KONVEKS OPTİMİZASYON PROBLEMLERİ İÇİN İTERATİF YAKLAŞIMLAR

Sibel BİLGİLİ

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı
Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR
2015

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KONVEKS OPTİMİZASYON PROBLEMLERİ İÇİN İTERATİF YAKLAŞIMLAR

Sibel BİLGİLİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

ERZURUM
2015

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

TEZ ONAY FORMU

KONVEKS OPTİMİZASYON PROBLEMLERİ İÇİN İTERATİF YÖNTEMLER

Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR danışmanlığında, Sibel BİLGİLİ tarafından hazırlanan bu çalışma, 11.09.2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı'nda Yüksek lisans tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Sezgin AKBULUT İmza :

Üye : Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR İmza :

Üye : Yrd.Doç.Dr. İbrahim KARAHAN İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu'nun 01/10/2015 tarih ve 38/1334 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Ertan YILDIRIM V.
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KONVEKS OPTİMİZASYON PROBLEMLERİ İÇİN İTERATİF YAKLAŞIMLAR

Sibel BİLGİLİ

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR

Bu tezde konveks minimizasyon problemleri ve varyasyonel eşitsizlik problemleri gibi optimizasyon problemlerinin çözüm kümeleri ile dönüşümlerin sabit nokta kümelerinin arasındaki bağlantı incelenerek iteratif metodlarla bu sabit noktaların elde edilişi çalışılmıştır.

2015, 70 sayfa

Anahtar Kelimeler: Sabit nokta, varyasyonel eşitsizlik, konveks minimizasyon, genişlemeyen dönüşüm

ABSTRACT

MS Thesis

ITERATIVE METHODS FOR CONVEX OPTIMIZATION PROBLEMS

Sibel BİLGİLİ

Ataturk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Analysis and Function Theory Department

Supervisor: Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR

In this thesis, by investigating connection between solution sets of optimization problems such as convex minimization problems, variational inequality problems and fixed point sets of mapping; these fixed points which are obtained with iteration methods have been studied.

2015, 70 pages

Keywords: Fixed point, variational inequality, convex minimization, nonexpansive mapping

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma, Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı sağlayan, bilgi ve tecrübeleriyle beni destekleyen çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR'e en içten dileklerimle teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Tezin hazırlanması sürecinde değerli fikirlerinden yararlandığım Sayın Prof. Dr. Sezgin AKBULUT'a, Sayın Doç. Dr. İsa YILDIRIM'a, Sayın Doç. Dr. Hükmi KIZILTUNÇ'a, Sayın Yrd. Doç. Dr. İbrahim KARAHAN'a ve Matematik Bölümü'nde gerekli ilgi ve yardımı esirgemeyen anabilim dalımızın değerli öğretim üyelerine sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, çalışmalarım esnasında kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı eşim Murat Saltuk BİLGİLİ'ye ve aileme teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimim boyunca "Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı" ile tarafıma vermiş olduğu destekten dolayı TÜBİTAK'a teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Sibel BİLGİLİ
Eylül, 2015

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

c_o	Sıfıra yakınsayan dizilerin uzayı
l_p	$p.$ kuvveti toplanabilir dizilerin kümesi
l_1	Serisi mutlak yakınsak dizilerin uzayı
l_∞	Sınırlı dizilerin uzayı
$F(T)$	T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
$\mathcal{F}$	T_1 ve T_2 dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesi
X^*	X uzayının normlu duali
δ_X	X uzayının konveksliğinin modülü
B_X	X uzayındaki kapalı birim yuvar
S_X	X uzayındaki birim küre yüzeyi
P_C	Metrik izdüşüm operatörü
∇f	f nin gradyen operatörü
∂C	C kümesinin sınırı
C^o	C kümesinin içi
$N_C(v)$	C kümesinde tanımlı normal koni
$VI(C,A)$	Varyasyonel eşitsizlik
Ω	Varyasyonel eşitsizliğin çözüm kümesi

1. GİRİŞ

Sabit nokta teorisi, diferensiyel denklemler, topoloji ve fonksiyonel analiz gibi matematiğin temel alanlarında doğrudan kullanılmaktadır. Ayrıca bu teorinin ekonomi, oyun teorisi, dinamik ve optik gibi geniş uygulama alanları vardır.

Sabit nokta teorisi 20. yüzyıl başlarında L.E.J. Brouwer'in çalışmaları ile başlamıştır. Bu teorinin gelişmesine katkıda bulunan ünlü matematikçilerin başında S. Banach ve J. Schauder gelmektedir. Metrik uzaylar teorisinde kullanılan önemli bir araç olan, belli koşulları sağlayan fonksiyonların sabit noktalarının olduğunu garanti eden ve bu sabit noktanın konstraktif şekilde bulunmasını sağlayan teorem Stefan Banach'ın "Daraltan (Büzülme) Dönüşüm Teoremi" dir. Stefan Banach tarafından 1922 yılında ifade edilen bu teorem, "(X,d) bir tam metrik uzay ve $T\colon X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \leq \alpha d(x,y)\,, \quad 0 \leq \alpha < 1$$

ise T, X de bir tek sabit noktaya sahiptir" şeklindedir. Bu teoremin sonsuz boyutlu Banach uzaylarına bir genelleştirmesi olan ve Schauder Teoremi olarak adlandırılan teorem, 1930 yılında "K, bir X Banach uzayının boş olmayan kompakt, konveks bir alt kümesi ve $f\colon K \to K$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda f, K da en az bir sabit noktaya sahiptir" şeklinde ifade edilmiştir. Kompakt olmayan operatörlerle ilgili Schauder teoreminin genelleştirilmesi için ilk adım 1955 de G. Darbo tarafından atılmıştır. Darbo'nun ardından Browder, Ky Fan, Furi, Nussbaum, Opial, Petryshyn ve Vignoli, Schauder sabit nokta teoreminin çeşitli genelleştirmelerini vermişlerdir. Daha sonra 1950 de F. E. Browder, 1965'de Kirk, 1968'de Kannan 1974'de Ciric ve daha pek çok matematikçi bu temel sonuçları genelleştirmişlerdir. Bununla birlikte Junck, Rhoades, Sessa gibi pek çok araştırmacı birden fazla dönüşümün ortak sabit noktaları üzerine çok sayıda çalışma yapmışlardır.

1972 yılında Goebel and Kirk, asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm için sabit noktanın varlığını ispatlamış ve Schu (1991), Tan and Xu (1993), Rhoades (1994), Osilike ve

Udomene (2000), Li and Sims (2002) tarafından Hilbert ve Banach uzaylarında bu tür dönüşümlerin sabit noktaları üzerine çalışmalar yapılmıştır.

Optimizasyon problemleri gerçek hayatta karşılaşılan birçok problem için geliştirilen karar modellerinin kısıtlarından dolayı 1950'li yıllardan itibaren daha fazla önem kazanmıştır. Temelleri 18. ve 19. yüzyıllara dayanan yeni analitik ve sayısal yöntemler, 1960'lı yıllardan sonra bilgisayarların da gelişmesi ile hızlı bir şekilde yayılmıştır. Özel olarak kimyasal işlemlerin süreklilik kazanması, planlamacıların, mühendislerin, jeologların, ekonomistlerin, iktisatçıların, işletmecilerin kendi bölümlerine has problemleri çözmek için üzerinde durdukları çalışmalar, optimizasyon tekniklerini ortaya çıkarmıştır. Klasik optimizasyon teorisi Cauchy, Lagrange ve Newton tarafından geliştirilmiştir. Newton ve Leibnitz'in analiz çalışmaları optimizasyonun diferansiyel metodlarının gelişmesine destek sunmuştur. Langrange, kısıtlanmış problemler için optimizasyon metodunu geliştirmiştir. Kısıtsız optimizasyon problemlerinin çözülmesi için Steepest Descent tekniğini ilk defa Cauchy uygulamıştır. Optimizasyon ile ilgili yapılan çalışmalar 20. yüzyılın ikinci yarısına kadar daha ağır ilerlemiştir. 1950'lerden sonra sayısal bilgisayarlar keşfedildiği için optimizasyonda önemli gelişmeler yaşanmıştır. Böylelikle birçok yeni teori ve teknik ortaya çıkmıştır. Ancak 1960'lı yıllarda kısıtlı olmayan optimizasyon ile ilgili sayısal metodlar yalnız İngiltere'de çalışılmış ve ilerletilmiştir. Günümüzdeki gelişmiş teknoloji kadar yaygın bir kavram olan optimizasyon kavramı çeşitli endüstri alanlarında uygulanmaktadır. Bu nedenle optimizasyonun kullanılmadığı bir bilim dalı neredeyse yok gibidir.

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünden sonra Kuramsal Temeller adını alan ikinci bölümde, ilk olarak çalışmamızda kullandığımız temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir. Sonra bazı özel dönüşümler tanıtılmış ve bu dönüşümlerin sabit noktalarının hangi şartlar altında var olduğu incelenmiştir. Üçüncü bölümde dönüşümlerin sabit noktaları bulunurken kullanılan çeşitli iterasyon yöntemleri ve bu iterasyon yöntemleri için kuvvetli ve zayıf yakınsama teoremleri verilmiştir. Dördüncü bölümde ise önce sabit noktaların bulunması için genel iteratif şemalar verilmiştir. Daha sonra konveks minimizasyon problemlerini çözmek için genel iteratif şemalardan bahsedilmiştir. Beşinci bölümde bu araştırmamızda elde ettiğimiz bazı sonuçlar verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Sabit Nokta Kavramı ve Bazı Dönüşüm Sınıfları

Bu bölümde sabit nokta kavramı ve bazı özel dönüşüm sınıfları verilecektir.

Tanım 2.1.1 (Normlu Uzay): X**,** F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $\| \quad \|: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun x deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon için,

N1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
N2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \ \ (\alpha \in F)$
N3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanıyorsa $\| \quad \|$ fonksiyonuna X de (veya X üzerinde) bir norm ve $(X, \| \quad \|)$ ikilisine de normlu uzay denir.

Tanım 2.1.2 (Banach Uzayı): X normlu lineer uzay olsun**.** X**,** $d(x, y) = \|x - y\|$ norm metriğine göre tam ise X e Banach uzayı denir.

X in reel veya kompleks lineer uzay oluşuna göre Banach uzayı da reel veya kompleks Banach uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.3 (İç Çarpım Fonksiyonu ve İç Çarpım Uzayı): X, F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $\langle \quad \rangle: X \times X \to F$ fonksiyonu

İ1. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
İ2. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
İ3. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
İ4. $\langle x, x \rangle \geq 0$ ve $\langle x, x \rangle = 0 \ \Leftrightarrow \ x = \theta$

şartlarını sağlıyorsa, bu fonksiyona iç çarpım fonksiyonu (veya iç çarpım) denir.

Üzerinde iç çarpım fonksiyonunun tanımlandığı lineer uzaya iç çarpım uzayı (veya ön-Hilbert uzayı) denir. İç çarpım uzayı $(X, \langle \quad \rangle)$ veya kısaca X ile gösterilir.

Tanım 2.1.4 (Hilbert Uzayı): X bir iç çarpım uzayı ve $\| \quad \|$ iç çarpım normu olsun. $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$ olarak tanımlanırsa (X, d) bir metrik uzay olur. İç çarpım normuyla tanımlanan bu d metriğine göre X iç çarpım uzayı tam ise, X e Hilbert uzayı denir.

Hilbert uzayları, özel bir normdan elde edilmiş Banach uzaylarıdır.

Tanım 2.1.5 (Konveks Küme): K, X lineer uzayının bir alt kümesi olsun. Her $x, y \in K$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in K$$

ise, K ya konveks küme denir.

Tanım 2.1.6 (Sabit Nokta): X boş olmayan bir küme ve $T: X \to X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer $Tx = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına T nin sabit noktası denir.

O halde $Tx = x$ denkleminin çözümü veya çözümleri T nin sabit noktalarıdır. T nin tüm sabit noktalarının kümesi $F(T)$ veya $Fix(T)$ ile gösterilir.

Örnek 2.1.7: 1) $X \neq \emptyset$ olmak üzere $I: X \to X$ özdeş dönüşüm olsun. Bu durumda her $x \in X$ bir sabit noktadır.

2) $X = (-2,1]$ olmak üzere $T: X \to X$, $Tx = \frac{2}{3}(x + \frac{1}{x})$ dönüşümünün sabit noktalarının kümesi $F(T) = \{-\sqrt{2}\}$ dür.

3) $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $T: X \to X$, $Tx = x^3 - 2x^2 - 2x$ dönüşümünün sabit noktalarının kümesi $F(T) = \{-1, 0, 3\}$ dir.

4) $X = \mathbb{R}$ ve $Y = \mathbb{R}^3$ olmak üzere herhangi bir $T: X \to Y$ dönüşümü herhangi bir sabit noktaya sahip değildir.

5) $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $T: X \to X, Tx = a + x$ şeklindeki öteleme dönüşümlerin sabit noktaları yoktur.

X boştan farklı bir küme ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $x \in X$ için $T^n(x)$, $T^0(x) = x$ ve $T^{n+1}(x) = T(T^n(x))$ şeklinde tanımlanır. $T^n(x)$ e, x in T altındaki n. iterasyonu denir. T^n $(n \geq 1)$ dönüşümüne de T nin n. iterasyonu denir. $T(x)$ yerine Tx notasyonu kullanılabilir.

$T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz.
1. Keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ için $F(T) \subset F(T^n)$ dir.
2. Keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ için $F(T^n) = \{x\}$ ise $F(T) = \{x\}$ dir. Ancak bunun tersi genelde doğru değildir. Örneğin $T: \{a, b, c\} \to \{a, b, c\}$ dönüşümü $T(a) = b, T(b) = a, T(c) = c$ olarak tanımlanırsa $F(T^2) = \{a, b, c\}$ olduğu halde $F(T) = \{c\}$ dir.

X boş olmayan bir küme ve $T_1, T_2: X \to X$ herhangi iki dönüşüm olsun. Eğer $T_1x = T_2x = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına T_1 ve T_2 nin ortak sabit noktası denir. Bu dönüşümlerin ortak sabit noktalarının kümesi $\mathcal{F} = F(T_1) \cap F(T_2)$ şeklinde gösterilir.

Örnek 2.1.8: $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $T_1, T_2: X \to X$, $T_1x = x^2 - 2x - 4$ ve $T_2x = x^2 - 5x - 7$ dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesi $\mathcal{F} = F(T_1) \cap F(T_2) = \{-1\}$ dir.

Örnek 2.1.9: $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $T_1, T_2: X \to X$, $T_1x = x - \sin x$ ve $T_2x = x - \tan x$ dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesi $\mathcal{F} = F(T_1) \cap F(T_2) = \{k\pi: k \in \mathbb{Z}\}$ dir.

Tanım 2.1.10: $(X, \| \quad \|)$ bir normlu uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun.

a) Her $x, y \in X$ için

$$\|Tx - Ty\| \leq k\|x - y\| \tag{2.1}$$

olacak şekilde bir $k \geq 0$ sabiti mevcutsa T ye Lipschitzian dönüşüm denir. (2.1) eşitsizliğine Lipschitz şartı ve bu şartı sağlayan en küçük k sayısına da Lipschitz sabiti denir.

b) Eğer (2.1) eşitsizliği $0 \leq k < 1$ iken sağlanıyorsa T ye daraltan dönüşüm (büzülme dönüşümü (contraction)) denir.

c) Her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için

$$\|Tx - Ty\| < \|x - y\|$$

ise T ye kesin daraltan dönüşüm (contractive) denir.

d) Her $x, y \in X$ için

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

ise T ye genişlemeyen dönüşüm (nonexpansive) denir (Agarwal *et al.* 2009).

Yukarıdaki tanımlara göre Lipschitz şartını sağlayan her dönüşüm düzgün süreklidir. Dolayısıyla yukarıdaki dönüşüm sınıfları da düzgün süreklidir. Dolayısıyla eğer T sürekli değilse daraltan ve genişlemeyen dönüşüm olması da mümkün değildir.

Tanım 2.1.11: H bir Hilbert uzayı ve T lineer olmayan bir dönüşüm olsun. $D(T)$, T nin tanım ve $R(T)$ görüntü kümesi olmak üzere

a) Her $x, y \in D(T)$ için

$$\langle Tx - Ty, x - y \rangle \geq 0$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T ye monoton dönüşüm denir.

b) Her $x, y \in D(T)$ ve $x \neq y$ için

$$\langle Tx - Ty, x - y \rangle > 0$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T ye kesin monoton dönüşüm denir.

c) Her $x, y \in D(T)$ ve $x \neq y$ için

$$\langle Tx - Ty, x - y \rangle \geq \eta \|x - y\|^2$$

olacak şekilde $\eta > 0$ sabiti varsa T ye η-kuvvetli monoton dönüşüm denir.

d) Her $x, y \in D(T)$ için

$$\langle Tx - Ty, x - y \rangle \geq v \|Tx - Ty\|^2$$

olacak şekilde $v > 0$ sabiti varsa T ye v-ters kuvvetli monoton dönüşüm denir.

e) Bir T monoton dönüşümün grafiği $G(T)$ olmak üzere bu dönüşümün grafiği başka bir monoton dönüşümün grafiği tarafından ihtiva edilmiyorsa T ye maksimal monoton dönüşüm adı verilir (Zeidler 1986).

