

**SABİT NOKTALI BAZI ANALATİK
FONKSİYON SINIFLARI**

Fatih ERTAŞ

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı
Yrd. Doç. Dr. Fatma SAĞSÖZ
2015
Her hakkı saklıdır**

**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SABİT NOKTALI BAZI ANALATİK FONKSİYON SINIFLARI

Fatih ERTAŞ

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı**

**ERZURUM
2015**

Her hakkı saklıdır



T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



TEZ ONAY FORMU

SABİT NOKTALI BAZI ANALATİK FONKSİYON SINIFLARI

Yrd. Doç. Dr. Fatma SAĞSÖZ danışmanlığında, Fatih ERTAŞ tarafından hazırlanan bu çalışma 10/8/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı – Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak ~~oy birliği/oy çokluğu (/ /)~~ ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Muhammet KAMALI

İmza

Üye : Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR

İmza

Üye : Yrd. Doç. Dr. Fatma SAĞSÖZ

İmza

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 13...../08.../2015 tarih ve 32.../.../1112..... nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Ertan YILDIRIM
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SABİT NOKTALI BAZI ANALATİK FONKSİYON SINIFLARI

Fatih ERTAŞ

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Fatma SAĞSÖZ

Bu tezde, çift sabit noktaya sahip bazı analatik fonksiyon sınıfları incelenmiştir. Ayrıca, bu çift sabit noktaya sahip analatik fonksiyonların sınıflarının geometrik özellikleri, katsayı eşitsizlikleri ve distorsiyon sınırları ile ilgili teoremler ve sonuçlar verilmiştir.

2015, 56 sayfa

Anahtar Kelimeler: Analatik fonksiyon, Ünivalent fonksiyon, Meromorf fonksiyon, Starlike ve Konveks fonksiyon, Subordinasyon, Katsayı eşitsizlikleri ve distorsiyon sınırları

ABSTRACT

Master's Thesis

SOME CLASSES OF ANALYTIC FUNCTIONS WITH FIXED POINT

Fatih ERTAŞ

Ataturk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Department of Analysis and Theory of Functions

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Fatma SAĞSÖZ

In this thesis, we investigate some classes of analytic functions with two fixed points. Also, we give some theorems and corollaries related to some geometric properties, coefficient inequalities and distortion bounds of these classes.

2015, 56 pages

Keywords: Analytic function, Univalent function, Meromorphic function, Starlike and Convex function, Subordination, Coefficient bounds and Distortion theorems

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu alışma, Atatürk Üniversitesi Fen Fakóltesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı sağlayan, çalışmalarımda ve tezin hazırlanışında yardımlarını esirgemeyen çok değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Fatma SAĞSÖZ'e en içten dileklerimle sonsuz teőkürlerimi arz ederim.

Tezin hazırlanması sürecinde değerli fikirlerinden yararlandığım Prof. Dr. Halit ORHAN'a ve Matematik Bölümü Öğretim Üyelerine teőkürlerimi sunarım.

Ayrıca desteklerini hiçbir zaman üzerimden esirgemeyen aileme, arkadaşlarıma ve güvenini her zaman hissettiğim değerli eşime teőkür ederim.

Yüksek lisans eğitimim boyunca tarafıma vermiş olduğu destekten dolayı mensubu olduğum Türk Silahlı Kuvvetleri ailesine teőkür etmeyi bir borç bilirim.

Fatih ERTAŞ

Ağustos 2015

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	5
2.1. Genel Kavramlar	5
2.2. Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar	8
2.3. Analitik Fonksiyonların Temel Alt Sınıfları	14
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	17
3.1 $S_0^*(\alpha, z_0)$, $S_1^*(\alpha, z_0)$, $K_0(\alpha, z_0)$ ve $K_1(\alpha, z_0)$ Sınıfları	17
3.2. $\rho, \mu, \delta, A, B, z_0$ Sınıfı.....	19
3.3. $W(p, k; \phi, \varphi; A, B; \delta)$, $TW_{p\eta}(p, k; \phi, \varphi; A, B; \delta)$ Sınıfları.....	20
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	26
4.1. $S_0^*(\alpha, z_0)$, $S_1^*(\alpha, z_0)$, $K_0(\alpha, z_0)$ ve $K_1(\alpha, z_0)$ Sınıflarına Ait Özellikler	26
4.2. $\rho, \mu, \delta, A, B, z_0$ Sınıfına Ait Özellikler	32
4.2.1. $\rho, \mu, \delta, A, B, z_0$ sınıfına ait katsayı eşitsizlikleri.....	32
4.2.2. $\rho, \mu, \delta, A, B, z_0$ sınıfına ait distorsiyon teoremi.....	35
4.3. $W(p, k; \phi, \varphi; A, B; \delta)$, $TW_{p\eta}(p, k; \phi, \varphi; A, B; \delta)$ Sınıflarına Ait Özellikler	38
4.3.1. $W(p, k; \phi, \varphi; A, B; \delta)$, $TW_{p\eta}(p, k; \phi, \varphi; A, B; \delta)$ sınıflarına ait katsayı eşitsizlikleri	38
4.3.2. $W(p, k; \phi, \varphi; A, B; \delta)$, $TW_{p\eta}(p, k; \phi, \varphi; A, B; \delta)$ sınıflarına ait distorsiyon teoremleri	43
5. TARTIŞMA ve SONUÇ.....	47
KAYNAKLAR	56
ÖZGEÇMİŞ	57

SİMGELER DİZİNİ

\mathbb{C}	Kompleks düzlem
\mathbb{N}	Doğal sayılar
\mathbb{R}	Reel sayılar
U	Açık birim disk
U_r	0 merkezli r yarıçaplı açık birim disk
$D(x_0; r)$	x_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar
S	U da normalleştirilmiş univalent fonksiyon sınıfı
A_n	U birim diskinde normalize edilmiş $f(z) = z + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k$ biçimindeki fonksiyonların sınıfı
Δ	Kapalı birim diskin dışı
$\arg f(z)$	$f(z)$ fonksiyonunun argümanı
$<$	Subordinasyon
$f < g$	f fonksiyonu g fonksiyonuna subordinedir
$f(z, t)$	Subordinasyon(veya Loewer) zinciri
S^*	Starlike fonksiyon sınıfı
$S^*(\alpha)$	α mertebeden starlike fonksiyon sınıfı
K	Konveks fonksiyon sınıfı
$K(\alpha)$	α mertebeden konveks fonksiyon sınıfı
M	Meromorf fonksiyon sınıfı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Koebe fonksiyonu	15
Şekil 3.1. Subordinasyon	21

1. GİRİŞ

Geometrik fonksiyonlar teorisi, 19. yüzyılda ifade edilmeye başlanmış ve yapılan çalışmalar ışığında kompleks analizin dikkat çeken bir dalı olmuştur. Bu teori analiz ile geometri arasında sağlam bir ilişki kurarak günümüzün araştırma konularında önemli bir yer teşkil etmiştir.

Geometrik fonksiyonlar teorisi, ilk olarak G. Bernard Riemann'ın 1851 yılında kompleks düzlemin basit bağlantılı bir $D \subset \mathbb{C}$ ($D \neq \mathbb{C}$) alt bölgesini, bir \tilde{D} bölgesi üzerine resmeden bir f analitik fonksiyonun varlığını gösteren ve literatürde "Riemann dönüşüm teoremi" olarak bilinen teoremiyle ortaya çıkmıştır. Fakat bu teorem bir takım araştırmacıların çalışmaları için elverişli olmayışı ya da öneminin kavranamaması nedeniyle teoride pek fazla çalışma alanı bulamamıştır. Ancak bu alan darlığı, Koebe'nin 1907 yılında bu teoremi analitik ve ünivalent (yalıncat) fonksiyonlar için vermesi, 1914 yılında Gronwall'ın alan teoremini ispatı ve 1916 yılında Bieberbach'ın ortaya koyduğu normalize edilmiş fonksiyonlar için katsayı tahmini ve bu tahminin sonuçları ile genişlemiş oldu. Bununla birlikte geometrik fonksiyonlar teorisine uygulama alanını ve bu teorinin önemli bir dalı olan ünivalent (yalıncat) fonksiyonlar teorisinde başlangıcı olma özelliğini taşır. Bu yıllarda yalıncat fonksiyonların temeli üzerine oluşturulan problemler o dönemin gözde konuları olmuştur. Ünivalent fonksiyonlar üzerindeki çalışmalar,

$$U = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \}$$

Birim diskinde analitik, ünivalent ve $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ şartlarını sağlayan fonksiyonların oluşturduğu bir S sınıfı üzerinde yoğunlaşmıştır.

1907 yılında Koebe , S sınıfına ait fonksiyonlar altında U birim diskinin görüntüsünü incelemiş ve U birim diskinin $f \in S$ altındaki görüntüsünün sınırı olan $\partial f(U)$ nun orijine olan uzaklığının $\frac{1}{4}$ den küçük olmayacağını ispatlamıştır.

1920 li yıllarından sonra Bieberbach tarafından sonra ileri sürülen $z \in U$ olmak üzere $f \in S$ fonksiyonu $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ biçiminde bir Taylor açılımına sahipse $n = 2, 3, \dots$ için $|a_n| \leq n$ dir. Tahmininin ispatı birçok matematikçinin araştırmalarına temel teşkil etmiştir.

Alan teoreminin bir sonucu olarak $|a_2| \leq 2$ eşitsizliğinin doğruluğu ilk defa 1916 yılında Bieberbach tarafından gösterilmiştir. Daha sonra Loewner 1923 yılında kendi bulduğu ve parametrik metod olarak isimlendirdiği bir metotla $|a_3| \leq 3$ eşitsizliğini, 1955 yılında Garabedian ve Schiffer, Grunsky eşitsizliklerini kullanarak $|a_4| \leq 4$ eşitsizliğini, 1968-1969 yıllarında Pederson-Ozaw $|a_6| \leq 6$ ve 1972 yılında da Pederson ve Schiffer $|a_5| \leq 5$ eşitsizliklerini ispatlamışlardır. Birçok matematikçi Bieberbach tahmininin genel ifadesini ispatlamaya çalışmışlar ve nihayet 1985 yılında Fransız matematikçi Louis De-Branges, Loewner teorisini kullanarak tüm $n = 2, 3, \dots$ için $|a_n| \leq n$ eşitsizliğinin doğruluğunu göstermiş ve bu problem için son noktayı koymuştur. Problemin çözülmüş olması, bu alanda çalışılacak konu kalmadığı anlamına gelmemiş aksine teoriyi daha da zenginleştirmiştir. Hatta matematikçileri uzun yıllarca uğraştıran teoremin ispatlanmış olması yeni problemlerin ortaya çıkmasına zemin teşkil etmiştir. Bu problemleri kısaca şöyle ifade edebiliriz;

S sınıfı için, alt sınıfların en önemlilerinden ikisi yıldızlı (starlike) ve konveks fonksiyonlardan oluşan alt sınıflardır. Bu alt sınıfların çoğu analitik ve geometrik olarak karakterize edilebilir. Yıldızlı ve konveks fonksiyonlar arasındaki ilginç bağıntı ilk kez Alexander tarafından verilmiştir.

Katsayı tahminleri, growth ve distortion teoremleri, yarıçap problemleri, komşuluklar, kısmi toplamlar, integral ve diferensiyel operatörler ve ayrıca son zamanların popüler konularından olan subordinasyon ve süperordinasyon önemli gerek şart problemlerinden bazılarıdır.

Geometrik fonksiyonlar teorisi içinde ele alınan önemli problemlerden biriside verilen bir analitik fonksiyonun ünivalent olup olmadığının araştırılmasıdır. Doğal olarak

burada akla gelen ilk soru ‘‘Bir fonksiyonun S sınıfına ait olması için yeter Şart ya da Şartlar elde edilebilir mi?’’ sorusudur. Bu soruya günümüze kadar birçok araŐtırmacı deęiŐik yöntemler kullanarak cevap aramaya çalıŐmıŐtır. Kullanılan yöntemlerin en önemlilerinden birisi Loewner zincirler metodu ya da farklı bir ifade ile subordinasyon zincirler metodudur. Bu metot, ünivalent fonksiyonlar teorisinin çok güçlü tekniklerinden birisi olmuştur. Bu, teori elementer yöntemlerle zlemeyen problemleri çözme imknı sunmaktadır.

