



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
ORTAK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI**

**KAPAKLA SÜRÜLEN DİKDÖRTGENSEL VE YARIM HALKA
TİPİ KAVİTELERDE STOKES AKIŞ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Zarife DÖLEK

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Halis BİLGİL

ORTAK DANIŞMAN

Doç. Dr. Aydın KURNAZ

AKSARAY, 2015

AKSARAY ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ONAY BELGESİ

Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 122309408 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi, “Zarife DÖLEK”, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “KAPAKLA SÜRÜLEN DİKDÖRTGENSEL VE YARIM HALKA TİPİ KAVİTELERDE STOKES AKIŞ ” başlıklı tezini, aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Yrd. Doç. Dr. Halis BİLGİL**

Aksaray Üniversitesi

Eş Danışmanı : **Doç. Dr. Ali DELİCEOĞLU**

Erciyes Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Yrd. Doç. Dr. Ali ŞAHİN**

Aksaray Üniversitesi

Teslim Tarihi: 2015

Savunma Tarihi: 04 Eylül 2015

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında kapakla sürülen bazı özel tipteki kaviteler içerisindeki Stokes akış yapıları incelendi. Problemin çözümünde analitik çözüm yöntemleri kullanıldı. Literatürde var olan çözüm yöntemlerin farklı geometriye sahip kavite akışlarına uyarlanması gösterildi.

Tezin hazırlanmasında bilgisayar teknolojilerinden sıklıkla yararlanıldı. Teorik olarak elde edilen çözümler, FORTRAN programı kullanılarak datalara dönüştürüldü. Bu datalar ORIGIN-PRO grafik çizim programına aktararak görselleştirildi. Tezin yazımında ise LATEX yazılım programı kullanıldı.

Bu tez çalışması Aksaray Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü tarafından, 2014-012 numaralı proje olarak desteklenmiştir.

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ve bu eserleri her kullanımında alıntı yaparak yararlandığımı belirtir; bunu şerefimle doğrularım.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Zarife DÖLEK

TEŐEKKÖR

“Kapakla Sürölen Dikdörtgensel ve Yarım Halka Tipi Kavitelerde Stokes Akış” konulu tez çalışmasının seçiminde, yürütölmesinde, sonuçlandırılmasında ve sonuçlarının değeriendirilmesinde değeri zamanını feda ederek her konuda yardımcı olan, başta tez danışmanlarım Doç.Dr. Aydın KURNAZ ve Yrd.Doç.Dr. Halis BİLGİL olmak üzere tüm hocalarıma ve bütün hayatım boyunca desteklerini esirgemeyen kıymetli aileme teşekkürlerimi borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	i
DOĞRULUK BEYANI	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii

1. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

1.1. Stokes Akış	2
1.2. Sıfırdan Farklı Reynolds Sayılı Akış (Navier-Stokes Akış, $Re \neq 0$)	5
1.3. Akışkanlar Mekaniğinde Kullanılan Klasik Parametreler	5
1.4. Lokal Akış Analizi	7
1.5. Tezin Ana Hatları	8

2. BÖLÜM

ÇİFT KAPAKLA SÜRÜLEN DİKDÖRTGENSEL KAVİTEDE STOKES AKIŞ

2.1. Giriş	10
2.2. Biharmonik Denklem	10
2.3. Sınır Koşulları	12
2.4. Dikdörtgenel Kavite için Biortogonal Seri Çözümü	13
2.5. Sonuçlar	15
2.5.1. Simetrik akış $S = -1$	15
2.5.2. Simetrik olmayan akış $S = -0.38$	16

3. BÖLÜM

KAPAKLA SÜRÜLEN YARIM HALKA ŞEKLİNDEKİ KAVİTEDE STOKES AKIŞ

3.1. Giriş	21
3.2. Biharmonik Denklem	22

3.3. Sınır Koşulları	24
3.4. Serilerle Çözüm Metodu	25
3.4.1. Biortagonal Seri Çözümü	25
3.4.2. Serilerin Kısaltılması (Sınır Değerlerine Yakınsaklık)	32
3.5. Sonuç ve Görüşler	34
3.5.1. $S = 0$ İçin Akış Yapıları	36
3.5.2. $S = -1$ İçin Akış Yapıları	37
3.5.3. $S = 1$ İçin Akış Yapıları	38

4. BÖLÜM

KAVİTE AÇISININ AKIŞ YAPILARI ÜZERİNE ETKİSİ

4.1. Giriş	42
4.2. Tek kapakla sürülen kavite: $S = 0, A = 3$	42
4.3. Çift kapakla sürülen kavite: $S = -1, A = 2$	44
4.4. Sonuç	49
EKLER	51
2.1. İki Değişkenli Fonksiyonlar İçin Newton-İterasyon Metodu	55
2.2. $\sin \hat{\lambda}_n = \pm \beta \hat{\lambda}_n$ Denkleminden $\hat{\lambda}_n$ Öz-Değerlerinin Elde Edilişi	56
KAYNAKLAR	59
ÖZGEÇMİŞ	63

ÖZET

KAPAKLA SÜRÜLEN DİKDÖRTGENSEL VE YARIM HALKA TİPİ KAVİTELERDE STOKES AKIŞ

Bu tez çalışmasında endüstrinin bir çok alanında yararlanılan bazı kavite akış problemleri ele alındı. Dikdörtgenel ve yarım halka şeklinde geometriye sahip ve tek yada çift kapakla sürülen kaviteleredeki iki boyutlu Stokes akış düşünöldü.

Tez dört bölümden oluşmakta olup birinci bölümde temel kavramlar, denklemler ve tanımlar verildi.

İkinci bölümde, bir yada iki duvarının hareketli ve karşılıklı yan duvarların birer serbest yüzey olduğu dikdörtgenel kavite içerisinde akış yapıları incelendi. Kavite görünüm oranı ve kapakların hızlarının akış yapıları üzerindeki etkileri araştırıldı.

Üçüncü bölümde ise eş merkezli iki daire arasında kalan yarım halka şeklindeki kaviteleredeki akış yapıları ve çatallanmaları incelendi. Yine görünüm ve kapakların hız oranlarının akış üzerine etkisi gösterildi.

Dördüncü bölümde ise, yine eş merkezli iki daire arasında kalan bölgeden alınan çeşitli kesitler içerisindeki stokes akış yapısı incelendi. Kavite açısının eddy oluşum mekanizmasına etkisi gösterildi.

Anahtar Kelimeler: Çatallanma, Girdap, Kavite, Stokes Akış.

ABSTRACT

STOKES FLOW IN LID-DRIVEN RECTANGULAR AND ANNULAR CAVITIES

In this study, some of cavity flow problems which are used in many areas of the industry are discussed. Two-dimensional Stokes flow in single or double lid driven rectangular and semicircular shaped cavity are considered.

The thesis consists of four sections. In the first section, general concepts, equations and definitions which will be used in thesis, are introduced.

In the second section, flow structures are analyzed in a rectangular cavity formed by a pair free surface and one or two moving lids.

In the third section, flow structure and their bifurcations are analyzed in annular cavity between two concentric circle. Effects of aspects and speed ratios of moving lids on the flow structures are shown.

In the fourth section, Stokes flow structures in various sections from the region between two concentric circles are investigated. Effects of cavity angle on the mechanism of eddy genesis are obtained.

Keywords: Bifurcation, Eddy, Cavity, Stokes Flow

1. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

Doğada ve endüstrinin bir çok üretim alanında akışkanlar ile karşılaşılır. Bunlardan bazıları tabaka (coating) akışları, seramik imalatı, polimer işletimi, ısı ve kütle transferi, akciğerlerdeki havanın dolaşımı, mürekkep püskürtmeli yazıcılar, bazı aerodinamik uygulamalar, damarlardaki kan akışı, kurutma sistemleri ve bazı jeofizik uygulamalar olarak verilebilir [1-5]. Kavite yani akış olayının gerçekleştiği sınırlı bölgedeki akış yapıları, kavitenin geometrisine bağlı olarak sade yada oldukça karmaşık hal alabilmektedir. Kavite geometrisin karmaşık olması durumunda akış probleminin çözümü için nümerik yöntemlere ihtiyaç duyulmaktadır. Bu tez çalışmasında üzerinde duracağımız analitik çözüm ve sonuçları, kendi ilgi alanına ek olarak kompleks akış davranışı sergileyen geometrilerin çözümleri için kullanılacak nümerik algoritmaların doğruluğunu test etmeye yardımcı olan ideal bir araç olacaktır.

Kapak ile sürülen kavite akışları, dinamik akışkanlar alanındaki hesaplamalarda en çok çalışılan problemlerdendir. Basit geometrisi olmasına rağmen, kapak ile sürülen kavite akışı Reynolds sayısına bağlı olarak, kaviteğin köşe bölgelerinde akışkanın dönerek yeni çoklu zıt halkaları ortaya çıkartmasıyla oldukça çeşitli akış yapıları gösterir. Bu akış yapılarının durumu akışın kullanılacağı teknolojik önem arz eden çalışmalar için belirleyici rol oynayacaktır. Örneğin ısı dağılımının ele alınacağı bir akış probleminde kavite içerisindeki akışın mümkün olduğunca az girdaplı (eddy) olması daha istenen bir durumdur. Bunun için kavite ve sınır koşullarının ne şekilde seçilmesi gerektiğine karar vermek bu çalışmanın amaçlarından biridir.

Düzgün dört duvar tarafından sınırlandırılan dikdörtgensel veya iç içe girmiş iki daire arasında kalan sektörel kavitelele sınırlandırılan akışkanın, karşılıklı iki

duvar veya tek duvarın hareketi ile oluşturduğu akışlar en çok karşılaşılan kavite akış problemleridir. Düzgün geometrileri olan bu akış problemleri analitik olarak çözüleceği gibi nümerik yöntemlerle de çözülebilmektedir. Aynı zamanda bu çeşit akış problemleri nümerik methodların (spektral ve çoklu grid methodu, sonlu elemanlar, sonlu farklar, . . . v.s.) test edilmesi için "benchmark" problemi olarak ifade edilir ve sayısal hesaplamalar yapan birçok araştırmacının ilgi alanına girer.

Farklı geometrik yapıya sahip kavite göz önüne alınarak kavite geometrisinin akış yapısına olan etkisi için bir çok çalışma yapılmıştır. Bu alanda yapılmış en önemli çalışmalardan bazıları şöyledir: Kare, yamuk ve üçgen şeklindeki kavitelerdeki kararlı viskoz akış problemini inceleyerek kavite geometrisinin akış yapıları üzerindeki etkileri McQuain vd.,[6] tarafından gösterildi. Kavitenin geometrisinin dikdörtgenden farklı olması durumunda (üçgen ya da yamuk gibi), farklı ve ilginç akış yapılarıyla karşılaştılar. Yapılan araştırmalarda kavite keskin ve belli bir açı genişlikteki köşelerinde bir eddy (girdap) serisinin varlığı görüldü. Moffat 2α açısıyla kesişen düzgün ve hareketsiz iki duvar arasındaki iki boyutlu akış problemini inceleyerek kritik bir köşe açısı (146°) elde etti [7]. Bu açıdan daha büyük bir açıyla kesişen duvarların oluşturduğu köşe bölgesinde bir eddy'nin oluşmayacağını ortaya koydu. Liu ve Joseph kenarlarından bir ısı kaynağıyla ısıtılan daire dilimi şeklindeki bir kavitede Stokes akış problemini (ısı akışı) çözmek için değişkenlere ayırma yöntemine benzer bir yöntem geliştirdiler [8]. Ozalp vd., [9] üstü açık dildörtgensel, üçgensel ve yarım dairesel kavitelerdeki akış problemini deneysel olarak incelediler ve kavitenin görünüm oranlarının, akış yapılarına etkilerini araştırdılar. L şeklindeki kavitelerdeki akış yapıları ve eddy oluşum mekanizmaları hem dinamik sistemler hem de nümerik yöntemler kullanılarak Deliceoğlu ve Aydın tarafından elde edildi [10,11].

1.1. Stokes Akış

Kavitelerdeki Stokes akış problemi için yönetici denklem biharmonik denklem olup,

$$\nabla^4 \psi = 0$$

şeklindedir. Burada ψ bilinmeyen, akış fonksiyonu olarak adlandırılır. Bu denklem akış bölgesinin geometrik yapısına göre kartezyen, silindirik, . . . v.b. koordinatlarda

ifade edilebilir. Dikdörtgensel kavitelere Stokes akış problemi için biharmonik denklem kartezyen koordinatlarda alınırken, kutupsal koordinatlarla ifade edilebilen kavitelere biharmonik denklemin kutupsal formda alınması daha uygundur. Stokes akış problemi üzerine yaklaşık 160 yıldır çalışmalar yapılmasına rağmen analitik çözümü sadece düzgün geometriler için elde edilebildi. Bunun en önemli nedeni ise kavite sınır koşullarının matematiksel ifadesinde karşılaşılan problemlerdir. Stokes, akışkan içerisindeki bir küreden geçen akışı düşündü ve basınç ile hız alanlarına karar verdi [12]. Daha sonra Stokes akış problemi birçok araştırmacı tarafından çeşitli problemlerle ele alındı. Oberbeck Stokes akış problemini bir elipsoid için ele aldı [13]. Jeffrey ise dönen iki silindir arasında kalan iki boyutlu sonlu bir bölge için biharmonik denklemi çözerek ilk "akış çizgisi" resmini elde eden araştırmacı oldu [14].

Smith, yarı sonsuz şeritsel bir bölgede biharmonik denklemi çözmek için bir algoritma geliştirdi ve biortogonallik şartları adı altında bazı şartlar ortaya koydu [15]. Bu şartlar analitik çözümün bölgenin sınırları üzerindeki data'lara yeterince yakınsamasını garanti etmeyi amaçladı. Smith'in bu çözümü daha sonra kenarları ısıtılmış dikdörtgensel bir kavite içerisindeki Stokes akışı analiz etmek için Joseph & Sturges tarafından kullanıldı ve Smith'in sınır data'ları üzerindeki biorthogonality şartlarının pratik uygulamalar için oldukça sınırlı olduğu görüldü [16]. Bunun üzerine Joseph & Sturges, Smith'in türettiği analitik seri çözümünü biraz daha geliştirerek daha geniş bir alanda kullanılabilir hale getirdiler [17]. Bu gelişmiş yöntem bu güne kadar sayısız çalışmada kullanılmasına rağmen, Stokes akış problemini çözmek için geliştirilen bu method tam anlamıyla sınırsız bir uygulanabilirliğe sahip değildi. Çünkü çözüm algoritmasında biortogonallik özelliğinin nasıl elde edileceğine dair genel bir ifade yoktu. Khuri yaptığı çalışmada Joseph & Sturges tarafından geliştirilen analitik çözüm methodunu bütün uygulamalarda kullanılabilecek hale getirdi [18]. Bu çalışmayla biortogonallik şartları özel bir Stokes akış problemi için sınırlı olmaktan çıktı. Khuri geliştirdiği bu biortogonallik şartlarını ilk olarak sektörel kavite içerisindeki Stokes akış probleminin analitik çözümünü buldu. Daha sonraları küresel, dikdörtgensel ve kama şeklindeki (wedge-shaped) geometriler içerisindeki Stokes akış için biortogonallik şartlarını elde etti [19-21]. Bu çözüm yöntemi kullanılarak sektörel bir kavite içerisindeki Stokes akış yapıları, çatallanmalar (bifurcations) kavitenin

farklı görünüm ve kapak hızı oranlarına bağlı olarak detaylı olarak ortaya kondu [22-23].

Bu çalışmalar gösterdi ki kavite geometrisinin değişmesi ile Stokes akış probleminin çözümünde de bir takım farklılıklar görülür. Geometrinin değişmesi en çok biortogonallik şartının elde edilmesi kısmında farklı ve karmaşık durumlar ortaya çıkardı. Bu zor ve karmaşık problem Khuri tarafından yapılan çalışmalarla daha kolay hale getirildi [18].

Yüksekliği $2H$ ve genişliği $2L$ olan dikdörtgensel kaviteler içerisindeki Stokes akış probleminin ilk nümerik çözümü Burggraf tarafından yapıldı [24]. Bu problemde görünüm oranı $A = H/L$ olarak alındı. Burggraf sonlu farklar methodunu uygulayarak karesel bir kavite içerisindeki Stokes akış problemini çözdü. Pan & Acrivos $A \in [0.25, 0.5]$ görünüm oranına sahip kaviteler içerisindeki kapakla sürülen akış problemi için sonlu farklar methodunu kullanarak detaylı bir nümerik çözüm elde etti [25]. Çalışmaları sonunda görüldü ki $A < 1$ için kavitenin içerisinde tek bir eddy (girdap) oluşurken görünüm oranı olan A nın değeri büyüdüğünde kavite içerisindeki eddy sayısı arttı. Aynı zamanda onların çalışmalarında A nın bütün değerleri için hareketsiz duvarların oluşturduğu köşelerde küçük köşe eddy lerinin varlığı gözlemlendi ki bu köşe eddy lerinin varlığı zaten Moffat tarafından bildirilmişti [7].

Harper ve Wake sonsuz genişlikte ve tek kapakla sürülen dikdörtgensel kavitelerdeki akış yapılarını bir öz fonksiyon çözümüyle elde etti ve hareketli kapaktan uzaklaştıkça daha cansız eddy lardan oluşan eddy serisinin meydana geldiğini gösterdi [26].

Yukarıda bazıları verilen çalışmalar daha çok nümerik ve analitik çözümler üzerine olup bu çözümlerin grafikleri çizilerek akış yapıları görselleştirilmiştir. Buna rağmen akış bölgesinin çok ince olması ya da akış çizgilerinin çok cansız olması (fonksiyon değerinin sıfıra çok yakın olması) durumunda akış yapılarını görmek mümkün olamamaktadır. Bu durumda bazı teorik metodlar geliştirilmiş olup bunlardan en önemlilerinden biri Brøns ve Hartnack tarafından geliştirilen normal form ve dinamik sistemler yardımıyla akış yapılarının belirlenmesi yöntemidir [27]. Bu yöntem kullanılarak dikdörtgensel kavilerdeki mümkün olan bütün akış yapıları ortaya

konmuştur [28-36].

1.2. Sıfırdan Farklı Reynolds Sayılı Akış (Navier-Stokes Akış, $Re \neq 0$)

Navier-Stokes denklem sistemi (N-S), ismini Cladue-Louis Navier ve George Gabriel Stokes'tan almış olan, akışkanların hareketini tanımlamaya yarayan denklemlerden oluşmaktadır. Akışkanın sürekli olduğu yani akışkanın tamamının aynı özellikte olduğu ve içinde farklı biçimlerin bulunmadığı kabul edilir.

Navier-Stokes denklemleri akışkan içerisindeki birim kütleye etki eden momentum değişimlerinin, sürtünme kayıplarına sebep olan viskoz kuvvetlerin ve basınç değişimlerinin toplamına eşit olduğunun doğruluğunu ortaya koymaktadır. Bu viskoz kuvvetler (sürtünmeye benzer) moleküller arası etkileşimlerden meydana gelmekte ve akışkanın akmaya ne kadar dirençli olduğunu göstermektedir. Sonuç olarak, Navier-Stokes denklemlerinin, verilen akışkanın herhangi bir bölgesindeki kuvvetler dengesinin dinamik ifadesi olduğu söylenebilir.

Bu denklemler, hava akımları ve okyanus akıntılarının, galaksideki yıldız hareketlerinin, elektrik üretiminin, hava durumu tahminlerinin ve kavitelerdeki akışın modellenmesinde ve hesaplanmasında sıkça kullanılırlar.

İki boyutlu N-S denklemleri ve süreklilik denkleminin genel şekli aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0\end{aligned}\tag{1.1}$$

Burada u ve v sırasıyla x ve y yönlerindeki hız bileşenleri, ρ yoğunluk, P basınç ve ν kinematik viskozitedir.

1.3. Akışkanlar Mekaniğinde Kullanılan Klasik Parametreler

Sonsuz sayıda boyutsuz parametre oluşturulabilir. Akışkanlar mekaniğinde sıklıkla kullanılan boyutsuz parametreler aşağıda verildi.

