n-BOYUTLU UZAYDA BİR EĞRİNİN ARDIŞIK OSKÜLATÖR KÜRE MERKEZLERİNİN LİMİTİ ve İNFİNİTEZİMAL ÖĞELERİNİN BELİRLENMESİ

(Doktora Tezi)

Cemal KOÇ
Teorik Matematik Kürsüsü

Ö N S Ö Z

Sayın Prof.Dr.Muzaffer KULA yönetiminde yaptığım doktora çalışmalarını derlemiş bulunuyorum. Herşeyden önce çalışmalarımı yönetmek lütfunda bulunan ve hiç bir yardımını esirgemeyen Sayın Prof.Dr.M.KULA'ya ve destek, teşvik ve yardımlarından ötürü Sayın Prof.Dr.M.G.İKEDA'ya minnettarlığımı belirtmek isterim.

Sunduğumuz bu savda asıl kısma geçmeden önce, n-boyutlu ÖKLİD uzayındaki eğriler kuramına ait genel bilgiler, konuyla ilgili Türkçe kitap bulunmayışı dolayısıyla yer yer tanıtlamaya da girerek, B a ş l a n g ı ç adıyla verilmiştir. Bu bölümün okuyucuyu sık sık başka kaynaklara başvurmaktan kurtaracağını ummaktaysak da, gereksinme duyulduğunda başvurulması gereken kaynakları paragraf sonlarında belirttik. Örneğin, $[K_{11}, 8\text{-}10]$ gösterimi, " Bu konuyla ilgili olarak, adı K a y n a k l a r bölümünde verilen K_{11} kaynağının 8-10 sayfalarına bakılabilir." demektir. ÖZET' de ise sözü geçen kaynaklar, hemen cümle sonunda ve sözünün edilişi sırasında verilmiştir.

Sözlerimi bitirirken, çalışmamı maddi bakımdan destekliyerek gönül rahatlığı için de olmamı sağlayan Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma Kurumuna teşekkürü bir borç bilirim.

Cemal KOÇ

RÉSUMÉ

M. CESÀRO a montré que si la suite des centres de courbure succéssives à un point d'une courbe plane a une limite, celle-ci est constante et qu'on peut determiner l'elément d'infinitésimale de cette courbe avec le polygone défini par les centres de courbures succesives K_1, 30-31 . En suite M.BİRAN et M.VINCENSINI ont résolu la première partie du problème dans l'espace à 3-dimensions, en remplacant les centres des sphères osculatrices par les centres de courbure (K_2, 239-243 , K_3, 31-33). Pour la deuxième partie M.De MISÉS, M. GÜRSAN et M. BİRAN ont donné de differentes résolutions (K_4,1338 K_5, 27-35 , K_6,339-344).

Dans ce travail présenté le problème a été examiné avec ses deux parties dans l'espace Euclidien à n-dimensions. Le travail comprend "introduction" suivie de deux chapitres. Dans le CHAPITRE I on a demontré que si la suite des centres des sphères osculatrices est uniformément convergent sa limite est constante. Cette demonstration est faite analytiquement de la maniere de M.BİRAN. Dans le CHAPITRE II, la notion de "courbe adjointe", qui a été servie par M.GÜRSAN est généralisée, et l'elément d'infinitésimale d'ordre k est determiné par les polygones appertenant aux courbes adjointes.

ÖZET

Düzlemsel bir eğrinin bir noktasına ilişkin ardışık eğrilik merkezleri dizisinin bir limiti varsa bu limitin sabit olacağı ve sözü geçen eğrinin doğal özelliklerinin eğrilik merkezleriyle belirli çokgen yardımı ile betimlenebileceği E.CESÀRO tarafından gösterilmiştir([K_1 , 30-31]) . Daha sonraları L.BİRAN ve P.VINCENSINI, ardışık eğrilik merkezleri yerine ardışık oskülâtör küre merkezleri dizisini alarak problemin birinci kısmını 3-boyutlu uzay için değişik yöntemlerle çözmüşlerdir ([K_2 , 239-243] , [K_3 , 31-33]) . İkinci kısım için de M. de MİSÉS, F.GÜRSAN ve L.BİRAN tarafından çeşitli çözümler verilmiştir ([K_4 , 1338] , [K_5 , 27-35] , [K_6 , 339-344]) .

Sunduğumuz bu çalışmada ise problem her iki kısmıyla n - boyutlu ÖKLİD uzayında ele alınmıştır. Çalışma B a ş l a n g ı ç bölümünü izleyen iki bölümden ibarettir. B ö l ü m I , bir eğrinin ardışık oskülâtör küre merkezleri dizisinin limit konumunun sabitliğinin tanıtlanmasını kapsar. Bu tanıtlama L.BİRAN'ın yukarda sözü edilen [K_2] çalışmasındaki gibi analitik olarak yapılmıştır. B ö l ü m II de ise F.GÜRSAN'ın [K_5] çalışmasında kullandığı "ek eğriler" kavramı genelleştirilmiş ve eğrinin k - ıncı basamaktan infinitezimal öğesi ek eğrilere ait çokgenler yardımıyla belirlenmiştir.

Başlangıç

n- BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA EĞRİLER KURAMI

1. n-Boyutlu ÖKLİD uzayında eğriler :

E_n,n-boyutlu bir ÖKLİD uzayı olsun. Bu uzayın $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$ ortonormal sistemi ve bir O başlangıç noktasıyla belirli karteziyen koordinat sistemine görelendiğini varsayalım. u bir gerçel parametre olmak üzere bileşenleri u'nun fonksiyonları olan $\vec{r}=(x_1(u),x_2(u),\ldots,x_n(u))$ noktaları E_n'in bir eğrisini oluşturur. $\vec{r}(u)$ eğrisinin $\vec{r}(u_0)$ ve $\vec{r}(u_1)$ noktaları arasındaki yay uzunluğu

$$s=\int_{u_0}^{u_1}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dx_i}{du}\right)^2}\,du$$

dir. Yani, invariyant s parametresi herhangi u paremetresi cinsinden, $\vec{r}(u_0)$, eğrinin başlangıç noktası olmak üzere

$$s=\int_{u_0}^{u}\sqrt{\left(\frac{d\vec{r}}{du}\right)^2} \tag{B.1}$$

dir. Buradan hemen $\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)^2=1$ çıkar.

$\vec{r}=\vec{r}(u)$ eğrisinin bir N noktası komşuluğundaki sonsuz yakın $\nu+1$ noktasını göz önüne alalım. Bu $\nu+1$ nokta genel olarak bir ν-düzlem, başka bir deyişle E_n'in ν-boyutlu bir lineer varyetesini belirler. Bu ν-düzleme eğrinin göz - önüne alınan N noktasındaki oskülatör ν-düzlemi denir. Çıkması muhtemel güç - lükleri önlemek amacıyla, eğrinin gözönüne alınan noktaları için $\vec{r}(u)$'nun n-kez sürekli türetilebildiğini ve $\frac{d\vec{r}}{du},\frac{d^2\vec{r}}{du^2},\frac{d^3\vec{r}}{du^3},\ldots\frac{d^{n-1}\vec{r}}{du^{n-1}}$ vektörlerinin lineer bağımsız olduğunu varsayacağız ki kısaca

$$\vec{r}^{(n)} \text{ sürekli }, \quad \vec{r}^{\,\cdot}\wedge\vec{r}^{\,\cdot\cdot}\wedge\ldots\wedge\vec{r}^{(n-1)}\neq 0 \tag{B.2}$$

şeklinde ifade edeceğimiz bu şart, eğrinin gözönüne alınan noktada, her oskülatör ν-düzleminin tek türlü olarak belirtilebileceğini garanti eder. ([K7, 1-7])

2. GRAM determinantı :

$\vec{x}_i$, $\vec{y}_j$ (i,j=1,2,...,m) E_n ' in vektörleri olmak üzere

$$G\left(\begin{matrix}\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots, \vec{x}_m\\ \vec{y}_1,\vec{y}_2,\dots, \vec{y}_m\end{matrix}\right) = \|\vec{x}_i\vec{y}_j\| \quad (i,j=1,2,\dots,m)$$

determinantını göz önüne alalım. Bu dedeрminantta $\vec{y}_i=\vec{x}_i$ koymakla elde edilen

$$(B.3) \qquad G(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_m)=G\left(\begin{matrix}\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_m\\ \vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_m\end{matrix}\right)$$

determinantına GRAM determinantı denir.

$\vec{x}_i$ 'ler için,

$$\vec{x}_i=\sum_{k=1}^{m} b_{ik}\,\vec{z}_k$$

lineer dönüşümü yapılır ve dönüşümün $(b_{ik})=B$ matrisinin determinantı $\|B\|$ ile gösterilirse,

$$G\left(\begin{matrix}\vec{x}_1, \vec{x}_2,\dots,\vec{x}_m\\ \vec{y}_1, \vec{y}_2,\dots,\vec{y}_m\end{matrix}\right) = \|B\|\, G\left(\begin{matrix}\vec{z}_1, \vec{z}_2,\dots\vec{z}_m\\ \vec{y}_1, \vec{y}_2,\dots\vec{y}_m\end{matrix}\right)$$

ve buradan da (B.3) göz önünde tutularak

$$(B.4) \qquad G(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_m)= \|B\|^2\; G(\vec{z}_1,\vec{z}_2,\dots,\vec{z}_m)$$

elde edilir.

Kolayca görüleceği gibi (B.3) de herhangibir $\vec{x}_i$ yerine $\vec{x}_i+\sum_{j\neq i} a_j\vec{x}_j$ konursa determinantın değeri değişmez.

m=n alınırsa

$$(B.5) \qquad G(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_n)= \|\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_n\|^2$$

elde edilir ki burada, $\vec{x}_i=\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\vec{e}_j$ olmak üzere

$$\|x_1,x_2,\dots,x_n\|= \left\|\begin{matrix} x_{11} & x_{12}\dots & x_{1n}\\ x_{21} & x_{22}\dots & x_{2n}\\ \dots & \dots & \dots\\ x_{n1} & x_{n2}\dots & x_{nn}\end{matrix}\right\|$$

dir. ($[K_8, 116\text{-}117]$, $[K_9, 55\text{-}58]$)

3. GRAM-SCHMİDT ortogonalleştirme yöntemi

Şimdi $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m$ gibi m tane lineer bağımsız vektör alalım ve bu vektörler yardımıyla $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m\}$ gibi bir ortonormal sistem oluşturmak isteyelim. GRAM determinantı kavramı yardımıyla bunu kolayca yapabiliriz. Bunun için

$$1 = G_0 \;, \quad G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_\mu) = G_\mu$$

koyalım. G_μ determinantındaki $\vec{x}_i \vec{x}_j$ elemanına ait minörü $G_\mu^{(ij)}$ ile gösterelim. Artık şu teorem tanıtlanabilir:

Teorem-1 $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m$ gibi m tane lineer bağımsız vektör ve $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ gibi m tane $\varepsilon_i^2 = 1$ şartını sağlayan sayı alalım.

$$\vec{\xi}_\mu = \sum_{\nu=1}^{\mu} a_{\mu\nu} \vec{x}_\nu \;, \quad \varepsilon_\mu a_{\mu\mu} > 0$$

olacak şekilde bir $\{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \ldots, \vec{\xi}_m\}$ ortonormal sistemi bulunabilir ve bu şartlara uyan tek sistem

$$\text{(B.6)} \qquad \sqrt{G_{\mu-1}\, G_\mu}\; \varepsilon_\mu \vec{\xi}_\mu = \sum_{\nu=1}^{\mu} G_\mu^{(\mu\nu)} \vec{x}_\nu = \left\| \begin{matrix} (\vec{x}_1 \vec{x}_1) & \ldots & (\vec{x}_1 \vec{x}_\mu) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (\vec{x}_{\mu-1} \vec{x}_1) & & (\vec{x}_{\mu-1} \vec{x}_\mu) \\ \vec{x}_1 & \ldots & \vec{x}_\mu \end{matrix} \right\|$$

ile belirlidir.

Şimdi de $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots \vec{x}_{n-1}$ gibi (n-1)-tane lineer bağımsız vektör yardımıyla bir $\{\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n\}$ ortonormal sistemi belirlemeğe çalışalım ve fazla olarak bu ortonormal vektörlerin bir pozitif n-kollu oluşturmasını isteyelim. $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \ldots, \vec{z}_{n-1}$ gibi (n-1)-tane vektör verildiğinde,

$$\text{(B.7)} \qquad \| \vec{z}_1, \vec{z}_2, \ldots, \vec{z}_{n-1}, \vec{y} \| = \vec{z}_n \vec{y} \qquad (\,\vec{y} \text{ herhangibir vektör})$$

bağıntısıyla öyle bir $\vec{z}_n$ vektörü bulunabilir ki bu vektör diğer $\vec{z}_i$ $(i \leq n-1)$ lere dik olur, şiddeti $\vec{z}_i$ ler üstüne kurulan parelel yüzün hacmına eşit olur ve $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \ldots, \vec{z}_{n-1}, \vec{z}_n$ bir pozitif n-kollu oluşturur.