Geometrik fonksiyonlar teorisinde ele alınan ve bizimde çalıŐmamızın temelini oluŐturan problemlerden bir diğeri de çift sabit noktaya sahip analitik olan univalent ve multivalent fonksiyonların geometrik özelliklerinin incelenmesidir.

$\varphi: B \rightarrow B$ analitik bir dönüşüm olsun. Eğer

- $|b| < 1$ için $\varphi(b) = b$,
- $|b| = 1$ için $\lim_{r \rightarrow 1^-} \varphi(rb) = b$

ise b ye φ dönüŐümünün bir sabit noktasıdır denir (Cowen 2010).

Örneğin, $\varphi(z) = z/(2 - z^2)$ birim diski birim diske resmeden bir dönüşüm olup 0, 1 ve -1 bu dönüŐümün sabit noktalarıdır.

$f(z_0) = z_0 > 0$ ve $a_n \geq 0$ olmak üzere $f(z) = a_1 z - \sum_{n=2}^N a_n z^n$ biçimindeki univalent polinomlar sınıfı 1963 yılında Pilat tarafından çalışılmıştır.

$f(z)$, $|z| < 1$ diskinde univalent ve $a_n \geq 0$ olmak üzere $f(z) = z - \sum_{n=2}^N a_n z^n$ biçimindeki polinomlar sınıfı ise 1974 yılında Schild tarafından incelenmiştir.

1976 yılında Silverman,

$$a_n \geq 0, \quad f(z_0) = z_0 (-1 < z_0 < 1; \quad z_0 \neq 0)$$

veya

$$a_n \geq 0, \quad f'(z_0) = 1 \quad (-1 < z_0 < 1)$$

olmak üzere $f(z) = a_1 z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ şeklindeki fonksiyonlar sınıfı ile ilgili bazı ilginç sonuçlar elde etmiştir.

Silverman tarafından çalışılan bu sınıf 1993 yılında Uralegaddi ve Somanatha tarafından genelleştirilmiştir.

1996 yılında Kulkarni ve Naiktarafından iki sabit noktaya sahip negatif katsayılı univalent fonksiyonların yeni bir sınıfı tanıtılarak bu sınıfa ait özellikler incelenmiştir.

Sunulan bu tez dört ana başlık altında ifade edilmiştir;

Tezin giriş kısmında ‘‘Sabit Noktalı Bazı Analitik Fonksiyonlar’’ ile ilgili geçmişten son zamana kadar yapılmış olan çalışmalardan bahsedilmiştir.

İkinci bölüm olan kuramsal temeller kısmında, tez ile alakalı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölüm olan materyal ve yöntem kısmında, bazı alt sınıflar tanımlanmıştır.

Dördüncü bölüm olan Araştırma Bulguları ve Sonuç kısmında ise üçüncü bölümde tanımlanan fonksiyon sınıflarına ait bazı temel teorem ve ispatlarına yer verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Yapılan bu çalışmada bazı temel tanım ve teoremlere ihtiyaç duyulmuştur. Bu başlık altında özellikle araştırmamızda ihtiyaç duyduğumuz temel tanım ve teoremler ifade edilmeye çalışılmıştır.

Tanım 2.1.1 (ε - komşuluğu): $z_0 \in \mathbb{C}$ noktası verilsin.

$$U(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$$

kümesine z_0 merkezli ε yarıçaplı açık disk veya z_0 noktasının ε komşuluğu denir.

$$\overline{U}(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \varepsilon\}$$

kümesine z_0 merkezli ε yarı çaplı kapalı disk,

$$\partial U(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \varepsilon\}$$

kümesine z_0 merkezli ε yarıçaplı çember ve

$$\tilde{U}(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\} = U(z_0, \varepsilon) - \{z_0\}$$

kümesine de z_0 noktasının delinmiş komşuluğu denir.

Tanım 2.1.2 (İç Nokta): $S \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme olsun. $z_0 \in S$ noktası için $B(z_0, \varepsilon) \subset S$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa z_0 noktasına S kümesinin bir iç noktası denir.

Tanım 2.1.3 (Açık Küme): Bir $S \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Eğer S kümesinin her noktası S nin bir iç noktası ise S kümesine açık küme denir.

Tanım 2.1.4 (Kapalı Küme): $S \subset \mathbb{C}$ olsun. S kümesinin tümleyeni açık küme ise S kümesine kapalı küme denir.

Tanım 2.1.5 (Bağlantılı Küme): $S, S_1, S_2 \subset \mathbb{C}$ olsun. Eğer $S \subset S_1 \cup S_2, S \cap S_1 \neq \emptyset, S \cap S_2 \neq \emptyset$ ve $S \cap S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ olacak biçimde S_1 ve S_2 gibi boş olmayan iki ayrık ve açık küme bulunamaz ise $S \subset \mathbb{C}$ kümesine bağlantılıdır denir. Aksi halde bağlantısızdır denir.

Tanım 2.1.6 (Basit Bağlantılı Küme): $S \subset \mathbb{C}$ olsun. Eğer bir S kümesi içindeki herhangi iki noktayı birleştiren bütün yollar yine küme içinde kalıyorsa, bu S kümesine basit bağlantılı küme denir.

Tanım 2.1.7 (Bölge): Kompleks düzlemde açık ve bağlantılı kümelere bölge denir.

Tanım 2.1.8 (Süreklilik): $S \subset \mathbb{C}, f: S \rightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in S$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ ve $|z - z_0| < \delta$ şartını sağlayan $\forall z \in S$ için $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ olacak biçimde $\delta(z_0, \varepsilon) > 0$ sayısı mevcut ise f ye z_0 noktasında süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu S kümesinin her bir noktasında sürekli ise f ye S kümesinde sürekli fonksiyon denir.

Tanım 2.1.9 (Eğri): $[a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

fonksiyonuna \mathbb{C} düzleminde eğri (çevre, yol) denir. $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarında sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları denir.

Tanım 2.1.10 (Kapalı Eğri): $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ bir eğri olsun. $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ ya kapalı eğri denir.

Tanım 2.1.11 (Basit Kapalı Eğri): $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ye bir eğri ve $t_1, t_2 \in [a, b]$ olsun. $t_1 = t_2$ için $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ oluyorsa γ ya basit eğri ya da Jordan eğrisi denir. Eğer γ , basit bir eğri ve $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ ya basit kapalı eğri denir. Bir γ eğrisi verildiğinde γ' türevi var ve sürekli ise γ ya diferansiyellenebilir eğri denir. Diferansiyellenebilir bir γ eğrisi için $\gamma'(t) \neq 0$ ise γ ya düzgün eğri adı verilir.

Tanım 2.1.12 (Dizi): $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ kümesinden herhangi bir X kümesine tanımlanmış bir f fonksiyonuna X kümesinde bir dizi denir.

Tanım 2.1.13 (Yakınsaklık): (z_n) bir kompleks dizi ve $z_0 \in \mathbb{C}$ olsun. Her $\delta > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda $|z - z_0| < \delta$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı varsa bu dizi z_0 kompleks sayısına yakınsıyor denir. (z_n) dizisinin z_0 noktasına yakınsaması $z_n \rightarrow z_0$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.14 (Seri): (a_n) bir kompleks dizi olmak üzere

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

toplama kompleks sayı serisi (veya kompleks seri) denir. a_1, a_2, \dots sayılarına serinin terimleri adı verilir.

Tanım 2.1.15 (Yakınsak Seri): $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, bir kompleks seri ve (S_n) bu serinin kısmi toplamlar dizisi olsun. Eğer (S_n) dizisi bir s sayısına yakınsıyor ise $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ serisi de s sayısına yakınsıyor denir ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = s$$

olarak yazılır. Bu s sayısına serinin toplamı adı verilir. Bir sayıya yakınsayan seriye yakınsak seri, aksi halde ıraksak seri denir. Bir serinin yakınsaklık veya ıraksaklığına o serinin karakteri adı verilir.

Bu açıklamalardan sonra,

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n z_k = \sum_{k=1}^{\infty} z_k$$

şeklinde yazılır.

2.2. Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar

Bu kısımda analitik ve ünivalent fonksiyon kavramları tanıtılarak bu fonksiyonlar yardımıyla bazı tanım ve teoremlere yer verilecektir.

Tanım 2.2.1 (Fonksiyon): S , kompleks sayılar kümesinin bir alt kümesi olmak üzere S nin her bir elemanına bir kompleks sayı karşılık getiren kurala kompleks değişkenli ve kompleks değerli fonksiyon denir.

Tanım 2.2.2 (Diferansiyellenebilme): $A \subset \mathbb{C}$ bir bölge olmak üzere $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ ye bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun. Eğer

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa $f(z)$ fonksiyonu $z_0 \in A$ noktasında diferansiyellenebilirdir (türevlenebilirdir) denir. Bu limit değeri $f'(z_0)$ ile gösterilir ve $z = z_0$ noktasında $f(z)$ fonksiyonunun türevi olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.3 (Analitiklik): $f(z)$ fonksiyonu, z_0 noktasında ve bu noktanın uygun bir komşuluğundaki her noktada diferansiyellenebilirse $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analiktir (veya holomorftur) denir. Tüm kompleks düzlemde analitik olan fonksiyonlara tam fonksiyon denir.

U birim diskinde analitik olan fonksiyonların sınıfını $\mathcal{H} = \mathcal{H}(U)$ biçiminde gösterelim. $n \in \mathbb{N}_0$ ve $a, a_n, a_{n+1}, \dots \in \mathbb{C}$ için,

$$\mathcal{H}[a, n] = \{f \in \mathcal{H}: f(z) = a + a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots\}$$

olsun.

Tanım 2.2.4: f fonksiyonu $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ şartlarını sağlıyorsa f fonksiyonuna normalize edilmiş fonksiyon denir.

U birim diskinde analitik normalize edilmiş

$$f(z) = z + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k$$

biçimindeki fonksiyonların sınıfı \mathcal{A}_n ile gösterilir. Bu sınıf $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$ olmak üzere,

$$\mathcal{A}_n = \{f \in \mathcal{H}: f(z) = z + a_{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} + \dots\}$$

şeklinde tanımlanır.

$$f(z) = z - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k (a_k \geq 0, n \in \mathbb{N})$$

şeklindeki negatif katsayılı $f \in \mathcal{A}_n$ fonksiyonlarının sınıfı ise \mathcal{T}_n ile gösterilir. $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}$ dir.

Teorem 2.2.5 (Cauchy Türev Formülü): γ , pozitif yönlü basit kapalı bir eğri, $f(z)$ bu γ eğrisinin içinde ve üzerinde analitik bir fonksiyon ve z_0 , γ nın içinde bir nokta olsun. Bu durumda $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

olur.

Cauchy Türev formülünden çıkarılabilecek en önemli sonuç şudur: f bir bölgede analitik bir fonksiyon ise bu bölgede her mertebeden türevi vardır ve bu türevler de o bölgede analiktir. Bu durumda f fonksiyonu analitik olduğu noktanın uygun bir komşuluğunda

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

şeklinde bir Taylor açılımına sahiptir. Ancak reel değişkenli bir fonksiyonun bir noktada birinci mertebeden türevi varsa bu noktada her mertebeden türevi vardır diyemeyiz. Örneğin,

$$f(x) = f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

reel değişkenli fonksiyonunun $x = 0$ noktasında

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

şeklinde birinci mertebeden türevi olduğu halde, aynı fonksiyonun $x = 0$ noktasında

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \sin \frac{1}{x})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \left(\frac{1}{x} \right)$$

olacağından ikinci mertebeden türevi yoktur.

Tanım 2.2.6 (Ayrık Tekil Nokta): f fonksiyonu z_0 noktasının bir $U(z_0, \varepsilon) - \{z_0\}$ delinmiş komşuluğunda analitik fakat z_0 noktasında analitik değilse z_0 noktasına f fonksiyonunun bir ayrık tekil noktasıdır denir.

Teorem 2.2.7 (Laurent Teoremi): f fonksiyonu $A(R_1, R_2) = \{z: R_1 < |z - z_0| < R_2\}$ halka bölgesinde analitik ise bu bölgede

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

olur. Buna f fonksiyonunun z_0 noktası civarındaki A halka bölgesindeki Laurent serisi denir.