Reynolds Sayısı: 1880'li yıllarda İngiliz mühendis Osborne Reynolds bir boru içerisinde laminer akıştan türbülanslı akışa geçiş problemi üzerinde çalıştı. Bulduğu parametrenin akışın belirlenebilmesinde önemli bir kriter olduğunun farkına vardı. Daha sonraki deneylerde görüldü ki Reynolds sayısı diğer akış durumları için anahtar bir parametredir. Reynolds sayısı aşağıdaki gibidir:

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{V L}{\nu} = \frac{\text{eylemsizlik kuvvetleri}}{\text{viskozite kuvvetleri}} \quad (1.2)$$

Burada ρ yoğunluk, ν kinematik viskozite, V akış hızı (velocity), L uzunluk (akışın gerçekleştiği borunun çapı gibi) ve μ mutlak viskozitedir. Re sayısının küçük olması durumunda akışa ait akış çizgileri daha az kırılğan bir yapıya sahip olurken bu özel sayının büyük olması durumundaysa akışkanın kırılğanlığı artar. Dolayısıyla Re sayısının küçük olduğu akış yapıları daha düzgün olurken büyük olduğu akış yapıları daha karmaşık bir yapıya sahip olur. Re sayısının çok büyük değerlerinde belli bir akış yapısı gözlenemeyecek durumda olup bir kaos durumuyla karşılaşılır.

Froude Sayısı: İngiliz deniz subayı William Froude oğlu Edmund Froude ile birlikte bu sayıyı keşfettiler.

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gL}} \quad (1.3)$$

Froude sayısı atalet kuvvetlerinin yerçekimi kuvvetine oranıdır. $Fr > 1$ olduğunda kritiküstü akış mevcutken $Fr < 1$ olduğunda ise kritikaltı akış söz konusudur. Akışkanlarda serbest yüzey etkileri için çok önemli bir sayıdır. Bu sayının karesinin alınması durumundaysa eylemsizlik kuvvetlerinin yerçekimi kuvvetlerine oranı bulunur.

Euler Sayısı: Bu sayı

$$Eu = \frac{P}{\rho V^2} \quad (1.4)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada ρ , yerel basınçla serbest basınç arasındaki farktır. Bu orana ismi akışkanlar mekaniğinde analitik çalışmaları başlatan İsveçli matematikçinin ismi kendisinden sonra verilmiştir.

Weber Sayısı: Weber sayısı eylemsizlik kuvvetlerinin yüzey gerilim kuvvetlerine oranıdır.

$$Wc = \frac{\rho V^2 L}{\sigma} \quad (1.5)$$

şeklindedir.

Cauchy Sayısı: Elastik tesirin etkisini ihtiva eder. Eylemsizlik kuvvetlerinin elastik kuvvetlere oranıdır. Bu oran şu şekildedir.

$$C_{au} = \frac{\rho V^2}{E} \quad (1.6)$$

Prandtl Sayısı: Sıcaklık etkisini gösterir.

$$Pr = \frac{C\mu}{k} \quad (1.7)$$

Mach Sayısı: 1870'li yıllarda fizik bilimiyle uğraşan Avusturya'lı Ernst Mach tarafından tanıtıldı. Akışkanların sıkıştırılabilirlik özelliğini temsil eder. Sıkıştırılmaz akışkanlar için $C = \infty$ ve $M = 0$ olur. C yerel ses hızını ve V akış hızını simgeler.

$$M = \frac{V}{C} \quad (1.8)$$

Bu boyutsuz sayılar sistemlerin benzerliği için kullanılırlar. Örneğin yerçekimi kuvvetinin önemli olduğu durumlarda Froude sayısı benzerliği, sürtünme kuvvetlerinin önemli olduğu benzerlik uygulamalarında Reynolds sayısı benzerliği, basınç kuvvetlerinin önemli olduğu ortamlarda ise Euler sayısı benzerliği önem kazanır.

1.4. Lokal Akış Analizi

Kapalı bir bölgedeki viskoz akışların ($Re = 0$) akış fonksiyonunu elde etmek için biharmonik denklemin analitik çözümünü elde etmek gerekir. Bu analitik çözüm bölgenin sınırları üzerindeki şartları tam olarak sağladığı takdirde geçerli bir çözümdür. Tabii ki her zaman mümkün olmayabilir. Böyle durumlarda ise bölgenin içerisindeki özel bir noktada ya da lokal bir bölgede çözüm yapılması daha uygun olacaktır. Çünkü köşe eddy'lerinin olduğu bölgelerde çoğunlukla akış çizgilerinin akış fonksiyonu değerleri oldukça küçüktür ve bu bölgelerde ayrıntılı bir çalışma yapmak zor olabilir. Sadece bu bölgeye ait bir çözüm geliştirilerek bölge daha net olarak taranır.

Durgun (kritik) noktalar civarındaki akış hakkında daha net bilgi edinmek amacıyla Jeffrey & Shewood sonsuz bir seri olarak ifade edilen akış fonksiyonu için lokal bir analiz uyguladı [37]. Bu durgun noktalar ya bir center (merkez) noktası ya da bir saddle (dügüm, eyer) noktasıdır. Onlar aynı zamanda bir ya da daha fazla akış çizgisinin sert bir duvar üzerindeki birleşim noktası olarak bilinen ayırma noktaları civarındaki akış çizgileri üzerinde çalıştılar. Düzgün sabit bir duvar üzerindeki iki saddle noktası arasındaki bağlantı Bakker tarafından analiz edildi [38].

Durgun nokta civarında hız vektörlerinin genişletilmesine dayanan ve dinamik sistemler yardımıyla, bu noktanın topolojik yapısına karar verilen, ayrıca bu durgun nokta civarındaki akış yapılarını ve muhtemel çatallanmaları (bifurcations) belirlemeye yarayan yöntem Brons ve Hartnack tarafından geliştirildi [27].

1.5. Tezin Ana Hatları

Kavite akış problemleri üzerine yapılan çalışmaların bir çoğu dikdörtgensel kaviteler üzerine yapılmıştır. Kavite geometrisinin daha karmaşık olması nedeniyle halkasal yada daha kompleks yapıya sahip kavitelerdeki akış problemleri üzerinde daha az sayıda çalışmaların olduğu gözlemlendi. Bu çalışmada dikdörtgensel kavitelerdeki akış problemleri ile giriş yaparak benzer çözüm yönteminin yarım halka tipindeki kaviteler üzerine uyarlanışını göstererek, bu tür bir akış probleminde hangi akış yapılarıyla karşılaşılacağı ortaya konmuştur.

Tezin ilk bölümünde temel tanım ve denklemlere yer verildi. Akış problemlerinde karşılaşılan bazı fiziksel parametreler tanıtıldı.

2. bölümde karşılıklı iki duvarının hareketli, diğer sınırlarının serbest yüzey (free surface) yani hava sıvı arakesiti olan dikdörtgensel kavitedeki Stokes akış probleminin analitik çözümü ele alındı. Bu çözüm kullanılarak kavitenin görünüm oranı olan A parametresine bağlı akış yapıları gösterildi.

Tezin 3. bölümünde tek kapakla sürülen yarım halka şeklindeki kavite içerisindeki Stokes akış problemi analitik olarak çözülerek, (S, A) parametrelerine bağlı akış yapıları incelendi. Biharmonik denklemde bilinmeyen değişken olarak alınan akış

fonksiyonu kompleks öz fonksiyonlar ve kompleks öz değerlerinin bir sonsuz serisi olarak düşünöldü. Kavite görünüm parametresi olan A parametresinin değışmesiyle kavite içerisindeki eddy sayısının değıştiği gösterildi.

4. bölümde ise karşılıklı hareket eden 2 kapak ve 2 sabit duvarla sürölen yarım halka tipindeki kavitelerdeki Stokes akış problemi Joseph & Sturges tarafından elde edilen ve Khuri tarafından geliştirilen biorthogonal seri çözüm yöntemi kullanılarak seri çözümü elde edildi. Kavitenin görünüm oranı olan A ve kapakların hızları oranı olan S parametrelerine göre oluşan akış yapıları, durgun nokta çatallanmaları ve eddy oluşum mekanizması elde edildi.

2. BÖLÜM

ÇİFT KAPAKLA SÜRÜLEN DİKDÖRTGENSEL KAVİTEDE STOKES AKIŞ

2.1. Giriş

Bu bölümde hareketli iki kapak ve iki serbest yüzey ile sınırlandırılmış dikdörtgenel kavitedeki Stokes akış problemi ele alınacaktır (bkz Şekil 2.1).

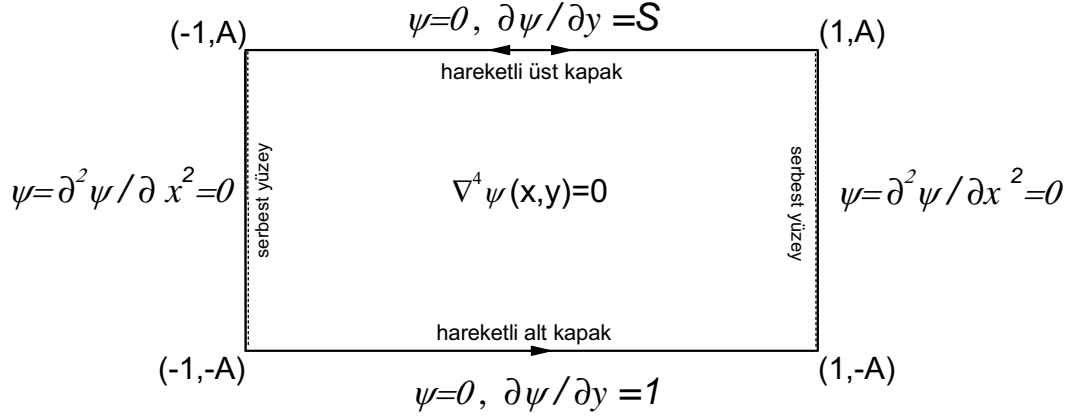
Joseph ve Sturges sıkıştırılmaz (yoğunluğu sabit) akışkanla doldurulmuş, tek kapakla sürülen dikdörtgenel kavite içerisindeki Stokes akış problemi üzerinde çalıştılar [12]. Joseph ve Sturges tarafından geliştirilen analitik çözüm methodu, akış fonksiyonunun Papkovic-Fadle öz fonksiyonlarının bir serisi olarak ifade edilmesine dayanır.

Dikdörtgenel kavite için özel durumları için ilk nümerik çözümler sonlu farklar methodu kullanılarak elde edildi [15,16]. Daha sonra araştırmacılar analitik çözümlerle nümerik çözümleri mukayese ettiler ve çoğu zaman bu çözümlerin sonuçlarının birbirine oldukça yakın olduğu gözlemlendi.

Joseph ve Sturges 'in geliştirdiği biorthogonal seri çözüm methodunu kullanarak, dikdörtgenel bir kavite için, kavitenin görünüm oranı olan A nın değiştirilmesiyle oluşan çeşitli akış yapıları, Gürçan tarafından detaylı bir şekilde ortaya konuldu [29]. Gürçan, kavitenin görünüm oranı olan A parametresini azar azar büyültmek kaydı ile eddy (girdap) oluşum mekanizmasını çatallanma (bifurcation) diyagramları ile gösterdi.

Bu bölümde ele alınan yan duvarları serbest yüzey olan dikdörtgenel kavitedeki akış yapıları ve çatallanmalar için detaylı bir araştırma Gaskell vd. tarafından yapıldı [39].

2.2. Biharmonik Denklem



Şekil 2.1. Çift kapakla sürülen dikdörtgensel kavite ve sınır koşulları

Yoğunluğu ρ ve viskozitesi η olan sıkıştırılmaz akışkan için kararlı bir Newtonian akışı yöneten denklem, ilk bölümde de verilen Navier-Stokes denklemi olup, bu denklem,

$$\underbrace{\rho \underline{q} \cdot \nabla \underline{q}}_{\text{atalet terimi}} = \underbrace{-\nabla P}_{\text{basınc terimi}} + \underbrace{\eta \nabla^2 \underline{q}}_{\text{viskoz terimi}}, \quad (2.1)$$

ve süreklilik denklemi

$$0 = \nabla \cdot \underline{q} \quad (2.2)$$

şeklindedir. Burada \underline{q} ve P sırasıyla akışkan için hız ve basınç değişkenleridir. Viskoz (yapışkanlık) ve basınç terimlerine göre atalet terimlerinin önemsenemeyecek kadar küçük olduğu kabul edilerek (2.1) denklemi Stokes denklemine indirgenir,

$$0 = -\nabla P + \eta \nabla^2 \underline{q}. \quad (2.3)$$

(2.3) denkleminde curl operasyonu ile basınç gradient terimi ∇P elimine edildi. Böylece,

$$0 = \nabla \wedge \nabla^2 \underline{q} \quad (2.4)$$

elde edilir. Ψ akış fonksiyonu (stream function) olduğundan, x yönündeki hız bileşeni

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (2.5a)$$

ve y yönündeki hız bileşeni

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (2.5b)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece (2.4) denklemi Ψ için aşağıdaki biharmonic denkleme indirgenir.

$$\nabla^4 \Psi(x, y) = 0 \quad (2.6)$$

2.3. Sınır Koşulları

Karşılıklı hareket eden iki kapak ve karşılıklı iki serbest yüzeyden oluşan dikdörtgensel bölge içerisindeki Stokes akış, yukarıda ifade edildiği gibi biharmonic denklem tarafından yönetilir. Kartezyen formdaki biharmonic denklem,

$$\nabla^4 \Psi(x, y) = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \Psi(x, y) = 0 \quad (2.7)$$

şeklindedir. No-slip şartları gereğince sınır koşulları oluşturulur. No-slip şartlarına göre herhangi iki nokta arasından geçen akış miktarındaki farka o noktadaki akış fonksiyonunun değeri denir. Buna göre bütün kenarlarda akış fonksiyonu sıfırdır.

$$\Psi(x, A) = 0 \quad (2.8a)$$

$$\Psi(x, -A) = 0 \quad (2.8b)$$

Benzer şekilde bir yüzeyin hızı ne ise o yüzeye temas eden akışkanın hızı da odur. Buna göre üst kapağın hızını S , alt kapağın hızını 1 olarak seçerek bu şartlar,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, A) = S \quad , \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, -A) = 1 \quad (2.9)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Sadece serbest yüzey (free surface) problemlerinde ortaya çıkan ve serbest yüzeyin geriliminin sıfır olduğunu ifade eden sınır koşulu

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(\pm 1, y) = 0 \quad (2.10)$$

şeklinde ifade edilir.

2.4. Dikdörtgensel Kavite için Biortogonal Seri Çözümü

(2.7) denklemini sağlayan akış fonksiyonunun değişkenlere ayrılmış şeklini

$$\Psi(x, y) = A(x)B(y) \quad (2.11)$$

olarak gözününe alalım. (2.11) ifadesini (2.7) denkleminde yerine yazıp gerekli düzenlemeler yapılarak $A(x)$ ve $B(y)$ fonksiyonları,

$$A(x) = \cos \lambda x \quad (2.12)$$

$$B(y) = y(Ae^{\lambda y} + Be^{-\lambda y}) + Ce^{\lambda y} + De^{-\lambda y} \quad (2.13)$$

şeklinde elde edildi. Üst üste ekleme (super position) özelliği gereğince akış fonksiyonu için aranan çözümün

$$\Psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \{y(A_n e^{\lambda_n y} + B_n e^{-\lambda_n y}) + C_n e^{\lambda_n y} + D_n e^{-\lambda_n y}\} \cos \lambda_n x \quad (2.14)$$

şeklinde olacağı açıktır. Bu durumda problem A_n, B_n, C_n, D_n katsayılarıyla birlikte λ_n öz değerlerinin bulunmasına indirgendi. Bunları bulabilmek için (2.14) denkleminde sınır koşullarını uygulayacağız.

(2.10) da verilen şartı uyguladığımızda λ_n öz değerlerimiz

$$\lambda_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi, (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.15)$$

elde edilir. (2.8a) sınır koşulunu (2.14) denkleminde uyguladığımızda

$$D_n = -A[A_n e^{2\lambda_n A} + B_n] - C_n e^{2\lambda_n A} \quad (2.16)$$

elde edilip,

$$C_n = E_n - AA_n \quad (2.17)$$

şeklinde seçerek (2.14) denklemini daha basite indirgenmiş hali olan

$$\Psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (y - A)(A_n e^{\lambda_n y} + B_n e^{-\lambda_n y}) + E_n e^{\lambda_n y} (1 - e^{2\lambda_n(A-y)}) \right\} \cos \lambda_n x \quad (2.18)$$

şeklinde yazabiliriz.

(2.8b) sınır koşulunu (2.18) denkleminde uyguladığımızda

$$E_n = \frac{-A(A_n e^{-2\lambda_n A} + B_n)}{\sinh 2\lambda_n A}$$

olmak üzere

$$\Psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (y - A)(A_n e^{\lambda_n y} + B_n e^{-\lambda_n y}) + \frac{-A(A_n e^{-2\lambda_n A} + B_n)}{\sinh 2\lambda_n A} e^{\lambda_n y} (1 - e^{2\lambda_n(A-y)}) \right\} \cos \lambda_n x \quad (2.19)$$

elde edildi.

(2.9) da verilen hız koşullarını (2.19) denkleminde uyguladığımızda

$$A_n \left(e^{\lambda_n A} - \frac{2A\lambda_n}{\sinh 2\lambda_n A} e^{-\lambda_n A} \right) + B_n \left(e^{-\lambda_n A} - \frac{2A\lambda_n}{\sinh 2\lambda_n A} e^{\lambda_n A} \right) = \frac{2S}{\lambda_n} (-1)^{n+1} \quad (2.20a)$$

ve

$$A_n \left(e^{-\lambda_n A} - \frac{2A\lambda_n}{\sinh 2\lambda_n A} e^{\lambda_n A} \right) + B_n \left(e^{\lambda_n A} - \frac{2A\lambda_n}{\sinh 2\lambda_n A} e^{-\lambda_n A} \right) = \frac{2}{\lambda_n} (-1)^{n+1} \quad (2.20b)$$

elde edilir.

(2.20a) ve (2.20b) denklemlerinden A_n ve B_n çözüldüğünde

$$A_n = \frac{(-1)^{n+1} \left[\left(e^{\lambda_n A} - \frac{2A\lambda_n}{\sinh 2\lambda_n A} e^{-\lambda_n A} \right) S - \left(e^{-\lambda_n A} - \frac{2A\lambda_n}{\sinh 2\lambda_n A} e^{\lambda_n A} \right) \right]}{\frac{\lambda_n}{\sinh 2\lambda_n A} (\sinh^2 2\lambda_n A - 4\lambda_n^2 A^2)} \quad (2.21)$$

$$B_n = \frac{(-1)^{n+1} \left[\left(e^{\lambda_n A} - \frac{2A\lambda_n}{\sinh 2\lambda_n A} e^{-\lambda_n A} \right) - S \left(e^{-\lambda_n A} - \frac{2A\lambda_n}{\sinh 2\lambda_n A} e^{\lambda_n A} \right) \right]}{\frac{\lambda_n}{\sinh 2\lambda_n A} (\sinh^2 2\lambda_n A - 4\lambda_n^2 A^2)} \quad (2.22)$$

olarak bulunur. Böylece (2.19) denkleminde indirgenen akış fonksiyonu içerisinde yer alan bilinmeyen katsayılar elde edildi. Bu katsayılar ve λ_n özdeğerleri yerlerine yazılarak akış fonksiyonunun seri çözümü elde edilir. Bundan sonraki mesele ise seri çözümdeki indis üst sınırının belirlenmesidir. Sınır koşullarının sağlanması ve daha fazla terimin eklenmesinin sonuca etki etmemesi göz önüne alınarak, seri toplamının ilk 40 teriminin alınmasının yeterince yakınsama sağladığı görüldü.

2.5. Sonuçlar

Seri çözümü elde edilen akış fonksiyonunun bölgenin her bir noktasındaki değeri hesaplanarak akış yapıları elde edildi.