Eğer $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \ldots, \vec{z}_{n-1}$ vektörlerinin ortonormal olduğu varsayılarsa

$$\| \vec{z}_1, \vec{z}_2, \ldots, \vec{z}_{n-1} \|^2 = G(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \ldots, \vec{z}_{n-1}) = \vec{z}_1^2 \vec{z}_2^2 \vec{z}_3^2 \ldots \vec{z}_{n-1}^2 = 1$$

den $\vec{z}_n$ tamamlayıcı vektörünün birim vektör olacağı sonucuna varılır. Öte yandan (B.7) bağıntısı bize

$$\| \vec{z}_1, \vec{z}_2, \ldots, \vec{z}_{n-1}, \vec{z}_n \| = \vec{z}_n^2 = 1 > 0$$

verir. Böylece $\{\vec{z}_1, \vec{z}_2, \ldots, \vec{z}_{n-1}, \vec{z}_n\}$ sisteminin ortonormal bir sistem olduğu ve $\vec{z}_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ vektörlerinin bir pozitif n-kollu oluşturduğu görülür. Buna göre şu teoremi verebiliriz:

Teorem-2 $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{n-1}$ gibi (n-1)-tane lineer bağımsız vektör verilmişken bunlar yardımıyla $\{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \ldots, \vec{\xi}_{n-1}\}$ gibi (n-1)- vektörlü bir ortonormal sistem ve bu (n-1)-vektörün tamamlayıcısının bulunmasıyla da $\{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \ldots, \vec{\xi}_{n-1}, \vec{\xi}_n\}$ gibi n-vektörlü pozitif bir ortonormal sistem elde edilir. $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \ldots, \vec{\xi}_{n-1}$ vektörleri (B.6) uyarınca yön farkıyla belirli ve bu (n-1) tane vektör belirlendikten sonra $\vec{\xi}_n$ tek türlü belirlidir. ($[K_8, 118\text{-}121]$, $[K_{10}, 148\text{-}149]$)

4. CARTAN matrisi :

Öğeleri bir u paremetrisinin türetilebilir fonksiyonları olan $A = A(u) = (a_{ij}(u))$ matrisel fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$\text{(B.8)} \qquad A^{\bullet} = \frac{dA}{du} = \left(\frac{da_{ij}}{du} \right)$$

matrisine A matrisinin türevi denir. Bu tanımdan (.) türetme ve (*) transpoze alma işlemlerinin yer değiştirebileceği yani $(A^*)^{\bullet} = (A^{\bullet})^*$ olduğu ve $[A(u)\,B(u)]^{\bullet} = A^{\bullet}B + AB^{\bullet}$ LEİBNİZ kuralının geçerli olduğu görülür.

Bir $A(u)$ karesel, düzgün (non singüler) matrisel fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$\text{(B.9)} \qquad C(A) = A^{\bullet} A^{-1}$$

matrisine A ' nın CARTAN matrisi denir.

Şimdi A matrisini ortogonal alalım. Bu halde $A^* = A^{-1}$ olacağından $AA^* = I$ (burada I birim matristir) ifadesinin türetilmesiyle

$$0 = I^{\bullet} = A^{\bullet}A^* + A(A^*)^{\bullet} = A^{\bullet}A^{-1} + (A^{-1})^*(A^{\bullet})^* = A^{\bullet}A^{-1} + (A^{\bullet}A^{-1})^*$$

bulur

Buradan (B.9)bağıntısı kullanılarak

(B.10) $\quad \sigma(A) + [\sigma(A)]^{*} = 0$

elde edilir ki bunu topluca şöyle ifade edebiliriz ;

Teorem.-3 Ortogonal bir matrisin CARTAN matrisi çarpık simetriktir.

$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ bazına göre bileşenleri x_{ij} $(j=1,2,\ldots,n)$ ler olan $\vec{x}_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ vektörlerini alalım. $\vec{e}_i$ vektörleriyle formal bir sütun matrisi oluşturalım ve yazış kolaylığı için

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{e}_n \end{pmatrix} = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n]$$

koyalım. Öğeleri gerçel sayılar olan matrislerle bu tip matrislerin çarpımını $\vec{e}_j$ elemanlarına gerçel sayılar gözüyle bakarak yapacağız. Sözünü ettiğimiz matrisler bir u paremetresinin fonksiyonu olduklarında yukarda belirtilen türetmeyle ilgili özellikler yine geçerli olur.

Şimdi $\vec{\xi}_1(u), \vec{\xi}_2(u), \ldots, \vec{\xi}_n(u)$ gibi n-tane ortonormal vektörel fonksiyon ~~olmak~~ alalım. $\Xi = (\xi_{ij})$ olmak üzere

$$[\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \ldots, \vec{\xi}_n] = \Xi\, [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n]$$

~~olsun~~. Burada Ξ matrisi ortogonal olacaktır. Böylece

$$[\dot{\vec{\xi}}_1, \dot{\vec{\xi}}_2, \ldots, \dot{\vec{\xi}}_n] = \dot{\Xi}\, \Xi^{-1}\, \Xi [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n] = \sigma(\Xi)[\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \ldots, \vec{\xi}_n]$$

ifadesindeki $\sigma(\Xi)$ matrisinin (Ξ 'nin CARTAN matrisi) çarpık simetrik olacağı sonucuna varılır.

Tersine olarak, bir $C = (c_{ij}(u))$ çarpık simetrik matrisi verilmiş olsun.

(B.12) $$[\dot{\vec{\xi}}_1, \dot{\vec{\xi}}_2, \ldots, \dot{\vec{\xi}}_n] = C [\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \ldots, \vec{\xi}_n]$$

diferensiyel denklem sisteminin, $\{\vec{\xi}_1^{\,o}, \vec{\xi}_2^{\,o}, \ldots, \vec{\xi}_n^{\,o}\}$ herhangibir ortonormal sistem olmak üzere $\vec{\xi}_i(u_o) = \vec{\xi}_i^{\,o}$ $(i=1,2,\ldots,n)$

başlangıç şartlarını gerçekliyen tek çözümü $\{\vec{\xi}_1(u), \vec{\xi}_2(u), \ldots, \vec{\xi}_n(u)\}$ gibi bir ortonormal sistem olur.

Varlık teoremi gereğince (B.12) sisteminin bir çözümü vardır. Sözü edilen başlangıç şartlarını sağlayan bu çözüm tekdir. Şimdi $\{\vec{\xi}_1(u), \vec{\xi}_2(u), \ldots, \vec{\xi}_n(u)\}$ çözüm sisteminin ortonormal bir sistem olduğunu gösterelim.

$$[\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \ldots, \vec{\xi}_n] = \Xi(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n)$$

olsun, göstereceğiz ki Ξ matrisi ortogonaldir.

$$P(u) = \Xi\Xi^* - I$$

matrisel fonksiyonunu gözönüne alalım. Kolayca görüleceği gibi

$$P(u)^* = P(u) \quad , \quad P(u_0) = 0$$

dır.

$P(u)$'nun türetilmesiyle

$$P' = \Xi'\Xi^* + \Xi(\Xi^*)' = \Xi\,\Xi^{-1}\Xi\Xi^* + (\Xi'\Xi^{-1}\Xi\Xi^*)^* = C(\Xi)(P+I) + [C(\Xi)(P+I)]^*$$
$$= C(\Xi)P + PC(\Xi)^* + C(\Xi) + C(\Xi)^*$$

ve C'nin çarpık simetrik oluşundan

$$P' = C(\Xi)P + PC(\Xi)^*$$

elde edilir. Öte yandan bu diferansiyel denklemin $P(u_0) = 0$ başlangıç şartına uyan çözümü tektir ve bu tek çözüm

$$P(u) = 0$$

dır. Buradan da

$$P = \Xi\Xi^* - I = 0 \qquad (B.13)$$

aranan sonucu elde edilir. ($[K_{11}, 8-10]$, $[K_8, 122-123]$)

5. FRENET formülleri:

Daha başlangıçta, $\vec{r} = \vec{r}(u)$ eğrisinin gözönüne alınan noktaları için, (B.2) şartlarının gerçeklendiğini varsaymıştık. Yani $\vec{r}^{\,\circ}, \vec{r}^{\,\circ\circ}, \ldots, \vec{r}^{\,(n-1)}$ lineer bağımsız idi. Öyleyse teorem -2 uyarınca, bu (n-1)-vektör yardımıyla pozitif n-kollu oluşturan bir $\{\vec{t}_1, \vec{t}_2, \ldots, \vec{t}_n\}$ ortonormal sistemi bulunabilir. Bu n-kolluya, eğrinin gözönüne alınan noktasındaki n-kollusu denir. $\vec{t}_\mu$ ve $\vec{r}^{\,(v)}$ vektörleri birbirlerine

$$[\vec{t}_1, \vec{t}_2, \ldots, \vec{t}_{n-1}] = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix} [\vec{r}^{\,\circ}, \ldots, \vec{r}^{\,(n-1)}] \qquad (B.14)$$
$$= A_{n-1}\,[\vec{r}^{\,\circ}, \vec{r}^{\,\circ\circ}, \ldots, \vec{r}^{\,(n-1)}]$$

bağıntısıyla bağlıdırlar. Bu bağıntı gözönünde tutularak $\vec{r}^{\circ}, \vec{r}^{\circ\circ}, \ldots, \vec{r}^{(n-1)}, \vec{r}^{(n)}$ için

$$(B.15)\ \left[\vec{r}^{\circ}, \vec{r}^{\circ\circ}, \ldots, \vec{r}^{(n)}\right] = \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ b_{21} & b_{22} & & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} \ldots & b_{n-1,n-1} & \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots b_{n,n-1} & b_{nn} \end{pmatrix} \left[\vec{t}_1, \ldots, \vec{t}_n\right]$$

$$= B_n \left[\vec{t}_1, \vec{t}_2, \ldots, \vec{t}_n\right]$$

yazılabilir. $\vec{r}^{\circ}, \vec{r}^{\circ\circ}, \ldots, \vec{r}^{(n)}$ lineer bağımsız olduğunda

$$\| B_n \| = \prod_{k=1}^{n} b_{kk} \neq 0 \Rightarrow b_{nn} \neq 0$$

ve lineer bağımlı olduğunda

$$\| B_n \| = \prod_{k=1}^{n} b_{kk} = 0 \ , \ \| B_{n-1} \| = \prod_{k=1}^{n-1} b_{kk} \neq 0 \Rightarrow b_{nn} = 0$$

olacaktır.

$\{\vec{t}_1, \vec{t}_2, \ldots, \vec{t}_n\}$ ortonormal bir sistem olduğundan No. 4 de açıklandığı üzre,

$$(B.16)\ \left[\dot{\vec{t}}_1, \dot{\vec{t}}_2, \ldots, \dot{\vec{t}}_n\right] = C\left[\vec{t}_1, \vec{t}_2, \ldots, \vec{t}_n\right]$$

ifadesindeki $C = (c_{ij})$ matrisi çarpık simetriktir. Şimdi fazla olarak, $j > i+1$ için $c_{ij} =$ olduğunu göstereceğiz. (B.14) ün türetilmesiyle, (B.15) de kullanılarak

$$\left[\dot{\vec{t}}_1, \dot{\vec{t}}_2, \ldots, \dot{\vec{t}}_{n-1}\right] = \dot{A}_{n-1}\left[\vec{r}^{\circ}, \vec{r}^{\circ\circ}, \ldots, \vec{r}^{(n-1)}\right] + A_{n-1}\left[\vec{r}^{\circ\circ}, \ldots, \vec{r}^{(n)}\right]$$

$$= \dot{A}_{n-1} B_{n-1}\left[\vec{t}_1, \ldots, \vec{t}_{n-1}\right] + A_{n-1} \bar{B}_n \left[\vec{t}_1, \vec{t}_2, \ldots, \vec{t}_n\right] \qquad (*)$$

elde edilir ki bu ifadenin (B.16) ile karşılaştırılmasıyla istenilen $c_{ij} = 0$ $(i+1 < j)$ sonucuna varırız. Yine bu ifadeden $c_{i\,i+1} = a_{ii} b_{i+1\ i+1}$ olduğu görülür.

Öte yandan, (B.14), (B.15) bağıntıları düşünülürse $A_{n-1}^{-1} = B_{n-1}$ oluşundan

---

$$(*)\qquad \bar{B}_n = \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} & & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} \ldots & b_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{dir.}$$

$b_{i+1,i+1}=\dfrac{1}{a_{i+1,i+1}}$ elde edilecektir ki bu bize $i<n-1$ için

$$c_{i,i+1}=\frac{a_{ii}}{a_{i+1,i+1}}$$

bağıntısını verir. (B.6) bağıntısından a_{kk} $(k\leq n-1)$ lar hesaplanır ve yerine konursa $c_{i,i+1}=c_i$ koymak suretiyle

$$(B.17)_1 \qquad c_i=\varepsilon_i\,\varepsilon_{i+1}\frac{\sqrt{G_{i-1}G_{i+1}}}{G_i} \qquad (i<n-1)$$

elde edilir. c_{n-1} için ise (B.7) ve (B.14) kullanılarak

$$c_{n-1}=c_{n-1\,n}=\vec{t}_n\vec{t}^{\circ}_{n-1}=\| \vec{t}_1,\vec{t}_2,\ldots,\vec{t}_{n-1},\vec{t}^{\circ}_{n-1}\|$$

$$=(a_{11}\,a_{22}\ldots a_{n-1,n-1})\,a_{n-1,n-1}\,\|\vec{r}^{\circ},\vec{r}^{\circ\circ},\ldots,\vec{r}^{(n)}\|$$

ve yine a_{kk}'ların (B.6) dan hesaplanan değerlerini yerine korsak,

$$(B.17)_2 \qquad c_{n-1}=\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n-2}\frac{\sqrt{G_{n-2}}}{G_{n-1}}\|\vec{r}^{\circ},\vec{r}^{\circ\circ},\ldots,\vec{r}^{(n)}\|$$

elde ederiz. Demek ki özetliyecek olursak,

$$(B.18)\quad [\vec{t}^{\circ}_1,\vec{t}^{\circ}_2,\vec{t}^{\circ}_3,\ldots,\vec{t}^{\circ}_n]=\begin{pmatrix} 0 & c_1 & & & 0\\ -c_1 & 0 & c_2 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ & & -c_{n-2} & 0 & c_{n-1}\\ 0 & & & -c_{n-1} & 0\end{pmatrix}[\vec{t}_1,\vec{t}_2,\ldots,\vec{t}_n]$$

ve buradaki c_i $(i=1,2,\ldots,n-1)$ 'ler (B.17) bağıntılarıyla belirlidir.

