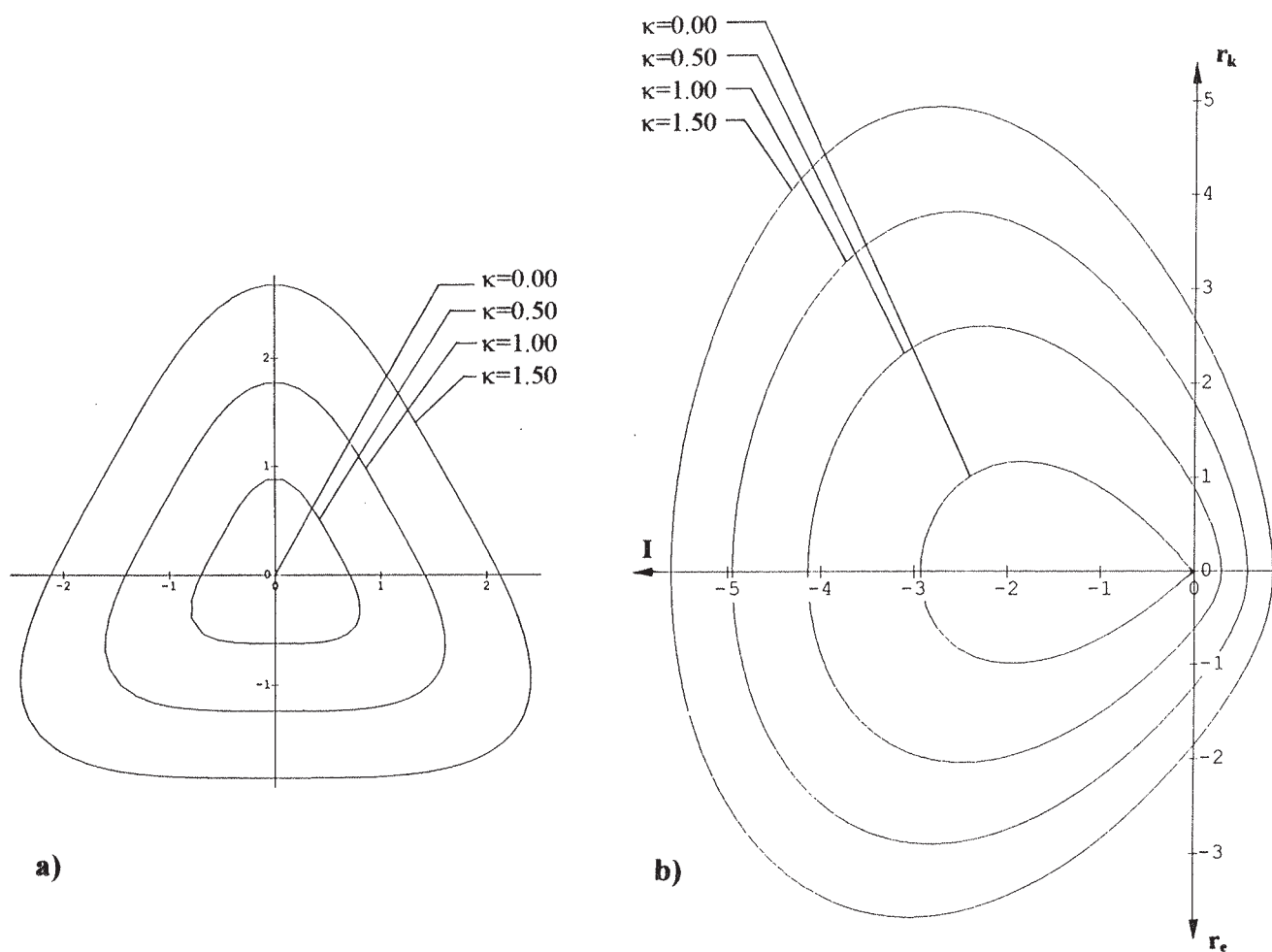


Abb. 5.2.5: Einfluß des Parameters κ auf die Form der Fließbedingung in der hydrostatischen Ebene für $\alpha=1.0$, $\beta=1.0$, $\gamma=1.29904$, $\delta=0.1 \text{ mm}^2$, $m=3.0$ (Erstellt mit DISKUS)

a) Darstellung in der Deviatorebene ($I=0.0 \text{ N/mm}^2$)

b) Darstellung in der hydrostatischen Ebene

In **Abb. 5.2.6** sind die Einflüsse der Parameter β und κ auf die Form der Fließbedingung in der hydrostatischen Ebene noch einmal zusammengefaßt.

Auf den Parameter α wird an dieser Stelle nicht mehr eingegangen. Es ist sinnvoll noch einmal zu erwähnen, daß mit zunehmenden α der Abstand zwischen den Nullstellen auf der hydrostatischen Achse immer geringer wird. Dabei nimmt auch der Maximalwert der Sektionskurve ab (siehe **Abb. 5.2.2**).

Der Einfluß des Parameters δ ist in **Abb. 5.2.4** dargestellt und wird hier nicht mehr erläutert.

Der Parameter γ hingegen verändert die Form der Sektionskurven in der Deviatorebene. In der unteren **Abb. 5.2.6** ist gut zu erkennen, wie der Parameter γ den Radius r in Abhängigkeit vom Winkel θ (Deviatorebene) beeinflusst.

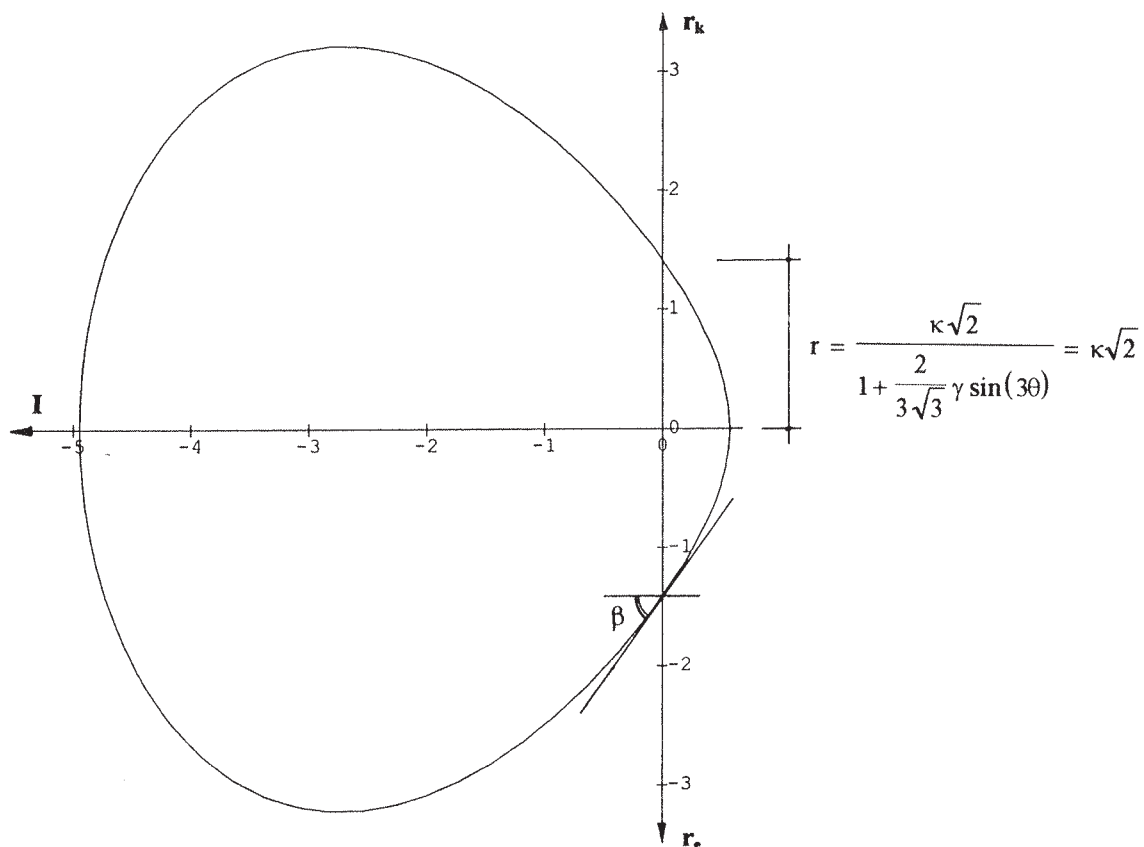


Abb. 5.2.6: Einfluß der Parameter β und κ auf die Form der Fließbedingung in der hyd. Ebene
 ($\alpha=1.0$, $\beta=1.0$, $\gamma=0.0$, $\delta=0.1 \text{ mm}^2$, $\kappa=1.0 \text{ N/mm}^2$, $m=2.0$)

5.3 Übergang zu anderen Fließbedingungen durch Variation der Parameter

Das single-surface-Model, welches eine Fließbedingung aus einer einzigen Funktion darstellt, ist gegenüber den „Kappenmodellen“ mit zwei Funktionen eine nicht zu unterschätzende Weiterentwicklung in der Plastizität.

Die auf dem ersten Blick als Nachteil erscheinende große Anzahl an werkstoffabhängigen Parametern, deren Bestimmung meist mit großem Aufwand verbunden ist, stellt sich mit Hilfe immer leistungsfähigeren Rechenanlagen als Vorteil heraus, denn sie können als Sonderfälle d.h. durch Nullsetzen bestimmter Parameter in bisher bekannte und in der Plastizität unverzichtbare Fließbedingungen übergehen.

Die folgenden Abschnitte zeigen einige bekannte Fließbedingungen als Sonderfall der Fließbedingung von *de Boer & Dresenkamp* [1988] bzw. der modifizierten Fließbedingungen von *Bücker*, siehe *Bücker & Bluhm* [1994], und *Bluhm* [1994].

5.3.1. Sonderfall: Drucker & Prager [1952]

Für den Sonderfall, daß in der fünfparametrischen Fließbedingung die werkstoffabhängigen Parameter

$$\alpha = \gamma = \delta = 0 ,$$

gesetzt werden, reduziert sich die Fließbedingung aus Gleichung (5.4) auf folgende Form:

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}} r + \beta I_s - \kappa = 0 . \quad (5.3.1.1)$$

Benutzt man die *Reuß'*sche Variable

$$r = \sqrt{2 \Pi_{s^b}}$$

und setzt sie in Gleichung (5.3.1.1) ein, so erhält man

$$F = \sqrt{\Pi_{s^b}} + \beta I_s - \kappa = 0 . \quad (5.3.1.2)$$

Die Gleichung (5.3.1.2) entspricht dem Fließkriterium von *Drucker & Prager*.

In **Abb. 5.3.1.1** ist die Fließbedingung aus Gleichung (5.3.1.2) in der hydrostatischen Ebene und in der Deviatorebene dargestellt.

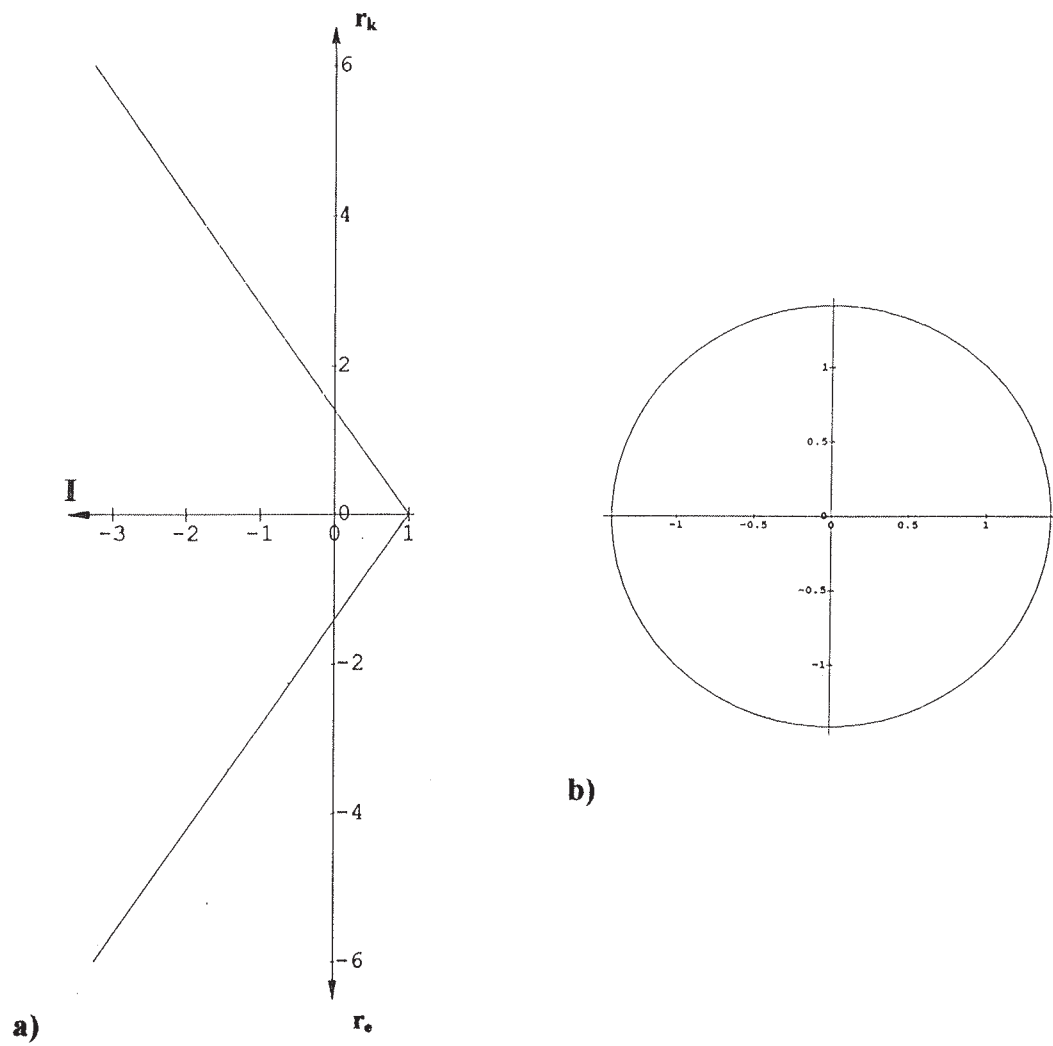


Abb. 5.3.1.1: Darstellung der Fließbedingung von *Drucker & Prager* [1952] für $\alpha=0.0$, $\beta=1.0$, $\gamma=0.0$, $\delta=0.0 \text{ mm}^2$, $\kappa=1.0 \text{ N/mm}^2$, $m=3.0$ (Erstellt mit DISKUS)

- a) Darstellung in der hydrostatischen Ebene
- b) Darstellung in der Deviatorebene ($I=0.0 \text{ N/mm}^2$)

5.3.2. Sonderfall: Von Mises [1913]

Setzt man in der Fließbedingung (5.4) die Parameter

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0 ,$$

so erhält man folgenden Ausdruck:

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}} r - \kappa = 0 . \quad (5.3.2.1)$$