Tanım 2.2.8 (Kutup Noktası): z_0 , f fonksiyonunun ayrık singüler noktası olsun. Bu noktanın uygun bir delinmiş komşuluğundaki Laurent serisini göz önüne alalım. Laurent açılımındaki b_n katsayılarından sadece sonlu tanesi sıfırdan farklı ise z_0 noktasına f fonksiyonunun kutup noktası denir.

Tanım 2.2.9 (Meromorf Fonksiyon): f fonksiyonu kompleks düzlemin bir B bölgesinde kutup noktaları hariç analitik ise f fonksiyonuna B de meromorf fonksiyon denir.

Teorem 2.2.10 (Maksimum Modül Teoremi): $f(z)$, B bölgesinde analitik ancak sabit olmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $|f(z)|$, B bölgesinde maksimum değer alamaz.

Sonuç 2.2.11: B , sınırlı bir bölge ve sabit olmayan $f(z)$ fonksiyonu da bu bölgenin sınırında sürekli, içinde ise analitik olsun. Bu durumda $|f(z)|$ maksimum değerini B bölgesinin sınırında alır.

Teorem 2.2.12 (Minimum Modül Teoremi): $f(z)$, B bölgesinde sabit olmayan bir fonksiyon ve her $z \in B$ için $f(z) \neq 0$ olsun. Bu durumda $|f(z)|$, B bölgesinde minimum değer alamaz.

Sonuç 2.2.13: B sınırlı bir bölge, $f(z)$ sabit olmayan bir fonksiyon ve her $z \in B$ için $f(z) \neq 0$ olsun. Ayrıca $f(z)$ fonksiyonunun B bölgesinin içinde analitik, sınırında sürekli olduğunu kabul edelim. Bu durumda $|f(z)|$ minimum değerini B bölgesinin sınırında alır.

Lemma 2.2.14 (Schwarz Lemması): f fonksiyonu $U = \{z: |z| < 1\}$ birim diskinde analitik ve $z \in U$ için $|f(z)| \leq 1$ ve $f(0) = 0$ olsun. Bu durumda $z \in U$ noktaları için $|f(z)| \leq |z|$ ve $|f'(0)| \leq 1$ dir. Eşitlik sadece $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(z) = e^{i\theta} z$ fonksiyonu ile sağlanır.

Tanım 2.2.15 (Ünivalent Fonksiyon): f fonksiyonu herhangi bir $D \subseteq \mathbb{C}$ bölgesinde analitik olsun. $\forall z_1, z_2 \in D$ için $z_1 \neq z_2$ iken $f(z_1) \neq f(z_2)$ oluyorsa, yani f fonksiyonu bu bölgede aynı değeri iki kez almıyorsa f fonksiyonuna D bölgesinde ünivalent (veya yalınkat) fonksiyon denir (Duren 1983).

U birim diskinde ünivalent olan normalize edilmiş

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

biçimindeki fonksiyonların sınıfı S ile gösterilir ve bu sınıf

$$S = \left\{ f \in \mathcal{A}: f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, f(z) \text{ fonksiyonu } U \text{ birim diskinde univalent} \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.2.16 (Riemann Dönüşüm Teoremi): $D \subsetneq \mathbb{C}$ basit bağlantılı bir bölge ve $z_0 \in D$ olsun. Bu durumda

- i. $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$,
- ii. f bire-birdir,
- iii. $f(D) = \{z: |z| < 1\}$

şartlarını sağlayan yalnız bir tane $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ analitik fonksiyonu vardır (Conway 1973).

Tanım 2.2.17 (Pozitif Reel Kısımlı Fonksiyon): U birim diskinde $g(0) = 1$ ve $\text{Re}g(z) > 0$ olmak üzere U 'da analitik olan $g(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$ biçimindeki fonksiyonlara pozitif reel kısımlı fonksiyonlar denir ve bu fonksiyonların sınıfı \mathcal{P} ile gösterilir (Goodman 1983a).

Tanım 2.2.18 (Schwarz Fonksiyonu): φ , U birim diskinde analitik bir fonksiyon olsun. φ fonksiyonu $z \in U$ için $|\varphi(z)| < 1$ ve $\varphi(0) = 0$ şartlarını sağlarsa φ 'ye Schwarz fonksiyonu denir ve Schwarz fonksiyonlarının sınıfı Ω ile gösterilir (Graham and Kohr 2003).

Başka bir deyişle, U birim diskinde analitik olan ve Schwarz lemmasındaki hipotezleri sağlayan fonksiyonlara Schwarz fonksiyonu denir (Graham and Kohr 2003).

\mathcal{P} sınıfı ile Schwarz fonksiyonları arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır:

$$g(z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow g(z) = \frac{1 + \varphi(z)}{1 - \varphi(z)}, \varphi(z) \in \Omega.$$

olmasıdır (Miller and Mocanu 2000).

2.3. Analitik Fonksiyonların Temel Alt Sınıfları

Tanım 2.3.1 (Starlike Bölge): D kompleks düzlemde bir bölge ve $w_0 \in D$ olsun. Başlangıç noktası w_0 olan her ışın ile D bölgesinin arakesiti bir doğru parçası veya bir ışın ise D bölgesine w_0 noktasına göre starlike bölge denir (Goodman 1983a).

Başka bir deyişle, $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere $\forall w \in D$ için $(1-t)w_0 + tw \in D$ ise D bölgesine w_0 noktasına göre starlike denir.

Tanım 2.3.2 (Starlike Fonksiyon): f fonksiyonu U birim diskinde analitik olsun. U 'yu w_0 göre starlike olan bir bölgeye resmeden f fonksiyonuna w_0 noktasına göre starlike fonksiyon denir. $w_0 = 0$ ise f fonksiyonuna starlike fonksiyon denir (Goodman 1983a).

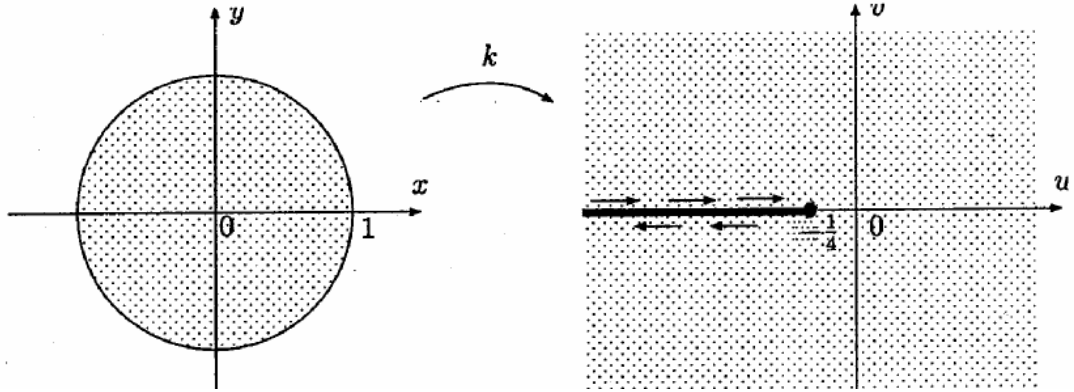
Normalize edilmiş starlike fonksiyonların sınıfı \mathcal{S}^* ile gösterilir ve bu sınıf,

$$\mathcal{S}^* = \left\{ f \in \mathcal{A} : \operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Örneğin, $z \in U$ olmak üzere

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

şeklinde tanımlanan Koebe fonksiyonu starlike fonksiyondur. Koebe fonksiyonu U birim diskini, $-\infty$ dan $-\frac{1}{4}$ e kadar negatif reel eksenini çıkartılmış kompleks düzlem üzerine konform olarak dönüştürür.



Şekil 2.1. Koebe fonksiyonu

Teorem 2.3.3: $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonunun U 'da starlike olabilmesi için gerek ve yeter şart her $z \in U$ için,

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0$$

olmasıdır.

Tanım 2.3.4 (Konveks Bölge): $\forall w_1, w_2 \in D \subset \mathbb{C}$ için w_1 ve w_2 'yi birleştiren doğru parçası D bölgesinde kalıyorsa, yani $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere $tw_1 + (1-t)w_2 \in D$ ise D bölgesine konveks denir (Goodman 1983a).

Tanım 2.3.5 (Konveks Fonksiyon): f fonksiyonu U birim diskinde analitik olsun. U 'yu konveks bir bölgeye resmeden f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (Goodman 1983a).

Not: Herhangi bir konveks bölge her bir noktasına göre starlike olduğunda konveks fonksiyonların sınıfı starlike fonksiyonlar sınıfının alt sınıfıdır.

Teorem 2.3.6: $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonunun U 'da konveks olabilmesi için gerek ve yeter şart her $z \in U$ için,

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > 0$$

olmasıdır (Goodman 1983a).

Normalize edilmiş konveks fonksiyonların sınıfı \mathcal{K} ile gösterilir ve bu sınıf,

$$\mathcal{K} = \left\{ f \in \mathcal{A} : \operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) > 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Theorem 2.3.7 (Alexander Teoremi): $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu verilsin. $f \in \mathcal{K}$ olması için gerek ve yeter şart $zf'(z) \in \mathcal{S}^*$ olmasıdır (Duren 1983).

Theorem 2.3.8 (Distortion Theoremi): $f \in \mathcal{S}$ olsun. Buna göre, $|z| = r$ ($0 < r < 1$) için

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2},$$

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3},$$

$$\frac{1-r}{r(1+r)} \leq \left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1+r}{r(1-r)}$$

dir. Eşitlik yalnızca Koebe fonksiyonları için geçerlidir (Hayman 1994).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1 $S_0^*(\alpha, z_0)$, $S_1^*(\alpha, z_0)$, $K_0(\alpha, z_0)$ ve $K_1(\alpha, z_0)$ Sınıfları

Bu bölümde özelliklerini inceleyeceğimiz sabit noktalı bazı fonksiyon sınıflarını tanıtaacağız.

$$a_n \geq 0 \quad , \quad f(z_0) = z_0 \quad (-1 < z_0 < 1 ; z_0 \neq 0) \quad (3.1)$$

veya

$$a_n \geq 0 \quad , \quad f'(z_0) = 1 \quad (-1 < z_0 < 1) \quad (3.2)$$

olmak üzere

$$f(z) = a_1 z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (3.3)$$

şeklindeki fonksiyonlar sınıfını ele alalım.

Tanım 3.1.1: $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu verilsin. $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere her $z \in U$ için,

$$Re \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \alpha$$

ise f fonksiyonuna U 'da α . mertebeden starlike fonksiyon denir. (Miller and Mocanu 2000).

α . mertebeden starlike fonksiyonların sınıfı $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere $\mathcal{S}^*(\alpha)$ ile gösterilir ve bu sınıf,

$$\mathcal{S}^*(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > \alpha \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.1.2: $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu verilsin. $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere her $z \in U$ için,

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > \alpha$$

ise f fonksiyonuna U 'da α . mertebeden konveks fonksiyon denir (Miller and Mocanu 2000).

α . mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere $\mathcal{K}(\alpha)$ ile gösterilir ve bu sınıf,

$$\mathcal{K}(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) > \alpha \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

$[0,1)$ aralığında herhangi bir α değeri ve z_0 sabit noktası verilsin. Buna göre, (3.1) şartını sağlayan α . mertebeden starlike fonksiyonların alt sınıfı $\mathcal{S}_0^*(\alpha, z_0)$ ve (3.2) şartını sağlayan α . mertebeden starlike fonksiyonların alt sınıfı ise $\mathcal{S}_1^*(\alpha, z_0)$ ile gösterilsin.

Ayrıca, (3.1) ve (3.2) şartını sağlayan α . mertebeden konveks fonksiyonların alt sınıfları, sırasıyla, $\mathcal{K}_0(\alpha, z_0)$ ve $\mathcal{K}_1(\alpha, z_0)$ ile gösterilsin.

3.2. $\rho(\mu, \delta, A, B, z_0)$ Sınıfı

Bu bölümde

$$(1 - \mu)f(z_0)/z_0 + \mu f'(z_0) = 1 \quad (-1 < z_0 < 1, 0 \leq \mu \leq 1) \quad (3.4)$$

olmak üzere (3.3) biçiminde tanımlanan fonksiyonların Uralegaddi ve Somanatha tarafından çalışılan daha genel bir sınıfını tanıtacağız.