2.5.1. Simetrik akış $S = -1$

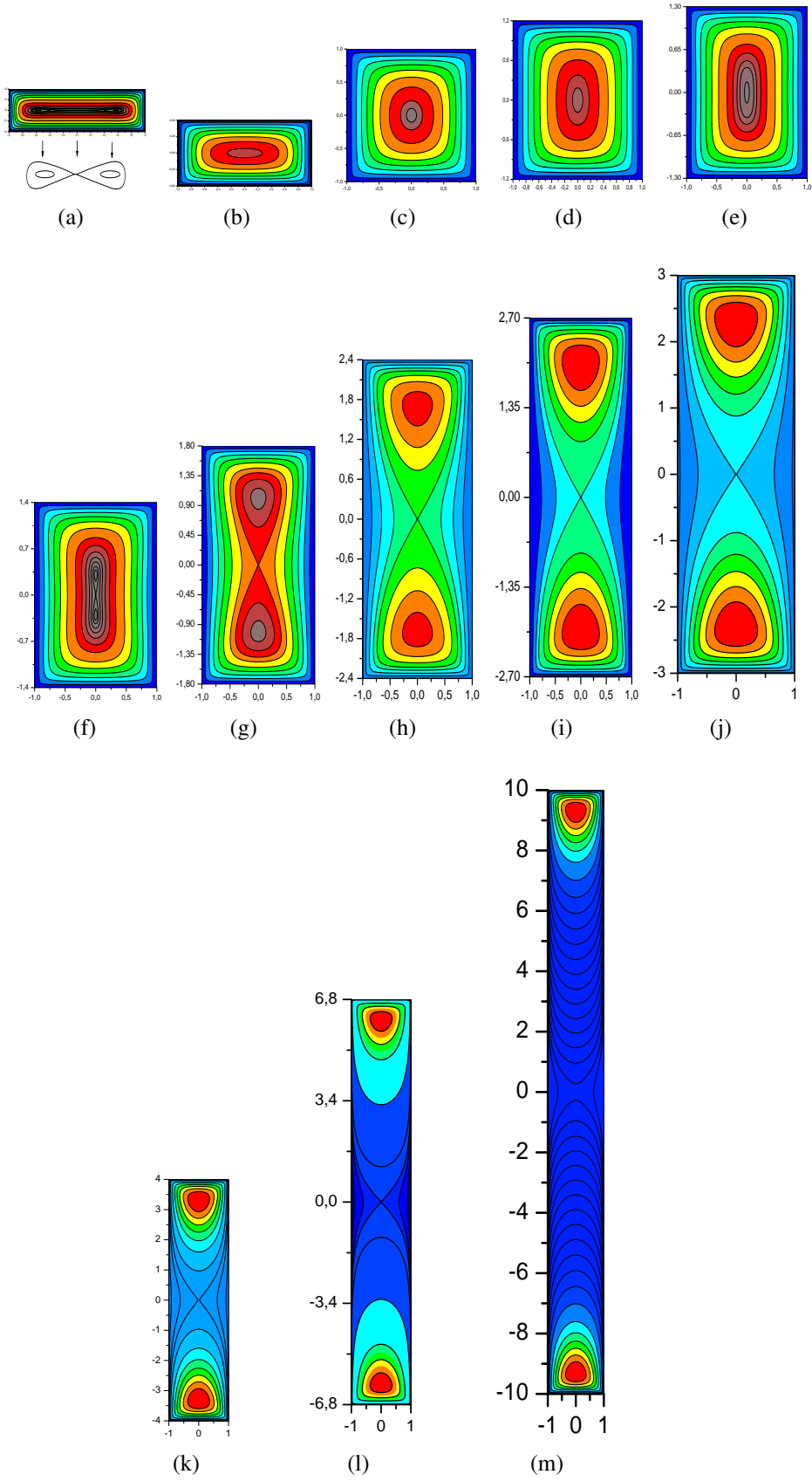
İlk olarak $A = 0.2$ için akış yapısı çizdirildi (bkz. Şekil 2.2a). Kavitenin merkezinde (simetrik akış olduğu için) bir eyer (saddle) noktası ve bu noktada birbirine bağlanmış iki alt eddy görüldü. Her bir alt eddy ise birer merkez (center) kritik noktaya sahiptir. Dolayısıyla kavite içerisinde toplamda 3 durgun noktaya sahip bir akış yapısı görülür. Kavitenin görünüm oranı olan A parametresi yavaşça artırıldığında alt eddy lerdeki center noktaların giderek saddle noktasına aynı hızla yaklaştığı görüldü. Kritik görünüm oranı olan $A = 0.3923$ 'e ulaşıldığında bu iki center noktanın, ortalarında bulunan saddle noktasıyla birleşmesi ve aynı anda bu saddle noktasının bir Pitchfork çatallanması (yani durgun noktanın yapısının eyerden merkeze ya da tersine

dönüşmesi) ile center noktasına dönüştüğü görüldü. Böylece kavite içerisindeki kritik (durgun) nokta sayısı 3'ten 1'e düşmüş oldu (bkz. Şekil 2.2b, burada $A = 0.5$). A parametresinin bir miktar daha da büyütülmesiyle kavite merkezindeki center kritik noktanın değişmediği, akış yapısının her iki eksene göre simetrisinin bozulmadığı görüldü (bkz. Şekil 2.2c-e). Görünüm oranının büyütülmesine devam edildiğinde ikinci bir kritik A değeri ile karşılaşıldı. $A = 1.3523$ kritik değerinde mevcut center noktanın ikinci bir Pitchfork çatallanmasıyla saddle yapıya dönüştüğü görüldü (bkz. Şekil 2.2f, burada $A = 1.4$). Yine bu saddle noktaya bağlı iki alt eddy gözlemlendi. Ancak bu alt eddy'lerin ilk baştakinden farklı olarak düşey eksene paralel olduğu gözlemlendi. Bu aşamadan sonra Şekil 2.2g-m'den de görüldüğü gibi, A parametresinin artırılmasıyla yeni bir bifurcation gerçekleşmeyeceği ve kavite içerisinde ikinci Pitchfork çatallanmasından sonraki akış topolojisinin bozulmadan kalacağı görüldü. Sadece saddle noktasına bağlı iki alt eddy lere ait center durgun noktaları giderek saddle noktasından uzaklaştılar.

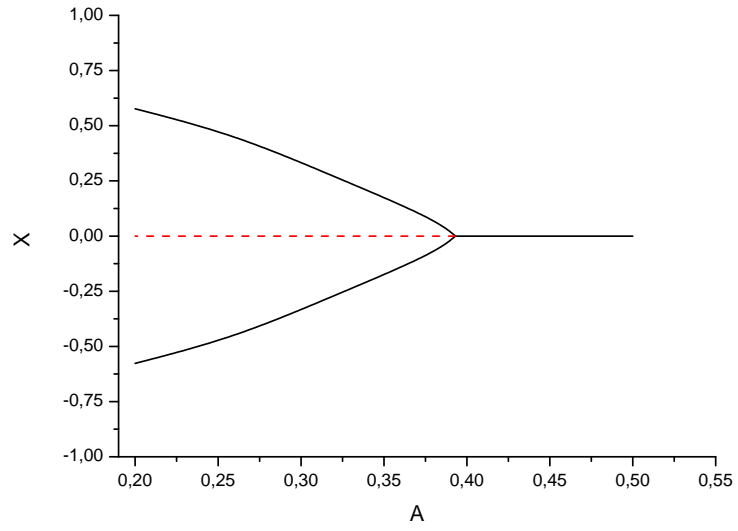
A parametresinin çok daha artırılmasının yeni bir yapı oluşturmayacağı ve mümkün olan akış yapıları ($A > 0.2$ için) gösterildi. Ayrıca elde edilen çatallanma diyagramları Şekil 2.3'de verildi. Burada önemli sorunlardan birisi de A 'nın 0.2'den daha küçük değerlerinde nasıl akış yapılarının gözleneceğidir. Elde ettiğimiz çözümden elbette ilgili akış figürleri çizdirilebilir ancak Şekil 2.2a'dan da görüldüğü gibi daha ince yapıları (yani A 'nın küçük değerlerinde) kavite içindeki akış yapılarına göz ile karar vermek imkansız hale gelecektir. Bu ve buna benzer problemlere çözüm üretebilmek için, dinamik sistemler ve normal form teorisi kullanılarak geliştirilen, durgun nokta civarındaki akış yapılarını belirlemeye yarayan kullanışlı bir yöntem Brons ve Hartnack tarafından geliştirilmiş olup ele aldığımız problemde, A parametresinin 0.20'den daha küçük değerleri için karşılaşılabilecek muhtemel akış yapıları hakkında bazı çalışmalar yapılmıştır [27, 33, 39].

2.5.2. Simetrik olmayan akış $S = -0.38$

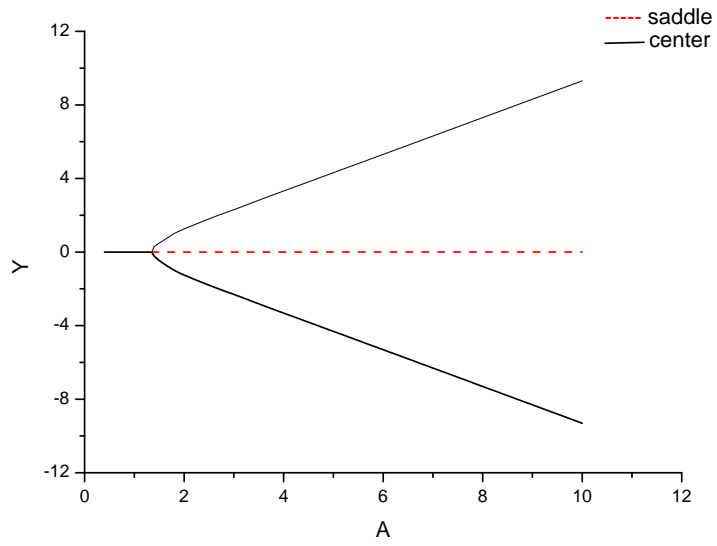
Simetrik olmayan durumlarda da $S = -1$ deki benzer akış yapılarına ve çatallanmalara ulaşıldı. Örnek olarak $S = -0.38$ için yani üst kapağın hızını -0.38 alt kapağın hızını ise 1 olarak aldık. Simetrik duruma göre, akış yapıları ve



Şekil 2.2. $S = -1$ için görünüm oranı olan A değerinin artışıyla eddy oluşumu.
a) $A = 0.2$, b) $A = 0.5$, c) $A = 1$, d) $A = 1.2$, e) $A = 1.3$, f) $A = 1.4$,
g) $A = 1.8$ h) $A = 2.4$, i) $A = 2.7$, j) $A = 3.0$, k) $A = 4.0$, l) $A = 6.8$,
m) $A = 10.0$

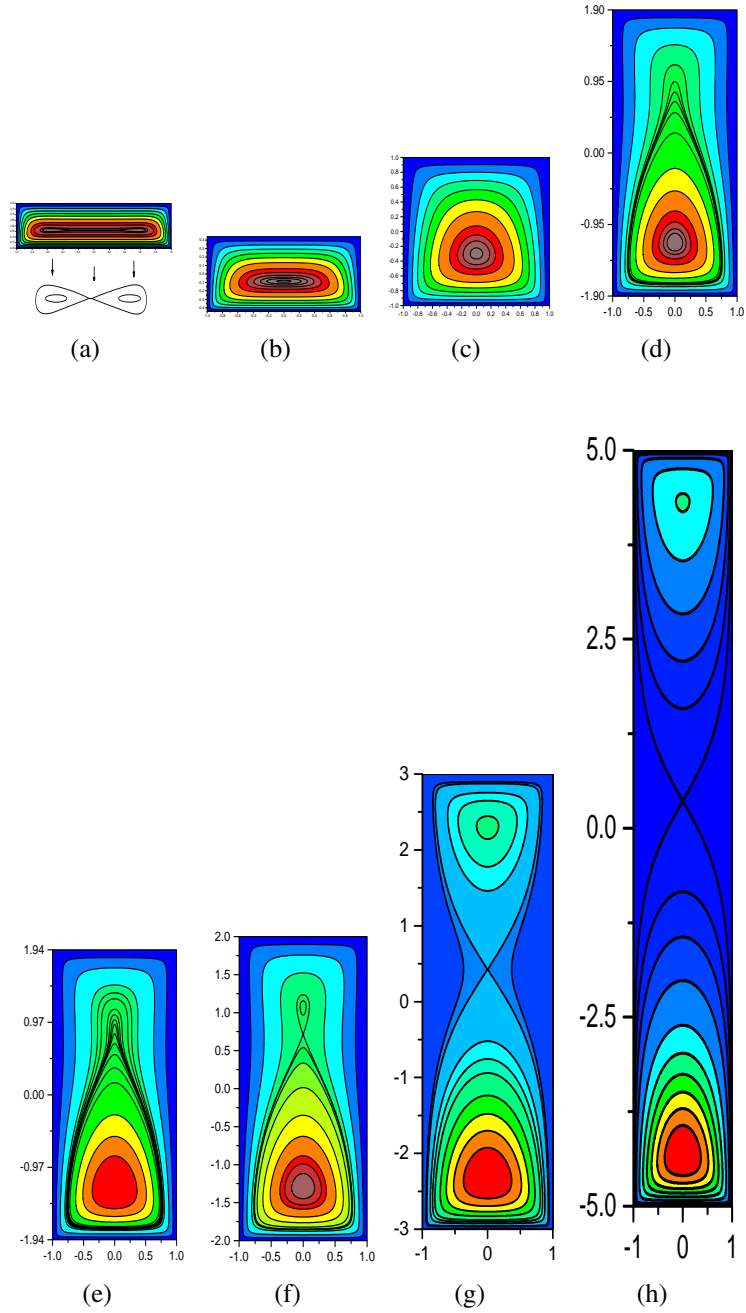


(a)



(b)

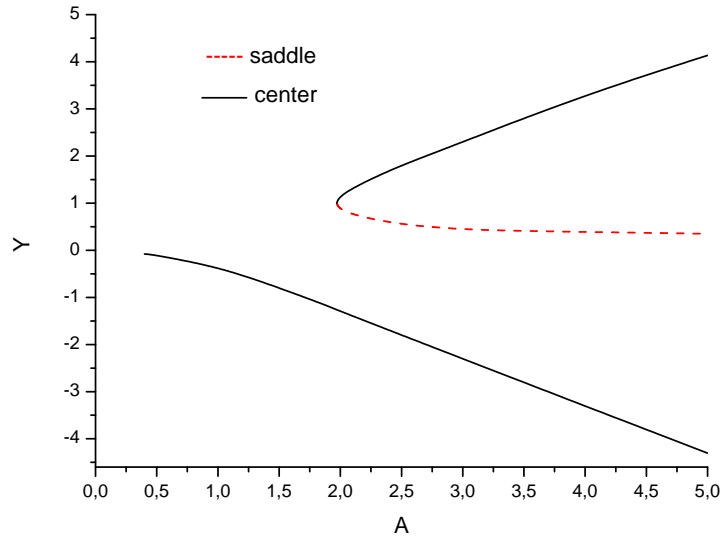
Şekil 2.3. $S = -1$ için bifurcations diyagramları



Şekil 2.4. $S = -0.38$ için görünüm oranı olan A değerinin artışıyla eddy oluşumu.
a) $A = 0.2$, b) $A = 0.44$, c) $A = 1$, d) $A = 1.9$, e) $A = 1.94$, f) $A = 2.0$,
g) $A = 3.0$ h) $A = 5.0$

çatallanmalarında iki önemli fark görüldü:

- i) Akış yapısı her iki eksene göre değil sadece y eksenine göre simetriktir. ii) Simetrik akış durumunda Pitchfork çatallanmaları görülürken, simetrik olmayan bu durumda saddle-node (cusp) çatallanmaları da gözlemlendi.



Şekil 2.5. $S = -0.38$ için bifurcations diyagramı.

$S = -0.38$ için farklı görünüm oranlarındaki akış yapıları Şekil 2.4'de gösterildi. Başlangıç olarak $A = 0.2$ alındı. Bu durumda simetrik akıştan farklı olarak, kavitenin her iki eksene göre merkezinde olmayan, sadece yatay eksene göre merkezde olan $(0, 0.042)$ noktasında bir saddle noktası ve bu yine noktada birbirine bağlanmış iki alt eddy görüldü (bkz. Şekil 2.4a). A parametresinin yavaşça artırılmasıyla, simetrik durumdaki separatrix adı verilen yapıdaki alt eddy lere ait center yapıdaki durgun noktaların saddle noktasına yaklaştığı ve $A = 0.398$ kritik görünüm oranında 3 durgun noktanın birleşerek bir Pitchfork çatallanmasıyla tek bir center noktaya dönüştükleri görüldü (bkz. Şekil 2.4b, burada $A = 0.44$). Görünüm oranının daha da büyütülmesiyle kavite içerisinde ve merkezi $y = 0$ ekseninin altında olan tek bir eddy olduğu görüldü (bkz. Şekil 2.4c-e). $A = 1.971$ kritik görünüm oranına ulaşıldığında ise bir cusp bifurcation olayının gerçekleşmesiyle iki (biri saddle diğeri center) yeni durgun nokta oluştuğu görüldü (bkz. Şekil 2.4f, burada $A = 2$). Yeni oluşan akış yapısına dikkat edilirse ortada bir saddle nokta ve bu noktada birbirine bağlanmış birer center noktaya sahip iki alt eddy görülür. Simetrik akış durumundan farklı olarak üstteki center noktanın alttakine göre saddle noktaya daha yakın olduğu görülmektedir. A parametresinin daha da artırılması durumunda akış yapısında herhangi bir bifurcation görülmemekte olup sadece center noktalar giderek saddle durgun noktadan uzaklaşmaktadırlar (bkz. Şekil 2.4h).

3. BÖLÜM

KAPAKLA SÜRÜLEN YARIM HALKA ŞEKLİNDEKİ KAVİTEDE STOKES AKIŞ

3.1. Giriş

Bu bölümde düz kenarlarından biri yada ikisi hareketli, karşılıklı eğrisel kenarların hareketsiz duvar olarak alındığı Şekil 3.1’de gösterilen sıkıştırılmaz akışkanla dolu bir sektörel kavitenin sektör açısının $\alpha = \frac{\pi}{2}$ alınmasıyla elde edilen yarım halka (annular) şeklindeki kavitedeki Stokes akış problemini ele aldık (bkz Şekil 3.2). Bu türden problemler, çeşitli nümerik çözüm metodlar ile çözülebilmekte olup, biz problemin yarı analitik çözümü üzerinde durduk. Yarı analitik denmesinin nedeni, çözümün alt ve üst indislerinin sonsuz olduğu seriler şeklinde elde edilmesindedir. Problemin çözümü için Papkovich–Fadle öz fonksiyon genişleme metodu kullanıldı. Bu çözüm metodu, öz değerlerin ve öz fonksiyonların belirlenmesi, biorthogonallik şartları ve öz fonksiyonların genişlemesiyle elde edilen katsayıların elde edilmesine dayanır.

Sert duvarlardan oluşmuş, yarı sonsuz bir bölge için biorthogonal seri çözümü tekniği ilk olarak R.C.T. Smith [26] tarafından elde edildi. Smith’in çözüm metodunu kullanarak, Bearers ve Fosdick [40] farklı hızlarda dönen silindirler arasındaki serbest yüzey (free surface) problemini çözdüler. Buna benzer bir problem olarak yarıya kadar akışkanla doldurulmuş dönen iki silindir arasında kalan serbest yüzey problemi (half filled annulus) detaylı olarak Gaskell vd. tarafından çalışıldı [41]. Onlar silindirlerin çaplarından kaynaklanan değişik görünüm oranları ve silindirlerin farklı hızları için ayrıntılı bir kontrol uzay diyagramı oluşturdu. Bu tez çalışmasında Gaskell vd. tarafından çalışılan akış bölgesine geometrik olarak benzeyen fakat sınır koşulları olarak tamamen farklı bir model ele alındı.

Khuri [18] sıkıştırılmaz (yoğunluğu sabit) akışkanla dolu, tek kapakla sürülen sektörel bir kavite içerisindeki Stokes akış problemini çözmek için bir öz fonksiyon genişleme metodu inşa etti. Aslında bu metot daha çok, çözüm algoritmasında kullanılacak olan biortogonalite şartlarının belirlenmesine dayanır. Bu metodun algoritması, Joseph & Sturges [17] tarafından elde edilen ve benzer bir problem olan dikdörtgenel kavite için olanla yakın ilişkilidir. Ancak, Joseph ve Sturges'in çözüm için kullanılmak üzere elde ettikleri biorthogonalite şartı dikdörtgenel kavite için kullanılabilirliği ile sınırlıydı. Dolayısıyla daha farklı geometrik şekillerdeki kavite için uygulanamamaktaydı. Khuri [18] yaptığı çalışma ile biorthogonalite şartlarının değişik şekillerdeki kavite için de elde edilmesine olanak sağladı.

Joseph ve Sturges [17] ve Khuri [18]'nin geliştirdiği biorthogonal seri çözüm metodunu kullanarak, sektörel bir kavite için, kavitenin görünüm oranı olan A ve kapakların hızları oranı olan S 'in değiştirilmesi ile oluşan çeşitli akış yapıları, detaylı bir şekilde ortaya konuldu [22,23]. A ve S parametrelerinin değiştirilmesiyle sektörel kavitede eddy (girdap) oluşum mekanizmasını çatallanma (bifurcation) diyagramları ile gösterildi [22].