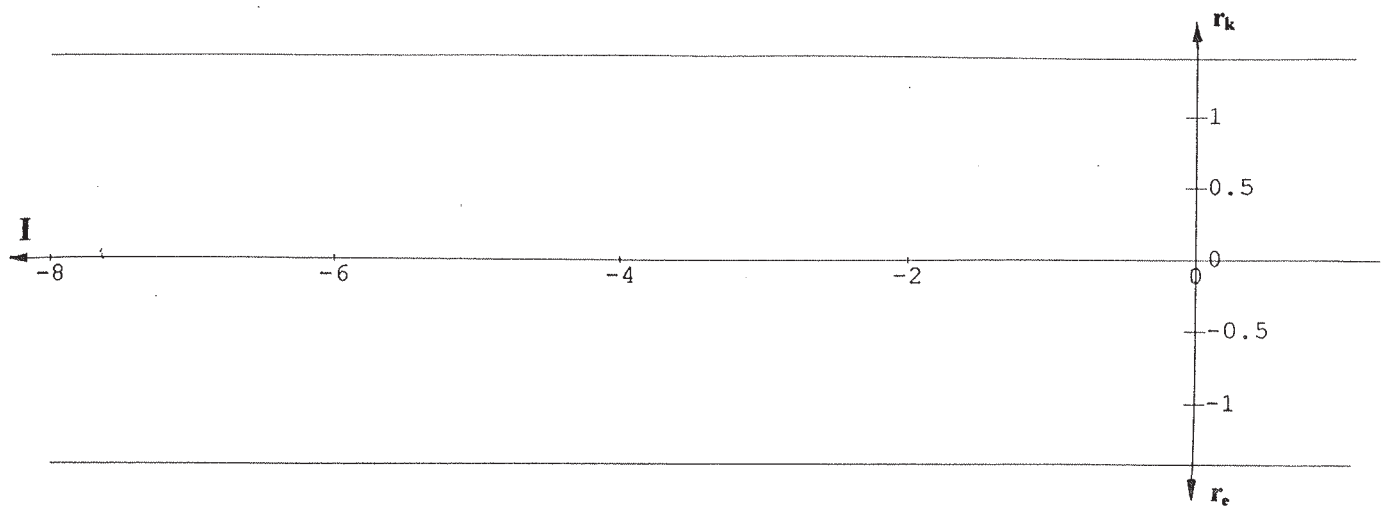
Durch einsetzen der *Reuß*'schen Variable

$$r = \sqrt{2 \Pi_{s^0}}$$

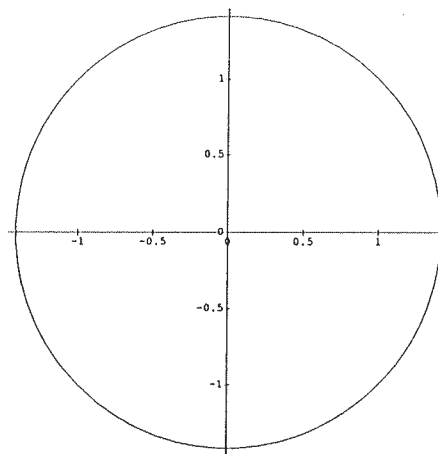
erhält man die klassische von *Mises* [1913] Fließbedingung

$$F = \sqrt{\Pi_{s^0}} - \kappa = 0 . \quad (5.3.2.2)$$

In **Abb. 5.3.1.2** ist die Fließbedingung von *von Mises* [1913] (Gl. 5.3.2.3) in der hydrostatischen Ebene und in der Deviatorebene dargestellt.



a)



b)

Abb. 5.3.2.1: Darstellung der Fließbedingung von *von Mises* [1913] für $\alpha=0.0$, $\beta=0.0$, $\gamma=0.0$, $\delta=0.0 \text{ mm}^2$, $\kappa=1.0 \text{ N/mm}^2$, $m=3.0$ (Erstellt mit DISKUS)

- a) Darstellung in der hydrostatischen Ebene
- b) Darstellung in der Deviatorebene ($I=0.0 \text{ N/mm}^2$)

5.3.3. Sonderfall: Green [1972]

Der Sonderfall der Fließbedingung (5.4) mit den Parametern

$$\beta = \gamma = \delta = 0 ,$$

liefert folgende Gleichung:

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{r^2 + \alpha^2 I_s^2} - \kappa = 0 . \quad (5.3.3.1)$$

Verwendet man in dieser die *Reuß'*sche Variable

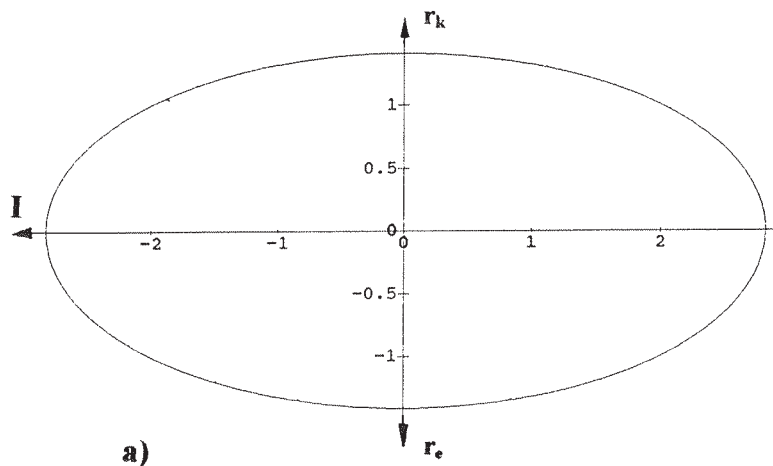
$$r = \sqrt{2 \Pi_{s^D}}$$

so erhält man folgenden Ausdruck

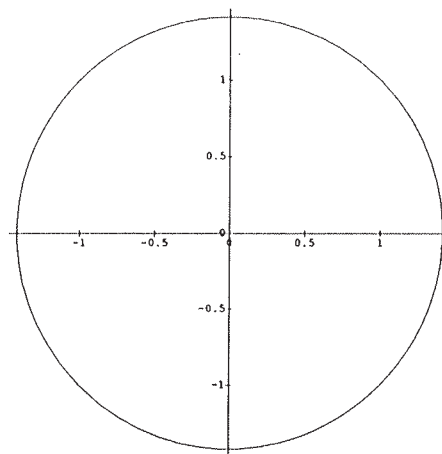
$$F = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2 \Pi_{s^D} + \alpha^2 I_s^2} - \kappa = 0 . \quad (5.3.3.2)$$

Der Vergleich der oberen Gleichung (5.3.3.2) zeigt, daß dieser Ausdruck der *Green'schen* Fließbedingung entspricht.

In **Abb. 5.3.1.3** ist die Fließbedingung von *Green* [1972] (Gl. 5.3.3.2) in der hydrostatischen Ebene und in der Deviatorebene dargestellt.



a)



b)

Abb. 5.3.3.1: Darstellung der Fließbedingung von *Green* [1972] für

$\alpha=0.5$, $\beta=0.0$, $\gamma=0.0$, $\delta=0.0 \text{ mm}^2$, $\kappa=1.0 \text{ N/mm}^2$, $m=3.0$ (Erstellt mit DISKUS)

a) Darstellung in der hydrostatischen Ebene

b) Darstellung in der Deviatorebene ($I=0.0 \text{ N/mm}^2$)

5.3.4. Sonderfall: Tresca [1864]

Bei dieser Modifikation der Fließbedingung (5.4) wird durch Einführen einer quadratischen Potenz verhindert, daß die Funktion

$$\sin(3\theta) ,$$

der Gleichung (5.4) negative Werte annimmt. Somit erhält man folgende Fließbedingung:

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(r^2 + \alpha^2 I_s^2 \right)^{\frac{m}{2}} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \gamma r^m \left[\sin(3\theta) \right]^2 \right]^{\frac{1}{m}} + \delta I_s^2 + \beta I_s - \kappa = 0 . \quad (5.3.4.1)$$

In Abb. 5.3.4.1 erkennt man die typisch sechseckige Form der Deviatorkurven von Tresca.

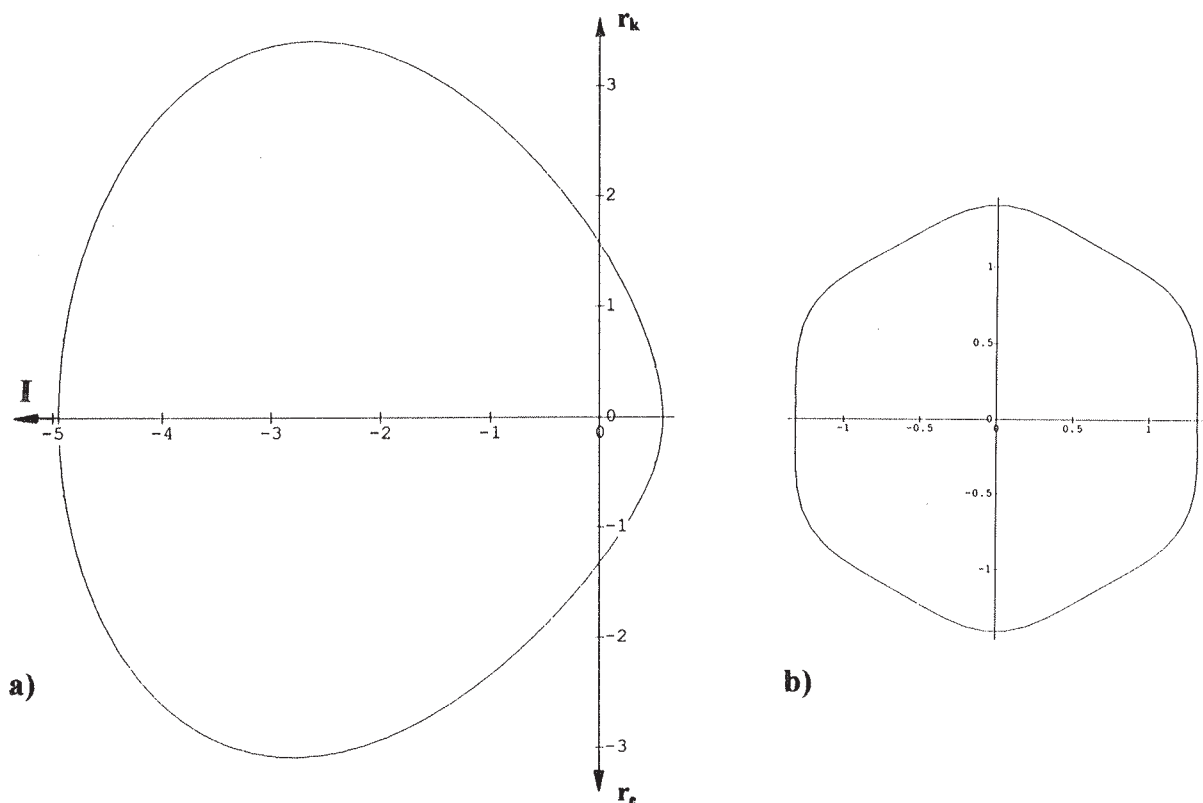


Abb. 5.3.4.1: Darstellung der Fließbedingung von Tresca [1864] für

$\alpha=1.0$, $\beta=1.0$, $\gamma=1.29904$, $\delta=0.1 \text{ mm}^2$, $\kappa=1.0 \text{ N/mm}^2$, $m=3.0$ (Erstellt mit DISKUS)

a) Darstellung in der hydrostatischen Ebene

b) Darstellung in der Deviatorebene ($I=0.0 \text{ N/mm}^2$)

6. Fließregel

Wie schon zu Beginn dieser Arbeit erwähnt, benötigt man in der Plastizitätstheorie zur vollständigen Beschreibung des plastischen Materialverhaltens eine Fließregel (Evolutionsgleichung für die plastischen Verzerrungsinkremente), die den Zusammenhang zwischen den plastischen Verzerrungszuwächsen und den Spannungen bzw. den Spannungszuwächsen angibt.

Eine sehr häufig verwendete Fließregel ist die folgende, die nach dem Konzept des plastischen Potenzial entwickelt wurde. In der ist der Zusammenhang zwischen dem Tensor der plastischen Verzerrungsinkremente und dem Spannungstensor durch die Beziehung

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\lambda} \frac{\partial Q(\mathbf{S})}{\partial \mathbf{S}} \quad (6.1)$$

gegeben. Darin ist die Funktion $Q(\mathbf{S})$ eine skalarwertige Funktion, die vom Spannungstensor $\mathbf{S}$ abhängt. Sie wird als plastisches Potential bezeichnet. Der Faktor $\dot{\lambda}$ in (6.1) ist ebenso ein skalarwertiger Proportionalitätsfaktor.

Man nennt die in Gleichung (6.1) vorgestellte Fließregel, die nach dem Konzept des plastischen Potential entwickelt wurde, auch nichtassoziierte Fließregel. Der Grund dafür wird klarer, wenn wir den Sonderfall, daß das plastische Potential $Q(\mathbf{S})$ mit der Funktion $F = 0$ als Fließbedingung im Verfestigungsbereich übereinstimmt, betrachten. Diese Fließregel wird Normalenregel oder auch assoziierte Fließregel genannt und lautet

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \quad (6.2)$$

Bei der Untersuchung des plastischen Materialverhaltens der Metalle hat man mit der assoziierten Fließregel (6.2) gute Übereinstimmungen mit den Versuchsergebnissen beobachtet, da bei Metallen die Fließbedingung im Verfestigungsbereich unabhängig vom hydrostatischen Spannungszustand ist.

Ganz anders als bei Metallen zeigen spröde und granulare Materialien eine ausgeprägte Abhängigkeit des Verformungsverhaltens vom hydrostatischen Spannungszustand.

Experimentelle Untersuchungen, wie z.B. von *Lade* und *Duncan* (siehe *Brauns* [1989]) an Sand zeigen, daß das Verformungsverhalten unter Anwendung einer assoziierten Fließregel nicht zutreffend beschrieben werden kann.

Diese Versuchsergebnisse zeigen unter anderem auch, daß die assoziierte Fließregel zu einer Überschätzung der Volumendilatanz (Volumenaufweitung) führt.

Also müssen, um das Verformungsverhalten spröder und granularer Materialien zutreffender beschreiben zu können, nichtassoziierte Fließregeln entwickelt werden.

Für granulare Materialien, die sich kinematisch verfestigen, hat *de Boer*, siehe *de Boer & Lade* [1991], folgende Fließregel angegeben:

$$\dot{\mathbf{E}}_p = \dot{\lambda}(\mathbf{S}^D - \mathbf{Z}^D) + \dot{\lambda}\mu[(\mathbf{S} - \mathbf{Z}) \cdot \mathbf{I}] \mathbf{I} \quad (6.3)$$

In der obigen Fließregel (6.3) ist $\dot{\lambda}$ ein skalarer Faktor und $\mu = \mu(\mathbf{I}_k, \mathbf{II}_{k^D}, \mathbf{III}_{k^D})$ eine, zur Berücksichtigung der kontraktanten (Zusammendrückung) und dilatanten (Aufweitung) Volumenverformung der spröden und granularen Stoffe, von den Invarianten abhängige skalare Funktion ist.

Eine Weiterentwicklung der Fließbedingung von *de Boer* stellt die folgende Fließbedingung von *Bluhm* [1994] dar:

$$\dot{\mathbf{E}}_p = \dot{\lambda}(\mathbf{S}^D - \mathbf{Z}^D) + \dot{\lambda}\mu[(\mathbf{S} - \mathbf{Z}) \cdot \mathbf{I}] \mathbf{I} + \dot{\lambda}\bar{\mu}[(\mathbf{S}^D - \mathbf{Z}^D)(\mathbf{S}^D - \mathbf{Z}^D)]^D \quad (6.4)$$

Darin stellt die Größe $\dot{\lambda}$ einen skalaren Faktor dar und die Terme

$$\mu = \mu(\mathbf{I}_k, \mathbf{II}_{k^D}, \mathbf{III}_{k^D})$$

und

$$\bar{\mu} = \bar{\mu}(\mathbf{I}_k, \mathbf{II}_{k^D}, \mathbf{III}_{k^D})$$

sind Funktionen, die die plastische Volumenveränderung und die Richtungen der plastischen Verzerrungssinkremente abweichend von der durch $S^D - Z^D$ vorgegebenen Richtung in der Deviatorebene steuern.

Um die Einflüsse der Parameter μ und $\bar{\mu}$ auf die Fließregel aus (6.4) zu veranschaulichen, wurden einige Beispiele mit verschiedenen Ansätzen für diese Parameter gerechnet.

Es wurden folgende Materialparameter gewählt:

$$\alpha = 1.0 ,$$

$$\beta = 1.0 ,$$

$$\gamma = 1.0 ,$$

$$\delta = 0.1 ,$$

$$\kappa = 1.0 ,$$

$$m = 3.0 .$$

Beispiel 1.

Das Modell der kinematischen Ferfestigung bringt auch neue Erkenntnisse über die Belastungsgeschichte und die damit verbundene neue Lage der Fließbedingung im Hauptspannungsraum. Der Gedanke, daß die Vertauschung der Reihenfolge einer zwei- oder mehrteiligen Belastung und die darauf folgende Verfestigung die selbe Fließfläche ergeben, wird sich nach diesem Beispiel nicht mehr aufrecht halten können.

Dazu wählen wir die Parameter μ und $\bar{\mu}$ der Fließregel (6.4) zu

$$\mu = 1.0$$

und

$$\bar{\mu} = 0.0 .$$

Die Fließregel vereinfacht sich dann zu

$$\dot{\mathbf{E}}_p = \dot{\lambda}(\mathbf{S}^D - \mathbf{Z}^D) + \dot{\lambda}[(\mathbf{S} - \mathbf{Z}) \cdot \mathbf{I}] \mathbf{I} \quad (6.5)$$

Im folgenden werden zwei Belastungspfade aufgebracht, welche jeweils deviatorisch eine Belastung in Richtung von Kompression und eine in Richtung von Extension enthalten. Beide Belastungspfade unterscheiden sich nur in der Reihenfolge der Lastaufbringung, wobei beim Belastungspfad 1 die Spannung erst deviatorisch in Richtung von Kompression und anschließend in Richtung von Extension aufgebracht wird. Beim Belastungspfad 2 ist die Reihenfolge der Lastaufbringung umgekehrt.

