TÜRKİYE CUMHURİYETİ
ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
EKONOMETRİ ANABİLİM DALI

BULANIK MATRİSLER VE BULANIK MARKOV ZİNCİRLERİ

Berna UZUN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ADANA/2015

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
EKONOMETRİ ANABİLİM DALI

BULANIK MATRİSLER VE BULANIK MARKOV ZİNCİRLERİ

Berna UZUN

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ADANA/2015

Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Müdürlüğüne;

Bu çalışma, jürimiz tarafından Eğitim Bilimleri Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL
(Danışman)

Üye:

Üye:

ONAY
Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim elemanlarına ait olduklarını onaylarım.
……/……/2015

Prof. Dr. Yıldırım Beyazıt ÖNAL
Enstitü Müdürü

NOT: Bu tezde kullanılan ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu'ndaki hükümlere tabidir

ÖZET

BULANIK MATRİSLER VE BULANIK MARKOV ZİNCİRLERİ

Berna UZUN

Yüksek Lisans Tezi, Ekonometri Anabilim Dalı
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL
Ocak 2015, 63 sayfa

Belirsiz bir ortamda sağlıklı kararlar vermede klasik mantık kuralları yetersiz kalmıştır. Bulanık mantık böyle bir durumla karşılaşıldığında daha sağlıklı kararlar verilmesini sağlayan bir sistemdir. Bu çalışmada bulanık küme mantığına dayanan bulanık matrisler ve bulanık Markov zincirleri incelenmiş olup, sonlu ve sonsuz ufka sahip belirsizsizliğin olduğu süreçlerde etkili karar vermede kullanılan yöntemler araştırılmıştır. Bunun yanında bulanık matrislerin ve bulanık Markov matrislerinin cebirsel özellikleri araştırılmıştır. Ayrıca bazı özel koşullar altında bu matrislerin yakınsama durumları incelenmiş ve bu matrisler birbirleriyle karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Bulanıklık, bulanık matrisler, Markov zincirleri, bulanık Markov zincirleri, yakınsama.

ABSTRACT

FUZZY MATRİX AND FUZZY MARKOV CHAINS

Berna UZUN

Master Thesis, Department of Econometrics
Supervisor: Assistant Prof. Dr. Ersin KIRAL
January 2015, 63 pages

The rules of classical logic is insufficient in making healty decisions in an unclear environment. Fuzzy logic is a system that provides making more healty decisions when facing such a situation. In this work, fuzzy matrices based on fuzzy set logic and fuzzy Markov chains was examined and methods used in making effective decision which in processes that there is an uncertainty with finite and infinite horizon investigated. Furthermore, algebraical properties of fuzzy matrices and fuzzy Markov matrices have been investigated. Also, convergence of these matrices has been studied under some certain circumstances and compared with each other.

Keywords: Fuzzy, fuzzy matrix, Markov chains, fuzzy Markov chains, convergence.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam süresince bilgi ve birikimlerini benimle paylaşan, bana değerli zamanını ayıran, akademik desteğiyle birlikte manevi desteğini de gördüğüm saygıdeğer hocam ve tez danışmanım Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL’ a bana kendisiyle çalışma fırsatı tanıdığı için teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca tüm eğitim hayatım süresince bana yol gösteren bütün öğretmenlerime teşekkür ederim.

Hayatımın her döneminde büyük desteklerini gördüğüm aileme, özellikle bana pozitif enerji veren sevgili annem Müzehher UZUN’ a, beni maddi ve manevi olarak her zaman destekleyen sevgili babam Mehmet UZUN’ a, bana hayatımın her alanında her zaman ilham veren, beni destekleyen kız kardeşim Dr. Dilber Uzun’ a ve yakın dostum İlker Özşahin’ e minnet ve şükranlarımı sunarım.

Berna UZUN

Adana-2015

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM III

BULANIK MATRİSLER

BÖLÜM IV
MARKOV ÖZELLİĞİ VE MARKOV SÜREÇLERİ

BÖLÜM V
BULANIK MARKOV MATRİSLERİ

KISALTMALAR LİSTESİ

Ü.F. = Üyelik Fonksiyonu

TABLOLAR LİSTESİ

Sayfa

ŞEKİLLER LİSTESİ

BÖLÜM I

GİRİŞ

Belirsiz bir ortamda en doğru kararın verilmesi oldukça zor bir iştir. İnsanların içinde bulundukları belirsiz durumların ifade edilmesinde ve böyle durumlarda beliren problemlere uygun çözümler geliştirilmesinde matematik ve olasılık teorileri yeterli olmamıştır. Matematikte bu boşluğun giderilmesi için yıllardan beri belirsizlik analizi ve modellemesi ile ilgili araştırmalar yapılmış ve bu konu zamanla araştırmacıların oldukça ilgisini çeken bir konu haline gelmiştir. Bulanık Mantık uygulamalarının yanı sıra, Bulanık Mantık temellerine dayanan Bulanık Markov Analizi de günümüzde, uzman kişilerin belirsizlik altında strateji belirlemelerinde yararlandıkları önemli bir yöntem haline gelmiştir.

‘‘Bulanık Mantık’’ kavramı ilk kez Azeri Prof. Dr. Lütfi Askerzade’ nin 1965’ te yayınladığı ‘‘Bulanık Kümeler’’ (Fuzzy Sets) adlı makalesinde kullanılmıştır. Bu makalede Zadeh, bulanık mantığın temel özelliklerini açıklamış, bulanıklık veya belirsizlik durumlarının matematiksel olarak belirlenebilmesi için bulanık kümeler teorisini tanımlamış ve insanların düşünce sistemindeki farklılıkları, hedeflerindeki belirsizlikleri bulanıklık kavramı ile açıklamıştır.

Günümüzde; matematik, ekonomi, fizik, istatistik, tıp, sosyal bilimler ve mühendislik gibi birçok alanda ortaya çıkan problemlerin çözümünde, matrislerden yararlanılır. Fakat bazı belirsizlik durumlarında, problemlerin çözümü için gereken veriler genellikle belirsiz veya bulanık olduğundan, bu tür problemlerin çözümlenmesinde klasik matrislerden yararlanılması uygun değildir. Bu nedenle, bulanık ilişkilerin matematiksel olarak ifade edilebilmesi için bulanık küme teorisine dayanan bulanık matrislerden yararlanılır. Özetle: bulanık matrisler çeşitli bulanık sistemlerin modellenmesi ve çözümlenmesi amacıyla oluşturulurlar ve son zamanlarda bulanık matrislerin bilimsel ve teknolojik gelişmelerdeki rolü oldukça önemlidir.

Thomson 1977’ de ‘‘Convergence of powers of a fuzzy matrix’’ adlı makalesinde ilk kez bulanık matrislerin tanımını yaparak karesel bulanık matrislerin kuvvetleri hakkında da bazı incelemelerde bulunmuş ve bu matrislerin yakınsak olduğu durumlar hakkında bazı sonuçlara varmıştır. Kim (1978) karesel bulanık matrislerin determinantını tanımlamış ve devam eden yıllarda da bu konu üzerinde detaylı değerlendirmelerde bulunmuş olup (1988) idempotent bulanık matrisler üzerine önemli sonuçlar sunmuştur. Ovehinnikov (1981) ise bulanık ilişkilerin bulanık küme teorisine dayanan bulanık matrislerle temsil edilmeleri önerisinde bulunmuştur. Bu konuda yayınlanan bu ilk makalelerin ışığında Hashimoto (1983), Kolodziejezyk (1988), Kandel (1996) gibi birçok bilim adamı da bulanık matrislerin kuvvetleri dizisi ve yakınsamaları üzerine önemli çalışmalar yapmışlardır. Bunlarla birlikte Hasimoto (1985), bulanık matrislerin geçişliliği konusu üzerinde de önemli değerlendirmelerde bulunmuştur.

Markov Analizi terimi ise dinamik bir sistemin herhangi bir andaki davranışının incelenmesi ile, bu sistemin geleceğe yönelik davranışlarının tahmin edilmesinde kullanılan olasılığın özel bir tekniğidir. Bu yöntem, ilk kez kapalı bir kap içerisinde gaz moleküllerinin davranışlarının gerçeğe en yakın şekilde tahmin edilmesi amacıyla kullanılmış olup 20. yüzyılın başlarında sözü edilen tekniği ilk kez kullanan Rus matematikçi Andrei Andrievich Markov’ un (1856-1922) anısına adlandırılmıştır.

Klasik Markov zincirlerinin bulanık olasılıklara dayanan bir algısı olarak belirlenen Bulanık Markov Zincirleri ilk kez Kruse, Buck-Emden ve Cordes’in 1987’ de yayınladıkları makalede tanıtılmıştır. Bu çalışma paralelinde Yoshida 1994’ te yayınladığı makalesinde genel sonlu durum uzayı ve geçiş olasılıkları değerleri ile birlikte bulanık Markov süreci oluşturmuştur. Zadeh ise 1998’ de yayınladığı makalesinde bulanık Markov zincirlerinin bulanık Markov algoritmalarıyla uygulanabileceğini göstermiştir. Tüm bu çalışmalar, dinamik sistemlerde belirsizlik altında optimal kararın verilmesinde önemli gelişmelere ve uygulamalara ışık tutmuştur.

1.1. Araştırmanın Konusu

Bu tez çalışmasının içeriği genel olarak: bulanık mantık kavramı, bulanık kümeler ve bulanık matrisler, bulanık matrislerin yakınsamaları için gereken koşullar ve bazı özel bulanık matrisler için yakınsama durumları ile birlikte klasik Markov matrisleri, bulanık olasılıklara dayanan bulanık Markov matrisleri ve yakınsama koşulları konularından oluşmaktadır.

1.2. Araştırmanın Amacı

Bu çalışmada, belirsiz ortamlarda dinamik sistemler için belirlenmiş olan bulanık matrislerin ve bulanık Markov matrislerinin cebirsel özelliklerinden yararlanılarak yakınsama koşullarının incelenmesi ve bu matrislerin cebirsel açıdan karşılaştırılmaları amaçlanmıştır.

Ele alınan örnekler klasik Markov zincirleri ve bulanık Markov zincirlerine göre değerlendirilecektir.

1.3. Araştırmanın Önemi

Bulanık mantık; belirsizlik altında strateji geliştirme ve uygun kararların alınmasında yararlanılan önemli bir yöntem olup bireylerin düşünce sistemindeki farklılıklar, hedeflerindeki belirsizlikler bulanıklık kavramı ile açıklanır. Bulanık mantığa dayanan düşünce sisteminde, “doğru” veya “yanlış” gibi kesin yargılardan oluşan iki değerli klasik (Aristo) mantık sisteminin aksine, kesin değerler yerini yaklaşık değere bırakır. Örneğin; klasik kümelerdeki uzun-kısa, soğuk-sıcak, hızlı-yavaş gibi ikili ifadeler, bulanık bir kümede önlerine ‘‘biraz, az, orta, biraz fazla, çok fazla’’ gibi sıfatlar alarak dereceli bir biçimde ifade edilirler. Bu durum, bulanık mantık çerçevesinde ifade edilen yargıların, klasik kümelere göre daha esnek bir biçimde ifade edildiğinin ve belirsizliklere önemli ölçüde açıklık getirdiğinin göstergesidir. Bu kavram ilk yıllarda bilim çevrelerince yadırganmış, fakat 1970’ lerde, özellikle Japon bilim adamlarının bulanık mantık kuramını bazı mühendislik uygulamalarında kullanmaya başlamaları ve önemli başarılar elde etmeleriyle birlikte kurama olan ilgi dünya çapında artmıştır.

Markov Analizi, belirsiz ortamlarda dinamik sistemlerin gelecekte bulunabileceği durumların tahmininde kullanılan güçlü bir tahmin etme tekniği olup, bu teknik; fizik, biyoloji, ekonomi ve daha birçok alanda uygulama alanı bulmuştur.

Bulanık kümelere dayanan sistemlerin modellenmesi ve belirsiz ilişkilerin belirlenmesinde ise bulanık matrisler kullanılmaktadır. Bu gibi sistemlerin gelecek adımlarda bulunabileceği durumlar genellikle bulanık matrislerin kuvvetlerinin hangi formda olduğuna bağlıdır. Bu nedenle karesel bulanık matrislerin ve karesel bulanık Markov matrislerinin hangi koşullar altında yakınsadığının belirlenmesi oldukça ilginç bir konudur.

Bulanık mantığa dayanan, Bulanık Markov Modeli ise dinamik sistemlerde, belirsizlik altında optimal kararın belirlenmesinde kullanılan önemli ve çok yeni bir modeldir. Bu sebeple araştırmacıların oldukça ilgisini çekmektedir.

1.4. Arastırmanın Kapsamı

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde: çalışmanın konusu, amacı, önemi ve kapsamı açıklanmıştır. İkinci bölümde: bulanık mantık tanımlanmış ve bulanık mantık temellerine dayanan bulanık kümelere ve bulanık kümelerin cebirsel özelliklerine yer verilmiştir.

Çalışmanın üçüncü bölümünde: bulanık matrisler tanımlanmış, bulanık matrislerin cebirsel özellikleri ve bulanık matrislerin bazı koşullar altında yakınsama durumları incelenmiştir. Dördüncü bölümde: Markov özelliği, Markov süreci kavramları, klasik Markov matrisleri ve bu matrislerin denge durumları incelenmiştir. Beşinci bölümde: bulanık Markov matrisleri tanımlanmış, bulanık Markov matrislerinin cebirsel özellikleri ve yakınsama durumları incelenmiş. Çalışmanın son bölümü olan altıncı bölümde ise klasik Markov matrisleri ve bulanık Markov matrisleri ile ilgili karşılaştırma yapılmış ve bazı değerlendirmelerde bulunulmuştur.

BÖLÜM II

BULANIK KÜME

Bu bölümde: bulanık mantık kavramı ile birlikte bulanık mantığın avantajları, dezavantajları ve uygulama alanları incelenmiştir. Ayrıca, bulanık mantık temellerine dayanan bulanık kümelere ve bulanık kümelerin cebirsel özelliklerine yer verilmiş olup, bulanık mantık uygulama sürecinin en önemli kısmını oluşturan üyelik fonksiyonları da açıklanmıştır ve bu fonksiyonların sahip olmaları gereken özelliklerden söz edilmiştir.

2.1. Bulanık Mantık ve Bulanık Küme Kavramı

Gerçek hayatta, evren sürekli değişim halindedir. Bu bakımdan çoğu zaman çevremizde görülen olaylar hakkında kesin yargılarda bulunmak ve bazı durumlar arasında kesin ayrımlar yapmak her zaman mümkün değildir. Örneğin; hava sıcaklıkları düşünüldüğünde, sıcak hava ile soğuk hava arasında kesin ayrımı oluşturan herhangi bir sıcaklık değerinden bahsetmek mümkün değildir. Bu iki durum arasında dereceli olarak bir geçiş vardır, aynı şekilde doğada daha birçok olayda durumlar arasında böyle bir geçiş süreci yaşanır. Klasik küme mantığı ile durumlar veya nesneler arasında böyle bir geçişi matematiksel olarak ifade etmek mümkün değildir. Bulanık mantığın temellerinin atılmasıyla birlikte bu eksiklik giderilmiştir.

Bulanık mantığın dayandığı temeller ve bulanık küme kavramı, giriş bölümünde de belirtildiği gibi Zadeh tarafından matematiksel modelleme yaklaşımı biçiminde geliştirilmiştir. Buna göre bulanık küme, klasik küme elemanlarının derecelendirilmesi ile elde edilen klasik küme kavramının genelleştirilmiş bir halidir. Bu sebeple bulanık kümelerde herhangi bir nesnenin, herhangi bir kümenin elemanı olup olmadığı dereceli olarak ifade edilir. Bu durum, bulanık kümelerden yararlanılarak klasik kümelere göre daha esnek ve etkin yargılara ulaşılmasını sağlamaktadır. Bununla birlikte, bulanık kümeler dilden kaynaklanan farklılıkların veya belirsizliklerin matematiksel olarak ifade edilmesini de sağlamıştır. Bu sebeplerden dolayı, belirsiz ortamlarda karar vericilerin, olaylara bulanık mantık çerçevesinden bakmaları klasik mantığa göre daha sağlıklı kararlar vermelerini sağlar.

Bulanık mantığın ve bulanık kümelerin başlangıçta sadece bir fikir olarak ortaya atılması, matematiksel olarak dayandırıldığı temellerin henüz açıklanmamış olması, bulanıklığın olumsuz bir anlama sahip olması ve yüzyıllardır uygulanan klasik mantığın dışına çıkılmasının yadırganması sebepleriyle bulanık mantık, batıda bilim çevrelerince kabul görmemiştir. Bu sebeple bulanık mantık uygulamaları batıda oldukça yavaş geliştirilmiştir. Buna karşın, Zadeh ve araştırma grubu bulanık mantığı geliştirmeye devam etmişlerdir. Japonya' da ise bulanık mantık tamamen kabul görmüş olup matematikçilerin kabul edip etmemelerinden bağımsız olarak ürünlere kolaylıkla uygulanmış ve bulanık mantıktan yararlanılarak oluşturulan ürünlerde önemli gelişmeler elde edildiği görülmüştür. Japonların, 80' lerin başlarında bulanık mantığın uygulamalarına bağlı olarak birçok üründe elde ettikleri başarılar; 80' lerin sonlarına doğru Amerika' nın bulanık mantığı tekrar gözden geçirmesine sebep olmuştur. O zamandan beri doğuda elde edilen bulanık mantık alanındaki gelişmeleri yakalamak için Amerika' da araştırmacılar tarafından yoğun çalışmalar yapılmaktadır.