Eğer paremetre olarak, s invariyant paremetresi alınır ve $\varepsilon_i=1$ $(i=1,2,\ldots,n_{n-1})$ konursa, $\dfrac{ds}{du}=\sqrt{G_1}$ den, s'e göre türevler için

$\dfrac{d\vec{t}_i}{ds}=\vec{t}'_i=\dfrac{\vec{t}^{\circ}_i}{\sqrt{G_1}}$ ve buradan da, $\dfrac{c_i}{\sqrt{G_1}}=\varrho_i$ koyarak

$$(B.19)\quad [\vec{t}'_1,\vec{t}'_2,\ldots,\vec{t}'_n]=\begin{pmatrix} 0 & \varrho_1 & & & 0\\ -\varrho_1 & 0 & \varrho_2 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ & & -\varrho_{n-2} & 0 & \varrho_{n-1}\\ 0 & & & -\varrho_{n-1} & 0\end{pmatrix}[\vec{t}_1,\vec{t}_2,\ldots,\vec{t}_n]$$

FRENET formüllerine varılır. Burada ϱ_i eğrinin gözönüne alınan noktasındaki i-inci eğriliğidir ve hemen görüleceği gibi

$$(B.20)\qquad \varrho_i = \frac{1}{G_i}\sqrt{\frac{G_{i-1}\,G_{i+1}}{G_1}} \quad (i\neq n-1),$$

$$\varrho_{n-1} = \frac{1}{G_{n-1}}\sqrt{\frac{G_{n-2}}{G_1}}\,\|\vec{r}^{\,o},\vec{r}^{\,oo},\ldots,\vec{r}^{\,(n)}\|$$

ile belirlidir. ($[K_8, 125-126]$, $[K_{12}, 94-99]$, $[K_{11}, 159-160]$, $[K_{13}, 1338-40]$)

6. Eğrinin kendel denklemleri :

Bir eğrinin ϱ_i eğrilikleri, eğrinin s yay uzunluğunun fonksiyonları olarak $\varrho_i = \varrho_i(s)$ ($i= 1,2,\ldots,n-1$)

şeklinde ifade edilmişse, bu denklemlere eğrinin kendel denklemleri denir. Şimdi bu denklemlerin verilmesiyle eğrinin verilmiş olacağını ifade eden şu teoremi vereceğiz.

Teorem-4 h negatif olmayan bir tam sayı olmak üzere, $c_i(s)$ ($i=1,2,\ldots,n-1$) bir $[s_1 , s_2]$ aralığında en az (n+h-i-1)-kez sürekli türetilebilir olsunlar. $i< n-1$ için $c_i(s)> 0$ olsun. Bu takdirde $s_0 \in [s_1,s_2]$; $\vec{r}^{\,o}$ önceden verilmiş keyfi bir vektör ve $\vec{t}_1^{\,o},\vec{t}_2^{\,o},\ldots,\vec{t}_n^{\,o}$ keyfi bir n-kollu olmak üzere, $c_i(s)$ niceliklerini eğrilikler olarak kabul eden (yani kendel denklemleri $\varrho_i=c_i(s)$' ler olan) ,

$$(B.21)\qquad \vec{r}(s_0) = \vec{r}^{\,o} \quad , \quad \vec{t}_i(s_0)= \vec{t}_i^{\,o} \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

başlangıç şartlarını sağlayan bir ve tek bir $\vec{r}=\vec{r}(s)$ eğrisi vardır. Bu $\vec{r}(s)$ en az (n+h)-kez sürekli türetilebilir ve $\vec{r}^{\,\prime}$, $\vec{r}^{\,\prime\prime}$,..., $\vec{r}^{\,(n-1)}$ vektörleri lineer bağımsızdır.

Teoremin tanıtlanması için önce

$$(B.22)_1\qquad [\vec{t}_1^{\,\prime},\vec{t}_2^{\,\prime},\ldots,\vec{t}_n^{\,\prime}] = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & & 0 \\ -c_1 & 0 & c_2 & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & -c_{n-2} & 0 & c_{n-1} \\ 0 & & -c_{n-1} & 0 \end{pmatrix} [\vec{t}_1,\vec{t}_2,\vec{t}_3,\ldots,\vec{t}_n]$$

diferensiyel denklem sisteminin çözümlerini düşünelim. No. 4 de açıklandığı gibi bu sistemin $\vec{t}_i(s_o)=\vec{t}_i^{\,o}$ başlangıç şartlarını gerçekliyen bir (ve tekbir) çözümü vardır ve bu çözüm $\{\vec{t}_1, \vec{t}_2, \dots, \vec{t}_n\}$ gibi bir ortonormal sistemdir. Bu çözüm bulunduktan sonra

$$(B.22)_2 \qquad \vec{r}\,' = \vec{t}_1(s)$$

diferensiyel denkleminin $\vec{r}(s_o) = \vec{r}^{\,o}$ başlangıç şartını sağlayan $\vec{r}=\vec{r}(s)$ çözümü bulunur ki bu çözüm de tektir.

Geriye $\vec{r}(s)$ ' in en az $(n+h)$-kez sürekli türetilebildiğini ve $\vec{r}\,'(s), \vec{r}\,''(s), \dots, \vec{r}^{\,(n-1)}(s)$ vektörlerinin lineer bağımsızlığını göstermek kalıyor ki bu da tüme varım yöntemiyle kolayca yapılabilir.

Şu noktayı açıklıkla belirtmek yerinde olur: $c_i(s) > 0$ $(i < n-1)$ şartı bağlayıcı bir şart değildir. Göz önüne alınan $[s_1, s_2]$ aralığında $c_i(s)$ 'lerden bazılarının, örneğin $c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_p}$ gibi p tanesinin negatif olduğunu varsayalım. Bu takdirde (B.22) denklemleri ve teoremde sözü geçen başlangıç şartlarıyla öyle bir ve tek bir $\vec{r}=\vec{r}(s)$ bulunur ki bu eğriye ait (B.17) ile belirli c_i nicelikleri, verilen $c_i(s)$ ler olur.

Bunu göstermek için $(B.22)_1$ bağıntısından (B.19) FRENET formüllerine geçişi vermek yeter. ε_k sayılarını

$$(B.23)\begin{cases} \varepsilon_{i_\nu+1}=\varepsilon_{i_\nu+j} & (\, j=1,2,\dots,i_{\nu+1}-i_\nu \;;\; \nu=0,1,\dots,p \;;\; \varepsilon_1=\varepsilon_{i_0+1}=1\,) \\ \varepsilon_{i_\nu}=-\varepsilon_{i_\nu+1} & \end{cases}$$

olarak seçelim. Bu takdirde

$$\varepsilon_{i_\nu+j}\,\varepsilon_{i_\nu+j-1} = \begin{cases} -1 & j=1 \text{ için} \\ 1 & j\neq 1 \text{ için} \end{cases}$$

elde edilir. Dolayısıyla her ν ve j için

$$(B.24) \qquad \varepsilon_{i_\nu+j}\,\varepsilon_{i_\nu+j-1}\; c_{i_\nu+j-1} = |c_{i\,+j-1}|$$

elde edilir.

Öte yandan, $(B.22)_1$ bağıntılarından

$$\varepsilon_1 \vec{t}_1' = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_2 c_1 \vec{t}_1$$

....

$$\varepsilon_{i_\nu+j} \vec{t}'_{i_\nu+j} = -\varepsilon_{i_\nu+j} \varepsilon_{i_\nu+j-1} \varepsilon_{i_\nu+j-1} c_{i_\nu+j-1} \vec{t}_{i_\nu+j-1} + \varepsilon_{i_\nu+j} \varepsilon_{i_\nu+j+1} \varepsilon_{i_\nu+j+1} \cdot c_{i_\nu+j} \vec{t}_{i_\nu+j+1}$$

....

$$\varepsilon_{n-1} \vec{t}^{*\prime}_{n-1} = -\varepsilon_{n-1} \varepsilon_{n-2} \varepsilon_{n-2} \vec{t}_{n-2} + \varepsilon_{n-1} \Big(\prod_{k=1}^{n-2} \varepsilon_k^2\Big) c_{n-1} \vec{t}_n$$

$$\Big(\prod_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k\Big) \vec{t}_n' = -\Big(\prod_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k\Big) c_{n-1} \vec{t}_{n-1}$$

ve $\vec{t}^*_k = \varepsilon_k \vec{t}_k$ $(k \leq n-1)$, $\vec{t}^*_n = \Big(\prod_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k\Big) \vec{t}_n$ koyarak

$$(B.25) \quad \left[\frac{d\vec{t}^*_1}{ds}, \frac{d\vec{t}^*_2}{ds}, \ldots, \frac{d\vec{t}^*_n}{ds}\right] = \begin{pmatrix} 0 & |c_1| & & & \\ -|c_1| & 0 & |c_2| & & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ & & -|c_{n-2}| & 0 & \Big(\prod_{k=1}^{n-2} \varepsilon_k\Big) c_{n-1} \\ & 0 & & -\Big(\prod_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k\Big) c_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \left[\vec{t}^*_1, \vec{t}^*_2, \ldots, \vec{t}^*_n\right]$$

bağıntısına varılır. Bu ise aranılan eğrinin FRENET formülleridir. Bu sistemin

$$\vec{t}^*_i(s_0) = \varepsilon_i \vec{t}^0_i \quad (i \leq n-1) \quad , \quad \vec{t}^*_n(s_0) = \Big(\prod_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k\Big) \vec{t}^0_n$$

başlangıç şartlarını sağlayan $\{\vec{t}^*_1, \vec{t}^*_2, \ldots, \vec{t}^*_n\}$ çözümü bulunur ve

$$\vec{r}' = \vec{t}^*_1 = \varepsilon_1 \vec{t}_1 = \vec{t}_1$$

denkleminin $\vec{r}(s_0) = \vec{r}^0$ başlangıç şartını sağlayan çözümüne geçilirse, eğri tamamen belirlenmiş olur. ({K8,127])

Bölüm I

ARDIŞIK OSKÜLATÖR ~~KÜRE~~ MERKEZLERİ

Bir eğrinin ardışık oskülatör küre merkezleri :

Tanım : Bir $\vec{r}=\vec{r}(s)$ eğrisinin oskülatör ν - düzlemi içinde bulunan ve eğriye göz önüne alınan N noktasında ν-üncü basamaktan doğan küreye eğrinin N noktasındaki oskülatör ν-küresi adı verilir. E_n uzayındaki bir eğrinin bir noktasındaki oskülatör n-küresine, kısaca o noktadaki oskülatör küresi de denir.

Şimdi eğrinin, bir N noktasındaki oskülatör ν küresini belirlemeğe çalışalım. N noktasının yer vektörü $\vec{r}(s_0)$ olsun. ν-kürenin yarıçapı R, merkezi $\vec{p}$ ve herhangi bir noktası $\vec{x}$ olduğuna göre, denklemi

$$(\vec{x}-\vec{p})^2 - R^2 = 0$$

olur. Kürenin eğriye N noktasında ν-üncü basamaktan değmesinden dolayı

$$f(s) = (\vec{r}(s)-\vec{p})^2 - R^2$$

olmak üzere

$$f(s_0)=0 \, , \quad f'(s_0)=0 \, , \; \ldots \, , \; f^{(\nu)}(s_0)=0$$

olur.

Öte yandan sözü geçen ν-küre eğrinin N noktasına ait oskülatör ν-düzlemi içinde bulunduğundan,

$$\vec{p}=\vec{r}(s_0)+\sum_{k=1}^{\nu} a_k(s_0)\,\vec{t}_k$$

yazılabilir. Yukardaki şartlar kullanılırsa, buradan

$$(\vec{p}-\vec{r})^2=R^2$$

$$a_1=\vec{t}_1(\vec{p}-\vec{r})=0$$

$$a_1'=-1+\rho_1\vec{t}_2(\vec{p}-\vec{r}) = -1+\rho_1 a_2=0$$

$$a_2'=(-\rho_1\vec{t}_1+\rho_2\vec{t}_3)(\vec{r}-\vec{p})=-\rho_1 a_1+\rho_2 a_3$$

....

$$a_{\nu-1}'=-\rho_{\nu-2}a_{\nu-2}+\rho_{\nu-1}a_\nu$$

çıkar. Böylece oskülatör kürenin yarıçapı

$$(I.1) \qquad (\vec{p}-\vec{r})^2=R^2=\sum_{k=2}^{\nu} a_k^2$$

ve merkezi

$$a_1=0$$

$$0= a_1'=-1+\rho_1 a_2$$

$$(I.2) \qquad a_2'=-\rho_1 a_2+0 +\rho_2 a_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{\nu-1}' = \qquad -\rho_{\nu-2} a_{\nu-2}+ 0 +\rho_{\nu-1} a_\nu$$

bağıntılarıyla belirli olur.