Die beiden deviatorischen Spannungszustände sind

$$\mathbf{S}_{\text{Kompression}} = \begin{bmatrix} 1.20 & & \\ & 1.20 & \\ & & -2.40 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.00 & & \\ & 0.00 & \\ & & 0.00 \end{bmatrix} \quad [\text{N/mm}^2] \quad (6.6)$$

und

$$\mathbf{S}_{\text{Extension}} = \begin{bmatrix} 1.50 & & \\ & -0.75 & \\ & & -0.75 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.00 & & \\ & 0.00 & \\ & & 0.00 \end{bmatrix} \quad [\text{N/mm}^2] \quad (6.7)$$

Der Belastungspfad 1, bei dem zuerst deviatorisch in Richtung von Kompression ($\theta = -30^\circ$), anschließend in Richtung von Extension ($\theta = 30^\circ$) belastet wird, liefert die in **Abb. 6.1** dargestellte Fließfläche. Die unter (6.6) und (6.7) angegebenen Belastungen werden inkrementell aufgebracht.

Beim Belastungspfad 2, wird zuerst in Richtung von Extension ($\theta = 30^\circ$), anschließend in Richtung von Kompression ($\theta = -30^\circ$) belastet, also in umgekehrter Reihenfolge als beim ersten Belastungspfad. Man erhält die in **Abb. 6.2** dargestellte Lage der Fließbedingung.

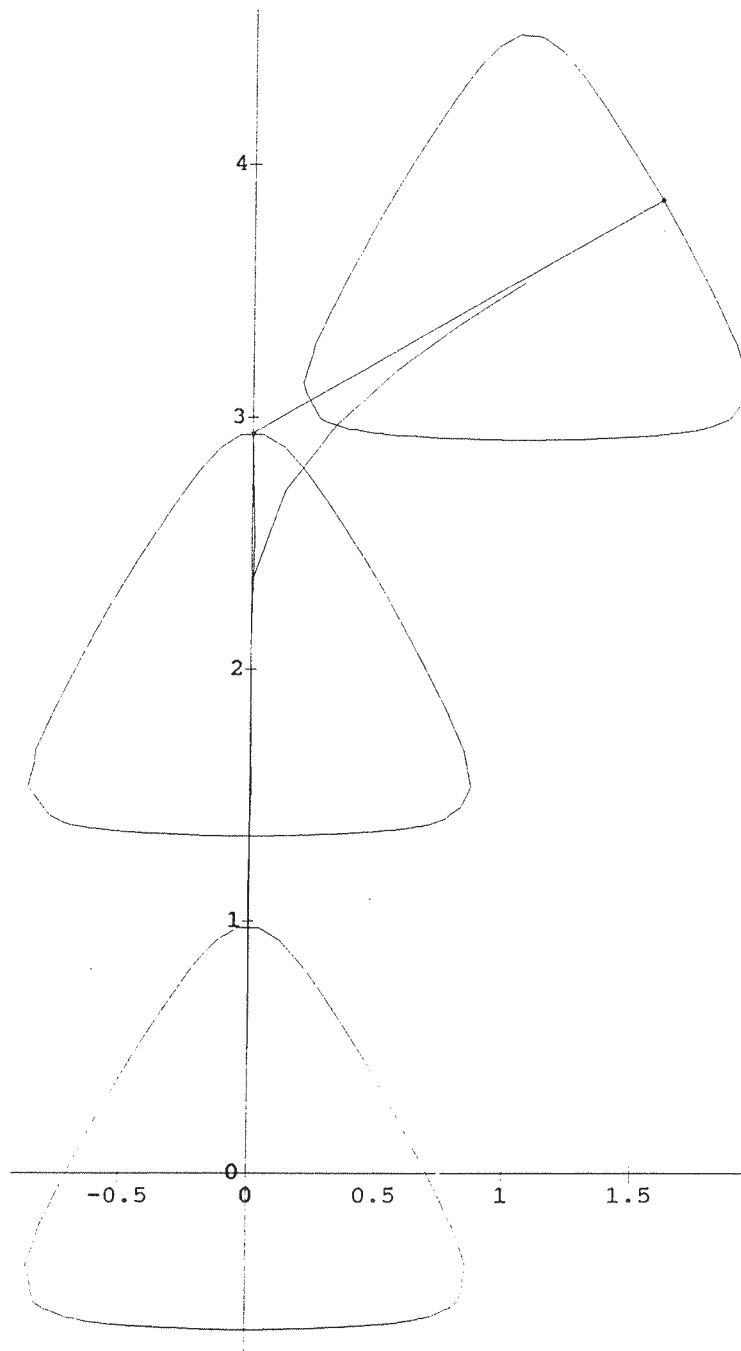


Abb. 6.1: Darstellung der Lage der Fließbedingung für den Belastungspfad 1 mit $\alpha=1.0$, $\beta=1.0$, $\gamma=1.0$, $\delta=0.1 \text{ mm}^2$, $\kappa=1.0 \text{ N/mm}^2$, $I=0.0 \text{ N/mm}^2$, $m=3.0$ (Erstellt mit DARTEST, siehe Anhang)

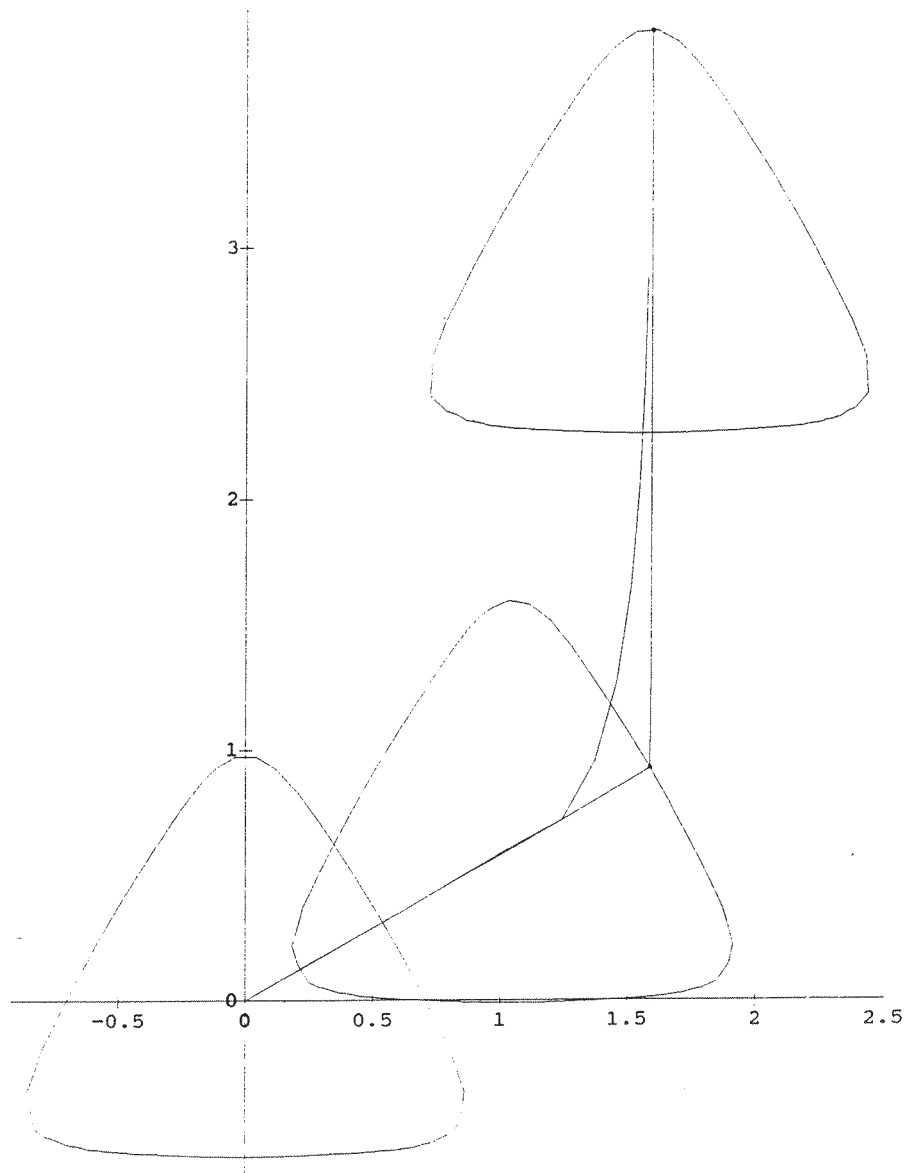


Abb. 6.2: Darstellung der Lage der Fließbedingung für den Belastungspfad 2 mit $\alpha=1.0$, $\beta=1.0$, $\gamma=1.0$, $\delta=0.1 \text{ mm}^2$, $\kappa=1.0 \text{ N/mm}^2$, $I=0.0 \text{ N/mm}^2$, $m=3.0$ (Erstellt mit DARTEST, siehe Anhang)

Um die Lage der Endfließflächen beider Belastungspfade besser vergleichen zu können, sind beide Belastungspfade in **Abb. 6.3** überlagert dargestellt.

Man erkennt, daß eine Vertauschung der Belastungsreihenfolge unterschiedliche Positionen der Fließbedingung im Hauptspannungsraum liefern.

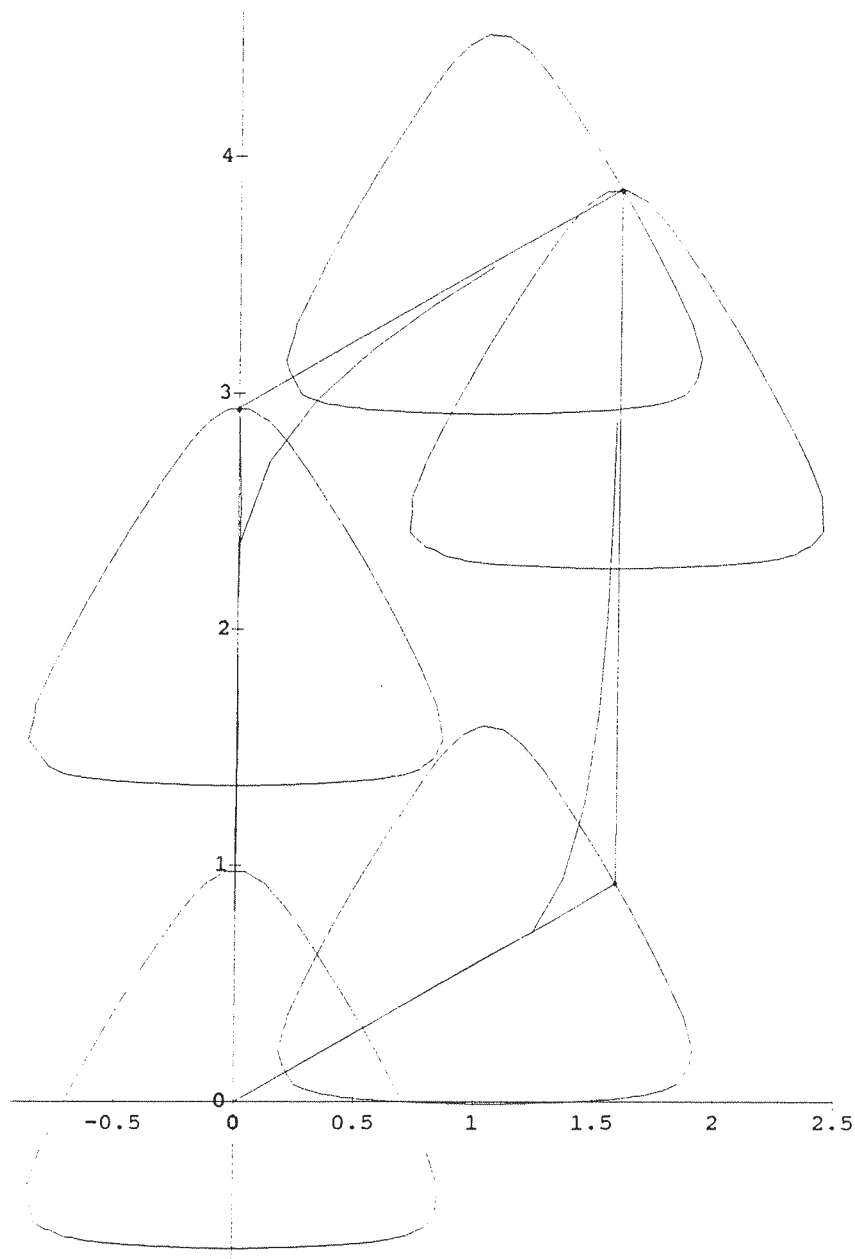


Abb. 6.3: Darstellung der Lage der Fließbedingung für beide Belastungspfade mit $\alpha=1.0$, $\beta=1.0$, $\gamma=1.0$, $\delta=0.1 \text{ mm}^2$, $\kappa=1.0 \text{ N/mm}^2$, $I=0.0 \text{ N/mm}^2$, $m=3.0$
(Erstellt mit DARTEST, siehe Anhang)

Beispiel 2.

Yamada & Ishihara [1979] stellten durch Versuche an Fuji Flußsand fest, daß die Richtung der plastischen Verzerrungszuwächse in der Deviatorebene nicht immer mit der durch $S_k^D = S^D - Z^D$ vorgegebenen Richtung übereinstimmt. Dieses Beispiel verdeutlicht, daß dieser Effekt mit der modifizierten Fließregel von *Bluhm* [1994] beschrieben werden kann.

Dazu werden die Parameter μ und $\bar{\mu}$ der Fließregel (6.4) folgendermaßen gewählt:

$$\mu = 0.0 \quad (6.8)$$

und

$$\bar{\mu} = \bar{\mu}(II_{k^D}, III_{k^D}) \quad (6.9)$$

Der Parameter $\bar{\mu}$ ist eine Funktion der zweiten und dritten Invarianten des kinematischen Spannungsdeviators, wird aber hier zur Vereinfachung als quadratischer Ansatz der Inkremente gewählt ($\bar{\mu} = 0.0075 \dot{\epsilon}^2 - 0.0650 \dot{\epsilon}$). Eine Umrechnung in die unter (6.9) angegebene Form ist möglich.

Die Fließregel vereinfacht sich dann zu

$$\dot{E}_p = \dot{\lambda}(S^D - Z^D) + \dot{\lambda}\bar{\mu}[(S^D - Z^D)(S^D - Z^D)]^D \quad (6.10)$$

Bevor die Belastung in Richtung von simple-shear aufgebracht wird, wird erst rein hydrostatisch belastet. Die aufzubringende Belastung ist:

$$S = \begin{bmatrix} 0.0000 & & \\ & 0.0000 & \\ & & 0.0000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.3333 & & \\ & -0.3333 & \\ & & -0.3333 \end{bmatrix} \quad [N/mm^2] \quad (6.11)$$

Im folgenden wird das Spannungsinkrement

$$\Delta S = \begin{bmatrix} 0.0000 & & \\ & 1.7635 & \\ & & -1.7635 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0000 & & \\ & 0.0000 & \\ & & 0.0000 \end{bmatrix} \quad [\text{N} / \text{mm}^2] \quad (6.12)$$

aufgebracht. Die Summe von (6.11) und (6.12) kennzeichnet einen simple-shear Punkt auf der Fließbedingung.

Nun wird das folgende deviatorische Spannungsinkrement

$$\Delta S = \begin{bmatrix} 0.0000 & & \\ & 0.1500 & \\ & & -0.1500 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0000 & & \\ & 0.0000 & \\ & & 0.0000 \end{bmatrix} \quad [\text{N} / \text{mm}^2] \quad (6.13)$$

12 mal aufgebracht.

Die Verschiebung der Anfangsfließfläche in der Deviatorebene unter den von (6.11) bis (6.13) angegebenen Spannungszuständen ist in **Abb. 6.4** dargestellt.

Man erkennt ganz deutlich die Abweichung des back-stress-Pfades vom Spannungspfad infolge der veränderlichen Richtung der plastischen Verzerrungszuwächse.