Bulanık Mantık kullanılarak elde edilen ilk başarılı uygulamalar:

- Mamdani ve Assilian 1975' te bir buhar makinesinin kontrolünü bulanık sistem modeli ile sağladılar.
- "Eğer türbin hızı çok hızlı artıyorsa ve basınç da çok düşükse, buhar vanasını biraz aç" şeklindeki mantıksal kurallar çerçevesinde bir sistem oluşturmuşlardır.
- 1980' de bir ticari faaliyet olarak ilk kez Danimarka' da bulunan bir çimento fabrikasının işletilmesi ve kontrol edilmesinde kullanılmıştır.
- 1980' lerin başlarında Japonya, Singapur ve Kore gibi bazı uzak doğu ülkelerinde beyaz eşya üretiminde, metro ve şirket işletimi gibi alanlarda bulanık mantık uygulamalarından yaygın olarak yararlanılmıştır.
- Hitachi firmasının 1987' de yapmış olduğu Sendai Metrosu' nun yapımında, bulanık mantık sisteminden yararlanılmış ve bu sistemle elde edilmiş trenin istenen konumda durması üç kat daha iyi olup kullanılan enerji ise %10 daha azdır.
- Yamaichi Securities' in oluşturduğu bulanık mantığa dayanan uzman sistem, 1988' in Ekim ayında kara Pazar olarak bilinen Tokyo Borsası' nda yaşanan krizi 18 gün önceden öngörmüştür.

Bu şekildeki bulanık mantığa dayanılarak geliştirilen ilk başarılı uygulamalar bulanık mantığa olan ilgiyi dünya çapında arttırmıştır ve bu alanda uluslararası bir çalışma ortamının yaratılması amacıyla 1989' da SGS, Thomson, Omron, Hitachi, NCR, IBM, Toshiba ve Matsuhita gibi dünyanın önde gelen firmalarının da öncülüğünde toplam 51 dev firmanın destekleriyle LIFE (Laboratory for Interchange Fuzzy Engineering) laboratuvarları kurulmuştur.

Bulanık kümeler matematiksel olarak ifade edilirse: $X \neq \{\}$, evrensel bir küme ve $A: X \rightarrow [0,1]$ kapalı aralığında sonsuz sayıda değerler alabilen bir fonksiyona, X üzerinde bir bulanık küme denir. Bir başka ifadeyle, bir kümenin her elemanı; o kümeye olan üyelik (aitlik) derecesini gösteren $[0, 1]$ kapalı aralığındaki değerlerle birlikte ifade edilirse, bu kümeye bulanık küme denir. Bulanık bir kümede her bir nesnenin, bir üyelik derecesi vardır.

Herhangi bir bulanık kümede, üyelik dereceleri birbirine eşit nesneler de bulunabilir. Üyelik dereceleri, üyelik fonksiyonundan yararlanılarak elde edilirler.

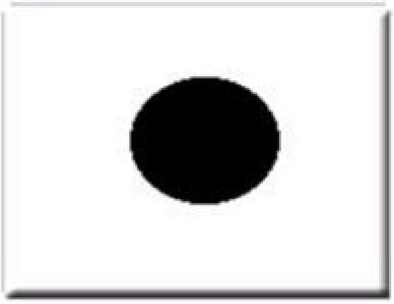
Tablo 1.

Klasik Mantık ve Bulanık Mantık Arasındaki Temel Farklılıklar

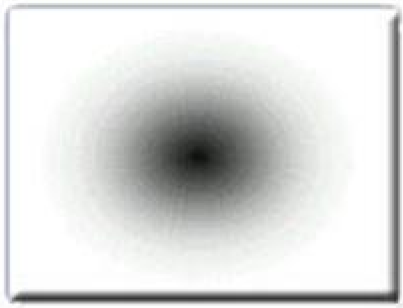
Klasik Mantık	**Bulanık Mantık**
A veya A Değil	A ve A Değil
Kesin	Kısmi
Hepsi veya Hiçbiri	Belirli Derecelerde
0 veya 1	0 ve 1 Arasında Süreklilik
İkili Birimler	Bulanık Birimler

Kaynak: Çobanoğlu, 2000, s. 3

Tablo 1' de de görüldüğü üzere, klasik mantıkta bir eleman bir kümenin elemanıdır ya da değildir; yani klasik kümeler ikili değerlerle ve kesin yargılarla ifade edilirler. Fakat bulanık mantık ile oluşurulan kümelerde, bir eleman bulanık bir kümenin elemanı olabilir, kısmen elemanı olabilir ya da hiç elemanı olmayabilir. Buna paralel olarak bulanık bir küme ifade edilirken $[0, 1]$ kapalı aralığındaki, sürekli bulanık sayılardan yararlanılır.



Şekil 1. Klasik küme



Şekil 2. Bulanık küme

Kaynak: Vesa, 2004

Şekil 1 ve Şekil 2' de görüldüğü üzere, klasik kümeler kesin sınırlarla çevrili olup, bulanık kümelerde ise bu sınırlar belirgin değildir. Bu durum iki küme arasındaki en önemli farklardan biridir.

2.2. Bulanık Mantığın Uygulama Alanları

Son yıllarda araştırmacıların oldukça ilgisini çeken bulanık mantık: doğrusal ve doğrusal olmayan kontrol mekanizmaları, finansal sistemler, işletme araştırmaları, veri analizleri gibi birçok alanda uygulama alanı bulmuştur. Yapılan çalışmalar bulanık mantığın: mühendislik, fizik, biyoloji, toplum bilimi, psikoloji, yöneylem araştırması, karar vermede, borsa analizlerinde ve ekonomi başta olmak üzere her alanda dinamik sistemlerin modellenmesinde kullanılabileceğini göstermektedir. Tablo 2' de ise bulanık mantığın bazı uygulama alanları gösterilmektedir.

Tablo 2.

Bulanık Mantığın Uygulama Alanları

Uygulama Alanı	Açıklama
Klimalar	Ortam şartlarına göre en iyi çalışma durumunu belirler, odadaki kişi yoğunluğu arttığında soğumayı arttırır.
Çamaşır Makineleri	Çamaşırın kirliliğine, kumaş cinsine, ağırlığına göre uygun yıkama programı seçer.
Elektrikli Süpürge	Süpürülen yerin kirliliğine ve durumuna göre motor gücünü en uygun şekilde ayarlar.
Su Isıtıcısı	Kullanılan suyun miktar ve sıcaklığına göre ısınma derecesini ayarlar.
SLR fotoğraf makineleri	Ekrandaki nesne sayısı arttığında en iyi odak ve aydınlatmayı belirler.
ABS fren sistemi	Tekerleklerin kilitlenmeden fren yapmasını sağlar.
Televizyon	Ekranının parlaklığını, rengini ve kontrastını ayarlar.
Sendai metro sistemi	Güçten tasarruf sağlar, hızlanma ve yavaşlamayı ayarlayarak rahat bir yolculuk sağlar.
Çimento Sanayi	Değirmende ısı derecesini ve oksijen oranını ayarlar.
Otomobil aktarma organı	Arabada bulunan yük miktarı ve kullanıma göre en iyi dişli sistemini seçer.
Video kayıt cihazı	Çekim sırasında, elle tutulmadan dolayı oluşabilecek sarsıntıyı ortadan kaldırır.
Asansör denetimi	Yolcu trafiğine göre bekleme zamanını ayarlar.

Kaynak: Göksu, 2008, s. 7

2.3. Bulanık Mantığın Avantajları ve Dezavantajları

Bulanık mantığın en önemli avantajlarından biri, klasik mantıkla çözümlenemeyen ve belirsizlik içeren sistemlerin modellenmesinde kullanılmasıdır. Aynı zamanda bulanık mantıkla birlikte sözel yargıların matematiksel olarak ifade edilmesi sağlanmıştır. Bulanık mantık, eksik bilgiler içeren veya şüpheli kaynaklardan elde edilen verilerden bile yararlanılarak modelleme yapılabilen bir mantık sürecidir. Uygulaması için çok karmaşık modellere gerek olmayıp; bu durumun tam aksine karmaşık durumların basit modellerle ifade edilebilmesine olanak sağlar. Bu sebeple maliyetinin de ucuz olması ve uygulayıcıya zaman kazandırması bulanık mantığın en temel avantajlarındandır. Bunlara ek olarak bulanık mantık uzman kişilerin bilgi ve deneyimlerinden yararlanılmasına da olanak sağlar. Bulanık mantık, sistemlerin esnek bir şekilde modellenmesini sağlar ve bu modeller; zamanla değişen ortam şartlarına göre kolayca güncellenebilir.

Bulanık mantık uygulamalarının en belirgin dezavantajı ise, üyelik fonksiyonlarının uzman kişilerin gözlemlerinden ve deneyimlerinden yararlanılarak herhangi bir kurala dayanmadan, benzetme çalışmalarıyla, keyfi bir şekilde belirlenmesi olup bu durumun kolayca hata yapılmasına sebebiyet verebilmesidir (Göksu, 2008, s. 8).

2.4. Üyelik Fonksiyonları

Tanım 2.4.1.

Bulanık bir kümede, her elemanın üyelik derecesinin elde edilmesinde yararlanılan fonksiyona üyelik fonksiyonu denir. Klasik kümeler için üyelik dereceleri 0 veya 1 olup; bulanık kümeler için $[0,1]$ kapalı aralığında değerlerden oluşur. Herhangi bir bulanık küme ifade edilirken sonsuz sayıda farklı üyelik fonksiyonu kullanılabilir. Üyelik fonksiyonu, μ(x) sembolü ile gösterilir. Bu fonksiyon her küme için farklılık gösterir. Bulanık bir küme elemanları aynı anda farklı sınıflara dereceli olarak ait olabilirler.

Örnek 2.4.1.

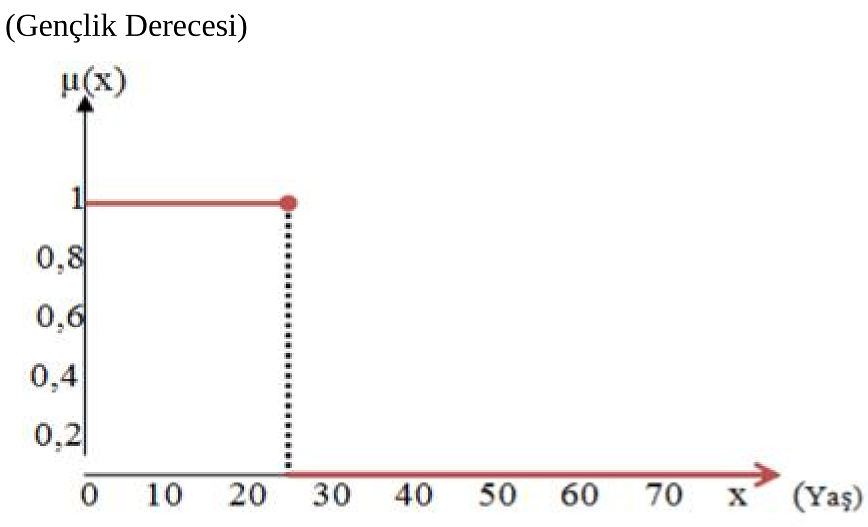
Genç insanların oluşturduğu klasik bir küme:

$A = \{x\colon x\ yaşı\ 25\ ten\ küçük\ olan\ insanlar\}$ şeklinde gösterilsin.

$\mu_A(x)$; A kümesinin üyelik fonksiyonu olmak üzere,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \le 25\ ise \\ 0, & aksi\ halde \end{cases} \tag{1}$$

olarak tanımlanır. (1)' de verilen $\mu_A(x)$ fonksiyonunun grafiği Şekil 3' te gösterilmiştir.



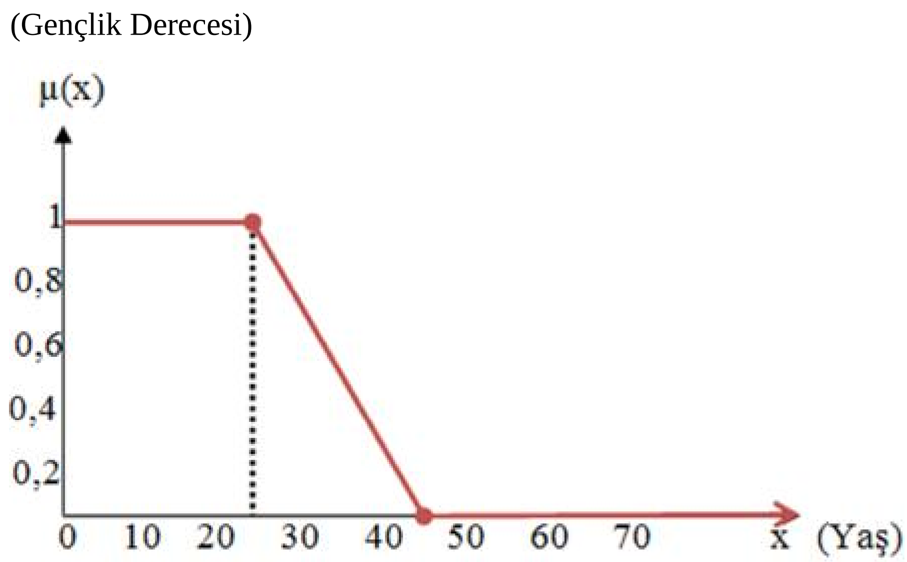
Şekil 3. Klasik kümelerde Ü.F. grafiğine bir örnek

Şekil 3' te, insanların 0-25 yaş aralığında genç; 25 yaşından sonra ise genç olmadıkları açıktır. Bu durumda, klasik küme mantığı ile 26 yaşındaki bir kişinin genç sınıfına ait üyelik derecesi 0 olup bu kişi artık genç değildir.

Bulanık kümelerde ise 26 yaşındaki bir kişi için de belirli bir üyelik derecesi atanır ve bu kişi belirli bir üyelik derecesiyle genç kabul edilir. *A* genç insanların oluşturduğu bulanık bir küme olarak tanımlanır ise, üyelik fonksiyonu:

$$\mu_A(x)=\begin{cases} 1, & x \leq 25 \\ \frac{45-x}{20}, & 25 < x < 45 \\ 0, & x \geq 45 \end{cases} \tag{2}$$

şeklinde tanımlanır. (2)' de verilen $\mu_A(x)$ fonksiyonunun grafiği ise Şekil 4' te gösterilmiştir.



Şekil 4. Bulanık kümelerde iki parametreli Ü.F. grafiğine bir örnek

Buna göre insanların 0-25 yaş aralığında genç; 25-45 yaş aralığında belirli derecelerde genç –kısmen genç- ve 45 yaşından sonra ise genç olmadıkları açıktır. Bu durumda bulanık küme mantığı ile 26 yaşında olan bir kişi:

$$\mu_A(26) = [(45-26)/20] = 0{,}95$$

üyelik derecesi ile önemli ölçüde genç sınıfına dahildir.

Üyelik fonksiyonunun tutarlı bir şekilde belirlenmesi ile birlikte bulanık bir sistemdeki belirsizlikler ortadan kalkar. Bu sebeple, bulanık bir durumda karar aşamasında en önemli adım, üyelik fonksiyonunun oluşturulması işlemidir.

Tanım 2.4.2.

Bulanık bir kümede, üyelik dereceleri 1 olan eleman, kümeye tam olarak aittir ve bu elemanların oluşturduğu altkümeye bulanık kümenin çekirdeği (core) denir (Şen, 2003).

$$CoreA = \{x\colon \mu_A(x) = 1\}$$

Tanım 2.4.3.

Bulanık bir kümede, üyelik dereceleri $(0, 1)$ açık aralığında olan elemanlar için kısmi aitlikten söz edilir ve bu elemanların oluşturduğu alt kümeye, bulanık kümenin destek kümesi (support) denir (Paksoy, Pehlivan ve Özceylan , 2013, s. 27).

$$SupA = \{x\colon 0 < \mu_A(x) < 1\}$$

Tanım 2.4.4.

Bulanık kümelerde üyelik fonksiyonunun 0.5' e eşit olduğu noktaya üyelik fonksiyonunun geçiş noktası (crossover) denir.

$$CrossoverA = \{x\colon \mu_A(x) = 0.5\}$$

Tanım 2.4.5.

Üyelik derecesinin en yüksek değerine ise bulanık kümede yükseklik denir (Ross, 1995).