$\nu=n$ alındığında eğrinin N noktasındaki oskülatör küresi belirlenmiş olacaktır.

Görüldüğü gibi N noktası $\vec{r}=\vec{r}(s)$ eğrisini çizdiğinde, N noktasına ait oskülatör küre merkezi de bir $\vec{r}^{(1)}=\vec{r}^{(1)}(s)$ eğrisi çizer. Aynı şekilde $\vec{r}^{(1)}(s)$ in oskülatör küre merkezleri bir $\vec{r}^{(2)}=\vec{r}^{(2)}(s)$ eğrisi çizer, v.b... Öte yandan $\vec{r}(s)$ in N noktasına $\vec{r}^{(1)}(s)$'in bir noktası (N noktasına ait N_1 oskülatör küre merkezi), bu N_1 noktasına $\vec{r}^{(2)}(s)$ in bir N_2 noktası, v.b... karşılık gelir. Böylece, N noktasına ait bir $N_1, N_2, \ldots, N_i, \ldots$ ardışık oskülatör küre merkezleri dizisi elde edilmiş olur. Şimdi $\vec{r}^{(i)}(s)$ eğrilerinin N_i noktalarına ait bazı formüller verelim.

N_i noktalarının yer vektörlerini $\vec{r}^{(i)}, \vec{r}^{(i)}(s)$ eğrilerinin yay uzunluklarını s_i , N_i noktalarındaki FRENET vektörlerini $\vec{t}_j^{(i)}$ $(j=1,2,\ldots,n)$ ile gösterelim ve

$$\vec{r}^{(i)}=\vec{r}^{(i-1)}+\sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}^{(i-1)}\vec{t}_{k+1}^{(i-1)}$$

koyalım.

Bu durumda,

$$\vec{r}^{(1)}=\vec{r} + \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}\vec{t}_{k+1}$$

den s'e göre türev alarak

$$\frac{d\vec{r}^{(1)}}{ds} = \vec{t}_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{da_{k+1}}{ds} \vec{t}_{k+1} + \sum_{k=1}^{n-2} a_{k+1}(-\rho_k \vec{t}_k + \rho_{k+1}\vec{t}_{k+2}) - \rho_{n-1} a_n \vec{t}_{n-1}$$

ya da

$$\frac{d\vec{r}^{(1)}}{ds} = (1-\rho_1 a_2)\vec{t}_1 + \sum_{k=1}^{n-2} \left(\frac{da_{k+1}}{ds} + \rho_k a_k - \rho_{k+1} a_{k+2} \right)\vec{t}_{k+1} + \rho_{n-1} a_{n-1} \vec{t}_n + \frac{da_n}{ds} \vec{t}_n$$

ve (I.2) formülleri gereğince, $\vec{r}^{(1)}(s)$ in çizilme yönü uygun seçilerek

$$\vec{t}_1^{(1)} = \vec{t}_n$$

bulunur. Buradan FRENET formülleri kullanılarak,

$$\vec{t}_{k+1}^{(1)} = (-1)^k \vec{t}_{n+k} \qquad (k=0,1,\ldots,n-1)$$

elde edilir.

Aynı düşünceyle $\vec{r}^{(2)}(s)$ in FRENET vektörleri için

$$\vec{t}_{k+1}^{(2)} = (-1)^k \vec{t}_{n-k}^{(1)} = (-1)^{n-1} \vec{t}_{k+1}$$

elde edilir. Bu ifade n in tek ya da çift oluşuna bağlı olduğundan bundan sonraki kısımda her iki hali ayrı ayrı inceliyeceğiz.

a) n tek olsun. Bu durumda

$$\vec{t}_{k+1}^{(1)} = (-1)^k \vec{t}_{n-k} \quad , \quad \vec{t}_{k+1}^{(2)} = \vec{t}_{k+1}$$

olacaktır. Aynı düşüncenin ard arda tekrarlanmasıyla

$$(\mathrm{I}.3) \qquad \begin{aligned} \vec{t}_{k+1}^{(2m)} &= \vec{t}_{k+1} \\ \vec{t}_{k+1}^{(2m+1)} &= (-1)^k \vec{t}_{n-k} \end{aligned} \qquad (k=0,1,\ldots,n-1)$$

olduğu görülür. Bu bağıntılar yardımıyla

$$(\mathrm{I}.4) \qquad \begin{aligned} \vec{r}^{(2m)} &= \vec{r}^{(2m-1)} + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k a_{n-k}^{(2m-1)} \vec{t}_{k+1} \\ \vec{r}^{(2m+1)} &= \vec{r}^{(2m)} + \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}^{(2m)} \vec{t}_{k+1} \end{aligned}$$

yazabiliriz.

(I.4) formüllerinin her iki yanını s'e göre türetelim. Birinciden,

$$\frac{d\vec{r}^{(2m)}}{ds_{2m}}\frac{ds_{2m}}{ds}=\frac{d\vec{r}^{(2m-1)}}{ds_{2m-1}}\frac{ds_{2m-1}}{ds}+\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\frac{da_{n-k}^{(2m-1)}}{ds}\vec{t}_{k+1}+\varrho_1 a_{n-1}^{(2m-1)}\vec{t}_1$$

$$+\sum_{k=1}^{n-3}(-1)^k(\varrho_{k+1}a_{n-k-1}^{(2m-1)}-\varrho_k a_{n-k+1}^{(2m-1)})\vec{t}_{k+1}+\varrho_{n-2}a_3^{(2m-1)}\vec{t}_{n-1}-\varrho_{n-1}a_2^{(2m-1)}\vec{t}_n$$

ve $\dfrac{d\vec{r}^{(2m)}}{ds_{2m}}=\vec{t}_1^{(2m)}=\vec{t}_1$, $\dfrac{d\vec{r}^{(2m-1)}}{ds_{2m-1}}=\vec{t}_1^{(2m-1)}=\vec{t}_n$ koyarak,

$$\frac{ds_{2m}}{ds}=\frac{da_n^{(2m-1)}}{ds}+\varrho_1 a_{n-1}^{(2m-1)}$$

(I.5)
$$\frac{da_{n-k}^{(2m-1)}}{ds}=\varrho_k a_{n-k+1}^{(2m-1)}-\varrho_{k+1}a_{n-k-1}^{(2m-1)}\qquad (k=1,2,\dots,n-3)$$

$$\frac{da_2^{(2m-1)}}{ds}=\varrho_{n-2}a_3^{(2m-1)}$$

$$\frac{ds_{2m-1}}{ds}=\varrho_{n-1}a_2^{(2m-1)}$$

elde edilir. İkinciden de benzer şekilde,

$$\frac{ds_{2m+1}}{ds}\vec{t}_n=\frac{ds_{2m}}{ds}\vec{t}_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{da_{k+1}^{(2m)}}{ds}\vec{t}_{k+1}-\varrho_1 a_2^{(2m)}\vec{t}_1-\varrho_2 a_3^{(2m)}\vec{t}_2$$

$$+\sum_{k=2}^{n-2}(\varrho_k a_k^{(2m)}-\varrho_{k+1}a_{k+2}^{(2m)})\vec{t}_{k+1}+\varrho_{n-1}a_{n-1}^{(2m)}\vec{t}_n$$

ve dolayısıyla,

$$\frac{ds_{2m+1}}{ds}=\frac{da_n^{(2m)}}{ds}+\varrho_{n-1}a_{n-1}^{(2m)}$$

(I.6)
$$\frac{da_{k+1}^{(2m)}}{ds}=\varrho_{k+1}a_{k+2}^{(2m)}-\varrho_k a_k^{(2m)}\qquad (k=2,3,\dots,n-2)$$

$$\frac{da_2^{(2m)}}{ds} = \varrho_2 a_3^{(2m)}$$

$$\frac{ds_{2m}}{ds} = \varrho_1 a_2^{(2m)}$$

elde edilir.

Öte yandan $(I.5)_1$ ile $(I.6)_4$ ve $(I.5)_4$ ile $(I.6)_1$ birleştirilirse $a^{(i)}$ lerin s'e göre türevlerini yine $a^{(i)}$ler ve esas eğrinin eğrilikleri cinsinden veren,

$$\frac{da_2^{(2m)}}{ds} = o + \varrho_2 a_3^{(2m)}$$

$$\frac{da_3^{(2m)}}{ds} = -\varrho_2 a_2^{(2m)} + o + \varrho_3 a_4^{(2m)}$$

....

$$(I.7) \qquad \frac{da_{k+1}^{(2m)}}{ds} = -\varrho_k a_k^{(2m)} + o + \varrho_{k+1} a_{k+2}^{(2m)}$$

....

$$\frac{da_{n-1}^{(2m)}}{ds} = -\varrho_{n-2} a_{n-2}^{(2m)} + o + \varrho_{n-1} a_n^{(2m)}$$

$$\frac{da_n^{(2m)}}{ds} = \varrho_{n-1}(-a_{n-1}^{(2m)} + a_2^{(2m+1)})$$

ve

$$\frac{da_2^{(2m+1)}}{ds} = o + \varrho_{n-2} a_3^{(2m+1)}$$

$$\frac{da_3^{(2m+1)}}{ds} = -\varrho_{n-2} a_2^{(2m+1)} + o + \varrho_{n-3} a_4^{(2m+1)}$$

....

$$(I.8) \qquad \frac{da_{k+1}^{(2m+1)}}{ds} = -\varrho_{n-k} a_k^{(2m+1)} + o + \varrho_{n-k-1} a_{k+2}^{(2m+1)}$$

$$\frac{da_{n-1}^{(2m+1)}}{ds} = -\varrho_2 a_{n-2}^{(2m+1)} + o + \varrho_1 a_n^{(2m+1)}$$

$$\frac{da_n^{(2m+1)}}{ds} = \varrho_1(-a_{n-1}^{(2m+1)} + a_2^{(2m+2)})$$

formülleri elde edilir.

b) n çift olsun. Bu durumda,

$$\vec{t}_{k+1}^{(1)} = (-1)^k \vec{t}_{n-k}, \quad \vec{t}_{k+1}^{(2)} = -\vec{t}_{k+1}, \quad \vec{t}_{k+1}^{(3)} = (-1)^{k+1}\vec{t}_{n-k}, \quad \vec{t}_{k+1}^{(4)} = \vec{t}_{k+1}$$

olur. Aynı düşüncenin ard arda tekrarlanmasıyla

$$(I.9) \qquad \begin{aligned} \vec{t}_{k+1}^{(4m)} &= \vec{t}_{k+1} \\ \vec{t}_{k+1}^{(4m+1)} &= (-1)^k \vec{t}_{n-k} \\ \vec{t}_{k+1}^{(4m+2)} &= -\vec{t}_{k+1} \\ \vec{t}_{k+1}^{(4m+3)} &= (-1)^{k+1}\vec{t}_{n-k} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu bağıntılar yardımıyla

$$(I.10) \qquad \begin{aligned} \vec{r}^{(4m)} &= \vec{r}^{(4m-1)} + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k a_{n-k}^{(4m-1)} \vec{t}_{k+1} \\ \vec{r}^{(4m+1)} &= \vec{r}^{(4m)} + \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}^{(4m)} \vec{t}_{k+1} \\ \vec{r}^{(4m+2)} &= \vec{r}^{(4m+1)} + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{k+1} a_{n-k}^{(4m+1)} \vec{t}_{k+1} \\ \vec{r}^{(4m+3)} &= \vec{r}^{(4m+2)} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(-a_{k+1}^{(4m+2)} \vec{t}_{k+1}\right) \end{aligned}$$

yazabiliriz.