Yukarıdaki tanımdan her v-ters kuvvetli monoton dönüşümün monoton ve $\frac{1}{v}$-Lipschitzian dönüşüm olduğu açıktır. Gerçekten ters kuvvetli monoton dönüşümün tanımından

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \frac{1}{v}\langle Tx - Ty, x - y\rangle \leq \frac{1}{v}\|Tx - Ty\|\|x - y\|$$

olduğundan

$$\|Tx - Ty\| \leq \frac{1}{v}\|x - y\|$$

dir.

Örnek 2.1.12: $H = \mathbb{R}$ ve $C = [0,1]$ olmak üzere $T: C \to C$ dönüşümü

1) $Tx = \frac{x+1}{2}$ olarak tanımlanırsa

$$(Tx - Ty)(x - y) = \left(\frac{x + 1}{2} - \frac{y + 1}{2}\right)(x - y) = \frac{(x - y)^2}{2} \geq 0$$

dır. Bu halde T dönüşümü monotondur.

2) $Tx = 4x$ olarak tanımlanırsa

$$(Tx - Ty)(x - y) = 4(x - y)^2$$

olduğundan her $x, y \in C$ için $(Tx - Ty)(x - y) \geq 4(x - y)^2$ yazılabilir. Dolayısıyla T dönüşümü 4-kuvvetli monotondur.

3) $Tx = 3x + 1$ olarak tanımlanırsa bu dönüşüm $\frac{1}{3}$-ters kuvvetli monotondur. Yani

$$(Tx - Ty)(x - y) = 3(x - y)^2 \geq 9v(x - y)^2$$

eşitsizliği $v = \frac{1}{3}$ için sağlanır.

Tanım 2.1.13: X bir lineer uzay ve $f: X \to (-\infty, \infty)$ bir dönüşüm olsun.

a) Her $x, y \in X$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f ye konveks dönüşüm adı verilir.

b) Her $x, y \in X$, $x \neq y$ ve $\lambda \in (0,1)$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f ye kesin konveks dönüşüm adı verilir.

c) Her $x, y \in X$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \frac{1}{2}\alpha\lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\alpha > 0$ sayısı varsa f ye kuvvetli konveks dönüşüm denir (Cegielski 2012).

2.2. Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Teorem 2.2.1: $[a,b]$**,** $\mathbb{R}$ de kapalı bir aralık ve $f:[a,b] \to [a,b]$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda $f(c) = c$ olacak şekilde en az bir $c \in [a,b]$ sayısı vardır.

Teorem 2.2.2 (Brouwer Sabit Nokta Teoremi): $B = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \|x - x_0\| \leq r\}$, $\mathbb{R}^n$ de kompakt konveks bir alt küme olsun. Bu durumda $f: B \to B$ sürekli dönüşümü en az bir sabit noktaya sahiptir (Brouwer 1912).

Brouwer'ın bu teoremi ancak sonsuz boyutlu bir Banach uzayında geçerli olmayabilir. Bunun için aşağıdaki örneği inceleyebiliriz.

Örnek 2.2.3: B_{c_0}, $c_0 = \{(x_n)\colon \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$ Banach uzayında kapalı birim yuvar olmak üzere

$$T: B_{c_0} \to B_{c_0}, \ \ T(x) = (1 - |x_1|, x_1, x_2, \dots)$$

dönüşümünü alalım. Her $x, y \in B_{c_0}$ için

$$\|Tx - Ty\|_\infty = \|x - y\|_\infty$$

olduğundan T süreklidir. Ancak $Tx = x$ denkleminin B_{c_0} da bir çözümü yoktur.

Teorem 2.2.4 (Schauder Sabit Nokta Teoremi): X bir Banach uzayı, $K \subseteq X$ boş kümeden farklı kompakt konveks bir alt küme ve $f: K \to K$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda f en az bir sabit noktaya sahiptir (Schauder 1930).

Aşağıdaki örnek ile tam metrik uzay üzerinde tanımlanan genişlemeyen bir dönüşümün sabit noktaya sahip olmayabileceği ifade edilmiştir.

Örnek 2.2.5: c_0 Banach uzayında her $x \in B_{c_0}$ için

$$T(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots) = (3, x_1, x_2, x_3, \dots)$$

şeklinde tanımlanan $T: B_{c_0} \to B_{c_0}$ dönüşümünü alalım. T genişlemeyen bir dönüşümdür ve $x = (3,3,3,\dots)$, T nin bir sabit noktasıdır. Fakat $x = (3,3,3,\dots) \notin c_0$ dır. Bu durumda T dönüşümü, c_0 uzayında sabit noktaya sahip değildir.

Teorem 2.2.6 (Banach Daralma İlkesi): (X, d) tam metrik uzay ve $T: X \to X$ daraltan bir dönüşüm olsun. Bu durumda T, bir tek sabit noktaya sahiptir (Banach 1922).

İspat: x_0, X de keyfi bir nokta ve

$$x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \dots, x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0$$

olsun. Önce $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu ve sonra da bu dizinin limit noktasının $Tx = x$ denkleminin bir tek çözümü olduğunu göstereceğiz. $n, p \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
d(x_{n+p}, x_n) &= d(T^{n+p}x_0, T^n x_0) \\
&\leq kd(x_{n+p-1}, x_{n-1}) \\
&= kd(T^{n+p-1}x_0, T^{n-1}x_0) \\
&\leq k^2 d(x_{n+p-2}, x_{n-2}) \leq \cdots \\
&\leq k^n d(x_{n+p-n}, x_{n-n}) = k^n d(x_p, x_0) \\
&\leq k^n (d(x_p, x_{p-1}) + d(x_{p-1}, x_0)) \\
&\leq k^n (kd(x_{p-1}, x_{p-2}) + d(x_{p-1}, x_{p-2}) + d(x_{p-2}, x_0)) \\
&= k^n (d(x_{p-2}, x_0) + d(x_{p-1}, x_{p-2}) + kd(x_{p-1}, x_{p-2})) \\
&\leq k^n \left[d(x_{p-2}, x_0) + kd(x_{p-2}, x_{p-3}) + k^2 d(x_{p-2}, x_{p-3})\right] \\
&\vdots \\
&\leq k^n (d(x_1, x_0) + kd(x_1, x_0) + k^2 d(x_1, x_0) + \cdots) \\
&= k^n d(x_1, x_0)(1 + k + k^2 + k^3 + \cdots)
\end{aligned}$$

$$= k^n d(x_1, x_0)\left(\frac{1}{1-k}\right),$$

olur. Yani

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$$

dır. $0 \leq k < 1$ olduğundan $n \to \infty$ için limit alınırsa, $d(x_{n+p}, x_n) \to 0$ elde edilir. Bu da $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X tam olduğundan $x_n \to x$ ve dolayısıyla $x_{n+1} \to x$ dir. T dönüşümü sürekli olduğundan dizisel süreklidir, yani $Tx_n \to Tx$ dir. $x_{n+1} = Tx_n$ de $n \to \infty$ için limit alınırsa $x = Tx$ elde edilir. Şimdi bu sabit noktanın tek olduğunu gösterelim. y, T nin başka bir sabit noktası yani, $Ty = y$ olsun. Bu durumda

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

olur. Bu ise $d(x, y) = 0$ olmasını gerektirir. Çünkü

$$d(x, y) \leq kd(x, y) \Rightarrow d(x, y) - kd(x, y) \leq 0 \Rightarrow d(x, y)[1-k] \leq 0$$

dir. $k < 1$ olduğundan $1 - k > 0$ dır. Dolayısıyla hem $1 - k > 0$ hem de $d(x, y) \geq 0$ olduğundan $d(x, y)[1-k] \leq 0$ eşitsizliğinin sağlanması için $d(x, y) = 0$ olması gerekir. Bu da $x = y$ demektir.

Örnek 2.2.7: $X = [a, b]$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer T, $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli, (a, b) aralığında türevlenebilir bir dönüşüm ve her $x \in (a, b)$ için $|T'x| \leq k < 1$ şartı sağlanıyorsa T nin X de tek bir sabit noktası mevcuttur. Gerçekten Ortalama Değer Teoremi'nden her $x, y \in [a, b]$ için $c \in (a, b)$ olmak üzere

$$|Tx - Ty| = T'(c)|x - y| \leq k|x - y|$$

olur. Banach Daralma İlkesinden dolayı T nin bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 2.2.8: (X, d) tam metrik uzayı ve $n \in \mathbb{N}$ için T^n daraltan dönüşüm olacak şekilde bir $T: X \to X$ dönüşümü verilsin. Bu durumda T bir tek sabit noktaya sahiptir (Khamsi and Kirk 2001).

İspat: Banach sabit nokta teoremi gereğince, T^n bir tek x_0 sabit noktasına sahiptir. Dolayısıyla

$$T^{n+1}x_0 = T(T^n x_0) = Tx_0$$

yazılır. Ayrıca Tx_0, T^n nin bir sabit noktasıdır. T^n nin sabit noktası tek olduğu için $Tx_0 = x_0$ olur. Eğer $Ty = y$ ise, bu durumda $T^n y = y$ olur. Bu da $y = x_0$ olmasını gerektirir.

Teorem 2.2.9: (X, d) bir kompakt metrik uzay ve $T: X \to X$ kesin daraltan bir dönüşüm olsun. Bu durumda T bir tek x_0 sabit noktasına sahiptir. Üstelik her $x \in X$ için

$$\lim_{n \to \infty} T^n x = x_0$$

dır (Khamsi and Kirk 2001).

Tanım 2.2.10 (Kesin Konveks Uzay): X bir Banach uzay ve eğer $x \neq y$ olmak üzere her $x, y \in S_X = \{x \in X: \|x\| = 1\}$ ve her $\lambda \in (0,1)$ için

$$\|(1-\lambda)x + \lambda y\| < 1$$

oluyorsa X uzayına kesin konveks (strictly convex) denir (Cegielski 2012).

Bu tanım, X deki S_X birim küre yüzeyine ait birbirinden farklı x ve y noktalarının orta noktasının S_X de olmadığını gösterir. Bir başka deyişle eğer $x, y \in S_X$ ve $\|x\| = \|y\| = \|(x+y)/2\|$ ise $x = y$ dir.

Örnek 2.2.11: $X = \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, $x = (x_1, x_{2,} \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$ normu verilsin. Bu durumda X kesin konvekstir.

Örnek 2.2.12: $X = \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$ normu verilsin. Bu durumda X kesin konveks değildir. Gerçekten $x = (1,0,0, \dots, 0)$ ve $y = (0,1,0,0, \dots, 0)$ olarak seçilirse $x \neq y$, $\|x\|_1 = 1 = \|y\|_1$ olduğu halde $\|x + y\|_1 = 2$ dir.

Tanım 2.2.13: X^*, X Banach uzayının duali olsun. Eğer

$$J_X = \{j \in X^* : \langle x, j \rangle = \|x\|^2 = \|j\|_*^2\}$$

şeklinde tanımlanan $J: X \to 2^{X^*}$ çok değerli dönüşümüne normalleştirilmiş eşlenik dönüşüm (normalized duality mapping) denir (Agarwal *et al.* 2007).

Örnek 2.2.14: Bir H reel Hilbert uzayındaki normalleştirilmiş eşlenik dönüşüm özdeş dönüşümdür. Bunu göstermek için $x \neq \theta$ olacak şekilde bir $x \in H$ alalım. $H = H^*$ ve $\langle x, x \rangle = \|x\|\|x\|$ olması $x \in J_X$ olmasını gerektirir. $y \in J_X$ olduğunu kabul edelim. J nin tanımından $\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\|$ ve $\|x\| = \|y\|$ olduğunu biliyoruz.

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle = 0$$

olduğundan $x = y$ elde edilir. O halde $J_X = \{x\}$ dir.

Önerme 2.2.15: X bir Banach uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

a) X kesin konvekstir.

b) Sıfırdan farklı her $f \in X^*$ için $\langle x, f \rangle = f(x) = \|f\|_*$ ve $\|x\| = 1$ olacak şekilde X in en fazla bir x elemanı vardır (Agarwal *et al.* 2009).

Tanım 2.2.16 (Düzgün Konveks Uzay): X bir Banach uzayı olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $\|x\| \leq 1,\ \|y\| \leq 1$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon$ şartlarını sağlayan her $x, y \in X$ için

$$\frac{1}{2}\|x + y\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

olacak şekilde $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa X e düzgün (uniformly) konveks uzay denir (Aksoy and Khamsi 1990).

Bu tanım, $x, y \in B_X$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon > 0$ için $(x + y)/2$ orta noktasının S_X den bir δ uzaklığında ve B_X kapalı birim yuvar içinde olduğu ifade eder.

Örnek 2.2.17: Her H Hilbert uzayı düzgün konvekstir. Gerçekten her $x, y \in H$ için paralel kenar kuralından

$$\|x + y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \|x - y\|^2$$

dir. $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in B_H$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon$ olduğunu kabul edelim. Böylece

$$\|x + y\|^2 \leq 4 - \varepsilon^2$$

olur. Şayet $\delta(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$ seçilirse

$$\frac{1}{2}\|x + y\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

elde edilir. Bu durumda H düzgün konveks uzaydır.

Örnek 2.2.18: $\ell_1 = \{(x_n): \sum_{n=1}^{\infty}|x_n| < \infty\}$ ve $\ell_\infty = \{(x_n): \sup_n|x_n| < \infty\}$ uzayları sırasıyla $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ ve $\|x\|_\infty = \sup\{|x_n|: n \in \mathbb{N}\}$ normlarına göre düzgün konveks uzay değildir. Bunu göstermek için $\varepsilon = 1$ olmak üzere $x = (1,0,0,0, \dots), y = (0, -1,0,0, \dots) \in \ell_1$ alalım. Bu durumda $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ normuna göre

$$\|x\|_1 = 1,\ \|y\|_1 = 1,\ \|x - y\|_1 = 2 > 1 = \varepsilon$$

olur. Ancak $\|(x + y)/2\|_1 = 1$ olduğundan $\|(x + y)/2\|_1 \leq 1 - \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı yoktur. Dolayısıyla ℓ_1 uzayı düzgün konveks değildir. Benzer olarak, $\varepsilon = 1$ ve $x = (1,1,1,0,0, \dots),\ y = (1,1, -1,0,0, \dots) \in \ell_\infty$ olarak alalım. Böylece $\|x\| = \sup\{|x_n|: n \in \mathbb{N}\}$ normuna göre

$$\|x\|_\infty = 1,\ \|y\|_\infty = 1,\ \|x - y\|_\infty = 2 > 1 = \varepsilon$$

elde edilir. $\|(x + y)/2\|_\infty = 1$ olduğundan ℓ_∞ uzayı düzgün konveks değildir.

Teorem 2.2.19: Her düzgün konveks Banach uzayı, kesin konveks uzaydır (Agarwal *et al.* 2009).

Bu teoremin tersi genelde doğru değildir.

Örnek 2.2.20: $\beta > 0$ olmak üzere her $x = \{x_i\} \in c_0$ için $\|\ \|_\beta$ normu

$$\|x\|_\beta = \|x\|_{c_0} + \beta\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{x_i}{i}\right)^2\right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(c_0, \|\ \|_\beta)$ uzayı $\beta > 0$ için kesin konveks fakat düzgün konveks değildir. Eğer c_0 uzayı alışılmış norm ile verilirse, kesin konveks uzay olmaz.

Teorem 2.2.21: X bir Banach uzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

a) X düzgün konvekstir.

b) X deki $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri için

$$\|x_n\| \leq 1,\ \|y_n\| \leq 1 \text{ ve } \lim_{n\to\infty}\|x_n + y_n\| = 2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\|x_n - y_n\| = 0 \quad (2.2)$$

dır (Agarwal *et al.* 2009).

Tanım 2.2.22 (Konveksliğin Modülü): X bir Banach uzay olsun.

$$\delta_X: [0,2] \to [0,1],\ \ \delta_X(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x-y\| \geq \varepsilon\right\}$$

şeklinde tanımlanan δ_X fonksiyonuna X in konveksliğinin modülü denir (Agarwal *et al.* 2009).

Yukarıdaki tanımdan $\delta_X(0) = 0$ ve her $t \geq 0$ için $\delta_X(t) \geq 0$ olduğunu görmek kolaydır.

Örnek 2.2.23: Bir H Hilbert uzayının konvekslik modülü

$$\delta_H(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}},\ \ \varepsilon \in (0,2]$$

dir.

Lemma 2.2.24: X düzgün konveks bir Banach uzayı, $x, y \in X$ ve $\lambda \in [0,1]$ olsun. $c = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2/2}$ olmak üzere

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 \leq \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 - 2\lambda(1-\lambda)c^2\delta_X\left(\frac{\|x-y\|}{2c}\right)$$

dir (Alber 1996).

Teorem 2.2.25: Bir X Banach uzayının kesin konveks olması için gerek ve yeter şart $\delta_X(2) = 1$ olmasıdır (Agarwal *et al*. 2009).