Üyelik derecesi sıfıra eşit olan herhangi bir elemanın, bulanık kümeyle herhangi bir ilişkisi yoktur. Bulanık kümeler temel olarak üyelik fonksiyonlarına dayanmaktadır ve bu fonksiyonlar oluşturdukları grafik şekillerine göre aşağıda belirtildiği gibi birkaç farklı biçimde tanımlanmaktadırlar:

- İki parametreli artan üyelik fonksiyonu
- İki parametreli azalan üyelik fonksiyonu
- Üç parametreli artan üyelik fonksiyonu

- Üçgensel (Triangular) üyelik fonksiyonu
- Yamuk (Trapezoidal) üyelik fonksiyonu
- Çan şekilli üyelik fonksiyonu

(Göksu, 2008, s. 11).

Görüldüğü üzere, çok çeşitli üyelik fonksiyonları mevcuttur, fakat genelde en çok kullanılan üyelik fonksiyonları: üçgensel üyelik fonksiyonları ve yamuk üyelik fonksiyonları olduğundan dolayı burada yalnızca bu iki fonksiyon tanımlanmıştır.

2.4.1. Üçgensel Üyelik Fonksiyonları

Tanım 2.4.1.1.

Herhangi bir A bulanık kümesi, (a_1, a_2, a_3) gibi üç belirleyici değerden oluşur ve bu değerler için aşağıda belirlenen üç koşul sağlanır ise:

- a_1 ve a_2 arasında artan bir fonksiyon
- a_2 ve a_3 arasında azalan bir fonksiyon ve
- $a_1 \leq a_2 \leq a_3$
-

A, üçgensel bulanık sayılardan oluşur. $\mu_A(x)$ üyelik fonksiyonu ise en genel haliyle:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a_1 \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1}, & a_1 \leq x \leq a_2 \\ \dfrac{a_3 - x}{a_3 - a_2}, & a_2 \leq x \leq a_3 \\ 0, & x > a_3 \end{cases}$$

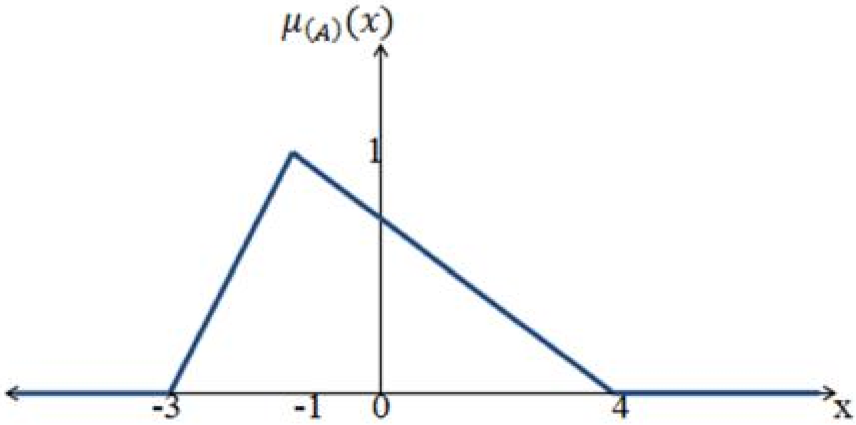
şeklinde tanımlanır. Bu şekilde tanımlanan bir $\mu_A(x)$ üyelik fonksiyonunun grafiği ise bir üçgen oluşturur ve $\mu_A(x)$ fonksiyonuna, üçgensel üyelik fonksiyonu denir (Gani ve Assarudeen, 2012).

Örnek 2.4.1.1.

$A = (-3, -1, 4)$ üçgensel bulanık sayılarının verildiği A bulanık kümesinin $\mu_A(x)$ üyelik fonksiyonu (3)' te verilmiştir:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < -3 \\ \dfrac{x+3}{2}, & -3 \leq x \leq -1 \\ \dfrac{4-x}{5}, & -1 \leq x \leq 4 \\ 0, & x > 4. \end{cases} \qquad (3)$$

$\mu_A(x)$’ in grafiği ise Şekil 5’ te gösterilmiştir:



Şekil 5. Üçgensel Ü.F. grafiğine bir örnek

2.4.2 Yamuk Üyelik Fonksiyonları

Tanım 2.4.2.1.

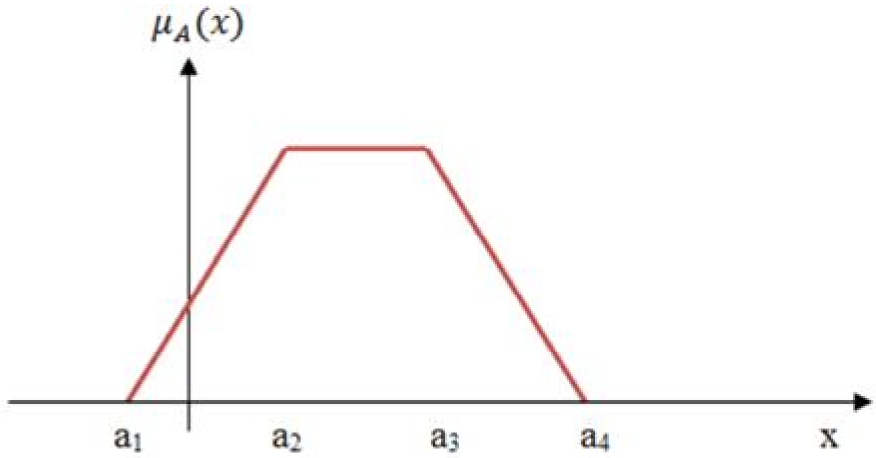
Herhangi bir A bulanık kümesi, $(a_1,\ a_2,\ a_3, a_4)$ gibi dört farklı belirleyici değerden oluşur ve bu değerler için aşağıda belirlenen dört koşul sağlanır ise:

- $a_1$ve a_2 arasında artan bir fonksiyon
- a_2 ve a_3 arasında sabit bir fonksiyon
- a_2 ve a_3 arasında azalan bir fonksiyon ve
- $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$

A, yamuksal bulanık sayılardan oluşur. $\mu_A(x)$ üyelik fonksiyonu ise en genel haliyle:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a_1 \\ \frac{x-a_1}{a_2-a_1}, & a_1 \le x \le a_2 \\ \frac{a_4-x}{a_4-a_3}, & a_3 \le x \le a_4 \\ 0, & x > a_4 \end{cases} \quad (4)$$

olarak tanımlanır. Bu şekilde tanımlanan bir $\mu_A(x)$ üyelik fonksiyonunun grafiği ise bir yamuk belirtir ve $\mu_A(x)$ fonksiyonuna, yamuk üyelik fonksiyonu denir.
Şekil 6' da bir yamuk üyelik fonksiyonu olan $\mu_A(x)$ fonksiyonu grafiğine bir örnek verilmiştir.



Şekil 6. Yamuk Ü.F. grafiğine bir örnek

Şekil 6' da görüldüğü üzere yamuk bulanık sayılarının oluşturduğu bulanık kümelerde, en az iki elemanın üyelik dereceleri 1 olmalıdır (Lootsma, 1997).

2.4.3. Üyelik Fonksiyonlarının Özellikleri

Bulanık bir kümeyi belirten üyelik fonksiyonlarının; normallik, dışbükeylik, monotonluk ve simetri özelliklerine sahip olmaları gerekmektedir.

2.4.3.1. Normallik

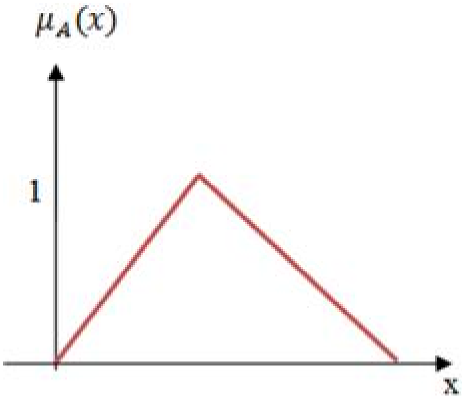
Tanım 2.4.3.1.1.

A bulanık bir küme olmak üzere, $\exists$ bir $x_i \in A$ için $\mu_A(x_i) = 1$ eşitliğinin sağlanması durumuna normallik özelliği denir.

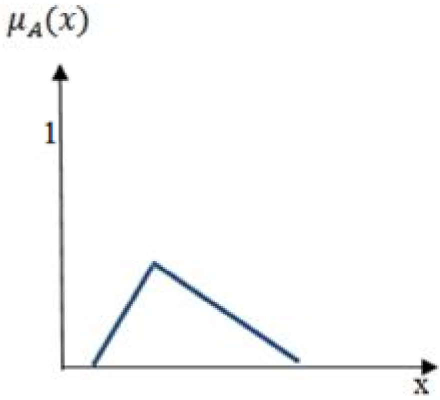
Tanım 2.4.3.1.2.

Normallik özelliğinin sağlanmadığı durumlarda bulanık küme, normalaltı (subnormal) bulanık küme olarak tanımlanır (Baykal ve Beyan, 2004).

Boş olmayan herhangi bir bulanık küme normalaltı ise, kümenin her elemanı en yüksek üyelik derecesine bölünerek küme normal hale getirilebilir (Pedrycz ve Gomide, 1998).



Şekil 7. Normal Ü.F. grafiği



Şekil 8. Normalaltı Ü.F. grafiği

Şekil 7' de normal Ü.F. ve Şekil 8' de normalaltı Ü.F. grafiğine örnekler verilmiştir.

2.4.3.2. Dışbükeylik

Tanım 2.4.3.2.1.

Herhangi bir A bulanık kümesinde, $\mu_A(x)$; $[0,1]$ kapalı aralığında aşağıdaki özelliklerden birini sağlar ise;

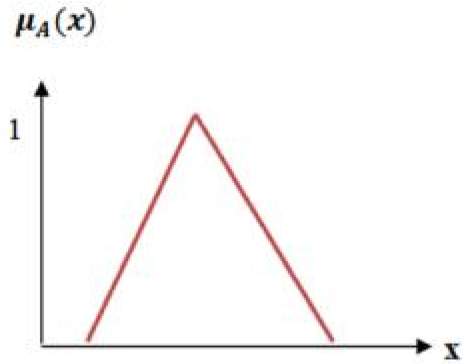
- sürekli artan fonksiyon
- sürekli azalan fonksiyon
- $\mu_A(c) = 1$ olan ilk c noktasına kadar sürekli artan; bu noktadan sonraki her durum için sürekli olarak azalan bir fonksiyon

A bulanık kümesi dışbükeydir (konvekstir) denir. Bu koşulun sağlanmadığı durumlarda üyelik fonksiyonundan bahsedilemez (Şen, 2003).

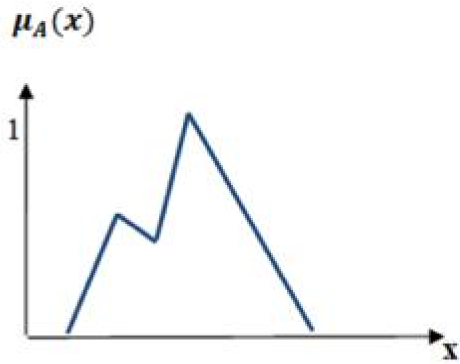
Başka bir ifadeyle, A; R de tanımlı bulanık bir altküme olmak üzere; x_1, $x_2 \in A$ ve her c $\in [0,1]$ için,

$$\mu_A\,(cx_1 + (1 - c)\,x_2) \;\geq\; min\,(\mu_A\,(x_1), \mu_A\,(x_2)) \tag{5}$$

koşulu sağlanır ise A bulanık kümesi dışbükeydir denir. (5)' te verilen işlemler bulanık mantık işlemlerinden yararlanılarak yapılır. A kümesinin tümleyeni ise içbükey olur.



Şekil 9. Konveks Ü.F. grafiği



Şekil 10. Konveks olmayan Ü.F. grafiği

Şekil 9' da konveks Ü.F. ve Şekil 10' da konveks olmayan Ü.F. grafiklerine örnekler verilmiştir.

2.4.3.3. Monotonluk

Tanım 2.4.3.3.1.

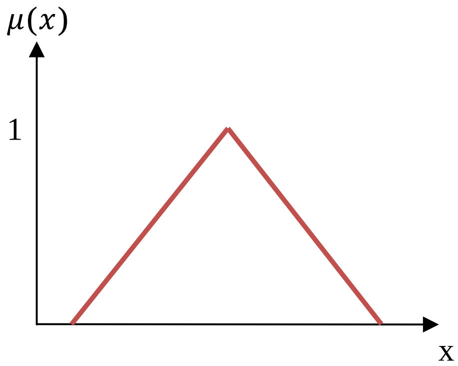
Herhangi bir nesnenin bulanık bir kümeye olan yakınlığı arttıkça üyelik fonksiyonu bire yaklaşır ve bu yakınlık azaldıkça üyelik fonksiyonu birden uzaklaşır ise üyelik fonksiyonu monotondur denir. Monotonluk özelliği göstermeyen herhangi bir bulanık kümeden bahsedilemez.

2.4.3.4. Simetri

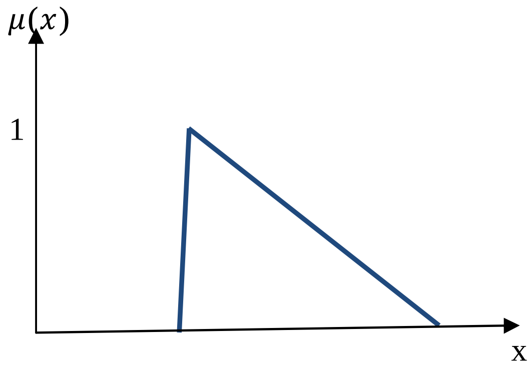
Tanım 2.4.3.4.1.

Bir bulanık kümenin sağında ve solunda bulunan herhangi iki nesnenin kümeye olan uzaklığı birbirine eşit iken, üyelik dereceleri de birbirine eşit ise, üyelik fonksiyonu simetriktir denir.

Üyelik fonksiyonlarının simetrik olma özelliği gerekli bir koşuldur, buna rağmen yapılan bazı uygulamalarda bu koşulun göz ardı edilmiş olduğu gözlenmiştir (Bezdek ve Pall, 1992).



Şekil 11. Simetrik Ü.F. grafiği



Şekil 12. Simetrik olmayan Ü.F. grafiği

Şekil 11' de konveks Ü.F. ve Şekil 12' de konveks olmayan Ü.F. grafiğine örnekler verilmiştir.

2.5. Bulanık Kümelerin Gösterimi

Tanım 2.5.1.

$X \neq \{\}$ evrensel kümesi üzerinde, herhangi bir A bulanık kümesi tanımlanmış olsun. Bu durumda her A bulanık kümesi; elemanlarının ve üyelik derecelerinin birlikte gösterildiği ikililer biçiminde ifade edilirler.

$her \quad x \in X$ için X evrensel kümesi sonlu ise:

$$A = \sum_{x_i \in X} \frac{\mu_A(x_i)}{x_i} \qquad \text{(kesikli biçim)} \tag{6}$$

sonlu değil ise:

$$A = \int_X \frac{\mu_A(x)}{x} \qquad \text{(sürekli biçim)} \tag{7}$$

şeklinde gösterilir veya A bulanık kümesi genel olarak:

$$A = \{(x, \mu_A(x)),\ x \in X\} \tag{8}$$

şeklinde gösterilir.

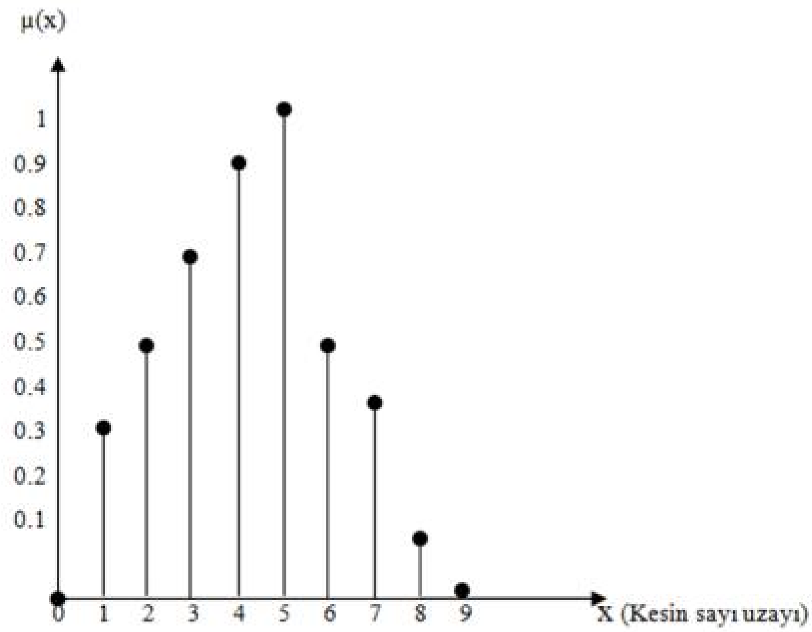
Burada Σ, $\int$, / ve + ifadeleri sembolik ifadelerdir. Σ, bulanık tekliklerin kesikli evrenlerde; $\int$ ise bulanık tekliklerin sürekli evrenlerde bir araya getirildiğini ifade eder.