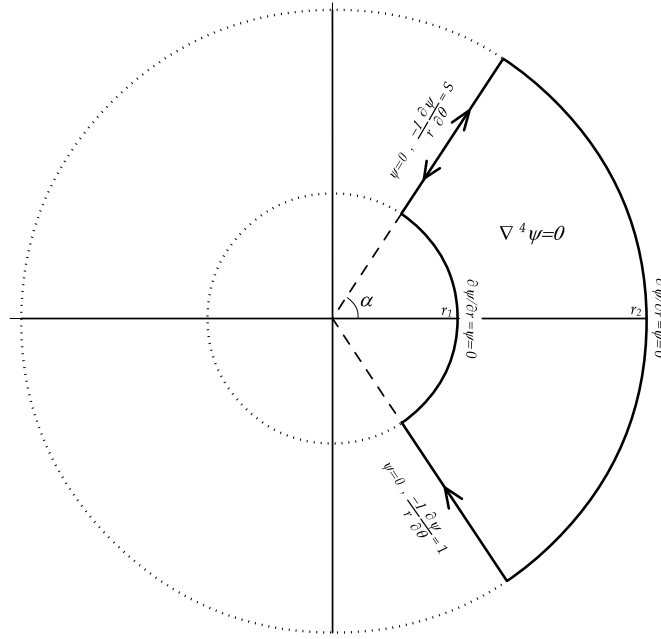
Bu bölümde kapak ile sürülen yarım halka tipindeki kavitelerdeki akış yapılarının, kavitenin görünüm oranına göre nasıl değiştiği ve böyle bir kavitede eddy oluşum mekanizmasının nasıl olduğu incelendi.

3.2. Biharmonik Denklem

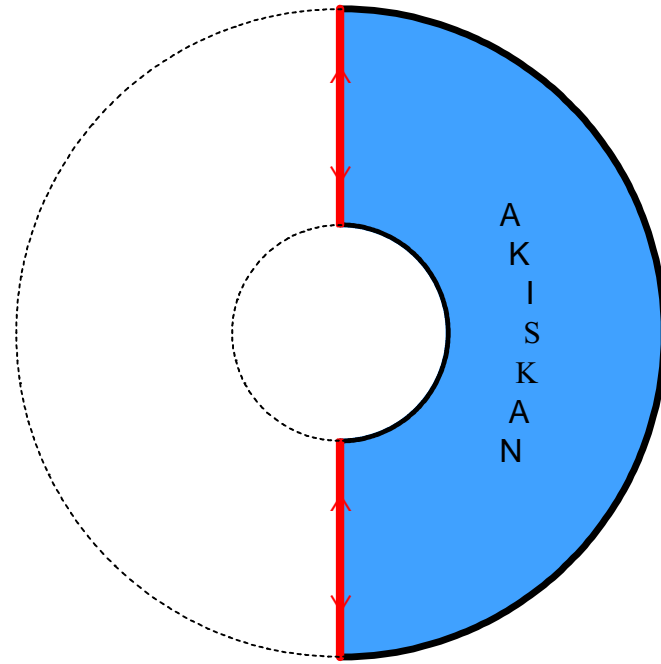
Sabit yoğunluğu ρ ve viskozitesi η olan iki boyutlu, sıkıştırılmaz, kararlı bir Newtonian akış Navier-Stokes ve süreklilik denklemleri tarafından yönetilir. Bu denklemlerin boyutsuz hali sırasıyla,

$$\text{Re } \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = -\nabla p + \nabla^2 \underline{u}, \quad 0 = \nabla \cdot \underline{u} \quad , \quad (3.1)$$

şeklinindedir. Burada $\text{Re} = \rho u_2 A / \eta$ Reynolds sayısı olup atalet terimlerinin viskoz terimlere oranını ifade eder ancak Stokes akış durumunda (yani ataletin ihmal edildiği durumda) sıfır olarak alınır. Kalan terimlere **curl** operatörü uygulanırsa basınç terimi de elimine edilir ve böylece süreklilik denklemiyle birlikte, akış fonksiyonu olan



Şekil 3.1. Çift kapakla sürülen sektörel kavite ve boyutsuz sınır koşulları



Şekil 3.2. Yarım halka tipindeki kavite

$\psi(r, \theta)$ cinsinden biharmonik denklem elde edilir:

$$\nabla^4 \psi(r, \theta) = 0. \quad (3.2)$$

ψ akış fonksiyonu (streamfunction) olduğundan, hız bileşenleri,

$$u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (3.3)$$

şeklinde yazılabilir. Burada u_θ ve u_r sırasıyla açısal ve radyal hız bileşenleridir. Çemberlerin yarıçaplarının oranı ve hareketli kapakların hızları oranı kullanacağımız iki kontrol parametresi olup bunlar sırayla,

$$A = \frac{r_2}{r_1} , \quad S = \frac{u_1}{u_2} . \quad (3.4)$$

şeklindedir. Burada u_1 üst kapağın hızı, u_2 boyutsuz hız sabitidir (alt kapağın hareketli olması durumunda alt kapak hızını gösterir). S parametresi bu kısımda olduğu gibi kavitenin tek kapağın hareketli olması durumunda sadece hareketli kapağın hızına yani u_1 değerine eşittir. İleriki kısımlarda görüleceği üzere, iki kapağın hareketli olması durumunda ise kapakların hızları oranını gösterir.

3.3. Sınır Koşulları

Hareketli düz bir kapak ve sabit 3 duvar tarafından sınırlandırılmış, yani tek kapakla sürülen bir halkasal kavite içerisindeki Stokes akış, yukarıda ifade edilen biharmonik denklem tarafından yönetilir. Kutupsal formdaki biharmonik denklem,

$$\nabla^4 \psi(r, \theta) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 \psi(r, \theta) = 0 \quad (3.5)$$

şeklindedir.

Akış fonksiyonunun iki ayrı noktada aldığı değerlerin farkı, bu noktalar arasındaki net akışı gösterir. Buna göre, eğer iki nokta arasında net bir akış yok ise akış fonksiyonu bu noktalarda aynı değere sahip olacaktır. Sonuç olarak, kapalı bir akış bölgesinin sınırları üzerinde akış fonksiyonu sabit değerdedir ve genellikle sıfır olarak alınır. Böylece sektörel kavitenin sınırları boyunca akış fonksiyonunun değeri sıfırdır. Yani,

$$\psi(r_1, \theta) = \psi(r_2, \theta) = 0 \quad (3.6)$$

$$\psi(r, \pm\alpha) = 0 \quad (3.7)$$

olur. Akışkanlar mekaniğinde no-slip hipotezi bir sert yüzeydeki akışkanın hızının, sert yüzeyin hızına eşit olduğunu ifade eder. Buna göre (3.3) den,

$$\frac{\partial \psi}{\partial r}(r_1, \theta) = \frac{\partial \psi}{\partial r}(r_2, \theta) = 0 \quad (3.8)$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(r, \alpha) = u_1 \quad , \quad -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(r, -\alpha) = u_2 \quad (3.9)$$

olarak sınır koşulları belirlendi. Burada dikkat edilirse düzgün kapakların hareket hızları u_1 ve u_2 olarak alındı. Bu bölümün ilerleyen kısımlarında $u_1 = 1$, $u_2 = 0$ olarak yani sadece $\alpha = \frac{\pi}{2}$ deki kapağın hareketli (tek kapakla sürülen) olduğu düşünülerek hesaplama yapılacaktır. Kapak hızları istenildiği gibi değiştirilerek yine benzer hesaplamalar kolaylıkla yapılabilir.

3.4. Serilerle Çözüm Metodu

Serilerle çözüm metodu ilk olarak 1952 yılına Smith [26] tarafından yarı sonsuz bir bölge için elde edildi. Daha sonra bu çözüm metodu Joseph & Sturges [27] tarafından kapakla sürülen dikdörtgensel bir kavite için uygulandı. Tek kapakla sürülen sektörel bir kavite için benzer bir çalışma Khuri [29] tarafından yapıldı. Bu bölümde, yukarıda özetlenen çalışmalardan esinlenerek hem tek kapakla hem de iki kapakla sürülen yarım halka tipindeki kavite için biortogonal seri çözümünü verecek ve ele alınan akış bölgesi içerisindeki görülebilecek akış yapılarının çeşitliliğini ortaya koyacağız.

3.4.1. Biortogonal Seri Çözümü

(3.5) biharmonik denkleminin ayrılabilen çözümü elde edilecektir. Çözüm olarak düşünülen akış fonksiyonunun değişkenlerine ayrılmış şeklini

$$\psi(r, \theta) = R(r)\Omega(\theta) \quad (3.10)$$

olarak aldık. (3.10) ifadesini (3.5) denklemine yerine yazıp gerekli hesaplamaları yaparak aranan fonksiyonların,

$$R(r) = ar^\lambda + br^{-\lambda} + cr^{2-\lambda} + dr^{2+\lambda} \quad (3.11)$$

$$\Omega(\theta) = E \sin(\lambda\theta) + F \cos(\lambda\theta) \quad (3.12)$$

şeklinde olduğu elde edildi (Bkz. Ek1). (3.11) ve (3.12) fonksiyonlarını ve üst üste ekleme (super position) özelliğini kullanarak (3.10) den akış fonksiyonu için aranan çözüm,

$$\psi(r, \theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} [E_n \sin(\lambda_n \theta) + F_n \cos(\lambda_n \theta)] \phi_1^{(n)}(r) \quad (3.13)$$

şeklinde elde edilir. Böylelikle problem a_n, b_n, c_n, d_n, E_n ve F_n katsayıları ile λ_n öz değerlerinin bulunmasına indirgenmiştir. Burada $\phi_1^{(n)}(r)$ Papkovitch-Fadle öz fonksiyonunun,

$$\phi_1^{(n)}(r) = a_n r^{\lambda_n} + b_n r^{-\lambda_n} + c_n r^{2-\lambda_n} + d_n r^{2+\lambda_n} \quad (3.14)$$

şeklinde olacağı açıktır. $r_1 \leq r \leq r_2$ için (3.6) ve (3.8) sınır koşullarından,

$$\phi_1^{(n)}(r_1) = \phi_1^{(n)}(r_2) = \frac{\partial \phi_1^{(n)}}{\partial r}(r_1) = \frac{\partial \phi_1^{(n)}}{\partial r}(r_2) = 0 \quad (3.15)$$

olacağı görüldü. (3.14) ve (3.15) den,

$$\begin{aligned} 0 &= a_n r_1^{\lambda_n} + b_n r_1^{-\lambda_n} + c_n r_1^{2-\lambda_n} + d_n r_1^{2+\lambda_n} \\ 0 &= \lambda_n a_n r_1^{\lambda_n-1} - \lambda_n b_n r_1^{-\lambda_n-1} + (2 - \lambda_n) c_n r_1^{1-\lambda_n} + (2 + \lambda_n) d_n r_1^{1+\lambda_n} \\ 0 &= a_n r_2^{\lambda_n} + b_n r_2^{-\lambda_n} + c_n r_2^{2-\lambda_n} + d_n r_2^{2+\lambda_n} \\ 0 &= \lambda_n a_n r_2^{\lambda_n-1} - \lambda_n b_n r_2^{-\lambda_n-1} + (2 - \lambda_n) c_n r_2^{1-\lambda_n} + (2 + \lambda_n) d_n r_2^{1+\lambda_n} \end{aligned} \quad (3.16)$$

denklem sistemi oluşturuldu. Bu denklem sistemi çözülerek $a_n, b_n, c_n,$ ve d_n katsayıları bulundu (bkz. Ek2). Yine bu denklem sisteminden yararlanarak λ_n öz değerleri için,

$$\sin(\widehat{\lambda}_n) = \pm \beta \widehat{\lambda}_n \quad (3.17)$$

öz değer fonksiyonu elde edildi. Burada,

$$\widehat{\lambda}_n = (i \log \frac{r_1}{r_2}) \lambda_n \quad , \quad \beta = \frac{1}{2 \log \frac{r_2}{r_1}} \left(\frac{r_2}{r_1} - \frac{r_1}{r_2} \right) \quad (3.18)$$

şeklindedir. $\widehat{\lambda}_n$ öz değerlerinin reel ve sanal kısımları birer değişken olarak düşünüldü. (3.17) denkleminde $\widehat{\lambda}_n$ öz değerlerini bulmak amacıyla iki değişkenli fonksiyonlar için Newton iterasyon metodu uygulandı.

Genel olarak,

$$\alpha \sin(\varepsilon) = \varepsilon \quad (3.19)$$

şeklindeki bir fonksiyona Newton iterasyon metodu uygulayabilmek için, başlangıç koşulu olarak,

$$\varepsilon_n \sim (4n + 1) \frac{\pi}{2} + i [-\ln \alpha + \ln(4n + 1)\pi] \quad , \quad \alpha > 0 \quad (3.20)$$

alınır (bkz. Henry & Fettis [87]). λ_n öz değerleri kompleks değerli olup kompleks düzleme simetrik olarak yerleşirler. $n > 0$ için λ_n öz değerlerini seçtik. Ayrıca,

$$\lambda_{-n} = \overline{\lambda}_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

şeklinde olup üst çizgi kompleks eşleniği ifade eder. Bu öz değerlere karşılık,

$$\phi_1^{(-n)}(r) = \overline{\phi}_1^{(n)}(r) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ve aranan katsayıların,

$$E_{-n} = \overline{E}_n \quad , \quad F_{-n} = \overline{F}_n$$

şeklinde olacağı açıktır. Özel olarak $1 \leq r \leq 4$ için (3.17) den elde edilen bazı λ_n öz değerleri tablo halinde verildi (bkz Tablo 3.1).

Bundan sonraki hedefimiz (3.13) deki E_n ve F_n katsayılarını bulmaktır. (3.7) ve (3.9) sınır koşullarını (3.13) denklemine uygulayarak,

$$S = \sum_{-\infty}^{\infty} [E_n \lambda_n \cos(\lambda_n \alpha) - F_n \lambda_n \sin(\lambda_n \alpha)] \frac{\phi_1^{(n)}(r)}{r} \quad (3.21a)$$

$$0 = \sum_{-\infty}^{\infty} [E_n \sin(\lambda_n \alpha) + F_n \cos(\lambda_n \alpha)] \phi_1^{(n)}(r) \quad (3.21b)$$

$$1 = \sum_{-\infty}^{\infty} [E_n \lambda_n \cos(\lambda_n \alpha) + F_n \lambda_n \sin(\lambda_n \alpha)] \frac{\phi_1^{(n)}(r)}{r} \quad (3.21c)$$

$$0 = \sum_{-\infty}^{\infty} [F_n \cos(\lambda_n \alpha) - E_n \sin(\lambda_n \alpha)] \phi_1^{(n)}(r) \quad (3.21d)$$

denklemler sistemi elde edilir. Khuri'nin biortogonalite şartı uygulanarak öz fonksiyonlar için,

$$\phi_1^{(n)}(r) = y_n(r), \quad (3.22)$$

$$\phi_2^{(n)}(r) = r y_n''(r) - \frac{\mu_n}{2r} y_n(r), \quad (3.23)$$

$$\mu_n = 1 + 2\lambda_n^2.$$

eşitlikleri elde edilir [29]. Burada bilinen bir öz fonksiyon olan $\phi_1^{(n)}(r)$, diğer öz fonksiyon $\phi_2^{(n)}(r)$ 'yi elde etmekte kullanıldı. (3.22) ve (3.23) denklemlerinden,

$$\phi_2^{(n)}(r) = (-\lambda_n - \frac{1}{2})a_n r^{\lambda_n - 1} + (\lambda_n - \frac{1}{2})b_n r^{-\lambda_n - 1} + 3(-\lambda_n + \frac{1}{2})c_n r^{1 - \lambda_n} + 3(\lambda_n + \frac{1}{2})d_n r^{\lambda_n + 1} \quad (3.24)$$

olarak bulundu. Yukarıdaki denklem sistemine dönersek, bu denklem sisteminde,

$$\int_{r_1}^{r_2} [\phi_2^{(m)}(r), \phi_1^{(m)}(r)] B(r) \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} dr \quad (3.25)$$

olan biortagonallik operatörünü uygulayabilmek için bazı düzenlemeler yapıldı. Burada,

$$B(r) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2r^2} & 0 \\ \frac{3}{2r^3} & \frac{1}{2r^2} \end{pmatrix}$$

şeklindedir (bkz. Khuri [29]).

(3.21a) ve (3.21b) denklemleri birleştirilerek,

$$\begin{aligned} & \sum_{-\infty}^{\infty} [E_n \sin(\lambda_n \alpha) + F_n \cos(\lambda_n \alpha)] \begin{pmatrix} \phi_1^{(n)}(r) \\ \phi_2^{(n)}(r) \end{pmatrix} - \sum_{-\infty}^{\infty} [E_n \sin(\lambda_n \alpha) + F_n \cos(\lambda_n \alpha)] \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_2^{(n)}(r) \end{pmatrix} + \\ & \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\mu_n} \lambda_n [E_n \cos(\lambda_n \alpha) - F_n \sin(\lambda_n \alpha)] \begin{pmatrix} 0 \\ r\phi_1''(r) - \phi_2^{(n)}(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.26)$$

elde edildi. Benzer şekilde (3.21c) ve (3.21d) denklemleri birleştirilirse,

$$\begin{aligned} & \sum_{-\infty}^{\infty} [-E_n \sin(\lambda_n \alpha) + F_n \cos(\lambda_n \alpha)] \begin{pmatrix} \phi_1^{(n)}(r) \\ \phi_2^{(n)}(r) \end{pmatrix} - \sum_{-\infty}^{\infty} [-E_n \sin(\lambda_n \alpha) + F_n \cos(\lambda_n \alpha)] \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_2^{(n)}(r) \end{pmatrix} - \\ & \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\mu_n} \lambda_n [E_n \cos(\lambda_n \alpha) + F_n \sin(\lambda_n \alpha)] \begin{pmatrix} 0 \\ r\phi_1''(r) - \phi_2^{(n)}(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.27)$$

elde edilir. Ardından (3.26) ve (3.27) denklemlerine (3.25)'da verilen biortagonallik operatörü uygulanarak,

$$\begin{aligned}
& \sum_{-\infty}^{\infty} [E_n \sin(\lambda_n \alpha) + F_n \cos(\lambda_n \alpha)] \int_{r_1}^{r_2} [\phi_2^{(m)}(r), \phi_1^{(m)}(r)] B(r) \begin{bmatrix} \phi_1^{(n)}(r) \\ \phi_2^{(n)}(r) \end{bmatrix} dr \\
& - \sum_{-\infty}^{\infty} [E_n \sin(\lambda_n \alpha) + F_n \cos(\lambda_n \alpha)] \int_{r_1}^{r_2} [\phi_2^{(m)}(r), \phi_1^{(m)}(r)] B(r) \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_2^{(n)}(r) \end{bmatrix} dr \\
& + \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\mu_n} \lambda_n [E_n \cos(\lambda_n \alpha) - F_n \sin(\lambda_n \alpha)] \int_{r_1}^{r_2} [\phi_2^{(m)}(r), \phi_1^{(m)}(r)] B(r) \begin{bmatrix} 0 \\ r \phi_1^{(n)'}(r) - \phi_2^{(n)}(r) \end{bmatrix} dr \\
& = \int_{r_1}^{r_2} [\phi_2^{(m)}(r), \phi_1^{(m)}(r)] B(r) \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} dr
\end{aligned} \tag{3.28}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \sum_{-\infty}^{\infty} [-E_n \sin(\lambda_n \alpha) + F_n \cos(\lambda_n \alpha)] \int_{r_1}^{r_2} [\phi_2^{(m)}(r), \phi_1^{(m)}(r)] B(r) \begin{bmatrix} \phi_1^{(n)}(r) \\ \phi_2^{(n)}(r) \end{bmatrix} dr \\
& - \sum_{-\infty}^{\infty} [-E_n \sin(\lambda_n \alpha) + F_n \cos(\lambda_n \alpha)] \int_{r_1}^{r_2} [\phi_2^{(m)}(r), \phi_1^{(m)}(r)] B(r) \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_2^{(n)}(r) \end{bmatrix} dr \\
& + \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\mu_n} \lambda_n [-E_n \cos(\lambda_n \alpha) + F_n \sin(\lambda_n \alpha)] \int_{r_1}^{r_2} [\phi_2^{(m)}(r), \phi_1^{(m)}(r)] B(r) \begin{bmatrix} \phi_1^{(n)}(r) \\ r \phi_1^{(n)'}(r) - \phi_2^{(n)}(r) \end{bmatrix} dr \\
& = \int_{r_1}^{r_2} [\phi_2^{(m)}(r), \phi_1^{(m)}(r)] B(r) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} dr
\end{aligned} \tag{3.29}$$

elde edildi.