(I.10) formüllerinin her iki yanını s'e göre türetir ve $\frac{d\vec{r}^{(4m)}}{ds_{4m}} = \vec{t}_1^{(4m)} = \vec{t}_1$, $\frac{d\vec{r}^{(4m+1)}}{ds_{4m+1}} = \vec{t}_1^{(4m+1)} = \vec{t}_n$, $\frac{d\vec{r}^{(4m+2)}}{ds_{4m+2}} = \vec{t}_1^{(4m+2)} = -\vec{t}_1$, $\frac{d\vec{r}^{(4m+3)}}{ds_{4m+3}} = \vec{t}_1^{(4m+3)} = -\vec{t}_n$ koyarsak,

$$\frac{ds_{4m}}{ds}\vec{t}_1 = \frac{ds_{4m-1}}{ds}\vec{t}_n + \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k \frac{da_{n-k}^{(4m-1)}}{ds}\vec{t}_{k+1} + \varrho_1 a_n^{(4m-1)}\vec{t}_2 + \sum_{k=1}^{n-2}(-1)^k a_{n-k}^{(4m-1)}(-\varrho_k \vec{t}_k + \varrho_{k+1}\vec{t}_{k+2})$$

$$\frac{ds_{4m+1}}{ds}\vec{t}_n = \frac{ds_{4m}}{ds}\vec{t}_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{da_{k+1}^{(4m)}}{ds}\vec{t}_{k+1} + \sum_{k=1}^{n-2} a_{k+1}^{(4m)}(-\varrho_k\vec{t}_k + \varrho_{k+1}\vec{t}_{k+2}) - \varrho_{n-1}a_n^{(4m)}\vec{t}_{n-1}$$

$$-\frac{ds_{4m+2}}{ds}\vec{t}_1 = \frac{ds_{4m+1}}{ds}\vec{t}_n + \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^{k+1}\frac{da_{n-k}^{(4m+1)}}{ds}\vec{t}_{k+1} - \varrho_1 a_n^{(4m+1)}\vec{t}_2 + \sum_{k=1}^{n-2}(-1)^{k+1}a_{n-k}^{(4m+1)} \cdot$$

$$\cdot(-\varrho_k\vec{t}_k + \varrho_{k+1}\vec{t}_{k+2})$$

$$\frac{ds_{4m+3}}{ds}\vec{t}_n = \frac{ds_{4m+2}}{ds}\vec{t}_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{da_{k+1}^{(4m+2)}}{ds}\vec{t}_{k+1} + \sum_{k=1}^{n-2}a_{k+1}^{(4m+2)}(-\varrho_k\vec{t}_k + \varrho_{k+1}\vec{t}_{k+2})$$

$$-\varrho_{n-1}a_n^{(4m+2)}\vec{t}_{n-1}$$

ve bunlardan da sırasıyla,

$$\text{(I.11)}\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{ds_{4m}}{ds} = \frac{da_n^{(4m-1)}}{ds} + \varrho_1\, a_{n-1}^{(4m-1)}\\
&\frac{da_2^{(4m-1)}}{ds} = \varrho_{n-2}\, a_3^{(4m-1)}\\
&\frac{da_{n-k}^{(4m-1)}}{ds} = \varrho_k\, a_{n-k+1}^{(4m-1)} - \varrho_{k+1}\, a_{n-k-1}^{(4m-1)} \qquad (k=1,2,\ldots,n-3)\\
&\frac{ds_{4m-1}}{ds} = \varrho_{n-1}\, a_2^{(4m-1)}
\end{aligned}\right.$$

$$\text{(I.12)}\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{ds_{4m+1}}{ds} = \varrho_{n-1}\, a_{n-1}^{(4m)} + \frac{da_n^{(4m)}}{ds}\\
&\frac{da_2^{(4m)}}{ds} = \varrho_2\, a_3^{(4m)}\\
&\frac{da_{k+1}^{(4m)}}{ds} = \varrho_{k+1}\, a_{k+2}^{(4m)} - \varrho_k\, a_k^{(4m)} \qquad (k=2,3,\ldots,n-2)\\
&\frac{ds_{4m}}{ds} = \varrho_1\, a_2^{(4m)}
\end{aligned}\right.$$

$$\frac{ds_{4m+2}}{ds} = \frac{da_n^{(4m+1)}}{ds} + \rho_1 a_{n-1}^{(4m+1)}$$

$$(I.13)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{da_2^{(4m+1)}}{ds} = \rho_{n-2}\, a_3^{(4m+1)} \\ & \frac{da_{n-k}^{(4m+1)}}{ds} = \rho_k\, a_{n-k+1}^{(4m+1)} - \rho_{k+1}\, a_{n-k-1}^{(4m+1)} \qquad (k=1,2,\ldots,n-3) \\ & \frac{ds_{4m+1}}{ds} = \rho_{n-1}\, a_2^{(4m+1)} \end{aligned} \right.$$

$$(I.14)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{ds_{4m+3}}{ds} = \rho_{n-1}\, a_{n-1}^{(4m+2)} + \frac{da_n^{(4m+2)}}{ds} \\ & \frac{da_2^{(4m+2)}}{ds} = \rho_2\, a_3^{(4m+2)} \\ & \frac{da_{k+1}^{(4m+2)}}{ds} = \rho_{k+1}\, a_{k+2}^{(4m+2)} - \rho_k\, a_k^{(4m+2)} \qquad (k=2,3,\ldots,n-2) \\ & \frac{ds_{4m+2}}{ds} = \rho_1\, a_2^{(4m+2)} \end{aligned} \right.$$

elde edilir.

Hemen görüleceği gbi (I.11) ile (I.13) ve (I.12) ile (I.14) birleştirilebilir. Böylece n'in tek olması halinde elde edilen (I.5), (I.6) ve dolayısıyla (I.7), (I.8) formüllerine varılır. Demekki (I.7) ve (I.8) formülleri n nasıl bir doğal sayı olursa olsun doğrudur.

2. Ardışık oskülatör küre merkezleri dizisinin limit konumu :

Esas konumuza geçmeden önce düzgün yakınsaklık kavramı ile ilgili birkaç ufak noktayı hatırlatmak yerinde olur.

$\vec{r}_1(s)$, $\vec{r}_2(s), \ldots, \vec{r}_k(s), \ldots$ vektörel dizisini göz önüne alalım. $s \in (s_0, s_1)$ nasıl seçilirse seçilsin , $\varepsilon > 0$ önceden verilen keyfi bir sayı olmak üzere, $k > k_0$ için $|\vec{r}_k - \vec{r}| < \varepsilon$ yapan bir k_0 (ε) sayısı bulunabilirse , gözönüne alınan $\left\{\vec{r}_k(s)\right\}_{k=1}^{\infty}$ dizisine (s_o, s_1) aralığında düzgün yakınsaktır. denir.

$\vec{r}_k(s) = (x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn})$ $[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n]$ dersek, kolayca ~~görüleceği~~ gibi $\left\{\vec{r}_k(s)\right\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin düzgün yakınsak olması için, bütün $\left\{x_{ki}\right\}_{k=1}^{\infty}$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$

dizilerinin düzgün yakınsak olması gerektir ve yeter.

Yine kolayca gösterilebilir ki, $\left\{\frac{d\vec{r}_k}{ds}\right\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi, (s_o, s_1) aralığında düzgün yakınsak ise ve $\left\{\vec{r}_k(s)\right\}_{k=1}^{\infty}$ belli bir $s^* \in (s_o, s_1)$ için yakınsaksa, $\left\{\vec{r}_k(s)\right\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi (s_o, s_1) de düzgün yakınsaktır ve $\lim\limits_{k\to\infty} \vec{r}_k(s) = \vec{p}(s)$ ise $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{d\vec{r}_k}{ds} = \frac{d\vec{p}}{ds}$ dir. Artık asıl teoremimize geçebiliriz.

<u>Teorem.-5</u> $\vec{r}^{(1)}, \vec{r}^{(2)}, \ldots, \vec{r}^{(k)}, \ldots$ ardaşık oskülatör küre merkezleri dizisini gözönüne alalım. $\left\{\frac{d\vec{r}^{(k)}}{ds}\right\}$ dizisi bir (s_o, s_1) aralığında düzgün yakınsak ve $s^* \in (s_o, s_1)$ olmak üzere $\left\{\vec{r}^{(k)}(s^*)\right\}_{k=1}^{\infty}$ yakınsak ise $\left\{\vec{r}^{(k)}(s)\right\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi sözü geçen aralıkta sabit $\vec{p}^* = \lim\limits_{k\to\infty} \vec{r}^{(k)}(s^*)$ noktasına yakınsar.

Tanıtlama için $\frac{d\vec{r}^{(k)}}{ds}$ dizisinin 0 'a yakınsıyacağını göstermek yetişir.

$$\vec{r}^{(i)} = \vec{r} + \sum_{k=1}^{n} b_k^{(i)} \vec{t}_k$$

koyalım. Şimdibu $b_k^{(i)}$ leri $a_h^{(j)}$ ler cinsinden ifade etmeye çalışalım.

a) n tek olsun. (I.4) formüllerinden

$$\vec{r}^{(2m)} = \vec{r}^{(2m-2)} + \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}^{(2m-2)} \vec{t}_{k+1} + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k a_{n-k}^{(2m-1)} \vec{t}_{k+1}$$

$$\vec{r}^{(2m+1)} = \vec{r}^{(2m-1)} + \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}^{(2m)} \vec{t}_{k+1} + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k a_{n-k}^{(2m-1)} \vec{t}_{k+1}$$

ve buradan kolay bir hesaplamayla

$$\vec{r}^{(2m)} = \vec{r} + \sum_{i=0}^{m-1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}^{(2i)} \vec{t}_{k+1} \right) + \sum_{i=0}^{m-1} \left(\sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k a_{n-k}^{(2i+1)} \vec{t}_{k+1} \right)$$

$$\vec{r}^{(2m+1)} = \vec{r} + \sum_{i=0}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}^{(2i)} \vec{t}_{k+1} \right) + \sum_{i=0}^{m-1} \left(\sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k a_{n-k}^{(2i+1)} \vec{t}_{k+1} \right)$$

çıkar. Böylece

$$
(\mathrm{I}.15)\qquad
\begin{aligned}
b_1^{(2m)} &= \sum_{i=0}^{m-1} a_n^{(2i+1)} \\
b_{k+1}^{(2m)} &= \sum_{i=0}^{m-1} a_{k+1}^{(2i)} + (-1)^k \sum_{i=0}^{m-1} a_{n-k}^{(2i+1)} \qquad (k=1,2,\ldots,n-2) \\
b_n^{(2m)} &= \sum_{i=0}^{m-1} a_n^{(2i)}
\end{aligned}
$$

ve

$$
(\mathrm{I}.16)\qquad
\begin{aligned}
b_1^{(2m+1)} &= \sum_{i=0}^{m-1} a_n^{(2i+1)} \\
b_{k+1}^{(2m+1)} &= \sum_{i=0}^{m} (a_{k+1}^{(2i)} + (-1)^k\, a_{n-k}^{(2i+1)}) \qquad (k=1,2,\ldots,n-2) \\
b_n^{(2m+1)} &= \sum_{i=0}^{m} a_n^{(2i)}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Öte yandan $\left\{ \dfrac{db_k^{(i)}}{ds} \right\}_{i=1}^{\infty}$ ve $\left\{ b_k^{(i)} \right\}_{i=1}^{\infty}$ $(k=1,2,\ldots,n)$ dizileri düzgün yakınsakdı. Buna göre, $\lim_{i\to\infty} b_k^{(i)} = b_k$ koyarak, (I.15) ve (I.16) dan

$$
(\mathrm{I}.17)\qquad
\begin{aligned}
b_1 &= \sum_{i=0}^{\infty} a_n^{(2i+1)} \\
b_{k+1} &= \sum_{i=0}^{\infty} (a_{k+1}^{(2i)} + (-1)^k\, a_{n-k}^{(2i+1)}) \qquad (k=1,2,\ldots,n-2) \\
b_n &= \sum_{i=0}^{\infty} a_n^{(2i)}
\end{aligned}
$$

yazılabilir.

$$
\lim_{i\to\infty} \frac{db_k^{(i)}}{ds} = \frac{db_k}{ds}
$$

olduğuna göre, (I.17) türetilir ve (I.7),(I.8) bağıntıları gözönünde tutulursa

$$
\frac{db_1}{ds} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{da_n^{(2i+1)}}{ds} = \rho_1 \sum_{i=0}^{\infty} (-a_{n-1}^{(2i+1)} + a_2^{(2i+2)}) = -\rho_1 a_2 + \rho_1 \sum_{i=0}^{\infty} (a_2^{(2i)} - a_{n-1}^{(2i+1)})
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{db_2}{ds} &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{da_2^{(2i)}}{ds} - \frac{da_{n-1}^{(2i+1)}}{ds} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} (\rho_2 a_3^{(2i)} - \rho_1 a_n^{(2i+1)} + \rho_2 a_{n-2}^{(2i+1)}) \\
&= -\rho_1 \sum_{i=0}^{\infty} a_n^{(2i+1)} + \rho_2 \sum_{i=0}^{\infty} (a_3^{(2i)} + a_{n-2}^{(2i+1)})
\end{aligned}
$$

$$\frac{db_{k+1}}{ds}=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{da_{k+1}^{(2i)}}{ds}+(-1)^k\frac{da_{n-k}^{(2i+1)}}{ds}\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\varrho_{k+1}a_{k+2}^{(2i)}-\varrho_k a_k^{(2i)}+(-1)^k(\varrho_k a_{n-k+1}^{(2i+1)}-\varrho_{k+1}a_{n-k-1}^{(2i+1)}\right)$$

$$=-\varrho_k\sum_{i=0}^{\infty}(a_k^{(2i)}+(-1)^{k-1}a_{n-k+1}^{(2i+1)})+\varrho_{k+1}\sum_{i=0}^{\infty}(a_{k+2}^{(2i)}+(-1)^{k+1}a_{n-k-1}^{(2i+1)})$$

....

$$\frac{db_{n-1}}{ds}=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{da_{n-1}^{(2i)}}{ds}-\frac{da_2^{(2i+1)}}{ds}\right)=\sum_{i=0}^{\infty}(-\varrho_{n-2}a_{n-2}^{(2i)}+\varrho_{n-1}a_n^{(2i)}-\varrho_{n-2}a_3^{(2i+1)})$$

$$=-\varrho_{n-2}\sum_{i=0}^{\infty}(a_{n-2}^{(2i)}+a_3^{(2i+1)})+\varrho_{n-1}\sum_{i=0}^{\infty}a_n^{(2i)}$$

$$\frac{db_n}{ds}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{da_n^{(2i)}}{ds}=\sum_{i=0}^{\infty}\varrho_{n-1}(-a_{n-1}^{(2i)}+a_2^{(2i+1)})=-\varrho_{n-1}\sum_{i=0}^{\infty}(a_{n-1}^{(2i)}-a_2^{(2i+1)})$$

bulunur. Buradan da (I.17) formülleri kullanılarak,

$$\frac{db_1}{ds}=-1+\varrho_1 b_2$$

$$\frac{db_2}{ds}=-\varrho_1 b_1+\varrho_2 b_3$$

....