İspat: $X,\ \delta_X$ konvekslik modülü ile birlikte kesin konveks Banach uzayı olsun. $x \neq -y$ olmak üzere $\|x\| = \|y\| = 1$ ve $\|x-y\| = 2$ olduğu kabul edilsin. X kesin konveks olduğundan

$$1 = \left\|\frac{x-y}{2}\right\| = \left\|\frac{x+(-y)}{2}\right\| < 1$$

yazılabilir. Bu ise bir çelişkidir. $x = -y$ olduğundan $\delta_X(2) = 1$ dir. Tersine $\delta_X(2) = 1$ olduğunu kabul edilsin. $\|x\| = \|y\| = \|(x+y)/2\| = 1$ şartını sağlayan $x, y \in X$ elemanları alınsın. Buna göre

$$\left\|\frac{x-y}{2}\right\| = \left\|\frac{x+(-y)}{2}\right\| \leq 1 - \delta_X(\|x-(-y)\|) = 1 - \delta_X(2) = 0$$

elde edilir. Bu ise $\|x\| = \|y\|$ ve $\|x+y\| = 2 = \|x\| + \|y\|$ ve böylece $x = y$ olduğunu gösterir. O halde X kesin konvekstir.

Teorem 2.2.26: X Banach uzayının düzgün konveks olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon \in (0,2]$ için $\delta_X(\varepsilon) > 0$ olmasıdır (Agarwal *et al*. 2009).

İspat: X düzgün konveks Banach uzayı olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$, $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ ve $\|x-y\| \geq \varepsilon$ şartlarını sağlayan her $x, y \in X$ için

$$0 < \delta_X(\varepsilon) \leq 1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|$$

olacak şekilde $\delta_X(\varepsilon) > 0$ vardır. Tersine olarak her $\varepsilon \in (0,2]$ için $\delta_X(\varepsilon) > 0$ olacak şekilde X in δ_X konvekslik modülüne sahip olduğu kabul edilsin. Sabit bir $\varepsilon \in (0,2]$

için $\|x-y\| \geq \varepsilon$ ve $\|x\| = 1, \|y\| = 1$ olacak şekilde $x, y \in X$ elemanları alınsın. Konvekslik modülünün tanımından

$$0 < \delta_X(\varepsilon) \leq 1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|$$

ve böylece

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta_X(\varepsilon)$$

elde edilir. Burada x ve y den bağımsız olarak $\delta(\varepsilon) = \delta_X(\varepsilon)$ olur. O halde X düzgün konvekstir.

Teorem 2.2.27: Her düzgün konveks Banach uzayı yansımalıdır (reflexivedir) (Agarwal *et al.* 2009).

Tanım 2.2.28 (Gâteaux Diferansiyellebilir Norm): X bir normlu uzay olmak üzere her $y \in S_X$ için

$$\frac{d}{dt}(\|x_0 + ty\|)\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{\|x_0 + ty\| - \|x_0\|}{t}$$

limiti varsa $x_0 \in S_X$ noktasında X in normu Gâteaux diferensiyellenebilirdir denir. Yukarıdaki limit $\langle y, \nabla\|x_0\|\rangle$ ifadesiyle de gösterilebilir. Burada $\nabla\|x_0\|$, $\varphi(x) = \|x\|$ normunun $x = x_0$ noktasındaki gradyeni olarak adlandırılır. X in normu, S_X in tüm noktalarında Gâteaux diferensiyellenebilirse bu durumda X in normu Gâteaux diferensiyellenebilirdir denir (Agarwal *et al.* 2009).

H bir Hilbert uzayı olmak üzere H'ın normu $\nabla\|x\| = \frac{x}{\|x\|}, x \neq 0$ ile birlikte Gâteaux diferansiyellebilirdir. Gerçekten $x \neq 0$ herhangi $x \in X$ için

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\|x+ty\|^2 - \|x\|^2}{t(\|x+ty\| + \|x\|)}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{2t\langle y, x\rangle + t^2\|y\|^2}{t(\|x + ty\| + \|x\|)}$$
$$= \langle y, \frac{x}{\|x\|}\rangle$$

elde edilir. Bu ise H nın normunun Gâteaux diferansiyellebilir olduğunu gösterir.

Tanım 2.2.29: X bir Banach uzayı olsun. $y \in S_X$ olmak üzere her bir $x \in S_X$ için

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}$$

limiti y den bağımsız olarak mevcut ise X in normu Fréchet diferensiyellenebilirdir denir. Eğer bu limit her $x, y \in S_X$ için x ve y den bağımsız olarak mevcutsa bu durumda X in normu düzgün Fréchet diferensiyellenebilirdir denir (Agarwal *et al.* 2009).

Teorem 2.2.30: X bir Banach uzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

a) X düzgün Fréchet diferensiyellenebilir norma sahiptir.

b) X^* düzgün konvekstir (Agarwal *et al.* 2009).

2.3. Metrik İzdüşüm Operatörü

Bu bölümde, metrik izdüşümün Hilbert uzayındaki tanımı ve bazı özellikleri verilecektir.

Tanım 2.3.1: C, H Hilbert uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve $x \in H$ olsun. Eğer her $z \in C$ için

$$\|y - x\| \leq \|z - x\|$$

şartını sağlayan bir $y \in C$ noktası varsa y ye x in C üzerine metrik izdüşümü adı verilir ve $P_C x$ ile ifade edilir. $s = P_C x - x$ vektörüne ise x in C üzerine izdüşüm vektörü denir. Eğer her $x \in H$ için $P_C x$ var ve tek ise $P_C : H \to C$ operatörüne (C üzerine) metrik izdüşüm adı verilir (Cegielski 2012).

Metrik izdüşümün tanımı gereği her $x \in C$ için $P_C x = x$ dir. Eğer $x \notin C$ ve $P_C x$ metrik izdüşümü varsa bu durumda $P_C x \in \partial C$ dir. Gerçekten $P_C x \in C^o$ ise $B(P_C x, \varepsilon) \subseteq C$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ yarıçaplı bir açık yuvar mevcuttur. Bu durumda z noktası

$$z := x + (1 - \frac{\varepsilon}{\|P_C x - x\|})(P_C x - x) \in B(P_C x, \varepsilon) \subseteq C$$

şeklinde tanımlanırsa $\|z - P_C x\| = \varepsilon$ olacağından $z \in B(P_C x, \varepsilon) \subseteq C$ ve

$$\|z - x\| = \left(1 - \frac{\varepsilon}{\|P_C x - x\|}\right) \|P_C x - x\| < \|P_C x - x\|$$

olur. Dolayısıyla bu eşitsizlik metrik izdüşümünün tanımı ile çelişir. Yani $P_C x \in \partial C$ dir.

Bir Hilbert uzayında C nin kapalılığı ve konveksliği her $x \in H$ için $P_C x$ metrik izdüşümünün varlık ve tekliği için yeterlidir. Bu sebeple metrik izdüşümünün varlık ve tekliği için aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 2.3.2: C, H Hilbert uzayının kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. Bu durumda her $x \in H$ için $P_C x$ metrik izdüşümü mevcut ve tektir (Cegielski 2012).

Teorem 2.3.3 (Minimum Vektör Teoremi): X bir iç çarpım uzayı ve C, X in tam ve konveks bir alt kümesi olsun. Bu durumda $x \in X$ keyfi bir sabit olmak üzere

$$\delta = \|x - y_0\| = \inf\{\|x - y\|: y \in C\}$$

olacak şekilde bir tek $y_0 \in C$ vardır (Bayraktar 1994).

Sonuç 2.3.4: X bir iç çarpım uzayı ve C, X in tam ve konveks alt kümesi olsun. Bu durumda C, normu minimum olan bir vektör içerir (Bayraktar 1994).

Öklid uzaylar için bu teoremin tersi doğrudur ve Motzkin Teoremi olarak adlandırılır.

Aşağıdaki teorem bir $y \in C$ nin $x \in H$ noktasının C konveks kümesi üzerine metrik izdüşümü olabilmesi için gerekli olan bir kriter sunmaktadır.

Teorem 2.3.5 (Karakterizasyon Teoremi): C, H Hilbert uzayının kapalı konveks bir alt kümesi, $x \in H$ ve $y \in C$ olsun. Bu durumda her $z \in C$ için aşağıdakiler denktir.

a) $y = P_C x$ dir.

b) $\langle x - y, z - y \rangle \leq 0$ dir (Cegielski 2012).

İspat: $(\boldsymbol{a}) \Rightarrow (\boldsymbol{b})$ $y = P_C x$, $z \in C$ ve $\lambda \in (0,1)$ olmak üzere

$$z_\lambda = y + \lambda(z - y)$$

olsun. C nin konveksliğinden $z_\lambda \in C$ olduğu aşikardır. (a) şıkkı ve iç çarpımın özelliklerinden

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 \leq \|x - z_\lambda\|^2 &= \|x - y - \lambda(z - y)\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 - 2\,\lambda\langle x - y, z - y\rangle + \lambda^2\|z - y\|^2 \end{aligned}$$

olur. $\lambda > 0$ olduğu göz önüne alınırsa, yukarıdaki eşitsizlikten

$$\langle x - y, z - y \rangle \leq \frac{\lambda}{2} \|z - y\|^2$$

elde edilir. Buradan $\lambda \to 0$ için (b) elde edilir.

$(\boldsymbol{b}) \Rightarrow (\boldsymbol{a})$ İç çarpımın özelliklerinden ve (b) şıkkından herhangi $z \in C$ için

$$\begin{aligned} \|z - x\|^2 &= \|z - y + y - x\|^2 \\ &= \|z - y\|^2 + \|y - x\|^2 + 2\langle z - y, y - x \rangle \\ &\geq \|y - x\|^2 \end{aligned}$$

bulunur. Bu son eşitsizlik ise metrik izdüşümü tanımından dolayı (a) şıkkını verir.

Lemma 2.3.6: H bir Hilbert uzay ve $x, y, z \in H$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

a) $\langle x - y, z - y \rangle \leq 0$ dir.

b) $\langle z - x, y - x \rangle \geq \|y - x\|^2$ dir.

c) $\|z - y\|^2 \leq \|z - x\|^2 - \|y - x\|^2$ dir.

d) $\langle z - x, z - y \rangle \geq 0$ dir (Cegielski 2012).

Teorem 2.3.7: C, H Hilbert uzayının kapalı konveks bir alt kümesi, $x \in H$ ve $y \in C$ olsun. Bu durumda her $z \in C$ için aşağıdaki ifadeler denktir.

a) $y = P_C x$ dir.

b) $\langle y, z - y \rangle \geq \langle x, z - y \rangle$ dir (Cegielski 2012).

Sonuç 2.3.8: C, H Hilbert uzayının kapalı konveks bir alt kümesi olmak üzere, P_C izdüşümü genişlemeyen bir dönüşümdür. Yani her $x, x^* \in H$ için

$$\|P_C x - P_C x^*\| \leq \|x - x^*\|$$

dir (Cegielski 2012).

İspat: $x, x^* \in H$ olmak üzere $y = P_C x$ ve $y^* = P_C x^*$ olsun. Teorem 2.3.7 den $y \in C$ ve her $z \in C$ için

$$\langle y, z - y \rangle \geq \langle x, z - y \rangle \tag{2.5}$$

ve $y^* \in C$ için

$$\langle y^*, z - y^* \rangle \geq \langle x^*, z - y^* \rangle \tag{2.6}$$

yazılabilir. (2.5) eşitsizliğinde $z = y^*$, (2.6) eşitsizliğinde de $z = y$ alınır ve çıkan eşitsizlikler taraf tarafa toplanarak Schwarz eşitsizliğinden

$$\|y - y^*\|^2 = \langle y - y^*, y - y^* \rangle \leq \langle x - x^*, y - y^* \rangle \leq \|x - x^*\| \|y - y^*\|$$

yazılır. Buradan

$$\|y - y^*\| \leq \|x - x^*\|$$

elde edilir. O halde metrik izdüşüm, genişlemeyen bir dönüşümdür.

2.4. Varyasyonel Eşitsizlik Problemi

Bu kısımda sabit nokta teorisiyle ilgili bazı özel problemleri vereceğiz. Öncelikle konveks minimizasyon problemini sunacağız.

A) Konveks Minimizasyon Problemi

Minimizasyon problemi, minimum yapılması gereken özel bir amaç fonksiyonu ile karakterize edilir. Olası amaç fonksiyonları, kar, fiyat, pazar payı ve portfolyo riski gibi kavramları içerir. Genelde bir minimizasyon problemi bir tek amaç fonksiyonundan oluşur.

Tanım 2.4.1: C, H Hilbert uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve $f: H \to \mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun. f nin C üzerindeki yerel minimum noktalarının bulunması işlemine minimizasyon problemi adı verilir. Şayet her $x \in C$ için $f(x^*) \leq f(x)$ ise x^* noktasına f dönüşümünün genel minimum noktası veya

$$\min_{x \in C} f(x) \tag{2.7}$$

probleminin optimal çözümü denir ve bu noktaların kümesi $\mathrm{Argmin}_{x \in C} f(x)$ ile ifade edilir. $f(x^*)$ değerine ise f nin C üzerindeki minimumu denir.

(2.7) deki C kümesi genellikle $c_i: H \to \mathbb{R},\ i \in I = \{1,2, \dots, m\}$ olmak üzere

$$C \coloneqq \{x \in H:\ c_i(x) \leq 0,\ \ i \in I\}$$

şeklinde ifade edilir. Bu durumda (2.7) problemi, aşağıdaki kısıtlı (yan şartlı) minimizasyon problemine denktir:

$$\min_{\substack{c_i(x) \leq 0, i \in I \\ x \in H}} f(x). \tag{2.8}$$

(2.8) problemindeki c_i fonksiyonlarına problemin kısıtları denir. Şayet f ve $c_i,\ i \in I$ fonksiyonları konveks ise bu durumda (2.8) problemine konveks minimizasyon problemi, diferensiyellenebilir ise kısıtlı diferensiyellenebilir minimizasyon problemi adı verilir.

Teorem 2.4.2: C, H Hilbert uzayının boş olmayan konveks bir alt kümesi ve $f: H \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Şayet x^*, f nin C üzerindeki yerel minimum noktası ise bu nokta aynı zamanda genel minimum noktasıdır. Ayrıca f kesin konveks ise bu durumda minimum nokta tektir. Şayet f sürekli, kuvvetli konveks bir dönüşüm ve C kapalı ise $\mathrm{Argmin}_{x\in C} f(x) \neq \emptyset$ dir (Cegielski 2012).

İspat: $x^* \in C$, C üzerinde f nin yerel minimum noktası olsun. $f(x') < f(x^*)$ olacak şekilde bir $x' \in C$ noktası olduğunu kabul edelim. $\lambda \in (0,1)$ için $x_\lambda = (1-\lambda)x^* + \lambda x'$ olsun. C konveks olduğundan $x_\lambda \in C$ olduğu açıktır. f nin konveksliğinden, yeterince küçük $\lambda > 0$ için

$$f(x^*) \leq f(x_\lambda) \leq (1-\lambda)f(x^*) + \lambda f(x') < f(x^*)$$

dır. Bu tezat, her $x \in C$ için $f(x) \geq f(x^*)$ olduğunu gösterir. Yani x^*, f nin genel minimum noktasıdır. Şimdi de f nin kesin konveks ve bazı $x' \neq x^*$ değerleri için $f(x') = f(x^*)$ olduğunu kabul edelim. $x = \frac{1}{2}x^* + \frac{1}{2}x'$ için

$$f(x) < \frac{1}{2}f(x^*) + \frac{1}{2}f(x') = f(x^*) \leq f(x)$$

çelişkisi elde edilir. Şimdi C nin kapalı ve f nin sürekli ve kuvvetli konveks olduğunu kabul edelim. Kuvvetli konveks fonksiyon koercive olduğundan $\mathrm{Argmin}_{x\in C} f(x) \neq \emptyset$ dir.

Örnek 2.4.3: 1) $H = \mathbb{R}$ ve $C = (0,1]$ olmak üzere $f: C \to C,\ f(x) = x^3$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda f fonksiyonu konvekstir. Fakat C kapalı olmadığı için $\min_{x \in C} f(x) = \min_{x \in (0,1]} x^3$ konveks minimizasyon probleminin çözümü yoktur.

2) $H = \mathbb{R}$ ve $C = [-1,3]$ olmak üzere $f: C \to \mathbb{R},\ f(x) = |x| + |x-2|$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda f fonksiyonu konveks olup $\min_{x \in C} f(x) = \min_{x \in [-1,3]} (|x| + |x-2|)$ konveks minimizasyon probleminin çözüm kümesi ise $[0,2]$ dir.

B) Varyasyonel Eşitsizlik Problemi

Tanım 2.4.4: C, $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayının boş olmayan kapalı ve konveks bir alt kümesi ve $F: C \to \mathbb{R}^n$ sürekli bir dönüşüm olmak üzere her $x \in C$ için

$$Fx^*(x - x^*) \geq 0 \tag{2.9}$$

eşitsizliğini sağlayan x^* elemanlarının bulunması problemine, sonlu boyutlu varyasyonel eşitsizlik problemi adı verilir ve $VI(C, F)$ sembolüyle gösterilir. Varyasyonel eşitsizlik probleminin çözüm kümesi ise Ω ile ifade edilir.