$$\begin{aligned}
g_m &= \int_{r_1}^{r_2} [\phi_2^{(m)}(r), \phi_1^{(m)}(r)] B(r) \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} dr \\
V_{mn} &= \int_{r_1}^{r_2} [\phi_2^{(m)}(r), \phi_1^{(m)}(r)] B(r) \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_2^{(n)}(r) \end{bmatrix} dr \\
W_{mn} &= \int_{r_1}^{r_2} [\phi_2^{(m)}(r), \phi_1^{(m)}(r)] B(r) \begin{bmatrix} 0 \\ r \phi_1^{(n)'}(r) - \phi_2^{(n)}(r) \end{bmatrix} dr
\end{aligned} \tag{3.30}$$

olmak üzere, (3.28) ve (3.29) denklemleri düzenlenerek, F_n ve E_n katsayıları iki bilinmeyen olmak üzere aşağıdaki iki bilinmeyenli iki denklem elde edildi:

$$\begin{aligned}
g_m &= (p_m^* \sin(\lambda_m \alpha)) E_m + (p_m^* \cos(\lambda_m \alpha)) F_m \\
&+ \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2}{\mu_n} \lambda_n W_{mn} \cos(\lambda_n \alpha) - V_{mn} \sin(\lambda_n \alpha) \right) E_n \\
&- \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2}{\mu_n} \lambda_n W_{mn} \sin(\lambda_n \alpha) + V_{mn} \cos(\lambda_n \alpha) \right) F_n,
\end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}
0 &= (-p_m^* \sin(\lambda_m \alpha)) E_m + (p_m^* \cos(\lambda_m \alpha)) F_m \\
&+ \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2}{\mu_n} \lambda_n W_{mn} \cos(\lambda_n \alpha) + V_{mn} \sin(\lambda_n \alpha) \right) E_n \\
&+ \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2}{\mu_n} \lambda_n W_{mn} \sin(\lambda_n \alpha) - V_{mn} \cos(\lambda_n \alpha) \right) F_n.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

(3.31) ve (3.32) denklemleri $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ için E_n ve F_n katsayılarına göre sonlu bir set oluşturdular. Bu katsayılar (3.31) ve (3.32) denklemlerinin ilk N terimi alınarak bulunur. Böylece $n = 1, 2, \dots, N$ için (3.31) ve (3.32) denklemleri E_n ve F_n katsayılarının reel ve sanal kısımlarına göre $4N$ bilinmeyenli $4N$ denklem oluşturdular. Sonuç olarak kavitenin içerisindeki her noktada akış fonksiyonunun değeri, (3.13) serisinin ilk N teriminin toplanmasıyla elde edildi. Belirli bir N sayısına karar vererek elde edilen çözümü kısıtladığımız için bu çözüme yarı analitik çözüm denmektedir. Serinin terim sayısı olan N 'e karar vermek önemli bir ayrıntıdır. N sayısı serinin yeterince yakınsamasına olanak sağlayacak kadar büyük olmalıdır. Akış fonksiyonu ile ilgili olarak sadece kavitenin sınırları üzerindeki değerleri önceden bilinmektedir. Bu ise yakınsamanın bu sınır şartları üzerinde test edileceği anlamına gelir. Özel olarak $r_1 = 1, r_2 = 5, N = 15$ için E_n ve F_n katsayılarının bir kısmı *tablo 3.2* de verildi. N sayısının bazı değerleri için akış fonksiyonunun sınırlar üzerinde aldığı bazı değerler ise *Tablo 3.3*'de gösterildi.

Tablo 3.1: Tek kapakla sürülen bir sektörel kavitede $r_1 = 1$ ve $r_2 = 4$ için ilk 20 λ_n öz değerleri.

n	λ_n	n	λ_n
1	1.86054+2.99451i	11	3.75801+48.66728i
2	2.46101+7.70825i	12	3.82201+53.203498i
3	2.78163+12.30346i	13	3.88080+57.739178i
4	3.00270+16.86922i	14	3.93515+62.27442i
5	3.17170+21.42265i	15	3.98570+66.80932i
6	3.30856+25.96964i	16	4.03295+71.34393i
7	3.42358+30.51282i	17	4.07728+75.87830i
8	3.52277+35.05353i	18	4.11906+80.41247i
9	3.60998+39.59256i	19	4.15854+84.94646i
10	3.68778+44.13037i	20	4.19598+89.48031i

3.4.2. Serilerin Kısaltılması (Sınır Değerlerine Yakınsaklık)

Joseph ve Sturges [27] görünüm oranı $A = 5$ olan dikdörtgensel kaviteleler üzerinde yaptıkları çalışmada, elde ettikleri biorthogonal seri (BS) çözümünün nümerik olarak sınır koşullarına olan yakınsaklığını inceledi. Görüldü ki BS çözümünün $N = 20$ terimi alınarak, hareketli kapak üzerinde akış fonksiyonunun ve onun normal türevinin yakınsaklıkları sırasıyla dört ve bir ondalığa kadar yakınsadı. Buna rağmen, hareketsiz alt duvarda yakınsaklık sırasıyla 16 ve 9 ondalığa kadar ulaştı. Shankar [36] aynı katsayıları bulmak için sonlu kareler metodu ile bir analitik seri genişlemesi düşündü. Elde ettiği çözümlerin, özellikle hareketli kapağın köşelere yakın kısımları üzerindeki yakınsaklık durumunu inceledi. Köşe noktalarını göz ardı ederek, geri kalan noktalarda akış fonksiyonu ve onun türevleri için doğru sonuca sırasıyla 4 ve 2 ondalık kadar yakınsama elde etti.

Tablo 3.2: Tek kapakla sürülen bir sektörel kavitede $r_1 = 1$, ve $r_2 = 3$ için bazı E_n ve F_n katsayıları.

n	E_n	F_n
-10	0	0
-9	0	0
-8	0	0
-7	0	0
-6	0	0
-5	0	0
-4	0	0
-3	0	0
-2	0	0
-1	0.000525+0.0000034i	0.0000024-0.0005266i
1	0.000525-0.0000034i	0.0000024+0.0005266i
2	0	0
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0

Daha sonraları Gaskell ve arkadaşları [19] iki farklı katsayı belirleme tekniğini de kullandı. Gösterdiler ki, hareketli üst kapak üzerindeki sınır koşuluna göre,

$N = 20$ için Shankar'ın metodu tam değerden ortalama olarak %6 sapma sağlarken, $N = 200$ için aynı metodun aynı sınır koşuluna göre sapma değeri yaklaşık %1'e düştü. $N = 20$ ve $N = 200$ için $\psi = 0$ olduğu sınır koşullarında Joseph ve Sturges'in metodunun Shankar'ın metodundan daha iyi yakınsadığını fakat hareketli kapak üzerinde daha kötü bir yakınsamaya sahip olduğunu gördü. Serilerin sınır şartları üzerindeki yakınsamalarındaki bu farklılıklara rağmen, akış fonsiyonunun iç noktadaki değerlerinin birbirlerine oldukça yakın olduklarını gördüler. Böylece her iki katsayı belirleme tekniğinin de birbirlerinden ayırt edilemeyeceği sonucuna ulaştılar.

Dikdörtgensel kaviteleler üzerinde yapılan bu çalışmalara paralel olarak, Khuri [29] tek kapakla sürülen sektörel kaviteleler için $N = 15$ alınarak yeteri kadar yakınsaklık sağlanacağını savundu. Bu çalışmamızda Khuri [29] tarafından elde edilen katsayılara ulaşıldı. Böylece akış fonsiyonunun her noktadaki değeri elde edildi ve *tablo 3.3* de gösterildi. N değerlerine göre akış fonsiyonu ve onun türevlerinin (yani hız bileşenlerinin) sınır şartları üzerindeki yakınsaklık durumu incelendi (*bkz. tablo 3.4*).

Tablo 3.3: Akışkanla doldurulmuş sektörel bölge $v = \{r, \theta : 1 \leq r \leq 4, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ için $N = 30$ olmak üzere, akış fonsiyonun ve türevlerinin sınırlardaki değerleri.

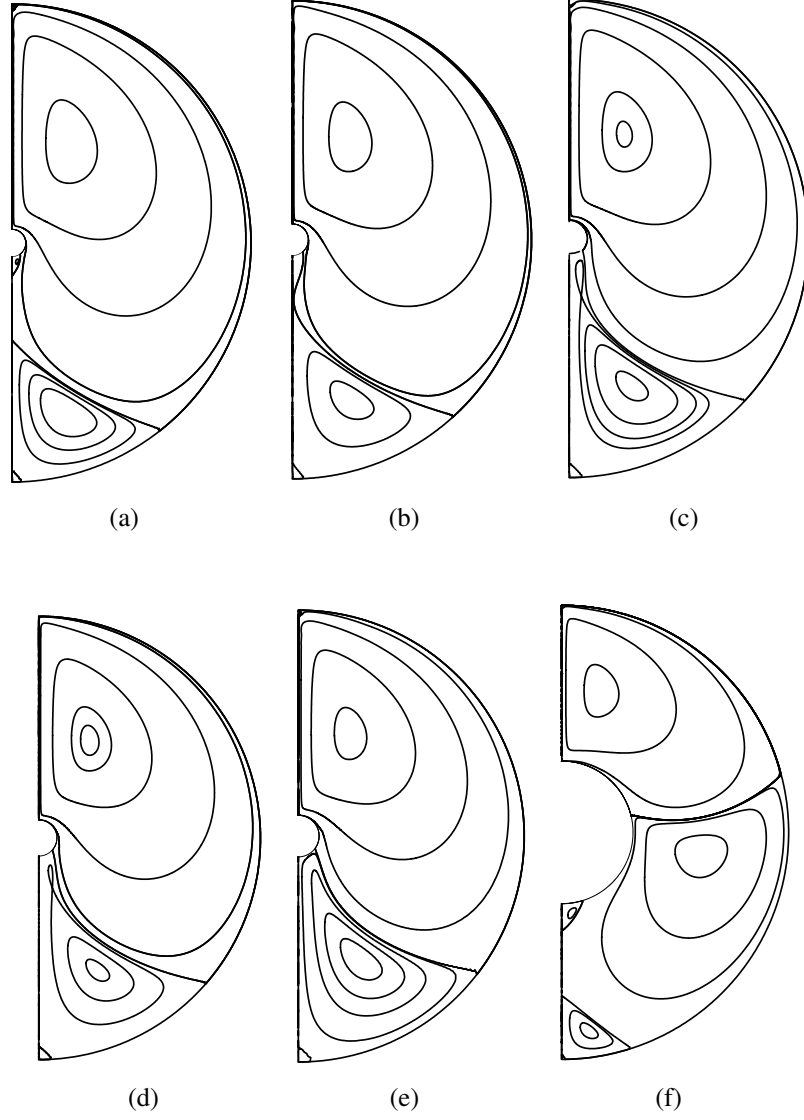
r	$\psi(r, \frac{\pi}{2}; 30)$	$\psi(r, -\frac{\pi}{2}; 30)$	$-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(r, \frac{\pi}{2}; 30)$	$-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(r, -\frac{\pi}{2}; 30)$
1.0	-9.6458E-17	-3.2719E-020	1.7708E-15	0
1.2	7.1537E-04	-7.8157E-13	0.8817E+01	-0.1332E-10
1.4	-1.1147E-03	3.0229E-12	0.1071E+01	0.3918E-10
1.6	-1.4256E-03	3.7842E-12	0.1122E+01	0.3750E-09
1.8	9.9134E-04	-3.8356E-12	0.9247E+00	-0.3135E-09
2.0	-1.8560E-03	4.8247E-12	0.1163E+01	0.5496E-09
2.2	-1.4157E-03	2.3535E-12	0.1123E+01	0.3588E-09
2.4	-1.9610E-03	3.1865E-12	0.1139E+01	0.3818E-09
2.6	-1.5174E-03	8.4531E-12	0.1047E+01	0.2580E-09
2.8	2.2270E-03	-3.4649E-12	0.9173E+00	-0.3142E-10
3.0	-1.7164E-04	-2.5217E-12	0.1036E+01	-0.4235E-09
3.2	1.6848E-03	2.0594E-11	0.9621E+00	0.5959E-09
3.4	-2.1931E-03	4.9270E-12	0.1170E+01	0.7111E-09
3.6	2.1211E-03	-1.3457E-11	0.9658E+00	-0.1104E-08
3.8	-4.6814E-05	2.9814E-11	0.1195E+01	-0.1758E-09
4.0	-3.9111E-16	2.0768E-19	0.6123E-15	0

Tablo 3.4: $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $r_1 = 1$, $r_2 = 4$ ve $N = 15, 30, 60, 90$ için akış fonksiyonu ve r yönündeki hız bileşeninin hata analizi.

r	$-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \left(r, \frac{\pi}{2}; 15 \right)$	$-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \left(r, -\frac{\pi}{2}; 15 \right)$
1.0	0	0
1.6	0.9127	-0.1003-07
2.2	1.0922	0.8708E-08
2.8	1.0043	0.5807E-08
3.4	0.9439	-0.1674E-7
4.0	0	0
r	$-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \left(r, \frac{\pi}{2}; 30 \right)$	$-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \left(r, -\frac{\pi}{2}; 30 \right)$
1.0	0	0
1.6	1.1227	0.3750E-09
2.2	1.1236	0.3588E-09
2.8	0.9173	-0.3142E-10
3.4	1.1707	0.7111E-09
4.0	0	0
r	$-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \left(r, \frac{\pi}{2}; 60 \right)$	$-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \left(r, -\frac{\pi}{2}; 60 \right)$
1.0	0	0
1.6	1.0484	-0.2170E-10
2.2	1.0698	-0.9644E-11
2.8	1.0628	-0.2684E-10
3.4	0.8381	0.3904E-10
4.0	0	0
r	$-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \left(r, \frac{\pi}{2}; 90 \right)$	$-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \left(r, -\frac{\pi}{2}; 90 \right)$
1.0	0	0
1.6	1.0015	0.3599E-11
2.2	1.0003	-0.4064E-12
2.8	0.9996	-0.1018E-10
3.4	0.9928	-0.4382E-11
4.0	0	0

3.5. Sonuç ve Görüşler

Kavitenin açısı parametresi olan α sabit bir değerde tutularak, görünüm oranı olan A parametresinin değiştirilmesiyle akış yapılarındaki çatalanmalar, yeni eddy'lerin doğması ve gelişmesi gibi durumlar incelendi. α parametresinin değerler aralığı $0 < \alpha < \pi$ olup bu parametrenin alabileceği değerler sınırlıdır. Buna rağmen A parametresi ise $A > 1$ olup sınırsız değerler alabilecek bir parametredir. Bu nedenle α parametresini $\alpha = \frac{\pi}{2}$ sabit değerine atayarak A parametresinin farklı değerleri için akış yapıları incelendi.



Şekil 3.3. $S = 0$ için görünüm oranı olan A 'nın azaltılmasıyla eddy oluşumu.
a) $A = 18.0$, b) $A = 15.49$, c) $A = 13.20$, d) $A = 12.50$, e) $A = 11.10$, f) $A = 3.20$

Bu bölümde tek ya da çift kapakla sürülen yarım halka tipindeki kavite içerisindeki 2-D Stokes akış probleminin Joseph & Sturges [27] ve Khuri [29] tarafından geliştirilen çözüm yöntemi kullanılarak, akış fonksiyonuna göre yarı analitik çözümü elde edildi. Kavitenin açısı parametresi olan α 'nın sabit tutularak, A parametresinin değişimiyle oluşan akış yapıları incelendi.

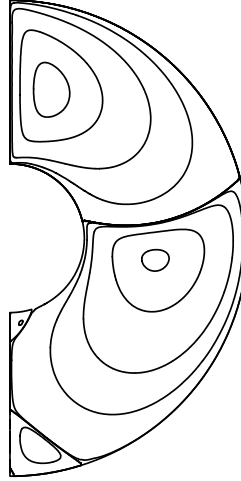
İlk olarak $S = 0$, daha sonra $S = -1$ ve $S = 1$ için hesaplamalar yapılarak akış yapıları ve çatallanmalar gösterildi.

3.5.1. $S = 0$ İçin Akış Yapıları

Tek kapakla sürülen kavite için akış yapıları, eddy oluşum mekanizması ve mümkün olan çatallanmalar ele alındı. S hız parametresi üst kapağın hızının alt kapak hızına oranı olarak tanımlanmıştı. $S = 0$ durumu üst kapak hızının 0 olması anlamına gelir. Ancak kavite geometrisine bağılı olarak, hem eddy oluşum mekanizmasında bir değışiklik olmaması hemde literatüre uygunluk açısından bu çalışmada alt kapağı hareketsiz olarak aldık. İlk olarak $A = 18$ için akış yapısını elde ettik (bkz Şekil 3.3a). Bu durumda şekilden görüldüğü gibi kavite içerisinde bir ana eddy ve hareketsiz duvarların birleştiğı köşelerde ise birer köşe eddy'ler görüldü. A parametresinin daha da büyük değerlerinde de aynı yapı elde edilecek olup sadece köşe eddy'lerinin daha küçük olduğı gözlendi. Görüldüğü gibi ilk durumda iki köşe eddy bulunup bunların bir ucu düzgün hareketsiz alt kapak üzerinde diğer ucu ise eğri hareketsiz yan duvarlar üzerinde olan birer ayırma çizgisiyle ana eddy'den ayrıldığı görüldü. Bu ayırma çizgilerinin hareketsiz duvarlarla birleştikleri saddle yapıdaki noktalar, ayırma noktaları adını alır. A parametresinin küçültülmesiyle köşe eddy'lerinin birbirlerine yaklaştığı ve kritik $A = 15.49$ da alt düzgün kenar üzerindeki saddle noktada birleştikleri görüldü (bkz Şekil 3.3b). A 'nın kritik 15.49 değerinden çok az daha küçültülmesinden itibaren düz ve hareketsiz duvar üzerindeki birleşme noktasının kavitenin içerisine kaydığı ve ilk baştaki ana eddy'den başka alt tarafta yeni ve bir saddle noktasında birbirine bağlanmış iki alt eddy'den oluşan separatrix adı verilen bir yapının oluştuğı görüldü (bkz Şekil 3.3c-d). Bu durumda da yine köşelerde gözle görülmesi zor olan köşe eddy'lerinin var olduğunu belirtmeliyiz. Görünüm oranının daha da küçültülmesiyle az önce oluşmuş olan separatrix yapıdaki üstteki alt eddy'e ait center noktanın saddle noktaya yaklaştığı ve $A = 12.05$ kritik değerinde bu iki durgun noktanın birleşerek bir cusp bifurcation gerçekleştirdiğı yani birleşen saddle ve center noktaların aniden kaybolduğı gözlendi (bkz Şekil 3.3e). Bu durumda kavite içerisinde iki ana eddy oluşmuş oldu. Ek olarak daha önce de belirtmiş olduğumuz ve her zaman var olduğunu bildiğimiz köşe eddy'ler yavaş yavaş kendini göstermeye başlamaktadır (üstteki köşe eddy alttakine göre daha küçük olduğundan daha geç gözle görünür hale gelmektedir). A 'nın daha da küçültülmesiyle bundan farklı bir mekanizma gerçekleşmeyip yine köşe eddy'lerinin gelişip birleşmesiyle üçüncü ana

eddy oluşacak ve bu mekanizma sürüp gidecektir. Farklı bir durum gözlenmediği için $A = 3.2$ değerinden daha küçük durumları bu kısımda vermeye gerek duyulmadı (bkz Şekil 3.3f).

Aynı (α, A) parametrelerine sahip kavitelerin ebatları değişse bile, bu kavite içerisindeki akış yapılarının değişmediği görüldü. Örneğin $\alpha = \frac{\pi}{2}$ için $r_1 = 3$ ve $r_2 = 9.6$ için görünüm oranı $A = 3.2$ olup Şekil 3.3f'deki aynı yapı ile karşılaştırıldı (bkz Şekil 3.4). Yani r_1 ve r_2 'nin ne olduğuna bakılmaksızın, bunların oranlarının aynı olduğu kavitelerdeki akış yapıları değişmemekte olduğu açık olarak görüldü. Bu durum literatürde bulunan ve daha çok dikdörtgensel olan kavite üzerine yapılan çalışmalarda da belirtildi [Gürçan].



Şekil 3.4. $S = 0$ için $r_1 = 3$ ve $r_2 = 9.6$ durumunda akış yapısı.