(I.18) $$\frac{db_{k+1}}{ds}=-\varrho_k b_k+\varrho_{k+1}b_{k+2}$$

....

$$\frac{db_{n-1}}{ds}=-\varrho_{n-2}b_{n-2}+\varrho_{n-1}b_n$$

$$\frac{db_n}{ds}=-\varrho_{n-1}b_{n-1}$$

bağıntıları elde edilir.

$\left\{\vec{r}^{(i)}(s)\right\}_{i=1}^{\infty}$ dizisinin limiti $\vec{p}(s)$ ile gösterilirse

$$\vec{p}(s)=\vec{r}+\sum_{k=1}^{n}b_k\vec{t}_k$$

olur ve bunun s'e göre türetilmesiyle

$$\frac{d\vec{p}}{ds}=\left(\frac{db_1}{ds}+1-\varrho_1 b_2\right)\vec{t}_1+\sum_{k=1}^{n-2}\left(\frac{db_{k+1}}{ds}+\varrho_k b_k-\varrho_{k+1} b_{k+2}\right)\vec{t}_{k+1}+\left(\frac{db_n}{ds}+\varrho_{n-1} b_{n-1}\right)\vec{t}_n$$

elde edilir ki (I.18) den hemen,

$$\text{(I.19)}\qquad \frac{d\vec{p}}{ds}=0$$

sonucu çıkar. Demekki $\vec{p}$ sabittir. Öte yandan bir $s^{*}\in(s_0,s_1)$ için $\lim\limits_{i\to\infty}\vec{r}^{(i)}(s^{*})=\vec{p}^{*}$ idi. Öyleyse her $s\in(s_0,s_1)$ için $\lim\limits_{i\to\infty}\vec{r}^{(i)}(s)=\vec{p}^{*}$ olur.

b) n çift olsun. (I.10) formüllerinden

$$\vec{r}^{(4m)}=\vec{r}^{(4m-4)}+\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k a_{n-k}^{(4m-1)}\vec{t}_{k+1}-\sum_{k=1}^{n-1}a_{k+1}^{(4m-2)}\vec{t}_{k+1}+\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^{k+1}a_{n-k}^{(4m-3)}\vec{t}_{k+1}$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1}a_{k+1}^{(4m-4)}\vec{t}_{k+1}$$

$$\vec{r}^{(4m+1)}=\vec{r}^{(4m-3)}+\sum_{k=1}^{n-1}a_{k+1}^{(4m)}\vec{t}_{k+1}+\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k a_{n-k}^{(4m-1)}\vec{t}_{k+1}-\sum_{k=1}^{n-1}a_{k+1}^{(4m-2)}\vec{t}_{k+1}$$
$$+\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^{k+1}a_{n-k}^{(4m-3)}\vec{t}_{k+1}$$

$$\vec{r}^{(4m+2)}=\vec{r}^{(4m-2)}+\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^{k+1}a_{n-k}^{(4m+1)}\vec{t}_{k+1}+\sum_{k=1}^{n-1}a_{k+1}^{(4m)}\vec{t}_{k+1}+\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k a_{n-k}^{(4m-1)}\vec{t}_{k+1}$$
$$-\sum_{k=1}^{n-1}a_{k+1}^{(4m-2)}\vec{t}_{k+1}$$

$$\vec{r}^{(4m+3)}=\vec{r}^{(4m-1)}-\sum_{k=1}^{n-1}a_{k+1}^{(4m+2)}\vec{t}_{k+1}+\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^{k+1}a_{n-k}^{(4m+1)}\vec{t}_{k+1}+\sum_{k=1}^{n-1}a_{k+1}^{(4m)}\vec{t}_{k+1}$$
$$+\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k a_{n-k}^{(4m-1)}\vec{t}_{k+1}$$

ve buradan kolay bir hesaplamayla

$$\vec{r}^{(4m)}=\vec{r}+\sum_{i=1}^{m}\Big\{\big(a_n^{(4i-1)}-a_n^{(4i-3)}\big)\vec{t}_1+\sum_{k=1}^{n-2}\Big[(-1)^k a_{n-k}^{(4i-1)}-a_{k+1}^{(4i-2)}$$
$$-(-1)^k a_{n-k}^{(4i-3)}+a_{k+1}^{(4i-4)}\Big]\vec{t}_{k+1}+\big(-a_n^{(4i-2)}+a_n^{(4i-4)}\big)\vec{t}_n\Big\}$$

$$\vec{r}^{(4m+1)}=\vec{r}^{(1)}+\sum_{i=1}^{m}\Big\{\big(a_n^{(4i-1)}-a_n^{(4i-3)}\big)\vec{t}_1+\sum_{k=1}^{n-2}\Big[a_{k+1}^{(4i)}+(-1)^k a_{n-k}^{(4i-1)}$$
$$-a_{k+1}^{(4i-2)}-(-1)^k a_{n-k}^{(4i-3)}\Big]\vec{t}_{k+1}+\big(a_n^{(4i)}-a_n^{(4i-2)}\big)\vec{t}_n\Big\}$$

$$\vec{r}^{(4m+2)} = \vec{r}^{(2)} + \sum_{i=1}^{m} \Big\{ \left(-a_n^{(4i+1)} + a_n^{(4i-1)}\right) \vec{t}_1 + \sum_{k=1}^{n-2} \Big[(-1)^{k+1} a_{n-k}^{(4i+1)} + a_{k+1}^{(4i)} + (-1)^{k} \cdot a_{n-k}^{(4i-1)} - a_{k+1}^{(4i-2)} \Big] \vec{t}_{k+1} + \left(a_n^{(4i)} - a_n^{(4i-2)}\right) \vec{t}_n \Big\}$$

$$\vec{r}^{(4m+3)} = \vec{r}^{(3)} + \sum_{i=1}^{m} \Big\{ \left(-a_n^{(4i+1)} + a_n^{(4i-1)}\right) \vec{t}_1 + \sum_{k=1}^{n-2} \Big[-a_{k+1}^{(4i+2)} - (-1)^{k} a_{n-k}^{(4i+1)} + a_{k+1}^{(4i)} + (-1)^{k} a_{n-k}^{(4i-1)} \Big] \vec{t}_{k+1} + \left(-a_n^{(4i+2)} + a_n^{(4i)}\right) \vec{t}_n \Big\}$$

çıkar. Böylece $k=1,2,\ldots,n-2$ olmak üzere

$$b_1^{(4m)} = \sum_{i=1}^{m} \left(a_n^{(4i-1)} - a_n^{(4i-3)}\right)$$

$$\text{(I.21)} \quad b_{k+1}^{(4m)} = \sum_{i=1}^{m} \left\{ (-1)^{k} a_{n-k}^{(4i-1)} - a_{k+1}^{(4i-2)} - (-1)^{k} a_{n-k}^{(4i-3)} + a_{k+1}^{(4i-4)} \right\}$$

$$b_n^{(4m)} = \sum_{i=1}^{m} \left(-a_n^{(4i-2)} + a_n^{(4i-4)}\right)$$

$$b_1^{(4m+1)} = \sum_{i=1}^{m} \left(a_n^{(4i-1)} - a_n^{(4i-3)}\right)$$

$$\text{(I.22)} \quad b_{k+1}^{(4m+1)} = a_{k+1} + \sum_{i=1}^{m} \left\{ a_{k+1}^{(4i)} + (-1)^{k} a_{n-k}^{(4i-1)} - a_{k+1}^{(4i-2)} + (-1)^{k+1} a_{n-k}^{(4i-3)} \right\}$$

$$b_n^{(4m+1)} = a_n + \sum_{i=1}^{m} \left(a_n^{(4i)} - a_n^{(4i-2)}\right)$$

$$b_1^{(4m+2)} = -a_n^{(1)} + \sum_{i=1}^{m} \left(-a_n^{(4i+1)} + a_n^{(4i-1)}\right)$$

$$\text{(I.23)} \quad b_{k+1}^{(4m+2)} = a_{k+1} + (-1)^{k+1} a_{n-k}^{(1)} + \sum_{i=1}^{m} \left\{ -a_{k+1}^{(4i-2)} + a_{k+1}^{(4i)} + (-1)^{k} a_{n-k}^{(4i-1)} + (-1)^{1+k} a_{n-k}^{(4i+1)} \right\}$$

$$b_n^{(4m+2)} = a_n + \sum_{i=1}^{m} \left(a_n^{(4i)} - a_n^{(4i-2)}\right)$$

$$b_1^{(4m+3)} = -a_n^{(1)} + \sum_{i=1}^{m} \left(-a_n^{(4i+1)} + a_n^{(4i-1)}\right)$$

$$\text{(I.24)} \quad b_{k+1}^{(4m+3)} = a_{k+1} + (-1)^{1+k} a_{n-k}^{(1)} - a_{k+1}^{(2)} + \sum_{i=1}^{m} \left\{ -a_{k+1}^{(4i+2)} + (-1)^{k+1} a_{n-k}^{(4i+1)} + a_{k+1}^{(4i)} + (-1)^{k} a_{n-k}^{(4i-1)} \right\}$$

$$b_n^{(4m+3)} = a_n - a_n^{(2)} + \sum_{i=1}^{m} (-a_n^{(4i+2)} + a_n^{(4i)})$$

elde edilir.

Görülüyor ki $\{b_k^{(4m)}\}_{m=1}^{\infty}$, $\{b_k^{(4m+1)}\}_{m=1}^{\infty}$, $\{b_k^{(4m+2)}\}_{m=1}^{\infty}$, $\{b_k^{(4m+3)}\}_{m=1}^{\infty}$

dizilerinin limitleri aynıdır. Buradan $\lim_{i\to\infty} b_k^{(i)} = b_k$ koyarak

$$b_1 = \sum_{i=0}^{\infty} (-a_n^{(4i+1)} + a_n^{(4i+3)})$$

$$\text{(I.25)} \quad b_{k+1} = \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ a_{k+1}^{(4i)} + (-1)^{k+1} a_{n-k}^{(4i+1)} - a_{k+1}^{(4i+2)} + (-1)^k a_{n-k}^{(4i+3)} \right\} (k=1,2,\ldots,n-2)$$

$$b_n = \sum_{i=0}^{\infty} (a_n^{(4i)} - a_n^{(4i+2)})$$

yazılabilir.

$$\lim_{i\to\infty} \frac{db_k^{(i)}}{ds} = \frac{db_k}{ds}$$

olduğundan (I.7) ve (I.8) formülleri kullanılarak

$$\frac{db_1}{ds} = \rho_1 \sum_{i=0}^{\infty} \left[-(-a_{n-1}^{(4i+1)} + a_2^{(4i+2)}) + a_2^{(4i+4)} - a_{n-1}^{(4i+3)} \right]$$

$$= -\rho_1 a_2 + \rho_1 \sum_{i=0}^{\infty} (a_2^{(4i)} + a_{n-1}^{(4i+1)} - a_2^{(4i+2)} - a_{n-1}^{(4i+3)})$$

$$\frac{db_2}{ds} = \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \rho_2 a_3^{(4i)} + \rho_1 a_n^{(4i+1)} - \rho_2 a_{n-2}^{(4i+1)} - \rho_2 a_3^{(4i+2)} - \rho_1 a_n^{(4i+3)} + \rho_2 a_{n-2}^{(4i+3)} \right\}$$

$$= -\rho_1 \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ -a_n^{(4i+1)} + a_n^{(4i+3)} \right\} + \rho_2 \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ a_3^{(4i)} - a_{n-2}^{(4i+1)} - a_3^{(4i+2)} + a_{n-2}^{(4i+3)} \right\}$$

....

$$\frac{db_{k+1}}{ds} = \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \rho_{k+1} a_{k+2}^{(4i)} - \rho_k a_k^{(4i)} + (-1)^{k+1} (\rho_k a_{n-k+1}^{(4i+1)} - \rho_k a_{n-k-1}^{(4i+1)}) - (\rho_{k+1} a_{k+2}^{(4i+2)} - \rho_k a_k^{(4i+2)}) \right.$$

$$\left. + (-1)^k (\rho_k a_{n-k+1}^{(4i+3)} - \rho_k a_{n-k-1}^{(4i+3)}) \right\}$$

$$= -\rho_k \sum_{i=0}^{\infty} (a_k^{(4i)} + (-1)^k a_{n-k+1}^{(4i+1)} - a_k^{(4i+2)} + (-1)^{k-1} a_{n-k+1}^{(4i+3)}) + \rho_{k+1} \sum_{i=0}^{\infty} (a_{k+2}^{(4i)}$$

$$+ (-1)^{k+2} a_{n-k-1}^{(4i+1)} - a_{k+2}^{(4i+2)} + (-1)^{k+1} a_{n-k-1}^{(4i+3)}$$

. . . .

$$\frac{db_{n-1}}{ds} = \sum_{i=0}^{\infty}\{\rho_{n-1}a_n^{(4i)} - \rho_{n-2}a_{n-2}^{(4i)} - \rho_{n-2}a_3^{(4i+1)} - \rho_{n-1}a_n^{(4i+2)} + \rho_{n-2}a_{n-2}^{(4i+2)} + \rho_{n-2}a_3^{(4i+3)}\}$$

$$= -\rho_{n-2}\sum_{i=0}^{\infty}(a_{n-2}^{(4i)} + a_3^{(4i+1)} + a_{n-2}^{(4i+2)} + a_3^{(4i+3)}) + \rho_{n-1}\sum_{i=0}^{\infty}(a_n^{(4i)} - a_n^{(4i+2)})$$

$$\frac{db_n}{ds} = \rho_{n-1}\sum_{i=0}^{\infty}(a_2^{(4i+1)} - a_{n-1}^{(4i)} - a_2^{(4i+3)} + a_{n-1}^{(4i+2)}) = -\rho_{n-1}\sum_{i=0}^{\infty}(a_{n-1}^{(4i)} - a_2^{(4i+1)}$$

$$- a_{n-1}^{(4i+2)} + a_2^{(4i+3)})$$

bulunur. Buradan da (I.25) formülleri kullanılarak yine (I.18) ve dolayısıyla (I.19) formüllerine varılır.