Geometrik olarak (2.9) varyasyonel eşitsizliği, Fx^* ın x^* noktasında C kümesine dik olduğunu ifade eder.

Örnek 2.4.5: $C = [0,1]$ olmak üzere $F: C \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu $Fx = 3x$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda her $x \in [0,1]$ için

$$Fx^*(x - x^*) = 3x^*(x - x^*) \geq 0$$

varyasyonel eşitsizliğinin çözümü $x^* = 0$ noktasıdır.

Teorem 2.4.6 (Kompaktlık ve Süreklilik Altında Varlık): C, $\mathbb{R}^n$ nin kompakt konveks bir alt kümesi ve F, C üzerinde sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda varyasyonel eşitsizlik probleminin en az bir çözümü vardır (Nagurney 2002).

İspat: Brouwer Sabit Nokta Teoremi'nden $T: C \to C$ sürekli bir dönüşüm olmak üzere $x^* = Tx^*$ olacak şekilde en az bir $x^* \in C$ vardır. I özdeş dönüşüm ve $\gamma \in \mathbb{R}$ olmak üzere P_C ve $(I - \gamma F)$ sürekli olduğu için $P_C(I - \gamma F)$ de sürekli olur. Bu durumda $P_C(I - \gamma F)$ dönüşümünün en az bir sabit noktası mevcuttur.

C kümesi sınırsız olursa Brouwer Sabit Nokta Teoremi uygulanamaz. Dolayısıyla varyasyonel eşitsizlik probleminin çözümünün varlığını gösterebilmek için bazı şartlara ihtiyaç duyulur.

$B(0, r)$, 0 merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar olmak üzere $C_r = C \cap B(0, r)$ olsun. Bu durumda C_r sınırlıdır. Her $y \in C_r$ için

$$F(x_r^*)(y - x_r^*) \geq 0$$

eşitsizliğini sağlayan $x_r^* \in C_r$ noktasının bulunması problemini VI_r ile gösterelim.

Teorem 2.4.7: $VI(C, F)$ varyasyonel eşitsizlik probleminin çözümünün olması için gerek ve yeter şart $\|x_r^*\| < r$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısının ve VI_r nin bir x_r^* çözümünün mevcut olmasıdır (Nagurney 2002).

Sonuç 2.4.8: F dönüşümü koersivlik şartını sağlasın. Yani her $x \in C$ ve uygun $x_0 \in C$ için $\|x\| \to \infty$ iken

$$\frac{\big(F(x) - F(x_0)\big).(x - x_0)}{\|x - x_0\|} \to \infty$$

olsun. Bu durumda $VI(C,F)$ nin bir çözümü vardır.

Sonuç 2.4.9: $x^* \in C^o$ noktası $VI(C,F)$ nin bir çözümü olması durumunda $F(x^*) = 0$ dır.

Teorem 2.4.10 (Teklik): F, C üzerinde tanımlı kesin monoton bir operatör olsun. Bu durumda $VI(C,F)$ nin bir çözümü varsa tektir (Nagurney 2002).

İspat: x_1 ve x_2 birbirinden farklı iki çözüm olsun. Bu durumda her $x \in C$ için x_1 ve x_2 sırasıyla

$$F(x_1)(x - x_1) \geq 0 \tag{2.10}$$

ve

$$F(x_2)(x - x_2) \geq 0 \tag{2.11}$$

eşitsizliklerini sağlar. (2.10) ve (2.11) eşitsizliklerinde x yerine sırasıyla x_2 ve x_1 yazılırsa

$$\big(F(x_1) - F(x_2)\big).(x_2 - x_1) \geq 0$$

elde edilir. Ancak bu eşitsizlik kesin monotonluk tanımıyla çelişir. Bu durumda $x_1 = x_2$ dir.

Teorem 2.4.11: F kuvvetli monoton bir operatör olsun. Bu durumda $VI(C,F)$ nin bir tek x^* çözümü vardır (Nagurney 2002).

İspat: Varlık ve teklik, sırasıyla kuvvetli monotonluğun koersivliği ve kesin monotonluğu gerektirmesinden elde edilir.

Bu durumda C kümesinin sonsuz olması halinde F operatörünün kuvvetli monotonluğu, çözümün varlık ve tekliğini garantiler. C nin kompakt olması durumunda F nin sürekliliği çözümün varlığını garanti ederken, F nin kesin monotonluğu da tekliğini garanti eder.

Teorem 2.4.12: α ve L, $0 < \gamma < \frac{\alpha}{L^2}$ eşitsizliğini sağlayan sabitler olmak üzere F, α-kuvvetli monoton ve L-Lipschitz sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda her $x, y \in C$ için $(1-\gamma\alpha)^2 \leq \beta < 1$ olmak üzere

$$\|P_C(x-\gamma Fx) - P_C(y-\gamma Fy)\| \leq \beta\|x-y\|$$

dir. Yani $P_C(I-\gamma F)$, β-daraltan bir dönüşümdür (Nagurney 2002).

Teorem 2.4.12 ve Banach Sabit Nokta Teoremi'nden aşağıdaki sonuç yazılabilir.

Sonuç 2.4.13: $P_C(I-\gamma F)$ dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır (Nagurney 2002).

Teorem 2.4.14: F, v-ters kuvvetli monoton bir dönüşüm ve $\gamma \in (0,2v)$ olsun. Bu durumda her $x, y \in C$ için

$$\|P_C(x-\gamma Fx) - P_C(y-\gamma Fy)\| \leq \|x-y\|$$

dir.

Örnek 2.4.15: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ birinci mertebeden sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olsun.

$$f(x_0) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$$

eşitliğini sağlayan $x_0 \in [a,b]$ noktalarını araştıralım. Burada üç durum ele alınır.

1. $a < x_0 < b$ ise $f'(x_0) = 0$ dır.

2. $x_0 = a$ ise $f'(x_0) > 0$ dır.

3. $x_0 = b$ ise $f'(x_0) < 0$ dır.

Bu üç durum her $x \in [a, b]$ için

$$f'(x_0)(x - x_0) \geq 0$$

şeklinde bir tek eşitsizlikle de verilebilir. Bu eşitsizliğe $\mathbb{R}$ de varyasyonel eşitsizlik adı verilir.

Örnek 2.4.16: f, $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayının kapalı ve konveks bir C alt kümesi üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. Örnek 2.4.15 deki gibi, yine

$$f(x_0) = \min_{x \in C} f(x)$$

eşitliğini sağlayan $x_0 \in C$ elemanlarını araştıralım. x_0, f fonksiyonunu minimum yapan değer ve $x \in C$ olsun. C konveks olduğundan $(1 - t)x_0 + tx = x_0 + t(x - x_0), 0 \leq t \leq 1$, C nin bir elemanıdır. Φ fonksiyonunu

$$\Phi(t) = f\big(x_0 + t(x - x_0)\big), 0 \leq t \leq 1$$

şeklinde tanımlayalım. Φ fonksiyonu minimum değerini $t = 0$ noktasında alır. Dolayısıyla her $x \in C$ için

$$\Phi'(0) = \nabla f(x_0)(x - x_0) \geq 0$$

olur. Sonuç olarak x_0 noktası her $x \in C$ için

$$x_0 \in C: \nabla f(x_0)(x - x_0) \geq 0 \tag{2.12}$$

şeklindeki varyasyonel eşitsizliği sağlar. Şayet C sınırlı ise, (2.12) varyasyonel eşitsizliğini sağlayan en az bir x_0 noktası vardır.

Aşağıdaki önermeler minimizasyon problemi ile varyasyonel eşitsizlik problemi arasındaki bağlantıyı vermektedir.

Önerme 2.4.17: f, kapalı ve konveks bir C kümesi üzerinde tanımlı ve sürekli diferensiyellenebilir reel değerli bir fonksiyon olsun. Şayet x^*, (2.7) minimizasyon probleminin bir çözümü ise aynı zamanda her $x \in C$ için (2.12) varyasyonel eşitsizlik probleminin de bir çözümü olur (Nagurney 2002).

Önerme 2.4.18: f konveks fonksiyon ve x^*, $VI(C, \nabla f)$ varyasyonel eşitsizlik probleminin bir çözümü olması durumunda x^*, (2.7) minimizasyon probleminin de bir çözümüdür (Nagurney 2002).

Tanım 2.4.19: $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \colon x_i > 0, \ i = 1,2, \dots, n\}$ ve $F \colon \mathbb{R}^\mathrm{n} \to \mathbb{R}^\mathrm{n}$ bir dönüşüm olsun. $\mathbb{R}^n_+$ üzerinde

$$F(x^*) \geq 0 \quad \text{ve} \quad F(x^*)x^* = 0 \tag{2.13}$$

şeklindeki bir eşitsizlik ve denklemden oluşan sistemi çözen x^* noktalarının bulunmasına lineer olmayan tamamlayıcı problem adı verilir. F dönüşümünün afin olması durumunda (yani M, $n \times n$ tipinde bir matris ve b, $n \times 1$ tipinde bir vektör olmak üzere $F(x) = Mx + b$ şeklinde ise) (2.13) problemi, lineer tamamlayıcı problem olarak ifade edilir.

Tamamlayıcı problem ile varyasyonel eşitsizlik problemi arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir.

Önerme 2.4.20: Çözüm kümeleri boştan farklı olmak üzere $VI(\mathbb{R}_+^n, F)$ ve (2.13) problemlerinin çözüm kümeleri birbirine eşittir (Nagurney 2002).

Varyasyonel eşitsizlik ve sabit nokta problemleri arasındaki bağıntı izdüşüm operatörleri kullanılarak aşağıdaki şekilde ifade edilir.

Teorem 2.4.21: C, kapalı ve konveks bir küme olsun. Bu durumda $x^* \in C$ nin $VI(C, F)$ varyasyonel eşitsizlik probleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $\gamma > 0$ için x^* ın $P_C(I - \gamma F): C \to C$ dönüşümünün sabit noktası olmasıdır. yani

$$P_C(x^* - \gamma F x^*) = x^*$$

olmasıdır (Nagurney 2002).

İspat: x^*, varyasyonel eşitsizliğin bir çözümü olsun. Bu durumda her $x \in C$ için

$$F(x^*).(x - x^*) \geq 0$$

yazılabilir. Bu eşitsizlik önce $-\gamma < 0$ ile çarpılır ve her iki tarafa $x^*(x - x^*)$ eklenirse

$$x^*(x - x^*) \geq [x^* - \gamma F x^*](x - x^*)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu durumda Teorem 2.3.7 den $P_C(x^* - \gamma F x^*) = x^*$ bulunur. Tersine $\gamma > 0$ için $P_C(x^* - \gamma F x^*) = x^*$ olduğu kabul edilirse her $x \in C$ için

$$x^*(x - x^*) \geq [x^* - \gamma F x^*](x - x^*)$$

ve buradan her $y \in C$ için

$$F(x^*).(y - x^*) \geq 0$$

elde edilir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. İterasyon Yöntemleri

Bir dönüşümün sabit noktası veya noktaları bulunurken Picard, Kirk, Krasnoselskij, Mann, Ishikawa, S ve Picard-Mann hybrid iterasyonları gibi bir çok iterasyon kullanılır.

Picard İterasyonu: (X,d) metrik uzay, $C \subseteq X$ kapalı alt küme ve $T : C \to C$ dönüşüm olsun. $x_0 \in C$ olmak üzere Picard iterasyonu

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \ \ n = 1,2,\dots \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır. Picard iterasyonu bazen ardışık yaklaşımlar dizisi (sequence of successive approximations) olarak da adlandırılabilir (Picard 1890).

Tam metrik uzayda tanımlı daraltan dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşmak için kullanılan iterasyonlardan biri de Picard iterasyonudur. Daraltan dönüşüm yerine farklı sınıftan bir dönüşüm alınırsa bu iterasyon, dönüşümün sabit noktasına yakınsayamayabilir.

Örnek 3.1.1: $X = [0,1]$ olmak üzere $T: [0,1] \to [0,1]$, $Tx = 1 - x$ olsun. T genişlemeyen bir dönüşüm ve $F(T) = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ dir. Herhangi bir $x_0 = a \neq \frac{1}{2}$ noktası için (3.1) Picard iterasyonu

$$\begin{aligned}
x_1 &= Tx_0 = 1 - a \\
x_2 &= Tx_1 = T^2 x_0 = a \\
x_3 &= Tx_2 = T^2 x_1 = T^3 x_0 = 1 - a \\
&\vdots \\
x_n &= Tx_{n-1} = T^2 x_{n-2} = \cdots = T^n x_0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

şeklinde olup $(a, 1-a, a, 1-a, \dots)$ dizisine denk gelir. Bu dizi $a \neq \frac{1}{2}$ için yakınsak olmadığı için Picard iterasyonu dönüşümün sabit noktasına yakınsamaz. Dolayısıyla aranan sabit noktayı bulmak için diğer iterasyon metotlarını kullanmak gerekir.

Krasnoselskij İterasyou: X bir normlu uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in X$ ve $\lambda \in [0,1]$ için Krasnoselskij iterasyonu

$$x_{n+1} = (1-\lambda)x_n + \lambda T x_n, \quad n = 0,1,2, \dots \tag{3.2}$$

şeklinde ifade edilir. Bu iterasyon $\lambda = 1$ için (3.1) Picard iterasyonuna indirgenebilir (Krasnoselskij 1955).

Kirk İterasyonu: X bir normlu uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Kirk iterasyonu, $x_0 \in X$ olmak üzere

$$x_{n+1} = \alpha_0 x_n + \alpha_1 T x_n + \alpha_2 T^2 x_n + \cdots + \alpha_k T^k x_n \tag{3.3}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $i = 0,1,2, \dots, k$ için $\alpha_1 > 0$ ve $\alpha_i \geq 0$ olmak üzere

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = 1$$

dir.

(3.3) eşitliği ile verilen Kirk iterasyonu $k = 1$ için Krasnoselskij iterasyonuna indirgenebilir (Kirk 1971).

Mann İterasyonu: Mann (1953) tarafından kurulmuş ve Banach daralma ilkesini sağlayamayan dönüşümlerin sabit noktalarını elde etmek amacıyla kullanılmıştır. X normlu uzay, $C \subseteq X$ boştan farklı konveks bir alt küme, $T: C \to C$ dönüşüm ve $x_0 \in C$ keyfi nokta olmak üzere Mann iterasyonu

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n\,,\ \ n = 0,1,2,\ldots \qquad (3.4)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\{\alpha_n\}$, $(0,1)$ aralığında

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0\,,\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

şartlarını sağlayan bir dizi şeklindedir (Mann 1953).

(3.4) eşitliği ile verilen Mann iterasyonunda $\alpha_n = \lambda$ (sabit) olarak alınırsa bu iterasyon Krasnoselskij iterasyonuna indirgenir (Berinde 2006).

Mann'ın elde ettiği sonuçlar Franks and Marzec (1971) çalışmasında, benzer şekilde Franks ve Marzec'in sonuçları da Rhoades (1974) çalışmasında genişletilmiştir. Yine Rhoades (1974) çalışmasıyla, herhangi kapalı ve sınırlı aralıktan yine bu aralığa tanımlı bir dönüşüm (self-map) için Mann iterasyonunun bu dönüşümün bir sabit noktasına yakınsadığını göstermiştir.

Örnek 3.1.2: $X = \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ kümesi üzerinde $T\colon X \to X$, $Tx = \frac{1}{x}$ olarak tanımlanırsa, Mann iterasyonu bu dönüşümün sabit noktası olan $x = 1$ e yakınsar.

Ishikawa İterasyonu: Lipschitzian ve pseudocontractive dönüşümler için Mann iterasyonunun yetersizliği durumunda yeni bir iterasyon çeşidi olarak ortaya atılmıştır. Bu iterasyon ilk olarak Hilbert uzayının konveks ve kompakt alt kümesi üzerinde tanımlı Lipschitzian ve pseudocontractive dönüşümün sabit noktaya güçlü yakınsadığını göstermek için kullanılmıştır.

X normlu uzay, $C \subseteq X$ boş kümeden farklı konveks alt küme, $T\colon C \to C$ bir dönüşüm ve $x_0 \in C$ keyfi bir nokta olmak üzere Ishikawa iterasyonu

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n \, , \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n, \ \ n = 0,1,2,\dots \end{cases} \tag{3.5}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}, (0,1)$ aralığında

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \, , \quad \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0 \, , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

şartlarını sağlayan diziler şeklindedir (Ishikawa 1974).

(3.5) eşitliği ile verilen iterasyonda $\beta_n = 0$ alınırsa bu iterasyon Mann iterasyonuna indirgenmiş olur. Buna rağmen Mann ve Ishikawa iterasyonları için yakınsama sonuçları arasında genel bir bağ yoktur (Berinde 2006).

Rhoades and Soltuz, 2003-2004 yıllarında dönüşümlerin çeşitli sınıfları için Ishikawa iterasyonunun yakınsaklığının Mann iterasyonunun yakınsaklığına denk olduğunu ifade etmişlerdir.

S İterasyonu: X bir lineer uzay, $C \subseteq X$ boş kümeden farklı konveks alt küme, $T: C \to C$ bir dönüşüm ve $x_1 \in C$ keyfi bir nokta olmak üzere S-iterasyonu

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)Tx_n + \alpha_n T y_n, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n, \ \ n = 1,2,\dots \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in (0,1)$ dir (Agarwal *et al*. 2007).