‘/’ ayıracı, bulanık teklikleri birbirinden ayırmak için kullanılmıştır. ‘+’ ise bulanık tekliklerin bir araya geldiğini göstermektedir (Şen, 2001).

Örnek 2.5.1.

$$A = \frac{0}{0} + \frac{0,3}{1} + \frac{0.5}{2} + \frac{0.7}{3} + \frac{0.9}{4} + \frac{1}{5} + \frac{0.5}{6} + \frac{0.4}{7} + \frac{0.1}{8} + \frac{0}{9}$$

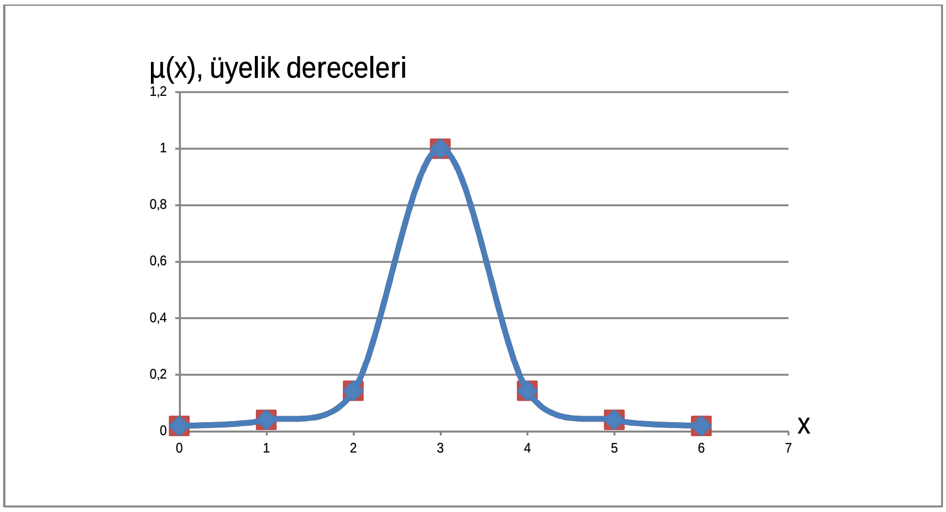
Yukarıda kesikli biçimde verilen A bulanık kümesi için kesin sayı uzay kümesi; $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ olup, X üzerinde çizilen üyelik fonksiyonu grafiği ise Şekil 13’ teki gösterilmiştir.



Şekil 13. Kesikli zamanlı bulanık küme Ü.F. grafiğine bir örnek

Örnek 2.5.2.

Sürekli biçimde tanımlanmış olan 3’ e yakın sayılar kümesini gösteren A bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu; $\mu_A(x) = \frac{1}{1+6(x-3)^2}$ olsun. Burada A, sürekli zamanlı bulanık bir küme olup $\mu_A(x)$’ in grafiği ise Şekil 14’ te gösterilmektedir.



Şekil 14. Sürekli zamanlı bulanık küme Ü.F. grafiğine bir örnek

2.6. Bulanık Kümelerde Cebirsel İşlemler

Klasik kümeler için tanımlı olan; birleşim, kesişim, tümleyen ve kartezyen çarpım gibi cebirsel işlemler bulanık kümeler için de aşağıdaki şekilde tanımlanır.

2.6.1. Boş Küme

Tanım 2.6.1.1.

Bulanık bir X kümesinde, $her\ a \in X$ için

$$\mu_X(a) = 0$$

ise, X' e boş küme denir.

2.6.2. Eşitlik

Evrensel bir X kümesinde, A ve B iki bulanık alt küme olmak üzere; her $x \in X$ için,

$$\mu_A(x) = \mu_B(x) \text{ ise } A = B$$

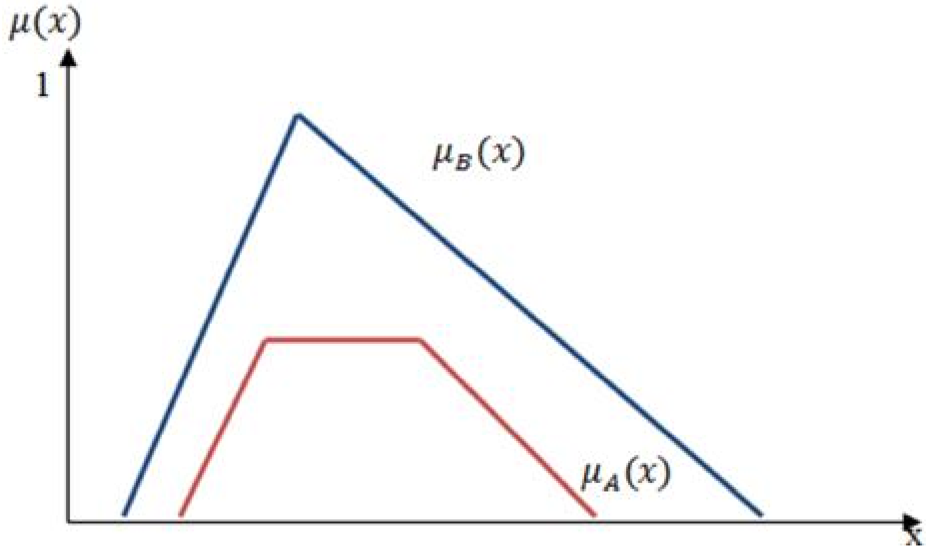
olur.

2.6.3. Kapsama

Evrensel bir X kümesinde, A ve B iki bulanık alt küme olmak üzere; her $x \in X$ için

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$$

ise, B kümesi; A kümesini kapsar ve aynı zamanda A kümesi; B kümesinin altkümesidir.



Şekil 15. Kapsama grafiği

Şekil 15, bulanık kümelerde kapsama grafiğine bir örnektir.

2.6.4. Tümleyen

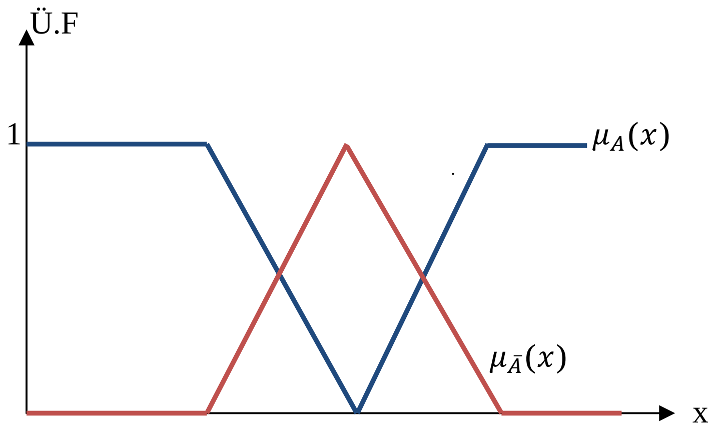
X evrensel bir küme ve A, bu kümenin bulanık bir altkümesi olmak üzere, A kümesinin tümleyeni; A', $\bar{A}$ veya A^c sembolleri ile gösterilir.Burada $her \;\; x \in X$ için, A' kümesinin elemanları;

$$\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

fonksiyonu ile belirlenir. Bununla birlikte, herhangi bulanık bir A kümesi için klasik kümelerden farklı olarak bazı durumlarda,

$$A \cap A' \neq 0$$

olduğu görülür.



Şekil 16. Tümleyen grafiği

Şekil 16, bulanık kümelerde tümleyen grafiğine bir örnektir.

2.6.5. Birleşim

Evrensel bir X kümesinde, A ve B iki bulanık alt kümeyi göstermek üzere, A ve B kümelerinin birleşimi, $\mu_{A\cup B}(x)$ sembolü ile gösterilir. $her\ \ x \in X$ için;

$$\mu_{A\cup B}(x) = maks\ \{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

olarak tanımlanır. Tanım gereği, A herhangi bir bulanık küme ve $B = \emptyset$ iken,

$$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x)$$

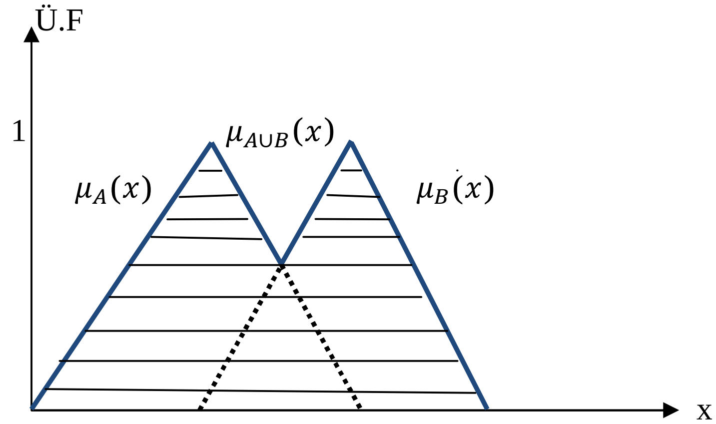
olur. $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ ise,

$$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) = \mu_B(x)$$

ve $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ ise,

$$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_B(x)$$

olur.



Şekil 17. Birleşim grafiği

Şekil 17, bulanık kümelerin birleşimi grafiğine bir örnektir. Ayrıca bulanık kümelerde ∪ işlemi birleşmeli olup; A, B ve C bulanık kümeleri için

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

olur.

2.6.6. Kesişim

Evrensel bir X kümesinde, A ve B iki bulanık alt kümeyi göstermek üzere *her* x∈X için, $\mu_{A\cap B}(x)$ kesişim kümesi;

$$\mu_{A\cap B}(x) = min\,\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

olarak tanımlanır. Tanım gereği, A herhangi bir bulanık küme ve $B = \emptyset$ iken,

$$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_B(x) = \emptyset$$

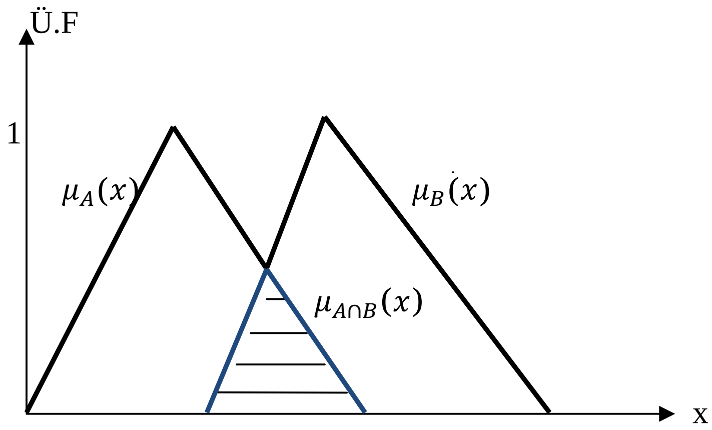
olur. $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ ise,

$$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) = \mu_B(x)$$

ve $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ ise,

$$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x)$$

olur. A ve B bulanık kümeleri ayrık iki küme ise, $A \cap B = \emptyset$ dir.



Şekil 18. Kesişim grafiği

Şekil 18, bulanık kümelerin kesişimi grafiğine bir örnektir. Bulanık kümelerde $\cap$ işlemi de birleşmeli olup, A, B ve C bulanık kümeleri için

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

olur.

2.6.7. Merkez

Evrensel bir X kümesinde, A bulanık bir alt küme olmak üzere, A kümesinin elemanlarının ortalama değeri, A kümesinin merkezini gösterir.

A kümesi sonsuz bir küme ise, üyelik fonksiyonunun maksimum değerini gösteren elemanlar arasından en büyük / en küçük işlemi yapılarak, A kümesinin merkez noktası bulunur.

2.6.8. α-kesimi (α-seviyesi)

Evrensel bir X kümesinde, A bulanık bir alt küme olmak üzere, α-kesim kümesi,

$$A_\alpha = \{\, x | \mu_A(x) \geq \alpha \ ve\ x \in X \,\}; \qquad \alpha \in [0,1]$$

fonksiyonu ile belirlenir. Burada, A_0 kümesi; A bulanık kümesinin destek kümesidir. A_1 kümesi ise A bulanık kümesinin çekirdeğidir.

2.6.9. Kartezyen Çarpım

X ve Y evrensel kümeleri üzerinde, sırasıyla $A \neq \emptyset$ ve $B \neq \emptyset$ olan, iki bulanık küme tanımlı olsun. Bu durumda A kümesi ile B kümesi arasındaki bulanık ilişkiler; AxB kartezyen çarpımı ile:

$$AxB = R \subset \mathrm{XxY}$$

şeklinde gösterilir; üyelik fonksiyonu ile ise;

$$\mu_R(x,y) = \mu_{AxB}(x,y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

olarak belirlenir.

Örnek 2.6.9.1.
$A = \{(2; 0.3), (3; 0.7), (4; 0.6)\}$ ve $B = \{(1; 0.7), (2; 0.8), (3; 0.6)\}$ olarak verilen A ve B bulanık kümeleri için,
$AxB = \{(2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,3)\}$ ve

$$\mu_{AxB}(x,y) = \begin{Bmatrix} min\{0.3; 0.7\}, min\{0.3; 0.8\}, min\{0.3; 0.6\}, \\ min\{0.7; 0.7\}, min\{0.7; 0.8\}, min\{0.7; 0.6\}, \\ min\{0.6; 0.7\}, min\{0.6; 0.8\}, min\{0.6; 0.6\}. \end{Bmatrix}$$

olur ve dolayısıyla,

$$\mu_{AxB}(x,y) = \{0.3,0.3,0.3,0.7,0.7,0.6,0.6,0.6,0.6\}$$

olarak bulunur.

BÖLÜM III

BULANIK MATRİSLER

Bu bölümde, çalışmanın giriş kısmında bahsedilen makaleler ışığında bulanık matrislerden bahsedilecek ve bulanık matrislerle yapılan cebirsel işlemler ve bu işlemlerin cebirsel özellikleri incelenecek olup bulanık matrislerde yakınsama kavramı ve bulanık matrislerin yakınsama koşullarından söz edilecektir.

3.1. Bulanık Matris Kavramı

Tanım 3.1.1.

[0,1] kapalı aralığındaki değerlerden oluşan ve matris işlemleri, bulanık mantıksal işlemler uygulanarak elde edilen matrislere, bulanık matris denir.

Tanım 3.1.2.

$X = [\ x_1,\ x_2,\ \dots\ ,\ x_n\ ]$ bir satır vektörünü göstermek üzere, her $1 \leq i \leq n$ için $x_i \in [0,1]$ ise, X' e $1xn$ boyutlu bulanık satır matrisi (vektörü) denir.

Tanım 3.1.3.

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$ bir sütun vektörünü göstermekte iken her $1 \leq i \leq n$ için $x_i \in [0,1]$ ise, X' e $nx1$ boyutlu bulanık sütun matrisi (vektörü) denir.

Tanım 3.1.4.

$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}$ matrisinde, her $1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq j \leq n$ için, $x_{ij} \in [0,1]$ ise, X' e mxn boyutlu dikdörtgensel bulanık matris denir.

Tanım 3.1.5.

$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$ matrisinde, her $1 \leq i \leq n$ ve $1 \leq j \leq n$ için, $x_{ij} \in [0,1]$ ise, X' e nxn boyutlu karesel bulanık matris denir.

"Bulanık matrislerde girdiler bulanık mantık işlemleri ile belirlenir. Bulanık matris işlemlerinde: iki bulanık matris klasik matrislerde işlem uygulanacak gibi normal şekilde yazılır. Fakat bulanık matrislerle yapılan işlemler, klasik matris işlemlerinden farklı olarak, kullanılan modele veya probleme göre $maks$ ve min mantıksal işlemleri ile belirlenir" (Thomason, 1977).

Bulanık matrislere uygulanan maks veya min mantıksal işlemleri sonucu elde edilen matrislerin her elemanı $[0,1]$ kapalı aralığında yer alacağından dolayı, bu mantıksal işlemler sonucunda elde edilen matrisler de birer bulanık matris özelliği gösterirler.

3.2. Bulanık Matrislerde Cebirsel İşlemler

Bu bölümde bulanık matrislerin toplamı, çarpımı ve tümleyeni tanımlanacaktır.

3.2.1. Bulanık Matrislerin Toplamı

İki bulanık matisin toplamı da bulanık bir matris olmalıdır. Bu toplamın klasik matris toplamı ile elde edilmesi mümkün olmayacağından dolayı bulanık matrislerde toplama işlemi yerine maksimizasyon veya minimizasyon mantıksal işlemlerinden yararlanılır (Kandasamy, Smarandache ve Illanthenral, 2007, s. 10).

3.2.1.1. Bulanık Matrislerde Maksimizasyon İşlemi

Tanım 3.2.1.1.1.