Tanım 3.2.1 (Kesirsel İntegral): $f(z)$, $z - \xi > 0$ iken $\log(z - \xi)$ reel olacak şekilde $(z - \xi)^{\delta-1}$ in katlılıklarının kaldırıldığı ve orijini içeren z -düzlemindeki basit bağlantılı bir bölgede analitik bir fonksiyon olmak üzere f 'nin δ . mertebeden kesirsel integrali

$$\mathfrak{D}_z^{-\delta} f(z) = \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^z \frac{f(\xi)}{(z - \xi)^{1-\delta}} d\xi \quad (\delta > 0)$$

biçiminde tanımlanır (Owa 1978).

Tanım 3.2.2 (Kesirsel Türev): $f(z)$, $(z - \xi)^{\delta-1}$ in katlılıklarının kaldırıldığı z -düzlemindeki basit bağlantılı bir bölgede analitik bir fonksiyon olmak üzere f 'nin δ . mertebeden kesirsel türevi

$$\mathfrak{D}_z^{\delta} f(z) = \frac{1}{\Gamma(1 - \delta)} \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{f(\xi)}{(z - \xi)^{\delta}} d\xi \quad (0 \leq \delta < 1)$$

biçiminde tanımlanır (Owa 1978).

Tanım 3.2.3: (3.3) biçiminde tanımlanan ve (3.4) şartını sağlayan bir f fonksiyonu verilsin. $w \in \Omega$ ve $-1 \leq B < A \leq 1$ olmak üzere

$$\Gamma(2 - \delta)z^{\delta-1}\mathfrak{D}_z^\delta f(z) = a_1 \frac{1 + Aw(z)}{1 + Bw(z)}$$

ise f fonksiyonu $\rho(\mu, \delta, A, B, z_0)$ sınıfına aittir denir.

3.3. $\mathcal{W}(p, k; \phi, \varphi; A, B; \delta)$, $\mathcal{JW}_p^n(p, k; \phi, \varphi; A, B; \delta)$ Sınıfları

Bu bölümde özelliklerini ifade etmeye çalışacağımız sabit noktalı ve çok değerli meromorf fonksiyonların sınıfından bahsedeceğiz.

$$\mathcal{D}(r) = \{z \in \mathbb{C}: 0 < |z| < r\}$$

olmak üzere $\mathcal{D} = \mathcal{D}(1)$ de analitik olan fonksiyonların sınıfını \mathcal{M} ile gösterelim.

p, k birer tamsayı ve $p < k$ olmak üzere,

$$f(z) = a_p z^p + \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n \quad (z \in \mathcal{D}; a_p > 0) \quad (3.5)$$

şeklindeki $f \in \mathcal{M}$ fonksiyonlarının sınıfını $\mathcal{M}(p, k)$ ile gösterelim.

Burada dikkat edilirse, $p < 0$ için $\mathcal{U}_r = \mathcal{D}_r \cup \{0\}$ olmak üzere $U := U_1$ de meromorf olan fonksiyonlar sınıfı; $p \geq 0$ içinde U da analitik olan fonksiyonlar sınıfı elde edilir.

Tanım 3.3.1: $p > 0, \alpha \in (0, p), r \in (0, 1)$ olsun. Bu takdirde

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \alpha \quad (z \in \mathcal{D}(r) \setminus f^{-1}(\{0\})) \quad (3.6)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f \in \mathcal{M}(p, k)$ fonksiyonuna $\mathcal{D}(r)$ de α mertebeli starlike fonksiyon denir.

Tanım 3.3.2: $p > 0, \alpha \in (0, p), r \in (0, 1)$ olsun. $f \in \mathcal{M}(p, k)$ fonksiyonu

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > \alpha \quad (z \in \mathcal{D}(r) \setminus f^{-1}(\{0\}))$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna $\mathcal{D}(r)$ de α mertebeli konveks fonksiyon denir.

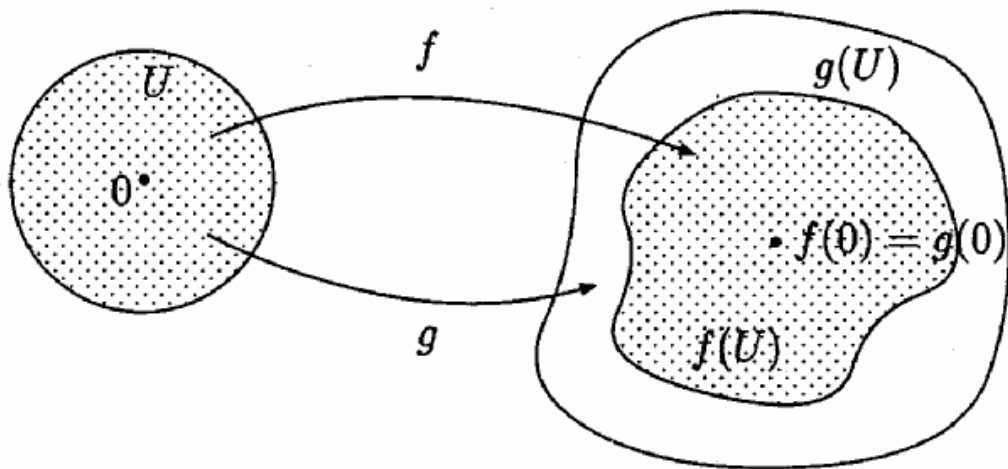
\mathcal{D} deki α mertebeli konveks $f \in \mathcal{M}(p, p+1)$ fonksiyonlarının sınıfını $\mathcal{S}_p^c(\alpha)$ ile,

\mathcal{D} de α mertebeli starlike $f \in \mathcal{M}(p, p+1)$ fonksiyonlarının sınıfını da $\mathcal{S}_p^*(\alpha)$ ile gösterelim.

Tanım 3.3.3 (Subordinasyon): $f, g \in \mathcal{H}(U)$ fonksiyonları verilsin. U birim diskinde $f(z) = g(w(z))$ olacak şekilde bir $w \in \Omega$ fonksiyonu varsa f fonksiyonu U 'da g fonksiyonuna subordinedir denir ve $f < g$ ile gösterilir. g fonksiyonunun univalent olması durumunda,

$$f < g \Leftrightarrow f(0) = g(0) \text{ ve } f(U) \subset g(U)$$

olmasıdır (Miller and Mocanu 2000).



Şekil 3.1. Subordinasyon

Tanım 3.3.4 (Hadamard Çarpımı): $f, g \in \mathcal{M}$ olmak üzere

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \text{ ve } g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n (z \in \mathcal{D})$$

fonksiyonları verilsin. f ve g fonksiyonlarının Hadamard çarpımı $f * g$ ile gösterilir ve bu çarpım,

$$(f * g)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^n$$

şeklinde tanımlanır (Dziok 2013).

Multivalent $f \in \mathcal{M}(p, k)$ fonksiyonu klasik olarak

$$z^{1-p} f(z) |_{z=0} = 0 \text{ ve } z^{-p} f(z) |_{z=0} = 1 \quad (3.7)$$

şeklinde normalize edilir. ρ, U birim diskinde bir sabit nokta olmak üzere

$$z^{1-p} f(z) |_{z=0} = 0 \text{ ve } z^{-p} f(z) |_{z=\rho} = 1 \quad (\rho = |\rho| e^{i\eta}) \quad (3.8)$$

şeklinde tanımlanan Montel'in normalizasyon şartları uygulanırsa ilginç sonuçlar elde edilebilir.

$\rho = 0$ için (3.8) normalizasyonunun (3.7) normalizasyonuna dönüşeceği görülür.

(3.8) deki Montel normalizasyonuna göre normalize edilmiş $f \in \mathcal{M}(p, k)$ fonksiyonlarının sınıfını $\mathcal{M}_\rho(p, k)$ ile gösterelim. Bu sınıf iki sabit noktalı fonksiyon sınıfı olarak adlandırılır.

Ayrıca, $\eta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(z) = a_p z^p - \sum_{n=k}^{\infty} |a_n| e^{-(n+p)\eta} z^n \quad (z \in \mathcal{D})$$

şeklindeki $f \in \mathcal{M}(p, k)$ fonksiyonlarının sınıfını $\mathcal{T}^\eta(p, k)$ ile gösterelim.

Özel olarak, negatif katsayılı fonksiyonların $\mathcal{T}^0(p, k)$ sınıfını elde ederiz. Ayrıca,

$$\mathcal{T}(p, k) := \bigcup_{\eta \in \mathbb{R}} \mathcal{T}^\eta(p, k)$$

şeklinde tanımlayalım.

$\mathcal{T}(p, k)$ ve $\mathcal{T}^\eta(p, k)$ sınıfları katsayıları değişken argümanlı fonksiyonların sınıfları olarak adlandırılır. $\mathcal{T}(1, 2)$ sınıfı Silverman tarafından tanıtılmıştır (Silverman 1981).

$f \in \mathcal{T}(p, k)$, $p > 0$ için (3.6) şartının aşağıdaki eşitsizliğe denk olduğu görülür:

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - p \right| < p - \alpha \quad (z \in \mathcal{D}(r) \setminus f^{-1}(\{0\})).$$

A, B, δ reel parametreler, $\delta \geq 0$, $0 \leq B \leq 1$, $0 \leq A < B$ ve $\phi, \varphi \in \mathcal{M}(p, k)$ olsun.

$\mathcal{W} = \mathcal{W}(p, k; \phi, \varphi; A, B; \delta)$ sembolü ile

$$(\varphi * f)(z) \neq 0 \quad z \in \mathcal{D} \tag{3.9}$$

ve

$$\frac{(\phi * f)(z)}{(\varphi * f)(z)} - \delta \left| \frac{(\phi * f)(z)}{(\varphi * f)(z)} - 1 \right| < \frac{1+Az}{1+Bz} \quad (3.10)$$

olacak şekilde $f \in \mathcal{M}(p, k)$ fonksiyonlarının sınıfını gösterelim.

Eğer $0 < B < 1$ ise bu takdirde

$$h(z) = \frac{1+Az}{1+Bz} \quad z \in \mathcal{D} \quad (3.11)$$

fonksiyonu U da ünivalenttir ve h fonksiyonu,

$$a = \frac{1-AB}{1-B^2}, \quad R = \frac{B-A}{1-B^2}$$

olmak üzere U yu $\{w \in \mathbb{C}: |w - a| < R\}$ diskinde dönüştürür.

Dolayısıyla, subordinasyon tanımından dolayı şart (3.10)

$$\left| \frac{(\phi * f)(z)}{(\varphi * f)(z)} - \delta \left| \frac{(\phi * f)(z)}{(\varphi * f)(z)} - 1 \right| - \frac{1-AB}{1-B^2} \right| < \frac{B-A}{1-B^2} \quad z \in \mathcal{D} \quad (3.12)$$

eşitsizliğine denktir.

Eğer $B = 1$ ise (3.11) de tanımlanan h fonksiyonu \mathcal{D} diskini $\left\{w \in \mathbb{C}: \operatorname{Re}[w] > \frac{1+A}{2}\right\}$ yarı düzlemine dönüştürür. Buna göre (3.10) şartı

$$\delta \left| \frac{(\phi * f)(z)}{(\varphi * f)(z)} - 1 \right| - \operatorname{Re} \left\{ \frac{(\phi * f)(z)}{(\varphi * f)(z)} - 1 \right\} < \frac{1-A}{2} \quad z \in \mathcal{D} \quad (3.13)$$

eşitsizliğine denktir.

Şimdi, $\mathcal{W}(p, k; \phi, \varphi; A, B; \delta)$ sınıfı ile ilişkili katsayıları değişken argümanlı fonksiyonların sınıfını tanımlayalım.

$$\mathcal{W}_\rho = \mathcal{W}_\rho(p, k; \phi, \varphi; A, B; \delta) := \mathcal{A}_\rho(p, k) \cap \mathcal{W}(p, k; \phi, \varphi; A, B; \delta),$$

$$\mathcal{TW}^\eta = \mathcal{TW}^\eta(p, k; \phi, \varphi; A, B; \delta) := \mathcal{T}^\eta(p, k) \cap \mathcal{W}(p, k; \phi, \varphi; A, B; \delta),$$

$$\mathcal{TW}_\rho^\eta = \mathcal{TW}_\rho^\eta(p, k; \phi, \varphi; A, B; \delta) := \mathcal{M}_\rho(p, k) \cap \mathcal{TW}^\eta(p, k; \phi, \varphi; A, B; \delta),$$

$$\mathcal{TW}_\rho = \mathcal{TW}_\rho(p, k; \phi, \varphi; A, B; \delta) := \mathcal{T}(p, k) \cap \mathcal{W}_\rho(p, k; \phi, \varphi; A, B; \delta),$$

şeklinde gösterelim.