Picard-Mann Hybrid İterasyonu: Khan ve Sahu tarafından ayrı ayrı tanımlanmıştır ve Khan tarafından Picard-Mann hybrid (PMH) iterasyonu olarak ifade edilmiştir. Bu iterasyon, X bir normlu uzay, $C \subseteq X$ boş kümeden farklı konveks alt küme, $T: C \to C$ bir dönüşüm ve $x_0 \in C$ keyfi bir nokta olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ty_n, \\ y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n)Tx_n, \quad n = 0,1,2, \dots \end{cases} \tag{3.6}$$

şeklinde ifade edilmiştir.

3.2. Bazı Önemli Tanım ve Lemmalar

Burada çalışmamızda kullanacağımız bazı tanım ve lemmalar verilmiştir.

Tanım 3.2.1: C, bir X Banach uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve $T: C \to C$ bir dönüşüm olsun.

a) C deki $\{x_n\}$ dizisi x^* a zayıf ve $\{Tx_n\}$ dizisi p ye güçlü yakınsadığı zaman $Tx^* = p$ oluyorsa T ye p de demicloseddir denir.

b) Her sınırlı $\{x_n\}$ dizisinin bir $\left\{x_{n_j}\right\}$ alt dizisi mevcut ve $\left\{Tx_{n_j}\right\}$ dizisi T nin görüntü kümesinde yakınsak ise T dönüşümüne tamamen süreklidir denir (Goebel ve Kirk 1990).

Bir dönüşüm hem sürekli hem kompakt ise tamamen süreklidir, denir.

Tanım 3.2.2 (Opial Şartı): Bir X Banach uzayında $x_n \rightharpoonup x$ zayıf yakınsaması her $y \neq x$ için

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \limsup_{n\to\infty} \|x_n - y\|$$

olmasını gerektiriyorsa, X Opial şartını sağlıyor denir (Opial 1967).

Örnek 3.2.3: Her Hilbert uzayı Opial şartını sağlar. Bunun için bir H Hilbert uzayında $\{x_n\}$ dizisi $x \in H$ noktasına zayıf yakınsak ise her $y \in H$ ve $y \neq x$ için

$$\limsup_{n\to\infty}\|x_n - x\| < \limsup_{n\to\infty}\|x_n - y\|$$

olur. Her zayıf yakınsak dizi sınırlı olduğundan $\limsup_{n\to\infty}\|x_n - x\|$ ve $\limsup_{n\to\infty}\|x_n - y\|$ sonludur.

$$\|x_n - y\|^2 = \|x_n - x + x - y\|^2 = \|x_n - x\|^2 + \|x - y\|^2 + 2\langle x_n - x, x - y\rangle$$

olduğundan

$$\limsup_{n\to\infty}\|x_n - y\|^2 > \limsup_{n\to\infty}\|x_n - x\|^2$$

bulunur.

Lemma 3.2.4: X düzgün konveks Banach uzayı, C de X in boş olmayan kapalı, konveks bir alt kümesi olsun. $T: C \to C$ genişlemeyen bir dönüşüm ise $I - T$ sıfırda demiclosedtır (Goebel and Kirk 1990).

Lemma 3.2.5: C, Opial şartını sağlayan yansımalı bir X Banach uzayının boş olmayan konveks alt kümesi ve $T: C \to X$, sabit noktaların kümesi boştan farklı ve $I - T$ sıfırda demiclosed olacak şekilde bir dönüşüm olmak üzere $\{x_n\}$, C de $\lim_{n\to\infty}\|x_n - Tx_n\| = 0$ ve her $p \in F(T)$ için $\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\|$ limitinin varlığı şartlarını sağlayan bir dizi ise bu dizi T nin bir sabit noktasına zayıf yakınsar (Agarwal *et al.* 2007).

Lemma 3.2.6: C, bir H Hilbert uzayının boş olmayan kapalı ve konveks bir alt kümesi ve $\{x_n\}$, H da bir dizi olmak üzere, her $z \in C$ ve $n = 0,1,2, \ldots$ için

$$\|x_{n+1} - z\| \leq \|x_n - z\|$$

eşitsizliği sağlanması durumunda $\{P_C x_n\}$, bir $u \in C$ noktasına kuvvetli yakınsar (Takahashi and Toyoda 2003).

İspat: $z_n = P_C x_n$ diyelim. $m > n$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\|z_m - z_n\|^2 &= 2\|x_m - z_m\|^2 + 2\|x_m - z_n\|^2 - 4\left\|x_m - \frac{1}{2}(z_m + z_n)\right\|^2 \\
&\leq 2\|x_m - z_m\|^2 + 2\|x_m - z_n\|^2 - 4\|x_m - z_m\|^2 \\
&\leq 2\|x_m - z_n\|^2 - 2\|x_m - z_m\|^2 \\
&\leq 2\|x_n - z_n\|^2 - 2\|x_m - z_m\|^2 \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\|x_m - z_m\|^2 \leq \|x_n - z_n\|^2$$

olduğundan $\lim_{n\to\infty}\|x_n - z_n\|^2$ limiti mevcuttur. (3.7) de $n, m \to \infty$ için limit alınırsa $\{z_n\}$ nin bir Cauchy dizisi olduğu görülmüş olur. Böylece $\{z_n\}$ bir $u \in C$ noktasına kuvvetli yakınsar.

Lemma 3.2.7: C, bir H Hilbert uzayının boş olmayan kapalı, konveks bir alt kümesi ve $A: C \to H$ α-ters kuvvetli monoton dönüşüm olması halinde $VI(C, A)$ varyasyonel eşitsizlik probleminin en az bir çözümü vardır (Takahashi and Toyoda 2003).

İspat: $0 < \lambda \leq 2\alpha$ olmak üzere $T: C \to C$ dönüşümünü $Tx = P_C(x - \lambda Ax)$ şeklinde tanımlayalım. P_C genişlemeyen olduğu için T dönüşümü de genişlemeyendir. Buradan $F(T)$ boş kümeden farklıdır. Her $\lambda > 0$ için

$$u \in \Omega \Leftrightarrow u = P_C(u - \lambda Au)$$

olduğundan dolayı $VI(C,A)$ nın en az bir çözümü vardır.

Lemma 3.2.8: X düzgün konveks bir reel Banach uzayı ve $n \geq 1$ için $0 \leq p \leq t_n \leq q < 1$ olsun. $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$, X de iki dizi olmak üzere uygun $r \geq 0$ için

$$\limsup_{n\to\infty}\|x_n\| \leq s, \quad \limsup_{n\to\infty}\|y_n\| \leq s \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty}\|t_n x_n + (1-t_n)y_n\| = s$$

şartları sağlanıyor olsun. Bu durumda $\lim_{n\to\infty}\|x_n - y_n\| = 0$ dır (Schu 1991).

İspat: $s = 0$ için ispat açıktır. $s > 0$ olsun. Kabul edelim ki $\{x_n - y_n\}$ dizisi sıfıra yakınsaktır. Bu durumda $\{x_n - y_n\}$ dizisinin $\inf_i\|x_{n_i} - y_{n_i}\| > 0$ olacak şekilde $\{x_{n_i} - y_{n_i}\}$ alt dizisi vardır. $\limsup_{n\to\infty}\|x_n\| \leq s$ ve $\limsup_{n\to\infty}\|y_n\| \leq s$ olduğundan $\|x_{n_i}\| \leq r,\ \|y_{n_i}\| \leq r$ olacak şekilde $\{n_i\}$ alt dizisi için $r \in (s, s+1)$ olduğunu kabul edebiliriz. Her $i \in \mathbb{N}$ için $2p(1-q)\delta_X\left(\frac{\varepsilon}{r}\right) < 1$ ve $\|x_{n_i} - y_{n_i}\| \geq \varepsilon > 0$ olacak şekilde $r \geq \varepsilon > 0$ seçebiliriz. X düzgün konveks olduğundan her $t \in (0,1)$, $r > 0$, $x, y \in X$, $\|x\| \leq r$ ve $\|y\| \leq r$ için

$$\|tx + (1-t)y\| \leq r\left[1 - 2\min\{t, 1-t\}\delta_X\left(\frac{\|x-y\|}{r}\right)\right] \tag{3.8}$$

elde edilir. (3.8)'den

$$\begin{aligned}\|t_{n_i}x_{n_i} + (1-t_{n_i})y_{n_i}\| &\leq r\left[1 - 2t_{n_i}(1-t_{n_i})\delta_X\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)\right]\\ &\leq r\left[1 - 2p(1-q)\delta_X\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)\right] < s\end{aligned}$$

olur. Bu durum hipotezle çeliştiği için ispat tamamlanmış olur.

Lemma 3.2.9: Kabul edelim ki $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$

a) $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ veya denk olarak $\prod_{n=0}^{\infty}(1-\alpha_n) = 0$

b) $\limsup_{n\to\infty} \beta_n \leq 0$ veya **b′)** $\sum_n \alpha_n\beta_n < \infty$

şartlarını sağlayan reel diziler ve $\{x_n\}$ de her $n \geq 0$ için

$$x_{n+1} \leq (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n\beta_n \tag{3.9}$$

eşitsizliğini sağlayan negatif olmayan bir reel dizi olsun. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ dır (Xu and Kim 2003).

İspat: Öncelikle (a) ve (b) şartlarının sağlandığını varsayalım. Herhangi $\varepsilon > 0$ ve $n > N$ için $\beta_n < \varepsilon$ olacak şekilde yeterince büyük bir $N \geq 1$ tamsayısı mevcuttur. (3.9) dan $n > N$ için

$$\begin{aligned} x_{n+1} &\leq (1-\alpha_n)x_n + \varepsilon\alpha_n \\ &\leq (1-\alpha_n)(1-\alpha_{n-1})x_{n-1} + \varepsilon\big(1-(1-\alpha_{n-1})(1-\alpha_n)\big) \end{aligned}$$

bulunur. Tümevarımla $n > N$ için

$$x_{n+1} \leq \prod_{j=N}^{n}(1-\alpha_j)x_N + \varepsilon\left[1-\prod_{j=N}^{n}(1-\alpha_j)\right]$$

olur. (a) şartını kullanarak son eşitsizlikte üst limit alınırsa

$$\limsup_{n\to\infty} x_{n+1} \leq \varepsilon$$

elde edilir. Şimdi ise (a) ve (b′) şartlarının sağlandığını varsayalım. Yine (3.9) eşitsizliği göz önüne alınırsa her $n > m$ için

$$x_{n+1} \leq \prod_{j=m}^{n} (1-\alpha_j)x_m + \sum_{j=m}^{n} \alpha_j \, \beta_j$$

bulunur. Son eşitsizlikte önce $n \to \infty$ sonra $m \to \infty$ için limit alınırsa

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \leq 0$$

elde edilir.

Lemma 3.2.10 H bir Hilbert uzay olmak üzere $x \in H$ olsun.

a) Her $y \in C$ için $\langle x - z, y - z\rangle \leq 0 \Leftrightarrow z = P_C x$ dir.

b) Her $y \in C$ için $\|x - z\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|y - z\|^2 \Leftrightarrow z = P_C x$ dir.

c) Her $x, y \in H$ için $\langle P_C x - P_C y, x - y\rangle \geq \|P_C x - P_C y\|^2$ dir. Dolayısıyla P_C genişlemeyen ve monotondur (Ceng-2011).

Genel olarak, izdüşüm dönüşümü genişlemeyendir.

Lemma 3.2.11. $T: C \to C$ genişlemeyen bir dönüşüm ve $\mathrm{F}(T) \neq \emptyset$ olsun. Eğer $\{x_n\}$ dizisi C de x e zayıf ve $\{(I - T)x_n\}$ dizisi de y ye kuvvetli yakınsıyorsa $(I - T)x = y$ dir. Özel olarak $y = 0$ ise $x \in \mathrm{F}(T)$ dir (Ansari-2011).

Lemma 3.2.12 $\lambda \in (0,1)$ ve $\mu > 0$ olsun. $\kappa, \eta > 0$ olmak üzere $F: C \to H$ κ-Lipschitzian ve η-kuvvetli monoton operatör olsun. $T: C \to C$ dönüşümü ve her $x \in C$ için $T^\lambda: C \to H$ dönüşümü

$$T^\lambda x = Tx - \lambda\mu F(Tx)$$

şeklinde tanımlanır. T^λ, $\mu < 2\eta/\kappa^2$ için bir daraltan dönüşümdür. Yani her $x, y \in C$ ve $\tau = 1 - \sqrt{1 - \mu(2\eta - \mu\kappa^2)} \in (0, 1]$ için

$$\|T^\lambda x - T^\lambda y\| \le (1 - \lambda\tau)\|x - y\|$$

dir (Ceng-2011).

Lemma 3.2 13. $\{\gamma_n\}, \{\delta_n\}$ birer dizi olmak üzere $\{s_n\}$,

$$s_{n+1} \le (1 - \gamma_n)s_n + \gamma_n\delta_n$$

şartını sağlayan negatif olmayan sayıların bir dizisi olsun. Bu durumda

i. $\{\gamma_n\} \subset [0,1]$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = 0$ veya buna denk olarak

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1 - \gamma_n) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n}(1 - \gamma_k) = 0$$

dır.

ii. $\limsup_{n\to\infty} \delta_n \le 0$ veya $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n\delta_n$ yakınsaktır. Dolayısıyla, $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$ dır.

Lemma 3.2.14: K, H Hilbert uzayının boş olmayan kapalı ve konveks bir alt kümesi ve $x \in H$ ve $y \in K$ olsun. Her $z \in K$ için $\langle x - y, y - z\rangle \ge 0$ olması için gerek ve yeter şart $y = P_K x$ olmasıdır (Marino 2006).

Lemma 3.2.15: A, H Hilbert uzayında kuvvetli pozitif lineer sınırlı bir operatör olsun. $\kappa > 0$ ve $0 < \rho \le \|A\|^{-1}$ olmak üzere $\|I - \rho A\| \le 1 - \rho\kappa$ dır (Marino 2006).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, önce sabit noktalara ulaşmak için genel iteratif şemalar ve daha sonra konveks minimizasyon problemlerini çözmek için genel iteratif şemalar verilecektir.

4.1. Sabit Noktaların Bulunması İçin Genel İteratif Şemalar

H bir Hilbert uzayı ve C, H nin boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi olsun. $\kappa, \eta \geq 0$ olmak üzere $F: C \to H$ κ-Lipschitzian, η-kuvvetli monoton operatör, $V: C \to H$ L-Lipschitzian ($L \geq 0$) dönüşüm ve $\mathrm{F}(T) \neq \emptyset$ olmak üzere $T: C \to C$ genişlemeyen bir dönüşüm olsun. $0 < \mu < 2\eta/\kappa^2$ ve $0 \leq \gamma L \leq \tau$ için $\tau = 1 - \sqrt{1 - \mu(2\eta - \mu\kappa^2)}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$x_t = P_C[t\gamma V x_t + (I - t\mu F)T x_t] \tag{4.1}$$

olmak üzere $\{x_t\}_{t \in (0,1)}$ implicit şemasını teşkil edelim.

$$\langle(\mu F - \gamma V)\tilde{x}, \tilde{x} - z\rangle \leq 0, \quad \forall z \in F(T) \tag{4.2}$$

varyasyonel eşitsizlik problemini çözerek, $\{x_t\}$ nin T nin sabit noktası olan $\tilde{x}$ e kuvvetli yakınsaklığının ispatını vereceğiz. $\{\alpha_n\} \subset (0,1)$ ve $x_0 \in C$ olmak üzere

$$x_{n+1} = P_C[\alpha_n \gamma V x_n + (I - \alpha_n \mu F)T x_n], \quad \forall n \geq 0 \tag{4.3}$$

ile $\{x_n\}$ dizisinin explicit şemasını göstereceğiz ve bu dizinin (4.2) nin de çözümü olan $\tilde{x}$ sabit noktasına kuvvetli yakınsaklığının ispatını vereceğiz.

4.1.1. İmplicit şemanın yakınsaklığı

C, H bir Hilbert uzayının boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi ve $T: C \to C$ genişlemeyen bir dönüşüm olsun. T nin sabit noktalarının $F(T)$ kümesi, boş olmayan kapalı ve konveks bir kümedir. Bu nedenle H den $F(T)$ üzerine tanımlı metrik izdüşümü iyi tanımlıdır. $\kappa, \eta > 0$ olmak üzere $F: C \to H$ κ-Lipschitzian, η-kuvvetli monoton operatör ve $t \in (0,1)$ ve $V: C \to H$, L-Lipschitzian dönüşüm olsun. $0 < \mu < 2\eta/\kappa^2$ ve $0 \leq \gamma L < \tau$ olmak üzere $\tau = 1 - \sqrt{1 - \mu(2\eta - \mu\kappa^2)}$ olduğunu kabul edelim. S_t, C de kendi üzerine

$$S_t x = P_C[t\gamma Vx + (I - t\mu F)Tx], \quad \forall x \in C \tag{4.4}$$

şeklinde tanımlı bir dönüşüm olsun. S_t daraltan bir dönüşümdür. Ayrıca Lemma 3.2.12'den

$$\begin{aligned}
\|S_t x - S_t y\| &= \|P_c[t\gamma Vx + (I - t\mu F)Tx] - P_C[t\gamma Vy + (I - t\mu F)Ty]\| \\
&\leq \|[t\gamma Vx + (I - t\mu F)Tx] - [t\gamma Vy + (I - t\mu F)Ty]\| \\
&\leq t\gamma\|Vx - Vy\| + \|(I - t\mu F)Tx - (I - t\mu F)Ty\| \\
&\leq t\gamma L\|x - y\| + (1 - t\tau)\|x - y\| \\
&= (1 - t(\tau - \gamma L))\|x - y\|
\end{aligned}$$

olur. (4.1)'in sabit noktasını x_t ile gösterecek olursak S_t, C de tek bir x_t sabit noktasına sahiptir.