$A = \left[a_{ij}\right]_{nxm}$ ve $B = \left[b_{ij}\right]_{nxm}$ $her\ 1 \leq i \leq n$ ve $1 \leq j \leq m$ için, $a_{ij} \in [0,1]$ ve $b_{ij} \in [0,1]$ şeklinde ifade edilen aynı boyutlardaki A ve B bulanık matrisleri için,

$$Maks(A,B) = \left[maks\{a_{ij},\ b_{ij}\}\right]_{nxm}$$

şeklinde tanımlanır.

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ bulanık matrisleri için;

$$Maks(A,B) = \begin{bmatrix} maks\{a,e\} & maks\{b,f\} \\ maks\{c,g\} & maks\{d,h\} \end{bmatrix}$$

olur.

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$ bulanık matrisleri için;

$$Maks(A,B) = \begin{bmatrix} maks\{a_{11}, b_{11}\} & \cdots & maks\{a_{1n}, b_{1n}\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ maks\{a_{m1}, b_{m1}\} & \cdots & maks\{a_{mn}, b_{mn}\} \end{bmatrix}$$

olarak belirlenir. Maksimizasyon tanımına bağlı olarak, A ve B aynı boyutlarda herhangi iki bulanık matris olmak üzere,

$$Maks(A,B) = Maks(B,A)$$

ve

$$Maks(A,A) = A$$

olur. Buna ek olarak, 0: sıfır matrisini göstermek üzere,

$$Maks(A,0) = Maks(0,A) = A$$

olur.

3.2.1.2. Bulanık Matrislerde Minimizasyon İşlemi

Tanım 3.2.1.2.1.

$A = [a_{ij}]_{nxm}$ ve $B = [b_{ij}]_{nxm}$, $her\ 1 \leq i \leq n$ ve $1 \leq j \leq m$ için, $a_{ij} \in [0,1]$ ve $b_{ij} \in [0,1]$ şeklinde ifade edilen aynı boyutlardaki A ve B bulanık matrisleri için,

$$Min(A,B)=[min\{a_{ij},b_{ij}\}]_{nxm}$$

şeklinde tanımlanır.

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ bulanık matrisleri için,

$$Min(A,B) = \begin{bmatrix} min\{a,e\} & min\{b,f\} \\ min\{c,g\} & min\{d,h\} \end{bmatrix}$$

olur.

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$ bulanık matrisleri için,

$$Min(A,B) = \begin{bmatrix} min\{a_{11}, b_{11}\} & \cdots & min\{a_{1n}, b_{1n}\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ min\{a_{m1}, b_{m1}\} & \cdots & min\{a_{mn}, b_{mn}\} \end{bmatrix}$$

olur. Minimizasyon tanımına bağlı olarak, A ve B aynı boyutlarda olan herhangi iki bulanık matris olmak üzere;

$$Min(A,B) = Min(B,A)$$

ve

$$Min(A,A) = A$$

olur ve 0: sıfır matrisini göstermek üzere;

$$Min(A,0) = Min(0,A) = 0$$

olur. A ve B iki toplanabilen (eşit boyutlarda) bulanık matrisler iken,

$$maks[A,B] \geq min[A,B]$$

olduğundan dolayı,

$$A + B = Maks\{A.B\}$$

ile tanımlanır.

3.2.2. Bulanık Matrislerin Çarpımı

A ve B iki bulanık matris olsun. A matrisinin sütun sayısı, B matrisinin satır sayısına eşit olması koşulu altında, bu iki bulanık matise uygulanan klasik matris çarpma işlemi sonucunda bulanık bir matris elde edilemez. Bu sebeple bulanık matrislerde çarpma işlemi için de $maks$ ve min mantıksal işlemlerinden yararlanılarak, çarpma işlemi yeniden tanımlanmıştır. Çarpılabilen (matrislerin boyutlarının çarpıma uygun olması durumu) bulanık matrislerde $maks(min)$ veya $min(maks)$ mantıksal işlemleri uygulanarak çarpma işlemi yapılır (Kandasamy vd., 2007, s. 10).

Tanım 3.2.2.1.

A ve B iki bulanık matrisi için A matrisinin sütun sayısı, B matrisinin satır sayısına eşit olsun. A ile B'nin çarpımı olan C matrisi ,

$$C = AB = \left[maks\left\{min\{A,B\}\right\}\right] \; veya \; \left[\min\left\{\max\{\mathrm{A},\mathrm{B}\}\right\}\right]$$

şeklinde tanımlanır.

Bu iki mantıksal işlem uygulanarak yapılan çarpma işleminde, birbirinden farklı sonuçlar elde edilir. Bulanık marislerde çarpma veya toplama işlemi sırasında hangi mantıksal işlemin uygulanacağı probleme ve ortamın koşullarına göre değişir. Buna, problemi çözümleyecek olan uzman kişi karar verir.

3.2.2.1. Bulanık Matrislerde Maks(Min) İşlemi

Tanım 3.2.2.1.1.

A matrisinin satır sayısı, B matrisinin sütun sayısına eşit olmak üzere, $A = \left[a_{ij}\right]_{nxm}$ ve $B = \left[b_{jk}\right]_{mxt}$ $her\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m,\ 1 \le k \le t,$ $a_{ij} \in [0,1]$ ve $b_{jk} \in [0,1]$ şeklindeki iki bulanık matrisin $maks(min)$ çarpımını gösteren nxt boyutlu C matrisi; $C = \left(c_{ij}\right)$ ve $c_{ij} = maks(\min(\mathrm{a_{ik}},\mathrm{b_{kj}}))$; $k = 1,2,\ldots m$ ile tanımlanır.

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$, bulanık matrislerinin $maks(min)$ çarpımı C ise;

$$C = \begin{bmatrix} \max\left\{\min\{a,e\},\min\{b,g\}\right\} & \max\left\{\min\{a,f\},\min\{b,h\}\right\} \\ \max\left\{\min\{c,e\},\min\{d,g\}\right\} & \max\left\{\min\{c,f\},\min\{d,h\}\right\} \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır.

Genel olarak, $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ ve $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} \end{bmatrix}$ çarpılabilen bulanık matrislerinin $maks(min)$ çarpımı C ise;

$$C = \begin{bmatrix} \text{maks}\{\min\{a_{11}, b_{11}\}, \dots, \min\{a_{1n}, b_{n1}\}\} & \cdots & \text{maks}\{\min\{a_{11}, b_{1k}\}, \dots, \min\{a_{1n}, b_{nk}\}\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{maks}\{\min\{a_{m1}, b_{11}\}, \dots, \min\{a_{mn}, b_{n1}\}\} & \cdots & \text{maks}\{\min\{a_{m1}, b_{1k}\}, \dots, \min\{a_{mn}, b_{nk}\}\} \end{bmatrix}$$

şeklinde belirlenir.

A ve B çarpılabilen herhangi iki bulanik matris olmak üzere;

$$\text{Maks}(\min(A,B)) \neq \text{Maks}(\min(B,A))$$

olur ve dolayısıyla,

$$AB \neq BA$$

dır. Çünkü B matrisinin sütun sayısı, A matrisinin satır sayısına eşit olamayabilir. Bu durumda, $maks(min(B, A))$ işlemi yapılamaz.

3.2.2.2. Bulanık Matrislerde Min(Maks) İşlemi

Tanım 3.2.2.2.1.

$A = [a_{ij}]_{nxm}$ ve $B = [b_{jk}]_{mxt}$ her $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, $1 \leq k \leq t$, $a_{ij} \in [0,1]$ ve $b_{jk} \in [0,1]$ şeklindeki çarpılabilen iki bulanık matrisin $min(maks)$ çarpımını gösteren nxt boyutlu C matrisi;

$$C = [\min\{\text{maks}\{a_{ij}, b_{jk}\}\}]$$

şeklinde tanımlanır.

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$, bulanık matrilerinin $min(maks)$ çarpımı C ise,

$$C = \begin{bmatrix} \min\{\text{maks}\{a, e\}, \text{maks}\{b, g\}\} & \min\{\text{maks}\{a, f\}, \text{maks}\{b, h\}\} \\ \min\{\text{maks}\{c, e\}, \text{maks}\{d, g\}\} & \min\{\text{maks}\{c, f\}, \text{maks}\{d, h\}\} \end{bmatrix}$$

olur.

Genel olarak $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} \end{bmatrix}$ çarpılabilen bulanık matrislerinin $min(maks)$ çarpımını gösteren C bulanık matrisi ise,

$$C = \begin{bmatrix} \min\{\text{maks}\{a_{11}, b_{11}\}, \ldots, \text{maks}\{a_{1n}, b_{n1}\}\} & \cdots & \min\{\text{maks}\{a_{11}, b_{1k}\}, \ldots, \text{maks}\{a_{1n}, b_{nk}\}\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \min\{\text{maks}\{a_{m1}, b_{11}\}, \ldots, \text{maks}\{a_{mn}, b_{n1}\}\} & \cdots & \min\{\text{maks}\{a_{m1}, b_{1k}\}, \ldots, \text{maks}\{a_{mn}, b_{nk}\}\} \end{bmatrix}$$

olur.

A ve B iki bulanık matris iken; $maks(min)$ işlemi ile aynı sebepten dolayı;

$$\text{Min(maks(A,B))} \neq \text{Min(maks(B,A))}$$

dır. Bununla birlikte,

$$\text{Maks}\{\text{min}\{a_{ij}, b_{jk}\}\} \neq \text{Min}\{\text{maks}\{a_{ij}, b_{jk}\}\}$$

olup;

$$\text{Maks(min(A,B))} \neq \text{Min(maks(A,B))}$$

olur ve genellikle,

$$\text{Maks}\{\text{min}\{a_{ij}, b_{jk}\}\} \geq \text{Min}\{\text{maks}\{a_{ij}, b_{jk}\}\}$$

olduğundan dolayı;

$$\text{Maks(min(A,B))} \geq \text{Min(maks(A,B))}$$

olur.

Bu çalışmanın devam eden bölümlerinde bulanık matrislerin çarpımı için

$$AB = Maks(min(A, B))$$

olarak tanımlanmıştır.

3.2.3. Bulanık Matris Tümleyeni

Tanım 3.2.3.1.

$A = [a_{ij}]_{nxm}$ $her\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m$ ve $a_{ij} \in [0,1]$ şeklinde verilen bir bulanık matrisin tümleyeni $\bar{A}$ sembolü ile gösterilir. $\bar{A} = [\bar{a}_{ij}]$ olmak üzere;

$$\bar{a}_{ij} = 1 - a_{ij}$$

olarak tanımlanır.

Örnek 3.2.3.1.

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, bulanık matrisi için;

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1-a & 1-b \\ 1-c & 1-d \end{bmatrix}$$

olur.

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn}$ şeklinde gösterilen bir bulanık matrisin tümleyeni ise;

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1-a_{11} & \cdots & 1-a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1-a_{m1} & \cdots & 1-a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn}$$

şeklindedir.

3.3. Bulanık Matrislerin Cebirsel Özellikleri

Bu bölümde bulanık matrislerin $maks$, min, $maks(min)$ ve $min(maks)$ işlemleri altında gözlemlenen cebirsel özelliklerinden söz edilecektir.

3.3.1. $Maks$ İşleminin Cebirsel Özellikleri

$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ ve $C = (c_{ij})$ matrisleri toplanabilen bulanık matrisler olmak üzere, bulanık matrislerde toplama ($maks$) işleminin cebirsel özellikleri aşağıda gösterilmektedir:

- Kapalılık özelliği:

$D = A + B$ ve $D = \left(d_{ij}\right)$ ise $\left(d_{ij}\right) = maks\left\{a_{ij}\,, b_{ij}\,\right\}$ ile tanımlanır. Burada D matrisi de bulanık bir matris olur ve bulanık matrislerin $maks$ toplamına göre kapalılık özelliği vardır.

- Birleşme özelliği:

  $maks\{maks\{a_{ij},\; b_{ij}\}, c_{ij}\} = maks\{a_{ij}, maks\{b_{ij}, c_{ij}\}\}$ olup, $(A + B) + C = A + (B + C)$ eşitliği sağlanır ve bulanık matrislerin matrislerin $maks$ toplamına göre birleşme özelliği vardır.

- Değişme özelliği:

  $maks\{a_{ij}, b_{ij}\} = maks\,\{b_{ij}, a_{ij}\}$ olup, $(A + B) = (B + A)$ eşitliği sağlanır ve bulanık matrislerin $maks$ toplamına göre değişme özelliği vardır.

- Birim eleman:

  $E = (e_{ij})$ olmak üzere, her A bulanık matrisi için $maks\{a_{ij}, e_{ij}\} = maks\{e_{ij}, a_{ij}\} = A$ koşulunu sağlayan, bütün terimleri sıfırdan oluşan $E = [0]$ bulanık matrisi vardır. Buna göre bulanık matrislerde $maks$ toplamına göre birim matris, $E = [0]$ matrisidir.

3.3.2. $\boldsymbol{Maks(Min)}$ İşleminin Cebirsel Özellikleri

$A = \left(a_{ij}\right)$, $B = \left(b_{ij}\right)$ ve $C = \left(c_{ij}\right)$ bulanık matrisler ve $* = \mathrm{maks}(min)$ işlemini göstermek üzere, $maks(min)$ işleminin cebirsel özellikleri aşağıda gösterilmektedir.

- Kapalılık özelliği:

  $D = A * B$ olarak belirlenen $D = (d_{ij})$ matrisi de bulanık bir matris olup, bulanık matrislerde $maks(min)$ çarpımına göre kapalılık özelliği vardır.

- Değişme özelliği:

  $A * \mathrm{B} \neq \mathrm{B} * \mathrm{A}$ olup bulanık matrislerde $maks(min)$ çarpımına göre değişme özelliği yoktur.

Örnek 3.3.3.1.

$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.6 \\ 0.4 & 0.9 \end{bmatrix}_{2x2}$ ve $B = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 \\ 0.7 & 0.8 \end{bmatrix}_{2x2}$ bulanık matrisleri için,

$A * B = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 \\ 0.7 & 0.8 \end{bmatrix}_{2x2}$ ve $B * A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}_{2x2}$ olup, $A * B \neq B * A$ dır. Bu da gösterir ki bulanık matrislerde $maks(min)$ çarpımına göre değişme özelliği yoktur.

- Birleşme özelliği:

$A * (B * C) = (A * B) * C$ olup bulanık matrislerde $maks(min)$ çarpımına göre birleşme özelliği vardır.

- Birim eleman:

  $E = (e_{ij})$ olmak üzere, her A bulanık matrisi için $A * E = E * A = A$ koşulunu sağlayan, köşegen elemanları 1 ve diğer tüm elemanları 0' dan oluşan $E = I$ bulanık matrisi vardır. Buna göre bulanık matrislerde $maks(min)$ çarpımına göre birim elemanı, klasik matrislerdeki gibi I matrisidir.

3.4. Karesel Bulanık Matrislerin Kuvvetleri ve Yakınsaklığın Tanımı

Dinamik sistemlerin, belirsiz ortamlarda gelecekteki durumları, bulanık matrislerin kuvvetlerinin hangi formda olduğuna bağlıdır. Buna paralel olarak bulanık matrislerin kuvvetleri ve yakınsama durumları, araştırmacıların oldukça ilgisini çeken bir konudur.

Bu kısımda, Thomason (1977), Zhou & De-Fu (1997) ve Buckley'in (2000) çalışmalarından yararlanılarak bulanık matrisler ve yakınsamaları ile ilgili geliştirilen bazı tanımlamalar yapılmış ve bazı önermelerden bahsedilmiştir. Bunlara bağlı olarak $max(min)$ çarpımı altında karesel bulanık matrislerin kuvvetlerinin yakınsaması için bazı yeterlilik koşulları incelenmiştir.

Tanım 3.4.1.

F ; $n \times n$ boyutlu herhangi bir sonlu bulanık matris olsun. Bu durumda F matrisinin kuvvetleri;

$$F^0 = \mathrm{I}, \text{ birim köşegen matris,}$$

$$F^k = F^{k-1} * F, \qquad k = 1, 2...$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.4.2.

$\{F^n\}$, ($n = 1,2,3,...$) dizisi, F bulanık matrisinin kuvvetlerinden oluşan bir diziyi göstermek üzere;

$$F^n = F^c, \quad (\,her\ n \geq c \text{ için})$$

olacak şekilde sonlu ve pozitif bir c noktası var ise F matrisi F^c matrisine yakınsar ve F matrisi yakınsaktır denir.

Tanım 3.4.3.

F, karesel bulanık matrisinin kuvvetleri, sonlu ve pozitif bir c noktası için;

$$F^c = S_1,\ F^{c+1} = S_2,\ \ldots,\ F^{c+L-1} = S_L,\ F^{c+L} = S_1, \ldots$$

olacak şekilde $\{S_1, S_2, ..., S_L\}$ dizisi oluşturur ise, F sonlu bir periyotta salınımlıdır denir.

Tanım 3.4.4.

A ve B, nxm boyutlu bulanık matrisler iken, her $1 \le i \le n$ ve $1 \le j \le m$ için $a_{ij} \le b_{ij}$ ise, bu durum $A \le B$ ile tanımlanır.