Böylece teorem bütün n doğal sayıları için tanıtlanmış olur.

Bölüm II

EĞRİNİN k-INCI BASAMAKTAN İNFİNİTEZİMAL ÖĞESİNİN BELİRLENMESİ

Bir eğriye ait ek eğriler sistemi

E_n'de $\vec{r}=\vec{r}(s)$ vektörel denklemiyle bir C eğrisi verilmiş olsun. C'nin eğriliklerini $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1}$ ile gösterelim. Şimdi E_n'de konum farkı ile belirli olan eğriler tanımlayacağız.

Tanım.- $\varrho_1^{[1]}=\varrho_1(s)$, $\varrho_2^{[1]}=\varrho_2(s)$, ..., $\varrho_{n-2}^{[1]}=\varrho_{n-2}(s)$, $\varrho_{n-1}^{[1]}=|\varrho_{n-1}(s)|$ kendol denklemleriyle verilen $C^{[1]}$ eğrisine, C'nin 1-inci ek eğrisi ve $\varrho_1^{[\nu]}=\varrho_\nu^{[1]}(s)$, $\varrho_2^{[\nu]}=\varrho_{\nu+1}^{[1]}(s)$, ..., $\varrho_{n-\nu}^{[\nu]}=\varrho_{n-1}^{[1]}(s)$, $\varrho_{n-\nu+1}^{[\nu]}=\varrho_1^{[1]}(s)$, ..., $\varrho_{n-1}^{[\nu]}=\varrho_{\nu-1}^{[1]}(s)$ kendol denklemleriyle verilen $C^{[\nu]}$ eğrisine C'nin ν-üncü ek eğrisi denir. Hemen görüleceği gibi sözü geçen ek eğrilerden $C^{[1]}$, $C^{[2]}$, ..., $C^{[n-1]}$ gibi ilk (n-1)-tanesi birbirinden farklıdır ve bundan sonrakiler için, $C^{[\lambda(n-1)+\mu]}=C^{[\mu]}$ $(\mu\leqslant n-1)$ olmaktadır. Buradaki $\{C^{[1]}, C^{[2]}, \ldots, C^{[n-1]}\}$ eğri sistemine C'ye ait ek eğriler sistemi denir.

Tanımdan hemen, $C^{[\nu]}$ nün ek eğriler sisteminin $\{C^{[\nu]}, C^{[\nu+1]}, \ldots, C^{[n-1]}, C^{[1]}, \ldots, C^{[\nu-1]}\}$ olduğu görülür ve

$$
\begin{aligned}
\varrho_1^{[\nu]} &= \varrho_\nu^{[1]} = \varrho_1^{[\nu]}\\
\varrho_2^{[\nu]} &= \varrho_{\nu+1}^{[1]} = \varrho_1^{[\nu+1]}\\
\varrho_3^{[\nu]} &= \varrho_{\nu+2}^{[1]} = \varrho_1^{[\nu+2]}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varrho_{n-\nu}^{[\nu]} &= \varrho_{n-1}^{[1]} = \varrho_1^{[n-1]}\\
\varrho_{n-\nu+1}^{[\nu]} &= \varrho_1^{[1]} = \varrho_1^{[1]}\\
\varrho_{n-\nu+2}^{[\nu]} &= \varrho_2^{[1]} = \varrho_1^{[2]}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varrho_{n-1}^{[\nu]} &= \varrho_{\nu-1}^{[1]} = \varrho_1^{[\nu-1]}
\end{aligned}
\tag{II.1}
$$

bağıntıları elde edilir. Öte yandan (I. 7) ve (I. 8) bağıntıları $C^{[\nu]}$ ek eğrisi için yazılır ve $ds = ds^{[\nu]}$ olduğuna dikkat edilirse, $C^{[\nu]}$ nün ardışık oskülatör ~~küre merkezlerinden j-uncusu~~ $C^{[\nu](j)}$ ile gösterilerek,

$$\frac{da_2^{[\nu](2m)}}{ds} = \varrho_2^{[\nu]} a_3^{[\nu](2m)}$$

$$\frac{da_3^{[\nu](2m)}}{ds} = -\varrho_2^{[\nu]} a_2^{[\nu](2m)} + \varrho_3^{[\nu]} a_4^{[\nu](2m)}$$

ooooooooooooooooooooooooooooo

$$\frac{da_{k+1}^{[\nu](2m)}}{ds} = -\varrho_k^{[\nu]} a_k^{[\nu](2m)} + \varrho_{k+1}^{[\nu]} a_{k+2}^{[\nu](2m)}$$

ooooooooooooooooooooooooooooo

$$\frac{da_{n-1}^{[\nu](2m)}}{ds} = -\varrho_{n-2}^{[\nu]} a_{n-2}^{[\nu](2m)} + \varrho_{n-1}^{[\nu]} a_n^{[\nu](2m)}$$

$$\frac{da_n^{[\nu](2m)}}{ds} = \varrho_{n-1}^{[\nu]} (-a_{n-1}^{[\nu](2m)} + a_2^{[\nu](2m+1)})$$

ve

$$\frac{da_2^{[\nu](2m+1)}}{ds} = \varrho_{n-2}^{[\nu]} a_3^{[\nu](2m+1)}$$

$$\frac{da_3^{[\nu](2m+1)}}{ds} = -\varrho_{n-2}^{[\nu]} a_2^{[\nu](2m+1)} + \varrho_{n-3}^{[\nu]} a_4^{[\nu](2m+1)}$$

ooooooooooooooooooooooooooooo

$$\frac{da_{k+1}^{[\nu](2m+1)}}{ds} = -\varrho_{n-k}^{[\nu]} a_k^{[\nu](2m+1)} + \varrho_{n-k-1}^{[\nu]} a_{k+2}^{[\nu](2m+1)}$$

ooooooooooooooooooooooooooooo

$$\frac{da_{n-1}^{[\nu](2m+1)}}{ds} = -\varrho_2^{[\nu]} a_{n-2}^{[\nu](2m+1)} + \varrho_1^{[\nu]} a_n^{[\nu](2m+1)}$$

$$\frac{da_n^{[\nu](2m+1)}}{ds} = \varrho_1^{[\nu]} (-a_{n-1}^{[\nu](2m+1)} + a_2^{[\nu](2m+2)})$$

elde edilir ki burada $\varrho_k^{[\nu]}$ lar yerine (II.1) deki değerleri konur ve (I.2) gereğince $\varrho_1^{[i]} = \frac{1}{a_2^{[i]}}$ olduğu gözönünde tutulursa,

$$\frac{da_2^{[\nu](2m)}}{ds} = \frac{a_3^{[\nu](2m)}}{a_2^{[\nu+1]}}$$

$$\frac{da_3^{[\nu](2m)}}{ds} = -\frac{a_2^{[\nu](2m)}}{a_2^{[\nu+1]}} + \frac{a_4^{[\nu](2m)}}{a_2^{[\nu+2]}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{da_{n-\nu}^{[\nu](2m)}}{ds} = -\frac{a_{n-\nu-1}^{[\nu](2m)}}{a_2^{n-2}} + \frac{a_{n-\nu+1}^{(2m)}}{a_2^{n-1}}$$

$$\frac{da_{n-\nu+1}^{[\nu](2m)}}{ds} = -\frac{a_{n-\nu}^{[\nu](2m)}}{a_2^{n-1}} + \frac{a_{n-\nu+2}^{[\nu](2m)}}{a_2^{1}} \tag{II.2}$$

$$\frac{da_{n-\nu+2}^{[\nu](2m)}}{ds} = -\frac{a_{n-\nu+1}^{[\nu](2m)}}{a_2^{[1]}} + \frac{a_{n-\nu+3}^{[\nu](2m)}}{a_2^{[2]}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{da_{n-1}^{[\nu](2m)}}{ds} = -\frac{a_{n-1}^{[\nu](2m)}}{a_2^{[\nu-2]}} + \frac{a_n^{[\nu](2m)}}{a_2^{[\nu-1]}}$$

$$\frac{da_n^{[\nu](2m)}}{ds} = \frac{-a_{n-1}^{[\nu](2m)} + a_2^{[\nu](2m+1)}}{a_2^{[\nu-1]}}$$

ve

$$\frac{da_2^{[\nu](2m+1)}}{ds} = \frac{a_3^{[\nu](2m+1)}}{a_2^{[\nu-2]}}$$

$$\frac{da_3^{[\nu](2m+1)}}{ds} = -\frac{a_2^{[\nu](2m+1)}}{a_2^{[\nu-2]}} + \frac{a_4^{[\nu](2m+1)}}{a_2^{[\nu-3]}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{da_{\nu-1}^{[\nu](2m+1)}}{ds} = -\frac{a_{\nu-2}^{[\nu](2m+1)}}{a_2^{[2]}} + \frac{a_{\nu}^{[\nu](2m+1)}}{a_2^{[1]}}$$

$$\frac{da_{\nu}^{[\nu](2m+1)}}{ds} = -\frac{a_{\nu-1}^{[\nu](2m+1)}}{{}_{2}^{1}} + \frac{a_{+1}^{(2m+1)}}{a_2^{n-1}} \tag{II.3}$$

$$\frac{da_{\nu+1}^{[\nu](2m+1)}}{ds} = -\frac{a_{\nu}^{[\nu](2m+1)}}{a_2^{[n-1]}} + \frac{a_{\nu+2}^{[\nu](2m+1)}}{a_2^{[n-2]}}$$

....

$$\frac{da_{n-1}^{[\nu](2m+1)}}{ds} = -\frac{a_{n-2}^{[\nu](2m+1)}}{a_2^{[\nu+1]}} + \frac{a_{n}^{[\nu](2m+1)}}{a_2}$$

$$\frac{da_{n}^{[\nu](2m+1)}}{ds} = \frac{-a_{n-1}^{[\nu](2m+1)} + a_2^{[\nu](2m+2)}}{a_2^{[\nu]}}$$

elde edilir.

Bir eğrinin k-ıncı basamaktan infinitezimal öğesinin belirlenmesi:

Tanım. $\vec{r}=\vec{r}(s)$ vektörel denklemiyle verilen düzgün bir C eğrisinin

$$\vec{r}(s+h) = \vec{r}(s) + \frac{h}{1!}\frac{d\vec{r}(s)}{ds} + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} + \dots + \frac{h^k}{k!}\frac{d^k\vec{r}(s)}{ds^k} + \dots \tag{II.4}$$

açınımındaki ilk (k+1) terime, C'nin $\vec{r}(s)$ noktası civarındaki k-ıncı basamaktan infinitezimal öğesi denir.

FRENET formüllerinden hemen görüleceği gibi C'nin k-ıncı basamaktan infinitezimal öğesinin belirlenmesi problemi, eğrinin sözü geçen $\vec{r}(s)$ noktasına ait, $k \geqslant n$ için $\frac{(2k-n)(n-1)}{2}$ tane

$$\varrho_1, \frac{d\varrho_1}{ds}, \frac{d^2\varrho_1}{ds^2}, \dots, \frac{d^{k-3}\varrho_1}{ds^{k-3}}, \frac{d^{k-2}\varrho_1}{ds^{k-2}};$$

$$(\text{II.5})_1 \quad \varrho_2, \frac{d\varrho_2}{ds}, \frac{d^2\varrho_2}{ds^2}, \dots, \frac{d^{k-3}\varrho_2}{ds^{k-3}};$$

....

$$\varrho_{n-1}\,,\ \frac{d\varrho_{n-1}}{ds},\ \frac{d^2\varrho_{n-1}}{ds^2},\ \ldots,\ \frac{d^{k-n}\varrho_{n-1}}{ds^{k-n}}$$

niceliklerinin ve $k \leqslant n$ için $\frac{k(k-1)}{2}$ tane

$$\begin{array}{ll} & \varrho_1\,,\ \frac{d\varrho_1}{ds},\ \frac{d^2\varrho_1}{ds^2},\ \ldots,\ \frac{d^{k-3}\varrho_1}{ds^{k-3}},\ \frac{d^{k-2}\varrho_1}{ds^{k-2}} \\ & \varrho_2\,,\ \frac{d\varrho_2}{ds},\ \frac{d^2\varrho_2}{ds^2},\ \ldots,\ \frac{d^{k-3}\varrho_2}{ds^{k-3}}; \\ (11.5)_2 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \varrho_{k-2}\,,\ \frac{d\varrho_{k-2}}{ds} \\ & \varrho_{k-1} \end{array}$$

niceliklerinin belirlenmesi problemine eşdeğerdir. Buna dayanarak eğrinin k-ıncı basamaktan infinitezimal öğesinin belirlenmesi üstüne olan şu teoremi tanıtlayabiliriz.