Aşağıdaki önerme (4.1) ile tanımlı $\{x_t\}$ nin özelliklerini özetlemeketedir.

Önerme 4.1: $\kappa, \eta > 0$ olmak üzere $F: C \to H$ κ-Lipschitzian, η-kuvvetli monoton operatör, $t \in (0,1)$ ve $V: C \to H$, L-Lipschitzian dönüşüm olsun. $0 < \mu < 2\eta/\kappa^2$ ve

$0 \leq \gamma L < \tau$ olmak üzere $\tau = 1 - \sqrt{1 - \mu(2\eta - \mu\kappa^2)}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda (4.1) ile tanımlı $\{x_t\}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

a) $\{x_t\}_{t\in(0,1)}$ sınırlıdır,

b) $\lim_{t\to 0}\|x_t - Tx_t\| = 0$,

c) x_t, (0,1) den C ye sürekli bir eğri belirtir (Ceng 2011).

İspat: (a) Keyfi bir $p \in F(T)$ alalım.

$$\begin{aligned}
\|x_t - p\| &= \|P_C[t\gamma Vx_t + (I - t\mu F)Tx_t] - P_C p\| \\
&\leq \|t\gamma Vx_t + (I - t\mu F)Tx_t - p\| \\
&= \big\|(I - t\mu F)Tx_t - (I - t\mu F)p + t\big(\gamma Vx_t - \mu F(p)\big)\big\| \\
&\leq (1 - t\tau)\|x_t - p\| + t(\gamma L\|x_t - p\| + \|\gamma Vp - \mu F(p)\|) \\
&= (1 - t(\tau - \gamma L))\|x_t - p\| + t\|\gamma Vp - \mu F(p)\|
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\|x_t - p\| \leq \|\gamma Vp - \mu F(p)\|/(\tau - \gamma L)$$

dir. Dolayısıyla $\{x_t\}_{t\in(0,1)}$ sınırlıdır.

(b) $\{x_t\}$ sınırlı olduğundan $\{Vx_t\}$ ve $\{FTx_t\}$ de sınırlıdır. Dolayısıyla $\{x_t\}$ nin tanımından

$$\begin{aligned}
\|x_t - Tx_t\| &= \|P_C[t\gamma Vx_t + (I - t\mu F)Tx_t] - Tx_t\| \\
&\leq \|t\gamma Vx_t + (I - t\mu F)Tx_t - Tx_t\| \\
&= t\|\gamma Vx_t - \mu FTx_t\| \to 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

(c) $t, t_0 \in (0,1)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\|x_t - x_{t_0}\| &= \|P_C[t\gamma V x_t + (I - t\mu F)Tx_t] - P_C[t_0\gamma V x_{t_0} + (I - t_0\mu F)Tx_{t_0}]\| \\
&\leq \|[t\gamma V x_t + (I - t\mu F)Tx_t] - [t_0\gamma V x_{t_0} + (I - t_0\mu F)Tx_{t_0}]\| \\
&= \|(t - t_0)\gamma V x_t + t_0\gamma(V x_t - V x_{t_0}) - (t - t_0)\mu F T x_t + (I - t_0\mu F)Tx_t \\
&\quad - (I - t_0\mu F)Tx_{t_0}\| \\
&\leq (\gamma\|Vx_t\| + \mu\|FTx_t\|)|t - t_0| + (1 - t_0(\tau - \gamma L))\|x_t - x_{t_0}\|
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\|x_t - x_{t_0}\| \leq \frac{(\gamma\|Vx_t\| + \mu\|FTx_t\|)}{t_0(\tau - \gamma L)}|t - t_0|$$

olduğu görülür. $\{x_t\}_{t\in(0,1)}$ sınırlı olduğundan x_t, $(0,1)$ den C üzerine sürekli bir eğri belirtir.

Aşağıdaki teorem, $\{x_t\}_{t\in(0,1)}$ in $t \to 0$ iken (4.2) deki varyasyonel eşitsizlik probleminin sabit noktasına kuvvetli yakınsadığını göstermektedir.

Teorem 4.2. H bir Hilbert uzayı ve C, H nin boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi olsun. $\kappa, \eta > 0$ olmak üzere $F: C \to H$ κ-Lipschitzian, η-kuvvetli monoton operatör, $V: C \to H$ L-Lipschitzian $(L \geq 0)$ dönüşüm ve $F(T) \neq \emptyset$ olmak üzere $T: C \to C$ genişlemeyen dönüşüm olsun. $0 < \mu < 2\eta/\kappa^2$ ve $0 \leq \gamma L < \tau$ olmak üzere $\tau = 1 - \sqrt{1 - \mu(2\eta - \mu\kappa^2)}$ olduğunu kabul edelim. Her bir $t \in (0,1)$ için x_t, (4.1) deki gibi tanımlansın. Bu durumda $\{x_t\}$, $t \to 0$ iken (4.2) deki varyasyonel eşitsizlik probleminin çözümü olan T nin $\tilde{x}$ sabit noktasına kuvvetli yakınsar. Yani $P_{\mathrm{Fix}(T)}(I - \mu F + \gamma V)\tilde{x} = \tilde{x}$ dır (Ceng 2011).

İspat: Önce (4.2)'deki varyasyonel eşitsizlik probleminin çözümünün tek olduğunu gösterelim. $0 \leq \gamma L < \tau$ ve

$$
\begin{aligned}
\mu\eta \geq \tau \Leftrightarrow \mu\eta &\geq 1 - \sqrt{1 - \mu(2\eta - \mu\kappa^2)} \\
&\Leftrightarrow \sqrt{1 - \mu(2\eta - \mu\kappa^2)} \geq 1 - \mu\eta \\
&\Leftrightarrow 1 - 2\mu\eta + \mu^2\kappa^2 \geq 1 - 2\mu\eta + \mu^2\eta^2 \\
&\Leftrightarrow \kappa^2 \geq \eta^2 \\
&\Leftrightarrow \kappa \geq \eta
\end{aligned}
$$

dir. Buradan her $x, y \in C$ için

$$\langle(\mu F - \gamma V)x - (\mu F - \gamma V)y, x - y\rangle \geq (\mu\eta - \gamma L)\|x - y\|^2$$

olduğu açıktır. $0 \leq \gamma L < \tau \leq \mu\eta$ olduğundan $\mu F - \gamma V$ kuvvetli monotondur. Dolayısıyla (4.2) deki varyasyonel eşitsizlik probleminin tek bir çözümü vardır. Bu tek çözüm $\tilde{x} \in F(T)$ ve $t \to 0$ iken $x_t \to \tilde{x}$ olsun. Ayrıca her $t \in (0,1)$ için

$$y_t = t\gamma V x_t + (I - t\mu F)Tx_t$$

olsun. $x_t = P_C y_t$ ve herhangi bir $z \in F(T)$ için

$$
\begin{aligned}
x_t - z &= P_C y_t - y_t + y_t - z \\
&= P_C y_t - y_t + t(\gamma V x_t - \mu F z) + (I - t\mu F)Tx_t - (I - t\mu F)z
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

olur. P_C metrik izdüşümü H den C ye olduğundan

$$\langle P_C y_t - y_t, P_C y_t - z\rangle \leq 0$$

olur. (4.5)'den

$$
\begin{aligned}
\|x_t - z\|^2 = \langle P_C y_t - y_t, P_C y_t - z\rangle &+ \langle(I - t\mu F)Tx_t - (I - t\mu F)z, x_t - z\rangle \\
&+ t\langle\gamma V x_t - \mu F z, x_t - z\rangle
\end{aligned}
$$

$$\leq (1 - t\tau)\|x_t - z\|^2 + t\langle \gamma V x_t - \mu F z, x_t - z\rangle$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\|x_t - z\|^2 &\leq \frac{1}{\tau}\langle \gamma V x_t - \mu F z, x_t - z\rangle \\ &\leq \frac{1}{\tau}\{\gamma L\|x_t - z\|^2 + \langle \gamma V z - \mu F z, x_t - z\rangle\}\end{aligned}$$

olup, buradan

$$\|x_t - z\|^2 \leq \frac{1}{\tau - \gamma L}\langle \gamma V z - \mu F z, x_t - z\rangle \tag{4.6}$$

elde edilir. $\{x_t\}_{t\in(0,1)}$ sınırlı olduğundan $\{t_n\}$ dizisi için $t_n \to 0$ ve $x_{t_n} \rightharpoonup x^*$ olduğunu kabul ederek (4.6) dan $x_{t_n} \to x^*$ elde ederiz. Önerme 4.1 in (b) şıkkından $x^* \in F(T)$ dir. Şimdi ise x^* ın (4.2) deki varyasyonel eşitsizliğin çözümü olduğunu gösterelim.

$$x_t = P_C y_t = P_C y_t - y_t + t\gamma V x_t + (I - t\mu F)T x_t$$

olduğunu göstermiştik. Buradan

$$(\mu F - \gamma V)x_t = \frac{1}{t}(P_C y_t - y_t) - \frac{1}{t}(I - T)x_t + \mu(F x_t - F T x_t)$$

olur. T genişlemeyen olduğu için $I - T$ monotondur. Herhangi bir $z \in F(T)$ için

$$\langle P_C y_t - y_t, P_C y_t - z\rangle \leq 0$$

olur.

$$
\begin{aligned}
\langle (\mu F - \gamma V)x_t, x_t\rangle - z \\
&= \frac{1}{t}\langle P_C y_t - y_t, P_C y_t - z\rangle \\
&- \frac{1}{t}\langle (I - T)x_t - (I - T)z, x_t - z\rangle \\
&+ \mu\langle Fx_t - FTx_t, x_t - z\rangle \\
&\quad\leq \mu\langle Fx_t - FTx_t, x_t - z\rangle
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

elde edilir. (4.7) deki t leri t_n ile değiştirelim ve $n \to \infty$ için limit alalım. $x^* \in F(T)$ için $Fx_{t_n} - FTx_{t_n} \to Fx^* - Fx^* = 0$ olsun. Buradan

$$\langle (\mu F - \gamma V)x^*, x^* - z\rangle \leq 0$$

olur. Dolayısıyla $x^* \in F(T)$, (4.2) deki varyasyonel eşitsizliğin bir çözümüdür. Sonuç olarak $x^* = \tilde{x}$ dir. Bu nedenle $t \to 0$ iken $x_t \to \tilde{x}$ dır. (4.2) deki varyasyonel eşitsizlik

$$\langle (I - \mu F + \gamma V)\tilde{x} - \tilde{x}, \tilde{x} - z\rangle \geq 0, \forall z \in F(T)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Lemma 3.2.10 dan

$$P_{\mathrm{Fix}(T)}(I - \mu F + \gamma V)\tilde{x} = \tilde{x}$$

sabit nokta eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

4.1.2. Explicit şemanın yakınsaklığı

Bu alt başlıkta (4.3) deki explicit şema tarafından üretilen bir dizinin (4.2) deki varyasyonel eşitsizliği çözümü olan, genişlemeyen bir dönüşümün sabit noktasına kuvvetli yakınsadığını göstereceğiz.

Teorem 4.3. H bir Hilbert uzayı ve C, H nin boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi olsun. $\kappa, \eta > 0$ olmak üzere $F: C \to H$ κ-Lipschitzian, η-kuvvetli monoton operatör, $V: C \to H$ L-Lipschitzian $(L \geq 0)$ dönüşüm ve $F(T) \neq \emptyset$ olmak üzere $T: C \to C$ genişlemeyen dönüşüm olsun. $0 < \mu < 2\eta/\kappa^2$ ve $0 \leq \gamma L < \tau$ olmak üzere $\tau = 1 - \sqrt{1 - \mu(2\eta - \mu\kappa^2)}$ olduğunu kabul edelim. $\{\alpha_n\}$ dizisi aşağıdaki şartları sağlasın.

(C1) $\{\alpha_n\} \subset (0,1)$ ve $\alpha_n \to 0$ dir.

(C2) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ dir

(C3) $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ veya $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1$ dir.

Herhangi bir $x_0 \in C$ için (4.3) deki explicit şema tarafından üretilen $\{x_n\}$ dizisi, (4.2) deki varyasyonel eşitsizliğin de çözümü olan $\tilde{x} \in F(T)$ ye kuvvetli yakınsar (Ceng 2011).

İspat: Öncelikle $\{x_n\}$ dizisinin sınırlı olduğunu göstereceğiz. Bunun için herhangi bir $p \in F(T)$ alalım.

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &= \|P_C[\alpha_n \gamma V x_n + (I - \alpha_n \mu F) T x_n] - P_C p\| \\
&\leq \|\alpha_n \gamma V x_n + (I - \alpha_n \mu F) T x_n - p\| \\
&= \left\|\alpha_n\big(\gamma V x_n - \mu F(p)\big) + (I - \alpha_n \mu F) T x_n - (I - \alpha_n \mu F) T p\right\| \\
&\leq \alpha_n \gamma L \|x_n - p\| + \alpha_n \|(\gamma V - \mu F) p\| + (1 - \alpha_n \tau) \|x_n - p\| \\
&= \big(1 - \alpha_n(\tau - \gamma L)\big) \|x_n - p\| + \alpha_n \|(\gamma V - \mu F) p\| \\
&\leq \max\left\{\|x_n - p\|, \frac{\|(\gamma V - \mu F) p\|}{\tau - \gamma L}\right\}
\end{aligned}
$$

olur. Genelleyecek olursak her $n \geq 0$ için

$$\|x_n - p\| \leq \max\left\{\|x_0 - p\|, \frac{\|(\gamma V - \mu F)p\|}{\tau - \gamma L}\right\} \tag{4.8}$$

elde edilir. Buradan $\{x_n\}$ nin sınırlı olduğu görülür. Ayrıca

$$\|x_{n+1} - x_n\| \to 0 \tag{4.9}$$

olduğunu iddia ediyoruz. Bunun için (uygun $M > 0$ sabiti ile)

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x_n\| &= \|P_C[\alpha_n \gamma V x_n + (I - \alpha_n \mu F)Tx_n] \\
&\quad - P_C[\alpha_{n-1}\gamma V x_{n-1} + (I - \alpha_{n-1}\mu F)Tx_{n-1}]\| \\
&\leq \|[\alpha_n \gamma V x_n + (I - \alpha_n \mu F)Tx_n] \\
&\quad - [\alpha_{n-1}\gamma V x_{n-1} + (I - \alpha_{n-1}\mu F)Tx_{n-1}]\| \\
&= \|\alpha_n \gamma (V x_n - V x_{n-1}) + \gamma(\alpha_n - \alpha_{n-1})V x_{n-1} + (I - \alpha_n \mu F)Tx_n \\
&\quad - (I - \alpha_n \mu F)Tx_{n-1} + \mu(\alpha_n - \alpha_{n-1})FTx_{n-1}\| \\
&\leq \big(1 - \alpha_n(\tau - \gamma L)\big)\|x_n - x_{n-1}\| + M|\alpha_n - \alpha_{n-1}|
\end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 3.2.13 den yararlanarak $\|x_{n+1} - x_n\| \to 0$ bulunur. Şimdi

$$\|x_n - Tx_n\| \to 0 \tag{4.10}$$

olduğunu gösterelim. Bunun için (4.9) dan

$$\begin{aligned}
\|x_n - Tx_n\| &\leq \|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - Tx_n\| \\
&= \|x_n - x_{n+1}\| + \|P_C[\alpha_n \gamma V x_n + (I - \alpha_n \mu F)Tx_n] - P_C Tx_n\| \\
&\leq \|x_n - x_{n+1}\| + \|\alpha_n \gamma V x_n + (I - \alpha_n \mu F)Tx_n - Tx_n\| \\
&= \|x_n - x_{n+1}\| + \alpha_n\|\gamma V x_n - \mu FTx_n\| \to 0
\end{aligned}$$

olur. Şimdi de Teorem 4.2. den uygun bir $\tilde{x}$ için,

$$\limsup_{n\to\infty}\langle x_n-\tilde{x},(\gamma V-\mu F)\tilde{x}\rangle\leq 0 \tag{4.11}$$

olduğunu gösterelim. Bunun için $\{x_n\}$ nin $\{x_{n_k}\}$ alt dizisini ele alalım. Buradan

$$\limsup_{n\to\infty}\langle x_n-\tilde{x},(\gamma V-\mu F)\tilde{x}\rangle=\lim_{k\to\infty}\langle x_{n_k}-\tilde{x},(\gamma V-\mu F)\tilde{x}\rangle \tag{4.12}$$

olur. $x_{n_k}\rightharpoonup z$ olduğunu kabul edelim. Lemma 3.2.11 den $z\in F(T)$ için (4.10) elde edilir. (4.2) den

$$\limsup_{n\to\infty}\langle x_n-\tilde{x},(\gamma V-\mu F)\tilde{x}\rangle=\langle z-\tilde{x},(\gamma V-\mu F)\tilde{x}\rangle\leq 0$$

elde edilir. En son olarak da $x_n\to\tilde{x}$ olduğunu gösterelim. Aslında

$$y_n=\alpha_n\gamma Vx_n+(I-\alpha_n\mu F)Tx_n,\forall n\geq 0$$

şeklindedir. (4.3) den ($x_{n+1}=P_Cy_n$ ve $0\leq\gamma L<\tau$ olmak üzere)