Tanım 3.4.5.

A nxn boyutlu bulanık matrisi için;

$$A \leq A^2 \leq A^3 \ldots$$

ise A'ya monoton artan bulanık matris denir.

Burada n küçük ise A'nın monoton artan olup olmadığına $A \leq A^2$ koşulunu sağlayıp sağlamadığına bakılarak karar verilebilir.

Tanım 3.4.6.

A karesel bulanık matrisi için;

$$A \geq A^2 \geq A^3 \ldots$$

ise, A' ya monoton azalan bulanık matris denir.

Önerme 3.4.1.
$A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{ij})$, nxm boyutlu iki bulanık matris ve $*$ ise $max(min)$ çarpımını göstersin. Bu durumda $C = (c_{ij})$, $m \times p$ boyutlu herhangi bir bulanık matris iken, $A \leq B$ ise;

$$A * C \leq B * C$$

olur (Thomason, 1977).

İspat
Her $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ için $A \leq B$, yani $(a_{ij}) \leq (b_{ij})$ olsun. Bu durumda $\min(a_{ik}, c_{kj}) \leq \min(b_{ik}, c_{kj})$ olduğunu gösterelim.
Eğer $c_{kj} \leq a_{ik}$ ise $c_{kj} \leq a_{ik} \leq b_{ik}$ olup $\min(a_{ik}, c_{kj}) = c_{kj} \leq \min(b_{ik}, c_{kj}) = c_{kj}$ sağlanır. Diğer taraftan $a_{ik} \leq c_{kj}$ ise $\min(a_{ik}, c_{kj}) = a_{ik}$ olur.
Böylelikle,

(i) $\min(b_{ik}, c_{kj}) = b_{ik}$ ise $a_{ik} \leq b_{ik}$ olup koşul sağlanır.

(ii) $\min(b_{ik}, c_{kj}) = c_{kj}$ ise $a_{ik} \leq c_{kj}$ olup koşul sağlanır.

O halde, $a_{ik}c_{kj} \leq b_{ik}c_{kj}$ bulanık çarpım bağıntısı sağlanır. Sonuç olarak, $\sum \max(\min(a_{ik}, c_{kj})) \leq \sum \max(\min(b_{ik}, c_{kj}))$ olup $\sum a_{ik}c_{kj} \leq \sum b_{ik}c_{kj}$ elde edilir. Dolayısıyla $AC \leq BC$ olur.

Bulanık matrislerin cebirsel yapısı, yakınsama veya periyodik olmasına karar verilmesinde önemli rol oynar. Bunlardan en belirgin olanı köşegen elemanlarının bulunduğu satır veya sütundaki terimlerden büyük olmasıdır. Aşağıda bu durumu açıklayan baskınlık ilkesi tanımlanmıştır.

Tanım 3.4.7.
Bir A bulanık matrisinde, her $1 \leq i, j \leq n$ için $a_{ij} \in A$ için, $a_{ij} \leq a_{ii}\ veya\ a_{ij} \leq a_{jj}$ ise, A için baskınlık ilkesi sağlanır denilmektedir.

Teorem 3.4.1.

A, nxn boyutlu bulanık matrisi baskınlık ilkesini sağlar ise; A monoton artan bir matris olup aynı zamanda yakınsaktır (Zhou ve De-Fu, 1997).

İspat

A matrisi baskınlık ilkesini sağlasın. Bu durumda $a_{jj} \leq a_{ij} \leq a_{ii}$, $a_{ii} \leq a_{ij} \leq a_{jj}$ veya $a_{ij} \leq a_{ii} \leq a_{jj}$ durumlarından biri geçerli olup, üç durumda da $her\ i, j$ kombinasyonu için, $max\{a_{ii} \wedge \mathrm{a_{ij}}, \mathrm{a_{ij}} \wedge \mathrm{a_{jj}}\} = a_{ij}$ olur.

$$a_{ij}^2 = \mathrm{maks}(a_{ik} \wedge \mathrm{a_{kj}}) \geq max\{a_{ii} \wedge \mathrm{a_{ij}}, \mathrm{a_{ij}} \wedge \mathrm{a_{jj}}\} = a_{ij}, \qquad (1 \leq k \leq n)$$

olur. Bu sebeple A monoton artandır.

Tanım 3.4.8.

A, nxn boyutlu bir bulanık matris olsun. $1 \leq k \leq n$ olmak üzere, her $1 \leq t \leq n$ için;

$$a_{tt} = max\{a_{kt}\} \quad veya\ a_{tt} = max\{a_{tk}\}$$

koşulu sağlanır ise, A maksimum ilkesini sağlamaktadır denir.

Teorem 3.4.2. (Maksimum İlkesi Teoremi)

Maksimum ilkesini sağlayan $her\ A$ bulanık bir matrisi için:

1. $A^2 \leq A^3 \leq \cdots \leq A^{n-1} \leq \cdots$
2. A matrisinin kuvvetlerinde köşegen elemanları sabit kalır:

$$a_{ii} = a_{ii}^2 = a_{ii}^3 = \cdots = a_{ii}^n \qquad (her\ 1 \leq i \leq n\ \text{için})$$

3. Bir noktadan sonra $A^{n-1} = A^n$ olup A matrisi yakınsaktır.
4. Fakat, $A \leq A^2$ koşulu her zaman sağlanmayabilir (Zhou ve De-Fu, 1997).

Örnek 3.4.1.

$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}_{3x3}$ bulanık matrisi maksimum ilkesini sağlamakta olup,

$A^2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 03 \end{bmatrix}_{3x3} = A^3$ bulunur. Bu durumda $A^2 \leq A^3$ ve $1 \leq i \leq 3$ için $a_{ii} = a_{ii}^2 = a_{ii}^3$ olur. Aynı zamanda A matrisi yakınsaktır. Fakat $A > A^2$ olduğu görülür

Sonuç 3.4.2.a.

Maksimum ilkesi yakınsaklık için yeterlidir, fakat gerekli bir koşul değildir.

Örnek 3.4.2.

Maksimum ilkesini sağlamayan, fakat yakınsak olan bir örnekle bu durum ispatlanır.

$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}$ bulanık matrisinde $p_{22} = 0 < p_{21} = 0.5$ ve $p_{22} = 0 < p_{32} = 0.6$ olup P maksimum ilkesini sağlamaz fakat, $P^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisine yakınsar. Bu durum maksimum ilkesinin yakınsaklık için gerekli bir koşul olmadığını gösterir.

3.4.1. Karesel Bulanık Matrislerin Yakınsaklığı için Bazı Yeterlilik Koşulları

Önerme 3.4.1.1.

F , nxn boyutlu bulanık bir matris olsun. F ’nin kuvvetleri, sonlu bir c sayısı için F^c idempotent matrisine yakınsar ya da sonlu bir periyotta salınımlıdır (Thomason, 1977).

İspat

Eğer F ; bir c sayısı için F^c kuvvetine yakınsamaz ise, F bulanık matrisinin kuvvetleri F ’ de olmayan değerleri alamayacağından, F, n sonlu bir periyotta salınımlıdır. Eğer F , bir c sayısı için, F^c ye yakınsar ise bulanık matrislerde çarpmanın birleşme özelliğinden dolayı;

$$F^c = F^c * F = (F^c * F) * F = F^c * (F * F) = F^c * F^2 = \ldots =$$
$$F^c * (F^{c-1} * F) = F^c * F^c$$

olur. Bu da F bulanık matrisinin kuvvetlerinin, sonlu bir $\boldsymbol{c}$ sayısı için F^c idempotent matrisine yakınsadığını gösterir.

Önerme 3.4.1.2.

F, nxn boyutlu monoton artan bir bulanık matris ise; F yakınsaktır (Zhou ve De-Fu, 1997).

İspat.

F monoton artan bulanık matris olsun. Bu durumda,

$$F \leq F^2 \leq F^3 \leq \cdots$$

koşulu sağlanır. F' nin kuvvetleri sonlu bir c noktasından sonra belirli olacağından,

$$F \leq F^2 \leq F^3 \leq \cdots \leq F^c \leq F^{c+1} = \cdots$$

olup F sonlu bir c noktasında F^c ye yakısar. Dolayısıyla F yakınsaktır.
Monoton artan bulanık matrislerle aynı sebepten dolayı monoton azalan bulanık matrisler de yakınsaktır.

Sonuç 3.4.2.b.

P, nxn boyutlu bulanık bir matris, I ise nxn boyutlu birim matris olmak üzere $P \geq I$ koşulu sağlanır ise P yakınsaktır.

İspat

$P \geq I$ olsun. Bu durumda, her $1 \leq i \leq n$ için $p_{ii} = 1 \geq p_{ij}$ veya $p_{ii} = 1 \geq p_{ji}$ olup P bulanık matrisi maksimum ilkesini sağlar. Buna bağlı olarak P yakınsaktır.

3.4.2. Bazı Özel Bulanık Matrisler ve Yakınsama Durumları

Bu kısımda, seçilen bazı özel bulanık matrisler tanımlanacak ve bazılarının yakınsama durumları incelenecektir.

3.4.2.1. Köşegen Bulanık Matrisler

Tanım 3.4.2.1.1.

$P = [p_{ij}]$ matrisi, nxn boyutlu bulanık bir matris olsun. $i \neq j$ için $p_{ij} = 0$ ve $i, j = 1, 2, \dots, n$ ise *P'* ye bulanık köşegen matris denir.

$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$; 1 ≤ i ≤ n için $a_{ii} \in [0,1]$ şeklindeki *P* matrisi, köşegen bulanık bir matrisi gösterir.

Önerme 3.4.2.1.1.

Her P, nxn boyutlu köşegen bulanık matris kendisine yakınsar.

İspat

$P^2 = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} = P$ olup,

$$P = P^2 = P^3 = \cdots$$

olur. Dolayısıyla, P matrisi kendisine yakınsar.

3.4.2.2. Üst Üçgensel Bulanık Matrisler

Tanım 3.4.2.2.1.

P = (p_{ij}) nxn boyutlu bulanık bir matris olsun. Her $i > j$ için $p_{ij} = 0$ ise *P* matrisi, üst üçgensel bulanık matristir denir.

$P = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$ iken P matrisi nxn boyutlu, üst üçgensel bulanık bir matrisi gösterir.

Önerme 3.4.2.2.1.

$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$ bulanık matrisi için $1 \leq i, j \leq 2$ olmak üzere,

a) Eğer $1 \leq k \leq 2$ ve $maks\{a_{ij}\} = a_{kk}$ ise $P^2 = P$ dir.

b) Eğer $maks\{a_{ij}\} = a_{12}$ ise $P^2 = P^3$ dür.

İspat

$$P^2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & maks(min\{a_{11}, a_{12}\}, min\{a_{12}, a_{22}\}) \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$$

olur. Bu durumda,

a)

$a_{11} \geq a_{12} \geq a_{22}$ ise $maks(min\{a_{11}, a_{12}\}, min\{a_{12}, a_{22}\}) = a_{12}$,

$a_{11} \geq a_{22} \geq a_{12}$ ise $maks(min\{a_{11}, a_{12}\}, min\{a_{12}, a_{22}\}) = a_{12}$,

$a_{22} \geq a_{12} \geq a_{11}$ ise $maks(min\{a_{11}, a_{12}\}, min\{a_{12}, a_{22}\}) = a_{12}$,

$a_{22} \geq a_{11} \geq a_{12}$ ise $maks(min\{a_{11}, a_{12}\}, min\{a_{12}, a_{22}\} = a_{12}$ olur ve bu durumda $maks\{a_{ij}\} = a_{kk}$ ise $P^2 = P$ koşulu sağlanır.

***b*)**

$a_{12} \geq a_{11} \geq a_{22}$ ise $maks(min\{a_{11}, a_{12}\}, min\{a_{12}, a_{22}\}) = a_{11}$ ve

$P^3 = P^2 P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$ olur. Bu durumda $P^3 = P^2$ koşulu sağlanır.

$a_{12} \geq a_{22} \geq a_{11}$ ise $maks(min\{a_{11}, a_{12}\}, min\{a_{12}, a_{22}\}) = a_{22}$ olur ve,

$P^3 = P^2 P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{22} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{22} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$ olur. Bu durumda da $P^3 = P^2$ koşulu sağlanır. Böylelikle $maks\{a_{ij}\} = a_{12}$ için $P^2 = P^3$ koşulu sağlanır.

3.4.2.3. Alt Üçgensel Bulanık Matrisler

Tanım 3.4.2.3.1.

$P = (p_{ij})$ nxn boyutlu bulanık bir matris olsun. Her $i > j$ için $p_{ij} = 0$ ise P' ye, alt üçgensel bulanık matristir denir.

$P = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ iken P matrisi nxn boyutlu, alt üçgensel bulanık bir matrisi gösterir.

$P = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}$, P matrisi, 2x2 boyutlu bir alt üçgensel bulanık bir matrisi gösterir.

3.4.2.4. Bulanık Matrislerin Transpozu

Tanım 3.4.2.4.1.

P, mxn boyutlu herhangi bir bulanık matris olsun. Bu durumda P matrisinin (i,j). bileşeninin (j,i). bileşeni ile yer değiştirmesi ile elde edilen nxm boyutlu matrise, P' nin transpoze matrisi denir. Bu matris P^T ile gösterilir.

$P = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$; şeklindeki mxn boyutlu bulanık P matrisin transpozu P^T,

$$P^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

olarak belirlenir.

Önerme 3.4.2.2.1.

P, nxn boyutlu bulanık bir matris olsun. P, maksimum ilkesini sağlayan ve buna bağlı olarak yakınsak bir matris ise, P^T matrisi de maksimum ilkesini sağlar ve yakınsaktır.

İspat

Maksimum ilkesi gereği, $her\ \ 1 \leq i \leq n$ için $p_{ii} \geq p_{ij}$ veya $p_{ii} \geq p_{ji}$ dir.

- P' de $p_{ii} \geq p_{ij}$ ise P^T'de $p_{ii} \geq p_{ji}$ olur.
- P' de $p_{ii} \geq p_{ji}$ ise P^T matrisinde $p_{ii} \geq p_{ij}$ olur.
-

Her iki durumda da P^T, maksimum ilkesini sağlar ve bu sebeple yakınsaktır.

BÖLÜM IV

MARKOV ÖZELLİĞİ VE MARKOV SÜREÇLERİ

Bu bölümde, öncelikle Markov özelliği temelini oluşturan bazı kavramlar ve Markov özelliğinden bahsedilmiştir. Buna bağlı olarak Markov matrisleri, Markov zincirlerindeki durumların sınıflandırılması, Markov matrislerinin denge durumları ve ergodik özelliği hakkında inceleme yapılmıştır.

4.1.Markov Özelliği için Gerekli Bazı Temel Kavramlar

Bu kısımda, Markov özelliğinin temelini oluşturan örnek uzay, stokastik süreç, durum uzayı ve geçiş kavramları kısaca ifade edilmiştir. Bu kavramların üzerine tanımlanan Markov özelliği ve Markov süreci ise detaylı olarak incelenmiştir.

4.1.1. Örnek Uzay

Tanım 4.1.1.1.

Herhangi bir deneyin mümkün olabilecek tüm sonuçlarını gösteren kümeye örnek uzay denir. Bu küme Ω sembolü ile gösterilir. Ω örnek uzayının elemanları ise ω sembolü ile gösterilir. Ω sonlu sayıda, sayılabilir sonsuzlukta veya sonsuz sayıda elemana sahip olabilir. Sonlu veya sayılabilir sonsuzluktaki örnek uzay kesikli, sonsuz sayıdaki örnek uzay ise süreklidir denir (Isaacson ve Madsen, 1976, s. 2).

4.1.2. Stokastik Süreç

Tanım 4.1.2.1.

T, herhangi bir zamanı götermek üzere, elemanları rastlantısal değişkenler içeren ve $\{X(t): t\epsilon T\} = \{X_t: t\epsilon T\}$ şeklinde ifade edilen kümeye stokastik süreç denir. Bu süreçte yararlanılan zamanın kesikli veya sürekli olmasına bağlı olarak stokastik süreç: kesikli parametreli süreç veya sürekli parametreli süreç olarak ikiye ayrılır (Narayan, 1972, s. 9).

4.1.3. Durum Uzayı Kavramı

Tanım 4.1.3.1.

Herhangi bir olayın sonucunda, rastlantısal degişkenlerin alabileceği tüm değerleri gösteren kümeye durum uzayı denir. Daha açık bir ifadeyle, durum uzayı; bir sistemin mümkün olabilecek tüm durumlarını içeren kümeye denir.

4.1.4. Geçiş Kavramı

Tanım 4.1.4.1.

Dinamik (hareketli) bir ortamda zaman içerisinde, durumlar arasında meydana gelen hareketler geçiş olarak adlandırılır.

4.1.5. Markov Süreci ve Markov Özelliği

Tanım 4.1.5.1.