$\mathcal{W}(p, k; \phi, \varphi; A, B; \delta)$ sınıfı çeşitli yeni ve ayrıca iyi bilinen analitik ve meromorfik fonksiyonların sınıflarını birleştirir.

Yapılan bu çalışmada φ, ϕ fonksiyonlarının $0 \leq \alpha_n < \beta_n (n \in \mathbb{N}_k := \{k, k+1, \dots\})$ olmak üzere

$$\varphi(z) = z^p + \sum_{n=k}^{\infty} \alpha_n z^n, \quad \phi(z) = z^p + \sum_{n=k}^{\infty} \beta_n z^n \quad (z \in \mathcal{D})$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. Ayrıca,

$$d_n := (\delta + 1)(1 + B)\beta_n - (\delta(B + 1) + A + 1)\alpha_n \quad (n \in \mathbb{N}_k)$$

şeklinde ifade edilsin.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. $S_0^*(\alpha, z_0)$, $S_1^*(\alpha, z_0)$, $K_0(\alpha, z_0)$ ve $K_1(\alpha, z_0)$ Sınıflarına Ait Özellikler

Teorem 4.1.1: $f(z) = a_1z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ ($a_n \geq 0$) fonksiyonunun α . mertebeden starlike olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n - \alpha) a_n \leq a_1 (1 - \alpha) \quad (4.1)$$

olmasıdır (Silverman 1976).

İspat:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n - \alpha) a_n \leq a_1 (1 - \alpha)$$

olduğunu kabul edelim.

$\frac{zf'(z)}{f(z)}$ nin aldığı değerlerin $w = 1$ merkezli $1 - \alpha$ yarıçaplı daire içerisinde kaldığını göstermek yeterlidir. Buna göre,

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| = \left| \frac{\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_n z^n}{a_1 z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n} \right| \leq \frac{\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_n}{a_1 - \sum_{n=2}^{\infty} a_n}$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer (4.1) şartı sağlanırsa bu son ifade $1 - \alpha$ ile üstten sınırlandırılmış olur. Tersine,

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} = \left\{ \frac{a_1 z - \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^n}{a_1 z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n} \right\} > \alpha \quad (4.2)$$

olduğunu varsayalım. z değerlerini, $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ reel olacak şekilde reel eksen üzerinde seçelim. (4.2) de paydayı ortadan kaldırdıktan sonra reel değerler üzerinden $z \rightarrow 1$ e yaklaştırılırsa (4.1) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.1.2: $f(z) = a_1z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ ($a_n \geq 0$) fonksiyonunun α . mertebeden konveks olması için gerek ve yeter şart $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-\alpha)a_n \leq a_1(1-\alpha)$ olmasıdır (Silverman 1976).

İspat: Bilindiği gibi $f(z)$ nin α . mertebeden konveks olması için gerek ve yeter şart $zf'(z)$ nin α . mertebeden starlike olmasıdır.

$$zf'(z) = a_1z - \sum_{n=2}^{\infty} na_n z^n$$

olduğundan teoremden a_n yerine na_n yazılırsa Sonuç 4.1.2 elde edilir.

$a_1 \neq 0$ olacak şekilde seçilen a_1 değerleri için bazı ilginç alt sınıflar elde edilir.

Teorem 4.1.3: Her n için $a_n \geq 0$ olsun. Buna göre, $f(z) = a_1z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonunun $S_0^*(\alpha, z_0)$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \left[\frac{(n-\alpha)}{(1-\alpha)} - z_0^{n-1} \right] \leq 1$$

olmasıdır (Silverman 1976).

İspat: $f(z_0)/z_0 = 1 = a_1 - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z_0^{n-1}$ olduğundan Teorem 4.1.1 deki ifadede

$$a_1 = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z_0^{n-1} \quad (4.3)$$

eşitliği yerine yazılırsa istenen sonuç bulunur.

Teorem 4.1.3 teki şartlar altında $f(z)$ nin ünivalent olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n(n - z_0^{n-1}) \leq 1$$

olmasıdır. Dolayısıyla, tüm bu fonksiyonların ünivalent olması için gerek ve yeter şart bu fonksiyonların starlike olmasıdır.

Sonuç 4.1.4: Eğer $f(z) = a_1z - \sum_{n=2}^{\infty} a_nz^n$ fonksiyonu $S_0^*(\alpha, z_0)$ sınıfına ait ise

$$f(z) = \frac{(1 - \alpha)z - (1 - \alpha)z^n}{((n - \alpha) - (1 - \alpha)z_0^{n-1})}$$

eşitliğinden

$$a_n \leq \frac{(1 - \alpha)}{((n - \alpha) - (1 - \alpha)z_0^{n-1})} \quad (n = 2, 3, \dots),$$

olur (Silverman 1976).

Sonuç 4.1.5: Her n için $a_n \geq 0$ olsun. Buna göre $f(z) = a_1z - \sum_{n=2}^{\infty} a_nz^n$ nin $K_0(\alpha, z_0)$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \left[\frac{n(n - \alpha)}{(1 - \alpha) - z_0^{n-1}} \right] \leq 1$$

olmasıdır (Silverman 1976).

Şimdi $S_0^*(\alpha, z_0)$ ve $K_0(\alpha, z_0)$ sınıfları arasındaki ilişkileri inceleyelim.

Teorem 4.1.6: Eğer $f(z) \in K_0(\alpha, z_0)$ ise $f(z) \in S_0^*(2/(3 - \alpha), z_0)$ dır (Silverman 1976).

İspat: Eğer $f(z) \in K_0(\alpha, z_0)$ ise

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \left[\frac{n(n - \alpha)}{(1 - \alpha) - z_0^{n-1}} \right] \leq 1$$

dir. Teorem 4.1.3 gözönünde bulundurularak,

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \left[\frac{(n - \beta)}{(1 - \beta) - z_0^{n-1}} \right] \leq 1$$

olacak şekilde en geniş β değerini bulmaya çalışalım. Her n için

$$\frac{(n - \beta)}{(1 - \beta)} \leq \frac{n(n - \alpha)}{(1 - \alpha)}$$

olacak şekilde β nın alacağı değerlerin aralığını bulmak yeterli olur. Bulunan çözüm $\beta \leq 2/(3 - \alpha)$ dır.

$$f(z) = \frac{2(2 - \alpha)z - (1 - \alpha)z^2}{2(2 - \alpha) - (1 - \alpha)z_0}$$

extremal fonksiyonu için bu sonuç kesindir.

Burada α negatif olsa dahi Teorem 4.1.6 daki sonuç doğrudur. Dolayısıyla, herhangi bir reel $\alpha \leq 1$ için $f(z) \in K_0(\alpha, z_0)$ ise $f(z)$ fonksiyonu aynı zamanda starlike ve ünivalenttir. Normalize edilmiş ünivalent konveks fonksiyonların $K(\alpha)$ sınıfına ait bir fonksiyonun $\alpha < 0$ için starlike olması gerekmez, yalnızca $\alpha \geq -\frac{1}{2}$ için ünivalent (ve close-to-convex) olması gerekir.

$z = re^{i\theta}$, $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq 2\pi$ için

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''}{f'} \right\} d\theta \geq \int_{\theta_1}^{\theta_2} -\frac{1}{2} d\theta \geq -\pi \quad \left(\alpha \geq \frac{-1}{2} \right)$$

olduğundan Kaplan (1953) tarafından verilen kriterden bu son ifadeye ulaşılır.

Teorem 4.1.7: $f(z) \in S_0^*(\alpha, z_0)$ ise $f(z)$ fonksiyonu

$$|z| < r = r(\alpha) = \inf_n \left[\frac{n - \alpha}{n^2(1 - \alpha)} \right]^{1/(n-1)} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

diskinde konvektir (Silverman 1976).

Ekstremal fonksiyon

$$f_n(z) = \frac{(n - \alpha)z - (1 - \alpha)z^n}{(n - \alpha) - (1 - \alpha)z_0^{n-1}} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

biçimindeki olmak üzere bu sonuç kesindir.

İspat: $|z| \leq r(\alpha)$ için $|zf''(z)/f'(z)| \leq 1$ olduğunun göstermek yeterlidir.

$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| \leq \frac{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n|z|^{n-1}}{a_1 - \sum_{n=2}^{\infty} na_n|z|^{n-1}}$$

elde edilir. Buna göre,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n|z|^{n-1} \leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z_0^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} n a_n |z|^{n-1}$$

veya

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n (n^2 |z|^{n-1} - z_0^{n-1}) \leq 1 \quad (4.4)$$

ise $|zf''(z)/f'(z)| \leq 1$ dir.

Teorem 4.1.3 e göre

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \left[\frac{(n-\alpha)}{(1-\alpha)} - z_0^{n-1} \right] \leq 1$$

dir. Dolayısıyla,

$$n^2 |z|^{n-1} - z_0^{n-1} \leq \frac{(n-\alpha)}{(1-\alpha)} - z_0^{n-1} \quad (n = 2, 3, \dots) \quad (4.5)$$

olması durumunda (4.4) eşitsizliği doğru olacaktır. $|z|$ için (4.5) çözümlerse

$$|z| \leq \left[\frac{(n-\alpha)}{n^2(1-\alpha)} \right]^{\frac{1}{n-1}} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

elde edilir ve sonuca ulaşılır.

Teorem 4.1.6 ve 4.1.7 de ki sonuçlar z_0 sabit noktasından bağımsızdır. (3.2) şartı sağlanmak üzere $f(z)$ fonksiyonu (3.3) deki gibi ise a_1

$$a_1 = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z_0^{n-1} \quad (4.6)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Teorem 4.1.1 ve Sonuç 4.1.2 deki ifadelerde (4.6) yerine yazılırsa sırasıyla aşağıdakiler elde edilir.

Teorem 4.1.8: Her n için $a_n \geq 0$ olsun. $f(z) = a_1z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonunun $S_1^*(\alpha, z_0)$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \left[\frac{(n-\alpha)}{(1-\alpha)} - n z_0^{n-1} \right] \leq 1$$

olmasıdır (Silverman 1973).

Sonuç 4.1.9: Her n için $a_n \geq 0$ olsun. $f(z) = a_1z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonunun $K_1(\alpha, z_0)$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \left[\frac{n(n-\alpha)}{(1-\alpha)} - n z_0^{n-1} \right] \leq 1$$

olmasıdır.

4.2. $\rho(\mu, \delta, A, B, z_0)$ Sınıfına Ait Özellikler

4.2.1. $\rho(\mu, \delta, A, B, z_0)$ sınıfına ait katsayı eşitsizlikleri

Teorem 4.2.1.1: (3.3) biçiminde tanımlanan f fonksiyonunun $\rho(\mu, \delta, A, B, z_0)$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart

$$\phi(\delta, n) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2-\delta)}{\Gamma(n+1-\delta)}$$

olmak üzere

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{(1-B)}{(A-B)} \phi(\delta, n) - [(1-\mu) + n\mu] z_0^{n-1} \right\} a_n \leq 1 \quad (4.7)$$

olmasıdır (Kulkarni *et al.* 1996).

İspat: f fonksiyonunun $\rho(\mu, \delta, A, B, z_0)$ sınıfına ait olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\phi(\delta, n) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2-\delta)}{\Gamma(n+1-\delta)}$$

ve

$$F(z) = \Gamma(2-\delta)z^{\delta-1}D_z^{\delta}f(z) = a_1 - \sum_{n=2}^{\infty} \phi(\delta, n)a_n z^{n-1}$$

olmak üzere

$$F(z) = a_1 \frac{1+Aw(z)}{1+Bw(z)} \quad (-1 \leq B < A \leq 1; w \in \Omega) \quad (4.8)$$

elde edilir.