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1}-\tilde{x}\|^2&=\langle y_n-\tilde{x},x_{n+1}-\tilde{x}\rangle+\langle P_Cy_n-y_n,P_Cy_n-\tilde{x}\rangle\\
&\leq\langle y_n-\tilde{x},x_{n+1}-\tilde{x}\rangle\\
&=\alpha_n\langle\gamma Vx_n-\mu F(\tilde{x})+x_{n+1}-\tilde{x}\rangle\\
&\quad+\langle(I-\alpha_n\mu F)Tx_n-(I-\alpha_n\mu F)T\tilde{x}-x_{n+1}-\tilde{x}\rangle\\
&=\alpha_n\gamma\langle Vx_n-V\tilde{x},x_{n+1}-\tilde{x}\rangle+\alpha_n\langle\gamma V\tilde{x}-\mu F(\tilde{x}),x_{n+1}-\tilde{x}\rangle\\
&\quad+\langle(I-\alpha_n\mu F)Tx_n-(I-\alpha_n\mu F)T\tilde{x},x_{n+1}-\tilde{x}\rangle\\
&\leq\alpha_n\gamma L\|x_n-\tilde{x}\|\|x_{n+1}-\tilde{x}\|+\alpha_n\langle(\gamma V-\mu F)\tilde{x},x_{n+1}-\tilde{x}\rangle+(1\\
&\quad-\alpha_n\tau)\|x_n-\tilde{x}\|\|x_{n+1}-\tilde{x}\|\\
&=(1-\alpha_n(\tau-\gamma L))\|x_n-\tilde{x}\|\|x_{n+1}-\tilde{x}\|+\alpha_n\langle(\gamma V-\mu F)\tilde{x},x_{n+1}-\tilde{x}\rangle\\
&\leq\big(1-\alpha_n(\tau-\gamma L)\big)\frac{1}{2}(\|x_n-\tilde{x}\|^2+\|x_{n+1}-\tilde{x}\|^2)\\
&\quad+\alpha_n\langle(\gamma V-\mu F)\tilde{x},x_{n+1}-\tilde{x}\rangle
\end{aligned}$$

olup buradan $\gamma_n = \alpha_n(\tau - \gamma L)$ ve $\delta_n = \frac{2}{(1-\alpha_n(\tau-\gamma L))(\tau-\gamma L)} \langle (\gamma V - \mu F)\tilde{x}, x_{n+1} - \tilde{x} \rangle$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - \tilde{x}\|^2 &\leq \frac{1 - \alpha_n(\tau - \gamma L)}{1 + \alpha_n(\tau - \gamma L)} \|x_n - \tilde{x}\|^2 + \frac{2\alpha_n}{1 + \alpha_n(\tau - \gamma L)} \langle (\gamma V - \mu F)\tilde{x}, x_{n+1} - \tilde{x} \rangle \\ &\leq \big(1 - \alpha_n(\tau - \gamma L)\big) \|x_n - \tilde{x}\|^2 \\ &\quad + \frac{2\alpha_n}{1 + \alpha_n(\tau - \gamma L)} \langle (\gamma V - \mu F)\tilde{x}, x_{n+1} - \tilde{x} \rangle \\ &= (1 - \gamma_n) \|x_n - \tilde{x}\|^2 + \gamma_n \delta_n \end{aligned}$$

dır. Buradan $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = \infty$ ve $\limsup_{n\to\infty} \delta_n \leq 0$ olduğu ((C1), (C2) ve (3.12) e göre) açıkça görülebilir. Lemma 3.2.13 e göre $x_n \to \tilde{x}$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

4.2. Konveks Minimizasyon Problemlerini Çözmek İçin Genel İteratif Şemalar

H bir Hilbert uzayı olmak üzere A, H üzerinde sınırlı lineer operatör ve T, H üzerinde genişlemeyen dönüşüm olsun. $F(T), H$ nin sabit noktalarının kümesi olmak üzere $F(T)$ kapalı konveks bir küme olduğundan, H den $F(T)$ ye metrik izdüşümü iyi tanımlıdır. Ayrıca A kuvvetli pozitif, yani $x \in H$ için

$$\langle Ax, x \rangle \geq \kappa \|x\|^2 \tag{4.13}$$

olacak şekilde $\kappa > 0$ sabiti vardır. H üzerindeki bütün daraltan dönüşümlerin sınıfını Π ile gösterilsin. Yani

$$\Pi = \{f : f, H \text{ üzerinde daraltan dönüşüm}\}$$

olsun. $0 < \alpha < 1$ daralma katsayısı ile $f \in \Pi$ verilsin. $t \in (0,1)$ olmak üzere $t < \|A\|^{-1}$ ve $0 < \gamma < \kappa/\alpha$ olsun. S_t, H üzerinde

$$S_t x = t\gamma f(x) + (I - tA)Tx \tag{4.14}$$

şeklinde bir dönüşüm olarak tanımlanırsa S_t nin daraltan olduğu açıktır. Ayrıca

$$\begin{aligned}\|S_t x - S_t y\| &\leq t\gamma\|f(x) - f(y)\| + \|(I - tA)(Tx - Ty)\| \\ &\leq (1 - t(\kappa - \gamma\alpha))\|x - y\|\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer x_t, S_t nin tek sabit nokası ise bu nokta

$$x_t = t\gamma f(x_t) + (I - tA)Tx_t \tag{4.15}$$

eşitliğinin tek çözümüdür. Ayrıca x_t, f üzerinde iyi tanımlıdır.

Bu kısımdan sonra $(0, \kappa/\alpha)$ anlamında γ simgesini kullanacağız.

Önerme 4.4: (4.15) ile x_t yi tanımlayalım. Bu durumda

i. $\{x_t\}, t \in (0, \|A\|^{-1})$ için sınırlıdır.
ii. $\lim_{t\to 0}\|x_t - Tx_t\| = 0$ dır.
iii. $x_t, (0, \|A\|^{-1})$ den H ye sürekli bir eğri belirtir (Marino 2006).

İspat: $t \in (0, \|A\|^{-1})$ için Lemma 3.2.15 ten $\|I - tA\| \leq 1 - t\kappa$ olduğunu biliyoruz. (i) yi göstermek için bir $p \in F(T)$ alalım.

$$\begin{aligned}\|x_t - p\| &= \|(I - tA)(Tx_t - p) + t(\gamma f(x_t) - Ap)\| \\ &\leq (1 - \kappa t)\|x_t - p\| + t\|\gamma f(x_t) - Ap\| \\ &= (1 - \kappa t)\|x_t - p\| + t\big\|\gamma\big(f(x_t) - f(p)\big) + (\gamma f(p) - Ap)\big\| \\ &\leq (1 - \kappa t)\|x_t - p\| + t[\gamma\alpha\|x_t - p\| + \|\gamma f(p) - Ap\|] \\ &= \big(1 - t(\kappa - \gamma\alpha)\big)\|x_t - p\| + t\|\gamma f(p) - Ap\|\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\|x_t - p\| \leq \frac{\|\gamma f(p) - Ap\|}{\kappa - \gamma\alpha}$$

dir. Dolayısıyla $\{x_t\}$ sınırlıdır.

(ii) $\{x_t\}$ nin sınırlılığından $\{f(x_t)\}$ ve $\{ATx_t\}$ de sınırlıdır. Dolayısıyla $\|x_t - Tx_t\| = t\|\gamma f(x_t) - ATx_t\| \to 0$ dır.

(iii) $t, t_0 \in (0, \|A\|^{-1})$ alalım.

$$\begin{aligned}\left\|x_t - x_{t_0}\right\| &= \left\|(t - t_0)\gamma f(x_t) + t_0\gamma\big(f(x_t) - f(x_{t_0})\big) - (t - t_0)ATx_t \right.\\ &\quad \left. + (I - t_0A)\big(Tx_t - Tx_{t_0}\big)\right\| \\ &\leq (\gamma\|f(x_t)\| + \|ATx_t\|)|t - t_0| + (1 - t_0(\kappa - \gamma\alpha))\left\|x_t - x_{t_0}\right\|\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\left\|x_t - x_{t_0}\right\| \leq \frac{\gamma \left\|f\big(x_{t_0}\big) + \|ATx_t\|\right\|}{t_0(\kappa - \gamma\alpha)} |t - t_0|$$

dır. Bu $\{x_t\}$ nin Lipschitzian ve dolayısıyla sürekli olduğunu gösterir.

Sonuç: Bazı varyasyonel eşitsizliklerinin çözümü olan $\{x_t\}$, $t \to 0$ için T nin bir sabit noktasına güçlü yakınsar.

Teorem 4.5: (4.1) ile tanımlı $\{x_t\}$ dizisi için $t \to 0$ iken $\{x_t\}$,

$$\langle (A - \gamma f)\tilde{x}, \tilde{x} - z\rangle \leq 0, z \in \mathrm{Fix}(T) \tag{4.16}$$

varyasyonel eşitsizliğinin $\tilde{x} \in F(T)$ tek çözümüne kuvvetli yakınsar. Yani

$$P_{\mathrm{Fix}(T)}(I - A + \gamma f)\tilde{x} = \tilde{x}$$

dır (Marino 2006).

İspat: İlk önce (4.16) varyasyonel eşitsizliğinin çözümünün tekliğini gösterelim. $\tilde{x} \in F(T)$ ve $\hat{x} \in F(T)$ nin her ikisi de (4.16) nın çözümü olsun. Buradan

$$\langle (A - \gamma f)\tilde{x}, \tilde{x} - \hat{x} \rangle \leq 0 \tag{4.17}$$

ve

$$\langle (A - \gamma f)\hat{x}, \hat{x} - \tilde{x} \rangle \leq 0 \tag{4.18}$$

olur. (4.17) ve (4.18) i toplayarak

$$\langle (A - \gamma f)\tilde{x} - (A - \gamma f)\hat{x}, \tilde{x} - \hat{x} \rangle \leq 0$$

elde edilir. $A - \gamma f$ nin kuvvetli monotonluğundan $\tilde{x} = \hat{x}$ bulunur ve böylece çözümün tekliği sağlanmış olur. (4.16) in tek çözümünü $\tilde{x} \in F(T)$ olarak alalım. $z \in F(T)$ olmak üzere $t \to 0$ iken $x_t \to \tilde{x}$ olduğunu ispatlayalım.

$$x_t - z = t(\gamma f(x_t) - Az) + (I - tA)(Tx_t - z)$$

olup buradan

$$\begin{aligned}\|x_t - z\|^2 &= t\langle \gamma f(x_t) - Az, x_t - z \rangle + \langle (I - tA)(Tx_t - z), x_t - z \rangle \\ &\leq (1 - t\kappa)\|x_t - z\|^2 + t\langle \gamma f(x_t) - Az, x_t - z \rangle\end{aligned}$$

olur.

$$\|x_t - z\|^2 \le \frac{1}{\kappa}\langle \gamma f(x_t) - Az, x_t - z\rangle$$
$$= \frac{1}{\kappa}\{\gamma\langle f(x_t) - f(z), x_t - z\rangle + \langle \gamma f(z) - Az, x_t - z\rangle\}$$
$$\le \frac{1}{\kappa}\{\gamma\alpha\|x_t - z\|^2 + \langle \gamma f(z) - Az, x_t - z\rangle\}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\|x_t - z\|^2 \le \frac{1}{\kappa - \gamma\alpha}\langle \gamma f(z) - Az, x_t - z\rangle \tag{4.19}$$

olur. $\{t_n\}$, $(0,1)$ de bir dizi olmak üzere $t \to 0$ iken $\{x_t\}$ sınırlı olduğundan $t_n \to 0$ ve $x_{t_n} \rightharpoonup x^*$ dir. (4.19) dan $x_{t_n} \to x^*$ olduğu görülür. Ayrıca Önerme 4.4 (ii) den $x^* \in F(T)$ elde edilir. Şimdi x^* ın (4.16) varyasyonel eşitsizliğinin çözümü olduğunu gösterelim.

$$x_t = t\gamma f(x_t) + (I - tA)Tx_t \tag{4.20}$$

olduğundan

$$(A - \gamma f)x_t = -\frac{1}{t}(I - tA)(I - T)x_t$$

elde edilir. $z \in F(T)$ için $I - T$ nin monotonluğundan

$$\langle (A - \gamma f)x_t, x_t - z\rangle = -\frac{1}{t}\langle (I - tA)(I - T)x_t, x_t - z\rangle$$
$$= -\frac{1}{t}\langle (I - T)x_t - (I - T)z, x_t - z\rangle$$
$$+ \langle A(I - T)x_t, x_t - z\rangle$$
$$\le \langle A(I - T)x_t, x_t - z\rangle \tag{4.21}$$

olur. (4.21) deki t yerine t_n alırsak, $n \to \infty$ ve $x^* \in \mathrm{F}(T)$ için

$$\langle (A-\gamma f)x^*, x^*-z\rangle \leq 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $x^* \in \mathrm{F}(T)$ (4.16) nın bir çözümüdür ve $x^* = \tilde{x}$ dir. Lemma 3.2.14'den

$$P_{\mathrm{F}(T)}(I-A+\gamma f)\tilde{x} = \tilde{x}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç: $z_t \in H$, $z \mapsto (1-t)Tz + tf(z)$ daraltan dönüşümünün tek sabit noktası olsun. $z \in \mathrm{F}(T)$ olmak üzere $\{z_t\}$ dizisi,

$$\langle (I-f)\tilde{z}, z-\tilde{z}\rangle \geq 0$$

varyasyonel eşitsizliğinin tek çözümü olan $\tilde{z} \in F(T)$ ye kuvvetli yakınsar.

x_0, H de başlangıç elemanı olmak üzere ve x_n dizisi her $n \geq 0$ için

$$x_{n+1} = (I-\alpha_n A)Tx_n + \alpha_n \gamma f(x_n) \tag{4.22}$$

iterasyonu şeklinde tanımlansın. $\{\alpha_n\}, (0,1)$ aralığında bir dizi olmak üzere aşağıdaki şartları sağlasın:

(C1) $\alpha_n \to 0$,
(C2) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$,
(C3) $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ veya $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1$ (Marino 2006).

Teorem 4.6: $\{x_n\}$ dizisi (4.22) algoritması tarafından üretilsin ve $\{\alpha_n\}$ dizisi (C1)-(C3) şartlarını sağlasın. Bu durumda $\{x_n\}$, (4.16) varyasyonel eşitsizliğinin $\tilde{x} \in F(T)$ tek çözümüne kuvvetli yakınsar (Marino 2006).