3.5.2. $S = -1$ İçin Akış Yapıları

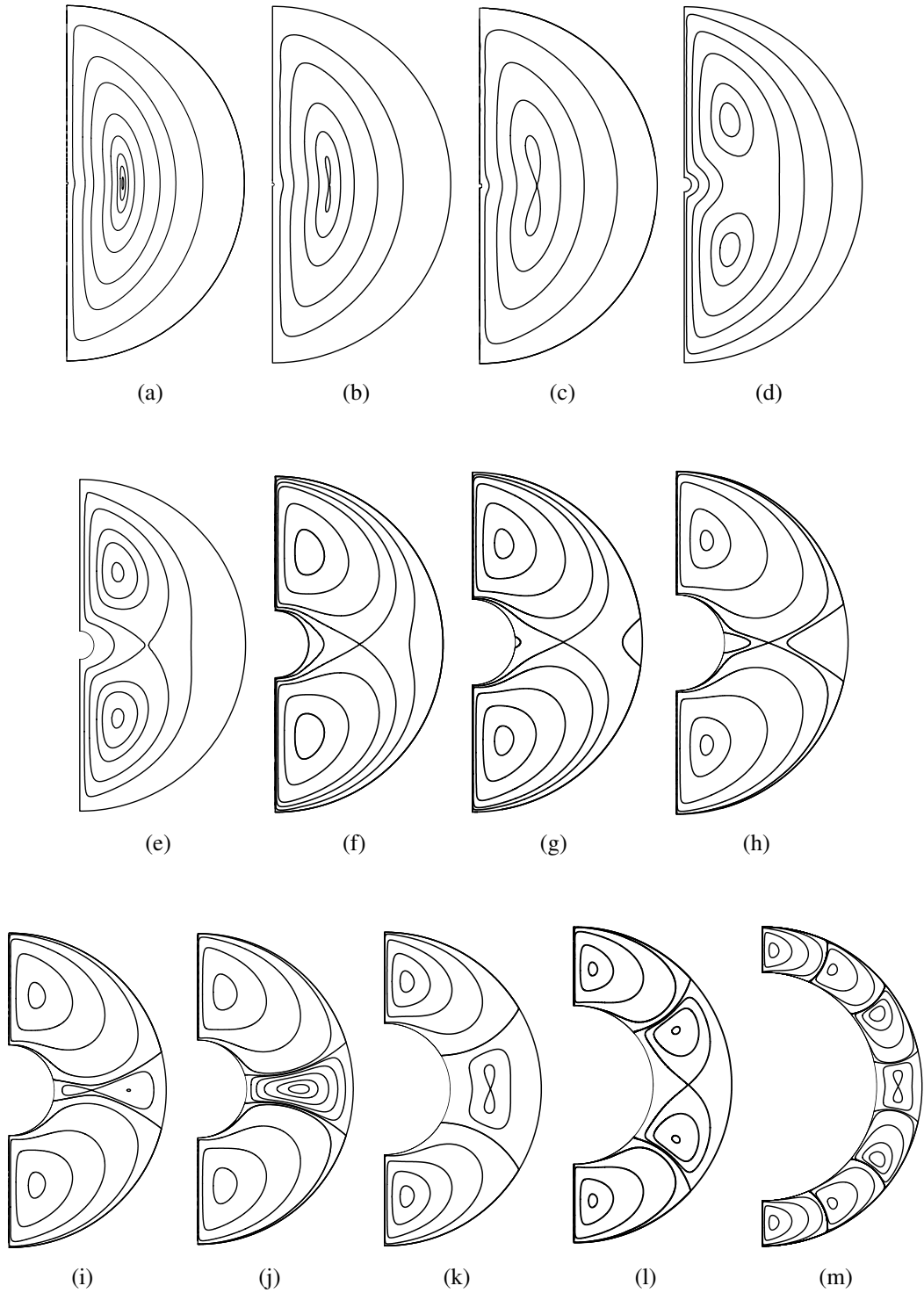
Kavitenin her iki kapağının da eşit fakat ters yönde hareket etmesi durumu incelendi. Açıkça görüldü ki kavite içerisindeki akış yapıları $\theta = 0$ eksenine göre simetriktir. A görünüm oranının çok büyük değerleri için kavite içerisinde bir center durgun noktasına sahip tek bir ana eddy olduğu elde edildi (bkz Şekil 3.5a, burada $A = 180$). A 'nın daha büyük değerlerinde de aynı yapı elde edildi. A 'nın küçültülüp $A = 161.4$ kritik değerine gelindiğinde bir Pitchfork çatallanması ile mevcut center noktanın bir saddle (eyer) noktasına dönüştüğü ve bu noktanın biri üstünde diğeri altında olmak üzere yeni iki center noktanın oluştuğu (separatrix yapı) gözlemlendi.

Bu olay hem kritik nokta sayısını belirlediğimiz yarılama yöntemi ile hem de akış yapısının resmi çizdirilerek elde edildi. Elde edilen yapının gözle daha net görülmesi için şekil 3.5b'den görüldüğü gibi $A = 130$ alınarak çizdirildi. Görünüm oranının daha da küçültülmesiyle, aynı topolojik akış yapısının uzun süre korunduğu, sadece separatrix yapıdaki center noktaların, saddle noktadan uzaklaştığı görüldü (bkz Şekil 3.5c-f).

A 'nın küçültülerek $A = 4.14$ kritik değerine ulaştığında, mevcut separatrix yapıya ek olarak, eğri ve hareketsiz yan duvarlardan karşılıklı birer kenar eddy'lerinin doğduğu gözlemlendi (bkz Şekil 3.5g, burada $A = 4$). Her bir kenar eddy, bulunduğu duvara iki ayırma noktasıyla birleşmiş olduğu açıkça görülür ki bu yapıya heteroclinic bağlantı adı verilir. Daha küçük görünüm oranlarında bu kenar eddy'ler birbirlerine yaklaştılar ve $A = 3.56$ olduğunda ortalarındaki saddle noktada birleştiler (bkz Şekil 3.5h-i). Bu durumda ortadaki saddle noktasında birleşmiş iki heteroclinic bağlantı ve duvarlar üzerinde toplamda dört ayırma noktası görüldü. Görünüm parametresinin biraz daha küçültülmesiyle heteroclinic bağlantılar birbirlerinden ayrılır ve bu ayrılan iki ayırma çizgisi arasında bir separatrix yapı oluşur. Bu yapıda daha önce de karşılaştığımız gibi bir saddle noktası ile bu noktada birbirine bağlanmış iki alt eddy bulunur. Görünüm oranının daha da küçültülmesiyle alt eddy'lere ait center noktalar aralarındaki saddle noktaya yaklaşırlar. Daha küçük yarıçaplı kenar tarafındaki (sol taraf) center nokta, saddle noktasına (düğüm noktası) daha yakın olduğundan bu ikisi birleşerek bir cusp oluşturular. Bu bir cusp çatallanması olup iki kritik nokta bire düşer ve A 'nın çok az azaltılmasıyla beraber aynı anda yok olurlar. Böylece kavite içerisindeki ana eddy sayısı 1'den 3'e çıktı (bkz Şekil 3.5j). A 'nın daha da küçültülmesi halinde ortadaki son oluşan eddy sanki ilk başlangıçtaki ana eddy gibi düşünülürse, yine aynı mekanizma (kenar eddy'lerin doğması, birleşmesi, cusp) işleyecek ve eddy sayısı 3'den 5'e çıkacaktır. Bu durum 5'ten 7'ye, 7'den 9'a,..., şeklinde devam edecek olup farklı bir çatallanma ya da eddy oluşumu gözlenmeyeceği için A 'nın daha küçük değerleri için akış yapılarını çizdirmeye gerek duyulmadı (bkz Şekil 3.5k-m).

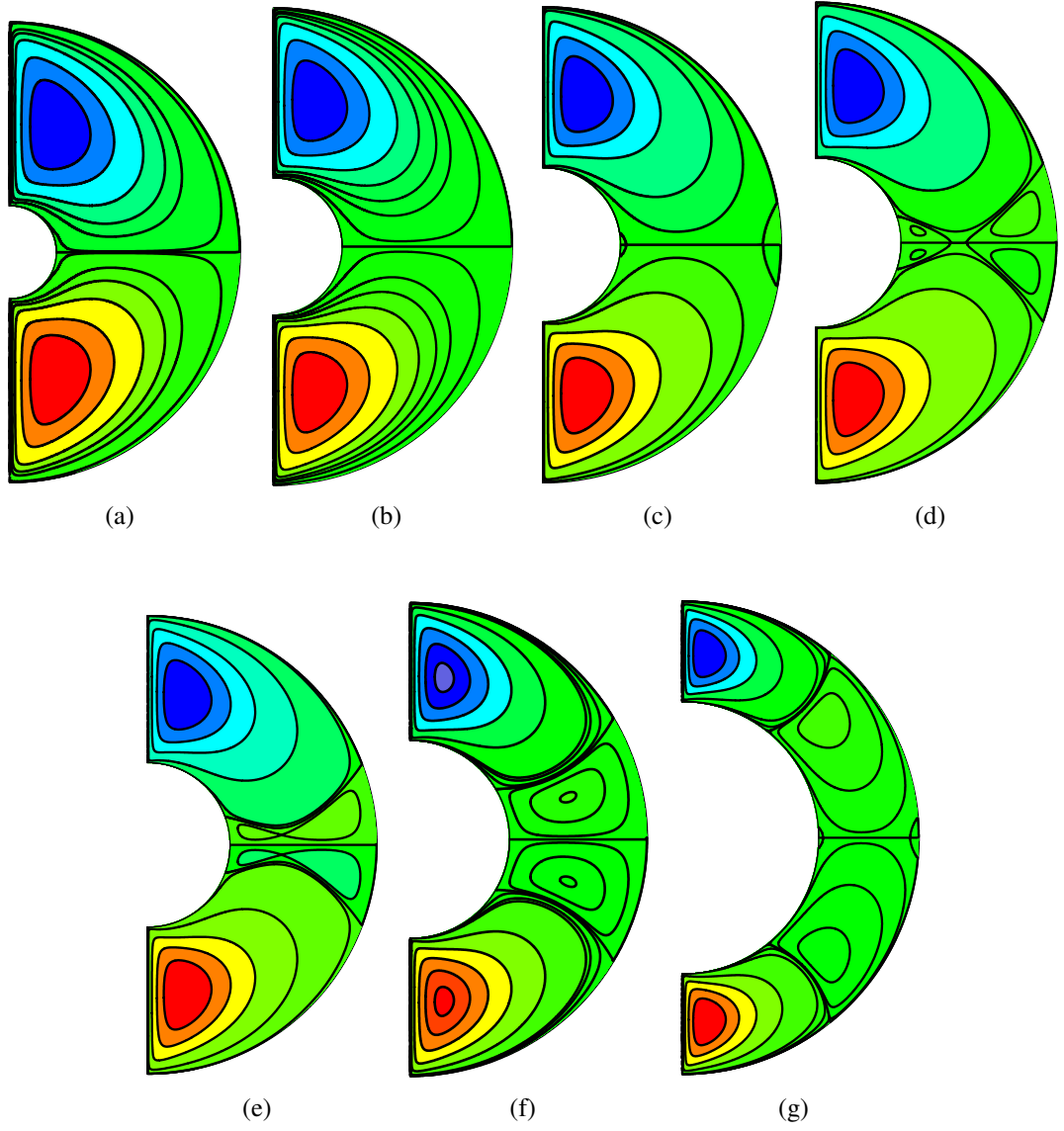
3.5.3. $S = 1$ İçin Akış Yapıları

Her iki kapağın da aynı yönde eşit hızlarla hareket etmesi halindeki akış yapıları elde



Şekil 3.5. $S = -1$ için görünüm oranı olan A 'nın azaltılmasıyla eddy oluşumu.
a) $A = 180$, b) $A = 130$, c) $A = 90$, d) $A = 25$, e) $A = 12$, f) $A = 5$,
g) $A = 4$, h) $A = 3.6$, i) $A = 3.5$, j) $A = 3.2$, k) $A = 2.4$, l) $A = 2$, m)
 $A = 1.4$

edildi. Bu durumda görüldü ki kavite içerisinde daima çift sayıda eddy bulunmakta ve bunlar $\theta = 0$ doğrusuna (x eksenine) göre simetriktir. $\theta = 0$ da bir ayırma çizgisi bulunmakta ve bu çizgi kaviteyi iki eşit kısma ayırdığı görüldü. Bu ayırma çizgisi üzerinde akış fonksiyonu olan ψ 'nin değeri sıfırdır. İlk olarak $A = 5$ için akış yapısı gösterildi (bkz Şekil 3.6a). Açıkça görülmektedir ki $\theta = 0$ üzerinde bir ayırma çizgisi ve bu çizginin altında ve üstünde birer ana eddy bulunur. Görünüm oranının daha büyük değerlerinde de bu yapı aynı olacaktır. Dolayısıyla kavite içerisindeki eddy sayısı en az iki olup şekilde görüldüğü gibi konumlanmışlardır. A parametresi azar azar küçültüldüğünde bir süre akış yapısında bir değişiklik görülmedi (bkz Şekil 3.6b, burada $A = 3.5$). Öyle ki kritik görünüm oranı olan $A = 3.076$ değerinde ulaşıldığında hareketsiz yan kenarlardan karşılıklı kenar eddy lerin doğduğu gözlendi (bkz Şekil 3.6c, burada $A = 3.1$). Bu kenar eddy ler iki tane gibi görünse de aslında her bir eğri kenar için biri $\theta = 0$ ekseninin altında diğeri üstünde olmak üzere ikiye yani toplamda birbirinden bağımsız dört kenar eddy olduğu görüldü (bkz Şekil 3.6d). A 'nın daha da küçültülmesiyle karşılıklı kenar eddy ler birbirlerine yaklaştılar ve $A = 2.831$ kritik görünüm oranına ulaşıldığında birleştiler. A biraz daha küçültüldüğünde ise birisi $\theta = 0$ 'ın altında diğeri üstünde olmak üzere iki separatrix yapı oluştu (bkz Şekil 3.6e). Bundan sonraki süreç separatrix yapının bir çatallanma geçirerek tek bir eddy e dönüşmesi olup yukarıdaki kısımlardaki ile aynı mekanizmada gerçekleşti. A 'nın küçültülmesiyle separatrix yapıdaki center noktaları ortalarındaki saddle noktaya yaklaştılar ve sol taraftaki center nokta saddle noktaya daha yakın olduğu için bu ikisi birleşerek bir cusp oluşturdu ve aynı anda kayboldular. Böylece kavite içerisindeki tam eddy sayısının iki den dörde çıkmış olduğu görüldü (bkz Şekil 3.6f). Görünüm parametresi olan A 'nın daha da küçültülmesiyle yine aynı mekanizma ile tam eddy sayısı dörtten altıya çıkacaktır. Bu mekanizmanın ilk aşaması olan side eddy'lerin görülmesi $A = 1.7507$ için görüldü (bkz Şekil 3.6g, burada $A = 1.74$). Sonraki aşamalar aynı olduğu için verilmeye gerek duyulmadı.



Şekil 3.6. $S = 1$ için görünüm oranı olan A 'nın azaltılmasıyla eddy oluşumu.
a) $A = 5$, b) $A = 3.5$, c) $A = 3.1$, d) $A = 2.85$, e) $A = 2.8$, f) $A = 2.4$, g)
 $A = 1.74$

4. BÖLÜM

KAVİTE AÇISININ AKIŞ YAPILARI ÜZERİNE ETKİSİ

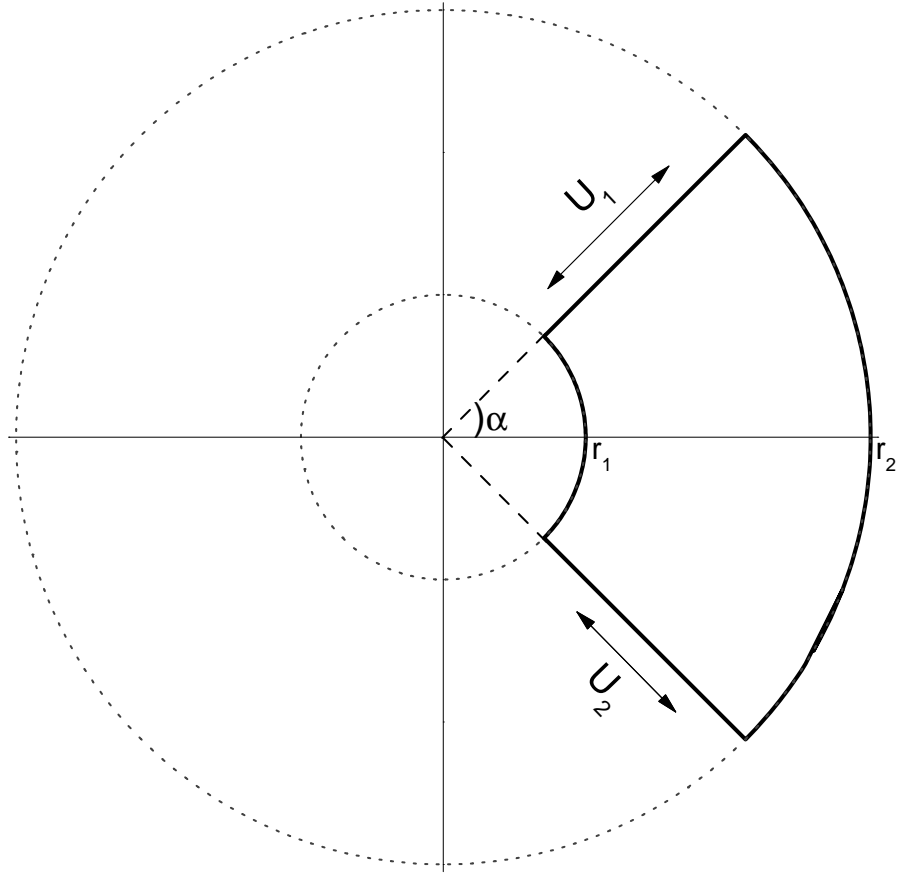
4.1. Giriş

Bu bölümde eş merkezli iki daire arasında kalan halkasal bölgeden alınan farklı sektör açılara sahip, sektörel geometrideki kaviteelerde Stokes akış yapıları ele alındı (bkz Şekil 4.1). Önceki bölümde kavite açısı olan α 'nın sabit tutularak, görünüm oranı olan A ile hız oranı olan S parametrelerinin değişiminin akış yapıları üzerine etkileri incelendi. Bu bölümde ise $S = -1$ ve 0 için A parametresinin herhangi bir değerinde sabit tutularak, α 'nın değişmesiyle eddy oluşum ve çatallanma mekanizmaları gösterildi. Yönetici denklem, sınır koşulları ve çözüm metodu önceki bölümde verildiği için burada bahsetmeyeceğiz. Sadece elde edilen çözüm algoritmasında α 'nın farklı değerleri için hesaplamalar yapılarak akış çizgilerine ulaşıldı.

4.2. Tek kapakla sürülen kavite: $S = 0$, $A = 3$

Kavitenin sadece düzgün üst kapağının hareketli olması düşünüldü. Kavite açısının değiştirilmesiyle oluşacak akış yapıları ve akış çatallanmaları elde edildi. İlk olarak $\alpha = 15$ alındı ve akış yapısı Şekil 4.2'de gösterildi. Açıkça görülür ki kavite içerisinde merkezi $(r, \theta) \approx (2.125, 5.66)$ da olan bir ana eddy ve hareketsiz duvarların kesiştiği alt köşelerde birer köşe eddy'ler yer almaktadır.