(4.8) eşitliği

$$\left| \frac{F(z)-a_1}{BF(z)-a_1A} \right| = |w(z)| < 1 \quad (4.9)$$

ifadesine denktir. Herhangi bir z kompleks sayısı için $|Re(z)| \leq |z|$ olduğundan, (4.9) dan

$$Re\left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \phi(\delta, n)a_n z^{n-1} / [(A-B)a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} B\phi(\delta, n)a_n z^n] \right\} \leq 1 \quad (4.10)$$

elde edilir. $F(z)$ reel olacak şekilde z nin alacağı değerler reel eksen üzerinden seçelim. (4.10) da paydayı yok edersek reel eksen boyunca $z \rightarrow 1$ iken

$$\sum_{n=2}^{\infty} (1-B)\varphi(\delta, n)a_n \leq a_n(A-B) \quad (4.11)$$

olur. Son olarak (4.11) de

$$a_1 = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} [(1-\mu) + n\mu]a_n z_0^{n-1}$$

ifadesi yerine yazılırsa (4.7) elde edilir. Tersine, (4.7) eşitsizliğinin geçerli olduğunu kabul edelim. Hipotezde

$$\begin{aligned} & |F(z) - a_1| - |BF(z) - a_1A| \\ &= \left| \sum_{n=2}^{\infty} \varphi(\delta, n)a_n z^{n-1} \right| - (A-B)a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} B\varphi(\delta, n)a_n z^{n-1} \\ &\leq \sum_{n=2}^{\infty} (1-B)\varphi(\delta, n)a_n - a_1(A-B) \leq 0 \end{aligned}$$

eşitsizliğini göz önüne alalım. Buradan, maksimum modül teoreminden, her $z \in U$ için

$$\left| \frac{F(z) - a_1}{BF(z) - a_1A} \right| < 1$$

dır. Burada,

$$\frac{F(z) - a_1}{BF(z) - a_1A} = w(z)$$

olarak alınırsa $f(z)$ nin $\rho(\mu, \delta, A, B, z_0)$ sınıfına ait olduğunu görülür.

Sonuç 4.2.1.2: $f \in \rho(\mu, \delta, A, B, z_0)$. Bu durumda,

$$f(z) = \frac{(1-B)\varphi(\delta, n)z - (A-B)z^n}{\{(1-B)\varphi(\delta, n) - [(1-\mu) + n\mu](A-B)z_0^{n-1}\}}$$

eşitliği için

$$a_n \leq \{[(1-B)/(A-B)]\varphi(\delta, n) - [(1-\mu) + n\mu]z_0^{n-1}\}^{-1} \quad (n \geq 2)$$

dır (Kulkarni *et al.* 1996).

4.2.2. $\rho(\mu, \delta, A, B, z_0)$ sınıfına ait distorsiyon teoremi

Teorem 4.2.2.1: $f \in \rho(\mu, \delta, A, B, z_0)$ olsun. Bu takdirde $z \in U$ için

$$|f(z)| \geq a_1 \left(|z| - \frac{(A-B)(2-\delta)}{2(1-B)} |z|^2 \right)$$

ve

$$|f(z)| \leq a_1 \left(|z| + \frac{(A-B)(2-\delta)}{2(1-B)} |z|^2 \right)$$

olur. Ayrıca, $z \in U$ için

$$|D_z^\delta f(z)| \geq \frac{a_1}{\Gamma(2-\delta)} \left(|z|^{1-\delta} - \frac{(A-B)}{(1-B)} |z|^{2-\delta} \right) \quad (4.12)$$

ve

$$|D_z^\delta f(z)| \leq \frac{a_1}{\Gamma(2-\delta)} \left(|z|^{1-\delta} + \frac{(A-B)}{(1-B)} |z|^{2-\delta} \right) \quad (4.13)$$

olur (Kulkarni *et al.* 1996).

İspat: (4.11) eşitsizliğine göre ve $n \geq 2$ için $\varphi(\delta, n)$ azalmayan bir fonksiyon olduğundan

$$\frac{2(1-B)}{(2-\delta)} \sum_{n=2}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=2}^{\infty} \varphi(\delta, n)(1-B)a_n \leq a_1(A-B) \quad (4.14)$$

eşitsizliği elde edilir. (4.14) eşitsizliği

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \leq \frac{a_1(A-B)(2-\delta)}{2(1-B)}$$

eşitsizliğine denktir. Sonuç olarak,

$$|f(z)| \geq a_1|z| - |z|^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_n \geq a_1 \left(|z| - \frac{(A-B)(2-\delta)}{2(1-B)} |z|^2 \right)$$

ve

$$|f(z)| \leq a_1|z| + |z|^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_n \geq a_1 \left(|z| + \frac{(A-B)(2-\delta)}{2(1-B)} |z|^2 \right)$$

dır. Ayrıca, (4.14) de ikinci eşitsizlik kullanılırsa (4.12) ye denk olan

$$|\Gamma(2-\delta)z^\delta D_z^\delta f(z)| \geq a_1|z| - \sum_{n=2}^{\infty} \varphi(\delta, n)a_n|z|^n$$

$$\geq a_1|z| - |z|^2 \left(\sum_{n=2}^{\infty} \varphi(\delta, n)a_n \right)$$

$$\geq a_1(|z| - [(A-B)/(1-B)]|z|^2)$$

eşitsizliği elde edilir. Son olarak

$$\begin{aligned}
|\Gamma(2 - \delta)D_z^\delta f(z)| &\leq a_1|z| + \sum_{n=2}^{\infty} \varphi(\delta, n)a_n|z|^n \\
&\leq a_1|z| + |z|^2 \left(\sum_{n=2}^{\infty} \varphi(\delta, n)a_n \right) \\
&\leq a_1(|z| + [(A - B)/(1 - B)]|z|^2)
\end{aligned}$$

olur. Buda (4.13) ü verir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.2.2.2: $f \in \rho(\mu, \delta, A, B, z_0)$ olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonu merkezi orijin, yarıçapı

$$r = a_1(1 + [(A - B)(2 - \delta)/2(1 - B)])$$

olan, $D_z^\delta f(z)$ de merkezi orijin, yarıçapı

$$R = \frac{a_1}{\Gamma(2 - \delta)} \{1 + [(A - B)/(1 - B)]\}$$

olan diskin içinde kalır (Kulkarni *et al.* 1996).

4.3. $\mathcal{W}(p, k; \phi, \varphi, A, B; \delta), \mathcal{TW}_p^\eta(p, k; \phi, \varphi; A, B; \delta)$ Sınıflarına Ait Özellikler

4.3.1. $\mathcal{W}(p, k; \phi, \varphi, A, B; \delta), \mathcal{TW}_p^\eta(p, k; \phi, \varphi; A, B; \delta)$ sınıflarına ait katsayı eşitsizlikleri

İlk olarak bir fonsiyonun \mathcal{W} sınıfına dâhil olabilmesi için yeterli şarttan söz edeceğiz.

Teorem 4.3.1.1: $0 \leq B \leq 1$ ve $-1 \leq A < B$ olsun. Eğer $f \in \mathcal{M}_\rho(p, k)$ ve

$$\sum_{n=k}^{\infty} d_n |a_n| \leq (B - A)a_p \quad (4.15)$$

ise bu takdirde $f \in \mathcal{W}$ dır (Dziok 2013).

İspat: $0 \leq B \leq 1$ ise,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(\phi * f)(z)}{(\varphi * f)(z)} - \delta \left| \frac{(\phi * f)(z)}{(\varphi * f)(z)} - 1 \right| - \frac{1 - AB}{1 - B^2} \right| \\ & \leq (\delta + 1) \left| \frac{(\phi * f)(z)}{(\varphi * f)(z)} - 1 \right| + \frac{B(B - A)}{1 - B^2} \\ & \leq (\delta + 1) \frac{\sum_{n=k}^{\infty} (\beta_n - \alpha_n) |a_n| |z|^{n-p}}{a_p - \sum_{n=k}^{\infty} \alpha_n |a_n| |z|^{n-p}} + \frac{B(B - A)}{1 - B^2} \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Böylece (4.15) den (3.12)'yi elde ederiz ve sonuç olarak $f \in \mathcal{W}$ dır. Şimdi $B = 1$ olsun. Hesaplamalar sonucunda

$$\begin{aligned} \delta \left| \frac{(\phi * f)(z)}{(\varphi * f)(z)} - 1 \right| - \operatorname{Re} \left\{ \frac{(\phi * f)(z)}{(\varphi * f)(z)} - 1 \right\} &\leq (\delta + 1) \left| \frac{(\phi * f)(z)}{(\varphi * f)(z)} - 1 \right| \\ &\leq (\delta + 1) \frac{\sum_{n=k}^{\infty} (\beta_n - \alpha_n) |a_n| |z|^{n-p}}{a_p - \sum_{n=k}^{\infty} \alpha_n |a_n| |z|^{n-p}} \end{aligned}$$

olur.

Dolayısıyla, (4.15) den (3.13)' ü elde ederiz. Bu nedenle $f \in \mathcal{W}$ olup ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.1.2: $f \in \mathcal{T}^\eta(p, k)$ olsun. Bu durumda $f \in \mathcal{TW}^\eta(p, k)$ olması için gerek ve yeter şart (4.15) şartının sağlanmasıdır (Dziok 2013).

İspat: $f \in \mathcal{T}^\eta(p, k)$ olsun. Teorem 4.3.1.1'e göre yalnızca f fonksiyonunun (4.15) katsayı eşitsizliğini sağladığını göstermek yeterlidir. (3.12) ve (3.13) şartlarında $z = re^{i\eta}$ yazılırsa,

$$(\delta + 1) \frac{\sum_{n=2}^{\infty} (\beta_n - \alpha_n) |a_n| r^{n-p}}{a_p - \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n |a_n| r^{n-p}} < \frac{B - A}{1 + B}$$

eşitsizliğini elde ederiz. (3.9) dan yukardaki eşitsizliğin sol tarafındaki ifadenin paydasının $r \in \langle 0, 1 \rangle$ için sıfır olmayacağı açıktır. Dahası $r = 0$ için pozitiftir ve bu nedenler $\in \langle 0, 1 \rangle$ içinde pozitiftir. Bu yüzden $r \rightarrow 1^-$ iken

$$\sum_{n=2}^{\infty} d_n |a_n| r^{n-p} \leq (B - A) a_p$$

elde ederiz ki bu ifade (4.15) yi verir.

Teorem 4.3.1.2 ye başvurarak aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 4.3.1.3: $f \in \mathcal{T}^\eta(p, k)$ olsun. Bu durumda $f \in \mathcal{TW}_p^\eta$ olması için gerek ve yeter şart f nin (3.8) şartını ve

$$\sum_{n=k}^{\infty} (d_n - (B - A)|\rho|^{n-\rho})|a_n| \leq B - A \quad (4.16)$$

eşitsizliğini sağlamasıdır (Dziok 2013).

İspat: (3.8) normalizasyonuyla verilmiş $f \in \mathcal{T}^\eta(p, k)$ fonksiyonu için

$$a_p = 1 + \sum_{n=k}^{\infty} |a_n| |\rho|^{n-\rho} \quad (4.17)$$

eşitliğini elde ederiz. Bu taktirde (4.15) ve (4.16) şartları denktir.

Teorem 4.3.1.3 den aşağıdaki lemma elde edilir.

Lemma 4.3.1.4:

$$d_{n_0} - (B - A)|\rho|^{n-\rho} \leq 0$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}_k$ tam sayısı olsun. Bu durumda her pozitif a reel sayıları için,

$$f_{n_0}(z) = (1 + a\rho^{n_0-p})z^p - ae^{i(p-n_0)\eta}z^{n_0}$$

fonksiyonu \mathcal{TW}_p^η sınıfına aittir. Ayrıca,

$$d_n - (B - A)|\rho|^{n-\rho} > 0$$

olacak şekilde seçilen her $n \in \mathbb{N}_k$ ve her pozitif a reel sayısı için,

$$b = \frac{B - A + \left((B - A)|\rho|^{n_0 - \rho} - d_{n_0} \right) a}{d_n - (B - A)|\rho|^{n - \rho}}$$

olmak üzere

$$f_n(z) = (1 + a\rho^{n_0 - p} + bz^{n - p})z^p - ae^{i(p - n_0)\eta}z^{n_0} - be^{i(p - n)\eta}z^n$$

fonksiyonları \mathcal{TW}_p^η sınıfına aittir (Dziok 2013).