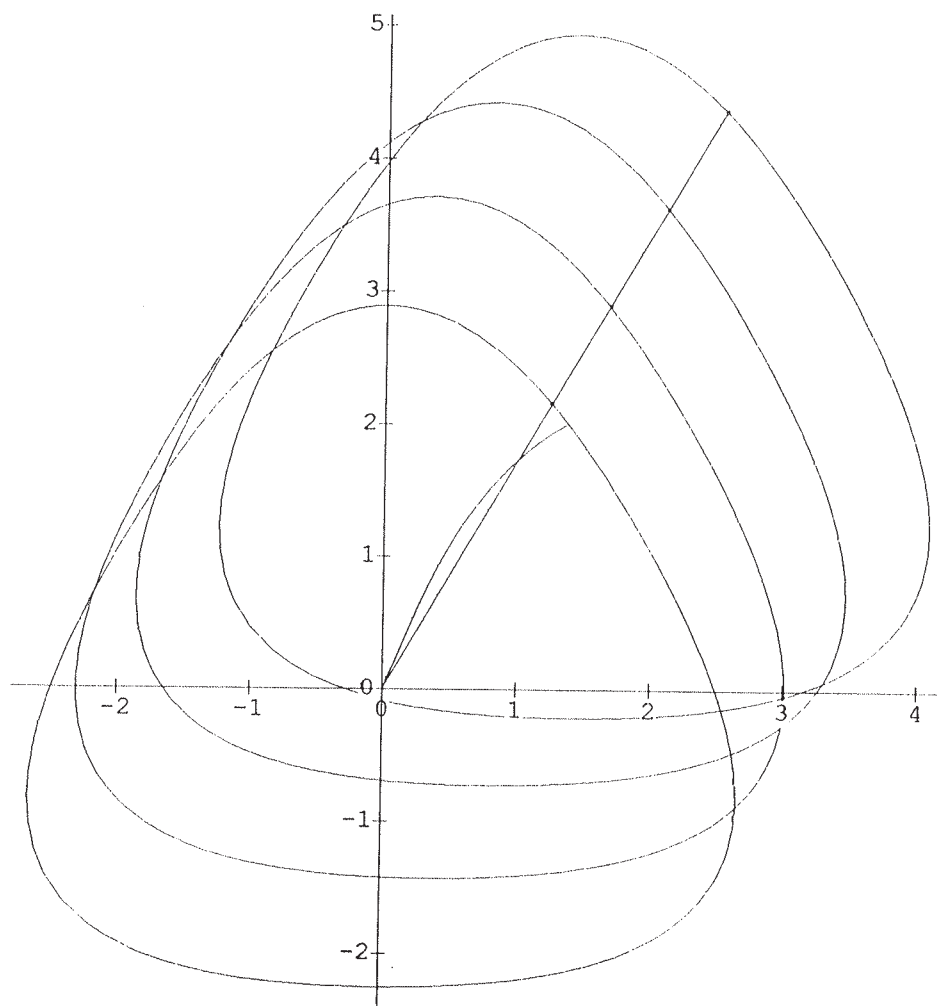


Abb. 6.4: Darstellung des back-stress-Pfades der Fließbedingung in der Deviatorebene für $\alpha=1.0$, $\beta=1.0$, $\gamma=1.0$, $\delta=0.1 \text{ mm}^2$, $\kappa=1.0 \text{ N/mm}^2$, $I=-1.0 \text{ N/mm}^2$, $m=3.0$
(Erstellt mit DARTEST, siehe Anhang)

Beispiel 3.

Mit diesem Beispiel wird der Einfluß des Faktors μ auf die Verschiebung der Fließfläche in der hydrostatischen Ebene, und somit auf die Volumenänderung (Dilatanz - Kontraktanz) verdeutlicht werden.

Dazu werden die Parameter μ und $\bar{\mu}$ der Fließregel (6.4) folgendermaßen gewählt:

$$\mu = \mu(I_k, \Pi_{k^D}, \theta_k) = c \frac{\frac{\partial F(\theta_k)}{\partial I_k}}{\frac{\partial F(\theta_k)}{\partial \Pi_{k^D}}} \frac{1}{S_k \cdot I} \quad (6.14)$$

mit

$$c = c(I_k) \quad (6.15)$$

und

$$\bar{\mu} = 0.0 \quad (6.16)$$

Mit den oben angegebenen Parametern μ und $\bar{\mu}$ reduziert sich die Fließregel aus Gl. (6.4) auf den folgenden Ausdruck:

$$\dot{E}_p = \dot{\lambda}(S^D - Z^D) + \dot{\lambda}\mu[(S - Z) \cdot I] I \quad (6.17)$$

bzw.

$$\dot{E}_p = \dot{\lambda}S_k^D + \dot{\lambda}\mu(S_k \cdot I) I \quad (6.18)$$

Setzt man den Parameter μ aus (6.14) in (6.18) ein, so erhält man:

$$\dot{\mathbf{E}}_p = \dot{\lambda} \mathbf{S}_k^D + \dot{\lambda} c \frac{\frac{\partial F(\theta_k)}{\partial \mathbf{I}_k}}{\frac{\partial F(\theta_k)}{\partial \Pi_{k^D}}} \mathbf{I} \quad (6.19)$$

Zunächst wird der Parameter c in Gl. (6.19) zu $c=1$ gesetzt. Dies bedeutet, daß die plastischen Verzerrungssinkremente in der hydrostatischen Ebene senkrecht auf der Fließbedingung stehen (Normalenregel).

Zuerst wird rein hydrostatisch belastet. Die folgende Belastung wird in zwei Schritten inkrementel aufgebracht:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0.00 & & \\ & 0.00 & \\ & & 0.00 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3.20 & & \\ & -3.20 & \\ & & -3.20 \end{bmatrix} \quad [\text{N/mm}^2] \quad (6.20)$$

Nun wird das folgende deviatorische Spannungsinkrement

$$\Delta \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0.20 & & \\ & 0.20 & \\ & & -0.40 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.00 & & \\ & 0.00 & \\ & & 0.00 \end{bmatrix} \quad [\text{N/mm}^2] \quad (6.21)$$

in Richtung von Kompression ($\theta = -30^\circ$) 18 mal aufgebracht.

In **Abb. 6.5** ist der Einfluß des Parameters μ für $c=1$ (Normalenregel in der hydrostatischen Ebene) dargestellt. In **Abb. 6.5. b)** ist zu erkennen, wie die deviatorischen Sektionskurven ihre Form verändern. Dies resultiert aus der Verschiebung der Fließfläche in Richtung der negativen hydrostatischen Achse.

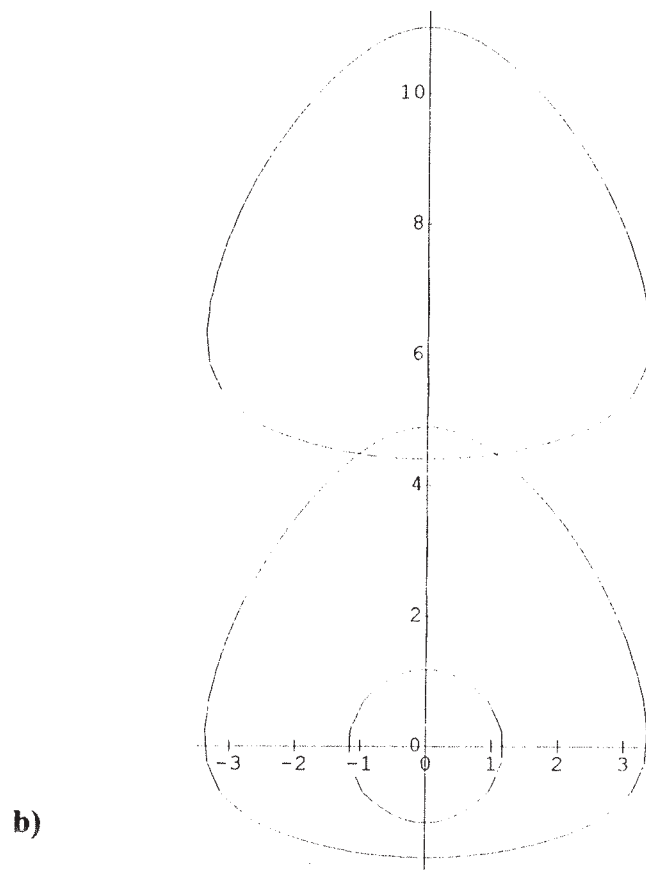
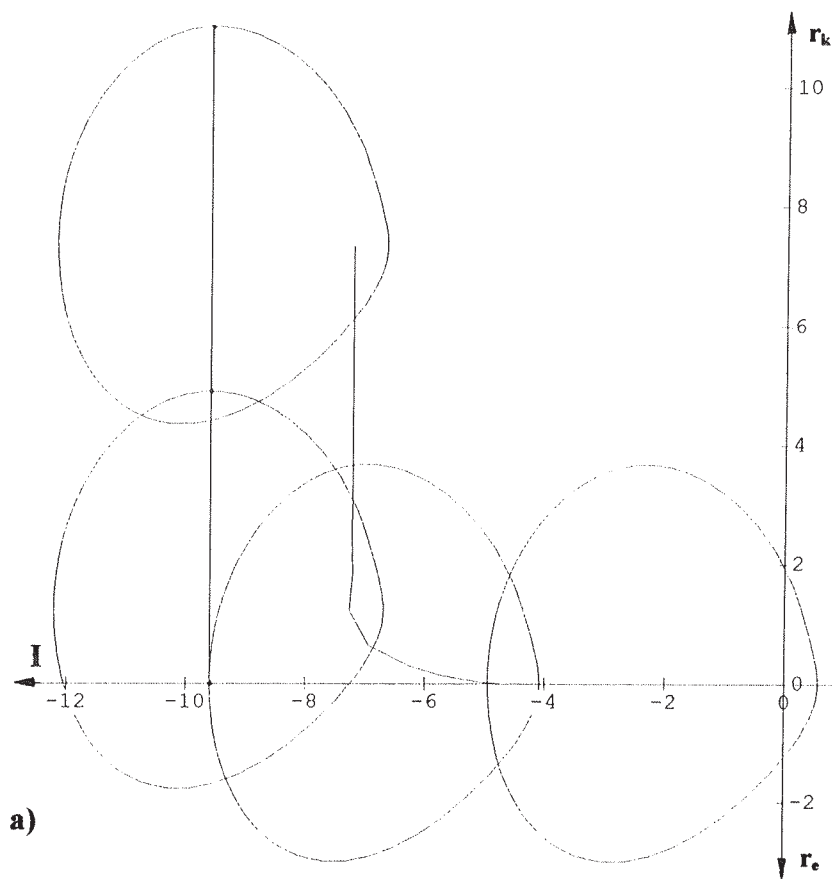


Abb. 6.5: Darstellung des Spannungspfades und back-stress-Pfades für $c=1$ mit $\alpha=1.0$, $\beta=1.0$, $\gamma=2.0$, $\delta=0.1 \text{ mm}^2$, $\kappa=1.0 \text{ N/mm}^2$, $m=4.5$ (Erstellt mit DARTEST)

- a) Darstellung in der hydrostatischen Ebene
- b) Darstellung in der Deviatorebene

59

Beispiel 4.

Das folgende Beispiel stellt einen anderen Ansatz für den Parameter μ dar. Die Parameter μ und $\bar{\mu}$ werden folgendermaßen gewählt:

$$\mu = \mu(I_s, II_{s^D}) = 0.29 I_s - 1.18 \sqrt{II_{s^D}} \quad (6.22)$$

und

$$\bar{\mu} = 0.0 \quad (6.23)$$

Der Ansatz (6.22) wurde von *Brauns* [1989] für kohäsionslosen Sand formuliert.

Mit den oben angegebenen Parametern μ und $\bar{\mu}$ reduziert sich die Fließregel aus Gl. (6.4) auf den folgenden Ausdruck:

$$\dot{E}_p = \dot{\lambda}(S^D - Z^D) + \dot{\lambda}\mu[(S - Z) \cdot I] I \quad (6.24)$$

Der folgende Spannungszustand kennzeichnet einen Punkt auf der Fließfläche und wird in einem Schritt aufgebracht:

$$S = \begin{bmatrix} -0.0412 & & \\ & 0.0206 & \\ & & 0.0206 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.1050 & & \\ & -0.1050 & \\ & & -0.1050 \end{bmatrix} \quad [N/mm^2] \quad (6.25)$$

Der nun folgende deviatorische Spannungszustand ist in Richtung von Kompression ($\theta = -30^\circ$) und wird inkrementel 10 mal aufgebracht:

$$\Delta S = \begin{bmatrix} -0.0150 & & \\ & 0.0075 & \\ & & 0.0075 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0000 & & \\ & 0.0000 & \\ & & 0.0000 \end{bmatrix} \quad [N/mm^2] \quad (6.26)$$

In Abb. 6.7. a) ist zu erkennen, wie sich zuerst eine Kontraktanz, dann aber eine Dilatanz einstellt.

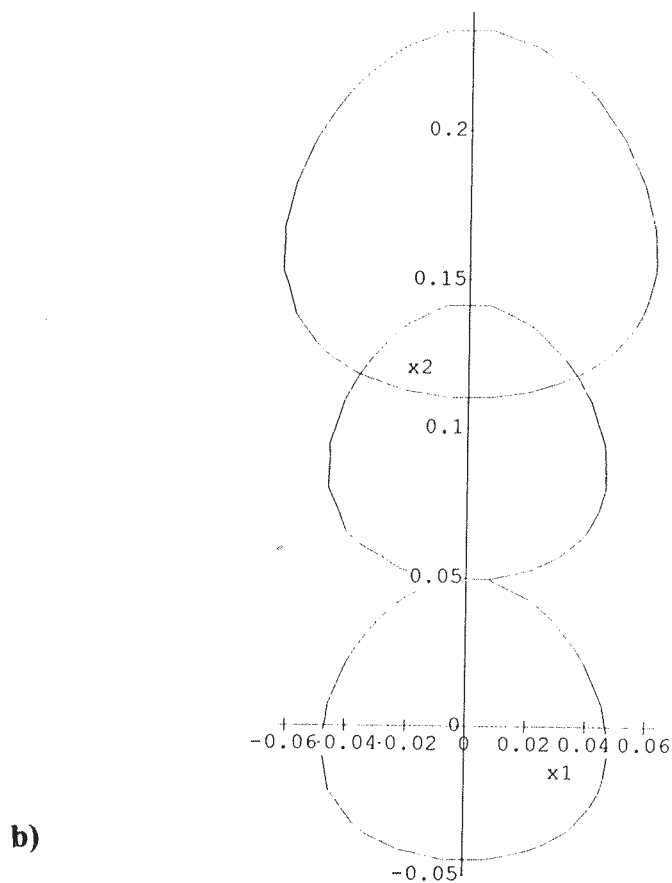
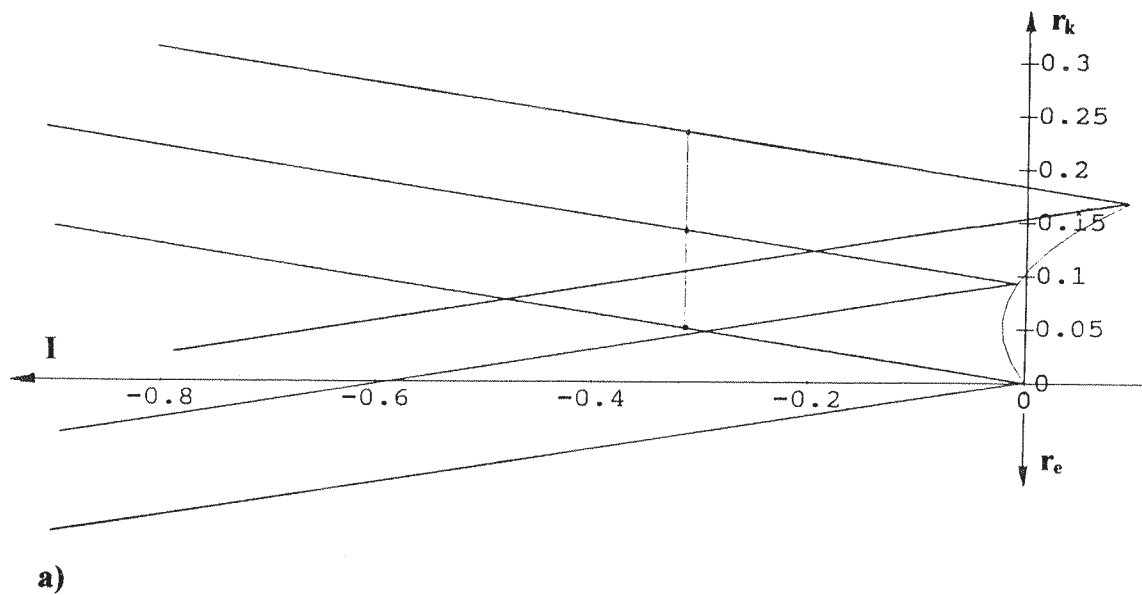


Abb. 6.7: Darstellung des Einflusses des Parameters μ für
 $\alpha=0.100$, $\beta=0.128$, $\gamma=0.513$, $\delta=0.0 \text{ mm}^2$, $\kappa=0.0 \text{ N/mm}^2$, $m=3.0$
a) Darstellung in der hydrostatischen Ebene
b) Darstellung in der Deviatorebene ($I=-0.315 \text{ N/mm}^2$)
(Erstellt mit DARTEST, siehe Anhang)

7. Schlußbemerkungen

In der vorliegenden Arbeit wurde die 5-parametriges Fließbedingung von *de Boer & Dresenkamp* [1988] und deren Parameter im Hinblick auf das isotrope Verfestigungsmodell, bei der sich die Fließbedingung im Hauptspannungsraum aufweitert, diskutiert. Der Übergang der 5-parametriges Fließbedingung in bekannte Fließkriterien wurde aufgezeigt. Desweiteren wurde eine Fließregel von *Bluhm* [1994] für eine kinematische Verfestigung vorgestellt und anhand von Beispielen der Einfluß der in der Fließregel auftretenden Parameter erläutert.