"Kesikli zamanlı, kesikli parametreli stokastik süreçlere Markov Süreci denir" (Can, 2006, s. 15). Bu süreçte, sistemin gelecekte bulunabileceği durum tahmini yapılırken, sistemin geçmişte bulunduğu durumlar dikkate alınmaz, sistemin yalnızca ilgilenilen anda bulunduğu duruma bakılarak tahmin yapılır.

Tanım 4.1.5.2.

Markov sürecinde, sistemin belirli bir zamanda bulunduğu durumun ve durumlar arası geçiş olasılıklarının bilinmesi, sistemin gelecekte hangi durumda olacağının tahmini için yeterlidir. Bu özellik Markov Özelliği olarak adlandırılır.

Markov Özelliği süreci matematiksel olarak ifade edilecek olunursa; başlangıçta k durumunda bulunan bir sistemin bir adım sonra 1 durumunda; n adım sonra ise i durumunda; $n + 1$ adım sonra ise j durumunda olma olasılığı bir koşullu olasılık olarak aşağıdaki gibi belirlenir:

$$P\{X(n+1) = j \setminus X(0) = k, X(1) = 1, \ldots, X(n) = i\}. \qquad (1)$$

Tanım 4.1.5.3.

$X(t_n)$, sistemin n anındaki durumunun bilindiği varsayımıyla; sistemin bir adım sonraki durumunu gösteren $X(t_{n+1})$; $X(t_0), X(t_1), \ldots . X(t_{n-1})$ durumlarından bağımsızdır ve bu durum

$$P\{X(n+1) = j \setminus X(0) = k, X(1) = 1, \ldots, X(n) = i\}$$
$$= P\{X(n+1) = j \setminus X(n) = i\} = p_{ij} \qquad i, j = 1, \ldots, N, \; n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2)$$

şeklinde ifade edilir (Hoel, Port ve Stone, 1972, s. 1). (2)' de görülen geçiş, sistemint_{n-1} anından, t_n anına geçişini gösteriyor olup bu geçişe tek adımlı geçiş denir.

Tanım 4.1.5.4.

Sistemin t_n anından, t_{n+k} anına geçişine ise k adımlı geçiş denir ve sistemin t_n anında i_n durumunda olduğu biliniyor ise, bu durumda k adımlı geçiş olasılığı:

$$P(X\,(n+k)) = \{X(n+k) = i_{n+k} \setminus X(n) = i_n\}$$

şeklinde gösterilir (Rüzgar, 2003, s. 165).

4.2. Markov Matrisi (Geçiş Matrisi)

Tanım 4.2.1.

Elemanları [0,1] kapalı aralılığındaki değerlerden oluşan ve satır elemanları toplamı bire eşit olan matrislere Markov Matrisi, (stokastik matris) denir (Howard, 1971, s.5). Bu matrislerden, durumlar arası geçiş olasılıklarının modellenmesi amacıyla yararlanılır.

Tanım 4.2.2.

Markov özelliğini sağlayan ve durumlar arası geçişlerin zamanla değişmediği stokastik süreçler Markov Zinciri olarak adlandırılırlar (Or, 1986, s. 2.3).

Tanım 4.2.3.

N durumlu bir Markov matrisi;

$$P = \{p_{ij}\} = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} & \cdots & p_{NN} \end{bmatrix}, \qquad p_{ij} \epsilon \, [0,1] \text{ ve } \sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1$$

şeklinde tanımlanır ve burada p_{ij} sistemin i durumundan j durumuna tek adımlı geçiş olasılığını göstermektedir. Bu sebeple P matrisi gibi, durumlar arası geçiş olasılıklarını gösteren Markov matrislerine aynı zamanda olasılık geçiş matrisi de denir.

4.2.1. Başlangıç Durum Olasılık Vektörü

Tanım 4.2.1.1.

Bir sistemin başlangıçta bulunduğu durumların olasılıklarını gösteren vektöre başlangıç durum olasılık vektörü denir ve bu vektör;

$$A^{(0)} = \left[a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \dots , \qquad a_N^{(0)}\right]$$

şeklinde bir satır matrisi formunda gösterilir (Can, 2006, s. 39). Burada $A^{(0)}$ aynı zamanda bir olasılık matrisi olduğundan dolayı, her $0 < i < N$ için $a_i^{(0)} \epsilon [0,1]$ ve

$$\sum_{i=1}^{N} a_i^{(0)} = 1$$

olur. Bu nedenle başlangıç durum olasılık matrisi de bir Markov matrisi olma özelliği gösterir.

4.2.2. Chapman Kolmogorov Denklemleri

Tanım 4.2.2.1.

Başlangıç durum olasılık vektörü $A^{(0)} = \left\{a_j^{(0)}\right\}$ ve olasılık geçiş matrisi P olan bir sistemin bir adım sonra k durumundan j durumuna geçiş olasılığı:

$$a_j^{(1)} = a_1^{(0)} p_{1j} + a_2^{(0)} p_{2j} + a_3^{(0)} p_{3j} \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(0)} p_{ij}$$

şeklinde belirlenir. İki adım sonra k durumundan j durumuna geçiş olasılığı:

$$a_j^{(2)} = a_1^{(1)} p_{1j} + a_2^{(1)} p_{2j} + a_3^{(1)} p_{3j} \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(1)} p_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(0)} p_{ki} \right) p_{ij}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_k^{(0)} p_{ki} \right) p_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(0)} \left(\sum_{i=1}^{\infty} p_{ki} p_{ij} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(0)} p_{kj}^{(2)}$$

şeklindedir ve üç adım sonra k durumundan j durumuna geçiş olasılığı ise:

$$a_j^{(3)} = a_1^{(2)} p_{1j} + a_2^{(2)} p_{2j} + a_3^{(2)} p_{3j} \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(2)} p_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(0)} p_{ki}^{(2)} \right) p_{ij}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(0)} \left(\sum_{i=1}^{\infty} p_{ki}^{(2)} p_{ij} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(0)} p_{kj}^{(3)}$$

şeklinde elde edilir. Tümevarım ilkesine göre, bir sistemin k durumundan j durumuna n adım sonra geçiş olasılığı ise;

$$a_j^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(0)} \left(\sum_{i=1}^{\infty} p_{ki}^{(n-1)} p_{ij} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(0)} \, p_{kj}^{(n)}$$

olarak belirlenir. Burada, $p_{kj}^{(n)}$; sistemin n adımda, k durumundan j durumuna geçiş olasılığını göstermektedir.

Daha açık bir ifadeyle; $P^{(n)}$; P olasılık geçiş matrisinin n -adımlı geçiş olasılıkları matrisini gösteriyor olsun. Bu durumda, $a^{(0)}$ başlangıç durumu ve P olasılık geçiş matrisi bilinen bir sistemin n adım sonra hangi durumda olacağı: $a^{(0)}$ ile $P^{(n)}$ matrisinin çarpımı ile elde edilir.

P olasılık geçiş matrisinin n-adımlı geçiş olasılıklarını gösteren $P^{(n)}$ matrisi;

$$P^n = P^{n-1}.P \text{ ve } 0 < m < n \text{ iken } P^{(n)} = P^{(n-m)}.P^{(m)}$$

denklemleri ile elde edilir. Bu denklemlere Chapman- Kolmogorov denklemleri denir (Taha, 1992, s. 704).

4.3. Markov Zincirlerindeki Durumların Sınıflandırılması

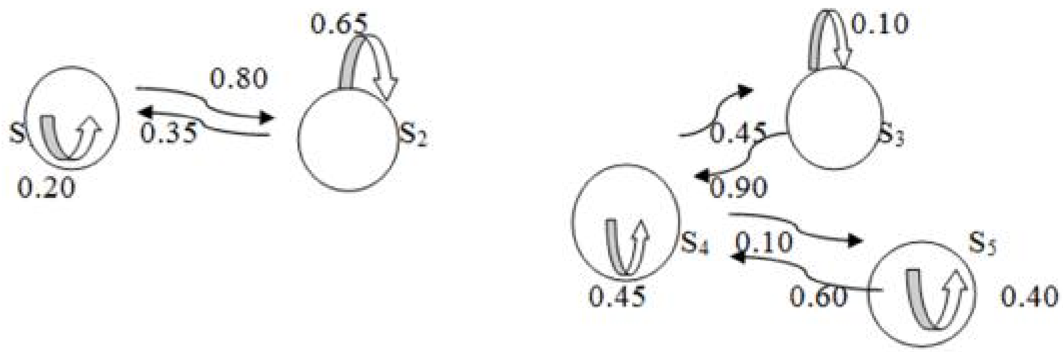
Tanım 4.3.1.

Herhangi bir *i* durumu ile başlayan ve *j* durumunda son bulan geçişe yol denir ve her bir geçiş, belirli bir olasılık değeri ile birlikte gösterilir.

Örnek 4.3.1.

Durumlar arası geçiş olasılıkları matrisi ve şema ile gösterimi:

$$P = \begin{bmatrix} 0.20 & 0.80 & 0 & 0 & 0 \\ 0.35 & 0.65 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.10 & 0.90 & 0 \\ 0 & 0 & 0.45 & 0.45 & 0.10 \\ 0 & 0 & 0 & 0.60 & 0.40 \end{bmatrix}$$



Şekil 19. P geçiş matrisinin şema ile gösterimi

4.3.1. Erişilebilir Durum

Tanım 4.3.1.1.

Eğer *i* durumundan *j* durumuna giden herhangi bir yol var ise *j* ye, *i* durumundan erişilebilir bir durum denir.

4.3.2. Haberleşir Durumlar

Tanım 4.3.2.1.

Eğer herhangi iki durum arasında birbirine geçiş mevcut ise, bu iki duruma haberleşir durumlar denir.

Tanım 4.3.2.2.

Bir Markov zincirinde, S durumlar kümesi olmak üzere, S' de bulunan her bir duruma sadece S' deki başka bir durumdan erişilebilir ise S, kapalı kümedir denir. Şekil 19' da görüdüğü gibi, P markov zincirinde $\{S_1, S_2\}$ ve $\{S_3, S_4, S_5\}$ kümeleri kapalı kümelerdir. Bu iki kümedeki durumlara başka bir kümede bulunan durumlardan erişilemez.

4.3.3. Emici Durum

Tanım 4.3.3.1.

Herhangi bir i durumu için, $p_{ii} = 1$ ise bu duruma emici (yutucu) durum denir. Emici duruma geçiş yapılınca, artık sistemin başka bir duruma geçisi imkansız olur.

4.3.4. Geçici Durum

Tanım 4.3.4.1.

Herhangi bir i durumundan j durumuna geçiş yapılınca, sonraki geçişlerde, i durumuna geri dönülmesi imkansız ise, i durumuna geçici durum denir.

4.4.5. Devirli Durum

Tanım 4.4.5.1.

Geçici olmayan durumlara devirli durum denir. Zamanla, tekrar tekrar gözlemlenebilme ihtimalleri bulunan durumlardır.

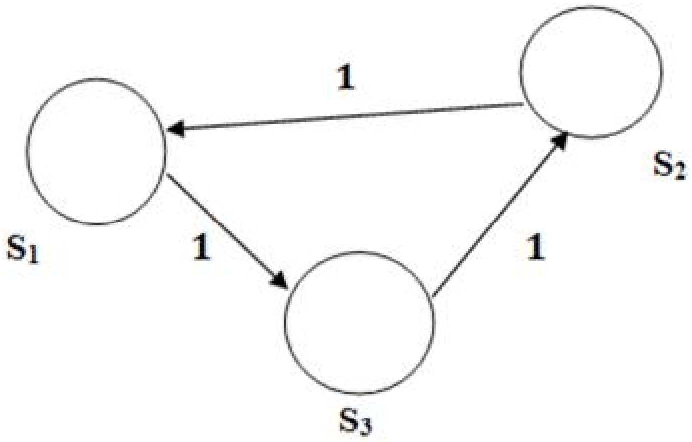
4.3.6. Periyodik Durum

Tanım 4.3.6.1.

$k > 1$ iken, başlangıçta i durumunda bulunan bir markov zincirinde, i durumuna; her zaman k adım sonra veya k nın bir katı kadar adım sonra tekrar geri dönülüyor ise bu durumda, i durumuna; k periyotlu periyodik durum denir. Sistem hangi durumda olursa olsun, periyodik ise; k adım sonra başlangıç noktasına geri dönülecektir. Periyodik olmayan durumlara ise aperiyodik durum denir.

Örnek 4.3.6.1.

$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi, periyodik bir Markov zinciri olup, sistem üç adımda bir başlangıç noktasına dönmek zorundadır. Bu zincir, Şekil 20' de şema ile gösterilmiştir.



Şekil 20. Periyodik Markov zinciri örneği $k = 3$

4.3.7. Ergodik Zincir

Tanım 4.3.7.1.

Bir markov zincirinde tüm durumlar; devirli, aperiyodik ve haberleşir durumlardan oluşmakta ise bu zincire ergodik zincir denir.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 & 0 \\ 1/7 & 0 & 6/7 \\ 0 & 5/9 & 4/9 \end{bmatrix} \qquad P_2 = \begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$Ergodik \qquad\qquad Ergodik\ değil$$

P_2 ergodik değildir çünkü $Sınıf\ 1 = \{S_1, S_2\}$ ve $Sınıf\ 2 = \{S_3, S_4\}$ olacak şekilde iki kapalı kümeden oluşmaktadır.

4.4. Denge Olasılıkları

Uzun dönemde, Markov zincirlerinde satırlar arasındaki fark azalır ve bir noktadan sonra bu fark önemsenmeyecek düzeye iner. Buna bağlı olarak, Markov zincirleri de belirli bir noktadan sonra denge noktasına ulaşır.

4.4.1. Kararlı Durum Olasılıkları Teoremi

P matrisi; S durumlu ergodik bir Markov zincirini göstermek üzere; P nin öyle bir $n.$ kuvveti vardir ki:

$$\lim_{n \to \infty} P^n = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_S \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_S \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_S \end{bmatrix}$$

olur. Dolayısıyla;

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}(n) = \pi_j$$

olur. Burada P^n matrisinin satırları birbirine eşittir ve $P,\ n.$ kuvvetinde denge noktasına ulaşır. Bu sebeple denge noktasına ulaşan bir Markov zincirinde, sistemin herhangi bir i durumundan j durumuna geçiş olasılığı; $i.$ durumdan bağımsız olup π_j ye eşittir.

Bir Markov Zincirinde kararlı -denge- durum olasılıkları dağılımı;

$$\pi = [\ \pi_1, \pi_{2,}\ \ldots, \pi_s]$$

vektörü ile gösterilir. Bu durumda,

$$P_{ij}(n+1) \approx P_{ij}(n) \approx \pi_j$$

dir ve

$$P_{ij}(n+1) = \sum_{k=1}^{k=s} P_{ik}(n)\, P_{kj}$$

olur. Dolayısıyla, $\pi = \pi P$ olarak yazılabilir. Markov zincirinde her bir satır elemanlarının toplamı 1 olduğundan;

$$\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_s = 1 \qquad \text{olur.}$$

Bu eşitliklerden yararlanılarak herhangi bir Markov zinciri için denge durumu olasılık dağılımı belirlenir.

BÖLÜM V

BULANIK MARKOV MATRİSLERİ

Belirsizlik durumlarında, geçiş matrisi girdilerinin bulanık sayılarla modellenmesi fikri, bulanık Markov kavramının ortaya çıkmasına yol açmıştır. Klasik Markov zincirlerine bazı bulanık mantıksal işlemler uygulanarak bulanık Markov zincirleri elde edilir.

Bu bölümde, bulanık olasılıklara dayanan bulanık Markov matrisi tanımlanmış, bulanık Markov matrislerinin cebirsel özellikleri, ergodik olma durumu ve yakınsama durumlarından söz edilmiştir.

5.1. Bulanık Markov Matrisi Kavramı

Markov geçiş matrisinde tüm girdilerin -geçiş olasılıklarının- kesin olarak bilinmesi gereklidir. Bu girdiler genellikle uzmanlar tarafından tahmin edilir veya belirlenirler. Bazı belirsizlik durumlarında girdilerin bazıları belirsiz olabilmektedir. Bu durumda bu belirsizlikler bulanık sayılardan yararlanılarak modellenebilirler. Bir geçiş matrisinde belirsiz girdilerin olması durumunda, belirli olan girdilerin $(0,1)$ açık aralığında olmaları halinde bu olasılıklar bulanık sayılar olarak kabul edilirler. Fakat girdilerin 0 ' a veya 1 'e eşit oldukları yerlerde belirsizliğin olmadığı kabul edilir (Buckley ve Eslami, 2002).

III. bölümde de gösterildiği gibi bulanık ilişkileri gösteren herhangi bir P matrisi, SxS kartezyen çarpımı üzerinde bulanık bir küme olarak tanımlanır. Burada, $i, \epsilon S \;\; ve \;\; 0 \leq p_{ij} \leq 1$ ve $P(i,j) = p_{ij}$ olup P matrisi; $\{p_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ şeklinde gösterilir (Avrachenkov ve Sanchez, 2000).

Bulanık Markov zincirleri kavramı ise bulanık ilişkilere ve bu ilişkilerin bileşimine dayanır (Sanchez, 1976). Bulanık Markov zincirleri en genel haliyle aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 5.1.1.