Lemma 4.3.1.4 ve Teorem 4.3.1.3 den aşağıdaki iki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.1.5:

$$d_n - (B - A)|\rho|^{n - \rho} \geq 0 \quad n \in \mathbb{N}_k$$

olsun. Eğer ,

$$d_n - (B - A)|\rho|^{n - \rho} > 0$$

ise bu takdirde \mathcal{TW}_p^η sınıfının n . katsayısı aşağıdaki eşitsizliği sağlar,

$$|a_n| \leq \frac{B - A}{d_n - (B - A)|\rho|^{n - \rho}} \quad (4.18)$$

(4.18) tahminini göz önünde bulundurursak,

$$f_{n,\eta}(z) = \frac{d_n z^p - (B - A)e^{i(p - n)\eta} z^n}{d_n - (B - A)|\rho|^{n - \rho}} \quad (z \in \mathcal{D}) \quad (4.19)$$

formunda yazılan $f_{n,\eta}$ fonksiyonu ekstremal fonksiyondur (Dziok 2013).

Sonuç 4.3.1.6: Eğer

$$d_n - (B - A)|\rho|^{n-\rho} = 0$$

ise bu taktirde \mathcal{TW}_p^η sınıfının n . katsayısı sınırsızdır. Dahası,

$$d_n - (B - A)|\rho|^{n_0-\rho} < 0$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}_k$ varsa \mathcal{TW}_p^η sınıfının tüm katsayıları sınırsızdır (Dziok 2013).

Teorem 4.3.1.3 ve Sonuç 4.3.1.5 de $\rho = 0$ yazılırsa aşağıda verilen sonuçları elde ederiz.

Sonuç 4.3.1.7: $f \in \mathcal{T}^\eta(p, k)$ olsun. $f \in \mathcal{TW}_0^\eta$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{n=k}^{\infty} d_n |a_n| \leq B - A$$

olmasıdır (Dziok 2013).

Sonuç 4.3.1.8: $f \in \mathcal{TW}_0^\eta$ ise bu taktirde

$$a_n \leq \frac{B - A}{d_n} \quad n \in \mathbb{N}_k$$

dır.

$$f_{n,\eta}(z) = z^p - \frac{B-A}{d_n} e^{i(p-n)\eta} z^n \quad (z \in \mathcal{D}; n \in \mathbb{N}_k) \quad (4.20)$$

formundaki tüm fonksiyonlar ekstremum fonksiyondur (Dziok 2013).

4.3.2. $\mathcal{W}(p, k; \phi, \varphi, A, B; \delta), \mathcal{TW}_p^\eta(p, k; \phi, \varphi; A, B; \delta)$ sınıflarına ait distorsiyon teoremleri

Teorem 4.3.1.2 den aşağıdaki lemmalar elde edilir.

Lemma 4.3.2.1: $f \in \mathcal{TW}_p^\eta$ olsun. $\{d_n\}$ dizisi

$$0 < d_k - (B - A)|\rho|^{k-p} \leq d_n - (B - A)|\rho|^{n-p} \quad (n \in \mathbb{N}_k) \quad (4.21)$$

eşitsizliğini sağlarsa

$$\sum_{n=k}^{\infty} |a_n| \leq \frac{B - A}{d_k - (B - A)|\rho|^{k-p}}$$

olur. Ayrıca,

$$0 < \frac{d_k - (B - A)|\rho|^{k-p}}{k} \leq \frac{d_n - (B - A)|\rho|^{n-p}}{n} \quad (n \in \mathbb{N}_k) \quad (4.22)$$

ise bu durumda

$$\sum_{n=k}^{\infty} n|a_n| \leq \frac{k(B - A)}{d_k - (B - A)|\rho|^{k-p}}$$

dır (Dziok 2013).

Lemma 4.3.2.1 in ikinci kısmı,

$$N_\sigma = \left\{ f(z) = a_p z^p + \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{T}^\eta(p, k): \sum_{n=k}^{\infty} n|a_n| \leq \sigma \right\}$$

biçiminde tanımlanan σ -komşuluk kavramına göre yeniden formülize edilebilir. Bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.2.2: $\{d_n\}$ dizisi (4.22) eşitsizliğini sağlarsa

$$\sigma = \frac{k(B-A)}{d_k - (B-A)|\rho|^{k-p}}$$

olmak üzere $\mathcal{TW}_p^\eta \in N_\sigma$ olur (Dziok 2013).

Teorem 4.3.2.3: $f \in \mathcal{TW}_p^\eta$ ve $|z| = r < 1$ olsun. $\{d_n\}$ dizisi (4.21) eşitsizliğini sağlarsa

$$\phi(r) = f(x) = \begin{cases} r^p & (r \leq \rho), \\ \frac{d_k r^p + (B-A)r^k}{d_k - (B-A)|\rho|^{k-p}} & (r > \rho), \end{cases}$$

olmak üzere

$$\phi(r) \leq |f(z)| \leq \frac{d_k r^p + (B-A)r^k}{d_k - (B-A)|\rho|^{k-p}} \quad (4.23)$$

eşitsizliği elde edilir. Bunun yanı sıra (4.22) eşitsizliği geçerli ise

$$p a_p r^{p-1} - \frac{k(B-A)}{d_k - (B-A)|\rho|^{k-p}} r^{k-p} \leq |f(z)| \leq \frac{p d_k r^p + (B-A)r^{k-1}}{d_k - (B-A)|\rho|^{k-p}} \quad (4.24)$$

olur.

$f_{k,\eta}$ ekstremal fonksiyonları (4.19) biçiminde ve $f_0(z) = z$ olmak üzere sonuç kesindir (Dziok 2013).

İspat: (3.5) deki gibi tanımlanan f fonksiyonu \mathcal{TW}_p^η sınıfına ait olsun. Lemma 4.3.2.1 den

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= \left| a_p z^p + \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n \right| \leq r^p \left(a_p + \sum_{n=k}^{\infty} |a_n| r^{n-p} \right) \\
&\leq r^p \left(1 + \sum_{n=k}^{\infty} |a_n| |\rho|^{n-p} + \sum_{n=k}^{\infty} |a_n| r^{n-p} \right) \\
&\leq r^p \left(1 + (|\rho|^{k-p} + r^{k-p}) \sum_{n=k}^{\infty} |a_n| \right) \\
&\leq \frac{d_k r^p + (B - A) r^k}{d_k - (B - A) |\rho|^{k-p}}
\end{aligned}$$

ve

$$|f(z)| \geq r^p (a_p - \sum_{n=k}^{\infty} |a_n| r^{n-p}) = r^p (1 + \sum_{n=k}^{\infty} (|\rho|^{n-p} - r^{n-p}) |a_n|) \quad (4.25)$$

olur.

$r \leq \rho$ ise $|f(z)| \geq r^p$ olur. $r > \rho$ ise $\{(|\rho|^{n-p} - r^{n-p})\}$ dizisi negatif ve azalandır. Dolayısıyla (4.25) den iddia (4.23) ve

$$|f(z)| \geq r^p \left(1 - (r^{k-p} - |\rho|^{k-p}) \sum_{n=2}^{\infty} a_n \right) \geq \frac{d_k r^p + (B - A) r^k}{d_k - (B - A) |\rho|^{k-p}}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.17) eşitliği ile birlikte Lemma 4.3.2.1 den yararlanılarak Teorem 4.3.2.3 deki iddia (4.24) elde edilir.

Teorem 4.3.2.3 de $\rho = 0$ olarak alınırsa aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 4.3.2.4: $f \in \mathcal{TW}_p^\eta$ ve $|z| = r < 1$ olsun. Eğer $d_k \leq d_n (n \in \mathbb{N}_k)$ ise

$$r^p - \frac{B-A}{d_k} r^k \leq |f(z)| \leq r^p + \frac{B-A}{d_k} r^k$$

dır. Üstelik $nd_k \leq kd_n (n \in \mathbb{N}_k)$ ise bu durumda

$$pr^{p-1} - \frac{k(B-A)}{d_k} r^{k-1} \leq |f'(z)| \leq pr^{p-1} + \frac{k(B-A)}{d_k} r^{k-1}$$

olur.

$f_{k,\eta}$ ekstremal fonksiyonları (4.20) biçiminde olmak üzere sonuç kesindir (Dziok 2013).

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Teorem 5.1.1: $f(z) = a_1z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ ($a_n \geq 0$) fonksiyonunun α . mertebeden starlike olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n - \alpha) a_n \leq a_1(1 - \alpha)$$

olmasıdır (Silverman 1976).

Sonuç 5.1.2: $f(z) = a_1z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ ($a_n \geq 0$) fonksiyonunun α . mertebeden konveks olması için gerek ve yeter şart $\sum_{n=2}^{\infty} n(n - \alpha) a_n \leq a_1(1 - \alpha)$ olmasıdır (Silverman 1976).

Teorem 5.1.3: Her n için $a_n \geq 0$ olsun. Buna göre, $f(z) = a_1z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonunun $S_0^*(\alpha, z_0)$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \left[\frac{(n - \alpha)}{(1 - \alpha)} - z_0^{n-1} \right] \leq 1$$

olmasıdır (Silverman 1976).

Sonuç 5.1.4: Eğer $f(z) = a_1z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu $S_0^*(\alpha, z_0)$ sınıfına ait ise

$$f(z) = \frac{(1 - \alpha)z - (1 - \alpha)z^n}{((n - \alpha) - (1 - \alpha)z_0^{n-1})}$$

eşitliğinden

$$a_n \leq \frac{(1 - \alpha)}{((n - \alpha) - (1 - \alpha)z_0^{n-1})} \quad (n = 2, 3, \dots),$$

olur (Silverman 1976).

Sonuç 5.1.5: Her n için $a_n \geq 0$ olsun. Buna göre $f(z) = a_1z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ nin $K_0(\alpha, z_0)$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \left[\frac{n(n-\alpha)}{(1-\alpha) - z_0^{n-1}} \right] \leq 1$$

olmasıdır (Silverman 1976).

Teorem 5.1.6: Eğer $f(z) \in K_0(\alpha, z_0)$ ise $f(z) \in S_0^*(2/(3-\alpha), z_0)$ dır (Silverman 1976).

Teorem 5.1.7: $f(z) \in S_0^*(\alpha, z_0)$ ise $f(z)$ fonksiyonu

$$|z| < r = r(\alpha) = \inf_n \left[\frac{n-\alpha}{n^2(1-\alpha)} \right]^{1/(n-1)} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

diskinde konvektir (Silverman 1976).

Teorem 5.1.8: Her n için $a_n \geq 0$ olsun. $f(z) = a_1z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonunun $S_1^*(\alpha, z_0)$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \left[\frac{(n-\alpha)}{(1-\alpha)} - n z_0^{n-1} \right] \leq 1$$

olmasıdır (Silverman 1973).

Sonuç 5.1.9: Her n için $a_n \geq 0$ olsun. $f(z) = a_1z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonunun $K_1(\alpha, z_0)$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \left[\frac{n(n-\alpha)}{(1-\alpha)} - nz_0^{n-1} \right] \leq 1$$

olmasıdır.

Teorem 5.2.1.1: (3.3) biçiminde tanımlanan f fonksiyonunun $\rho(\mu, \delta, A, B, z_0)$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart

$$\phi(\delta, n) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2-\delta)}{\Gamma(n+1-\delta)}$$

olmak üzere

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{(1-B)}{(A-B)} \phi(\delta, n) - [(1-\mu) + n\mu]z_0^{n-1} \right\} a_n \leq 1$$

olmasıdır (Kulkarni *et al.* 1996).

Sonuç 5.2.1.2: $f \in \rho(\mu, \delta, A, B, z_0)$. Bu durumda,

$$f(z) = \frac{(1-B)\phi(\delta, n)z - (A-B)z^n}{\{(1-B)\phi(\delta, n) - [(1-\mu) + n\mu](A-B)z_0^{n-1}\}}$$

eşitliği için

$$a_n \leq \{[(1-B)/(A-B)]\phi(\delta, n) - [(1-\mu) + n\mu]z_0^{n-1}\}^{-1} \quad (n \geq 2)$$

dır (Kulkarni *et al.* 1996).