<u>Teorem -6</u> $C^{[i](m)}$ gösterimi, $C^{[i]}$ nin ardışık oskülatör küre merkezleri geometrik yerlerinden m-incisini ve $N_{\nu}^{[i](m)}$ de $C^{[i](m)}$ eğrisinin $N_1^{[i](m)}$ noktasına ait oskülatör ν-küre merkezini ifade ettiğine göre, C eğrisinin bir N noktasındaki $k=\lambda(n-1)+\mu$ $(\mu < n-1)$ üncü basamaktan infinitezimal öğesinin belirlenebilmesi için C'nin ok eğriler sisteminden,

$$\begin{array}{lll} C^{[1]} & \text{eğrisine ait} & N_1^{[1]} N_2^{[1]} \ldots N_n^{[1]} N_2^{[1](1)} N_3^{[1](1)} \ldots N_n^{[1](1)} \ldots N_2^{[1](\lambda)} N_3^{[1](\lambda)} \ldots N_{\mu+2}^{[1](\lambda)} \\ C^{[2]} & \text{"} \quad \text{"} & N_1^{[2]} N_2^{[2]} \ldots N_n^{[2]} N_2^{[2](1)} N_3^{[2](1)} \ldots N_n^{[2](1)} \ldots N_2^{[2](\lambda)} N_3^{[2](\lambda)} \ldots N_{\mu+1}^{[2](\lambda)} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C^{[\mu+1]} & \text{"} \quad \text{"} & N_1^{[\mu+1]} N_2^{[\mu+1]} \ldots N_n^{[\mu+1]} N_2^{[\mu+1](1)} N_3^{[\mu+1](1)} \ldots N_n^{[\mu+1](1)} \ldots N_n^{[\mu+1](\lambda-1)} N_2^{[\mu+1](\lambda)} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C^{n-1} & \text{"} \quad \text{"} & N_1^{[n-1]} N_2^{[n-1]} \ldots N_n^{[n-1]} N_2^{[n-1](1)} N_3^{[n-1](1)} \ldots N_n^{[n-1](1)} \ldots N_2^{[n-1](\lambda-1)} N_3^{[n-1](\lambda-1)} \ldots N_{\mu+3}^{[n-1](\lambda-1)} \end{array}$$

çokgenlerinin verilmesi yeterlidir. ($\lambda=0$ için, negatif indisli ifadeler gözönüne alınmayacaktır.)

Tanıtlama için önce, $F_{\lambda(n-1)+\mu}(a_k^{[i](j)})$ fonksiyonunun açık ifadesi

$$
\begin{aligned}
F_{\lambda(n-1)+\mu}\Big(& a_2^{[1]}, a_3^{[1]}, \ldots, a_n^{[1]}; a_2^{[1](1)}, a_3^{[1](1)}, \ldots, a_n^{[1](1)}; \ldots; a_2^{[1](\lambda-1)}, a_3^{[1](\lambda-1)}, \ldots, a_n^{[1](\lambda-1)}; a_2^{[1](\lambda)}, a_3^{[1](\lambda)} \ldots a_{\mu+2}^{[1](\lambda)} \\
& a_2^{[2]}, a_3^{[2]}, \ldots, a_n^{[2]}; a_2^{[2](1)}, a_3^{[2](1)}, \ldots, a_n^{[2](1)}; \ldots; a_2^{[2](\lambda-1)}, a_3^{[2](\lambda-1)}, \ldots, a_n^{[2](\lambda-1)}; a_2^{[2](\lambda)}, a_3^{[2](\lambda)} \ldots a_{\mu+1}^{[2](\lambda)} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& a_2^{[\mu+1]}, a_3^{[\mu+1]}, \ldots, a_n^{[\mu+1]}; a_2^{[\mu+1](1)}, a_3^{[\mu+1](1)}, \ldots, a_n^{[\mu+1](1)}; \ldots; a_2^{[\mu+1](\lambda-1)}, a_3^{[\mu+1](\lambda-1)}, \ldots, a_n^{[\mu+1](\lambda-1)}; a_2^{[\mu+1](\lambda)}; \\
(\text{II}.6)_1 \quad & a_2^{[\mu+2]}, a_3^{[\mu+2]}, \ldots, a_n^{[\mu+2]}; a_2^{[\mu+2](1)}, a_3^{[\mu+2](1)}, \ldots, a_n^{[\mu+2](1)}; \ldots; a_2^{[\mu+2](\lambda-1)}, a_3^{[\mu+2](\lambda-1)}, \ldots, a_n^{[\mu+2](\lambda-1)}; \\
& a_2^{[\mu+3]}, a_3^{[\mu+3]}, \ldots, a_n^{[\mu+3]}; a_2^{[\mu+3](1)}, a_3^{[\mu+3](1)}, \ldots, a_n^{[\mu+3](1)}; \ldots; a_2^{[\mu+3](\lambda-1)}, a_3^{[\mu+3](\lambda-1)}, \ldots, a_{n-1}^{[\mu+3](\lambda-1)}; \Big) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& a_2^{[n-1]}, a_3^{[n-1]}, \ldots, a_n^{[n-1]}; a_2^{[n-1](1)}, a_3^{[n-1](1)}, \ldots, a_n^{[n-1](1)}; \ldots; a_2^{[n-1](\lambda-1)}, a_3^{[n-1](\lambda-1)}, \ldots, a_{\mu+3}^{[n-1](\lambda-1)}
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$
\text{II}.6)_2 \qquad \frac{d^{\lambda(n-1)+\mu}\rho_1^{[1]}}{ds^{\lambda(n-1)+\mu}} = F_{\lambda(n-1)+\mu}(a_k^{[i](j)})
$$

olduğunu gösterelim. Bunun için (λ,μ) çifti üzerinde tüme varım yapacağız.

$$
\lambda = 0,\ \mu = 0 \text{ için,} \quad \rho_1^{[1]} = \frac{1}{a_2^{[1]}} = F_0(a_2^{[1]})
$$

olduğundan önermemiz doğrudur.

Şimdi herhangibir (λ,μ) çifti için bağıntının geçerli olduğunu varsayıp $(\lambda,\mu+1)$ çifti için geçerli olacağını gösterelim.

Eğer $\mu < n-2$ ise, (II.6) türetilip (II.2) ve (II.3) gözönünde tutulmakla, bağıntının $(\lambda,\mu+1)$ için doğru olduğu hemen görülür.

Eğer $\mu = n-2$ ise, (II.6) bağıntısı

$$
\begin{aligned}
\frac{d^{\lambda(n-1)+n-2}\rho_1^{[1]}}{ds^{\lambda(n-1)+n-2}} = F_{\lambda(n-1)+n-2}\Big(& a_2^{[1]}, \ldots, a_n^{[1]}; a_2^{[1](1)}, \ldots, a_n^{[1](1)}; \ldots; a_2^{[1](\lambda-1)}, \ldots, a_n^{[1](\lambda-1)}; a_2^{[1](\lambda)}, \ldots, a_n^{[1](\lambda)}; \\
& a_2^{[2]}, \ldots, a_n^{[2]}; a_2^{[2](1)}, \ldots, a_n^{[2](1)}; \ldots; a_2^{[2](\lambda-1)}, \ldots, a_n^{[2](\lambda-1)}; a_2^{[2](\lambda)}, \ldots, a_{n-1}^{[2](\lambda)}; \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& a_2^{[n-1]}, \ldots, a_n^{[n-1]}; a_2^{[n-1](1)}, \ldots, a_n^{[n-1](1)}; \ldots; a_2^{[n-1](\lambda-1)}, \ldots, a_n^{[n-1](\lambda-1)}; a_2^{[n-1](\lambda)} \Big)
\end{aligned}
$$

şeklini alacaktır. Bunun türetilmesiyle

$$\frac{d^{(\lambda+1)(n-1)}\varrho_1^{[1]}}{ds^{(\lambda+1)(n-1)}} = F_{(\lambda+1)(n-1)}\Big(a_2^{[1]},\dots,a_n^{[1]};a_2^{[1](1)},\dots,a_n^{[1](1)};\dots;a_2^{[1](\lambda)},\dots,a_n^{[1](\lambda)};a_2^{[1](\lambda+1)};$$
$$a_2^{[2]},\dots,a_n^{[2]};a_2^{[2](1)},\dots,a_n^{[2](1)};\dots;a_2^{[2](\lambda)},\dots,a_n^{[2](\lambda)};$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$a_2^{[n-1]},\dots,a_n^{[n-1]};a_2^{[n-1](1)},\dots,a_n^{[n-1](1)};\dots;a_2^{[n-1](\lambda)},a_3^{[n-1](\lambda)}\Big)$$

elde edilir.

Demek ki (II.6) bağıntısı bir $(\lambda,0)$ çifti için doğruysa bütün (λ,μ) $(\mu=0,1,\dots,n-2)$ için ve $(\lambda+1,0)$ çiftleri için doğru olur. $(0,0)$ için doğruluğu gösterildiğine göre, bütün $\{(\lambda,\mu) \mid \lambda \geqslant 0 \text{ tamsayı}, \mu=0,1,\dots,n-2\}$ için tanıtlama yapılmış olur.

Öte yandan $C^{[2]}$ eğrisinin $\varrho_1^{[2]}$ eğriliği için aynı düşünceler tekrarlanır ve $C^{[2]}$ ye ait ek eğriler sisteminin $\{C^{[2]},C^{[3]},\dots,C^{[n-1]},C^{[1]}\}$ olduğu gözönünde tutulursa,

$$\frac{d^{\lambda(n-1)+\mu-1}\varrho_1^{[2]}}{ds^{\lambda(n-1)+\mu-1}} = F_{\lambda(n-1)+\mu-1}\Big(a_2^{[2]},\dots,a_n^{[2]};\dots;a_2^{[2](\lambda-1)},\dots,a_n^{[2](\lambda-1)};a_2^{[2](\lambda)},\dots,a_{\mu+1}^{[2](\lambda)};$$
$$a_2^{[3]},\dots,a_n^{[3]};\dots;a_2^{[3](\lambda-1)},\dots,a_n^{[3](\lambda-1)};a_2^{[3](\lambda)},\dots,a_{\mu}^{[3](\lambda)};$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$a_2^{[n-1]},\dots,a_n^{[n-1]};\dots;a_2^{[n-1](\lambda-1)},\dots,a_{\mu+3}^{[n-1](\lambda-1)};$$
$$a_2^{[1]},\dots,a_n^{[1]};\dots;a_2^{[1](\lambda-1)},\dots,a_{\mu+2}^{[1](\lambda-1)}\Big)$$

olduğu görülür. (II.1) gereğince $\varrho_1^{[2]}=\varrho_2^{[1]}$ oluşundan da $\dfrac{d^{k-2}\varrho_1^{[1]}}{ds^{k-2}}$ yi belirtmeye yarıyan $a_\nu^{[i](m)}$ niceliklerinin $\dfrac{d^{k-3}\varrho_1^{[1]}}{ds^{k-3}}$'u da ve ardışık olarak devam edilirse, $\dfrac{d^{k-n}\varrho_{n-1}^{[1]}}{ds^{k-n}} = \dfrac{d^{k-n}\varrho_1^{[n-1]}}{ds^{k-n}}$'i de belirlemeye yeter oldukları görülür. 1-inci ek eğrinin tanımı dolayısıyla $\varrho_1=\varrho_1^{[1]}$, $\varrho_2=\varrho_2^{[1]},\dots,$ $\varrho_{n-2}=\varrho_{n-2}^{[1]}$, $\varrho_{n-1}=\varepsilon\varrho_{n-1}^{[1]}$ $\left(\varepsilon=\dfrac{\varrho_{n-1}}{|\varrho_{n-1}|}\right)$ olduğundan $(II.6)_1$ fonksiyonunun bağlı bulunduğu $a_\nu^{[i](m)}$ nicelikleri –ki bunlar teoremde sözü geçen çokgenlerin kenar uzunluklarıdır – verildiğinde (II.5) nicelikleri ve dolayısıyla C eğrisinin k-ıncı basamaktan infinitezimal öğesi belirlenir.

K a y n a k l a r

K_1 : CESÀRO, E. (1896) - Lezioni di geometria intrinseca , Naples.

K_2 : BİRAN, L. (1956) - Un problème élémentaire de géométrie differentielle. İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Mec. C. 21 , S. 3,4

K_3 : VINCENSINI, P. (1957) - Sur certaines suites de points associées à une courbe gauche. İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Mec. C. 22, S. 1,2

K_4 : de MISES (1938) - C. R. de l'Acad. de Sci. Paris C. 206

K_5 : GÜRSAN, F. (1941) - Sapık bir eğrinin yüksek mertebeden unsuru. İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Mec. C. VI, S. 1,2 Seri: A

K_6 : BİRAN, L. (1943) - Bir sapık eğrinin tabii özelliklerinin geometrik tasviri. İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Mec. Seri: A, C. VIII, S. 4

K_7 : GUİCHARD, C. (1928) - Les courbes de l'espace à n dimensions, Paris.

K_8 : TIETZE, H. (1949) - Über Frenetsche Formeln, Poinsotsche Bewegungen und Gramche Determinanten. Journal für die reine und anwandte Mathematik C. 186, S. 4

K_9 : SMIRNOW, V. I (1964) - Linear Algebra , London.

K_{10}: NERING, E. D. (1963) - Linear Algebra and Matrix Theory, London.

K_{11}: GUGGENHEİMER, H. (1963) - Differential Geometry , New York

K_{12}: BLASCHKE, W. (1920) - Frenets Formeln für den Raum von Riemann. Mathematische Zeitschrift C. 6

K_{13}: KOWALEVSKİ, G. (1910) - Les formules de Frenet dans l' espace fonctionel, C. R.