Abschließend ist zu erwähnen, daß man mit der hier vorgestellten Fließbedingung und Fließregel die bei porösen Materialien auftretende Effekte wie Dilatanz und Kontraktanz beschreiben kann.

Im Hinblick auf die praktische Anwendung der Fließbedingung und Fließregel für poröse Materialien wie z.B. Sand, Fels und Ton ist es unumgänglich sich, intensiv mit der Bestimmung der Parameter zu beschäftigen. Dieser war im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich und bleibt weiteren Arbeiten vorbehalten.

8. Literaturverzeichnis

- [1979] Schad, H.:
Nichtlineare Stoffgleichungen für Böden und ihre Verwendung bei der
numerischen Analyse von Grundbauaufgaben
Dissertation, Universität Stuttgart.
- [1979] Yamada, Y. & Ishihara, K.:
Soil and Foundation, **19** (1979), 79-94
- [1982] de Boer, R.:
Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure
Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York.
- [1984] Desai, C.S. & Faruque, M.O.:
A generalized Basis for Modelling Plastic Behaviour of Materials, Mechanics
of Engineering Materials, edited by Desai, C.S. and Gallagher, R.H.
John Wiley & Sons Ltd, Chapter 11, 211-229.
- [1984] Lade, P.V.:
Failure Criterion for Frictional Materials, edited by Desai, C.S. and
Gallagher, R.H.
John Wiley & Sons Ltd, Chapter 20, 385-402.
- [1985] Betten, J.:
Elastizitäts- und Plastizitätslehre
Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig - Wiesbaden.
- [1986] de Boer, R. & Ehlers, W.:
Theorie der Mehrkomponentenkontinua mit Anwendung auf
bodenmechanische Probleme - Teil 1
Forschungsberichte aus dem FB Bauwesen, Heft 40, Universität-GH-Essen.

- [1987] Dresenkamp, H.T.:
 Stoffgleichungen für spröde und granulare Stoffe im Bruchzustand
 Dissertation, Universität-GH-Essen.

- [1988] de Boer, R.:
 Int. J. Plasticity, **4** (1988), 371-391

- [1989] Ehlers, W.:
 Poröse Medien - ein kontinuumsmechanisches Modell auf der Basis
 der Mischungstheorie
 Forschungsberichte aus dem FB Bauwesen, Heft 47, Universität-GH-Essen.

- [1989] Brauns, W.:
 Plastische Deformationen granularer Stoffe
 Dissertation, Universität-GH-Essen.

- [1989] Bronstein, I.N. & Semendjajew, K.A.:
 Taschenbuch der Mathematik - 24. Auflage
 Harri Deutsch Verlag, Thun und Frankfurt/Main.

- [1991] de Boer, R. & Lade, P.V.:
 Towards a general plasticity theory for empty and saturated porous solids
 Forschungsberichte aus dem FB Bauwesen, Heft 55, Universität-GH-Essen.

- [1992] Danieli, N.:
 Identifikation der Materialkonstanten einer neuen Fließbedingung für
 Reibungsmaterialien
 Diplomarbeit Nr. 92/1, Universität-GH-Essen.

- [1992] Bucker, G.:
 Fließbedingung für Reibungsmaterialien
 Diplomarbeit Nr. 92/3, Universität-GH-Essen.

- [1992] Bluhm, J.:
The determination of response parameters of a single surface yield criterion
Bericht 92/2 aus dem Fachgebiet Mechanik, Universität-GH-Essen.
- [1994] Bucker, G. & Bluhm, J.:
ZAMM, 74 (1994), T226-T228.
- [1994] Bluhm, J.:
XU Bingye & YANG Wei
Advances in Engineering plasticity and ist application
International Academic Publishers (1994), 323-328.

9. Anhang

Dieser Abschnitt der vorliegenden Arbeit enthält die wichtigsten Programme und Unterprogramme, die bei den numerischen Berechnungen und der Erstellung der Kurven benötigt wurden.

Alle Programme wurden für MapleV entwickelt.

PROGRAMM: ANFANG

```
with(plots):
with(student):
Digits:=14;

# *****
# Programm zur Berechnung der Spannungskoeffizienten für den 1. Schritt
# Gegeben:   inv1st und tetst
# Gesucht:   S
#           Der Radius rst wird aus der Fließbedingung berechnet
# *****

# Vorgabe der Materialkennwerte
# *****
alp:=0.1;
bet:=0.128;
gam:=0.513;
del:=0.0;
kap:=0.0;
m:=3.0;

# Vorgabe der ersten Invarianten des Spannungstensors
# *****
inv1st:=-0.315;

# Vorgabe von tetst
# *****
# compression:   -30.0Grad   bzw.   -0.523598775 Rad
# simple-shear:  00.0 Grad   bzw.   0.0 Rad
# extension:     30.0 Grad   bzw.   0.523598775 Rad
# *****
tetst:=-30.0*Pi/180;

# Berechnung von rst aus der Fließbedingung
# *****
rst:='rst';
Ft:=evalf(1/sqrt(2)*((rst^2+alp^2*inv1st^2)^(m/2)+\
2/3/sqrt(3)*gam*rst^m*sin(3*tetst))^(1/m)+del*inv1st^2+bet*inv1st-kap);

# Differenzieren der Fließbedingung nach r
# *****
dFtdrst:=diff(Ft,rst);

rst0:=0.1;
rst:=rst0;

for i to 100 do

drst:='drst';
glt:=Ft+dFtdrst*drst;
ergt:=fsolve({glt=0},{drst});
assign(ergt);
rst:=rst0+drst;
rst0:=rst;
```

```

if sqrt(drst^2) > 0.0000000001 then
else
i:=100;
fi;

od;

# Berechnung der Spannungskoeffizienten
# *****
# Bestimmung des Spannungstensors mit Hilfe der bekannten Eingangsgrößen
# tetst und spurs=(inv1st)
# Bei der Berechnung der Spannungskoeffizienten muss der simple-shear Fall
# gesondert behandelt werden weil sich das Gleichungssystem vereinfacht !!!
#
# Gleichungen zur Berechnung der Spannungskoeffizienten
# *****
# 1. Kubische Gleichung
#
# SIMPLE-SHEAR-PUNKT
#  $S_i^D \left[ (S_i^D)^2 - II_{s^D} \right] = 0$ 
#
# SONSTIGER-PUNKT
#  $(S_i^D)^3 - II_{s^D} S_i^D - III_{s^D} = 0$ 

# 2. Quadratische Gleichung
# ...

sd1t:='sd1t';
sd2t:='sd2t';
sd3t:='sd3t';

inv1devst:=0.0;
inv2devst:=1/2*rst^2;
inv3devst:=2/3/sqrt(3)*sin(3*tetst)*sqrt(inv2devst^3);

if tetst = 0.0 then

# Bestimmung der 3 Werte für sd1 durch lösen der kub. Gl. für den simple-shear-Fall
#  $x^3 + p x = 0$  bzw.  $x (x^2 + p) = 0$ 

winv2dev:=sqrt(inv2devst);

sd1t1:=0.0*winv2dev;
sd1t2:=+1.0*winv2dev;
sd1t3:=-1.0*winv2dev;

# Bestimmung der 2 Werte für sd2 die zu einem sd1 korrespondieren
# durch lösen der quadr. Gl. für den simple-shear-Fall
#  $a x^2 + b x + c = 0$  bzw.  $x (x + p) = 0$ 

for ii to 3 do

if sd1t.ii = 0 then
# Sonderfall
sd2ta.ii:= 1.0*winv2dev;
sd2tb.ii:=-1.0*winv2dev;

```

```

else
sd2ta.ii:= 0.0*sd1t.ii;
sd2tb.ii:=-1.0*sd1t.ii;

fi;

sd3ta.ii:=-sd1t.ii-sd2ta.ii;
sd3tb.ii:=-sd1t.ii-sd2tb.ii;

od;

else

# Bestimmung der 3 Werte für sd1 durch lösen der kubischen Gleichung
#  $x^3 + p x + q = 0$ 

lsg:=solve({sd1t^3-inv2devst*sd1t-inv3devst=0.0},{sd1t});

assign(lsg[1]):
sd1t1:=Re(sd1t);

sd1t:='sd1t';
assign(lsg[2]):
sd1t2:=Re(sd1t);

sd1t:='sd1t';
assign(lsg[3]):
sd1t3:=Re(sd1t);

# Bestimmung der zwei Werte für sd2 die zu einem sd1 korrespondieren
# durch lösen der quadratischen Gleichung
#  $a x^2 + b x + c = 0$ 

for ii to 3 do

a:=1.0;
b:=sd1t.ii;
c:=inv3devst/sd1t.ii;

delta:=evalf(b^2-4*a*c);

if delta < -0.00001 then
#if delta < 0.0 then
print('***** Die Diskriminante ist negativ !!! *****');

elif delta = 0 then
print(' Es gibt nur eine reelle Lösung !');
sd2ta.ii:=(-b-sqrt(delta))/2/a;
sd2tb.ii:=(-b+sqrt(delta))/2/a;

elif delta > 0 then
print(' Es gibt zwei reelle Lösungen !');
sd2ta.ii:=(-b-sqrt(delta))/2/a;
sd2tb.ii:=(-b+sqrt(delta))/2/a;

fi;

```

```

sd3ta.ii:=-sd1t.ii-sd2ta.ii;
sd3tb.ii:=-sd1t.ii-sd2tb.ii;

od;

fi;

print(' Ausgabe der Loesungen');

print(sd1t1,sd2ta1,sd3ta1);
print(sd1t1,sd2tb1,sd3tb1);
print(sd1t2,sd2ta2,sd3ta2);
print(sd1t2,sd2tb2,sd3tb2);
print(sd1t3,sd2ta3,sd3ta3);
print(sd1t3,sd2tb3,sd3tb3);

# Berechnung der Spannungskoeffizienten aus den Spannungsdeviatoren
# *****
#  $S = S^D + S^K$ 
#
#  $S^K = \frac{1}{3}(S \cdot I)I = \frac{1}{3}(\text{tr } S)I$ 
# *****
s1t1:=sd1t1+1/3*inv1st;
s2t1:=sd2ta1+1/3*inv1st;
s3t1:=sd3ta1+1/3*inv1st;

s1t2:=sd1t1+1/3*inv1st;
s2t2:=sd2tb1+1/3*inv1st;
s3t2:=sd3tb1+1/3*inv1st;

s1t3:=sd1t2+1/3*inv1st;
s2t3:=sd2ta2+1/3*inv1st;
s3t3:=sd3ta2+1/3*inv1st;

s1t4:=sd1t2+1/3*inv1st;
s2t4:=sd2tb2+1/3*inv1st;
s3t4:=sd3tb2+1/3*inv1st;

s1t5:=sd1t3+1/3*inv1st;
s2t5:=sd2ta3+1/3*inv1st;
s3t5:=sd3ta3+1/3*inv1st;

s1t6:=sd1t3+1/3*inv1st;
s2t6:=sd2tb3+1/3*inv1st;
s3t6:=sd3tb3+1/3*inv1st;

print(' 1. Loesung : ',s1t1,s2t1,s3t1);
print(' 2. Loesung : ',s1t2,s2t2,s3t2);
print(' 3. Loesung : ',s1t3,s2t3,s3t3);
print(' 4. Loesung : ',s1t4,s2t4,s3t4);
print(' 5. Loesung : ',s1t5,s2t5,s3t5);
print(' 6. Loesung : ',s1t6,s2t6,s3t6);

```

PROGRAMM:DARTEST

```
with(plots):
writeto(ergebnis):
```

```
Digits:=14:
```

```
# *****
# *****
# Programm zur Darstellung der Translation der Fließbedingung
# *****
# *****
```

```
read`ausgabe`:
read`lamini`:
read`invar`:
read`tetst`:
read`tetkt`:
read`rst`:
read`rzt`:
read`rkt`:
```

```
# *****
# Vorgabe der Materialkennwerte
# *****
```

```
# Parameter von DE BOER
# *****
```

```
alp:=1.000:
bet:=1.000:
gam:=2.000:
del:=0.100:
kap:=1.000:
m:=4.5:
```

```
# Potenz der Funktion SIN(30)
# *****
tri:=1.0:
if tri=1.0 then
phitres:=0.0:
elif tri=2.0 then
phitres:=-30.0:
fi:
```

```
read`nullst`:
```

```
# *****
# Vorgabe der Darstellungsparameter
# *****
```

```
istep:=24:
```

```
# *****
# * Deviatorebene
# *****
```

```
numpdev:=1000:
incdevh:=3.50:
incdevv:=7.00:
```

```

# *****
# * Hydrostatische-Ebene
# *****
numphydo:=500:
inchydo:=3.00:
numphydu:=500:
inchydu:=2.50:

# Die Farbparameter
# *****
read`farbpara`:

varcl:=1:
varcolor:=1:
varind:=1:

# Vorgabe der Koeffizienten des Spannungs- und Translationstensors und der
# Koeffizienten des plastischen Verzerrungstensors zum Zeitpunkt t=t0
# *****
read`zustand0`:

for ii from 1 by 1 to istep do

xx:=ii;
Farbe:=Farbe.ii;

# *****
# Vorgabe der Spannungszuwächse
# *****
read`zuwachst`:

# Berechnung der Koeffizienten des Spannungstensors für ii-ten Zeitschritt
s1t.ii:=s1t.(ii-1)+s1pt.ii:
s2t.ii:=s2t.(ii-1)+s2pt.ii:
s3t.ii:=s3t.(ii-1)+s3pt.ii:

# Berechnung der Spur des Spannungstensors und der Koeffizienten des Spannungsdeviators
skt.ii:=s1t.ii+s2t.ii+s3t.ii:
sd1t.ii:=s1t.ii-1/3*(s1t.ii+s2t.ii+s3t.ii):
sd2t.ii:=s2t.ii-1/3*(s1t.ii+s2t.ii+s3t.ii):
sd3t.ii:=s3t.ii-1/3*(s1t.ii+s2t.ii+s3t.ii):

# Berechnung der Spur der Koeffizienten des deviatorischen Anteils des Translationstensors
zkt.(ii-1):=z1t.(ii-1)+z2t.(ii-1)+z3t.(ii-1):
zd1t.(ii-1):=z1t.(ii-1)-1/3*(z1t.(ii-1)+z2t.(ii-1)+z3t.(ii-1)):
zd2t.(ii-1):=z2t.(ii-1)-1/3*(z1t.(ii-1)+z2t.(ii-1)+z3t.(ii-1)):
zd3t.(ii-1):=z3t.(ii-1)-1/3*(z1t.(ii-1)+z2t.(ii-1)+z3t.(ii-1)):

# Berechnung der Invarianten des Spannungs- und Translationstensors und der Invarianten der
# Differenz aus Spannungs- und Translationstensor für den Anfangszustand des Inkrements
invar(s1t.ii,s2t.ii,s3t.ii,z1t.(ii-1),z2t.(ii-1),z3t.(ii-1)):

# Berechnung von Theta in der Deviatorebene (Spannungstensor)
tetst(inv2devst.ii,inv3devst.ii):

# Berechnung von Theta in der Deviatorebene (Spannungstensor-Translationstensor)
tetkt(inv2devkt.ii,inv3devkt.ii):