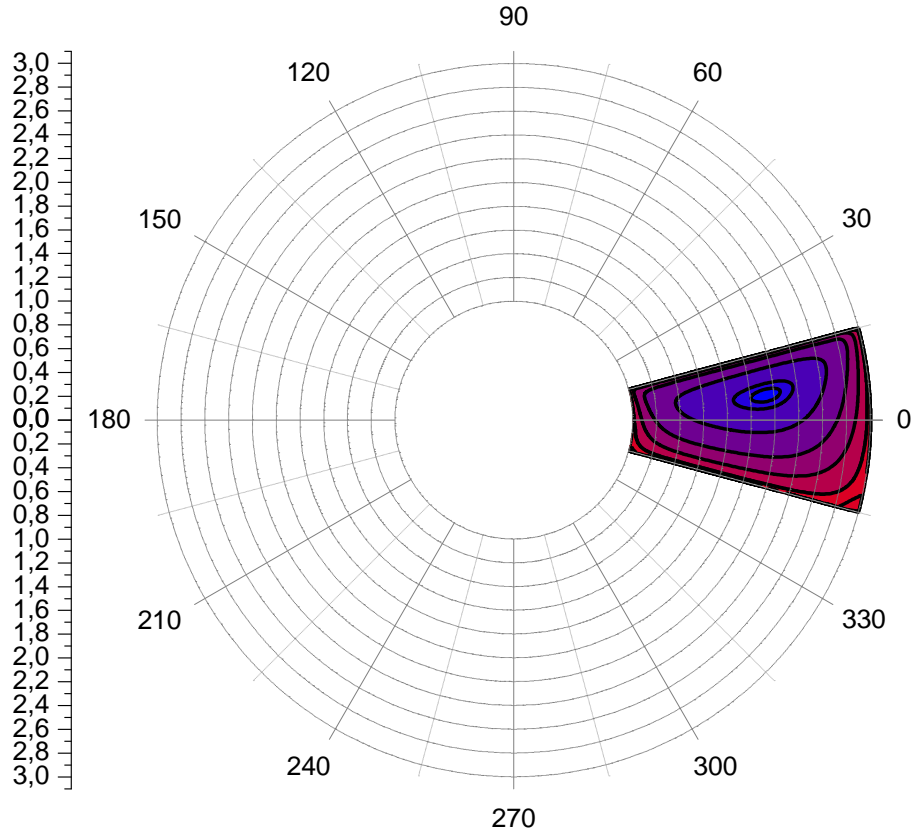
α açısının yavaşça artırılmasıyla aynı topolojik akış yapısının korunduğu, sadece köşe eddy lerinin gelişerek birbirlerine yaklaştıkları görüldü (bkz Şekil 4.3a-d). $\alpha = 47.3$ kritik değerine ulaşıldığında köşe eddy'lerin, alt duvar üzerinde birleştikleri ve kavite açısının biraz daha büyütüldüğünde ise birleşim noktasının (saddle) kavitenin iç kısmına kaydığı görüldü (bkz Şekil 4.3e). Bu durumda kavite içerisinde bir ana



Şekil 4.1. Sektör açısı α olan kavite.

eddy'nin yanısıra bir de alt kısımlarda oluşan separatrix yapı oluşmuş oldu.

α açısı daha da genişletildiğinde separatrix yapıya ait iki alt eddy merkezleri, saddle noktasına yaklaşarak $\alpha = 50.9$ kritik açısına gelindiğinde daha yakın olan soldaki center noktası saddle noktayla birleşip bir cusp oluşturular. α 'nın bu kritik değerden biraz daha büyültüldüğünde ise aynı anda kaybolarak yani bir saddle-node çatallanması gerçekleştirerek kavite içerisinde yeni bir ana eddy oluşturular (bkz Şekil 4.3f, burada $\alpha = 52$). Bundan sonraki süreç kavite açısının genişletilmesiyle aynı mekanizma işleyip üçüncü, dördüncü ve beşinci ana eddy ler oluştu (bkz Şekil 4.3f-p). Görünüm parametresi $A = 3$ için en fazla 5 ana eddy oluşmakta olduğu gözlemlendi. A 'nın farklı değerlerinde toplam eddy sayısının daha fazla olacağı açıktır (A ne kadar küçük seçilirse $\alpha \rightarrow 180$ için daha fazla eddy oluşacaktır). Ancak A 'nın hangi değer alırsa alsın daha başka bir çatallanma ya da akış yapısı gözlenmeyecek olup sadece çatallanma sayısı, dolayısıyla eddy sayısı farklılık gösterecektir.

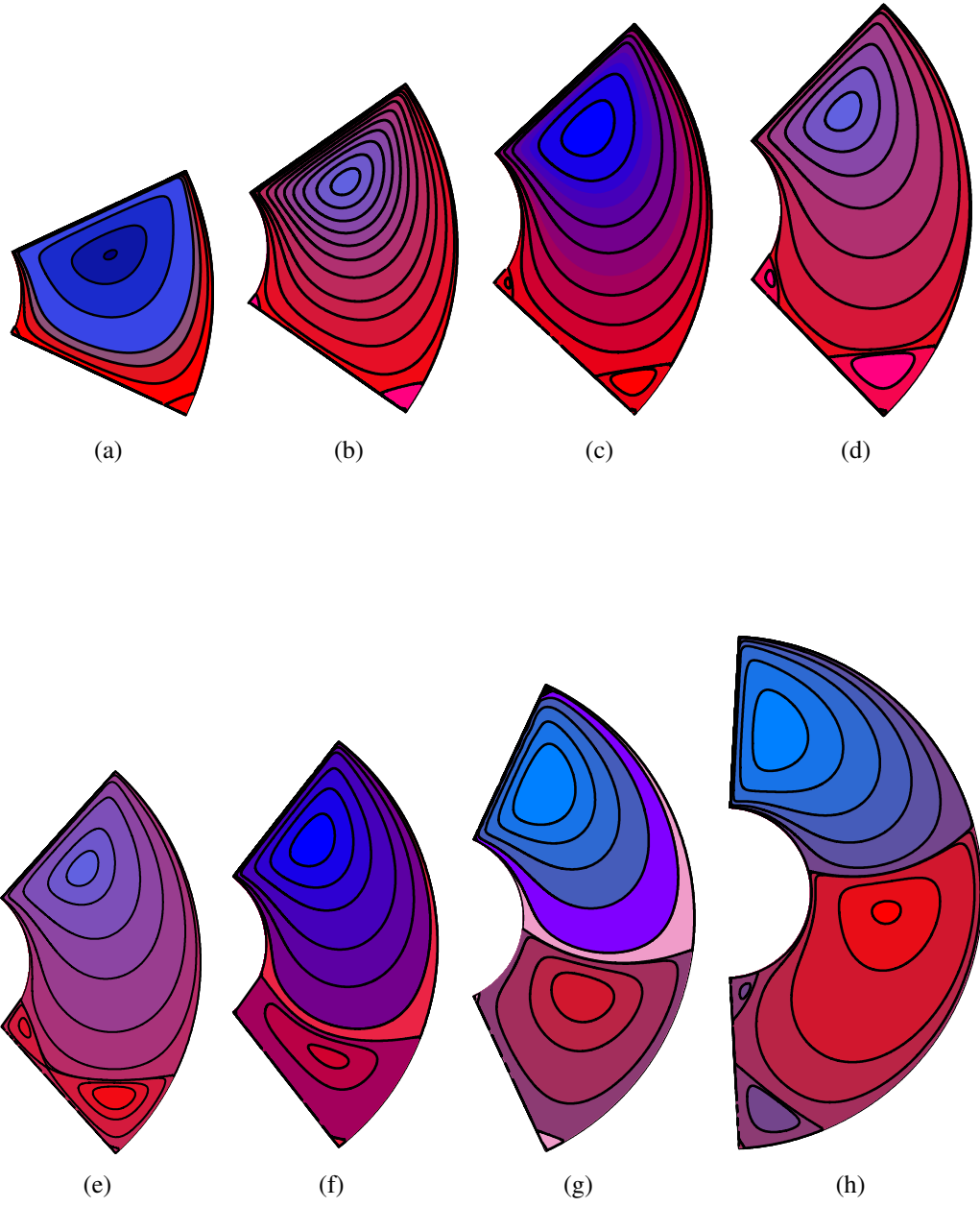


Şekil 4.2. $S = 0$, $A = 3$, $\alpha = 15$ için kavite geometrisi ve akış yapısı.

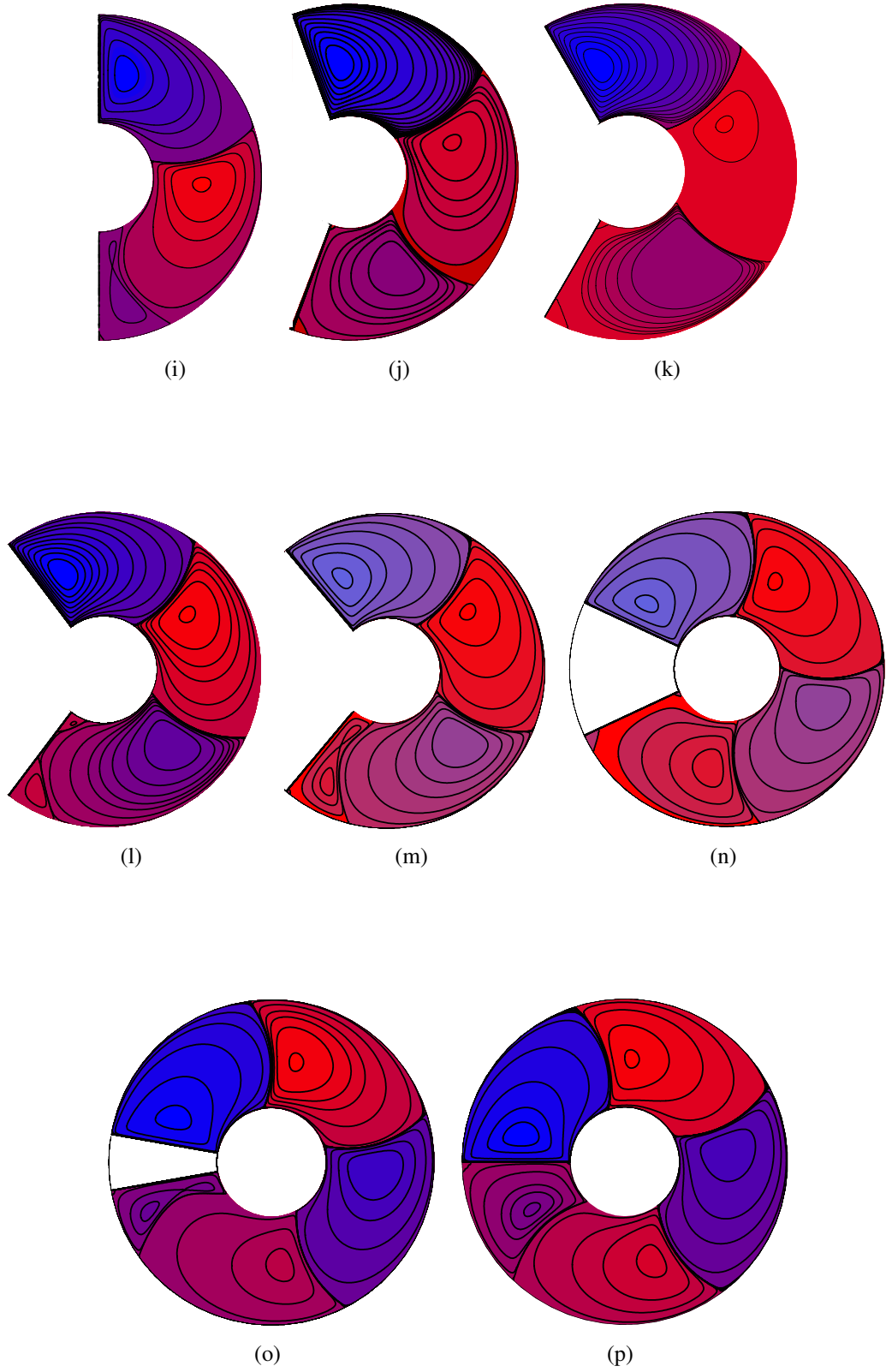
4.3. Çift kapakla sürülen kavite: $S = -1$, $A = 2$

Karşılıklı kapakların her ikisinde aynı hızda fakat ters yönde hareketli olması durumu, $S = -1$, incelendi. Kavite içerisindeki akış yapılarının $\theta = 0$ eksenine göre simetrik olduğu görüldü. Başlangıç olarak $\theta = 5$ için akış yapısı çizdirildi. Şekil 4.4a'da görüldüğü gibi bir center durgun noktaya sahip tek bir eddy kaviteyi kapsamaktadır. Kavite açısının daha da büyütülmesiyle bir süre aynı yapının korunduğu görüldü (bkz Şekil 4.4b, burada $\theta = 15$). θ 'nın daha da büyütülmesiyle ana eddy nin geliştiği ve $\theta = 17.44$ kritik değerine ulaşıldığında bir Pitchfork çatallanması gerçekleştiği görüldü (bkz Şekil 4.4c, burada $\theta = 22$). Böylece kavite içerisindeki center nokta saddle noktaya döndü ve iki yeni center nokta oluştu. Son durumda özetle kavite içerisinde bir separatrix oluştu. θ 'nın büyütülmesiyle separatrix yapıda bulunan center noktaların birbirlerinden uzaklaştıkları gözlemlendi (bkz Şekil 4.4d-e).

Kavite açısının daha da genişletilmesiyle hareketsiz yan duvarlardan birer kenar eddy doğduğu görüldü (bkz Şekil 4.4f). Her bir kenar eddy, bulunduğu duvara iki

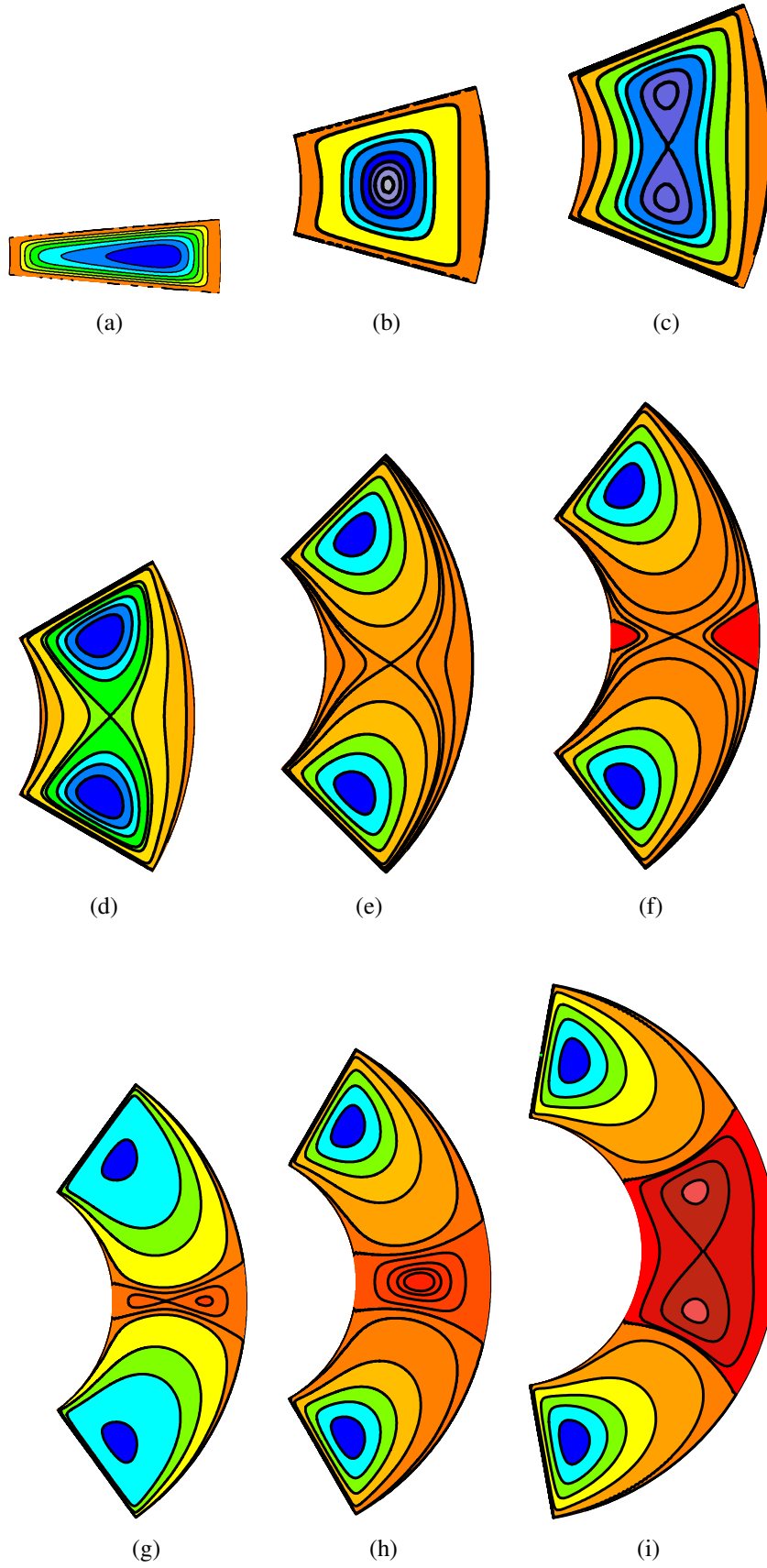


Şekil 4.3. (Devamı sonraki sayfada)

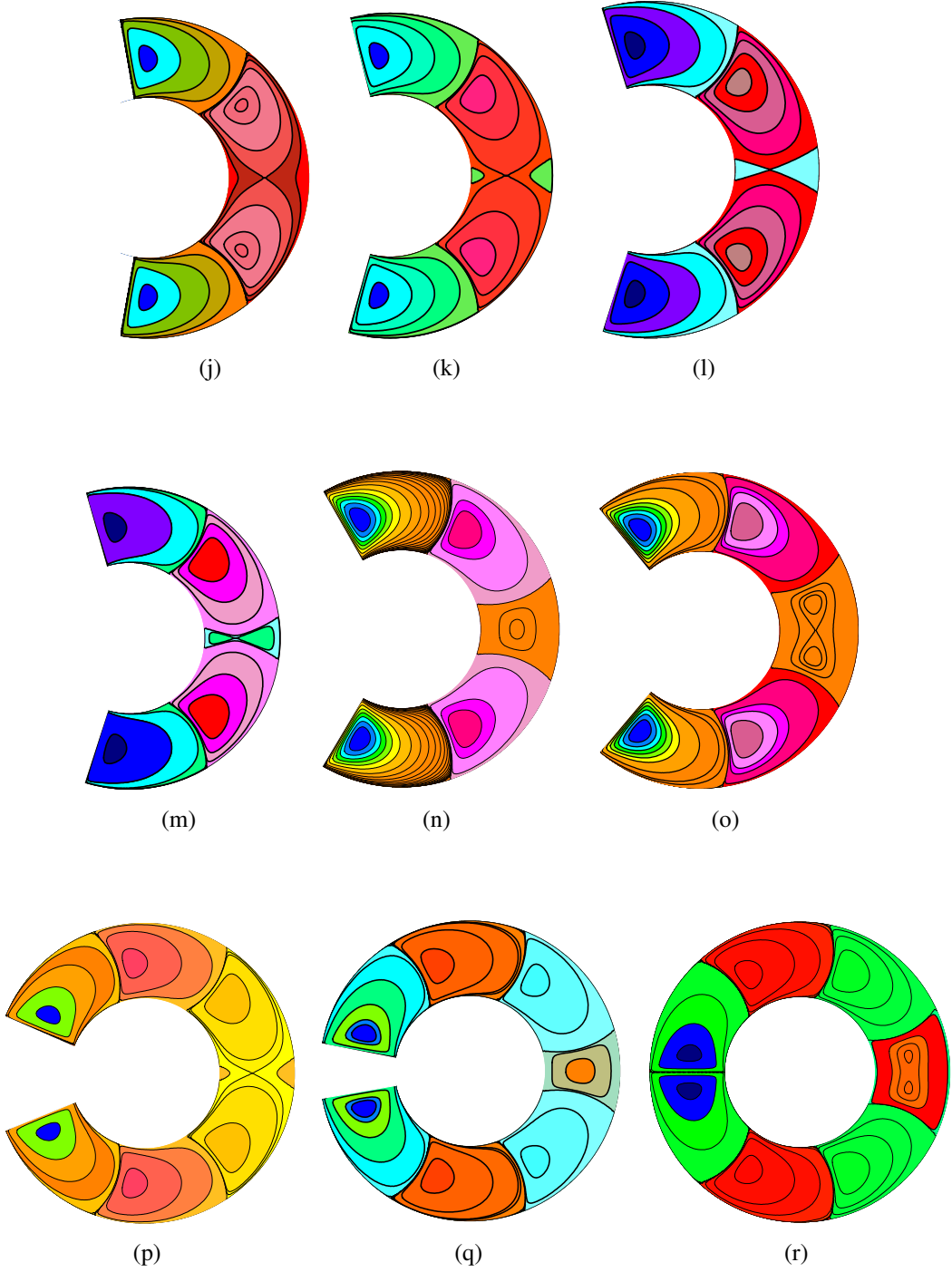


Şekil 4.3. (devamı) $S = 0$ için sektör açısının arttırılmasıyla eddy oluşumu.

a) $\theta = 25$, b) $\theta = 35$, c) $\theta = 43$, d) $\theta = 46$, e) $\theta = 48$, f) $\theta = 52$, g) $\theta = 65$,
h) $\theta = 87$, i) $\theta = 90$, j) $\theta = 110$, k) $\theta = 120$, l) $\theta = 127$, m) $\theta = 130$, n)
 $\theta = 155$, o) $\theta = 170$, p) $\theta \rightarrow 180$



Şekil 4.4. (Devamı sonraki sayfada)



Şekil 4.4. (devamı) $S = -1$ için sektör açısının arttırılmasıyla eddy oluşumu.
a) $\theta = 5$, b) $\theta = 15$, c) $\theta = 22$, d) $\theta = 30$, e) $\theta = 45$, f) $\theta = 52$, g) $\theta = 54$,
h) $\theta = 60$, i) $\theta = 80$, j) $\theta = 100$, k) $\theta = 105$, l) $\theta = 106.76$, m) $\theta = 107$, n)
 $\theta = 120$, o) $\theta = 130$, p) $\theta = 158$, r) $\theta = 170$, s) $\theta \rightarrow 180$

ayırma noktasıyla heteroclinic bağlantı kurarlar. Daha büyük kavite açılarında bu kenar eddy'ler birbirlerine yaklaştılar ve $\theta = 53.1$ olduğunda ortalarındaki saddle noktada birleştiler (bkz Şekil 4.4g, burada $\theta = 54$). Bu durumda ortadaki saddle noktasında birleşmiş iki heteroclinic bağlantı ve duvarlar üzerinde toplamda dört ayırma noktası görüldü. Kavite açısının biraz daha büyütülmesiyle heteroclinic bağlantılar birbirlerinden ayrılır ve bu ayrılan iki ayırma çizgisi arasında bir separatrix yapı oluşur. Bu yapıda daha önce de karşılaştığımız gibi bir saddle noktası ile bu noktada birbirine bağlanmış iki alt eddy bulunur. Kavite açısının daha da büyütülmesiyle alt eddy'lere ait center noktalar aralarındaki saddle noktara yaklaşırlar. Daha küçük yarıçaplı kenar tarafındaki (sol taraf) center nokta, saddle noktasına (düğüm noktası) daha yakın olduğundan bu ikisi birleşerek bir cusp oluşturular. Bu bir cusp çatallanması olup iki kritik nokta bire düşer ve θ 'nın çok az artırılmasıyla beraber aynı anda yok olurlar. Böylece kavite içerisindeki ana eddy sayısı 1'den 3'e çıktı (bkz Şekil 4.4h). θ 'nın daha da büyütülmesi halinde ortadaki son oluşan eddy sanki ilk başlangıçtaki ana eddy gibi düşünülürse, yine aynı mekanizma (kenar eddy'lerin doğması, birleşmesi, cusp) işleyecek ve eddy sayısı 3'den 5'e çıkacaktır. Bu durum 5'ten 7'ye, ..., şeklinde devam edecek olup farklı bir çatallanma ya da eddy oluşumu gözlenmeyecektir (bkz Şekil 4.4i-r). $\theta \rightarrow 180$ ve $A = 2$ için eddy sayısı ve akış yapısı Şekil 4.4r'de gösterilmiştir. Eğer A parametresi daha farklı seçilirse son durumdaki eddy sayıları da değişecek ancak eddy oluşum mekanizmasında farklı bir çatallanma görülmeyecektir.