Teorem 5.2.2.1: $f \in \rho(\mu, \delta, A, B, z_0)$ olsun. Bu takdirde $z \in U$ için

$$|f(z)| \geq a_1 \left(|z| - \frac{(A-B)(2-\delta)}{2(1-B)} |z|^2 \right)$$

ve

$$|f(z)| \leq a_1 \left(|z| + \frac{(A-B)(2-\delta)}{2(1-B)} |z|^2 \right)$$

olur. Ayrıca, $z \in U$ için

$$|D_z^\delta f(z)| \geq \frac{a_1}{\Gamma(2-\delta)} \left(|z|^{1-\delta} - \frac{(A-B)}{(1-B)} |z|^{2-\delta} \right)$$

ve

$$|D_z^\delta f(z)| \leq \frac{a_1}{\Gamma(2-\delta)} \left(|z|^{1-\delta} + \frac{(A-B)}{(1-B)} |z|^{2-\delta} \right)$$

olur (Kulkarni *et al.* 1996).

Sonuç 5.2.2.2: $f \in \rho(\mu, \delta, A, B, z_0)$ olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonu merkezi orijin, yarıçapı

$$r = a_1 \left(1 + \frac{(A-B)(2-\delta)}{2(1-B)} \right)$$

olan, $D_z^\delta f(z)$ de merkezi orijin, yarıçapı

$$R = \frac{a_1}{\Gamma(2-\delta)} \left\{ 1 + \frac{(A-B)}{(1-B)} \right\}$$

olan diskin içinde kalır (Kulkarni *et al.* 1996).

Teorem 5.3.1.1: $0 \leq B \leq 1$ ve $-1 \leq A < B$ olsun. Eğer $f \in \mathcal{M}_\rho(p, k)$ ve

$$\sum_{n=k}^{\infty} d_n |a_n| \leq (B - A)a_p$$

ise bu takdirde $f \in \mathcal{W}$ dır (Dziok 2013).

Teorem 5.3.1.2: $f \in \mathcal{T}^\eta(p, k)$ olsun. Bu durumda $f \in \mathcal{TW}^\eta(p, k)$ olması için gerek ve yeter şart (4.15) şartının sağlanmasıdır (Dziok 2013).

Teorem 5.3.1.3: $f \in \mathcal{T}^\eta(p, k)$ olsun. Bu durumda $f \in \mathcal{TW}_p^\eta$ olması için gerek ve yeter şart f nin (3.8) şartını ve

$$\sum_{n=k}^{\infty} (d_n - (B - A)|\rho|^{n-\rho})|a_n| \leq B - A$$

eşitsizliğini sağlamasıdır (Dziok 2013).

Lemma 5.3.1.4:

$$d_{n_0} - (B - A)|\rho|^{n-\rho} \leq 0$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}_k$ tam sayısı olsun. Bu durumda her pozitif a reel sayıları için,

$$f_{n_0}(z) = (1 + a\rho^{n_0-p})z^p - ae^{i(p-n_0)\eta}z^{n_0}$$

fonksiyonu \mathcal{TW}_p^η sınıfına aittir. Ayrıca,

$$d_n - (B - A)|\rho|^{n-\rho} > 0$$

olacak şekilde seçilen her $n \in \mathbb{N}_k$ ve her pozitif a reel sayısı için,

$$b = \frac{B - A + \left((B - A)|\rho|^{n_0 - \rho} - d_{n_0} \right) a}{d_n - (B - A)|\rho|^{n - \rho}}$$

olmak üzere

$$f_n(z) = (1 + a\rho^{n_0 - p} + bz^{n-p})z^p - ae^{i(p-n)\eta}z^{n_0} - be^{i(p-n)\eta}z^n$$

fonksiyonları \mathcal{TW}_p^η sınıfına aittir (Dziok 2013).

Sonuç 5.3.1.5:

$$d_n - (B - A)|\rho|^{n - \rho} \geq 0 \quad n \in \mathbb{N}_k$$

olsun. Eğer ,

$$d_n - (B - A)|\rho|^{n - \rho} > 0$$

ise bu takdirde \mathcal{TW}_p^η sınıfının n . katsayısı aşağıdaki eşitsizliği sağlar,

$$|a_n| \leq \frac{B - A}{d_n - (B - A)|\rho|^{n - \rho}}$$

(4.18) tahminini göz önünde bulundurursak,

$$f_{n,\eta}(z) = \frac{d_n z^p - (B - A)e^{i(p-n)\eta} z^n}{d_n - (B - A)|\rho|^{n - \rho}} \quad (z \in \mathcal{D})$$

formunda yazılan $f_{n,\eta}$ fonksiyonu ekstremal fonksiyondur (Dziok 2013).

Sonuç 5.3.1.6: Eğer

$$d_n - (B - A)|\rho|^{n - \rho} = 0$$

ise bu taktirde \mathcal{TW}_p^η sınıfının n . katsayısı sınırsızdır. Dahası,

$$d_n - (B - A)|\rho|^{n_0 - \rho} < 0$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}_k$ varsa \mathcal{TW}_p^η sınıfının tüm katsayıları sınırsızdır (Dziok 2013).

Sonuç 5.3.1.7: $f \in \mathcal{T}^\eta(p, k)$ olsun. $f \in \mathcal{TW}_0^\eta$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{n=k}^{\infty} d_n |a_n| \leq B - A$$

olmasıdır (Dziok 2013).

Sonuç 5.3.1.8: $f \in \mathcal{TW}_0^\eta$ ise bu taktirde

$$a_n \leq \frac{B - A}{d_n} \quad n \in \mathbb{N}_k$$

dır.

$$f_{n,\eta}(z) = z^p - \frac{B-A}{d_n} e^{i(p-n)\eta} z^n \quad (z \in \mathcal{D}; n \in \mathbb{N}_k)$$

formundaki tüm fonksiyonlar ekstremum fonksiyondur (Dziok 2013).

Lemma 5.3.2.1: $f \in \mathcal{TW}_p^\eta$ olsun. $\{d_n\}$ dizisi

$$0 < d_k - (B - A)|\rho|^{k-p} \leq d_n - (B - A)|\rho|^{n-p} \quad (n \in \mathbb{N}_k)$$

eşitsizliğini sağlarsa

$$\sum_{n=k}^{\infty} |a_n| \leq \frac{B - A}{d_k - (B - A)|\rho|^{k-p}}$$

olur. Ayrıca,

$$0 < \frac{d_k - (B - A)|\rho|^{k-p}}{k} \leq \frac{d_n - (B - A)|\rho|^{n-p}}{n} \quad (n \in \mathbb{N}_k)$$

ise bu durumda

$$\sum_{n=k}^{\infty} n|a_n| \leq \frac{k(B - A)}{d_k - (B - A)|\rho|^{k-p}}$$

dır (Dziok 2013).

Sonuç 5.3.2.2: $\{d_n\}$ dizisi (4.22) eşitsizliğini sağlarsa

$$\sigma = \frac{k(B - A)}{d_k - (B - A)|\rho|^{k-p}}$$

olmak üzere $\mathcal{TW}_p^\eta \in N_\sigma$ olur (Dziok 2013).

Teorem 5.3.2.3: $f \in \mathcal{TW}_p^\eta$ ve $|z| = r < 1$ olsun. $\{d_n\}$ dizisi (4.21) eşitsizliğini sağlarsa

$$\phi(r) = f(x) = \begin{cases} r^p & (r \leq \rho), \\ \frac{d_k r^p + (B - A)r^k}{d_k - (B - A)|\rho|^{k-p}} & (r > \rho), \end{cases}$$

olmak üzere

$$\phi(r) \leq |f(z)| \leq \frac{d_k r^p + (B - A)r^k}{d_k - (B - A)|\rho|^{k-p}}$$

eşitsizliği elde edilir. Bunun yanı sıra (4.22) eşitsizliği geçerli ise

$$pa_p r^{p-1} - \frac{k(B-A)}{d_k - (B-A)|\rho|^{k-p}} r^{k-p} \leq |f(z)| \leq \frac{pd_k r^p + (B-A)r^{k-1}}{d_k - (B-A)|\rho|^{k-p}}$$

olur.

$f_{k,\eta}$ ekstremal fonksiyonları (4.19) biçiminde ve $f_0(z) = z$ olmak üzere sonuç kesindir (Dziok 2013).

Sonuç 5.3.2.4: $f \in \mathcal{TW}_p^\eta$ ve $|z| = r < 1$ olsun. Eğer $d_k \leq d_n (n \in \mathbb{N}_k)$ ise

$$r^p - \frac{B-A}{d_k} r^k \leq |f(z)| \leq r^p + \frac{B-A}{d_k} r^k$$

dır. Üstelik $nd_k \leq kd_n (n \in \mathbb{N}_k)$ ise bu durumda

$$pr^{p-1} - \frac{k(B-A)}{d_k} r^{k-1} \leq |f'(z)| \leq pr^{p-1} + \frac{k(B-A)}{d_k} r^{k-1}$$

olur.

$f_{k,\eta}$ ekstremal fonksiyonları (4.20) biçiminde olmak üzere sonuç kesindir (Dziok 2013).

KAYNAKLAR

- Başkan, T., 1996, *Komplek Fonksiyonlar Teorisi. İkinci Baskı*, Uludağ Üniversitesi, Bursa.
- Bieberbach, L. 1916, *Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln*. S.-B. Preuss. Akad. Wiss., 940-955.
- Cowen, C.C., *Fixed Points of Functions Analytic in the Unit Disk*, Conference on Complex Analysis, University of Illinois, May 22, 2010.
- Duren, P. L., 1983. *Univalent Functions*, 259. Springer, 378 p, New York, USA.
- Duren, P.L. and McLaughlin, R., 1972. Two-slit mappings and the Marx conjecture. *Michigan Math. J.*, 19, 267-273.
- Dziok, J. *Classes of multivalent analytic and meromorphic functions with two fixed points*, Fixed point Theory and Application, 2013.
- Gonzalez, M.O., 1992. *Complex Analysis Selected Topics*, Marcel Dekker Inc., Madison Avenue, New York.
- Goodman, A. W., 1983, *Univalent Functions*, Mariner Publishing Company Inc, USA
- Goodman, A.W., 1983a. *Univalent Functions*. Mariner Publ. Co., Tampa, FL, vol.I, 246 p, Florida, USA
- Graham, I. and Varolin, D., 1996, Bloch Constant in One and Several Variables, *Pacif. J. Math.*, 174, 347-357.
- Gronwall, T. H., 1914|15, Some Remarks on Conformal Representation, *Ann. Math.*, 16, 72-76.
- Kaplan, W. *Close-to-convex schlicht functions*, *Michigan Math. J.* 1 (1952), 169-185 (1953). MR 14, 966.
- Koebe, P., 1907, *Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven*. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl.*, 191-210.
- Kulkarni S.R. And Naik U.H. *A new class of univalent functions with negative coefficients with two fixed points*, Department of Math., Willingdo (Maharashtra), Received 19 April 1995; accepted 17 January 1996.
- Miller, S.S. and Mocanu, P., 2000. *Differential subordinations: theory and applications*, 225. CRC, 459 p, New York, USA.
- Owa, S., 1978. On the distortion theorems. I. *Kyungpook Math. J.*, 18 (1), 53-59.
- Pilat, B. *Sur une classe de fonctions normales univalentes dans le cercle unité*, *Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A* 17 (1963), 69-73 (1965). MR 33 #2803
- Schild, A. *On a class of schlicht functions in the unit circle*, *Proc. Amer. Math. Soc.* 5 (1974), 115-120. MR 15, 694.
- Silverman, H. *Trans. Am. Math. Soc.* 219 (1976), 387-95.
- Silverman, H. *Univalent functions with negative coefficients*, *Proc. Amer. Math. Soc.* 51 (1975), 109-116.
- Uralegaddi B. A. And Somanatha C., *Tamkang J. Math.* 24 (1) (1993), 57-66.

ÖZGEÇMİŞ

1988 yılı Kars doğumlu olan Fatih ERTAŞ, ilk, orta ve lise öğrenimini İstanbul'da tamamladı. 2007 yılında kayıt yaptırdığı Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2010 yılında mezun oldu. 2012 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başladı ve halen yüksek lisans eğitimine devam etmektedir. 2013 yılında Türk Silahlı Kuvvetlerinde Matematik öğretmeni olarak göreve başladı. Halen Türk Silahlı Kuvvetlerinde görevine devam etmekte olup, evlidir.