```

```

# Berechnung von rst in der Deviatorebene (Spannungstensor)
rst(inv2devst.ii):

# Berechnung von rzt in der Deviatorebene (Translationstensor)
rzt(inv2devzt.ii):

# Berechnung von rkt in der Deviatorebene (Spannungstensor-Translationstensor)
rkt(inv2devkt.ii):

# Überprüfung der Fließbedingung
# *****
read`fli`:

# Ausgabe
print('*****');
print(' Anfangszustand: Zeitschritt`,ii):
print('*****');
aus(ii-1):

# *****
# Koeffizienten des Zuwaches der plastischen Verzerrungen (Fließregel)
# *****

# *****
# Assoziierte Fließregel
# *****
read`flieta`:
#eta.ii:=-2.9*0.1*inv1st.ii-11.8*0.1*sqrt(inv2devst.ii):
#eta.ii:=1.00:
print(' eta =`,eta.ii);
print(' tetk=`,evalf(tetk*180/Pi));

#etaq.ii:=0.0075*ii^2-0.065*ii:
etaq.ii:=0.00:
print(' etaq=`,etaq.ii);

sd1:=sd1t.(ii-1):
sd2:=sd2t.(ii-1):
sd3:=sd3t.(ii-1):
zd1:=zd1t.(ii-1):
zd2:=zd2t.(ii-1):
zd3:=zd3t.(ii-1):

# *****
#  $\text{tr } S_k = \text{tr}(s - z) = [(s - z) \cdot I]_1$ 
# *****
spurk:=s1t.(ii-1)+s2t.(ii-1)+s3t.(ii-1)-z1t.(ii-1)-z2t.(ii-1)-z3t.(ii-1):
spurkk:=(sd1-zd1)^2+(sd2-zd2)^2+(sd3-zd3)^2:

ep1pt.ii:=lamp.ii*(sd1-zd1+eta.ii*1+etaq.ii*((sd1-zd1)^2-1/3*spurkk*1)):
ep2pt.ii:=lamp.ii*(sd2-zd2+eta.ii*1+etaq.ii*((sd2-zd2)^2-1/3*spurkk*1)):
ep3pt.ii:=lamp.ii*(sd3-zd3+eta.ii*1+etaq.ii*((sd3-zd3)^2-1/3*spurkk*1)):

```

```

epd1pt.ii:=ep1pt.ii-1/3*(ep1pt.ii+ep2pt.ii+ep3pt.ii):
epd2pt.ii:=ep2pt.ii-1/3*(ep1pt.ii+ep2pt.ii+ep3pt.ii):
epd3pt.ii:=ep3pt.ii-1/3*(ep1pt.ii+ep2pt.ii+ep3pt.ii):

# Koeffizienten des plastischen Verzerrungstensors
ep1t.ii:=ep1t.(ii-1)+ep1pt.ii:
ep2t.ii:=ep2t.(ii-1)+ep2pt.ii:
ep3t.ii:=ep3t.(ii-1)+ep3pt.ii:

# Koeffizienten des Zuwaches des Translationstensors
read`zuwtran`:

# Koeffizienten des Translationstensors
z1t.ii:=z1t.(ii-1)+z1pt.ii:
z2t.ii:=z2t.(ii-1)+z2pt.ii:
z3t.ii:=z3t.(ii-1)+z3pt.ii:

# Koeffizienten des deviatorischen Anteils des Translationstensors
zd1t.ii:=z1t.ii-1/3*(z1t.ii+z2t.ii+z3t.ii):
zd2t.ii:=z2t.ii-1/3*(z1t.ii+z2t.ii+z3t.ii):
zd3t.ii:=z3t.ii-1/3*(z1t.ii+z2t.ii+z3t.ii):

# Berechnung von lamp aus der Fließbedingung
print('***vor loes*****');
read`loes`;
print('+++nach loes+++++++');

# Berechnung der Invarianten des Spannungs- und Translationstensors und der
# Invarianten der Differenz aus Spannungs- und Translationstensor
invar(s1t.ii,s2t.ii,s3t.ii,z1t.ii,z2t.ii,z3t.ii):

# Berechnung von Theta in der Deviatorebene (Spannungstensor)
tetst(inv2devst.ii,inv3devst.ii):

# Berechnung von Theta in der Deviatorebene (Spannungstensor-Translationstensor)
tetkt(inv2devkt.ii,inv3devkt.ii):

# Berechnung von rst in der Deviatorebene (Spannungstensor)
rst(inv2devst.ii):

# Berechnung von rzt in der Deviatorebene (Translationstensor)
rzt(inv2devzt.ii):

# Berechnung von rkt in der Deviatorebene (Spannungstensor-Translationstensor)
rkt(inv2devkt.ii):

# Überprüfung der Fließbedingung
# *****
read`fli`:

# Ausgabe
print('*****');
print(' Endzustand: Zeitschritt `ii):
print('*****');
aus(ii):

```

```
read`dargraph`:
```

```
od:
```

```
close(ergebnis):
```

```
read`darplot`:
```

```
# Darstellung der Sektionskurven in der Deviatorebene und in der hydrostatischen Ebene  
# *****  
read`darstell`:
```

PROGRAMM:DISKUS

```
# *****
# Programm zur Darstellung der Translation der Fließbedingung.
# Diese Version überlagert mehrere Bilder übereinander.
# *****
# Stand: 20. Oktober 1994
# *****
```

```
Digits:=14;
with(plots):
writeto(ergebnis):
```

```
read'ausgabe':
read'lamini':
read'invar':
read'tetst':
read'tetkt':
read'rst':
read'rzf':
read'rkt':
```

```
# Anzahl der Kurven
# *****
xxstep:=3:
```

```
# *****
# Vorgabe der Materialkennwerte
# *****
```

```
# Kurve 1          Blau
# *****
Farbe1:=COLOR(RGB,0,0,1):
alp1:=1.0:
bet1:=1.0:
gam1:=0.0:
del1:=0.1:
kap1:=1.0:
m1:=3.0:
```

```
# Kurve 2          Grün
# *****
Farbe2:=COLOR(RGB,0,1,0):
alp2:=1.0:
bet2:=1.0:
gam2:=0.5:
del2:=0.1:
kap2:=1.0:
m2:=3.0:
```

```
# Kurve 3          Rot
# *****
Farbe3:=COLOR(RGB,1,0,0):
alp3:=1.0:
bet3:=1.0:
gam3:=1.0:
del3:=0.1:
kap3:=1.0:
m3:=3.0:
```

```

# Kurve 4          Blau
# *****
Farbe4:=COLOR(RED,0,0,1):
alp4:=1.0:
bet4:=1.0:
gam4:=1.5:
del4:=0.1:
kap4:=1.0:
m4:=3.0:

for xx from 1 to xxstep do

print('Materialparameter');

# *****
# Vorgabe der Materialkennwerte
# *****
print('*****');
print('Kurve `xx`');
print('*****');

Farbe:=Farbe.xx;
alp:=alp.xx;
bet:=bet.xx;
gam:=gam.xx;
del:=del.xx;
kap:=kap.xx;
m:=m.xx;

# Potenz der Funktion sin(30) und drehen um 30 Grad (Tresca)
# *****
tri:=2.0;

if tri=1.0 then
phitres:=0.0;
elif tri=2.0 then
phitres:=-30.0;
fi;

# Nullstellen der hydrostatischen-Achse
# *****
read `nullst`;

# *****
# Vorgabe der Darstellungsparameter
# *****
istep:=1:

# *****
# Deviatorebene
# *****
numpdev:=3000;
incdevh:=2.5;
incdevv:=2.5;

```

```

# *****
# Hydrostatische-Ebene
# *****
numphydo:=1000;
inchydo:=4.5;
numphydu:=1000;
inchydu:=3.5;

varcl:=1;
varcolor:=1;
varind:=1;

# Vorgabe Koeffizienten des Spannungs- und Translationstensors und der
# Koeffizienten des plastischen Verzerrungstensors zum Zeitpunkt t=t0
# *****

s1t0:=0.0;
s2t0:=0.0;
s3t0:=0.0;

z1t0:=0.0;
z2t0:=0.0;
z3t0:=0.0;

skt0:=0;
zkt0:=0;

sd1t0:=0;
sd2t0:=0;
sd3t0:=0;

zd1t0:=0;
zd2t0:=0;
zd3t0:=0;

ep1t0:=0.0;
ep2t0:=0.0;
ep3t0:=0.0;

rst0:=0;
rzt0:=0;
rkt0:=0;

tetst0:=0;
tetz0:=0;
tetkt0:=0;

x1s0:=0;
x2s0:=0;

x1z0:=0;
x2z0:=0;

x1k0:=0;
x2k0:=0;

x1shyd0:=0;
x2shyd0:=0;

x1zhyd0:=0;
x2zhyd0:=0;

```

```

for ii from 1 by 1 to istep do

# Vorgabe der Spannungszuwächse
# *****
if ii=1 then
s1pt1:=-1.0;
s2pt1:=+0.5;
s3pt1:=+0.5;
fi;

# Berechnung der Koeffizienten des Spannungstensors für ii-ten Zeitschritt
# *****
s1t.ii:=s1t.(ii-1)+s1pt.ii;
s2t.ii:=s2t.(ii-1)+s2pt.ii;
s3t.ii:=s3t.(ii-1)+s3pt.ii;

# Berechnung der Spur des Spannungstensors und der Koeffizienten des Spannungsdeviators
# *****
skt.ii:=s1t.ii+s2t.ii+s3t.ii;
sd1t.ii:=s1t.ii-1/3*(s1t.ii+s2t.ii+s3t.ii);
sd2t.ii:=s2t.ii-1/3*(s1t.ii+s2t.ii+s3t.ii);
sd3t.ii:=s3t.ii-1/3*(s1t.ii+s2t.ii+s3t.ii);

# Berechnung der Spur der Koeffizienten des deviatorischen Anteils des Translationstensors
# *****
zkt.(ii-1):=z1t.(ii-1)+z2t.(ii-1)+z3t.(ii-1);
zd1t.(ii-1):=z1t.(ii-1)-1/3*(z1t.(ii-1)+z2t.(ii-1)+z3t.(ii-1));
zd2t.(ii-1):=z2t.(ii-1)-1/3*(z1t.(ii-1)+z2t.(ii-1)+z3t.(ii-1));
zd3t.(ii-1):=z3t.(ii-1)-1/3*(z1t.(ii-1)+z2t.(ii-1)+z3t.(ii-1));

# Berechnung der Invarianten des Spannungs- und Translationstensors und der Invarianten
# Differenz aus Spannungs- und Translationstensor für den Anfangszustand des Inkrements
# *****
invar(s1t.ii,s2t.ii,s3t.ii,z1t.(ii-1),z2t.(ii-1),z3t.(ii-1));

# Berechnung von Theta in der Deviatorebene (Spannungstensor)
# *****
tetst(inv2devst.ii,inv3devst.ii);

# Berechnung von Theta in der Deviatorebene (Spannungstensor-Translationstensor)
# *****
tetkt(inv2devkt.ii,inv3devkt.ii);

# Berechnung von rst in der Deviatorebene (Spannungstensor)
# *****
rst(inv2devst.ii);

# Berechnung von rzt in der Deviatorebene (Translationstensor)
# *****
rzt(inv2devzt.ii);

# Berechnung von rkt in der Deviatorebene (Spannungstensor-Tranlationstensor)
# *****
rkt(inv2devkt.ii);

# Überprüfung der Fließbedingung
# *****
read'fli':

```

```

# Ausgabe
print('*****');
print(' Anfangszustand: Zeitschritt',ii);
print('*****');
aus(ii-1);

# Koeffizienten des Zuwaches der plastischen Verzerrungen (Fließregel)
# *****
#read'flieta':
eta.ii:=-2.9*0.1*inv1st.ii-11.8*0.1*sqrt(inv2devst.ii);
#etaq.ii:=0.0330*ii^2-0.190*ii;
print(' eta =' ,eta.ii);

etaq.ii:=0.0;

sd1:=sd1t.(ii-1);
sd2:=sd2t.(ii-1);
sd3:=sd3t.(ii-1);
zd1:=zd1t.(ii-1);
zd2:=zd2t.(ii-1);
zd3:=zd3t.(ii-1);

# *****
#tr  $s_k = tr(s - z) = [(s - z) \cdot I] I$ 
# *****
spurk:=s1t.(ii-1)+s2t.(ii-1)+s3t.(ii-1)-z1t.(ii-1)-z2t.(ii-1)-z3t.(ii-1);
spurkk:=(sd1-zd1)^2+(sd2-zd2)^2+(sd3-zd3)^2;

ep1pt.ii:=lamp.ii*(sd1-zd1+eta.ii*spurk*1+etaq.ii*((sd1-zd1)^2-1/3*spurkk*1));
ep2pt.ii:=lamp.ii*(sd2-zd2+eta.ii*spurk*1+etaq.ii*((sd2-zd2)^2-1/3*spurkk*1));
ep3pt.ii:=lamp.ii*(sd3-zd3+eta.ii*spurk*1+etaq.ii*((sd3-zd3)^2-1/3*spurkk*1));

epd1pt.ii:=ep1pt.ii-1/3*(ep1pt.ii+ep2pt.ii+ep3pt.ii);
epd2pt.ii:=ep2pt.ii-1/3*(ep1pt.ii+ep2pt.ii+ep3pt.ii);
epd3pt.ii:=ep3pt.ii-1/3*(ep1pt.ii+ep2pt.ii+ep3pt.ii);

# Koeffizienten des plastischen Verzerrungstensors
# *****
ep1t.ii:=ep1t.(ii-1)+ep1pt.ii;
ep2t.ii:=ep2t.(ii-1)+ep2pt.ii;
ep3t.ii:=ep3t.(ii-1)+ep3pt.ii;

# Koeffizienten des Zuwaches des Translationstensors
# *****
read'zuwtran':

# Koeffizienten des Translationstensors
# *****
z1t.ii:=z1t.(ii-1)+z1pt.ii;
z2t.ii:=z2t.(ii-1)+z2pt.ii;
z3t.ii:=z3t.(ii-1)+z3pt.ii;

# Koeffizienten des deviatorischen Anteils des Translationstensors
# *****
zd1t.ii:=z1t.ii-1/3*(z1t.ii+z2t.ii+z3t.ii);
zd2t.ii:=z2t.ii-1/3*(z1t.ii+z2t.ii+z3t.ii);
zd3t.ii:=z3t.ii-1/3*(z1t.ii+z2t.ii+z3t.ii);

```

```

# Berechnung von lamp aus der Fließbedingung
# *****
print('***vor loes*****');
#read`loes`;
print('+++nach loes+++++++');

# Berechnung der Invarianten des Spannungs- und Translationstensors und der
# Invarianten der Differenz aus Spannungs- und Translationstensor
# *****
invar(s1t.ii,s2t.ii,s3t.ii,z1t.ii,z2t.ii,z3t.ii):

# Berechnung von Theta in der Deviatorebene (Spannungstensor)
# *****
tetst(inv2devst.ii,inv3devst.ii):

# Berechnung von theta in der Deviatorebene (Spannungstensor-Translationstensor)
# *****
tetkt(inv2devkt.ii,inv3devkt.ii):

# Berechnung von rst in der Deviatorebene (Spannungstensor)
# *****
rst(inv2devst.ii):

# Berechnung von rzt in der Deviatorebene (Translationstensor)
# *****
rzt(inv2devzt.ii):

# Berechnung von rkt in der Deviatorebene (Spannungstensor-Tranlationstensor)
# *****
rkt(inv2devkt.ii):

# Überprüfung der Fließbedingung
# *****
read`fli`:

# Ausgabe
print('*****');
print(' Endzustand: Zeitschritt `ii):
print('*****');
aus(ii):

read`dargraph`:

od:

close(ergebnis):

read`darplot`:

od:

read`disbild`:

```

PROGRAMM: KONVEX

```
# *****
# Konvexitätsbedingung der Deviatorschnittkurven
# *****
# Stellt K bzw K' über  $\theta$  dar
# 11. Dezember 1994
# *****

Digits:=14:
with(plots):
writeto(ergeb):

# Vorgabe der Parameter
# *****
tet:='tet':
kap:=1.0:
m:=3.0:

gam1:=sqrt(27)/4:
#gam2:=2.0830952244:
#gam3:=2.14808235701:

# Anzahl der Kurven
# *****
iistep:=1:

tetgl:=-Pi/3:
tetgr:=Pi/1:

kgl:=-Pi/2:
kgr:=Pi/1:

# *****

for ii from 1 to iistep do

print(' ii=',ii):
gam:=gam.ii:

# Der Radius r
# *****
r:=kap*sqrt(2)*(1+2/3/sqrt(3)*gam*sin(3*tet))^(1/m):

# Ableitungen
# *****
r1:=diff(r,tet):
r2:=diff(r,tet$2):

# Konvexitätsnachweis
# *****
k:=(r^2+2*r1^2-r*r2)/(r^2+r1^2)^1.5:
tetk:=fsolve({k=0},{tet}):
assign(tetk):
tetk:=tet:
print(' tet = ± ',evalf(120*Pi/180),` + ` ,evalf(tetk));
print(' tet = ± 120 + ` ,evalf(tetk*180/Pi));
tet:='tet':
```

```

# Extremwerte der Krümmung - 1. Ableitung von K
# *****
k1:=diff(k,tet);
tetk1:=fsolve({k1=0},{tet});
assign(tetk1);
tetk1:=tet;
print('tet = ± ',evalf(120*Pi/180),' + ',evalf(tetk1));
print('tet = ± 120 + ',evalf(tetk1*180/Pi));
tet:='tet';

# Extremwerte der Krümmung - 2. Ableitung von K
# *****
k2:=diff(k,tet$2);
tetk2:=fsolve({k2=0},{tet});
assign(tetk2);
tetk2:=tet;
print('tet = ± ',evalf(120*Pi/180),' + ',evalf(tetk2));
print('tet = ± 120 + ',evalf(tetk2*180/Pi));
tet:='tet';

# Darstellung von K
# *****
gr.ii:=plot(k,tet=tetgl..tetgr);
k1g.ii:=plot(k1,tet=kgl..kgr);
k2g.ii:=plot(k2,tet=kgl..kgr);

od;

# *****

# g:      stellt alles im Überblick dar
#
# k1:     stellt die 1. Ableitung der Krümmungsfunktion dar,
#          um die Extremstellen-Orte zu erkennen
#
# k2:     stellt die 2. Ableitung der Krümmungsfunktion dar,
#          um die Extremstellen-Orte zu erkennen

if iistep=1 then
kg:=plot({gr1});
k1g:=plot({k1g1});
k2g:=plot({k2g1});
alles:=plot({gr1,k1g1,k2g1});

elif iistep=2 then
kg:=plot({gr1,gr2});
k1g:=plot({k1g1,k1g2});
k2g:=plot({k2g1,k2g2});
alles:=plot({gr1,gr2,k1g1,k1g2,k2g1,k2g2});

elif iistep=3 then
kg:=plot({gr1,gr2,gr3});
k1g:=plot({k1g1,k1g2,k1g3});
k2g:=plot({k2g1,k2g2,k2g3});
alles:=plot({gr1,gr2,gr3,k1g1,k1g2,k1g3,k2g1,k2g2,k2g3});