İspat: (C1) şartından $\alpha_n \to 0$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n < \|A\|^{-1}$ kabul edelebilir. $\{x_n\}$ in sınırlı olduğunu biliyoruz. Ayrıca herhangi bir $p \in F(T)$ alalım. Buradan

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &= \|(I - \alpha_n A)(Tx_n - p) + \alpha_n(\gamma f(x_n) - Ap)\| \\
&\leq \|I - \alpha_n A\| \|Tx_n - p\| + \alpha_n \|\gamma f(x_n) - Ap\| \\
&\leq (1 - \alpha_n \kappa)\|x_n - p\| + \alpha_n[\gamma\|f(x_n) - f(p)\| + \|\gamma f(p) - Ap\|] \\
&\leq (1 - (\kappa - \gamma\alpha)\alpha_n)\|x_n - p\| + \alpha_n\|\gamma f(p) - Ap\| \\
&= (1 - (\kappa - \gamma\alpha)\alpha_n)\|x_n - p\| + (\kappa - \gamma\alpha)\alpha_n \frac{\|\gamma f(p) - Ap\|}{\kappa - \gamma\alpha}
\end{aligned}$$

olur. Buradan $n \geq 0$ için

$$\|x_n - p\| \leq \max\left\{\|x_0 - p\|, \frac{\|\gamma f(p) - Ap\|}{\kappa - \gamma\alpha}\right\} \tag{4.23}$$

elde edilir. Ayrıca $x_{n+1} - Tx_n = \alpha_n(\gamma f(x_n) - ATx_n)$ ve $\alpha_n \to 0$ için

$$x_{n+1} - Tx_n \to 0 \tag{4.24}$$

ve dolayısıyla

$$x_{n+1} - x_n \to 0 \tag{4.25}$$

bulunur. $M = \sup\{\max\{\|ATx_n\|, \|f(x_n)\|\}: n \geq 0\} < \infty$ olarak alınırsa,

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x_n\| &= \|(I - \alpha_n A)(Tx_n - Tx_{n-1}) - (\alpha_n - \alpha_{n-1})ATx_{n-1} \\
&\quad + \gamma[\alpha_n(f(x_n) - f(x_{n-1})) + (\alpha_n - \alpha_{n-1})f(x_{n-1})]\| \\
&\leq (1 - \alpha_n\kappa)\|x_n - x_{n-1}\| + |\alpha_n - \alpha_{n-1}|\|ATx_{n-1}\| \\
&\quad + \gamma[\alpha_n\alpha\|x_n - x_{n-1}\| + |\alpha_n - \alpha_{n-1}|\|f(x_{n-1})\|]
\end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\leq (1-(\kappa-\gamma\alpha)\alpha_n)\|x_n - x_{n-1}\| + M|\alpha_n - \alpha_{n-1}|$$

olur ve buradan

$$x_n - Tx_n \to 0 \tag{4.27}$$

sonucuna varılır. Şimdi de Teorem 4.5 de elde edilmiş olan $\tilde{x}$ için

$$\limsup_{n\to\infty} \langle Tx_n - \tilde{x}, \gamma f(\tilde{x}) - A\tilde{x}\rangle \leq 0 \tag{4.28}$$

olduğunu gösterelim. Bunun için $\{x_{n_k}\}$, $\{x_n\}$ nin alt dizisi olsun. Yani

$$\limsup_{n\to\infty} \langle x_n - \tilde{x}, \gamma f(\tilde{x}) - A\tilde{x}\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle x_{n_k} - \tilde{x}, \gamma f(\tilde{x}) - A\tilde{x}\rangle$$

olsun. $z \in \mathrm{F}(T)$ olmak üzere $x_{n_k} \rightharpoonup z$ olduğunu kabul edelim. (4.16) varyasyonel eşitsizliğinden

$$\limsup_{n\to\infty} \langle x_n - \tilde{x}, \gamma f(\tilde{x}) - A\tilde{x}\rangle = \langle z - \tilde{x}, \gamma f(\tilde{x}) - A\tilde{x}\rangle \leq 0$$

elde edilir. Son olarak $x_n \to \tilde{x}$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - \tilde{x}\|^2 &= \|(I-\alpha_n A)(Tx_n - \tilde{x}) + \alpha_n(\gamma f(x_n) - A\tilde{x})\|^2 \\
&= \|(I-\alpha_n A)(Tx_n - \tilde{x})\|^2 + \alpha_n{}^2\|\gamma f(x_n) - A\tilde{x}\|^2 \\
&\quad + 2\alpha_n\langle (I-\alpha_n A)(Tx_n - \tilde{x}), \gamma f(x_n) - A\tilde{x}\rangle \\
&\leq (1-\alpha_n\kappa)^2\|x_n - \tilde{x}\|^2 + \alpha_n{}^2\|\gamma f(x_n) - A\tilde{x}\|^2 \\
&\quad + 2\alpha_n\langle Tx_n - \tilde{x}, \gamma f(x_n) - A\tilde{x}\rangle - 2\alpha_n{}^2\langle A(Tx_n - \tilde{x}), \gamma f(x_n) - A\tilde{x}\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq (1-\alpha_n\kappa)^2\|x_n-\tilde{x}\|^2+{\alpha_n}^2\|\gamma f(x_n)-A\tilde{x}\|^2\\
&\ \ +2\alpha_n\gamma\langle Tx_n-\tilde{x},f(x_n)-f(\tilde{x})\rangle+2\alpha_n\langle Tx_n-\tilde{x},\gamma f(x_n)-A\tilde{x}\rangle\\
&\ \ -2{\alpha_n}^2\langle A(Tx_n-\tilde{x}),\gamma f(x_n)-A\tilde{x}\rangle\\
&\leq [(1-\alpha_n\kappa)^2+2\alpha_n\gamma\alpha]\|x_n-\tilde{x}\|^2\\
&\ \ +\alpha_n[2\langle Tx_n-\tilde{x},\gamma f(x_n)-A\tilde{x}\rangle\\
&\ \ +\alpha_n(\|\gamma f(x_n)-A\tilde{x}\|^2+2\alpha_n\|A(Tx_n-\tilde{x})\|.\|\gamma f(x_n)-A\tilde{x}\|)]\\
&\leq (1-2(\kappa-\gamma\alpha)\alpha_n)\|x_n-\tilde{x}\|^2\\
&\ \ +\alpha_n\{2\langle Tx_n-\tilde{x},\gamma f(\tilde{x})-A\tilde{x}\rangle\\
&\ \ +\alpha_n(\|\gamma f(x_n)-A\tilde{x}\|^2+2\alpha_n\|A(Tx_n-\tilde{x})\|.\|\gamma f(x_n)-A\tilde{x}\|\\
&\ \ +\alpha_n\kappa^2\|x_n-\tilde{x}\|^2)\}
\end{aligned}
$$

olur. $\{x_n\}$ sınırlı olduğundan

$$L \geq \|\gamma f(x_n)-A\tilde{x}\|^2+2\alpha_n\|A(Tx_n-\tilde{x})\|.\|\gamma f(x_n)-A\tilde{x}\|+\alpha_n\kappa^2\|x_n-\tilde{x}\|^2$$

olacak şekilde bir bir $L>0$ sabiti alabiliriz. $\beta_n=2\langle Tx_n-\tilde{x},\gamma f(\tilde{x})-A\tilde{x}\rangle+L\alpha_n$ olmak üzere

$$\|x_{n+1}-\tilde{x}\|^2 \leq (1-2(\kappa-\gamma\alpha)\alpha_n)\|x_n-\tilde{x}\|^2+\alpha_n\beta_n \tag{4.29}$$

bulunur. (4.27) den $\limsup_{n\to\infty}\beta_n \leq 0$ elde edilir. Böylece $x_n \to \tilde{x}$ olur.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu bölümde, dördüncü bölümdeki teoremlerin bazı sonuçları verilecektir.

İlk olarak sabit noktaların bulunması için genel iteratif şemalarla ilgili verilen önemli teoremlerden elde edilen sonuçları verelim.

Araştırma ve bulgular kısmında sunulan Teorem 4.1 ve Teorem 4.2 için elde edilen sonuçlar şunlardır:

Sonuç 5.1: Sırasıyla aşağıdaki yöntemleri uygulayarak 4.1 ve 4.2 teoremlerini genelleştirilebilir:

a) 4.1 ve 4.2 teoremlerindeki H nin boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi olan C üzerinde tanımlı $V: C \to H$ dönüşümü, $f: H \to H$ Lipschitzian dönüşüm alınarak bu teoremler genelleştirilebilir.

b) 4.1 ve 4.2 deki κ-Lipschitzian ve η-kuvvetli monoton $F: C \to H$ dönüşümü, κ-Lipschitzian, η-kuvvetli monoton $F: H \to H$ dönüşümü şeklinde alınarak yine bu teoremler genelleştirilebilir.

c) 4.1 ve 4.2 deki büzülme katsayısı $\alpha \in (0,1)$, L-Lipschitzian sabiti olarak $[0, 1)$ aralığından seçilerek bu teoremler genelleştirilebir.

d) 4.1 ve 4.2 deki $0 \leq \gamma L < \tau = 1 - \sqrt{1 - \mu(2\eta - \mu\kappa^2)}$ aralığı $0 < \gamma\alpha < \tau = \mu\left(\eta - \frac{\mu\kappa^2}{2}\right)$ şeklinde alınarak teoremler genelleştirilebilir. Ayrıca her $x \in [-1,1]$ için

$$\sqrt{1 + x} \leq 1 + \frac{1}{2}x$$

eşitsizliği de kolayca elde edilir. Buradan

$$\sqrt{1-\mu(2\eta-\mu\kappa^2)} \le 1-\mu\left(\eta-\frac{\mu\kappa^2}{2}\right)$$

olur. Bu nedenle

$$1-\sqrt{1-\mu(2\eta-\mu\kappa^2)} \ge 1-\left[1-\mu\left(\eta-\frac{\mu\kappa^2}{2}\right)\right]=\mu\left(\eta-\frac{\mu\kappa^2}{2}\right)$$

olur.

e) $T: C \to C$ genişlemeyen dönüşümün sabit noktasını bulmak için Teorem 4.1 deki implicit şema ve Teorem 4.2 deki explicit şema genişletilir. Bu genişletme, izdüşüm metodundan yararlanarak elde edilir.

f) 4.1 ve 4.2 den yola çıkarak ispat için yeni bir teknik oluşturulabilir. Örneğin metrik izdüşümün karakteristik özellikleri, 4.1 ve 4.2 de $\{x_t\}_{t\in(0,1)}$ in kuvvetli yakınsaklığında yeni ispat için anahtar rol oynar (Ceng 2011).

Şimdi konveks minimizasyon problemlerini çözmek için genel iteratif şemalarla ilgili verdiğimiz önemli teoremlerden elde edilen sonuçları verelim.

Araştırma ve bulgular kısmında verilen Teorem 4.5 için aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 5.2: $z_t \in H,\ z \mapsto (1-t)Tz + tf(z)$ daraltan dönüşümünün tek sabit noktası olsun. $z \in \mathrm{F}(T)$ olmak üzere $\{z_t\}$ dizisi

$$\langle (I-f)\tilde{z}, z-\tilde{z}\rangle \ge 0 \tag{5.1}$$

varyasyonel eşitsizliğinin tek çözümü olan $\tilde{z} \in F(T)$ ye kuvvetli yakınsar.

Ayrıca x_0, H de keyfi başlangıç noktası ve her $n \ge 0$ için

$$x_{n+1} = (I - \alpha_n A)Tx_n + \alpha_n \gamma f(x_n)$$

iterasyonu verilsin. $\{\alpha_n\}, (0,1)$ aralığında bir dizi olmak üzere aşağıdaki şartları sağlasın:

(C1) $\alpha_n \to 0$,
(C2) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$,
(C3) $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ veya $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1$ (Marino 2006).

Bu durumda Teorem 4.6 dan aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 5.3: $\{x_n\}$ dizisi,

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)Tx_n + \alpha_n f(x_n), \forall n \geq 0$$

algoritması ile tanımlı olsun. Bu durumda $\{\alpha_n\}$ dizisi Sonuç 5.2 deki (C1)-(C3) şartlarını şağlasın. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi (5.1) varyasyonel eşitsizliğinin $\tilde{z} \in F(T)$ tek çözümüne kuvvetli yakınsar.

KAYNAKLAR

Agarwal, R. P., Meehan, M. and O'Regan, D., 2001. Fixed Point Theory and Applications, Cambridge University Press

Agarwal, R. P., O'Regan, D. and Sahu, D. R., 2007. Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings, J. Nonlinear Convex Anal., 8 (1), 61-79

Agarwal, R. P., O'Regan, D. and Sahu, D. R., 2009. Fixed point theory for Lipschitzian-type mappings with applications, doi 10.1007/978-0-387-75818-3.

Alber, Y. I., 1996. Metric and Generalized Projection Operators in Banach Space: Propertics and Applications, Lecture Notes in Pure and Applied Math.

Ansari, Q. H. and Yao, J. C., 1999. A fixed point theorem and its applications to a system of variational inequalities, Bulletin of the Australian Mathematical Society 59 (3), 433-442.

Banach, S., 1922. Sur les operations dans les ensembles abstrait et leur application aux equations, integrals, Fund. Math., 3, 133–181.

Bayraktar, M., 1994. Fonksiyonel Analiz. Atatürk Üniversitesi Yayınları, 314, Erzurum.

Berinde, V., 2004. Picard iteration converges faster than Mann iteration for a class of quasicontractive operators, Fixed Point Theory and Applications, 2004, 97-105.

Berinde, V., 2006. Iterative Approximation of Fixed Points, Lecture Notes in Math., Springer.

Brouwer, L. E. J., 1912. Uber Abbildung von Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. 71, 97–115.

Borwein, D. and Borwein, J., 1991. Fixed point iterations for real functions, J. Math. Anal. Appl., 157 (1), 112-126.

Borwein, J. M., 2010. Fifty years of maximal monotonicity, Optim Lett., 4, 473–490.

Browder, F. E. and Petryshyn, W. V., 1967. Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert spaces, J. Math. Anal. Appl., 20, 197-228.

Cegielski, A., 2012. Iterative methods for fixed point problems in Hilbert spaces, Lecture notes in mathemaics. Springer, 298 p, Heidelberg New York Dordrecht London.

Ceng, L. C. and Yao, J. C., 2008. Hybrid viscosity approximation schemes for equilibrium problems and fixed point problems of infinitely many nonexpansive mappings, Appl. Math. Comput., 198 (2), 729-741.

Ceng, L. C. , Ansari, Q. H. , Yao, J. C. Some iterative methods for finding fixed points and for solving constrained convex minimization problems, Nonlinear Analysis 74(2011) 5286-5302

Ciric, L. B., 1974. A generalization of Banach's Contraction Principle, Proc. Amer. Math. Soc., 45, 267-273.

Franks, R. L. and Marzec, R. P., 1971. A theorem on mean value iterations, Proc. Amer. Math. Soc., 30, 324-326.

Goebel, K. and Kirk, W. A., 1990. Topics on Metric Fixed-Point Theory, Cambridge University Press, Cambridge, England.

Iiduka, H. and Takahashi, W., 2005. Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and inverse-strongly monotone mappings, Nonlinear Analysis, 61, 341 – 350.

Iiduka, H. and Takahashi, W., 2008. Weak convergence of projection algorithm for variational inequalities in Banach spaces, J. of Math. Analysis and Applications, 339 (1), 668-679.

Iiduka, H., Takahashi, W. and Toyoda, M., 2004. Approximation of solutions of variational inequalities for monotone mappings, Pan. Am. Math. J., 14, 49-61.

Ishikawa, S., 1974. Fixed points by a new iteration method, Proc. Amer. Math. Soc., 44, 147-150

Karahan, İ. 2015. Genişlemeyen Dönüşümler için Sabit Nokta Yaklaşım Metotları ve Varyasyonel Eşitsizlik Problemleri Doktora Tezi.

Khamsi, M. A. and Kirk W. A., 2001. An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory.

Kirk, W. A., 1989. A fixed point theorem for mappings which do not increase distances, Amer. Math. Monthly, 72, 1004-1006.

Lions, P. L., 1977. Approximation de points fixed de conractions, C. R. Acad. Sci. Paris Ser., 284, 1357-1359.

Maddox, I. J., 1988. Elements of Functional Analysıs, Cambridge Universitiy Pres.

Mann, W. R., 1953. Mean value methods in iteration, Proc. Amer. Math. Soc., 4, 506-510.

Marino, G. and Xu, H. K. A general iterative method for nonexpansive mappings in Hilbert spaces, J. Math, Anal. Appl. 318(2006) 43-52.

Noor, M. A., 2000. New approximation schemes for general variational inequalities, J. Math. Anal. Appl., 251, 217-229.

Opial, Z., 1967. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings. Bull. Amer. Math. Soc., 73 (4), 591-597.

Picard, E. (Charles), 1890. Jour. de Math., (4) 6, 145-210.

Rhoades, B. E., 1974. Fixed point iterations using in finite matrices, Trans. Amer. Math. Soc., 196, 161-176.

Rhoades, B. E. and Soltuz S. M., 2004. The equivalence between Mann-Ishikawa iterations and multistep iteration, Nonlinear Anal., 58, 219-228.

Schauder, J., 1930. Der Fixpunktsatzin Funktionalraiimen, Studia Mathematika, 2, 171–180.

Schu, J., 1991. Weak and strong convergence to fixed points of Asymptotically nonexpansive mappings, Bull. of the Australian Math. Soc., 43, 153-159.

Takahashi, W. and Toyoda, M., 2003. Weak convergence theorems for nonexpansive mappings and monotone mappings, J. Optim. Theory Appl., 118, 417-428.

Wittmann, R., 1992. Approxmation of fiixed points of nonexpensive mappings, Arch. Math. (Basel), 58, 486-491.

Xu H. K., 1991. Inequalities in Banach spaces with applications, Nonlinear Anal., 16, 1127-1138.

Xu H. K., 1991. Inequalities in Banach spaces with applications, Nonlinear Anal. Appl. 318 (2006) 43-52

Xu, H. K. and Kim, T. H., 2003. Convergence of hybrid steepest-descent methods for variational inequalities, J. Optim. Theory Appl., 119, 185-201

Xu, B. and Noor M. A., 2002. Fixed point iterations for asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl., 267, 444-453.

Yao, Y., Liou, Y. C. and Yao, J. C., 2007. An extragradient method for fixed point problems and variational inequality problems, J. of Inequalities and Applications, doi:10.1155/2007/38752

Zeidler, E., 1986. Nonlinear Functional Analysis and its Applications, III: Variational Methods and Applications, Springer, New York.

ÖZGEÇMİŞ

1988 yılında Erzurum'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Erzurum Kültür Kurumu İlköğretim okulunda, lise öğrenimini ise Erzurum Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 2007 yılında girdiği Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği'nden 2012 yılında bölüm birincisi olarak mezun oldu. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde Yüksek Lisans Eğitimine başladı. Halen Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde Yüksek Lisans öğrenimine devam etmektedir.