Herhangi bir t anında, $(t = 0,1,\dots,)$ bir sistemin durumu: $x^{(t)} \in F(S)$ bulanık kümesi ile tanımlanıyor olsun. Bu durumda, herhangi bir t anında $(t = 0,1,\dots,)$ bulanık

Markov zincirlerinin geçiş kuralı, P bulanık ilişkisi yardımıyla (1) denklemi ile belirlenir:

$$x_j^{(t+1)} = max_{i \in S}\left\{min\left\{x_i^{(t)}, p_{ij}\right\}\right\} \qquad j \in S. \tag{1}$$

Burada, sistemin başlangıçta bulunduğu durum $x^{(0)}$ ile gösterilmektedir (Avrachenkov ve Sanchez, 2000).

Olasılık geçiş matrisi $\{p_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ olarak gösterilen bir klasik Markov zincirinde, durumlar arasında geçiş yapılırken ise (2) denkleminden yararlanılır.

$$x_j^{(t+1)} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{(t)} p_{ij}, \qquad j \in S. \tag{2}$$

(1) ve (2) denklemleri arasında kuvvetli bir benzerlik olup, aralarındaki fark uygulanacak olan işlemler ve terimlerin taşıdıkları anlamlardır (olasılıklar ve üyelik dereceleri olmak üzere) (Avrachenkov ve Sanchez, 2000).

Görüldüğü üzere, (2) denkleminde cebirsel toplamın max işlemi ile, cebirsel çarpımın ise min işlemi ile yerdeğiştirmesiyle (1) denklemi elde edilir. Bu durum bulanık Markov zincirleri ile klasik Markov zincirleri arasında önemli bir benzerliğin olduğunu gösterir.

Tanım gereği, bulanık Markov matrislerinin, bulanık matrislerin özel bir altkümesi olduğu da görülür. Bulanık matrislerde olduğu gibi bulanık Markov matrisleri için de $max - min$ cebirine dayanan işlemler uygulanır. Bu sebeple, bulanık matrislerin taşıdığı -konvekslik, normallik gibi- tüm cebirsel özellikler bulanık Markov matrisleri için de geçerlidir.

5.2. Bulanık Markov Matrislerinde Sonlu Yakınsaklık Durumu

Bulanık Markov matrislerinin kuvvetleri:

$$p_{ij}^{t} \cong max_{k \in S}\left\{min\left\{p_{ik}, p_{kj}^{(t-1)}\right\}\right\}, \quad p_{ij}^{1} = p_{ij}, \;\; p_{ij}^{0} = \delta_{ij}$$

olarak belirlenir. Burada, δ_{ij} bir Kronecker deltadır. Bununla birlikte A ve B bulanık matrislerinin çarpımı $A * B$ genelde $max(min)$ işlemi ile belirlenir (Avrachenkov ve Sanchez, 2000).

Herhangi bir $t = 0, 1, 2$ anında, $x^{(t)}$ bulanık durumu:

$$x_k^{(t)} = max_{l \in S}\left\{min\left\{x_l^{(0)}, p_{lk}^t\right\}\right\}, \quad k \in S$$

denklemi ile belirlenir veya matris formunda;

$$x^{(t)} = x^{(0)} * P^t$$

olarak belirlenir.

Teorem 5.2.1.

Herhangi nxn boyutlu P bulanık geçiş matrisinin kuvvetleri de sonlu bir c noktası için $P^{(c)}$ idempotent matrisine yakınsar ya da sonlu bir periyotta salınımlıdır.
İspatı bulanık matrisler için gösterildiği gibidir.

Tanım 5.2.2.

Bir bulanık Markov zinciri t adım sonra P^{τ} matrisine yakınsar ise, bulanık Markov zinciri periyodik değildir yani aperiyodiktir denir. $P^* := P^t$ şeklinde elde edilen matris ise P bulanık geçiş matrisinin limitini gösterir.

Tanım 5.2.3.

Bir bulanık Markov zinciri, aperiyodik ve denge durumundaki geçiş matrisi, eşit satırlardan oluşur ise bu zincire kuvvetli Ergodik bulanık zincir denir (Vajargah ve Gharehdaghi, 2012).

Tanım 5.2.4.

Bir bulanık Markov zinciri, aperiyodik olup, denge durumundaki geçiş matrisi, farklı satırlardan oluşuyor ise bu zincire zayıf Ergodik bulanık zincir denir.

Örnek 5.2.1.

Bir klasik Markov zincirinin olasılık geçiş matrisi olan $P=\begin{bmatrix}0.6 & 0.4\\ 0.2 & 0.8\end{bmatrix}$, olarak verilsin. Burada P klasik Markov zincirinin denge matrisi -limit matrisi- olan P^*, $p_1+p_2=1$ ve $[p_1 \quad p_2]P=[p_1 \quad p_2]$ denklemlerinin birlikte çözülmeleri ile;

$$P^* = \lim_{t\to\infty} P^t = \begin{bmatrix}1/3 & 2/3\\ 1/3 & 2/3\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Burada P^* matrisi, $[1/3 \quad 2/3]$ şeklinde eşit satırlara sahiptir ve görüldüğü üzere, sistem iki durumludur. Uzun zaman sonra sistemin durum 1' de olma olasılığı $1/3$' e eşittir ve durum 2' de olma olasılığı ise $2/3$' e eşittir. P^* matrisinin eşit satırlara sahip olması ise, sistem denge durumuna geldikten sonra sistem hangi durumda olursa olsun, bulunduğu durumundan bağımsız bir şekilde hareket eder. Şöyle ki, P matrisi denge durumuna ulaştıktan sonra sistemin artık hangi durumda olursa olsun, bir adım sonra durum 1' e geçme olasılığı $1/3$ ve durum 2' ye geçme olasılığı ise $2/3$ olur.

Burada P matrisi, klasik Markov matrisi olarak değerlendirildiğinde birbiriyle haberleşir ve devirli durumlardan oluşmakla birlikte aperiyodik olduğundan P aynı zamanda ergodik özelliğe sahiptir.

P geçiş matrisi -girdileri $[0,1]$ kapalı aralığında olduğu için- bulanık Markov matrisi olarak da değerlendirilebilir. Bu durumda P bulanık geçiş matrisinin kuvvetleri, klasik Markov matrisinden farklı olarak $maks(min)$ mantıksal işlemi ile,

$$P^2 = P*P = \begin{bmatrix}\max\{0.6\wedge 0.6, 0.4\wedge 0.2\} & \max\{0.6\wedge 0.4, 0.4\wedge 0.8\}\\ \max\{0.2\wedge 0.6, 0.8\wedge 0.2\} & \max\{0.2\wedge 0.4, 0.8\wedge 0.8\}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.6 & 0.4\\ 0.2 & 0.8\end{bmatrix} = P$$

olarak belirlenir. Dolayısıyla,

$$P^* = \lim_{t\to\infty} P^t = P = \begin{bmatrix}0.6 & 0.4\\ 0.2 & 0.8\end{bmatrix}$$

Burada P bulanık geçiş matrisi aynı zamanda kendi limit matrisidir. Bununla birlikte aperiyodik olması fakat satırlarının birbirine eşit olmaması sebebiyle zayıf bulanık Ergodik zincire bir örnektir.

Örnek 5.2.2.

$Q = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.7 & 0.2 \\ 0.4 & 0.5 & 0.7 \\ 0.6 & 0.1 & 0.7 \end{bmatrix}$ bulanık Markov geçiş matrisi için,

$Q^* = \lim_{t \to \infty} Q^4 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 & 0.7 \\ 0.6 & 0.6 & 0.7 \\ 0.6 & 0.6 & 0.7 \end{bmatrix}$ olup Q' nun dördüncü kuvvetine yakınsadığı görülür.

Q bulanık Markov geçiş matrisinin aperiyodik olması ve Q^* matrisinin eşit satırlardan oluşması sebebiyle Q aynı zamanda güçlü Ergodik bulanık bir matristir.

BÖLÜM VI

SONUÇLAR

Olasılık teorisine dayanan klasik Markov zincirleri ile genel sonlu durumlu bulanık Markov zincirleri arasında büyük ölçüde benzerlikler var olup bununla birlikte, önemli farklılıklar da mevcuttur.

Klasik Markov matrisleri ve bulanık Markov matrisleri arasında farklılıkların oluşmasının temel sebebi bu matrislere uygulanan işlemler ve olasılıklar yerine kullanılacak olan bulanıklık dereceleridir. Şöyle ki; klasik Markov matrisleriyle işlem yapılırken genel matris işlemleri uygulanır fakat, bulanık matrisler için $maks - min$ bulanık mantıksal işlemlerine başvurulur.

Herhangi bir Markov matrisinin girdileri $[0,1]$ kapalı aralığında değerler aldığından dolayı bu matrisler, bulanık bir matris olarak da değerlendirilebilirler. Fakat, herhangi bir bulanık matris, Markov matrisi olarak değerlendirilemez. Bunun sebebi bulanık bir matrisin satır elemanlarının toplamının 1’ e eşit olması koşulunun her zaman sağlanmamasıdır.

Klasik bir Markov geçiş matrisi dolaylı da olsa birbiriyle haberleşir durumlardan oluşuyor ise, bu matrisin kuvvetleri dizisi belirsiz bir adım sonra eşit satırlardan oluşan bir matrise yakınsar –aperiyodiktir-. Bulanık bir geçiş matrisi haberleşir durumlardan oluşsa dahi kuvvetleri dizisi her zaman yakınsak değildir. Sonlu yakınsaktır: yakınsak veya periyodik (Avrachenkov ve Sanchez, 2000). Bu sebeple Klasik Markov zincirleri ve bulanık Markov zincirleri arasında ergodik özellik farklılık gösterir.

Klasik bir Markov geçiş matrisi, denge durumuna ulaştıktan sonraki adımlarında geçiş olasılıkları değişmez aynı durum bulanık Markov matrisleri için de geçerlidir. Fakat klasik Markov matrislerinde sistem denge durumuna ulaştıktan sonraki adımlarda artık başlangıç durumundan bağımsız olarak hareket ederken; Bulanık Markov matrisleri için bu durum farklılık gösterir. Bulanık Markov matrislerinde, güçlü ergodik bulanık Markov matrisleri haricinde, sistem denge durumununa ulaştıktan sonraki adımlarda başlangıç durumuna bağlı olarak hareket etmeye devam eder. Bu durumun temel sebebi: haberleşir durumlu klasik Markov matrislerinin ergodiklik özelliğine sahip olmasıdır, fakat haberleşir durumlu bir bulanık Markov matrisinin her zaman ergodiklik özelliğine sahip olmamasıdır. Bu durum, bulanık Markov zincirleri ve klasik Markov zincirleri arasındaki en önemli farklardan biridir.

KAYNAKÇA

Avrachenkov, K.E. & Sanchez, E. (2000). Fuzzy Markov Chains. *Spain: IPMU,* 1851-1856.

Baykal, N. & Beyan, T. (2004). *Bulanık mantık: İlke ve temelleri.* Ankara: Bıçaklar Kitabevi.

Bezdek, J.C. & Pal, K.S. (1992). Fuzzy Models for Pattern Recognition: *Methods that search for structures in data. IEEEE Press, New York.*

Buckley, J.J. & Eslami, E. (2002). Fuzzy Markov chains: Uncertain probabilities. *Mathware & Soft Computing, Birmingham.*

Can, T. (2006). *Sektörler arası ilişkilerin Markov zincirleri ile analizi ve tahmini: Türkiye örneği.* İstanbul: Derin Yayınevi

Çobanoğlu, B. (2000). *Bulanık mantık ve bulanık küme teorisi.* Niksar MYO/ GOP Üniversitesi

Gani, A. N. & Assarudeen, S. N. M. (2012). A new operation on fuzzy number for solving fuzzy linear programming problem. *Applied Mathematical Sciences, Vol. 6, No. 11,* 525-532.

Göksu, A. (2008). *Bulanık analitik hiyerarşik proses ve üniversite tercih sıralanmasında uygulanması.* Isparta: Süleyman Demirel Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, İşletme Anabilim Dalı, Doktora Tezi.

Hashimoto, H. (1985). Transivity of generalized fuzyy matrices. *Fuzzy Sets and Systems, 17,* 83-90.

Hasimoto, H. (1983). Convergence of powers of fuzzy transitive matrix. *Fuzzy Sets and Systems, 9,* 153-160.

Hoel, P. G., Port Sidney, C. & Stone Charles, J. (1972). *Introduction to stochastic processes.* Houghton Mifflin Company.

Howard, R. A. (1971). *Dynamic probabilistic system, Volume I: Markov models.* New York: John Wiley & Sons.

Isaacson, D. L. & Madsen, R. W. (1976). *Markov chains theory and applications.* New York : John Wiley & Sons.

Kandasamy, V.W.B., Smarandache, F. & Ilanthenral, K. (2007). *Elementary fuzzy matrix theory and fuzzy models for social scientists.* Los Angeles: Automaton.

Kandel, A. (1996). *Fuzy mathematical techniques with applications.* Tokyo: Addition Wisley.

Kim, J. B. (1978). Determinant theory for fuzzy and boolean matrices. *Congressus Numerantium Utilitus Mathematica Pub,* 273-276.

Kim, J.B. (1988). Idempotents and inverses in fuzzy matrices. *Malayasian Math, 6(2), Management Science.*

Kolodziejezyk, W. (1988). Convergence of s-transitive fuzzy matrices, *Fuzzy Sets and System, 26,* 127-130.

Kruse, R., Buck-Emden, R. & Cordes, R. (1987). Processor power considerations - An application of fuzzy Markov chains. *Fuzzy Sets and Systems 21,* 289-299.

Lootsma, F. (1997). *Fuzzy logic for planning and decision making.* Kluwer, Dordrecht.

Narayan Bath, U. (1972). *Elements of applied stochastic processes: Second edition.* New York: John Wiley&Sons

Or, İ. (1986). *Introduction to stochastic models in operations research*. Boğaziçi University Publications, No. 399.

Ovehinnikov, S.V. (1981). Structure of fuzzy relations. *Fuzzy Sets and Systems, 6,* 169-195.

Paksoy, T., Pehlivan, N. Y. ve Özceylan, E. (2013). *Bulanık küme teorisi.* Nobel Yayınları.

Pedrycz, W. & Gomide, F. (1998). *An Introduction to fuzzy sets: Analysis and design.* London: MIT Press.

Ross, J. T. (1995). *Fuzzy logic with engineering applications.* New York: McGraw Hill.

Rügar, N. S. (2003). Bir işletmenin ödemeler dengesinin Markov süreçleri yardımıyla analizi. *İzmir: Dokuz Eylül Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi, Cilt 5, Sayı 1.*

Sanchez, E. (1976). Resolution of composite fuzzy relation equations. *Information and Control, 30,* 38-48.

Şen, Z. (2001). *Bulanık mantık ve modelleme ilkeleri.* İstanbul:Bilge Kültür Sanat Kitabevi.

Şen, Z. (2003). *Modern Mantık.* İstanbul: Bilge Kültür Sanat Kitabevi.

Taha, A. H. (1992). *Operation Research.* New Jersey: Prentice Hall.

Thomason, M.G. (1977). Convergence of powers of a fuzzy matrix. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 57,* 476-480.

Vajargah, B.F. & Gharehdaghi, M. (2012). Ergodicity of fuzzy Makov chains based on simulation using Halton sequences. *The Journal of Mathematics and Computer Science, Vol. 4, No. 3,* 380-385.

Vesa, A. N. (2004). Brief introduction to fuzzy set theory. *Berlin Heidelberg: Springer, Vol. 134,* 14-34.

Yoshida, Y. (1994). Markov chains with a transition possibility measure and fuzzy dynamic programming. *Fuzzy Sets and Systems, 66,* 39-57.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control, 8,* 338-353.

Zadeh, L. A. (1998). Maksimizing sets and fuzzy Markoff algorithms. *IEEE Trans. On Systems, Man and Cybernetics – Part C: Applications and Reviews, 28,* 9-15.

Zhou, T. F. & De-Fu L. (1997). Convergence of the power sequence of a nearly monotone increasing fuzzy matrix. *Fuzzy Sets and Systems, 88,* 363-372.

ÖZGEÇMİŞ

1987’ de Adana’ da doğdum. 2004’ te Anafartalar Lisesi’ nden mezun olduktan sonra eğitimime 2005-2009 yılları arasında Çukurova Üniversitesi, Fen- Edebiyat Fakültesi, Matematik bölümünde devam ettim. Lisans mezuniyetimin ardından, 2010’ da Çukurova Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ekonometri bölümünde yüksek lisans programına katıldım. Yüksek lisans çalışmam sırasında: 2011- 2012 öğretim yılında Polonya- Varşova’ da Erasmus eğitim programına, 2013-2014 öğretim yılında ise İspanya- Barselona’ da Erasmus staj programına katıldım. Şu anda Adana’ da bir devlet okulunda Matematik öğretmeni olarak görev almaktayım.