```

```

elif iistep=4 then
kg:=plot({gr1,gr2,gr3,gr4}):
k1g:=plot({k1g1,k1g2,k1g3,k1g4}):
k2g:=plot({k2g1,k2g2,k2g3,k2g4}):
alles:=plot({gr1,gr2,gr3,gr4,k1g1,k1g2,k1g3,k1g4,k2g1,k2g2,k2g3,k2g4}):

elif iistep=5 then
kg:=plot({gr1,gr2,gr3,gr4,gr5}):
k1g:=plot({k1g1,k1g2,k1g3,k1g4,k1g5}):
k2g:=plot({k2g1,k2g2,k2g3,k2g4,k2g5}):
alles:=plot({gr1,gr2,gr3,gr4,gr5,k1g1,k1g2,k1g3,k1g4,k1g5,k2g1,k2g2,k2g3,k2g4,k2g5}):

fi;

close(ergeb):

```

PROGRAMM: KONVEX1

```
# *****
# Konvexitätsbedingung der Deviatorschnittkurven
# *****
# Hierbei wird versucht die maßgebliche Stelle  $\theta$  zu finden,
# wobei grenz  $\gamma$  noch zu bestimmen ist.

# Untersucht wird die Funktion für  $K \geq 0$ 
#
# Stand: 13. Dezember 1994
# *****

Digits:=14:
with(plots):
writeto(ergeb):

# Anzahl der Kurven
# *****
kurven:=4:

# Vorgabe der Parameter
# *****
tet:='tet':
gam:='gam':
kap:=1.0:

m1:=3.0:
m2:=4.0:
m3:=4.5:
m4:=5.0:
m5:=6.0:
m6:=7.0:
m7:=8.0:

wertk1:=0.0:
wertk2:=0.0:
wertk3:=0.0:
wertk4:=0.0:
wertk5:=0.0:
wertk6:=0.0:
wertk7:=0.0:

Farbe1:=COLOR(RGB,0,0,1):
Farbe2:=COLOR(RGB,0,1,0):
Farbe3:=COLOR(RGB,1,0,0):
Farbe4:=COLOR(RGB,1,0,1):
Farbe5:=COLOR(RGB,1,1,0):
Farbe6:=COLOR(RGB,0,1,1):
Farbe7:=COLOR(RGB,0,0,1):

punkteg:=5000:
punktek:=10:

gamgo:=+4.0:
gamgu:=+1.0:
gamko:=2.65:
gamku:=2.55:
```

```

tetgl:=-1.0*60*Pi/180:
tetgr:=1.0*120*Pi/180:
tetkl:=-Pi/3:
tetkr:=Pi/6*0.0:

# *****

for ii from 1 to kurven do

print(' Kurve Nr. ',ii);

Farbe:=Farbe.ii:
wertk:=wertk.ii:
m:=m.ii:

# Der Radius r
# *****
r:=kap*sqrt(2)*(1+2/3/sqrt(3)*gam*sin(3*tet))^(1/m):

# Ableitungen
# *****
r1:=diff(r,tet):
r2:=diff(r,tet$2):

# Konvexitätsnachweis
# *****
# k:=(r^2+2*r1^2-r*r2)/(r^2+r1^2)^1.5:
k:=r^2+2*r1^2-r*r2:

# Lösen von K
# *****
#print(' Berechnung von Theta');
#lsgtet:=fsolve(k=0,tet):
#print(' tet=' ,evalf(lsgtet));

# Ergebnisse
# *****
#print(' r=' ,evalf(r));
#print(' r1=' ,evalf(r1));
#print(' r2=' ,evalf(r2));
#print(' k=' ,evalf(k));

# Darstellung von K
# *****
graphg.ii:=implicitplot(k=wertk,tet=tetgl..tetgr,gam=gamgu..gamgo,\
    scaling=CONSTRAINED,numpoints=punkteg,color=Farbe):
graphk.ii:=implicitplot(k=wertk,tet=tetkl..tetkr,gam=gamku..gamko,\
    scaling=CONSTRAINED,numpoints=punkteg,color=Farbe):

print(' Ende Kurve ',ii):

od:

# *****

```

```

# *****
# *****
# Graphische Darstellung
# *****
# *****

if kurven=1 then
print(`if = 1`):
bildg:=plot({graphg1}):
bildk:=plot({graphk1}):

elif kurven=2 then
print(`if = 2`):
bildg:=plot({graphg1,graphg2}):
bildk:=plot({graphk1,graphk2}):

elif kurven=3 then
print(`if = 3`):
bildg:=plot({graphg1,graphg2,graphg3}):
bildk:=plot({graphk1,graphk2,graphk3}):

elif kurven=4 then
print(`if = 4`):
bildg:=plot({graphg1,graphg2,graphg3,\
graphg4}):
bildk:=plot({graphk1,graphk2,graphk3,\
graphk4}):

elif kurven=5 then
print(`if = 5`):
bildg:=plot({graphg1,graphg2,graphg3,\
graphg4,graphg5}):
bildk:=plot({graphk1,graphk2,graphk3,\
graphk4,graphk5}):

elif kurven=6 then
print(`if = 6`):
bildg:=plot({graphg1,graphg2,graphg3,\
graphg4,graphg5,graphg6}):
bildk:=plot({graphk1,graphk2,graphk3,\
graphk4,graphk5,graphk6}):

elif kurven=7 then
print(`if = 7`):
bildg:=plot({graphg1,graphg2,graphg3,\
graphg4,graphg5,graphg6,\
graphg7}):
bildk:=plot({graphk1,graphk2,graphk3,\
graphk4,graphk5,graphk6,\
graphk7}):

fi:

close(ergeb):

```

DIE RESTLICHEN UNTERPROGRAMME

PROGRAMM: LAMINI

```
lamp1:='lamp1':  
lamp2:='lamp2':  
lamp3:='lamp3':  
lamp4:='lamp4':  
lamp5:='lamp5':  
lamp6:='lamp6':  
lamp7:='lamp7':  
lamp8:='lamp8':  
lamp9:='lamp9':  
lamp10:='lamp10':  
lamp11:='lamp11':  
lamp12:='lamp12':  
lamp13:='lamp13':  
lamp14:='lamp14':  
lamp15:='lamp15':  
lamp16:='lamp16':  
lamp17:='lamp17':  
lamp18:='lamp18':  
lamp19:='lamp19':  
lamp20:='lamp20':  
lamp21:='lamp21':  
lamp22:='lamp22':  
lamp23:='lamp23':  
lamp24:='lamp24':  
lamp25:='lamp25':  
lamp26:='lamp26':  
lamp27:='lamp27':  
lamp28:='lamp28':  
lamp29:='lamp29':  
lamp30:='lamp30':  
lamp31:='lamp31':  
lamp32:='lamp32':  
lamp33:='lamp33':  
lamp34:='lamp34':  
lamp35:='lamp35':  
lamp36:='lamp36':  
lamp37:='lamp37':  
lamp38:='lamp38':  
lamp39:='lamp39':  
lamp40:='lamp40':  
lamp41:='lamp41':  
lamp42:='lamp42':  
lamp43:='lamp43':  
lamp44:='lamp44':  
lamp45:='lamp45':  
lamp46:='lamp46':  
lamp47:='lamp47':  
lamp48:='lamp48':  
lamp49:='lamp49':  
lamp50:='lamp50':  
lamp51:='lamp51':  
lamp52:='lamp52':  
lamp53:='lamp53':  
lamp54:='lamp54':  
lamp55:='lamp55':
```

lamp56:='lamp56':
lamp57:='lamp57':
lamp58:='lamp58':
lamp59:='lamp59':
lamp60:='lamp60':
lamp61:='lamp61':
lamp62:='lamp62':
lamp63:='lamp63':
lamp64:='lamp64':
lamp65:='lamp65':
lamp66:='lamp66':
lamp67:='lamp67':
lamp68:='lamp68':
lamp69:='lamp69':
lamp70:='lamp70':
lamp71:='lamp71':
lamp72:='lamp72':
lamp73:='lamp73':
lamp74:='lamp74':
lamp75:='lamp75':
lamp76:='lamp76':
lamp77:='lamp77':
lamp78:='lamp78':
lamp79:='lamp79':
lamp80:='lamp80':
lamp81:='lamp81':
lamp82:='lamp82':
lamp83:='lamp83':
lamp84:='lamp84':
lamp85:='lamp85':
lamp86:='lamp86':
lamp87:='lamp87':
lamp88:='lamp88':
lamp89:='lamp89':
lamp90:='lamp90':
lamp91:='lamp91':
lamp92:='lamp92':
lamp93:='lamp93':
lamp94:='lamp94':
lamp95:='lamp95':
lamp96:='lamp96':
lamp97:='lamp97':
lamp98:='lamp98':
lamp99:='lamp99':
lamp100:='lamp100':

end:

PROGRAMM: INVAR

```
invar:=proc(s1,s2,s3,z1,z2,z3)

spurs:=s1+s2+s3:
sd1:=s1-1/3*spurs:
sd2:=s2-1/3*spurs:
sd3:=s3-1/3*spurs:

spurz:=z1+z2+z3:
zd1:=z1-1/3*spurz:
zd2:=z2-1/3*spurz:
zd3:=z3-1/3*spurz:

inv1st.ii:=s1+s2+s3:
inv2devst.ii:=1/2*(sd1^2+sd2^2+sd3^2):
inv3devst.ii:=sd1*sd2*sd3:

inv1zt.ii:=z1+z2+z3:
inv2devzt.ii:=1/2*(zd1^2+zd2^2+zd3^2):
inv3devzt.ii:=zd1*zd2*zd3:

inv1kt.ii:=(s1-z1)+(s2-z2)+(s3-z3):
inv2devkt.ii:=1/2*((sd1-zd1)^2+(sd2-zd2)^2+(sd3-zd3)^2):
inv3devkt.ii:=(sd1-zd1)*(sd2-zd2)*(sd3-zd3):

end:
```

PROGRAMM: TETST

```
tetst:=proc(inv2devst,inv3devst)

if abs(inv2devst) < 0.000001 then
tetst.ii:=-30.0*Pi/180:
else
tetst.ii:=Re(1/3*arcsin(sqrt(27)/2*inv3devst/sqrt(inv2devst^3))):
fi:

end:
```

PROGRAMM: TETKT

```
tetkt:=proc(inv2devkt,inv3devkt):

if abs(inv2devkt) < 0.000001 then
tetkt.ii:=-30.0*Pi/180:
else
tetkt.ii:=Re(1/3*arcsin(sqrt(27)/2*inv3devkt/sqrt(inv2devkt^3))):
fi:

end:
```

PROGRAMM: RST

```
rst:=proc(inv2devst)
rst.ii:=sqrt(2*inv2devst):
```

```
end:
```

PROGRAMM: RZT

```
rzt:=proc(inv2devzt)
rzt.ii:=sqrt(2*inv2devzt):
```

```
end:
```

PROGRAMM: RKT

```
rkt:=proc(inv2devkt)
rkt.ii:=sqrt(2*inv2devkt):
```

```
end:
```

PROGRAMM: NULLST

```
# Nullstellen
# *****
I02.ii:=-2.0;
I03.ii:=+1.0;
```

```
print(evalf(I02.ii));
print(evalf(I03.ii));
```

```
end:
```

PROGRAMM: FARBPARA

```
# Die Farbparameter
# *****
Farbe1:=COLOR(RGB,0,0,1);
Farbe2:=COLOR(RGB,0,1,0);
Farbe3:=COLOR(RGB,1,0,0);
Farbe4:=COLOR(RGB,1,1,1);
Farbe5:=COLOR(RGB,0,0,1);
Farbe6:=COLOR(RGB,0,1,0);
Farbe7:=COLOR(RGB,1,0,0);
Farbe8:=COLOR(RGB,1,1,1);
Farbe9:=COLOR(RGB,0,0,1);
Farbe10:=COLOR(RGB,0,1,0);
Farbe11:=COLOR(RGB,1,0,0);
Farbe12:=COLOR(RGB,1,1,1);
Farbe13:=COLOR(RGB,0,0,1);
Farbe14:=COLOR(RGB,0,1,0);
```

```
end:
```

PROGRAMM:ZUSTAND0

```
# *****
# Vorgabe der Koeffizienten des Spannungs- und Translationstensors und
# der Koeffizienten des plastischen Verzerrungstensors zum Zeitpunkt  $t=t_0$ 
# *****

s1t0:=0.0:
s2t0:=0.0:
s3t0:=0.0:

z1t0:=0.0:
z2t0:=0.0:
z3t0:=0.0:

skt0:=0:
zkt0:=0:

sd1t0:=0:
sd2t0:=0:
sd3t0:=0:

zd1t0:=0:
zd2t0:=0:
zd3t0:=0:

ep1t0:=0.0:
ep2t0:=0.0:
ep3t0:=0.0:

rst0:=0:
rzt0:=0:
rkt0:=0:

tetst0:=0:
tetzt0:=0:
tetkt0:=0:

x1s0:=0:
x2s0:=0:

x1z0:=0:
x2z0:=0:

x1k0:=0:
x2k0:=0:

x1shyd0:=0:
x2shyd0:=0:

x1zhyd0:=0:
x2zhyd0:=0:

end:
```

PROGRAMM:ZUWACHST

```
# *****
# Vorgabe der Spannungszuwächse
# *****

# *****
# * Nur Hydrostatisch
# *****

# Belastung (hydrostatisch)
# *****
if ii=1 then
s1pt.ii:=+0.00+(-1.60):
s2pt.ii:=+0.00+(-1.60):
s3pt.ii:=+0.00+(-1.60):
fi:

# Belastung (hydrostatisch)
# *****
if ii=2 then
s1pt.ii:=+0.00+(-1.60):
s2pt.ii:=+0.00+(-1.60):
s3pt.ii:=+0.00+(-1.60):
fi:

# *****
# * Nur Deviatorisch
# *****

# Belastung (Kompression)
# *****
if ii>2 and ii<21 then
s1pt.ii:=+0.20+(-0.00):
s2pt.ii:=+0.20+(-0.00):
s3pt.ii:=-0.40+(-0.00):
WINK:=-30.00:
fi:

# Entlastung (Extension)
# *****
if ii=21 then
s1pt.ii:=-1.00+(-0.00):
s2pt.ii:=-1.00+(-0.00):
s3pt.ii:=+2.00+(-0.00):
WINK:=+30.00:
fi:

# Entlastung (Extension)
# *****
if ii>21 and ii<36 then
s1pt.ii:=-0.20+(-0.00):
s2pt.ii:=-0.20+(-0.00):
s3pt.ii:=+0.40+(-0.00):
WINK:=+30.00:
fi:

end:
```

PROGRAMM: FLI

```

rkt.ii:=sqrt(2*inv2devkt.ii):

# *****
# Bei der Berechnung von Theta kann es numerische Probleme geben.
# Deshalb muß der Fall, daß die 2. Invariante Null ist abgefangen werden.
# *****

#  $\theta = \frac{1}{3} \text{Arc sin} \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{\text{III}_k^D}{\sqrt{(\text{II}_k^D)^3}} \right)$ 

# *****

if abs(inv2devkt.ii) < 0.000001 then
print('2. Invariante ist NULL !!!');
print('Theta = -30 Grad');
tetkt.ii:=-30.0*Pi/180;
else
tetkt.ii:=Re(1/3*arcsin(3*sqrt(3)/2*inv3devkt.ii/sqrt(inv2devkt.ii^3)));
fi:

Ft.ii:=1/sqrt(2)*((rkt.ii^2+alp^2*inv1kt.ii^2)^(m/2)+\
2/3/sqrt(3)*gam*rkt.ii^m*sin(3*tetkt.ii))^(1/m)+del*inv1kt.ii^2+bet*inv1kt.ii-kap:

end:

```

PROGRAMM: FLIETA

```

c:=1.0:

# Berechnung der Ableitungen für eta
# *****
inv1k:='inv1k':
inv2devk:='inv2devk':
rk:=sqrt(2*inv2devk):
tetk:=WINK*Pi/180:

F:=1/sqrt(2)*((rk^2+alp^2*inv1k^2)^(m/2)+\
2/3/sqrt(3)*gam*rk^m*(sin(3*tetk))^tri)^(1/m)+del*inv1k^2+bet*inv1k-kap:

dF1eta:=diff(F,inv1k):
dF2eta:=diff(F,inv2devk):
inv1k:=inv1kt.ii:
inv2devk:=inv2devkt.ii:

eta.ii:=evalf(c*dF1eta/dF2eta):

end:

```

PROGRAMM:ZUWTRAN

```
# *****
# Berechnung des Zuwachses des Translationstensors
# *****
#  $\dot{Z} = \alpha \dot{E}_p^D + \beta (\dot{E}_p^k \cdot I) I$ 
#
# mit  $\beta = 0$   $\dot{Z}^D = \alpha \dot{E}_p^D$ 
#  $\dot{Z}^D = \alpha \dot{E}_p - \alpha \frac{1}{3} (\dot{E}_p \cdot I) I$ 
# *****

#c1:=varc1:
#spureppt.ii:=ep1pt.ii+ep2pt.ii+ep3pt.ii:
#
#z1pt.ii:=c1*ep1pt.ii-c1*1.0/3.0*spureppt.ii*1:
#z2pt.ii:=c1*ep2pt.ii-c1*1.0/3.0*spureppt.ii*1:
#z3pt.ii:=c1*ep3pt.ii-c1*1.0/3.0*spureppt.ii*1:

# Alte Gleichungen
# *****
c1:=varc1:
c2:=0.:
c2q:=c2-1/3.*c1:
c2qp:=0.:
c1p:=0.0:
c2qp:=0.:

spureppt.ii:=ep1pt.ii+ep2pt.ii+ep3pt.ii:
spurzt.(ii-1):=z1t.(ii-1)+z2t.(ii-1)+z3t.(ii-1):

z1pt.ii:=c1*ep1pt.ii+c2q*spureppt.ii+c1p/c1*z1t.(ii-1)+(c1*c2qp-c1p*c2q)/c1/(c1+3*c2q)*spurzt.(ii-1):
z2pt.ii:=c1*ep2pt.ii+c2q*spureppt.ii+c1p/c1*z2t.(ii-1)+(c1*c2qp-c1p*c2q)/c1/(c1+3*c2q)*spurzt.(ii-1):
z3pt.ii:=c1*ep3pt.ii+c2q*spureppt.ii+c1p/c1*z3t.(ii-1)+(c1*c2qp-c1p*c2q)/c1/(c1+3*c2q)*spurzt.(ii-1):

end:
```

PROGRAMM: LOES

```
if evalf(Ft.ii) > 0.0 then

# Berechnung von lamp aus der Fließbedingung
# *****

inv1kt.ii:=(s1t.ii-z1t.ii)+(s2t.ii-z2t.ii)+(s3t.ii-z3t.ii);
inv2devkt.ii:=expand(1/2*((sd1t.ii-zd1t.ii)^2+(sd2t.ii-zd2t.ii)^2+(sd3t.ii-zd3t.ii)^2));
inv3devkt.ii:=(sd1t.ii-zd1t.ii)*(sd2t.ii-zd2t.ii)*(sd3t.ii-zd3t.ii);

rkt.ii:=sqrt(2*inv2devkt.ii);

tetkt.ii:=1/3*arcsin(3*sqrt(3)/2*inv3devkt.ii/sqrt(inv2devkt.ii^3));
tetvarkt.ii:=1/3*arcsin(3*sqrt(3)/2*inv3devkt.ii/sqrt(inv2devkt.ii^3));

Ft.ii:=evalf(1/sqrt(2)*((rkt.ii^2+alp^2*inv1kt.ii^2)^(m/2)+\
2/3/sqrt(3)*gam*rkt.ii^m*sin(3*tetkt.ii)^(1/m)+del*inv1kt.ii^2+bet*inv1kt.ii-kap);

dFtdlamp:=diff(Ft.ii,lamp.ii);

lamp00:=0;
lamp0:=lamp00;
lamp.ii:=lamp0;

for i to 100 do

dlamp:='dlamp';
glt.ii:=Ft.ii+dFtdlamp*dlamp;
ergt.ii:=fsolve({glt.ii=0},{dlamp});
assign(ergt.ii);
lamp.ii:=lamp0+dlamp;
lamp0:=lamp.ii;

if sqrt(dlamp^2) > 0.000001 then
else
i:=100;
fi;

od;

lamp.ii:=lamp0;

else
lamp.ii:=0;
fi;

end;
```

PROGRAMM: DARGRAPH

```
# *****
# Graphisch Darstellung des Endzustands zum Zeitpunkt t=t.ii
# (Deviatorebene):      i.O.
# (Hydrostatische Ebene):  i.O.
# *****

# *****
# * Deviatorebene
# *****

phist:= evalf(60*Pi/180-tetst.ii):
phikt:= evalf(60*Pi/180-tetkt.ii):

x1s.ii:=evalf(rst.ii*cos(phist)):
x2s.ii:=evalf(rst.ii*sin(phist)):
x1z.ii:=evalf(x1s.ii-rkt.ii*cos(phikt)):
x2z.ii:=evalf(x2s.ii-rkt.ii*sin(phikt)):

# *****
# * Hydrostatische Ebene
# *****

x1shyd.ii:=inv1st.ii:
x2shyd.ii:=x2s.ii:
x1zhyd.ii:=inv1zt.ii:
x2zhyd.ii:=x2z.ii:

print(' aus dargraph ');
print(' x1s   =',x1s.ii);
print(' x2s   =',x2s.ii);
print(' x1z   =',x1z.ii);
print(' x2z   =',x2z.ii);
print(' x1shyd =',x1shyd.ii);
print(' x2shyd =',x2shyd.ii);
print(' x1zhyd =',x1zhyd.ii);
print(' x2zhyd =',x2zhyd.ii);

# Winkel zwischen S und Z
# *****

if rzt.ii > .0001 then
  phizt:=evalf(arctan(x2z.ii/x1z.ii));
  tetzt.ii:=evalf(phist-phizt);
else
  phizt:=phist;
  tetzt.ii:=tetst.ii;
fi:

print(' phist =',phist);
print(' phikt =',phikt);
print(' phizt =',phizt);

if ii=1 then
  datsat1[1]:=x1s0:
  datsat1[2]:=x2s0:
  datsat2[1]:=x1z0:
  datsat2[2]:=x2z0:
```

```

datsat3[1]:=x1shyd0:
datsat3[2]:=x2shyd0:
datsat4[1]:=x1zhyd0:
datsat4[2]:=x2zhyd0:
fi:

# datsat1:Datensatz 1: Spannungspfad in der Deviatorebene
# *****
datsat1[2*(ii+1)-1]:=x1s.ii:
datsat1[2*(ii+1)]:=x2s.ii:

# datsat2:Datensatz 2: Backstresspfad in der Deviatorebene
# *****
datsat2[2*(ii+1)-1]:=x1z.ii:
datsat2[2*(ii+1)]:=x2z.ii:

# datsat3:Datensatz 3: Spannungspfad in der hydrostat. Ebene
# *****
datsat3[2*(ii+1)-1]:=x1shyd.ii:
datsat3[2*(ii+1)]:=x2shyd.ii:

# datsat4:Datensatz 3: Backstresspfad in der hydrostat. Ebene
# *****
datsat4[2*(ii+1)-1]:=x1zhyd.ii:
datsat4[2*(ii+1)]:=x2zhyd.ii:

# *****
# Abfrage über die darzustellenden Sektionskurven
# *****
if ii > 0 and ii < 11 then

# *****
# *****
# * Deviatorebene
# *****
# *****

# Definition der Variablen
# *****
x1:='x1':
x2:='x2':

# Radius und Winkel in der Deviatorebene
# *****
rk:=sqrt((x1-x1z.ii)^2+(x2-x2z.ii)^2):
tetk:=arcsin(-(x2-x2z.ii)/rk)+(60+phitres)*Pi/180:

# Fließbedingung
# *****
print('Deviatorebene: xx =',xx);
F:=1/sqrt(2)*((rk^2+alp^2*invlkt.ii^2)^(m/2)+\
2/3/sqrt(3)*gam*rk^m*(sin(3*tetk))^tri)^(1/m)+del*invlkt.ii^2+bet*invlkt.ii-kap:

# Graphik (Endzustand)
# *****
bilddt.ii.varind.xx:=implicitplot(F=0,x1=-incdevh..incdevh,x2=-incdevv..incdevv,\
scaling=CONSTRAINED,numpoints=numpdev,color=Farbe):

```

```

# *****
# *****
# * Hydrostatische Ebene
# *****
# *****

# Berechnen der Nullstellen auf der hydrostatischen-Achse
# *****
read`nullst`:

# Definition der Variablen
# *****
r:='r':
invl:='invl':
verscd:=sqrt(x1z.ii^2+x2z.ii^2);
verschh:=invlzt.ii;
rk:=r-verscd;
invlk:=invl-verschh;

print(`verscd=`,evalf(verscd));
print(`verschh=`,evalf(verschh));
print(`rk=`,rk);
print(`invlk=`,invlk);

# Darstellung der hydrostatischen Kurve ("gegenüberliegend")
# *****
# Die obere Kurve ist für Theta = -30 (Kompression)
# Die untere Kurve ist für Theta = 30 (Extension)

o:='o':
u:='u':

# Fließbedingung für Theta = -30 Grad (Kompression)
# *****
tetko:=-30*Pi/180;

print(`Hydrostatische-Ebene: xx =`,xx);

Fo:=1/sqrt(2)*((rk^2+alp^2*invlk^2)^(m/2)+\
2/3/sqrt(3)*gam*rk^m*sin(3*tetko))^(1/m)+del*invlk^2+bet*invlk-kap;

print(`Fo=`,Fo);

# Fließbedingung für Theta = 30 Grad (Extension)
# *****
tetku:=30*Pi/180;

Fu:=1/sqrt(2)*((rk^2+alp^2*invlk^2)^(m/2)+\
2/3/sqrt(3)*gam*rk^m*sin(3*tetku))^(1/m)+del*invlk^2+bet*invlk-kap;

print(`Fu=`,Fu);

# *****
# Ungenauigkeiten bei der Berechnung der implicitplot-Punkte
# Die Variablen numphyd und inchyd werden in dartest definiert
# *****

# *****
# Obere Kurve (Kompression)
# *****

```

```

hydo.xx:=implicitplot(Fo=0,inv1=I02.ii+verschh..I03.ii+verschh,r=verscd..verscd+inchydo,\
scaling=CONSTRAINED,numpoints=numphydo,color=Farbe):

# Ausgabe der Punkte der hydrostatischen-Achse (obere Kurve)
# *****
#print(`hydo`,`hydo`):

# *****
# Untere Kurve (Extension)
# *****
hydu.xx:=implicitplot(Fu=0,inv1=I02.ii+verschh..I03.ii+verschh,r=verscd..verscd+inchydu,\
scaling=CONSTRAINED,numpoints=numphydu,color=Farbe):

# Negativieren der Kurve („runterklappen“)
# *****
read`mingraph`:

# *****
# *****
# *****

# Das Ende der if-Abfrage aus der Deviatorebene
# *****
fi;

end:

```

PROGRAMM: DARPLOT

```

plot1:=[seq(datsat1[i],i=1..2*(istep+1))]:
plot2:=[seq(datsat2[i],i=1..2*(istep+1))]:
plot3:=[seq(datsat3[i],i=1..2*(istep+1))]:
plot4:=[seq(datsat4[i],i=1..2*(istep+1))]:

# Darstellung des Spannungspfades (schwarz) und Backstrespfades (rot) in der Deviatorebene
# *****
plotspdev:=plot(plot1,color=black):
plotzpdev:=plot(plot2,color=COLOR(RGB,1,0,0)):

# Darstellung des Spannungspfades (schwarz) und Backstrespfades (rot) in der hydrostatischen Ebene
# *****
plotsphyd:=plot(plot3,color=black):
plotzphyd:=plot(plot4,color=COLOR(RGB,1,0,0)):

end:

```

PROGRAMM: DARSTELL

```
if xxstep=1 then
print('if 1');

devebene:=plot({bilddt1.varind.1,plotspdev,plotzpdev}):

hydebene:=plot({bildht1.varind.1.o,bildht1.varind.1.u,plotsphyd,plotzphyd}):

elif xxstep= 2 then
print('if 2');

devebene:=plot({bilddt1.varind.1,\
                bilddt1.varind.2,plotspdev,plotzpdev}):

hydebene:=plot({bildht1.varind.1.o,bildht1.varind.1.u,\
                bildht1.varind.2.o,bildht1.varind.2.u,plotsphyd,plotzphyd}):

elif xxstep= 3 then
print('if 3');

devebene:=plot({bilddt1.varind.1,\
                bilddt1.varind.2,\
                bilddt1.varind.3,plotspdev,plotzpdev}):

hydebene:=plot({bildht1.varind.1.o,bildht1.varind.1.u,\
                bildht1.varind.2.o,bildht1.varind.2.u,\
                bildht1.varind.3.o,bildht1.varind.3.u,plotsphyd,plotzphyd}):

elif xxstep= 4 then
print('if 4');

devebene:=plot({bilddt1.varind.1,\
                bilddt1.varind.2,\
                bilddt1.varind.3,\
                bilddt1.varind.4,plotspdev,plotzpdev}):

hydebene:=plot({bildht1.varind.1.o,bildht1.varind.1.u,\
                bildht1.varind.2.o,bildht1.varind.2.u,\
                bildht1.varind.3.o,bildht1.varind.3.u,\
                bildht1.varind.4.o,bildht1.varind.4.u,plotsphyd,plotzphyd}):

elif xxstep= 5 then
print('if 5');

devebene:=plot({bilddt1.varind.1,\
                bilddt1.varind.2,\
                bilddt1.varind.3,\
                bilddt1.varind.4,\
                bilddt1.varind.5,plotspdev,plotzpdev}):

hydebene:=plot({bildht1.varind.1.o,bildht1.varind.1.u,\
                bildht1.varind.2.o,bildht1.varind.2.u,\
                bildht1.varind.3.o,bildht1.varind.3.u,\
                bildht1.varind.4.o,bildht1.varind.4.u,\
                bildht1.varind.5.o,bildht1.varind.5.u,plotsphyd,plotzphyd}):

fi;

end;
```

PROGRAMM:MINGRAPH

```
# *****
# Herausschreiben der Koordinaten der Kurven in ein Feld
# *****

oben1:=op(1,hydo.xx):

unten1:=op(1,hydu.xx):

# *****
# *      Obere Kurve
# *****

nschlo:=nops(oben1):

for kk from 1 to nschlo do

kolo:=op(kk,oben1):
p1xo:=op(1,kolo[1]):
p1yo:=op(2,kolo[1]):
p2xo:=op(1,kolo[2]):
p2yo:=op(2,kolo[2]):
xxyyo.kk:=[[p1xo,p1yo],[p2xo,p2yo]]:

od:


# *****
# *      Untere Kurve
# *****

nschlu:=nops(unten1):

for kk from 1 to nschlu do

kolu:=op(kk,unten1):
p1xu:=op(1,kolu[1]):
p1yu:=-op(2,kolu[1])+2*verschd:
p2xu:=op(1,kolu[2]):
p2yu:=-op(2,kolu[2])+2*verschd:
xxyyu.kk:=[[p1xu,p1yu],[p2xu,p2yu]]:

od:


kk:='kk':

listeo:=seq(xxyyo.kk,kk=1..nschlo):

listeu:=seq(xxyyu.kk,kk=1..nschlu):

bildht.ii.varind.xx.o:=PLOT(CURVES(listeo),SCALING(CONSTRAINED),\
    AXESLABELS(inv1,r),Farbe):

bildht.ii.varind.xx.u:=PLOT(CURVES(listeu),SCALING(CONSTRAINED),\
    AXESLABELS(inv1,r),Farbe):

end:
```