4.4. Sonuç

Önceki bölümde açısının sabit tutulup görünüm oranının değişmesiyle gerçekleşen çatallanmalar ve eddy oluşumları gösterildi. Bu bölümde ise daha farklı bir parametre olan θ kavite açısı değiştirildi. Görüldü ki θ parametresinin büyütülmesi A görünüm oranının küçültülmesiyle aynı görevi görmektedir. Ayrıca yapılan çalışmaların hepsinde de gözle görülebilecek genişlikteki kaviteler incelendi. Daha ince yani akış yapılarına göz ile karar verilemeyecek kaviteler için farklı teorik çalışmalar yapılabilir. Bunların en başında dinamik sistemler ve normal form teorileri gelmekte olup literatürde bir çok örnekleri bulunur.

Son olarak hız ve görünüm parametrelerinin bazı tam değerleri için araştırma yaptık. Elde edilen çözüm kullanılarak farklı A ve S parametreleri için akış yapıları ve çatallanmaları elde edilebilir. Bu çalışmalar ise sonraki bir çalışma olarak önerilebilir.

EK-1

BİHARMONİK DENKLEMİN AYRILABİLİR ÇÖZÜMÜ

Kutupsal koordinatlarda biharmonik denklem,

$$\nabla^4 \Psi(r, \theta) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 \Psi(r, \theta) = 0 \quad (\text{EK-1.1})$$

şeklinde olup değişkenlerine ayrılabilir çözümü,

$$\Psi(r, \theta) = R(r)\Phi(\theta) \quad (\text{EK-1.2})$$

olarak ifade edilir. Bu istenen çözüm EK-2.1 denkleminde yerine konursa

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) R(r)\Phi(\theta) = 0 \quad (\text{EK-1.3})$$

şeklinde yazılabilir. Amacımız bilinmeyen $R(r)$ ve $\Phi(\theta)$ fonksiyonlarını elde etmektir. EK-2.2 denklemini düzenlenerek,

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3}{\partial \theta^2 \partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2 \partial r^2} + \frac{4}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] R(r)\Phi(\theta) = 0$$

olarak yazıldı. Buradan,

$$\Phi R^{vv} + \frac{2\Phi}{r} R^{vv} - \frac{\Phi}{r^2} R^{vv} + \frac{\Phi}{r^3} R^v + \frac{R}{r^4} \Phi^{vv} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{4}{r^4} R \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (\text{EK-1.4})$$

elde edilir.

$$\Phi'' = -\lambda^2 \Phi$$

şeklinde alınarak bu sabit katsayılı diferansiyel denklem çözülürse,

$$\Phi(\theta) = c_1 \cos(\lambda\theta) + c_2 \sin(\lambda\theta) \quad (\text{EK-1.5})$$

olarak bulunur ve $\Phi^{iv} = \lambda^4 \Phi$ olup, EK-2.3 denklemi düzenlenirse,

$$r^4 R^{iv} + 2r^3 R^{iii} - r^2(1 + 2\lambda^2)R'' + (1 + 2\lambda^2)rR' + (\lambda^4 - 4\lambda^2)R = 0$$

olur ki Cauchy-Euler denklemdir. Bu denklem çözülerek,

$$R(r) = ar^\lambda + br^{-\lambda} + cr^{2-\lambda} + dr^{2+\lambda} \quad (\text{EK-1.6})$$

olduğu kolayca elde edilir. Böylece EK-2.4 ve EK-2.5 den yararlanılarak,

$$\Psi(r, \theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} [E_n \sin(\lambda_n \theta) + F_n \cos(\lambda_n \theta)] \phi_1^{(n)}(r)$$

şeklinde akış fonksiyonu elde edilir. Buradaki $\phi_1^{(n)}(r)$ fonksiyonunun,

$$\phi_1^{(n)}(r) = a_n r^{\lambda_n} + b_n r^{-\lambda_n} + c_n r^{2-\lambda_n} + d_n r^{2+\lambda_n}$$

olduğu açıktır.

EK-2

λ_n ÖZ DEĞERLERİNİN ELDE EDİLİŞİ

Ek-1 de,

$$\phi_1^{(n)}(r) = a_n r^{\lambda_n} + b_n r^{-\lambda_n} + c_n r^{2-\lambda_n} + d_n r^{2+\lambda_n} \quad (\text{EK-2.1})$$

olduğu gösterildi. $a \leq r \leq b$ olmak üzere bölüm 3'de verilen sınır koşullarına göre,

$$\phi_1^{(n)}(a) = \phi_1^{(n)}(b) = \frac{d\phi_1^{(n)}(a)}{dr} = \frac{d\phi_1^{(n)}(b)}{dr} = 0 \quad (\text{EK-2.2})$$

şeklindedir. EK-2.1 ve EK-2.2'den,

$$\begin{aligned} 0 &= a_n a^{\lambda_n} + b_n a^{-\lambda_n} + c_n a^{2-\lambda_n} + d_n a^{2+\lambda_n} \\ 0 &= a_n b^{\lambda_n} + b_n b^{-\lambda_n} + c_n b^{2-\lambda_n} + d_n b^{2+\lambda_n} \\ 0 &= \lambda_n a_n a^{\lambda_n-1} - \lambda_n b_n a^{-\lambda_n-1} + (2 - \lambda_n) c_n a^{1-\lambda_n} + (2 + \lambda_n) d_n a^{1+\lambda_n} \\ 0 &= \lambda_n a_n b^{\lambda_n-1} - \lambda_n b_n b^{-\lambda_n-1} + (2 - \lambda_n) c_n b^{1-\lambda_n} + (2 + \lambda_n) d_n b^{1+\lambda_n} \end{aligned} \quad (\text{EK-2.3})$$

olacağı açıktır. Bu denklem sistemi çözülerek,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n} a^2 \left(\frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{2+2\lambda_n}}{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{2\lambda_n}} \right) \\ b_n &= \lambda_n b^{2\lambda_n} \left(\frac{b^2 - a^2}{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{2\lambda_n}} \right) \\ c_n &= \frac{1}{\lambda_n - 1} a^{2\lambda_n} - \frac{\lambda_n^2}{1-\lambda_n} b^{2\lambda_n} \left(\frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{2\lambda_n}} \right) \\ d_n &= 1 \end{aligned} \quad (\text{EK-2.4})$$

katsayıları elde edildi. EK-2.3'deki denklem sistemini çözülebilmesi için katsayılar matrisi olan,

$$M = \begin{bmatrix} a^{\lambda_n} & a^{-\lambda_n} & a^{2-\lambda_n} & a^{2+\lambda_n} \\ b^{\lambda_n} & b^{-\lambda_n} & b^{2-\lambda_n} & b^{2+\lambda_n} \\ \lambda_n a^{\lambda_n-1} & -\lambda_n a^{-\lambda_n-1} & (2-\lambda_n)a^{-\lambda_n+1} & (2+\lambda_n)a^{\lambda_n+1} \\ \lambda_n b^{\lambda_n-1} & -\lambda_n b^{-\lambda_n-1} & (2-\lambda_n)b^{-\lambda_n+1} & (2+\lambda_n)b^{\lambda_n+1} \end{bmatrix} \quad (\text{EK-2.5})$$

matrisin determinantı $\det M = 0$ olmalıdır. Bu determinant hesaplanarak,

$$0 = 8(1 - \lambda_n^2)ab - 4a^{1+2\lambda_n}b^{1-2\lambda_n} + 4\lambda_n^2 a^{-1}b^3 - 4a^{1-2\lambda_n}b^{1+2\lambda_n} + 4\lambda_n^2 a^3b^{-1} \quad (\text{EK-2.6})$$

elde edildi. Son denklemi düzenleyerek,

$$\left[\left(\frac{a}{b} \right)^{\lambda_n} - \left(\frac{a}{b} \right)^{-\lambda_n} \right]^2 - \lambda_n^2 \left[\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right]^2 = 0 \quad (\text{EK-2.7})$$

yada,

$$2 \sinh \left[\left(\log \frac{a}{b} \right) \lambda_n \right] = \pm \left[\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right] \lambda_n \quad (\text{EK-2.8})$$

veya,

$$\sin \left[i \left(\log \frac{a}{b} \right) \lambda_n \right] = \pm \frac{i}{2} \left[\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right] \lambda_n \quad (\text{EK-2.9})$$

olarak yazıldı.

$$\hat{\lambda}_n = i \left(\log \frac{a}{b} \right) \lambda_n \text{ ve } \beta = \frac{1}{2 \log \frac{b}{a}} \left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right) \quad (\text{EK-2.10})$$

dönüşümleri ile,

$$\sin \hat{\lambda}_n = \pm \beta \hat{\lambda}_n \quad (\text{EK-2.11})$$

bulundu. $\hat{\lambda}_n = u_n + iv_n$ şeklindeki öz-değerleri bulmak için 2 değişkenli fonksiyonlar için Newton-İterasyon metodu kullanıldı.

2.1. İki Değişkenli Fonksiyonlar İçin Newton-İterasyon Metodu

$$f(u_n, v_n) = 0 \quad (\text{EK-2.12})$$

$$g(u_n, v_n) = 0$$

olsun.

$$DT = \begin{bmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{bmatrix} \quad (\text{EK-2.13})$$

olmak üzere,

$$J = \text{Det} [DT] \quad (\text{EK-2.14})$$

olup,

$$DT^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{g_v}{J} & -\frac{f_v}{J} \\ -\frac{g_u}{J} & \frac{f_u}{J} \end{bmatrix} \quad (\text{EK-2.15})$$

şeklindedir. Bu durumda,

$$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{g_v}{J} & -\frac{f_v}{J} \\ -\frac{g_u}{J} & \frac{f_u}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \quad (\text{EK-2.16})$$

yani,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n - \frac{(g_v f) - (f_v g)}{J} \\ v_{n+1} &= v_n - \frac{(-g_u f) + (f_u g)}{J} \end{aligned} \quad (\text{EK-2.17})$$

olarak elde edilir. u_n ve v_n başlangıç değerlerin kullanarak u_{n+1} ve v_{n+1} elde edilir. Bu iterasyon yeterince yakınsaklığa ulaşıncaya kadar devam eder.

2.2. $\sin \hat{\lambda}_n = \pm \beta \hat{\lambda}_n$ Denkleminden $\hat{\lambda}_n$ Öz-Değerlerinin Elde Edilişi

Yukarıda özetlenen Newton-İterasyon metodunu,

$$\sin \hat{\lambda}_n = \pm \beta \hat{\lambda}_n \quad (\text{EK-2.18})$$

denklemine uygulayarak $\hat{\lambda}_n$ öz-değerlerini elde edelim. Öz-değerler,

$$\hat{\lambda}_n = u_n + iv_n \quad (\text{EK-2.19})$$

şeklinde alındı. EK-2.10'den yararlanarak,

$$\sin \left(i \log \frac{a}{b} \right) (u_n + iv_n) = \pm \beta \left(i \log \frac{a}{b} \right) (u_n + iv_n) \quad (\text{EK-2.20})$$

şeklinde yazıldı. İlk olarak EK-2.18 denklemi $\sin \hat{\lambda}_n = -\beta \hat{\lambda}_n$ şeklinde düşünüldü (daha sonra $\sin \hat{\lambda}_n = \beta \hat{\lambda}_n$ olarak da alınacak). Yani,

$$\beta = \frac{1}{2 \log \frac{b}{a}} \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \quad (\text{EK-2.21})$$

şeklindedir. EK-2.20 denklemi düzenlenerek,

$$\sin \left(v_n \log \frac{b}{a} \right) \cosh \left(u_n \log \frac{b}{a} \right) - i \cos \left(v_n \log \frac{b}{a} \right) \sinh \left(u_n \log \frac{b}{a} \right) = \beta v_n \log \frac{b}{a} - i \beta u_n \log \frac{b}{a} \quad (\text{EK-2.22})$$

elde edildi.

$$c_n = v_n \log \frac{b}{a}, \quad d_n = u_n \log \frac{b}{a} \quad (\text{EK-2.23})$$

şeklinde bir dönüşüm yapılarak son denklemi,

$$[\sin(c_n) \cosh(d_n) - \beta c_n] - i [\cos(c_n) \sinh(d_n) - \beta d_n] = 0 \quad (\text{EK-2.24})$$

olarak yazıldı. Böylece,

$$\begin{aligned} f(c_n, d_n) &= \sin(c_n) \cosh(d_n) - \beta c_n = 0 \\ g(c_n, d_n) &= \cos(c_n) \sinh(d_n) - \beta d_n = 0 \end{aligned} \quad (\text{EK-2.25})$$

olmak üzere,

$$DT = \begin{bmatrix} f_{c_n} & f_{d_n} \\ g_{c_n} & g_{d_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(c_n) \cosh(d_n) - \beta & \sin(c_n) \sinh(d_n) \\ -\sin(c_n) \sinh(d_n) & \cos(c_n) \cosh(d_n) - \beta \end{bmatrix} \quad (\text{EK-2.26})$$

şeklinde yazıldı. Sadelik için,

$$\begin{aligned} p &= \cos(c_n) \cosh(d_n) - \beta \\ q &= \sin(c_n) \sinh(d_n) \end{aligned} \quad (\text{EK-2.27})$$

dönüşümleri yardımıyla,

$$J = \text{Det}[DT] = p^2 + q^2 \quad (\text{EK-2.28})$$

olarak ifade edildi. Son olarak,

$$\begin{aligned} c_{nn} &= c_n - \left[\frac{g_{d_n} f - f_{d_n} g}{J} \right] = c_n - \left[\frac{pf - qg}{J} \right] \\ d_{nn} &= d_n - \left[\frac{-g_{c_n} f + f_{c_n} g}{J} \right] = d_n - \left[\frac{qf + pg}{J} \right] \end{aligned} \quad (\text{EK-2.29})$$

şeklinde yazılarak,

$$u_n = \frac{d_{nn}}{\log \frac{b}{a}}, \quad v_n = \frac{c_{nn}}{\log \frac{b}{a}} \quad (\text{EK-2.30})$$

olarak elde edildi. Genel olarak,

$$\alpha \sin \varepsilon = \varepsilon \quad (\text{EK-2.31})$$

şeklinde bir denklem için iterasyon başlangıcı olarak,

$$\varepsilon_n \sim (4n + 1)\frac{\pi}{2} + i[-\log \alpha + \log(4n + 1)\pi], \quad \alpha > 0 \quad (\text{EK-2.32})$$

olarak alınır (bkz. Henry (1976)). EK-2.18 denklemini için iterasyon başlangıç değeri,

$$\hat{\lambda}_n \sim (4n + 1)\frac{\pi}{2} + i[\log \beta + \log(4n + 1)\pi] \quad (\text{EK-2.33})$$

olmak üzere $\beta < 0$ olup $\log(-1) = i\pi$ olduğu da hesaba katılarak,

$$\hat{\lambda}_n \sim (4n - 1)\frac{\pi}{2} + i[\log(-\beta) + \log(4n + 1)\pi], \quad -\beta > 0 \quad (\text{EK-2.34})$$

şeklinde alındı. Bu işlemler $\sin \hat{\lambda}_n = \beta \hat{\lambda}_n$ için de $\beta = \frac{1}{2 \log \frac{b}{a}} \left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right)$ olmak üzere, iterasyon başlangıcını,

$$\hat{\lambda}_n \sim (4n + 1)\frac{\pi}{2} + i[\log(\beta) + \log(4n + 1)\pi], \quad \beta > 0 \quad (\text{EK-2.35})$$

olarak yaptık. λ_n için tablo yapılırken önce $-\beta$ sonrada β için yukarıdaki hesaplama yapılır ve sırayla alt alta yazılır. λ_n değerleri için elde edilen bazı değerler bölüm 3'de verildi.

KAYNAKLAR

1. Gaskell, P.H., Savage, M.D., Summers, J.L. and Thompson, H.M., 1995. Modeling and Analysis of Meniscus Roll Coating ,J. Fluid Mech.,298, Pp.113-137.
2. Shankar, P.N., Deshpande, M.D., 2000. Fluid Mechanics in The Driven Cavity, Ann. Rev. Fluid Mech. 136, Pp. 93-136.
3. Higgins.B.G.,1982. Dynamics of Coating, Adhesion and Wetting, Status Report Project 3328, The Institute of Paper Chem.
4. Hellebrand H., 1996. Tape casting. In Materials Science and Technology–Processing of Ceramics, Part I, Vol. 17 A, ed. R. J. Brook. VCH, Weinheim, pp. 189-260.
5. Scholle M, Haas A, Aksel N, Thompson HM, Hewson RW, Gaskell PH, 2009. The effect of locally induced flow structure on global heat transfer for plane laminar shear flow, International Journal of Heat and Fluid Flow 30 (2), pp 175-185.
6. Mcquain, W.D. Ribbens, C.J. Wang, C.Y. and Watson, L.T., 1994. Steady Viscous Flow in A Trapezoidal Cavity, Comput. Fluids, 23, Pp 613-626
7. Moffat, H.K., 1964. Viscous and Resistive Eddies Near A Sharp Corner, J. Fluid Mech., 18, Pp 1-18.
8. Liu, C.H. and Joseph, D.D., 1977. Stokes Flow in Wedge-Shaped Trenches, J. Fluid Mech., 80, Pp 443-463.
9. Ozalp,C., Pinarbasi, A., Sahin,B., 2010. Experimental Measurement of Flow Past Cavities of Different Shapes,Experimental Thermal and Fluid Science 34, Pp. 505–515.
10. Deliceoğlu, A., Aydın, S. H. , 2013. Flow bifurcation and eddy genesis in an L-shaped cavity, Comput. Fluids 73, 24-46.
11. Deliceoğlu, A., Aydın, S. H., 2014. Topological flow structures in an L-shaped cavity with horizontal motion of the upper lid. Journal of Computational and Applied Mathematics, 259, 937-943.
12. Stokes,G.G., 1847. On The Theory of Oscillatory Waves, Trans. Camp. Phil. Soc., Cambridge Press 8,5.

13. Oberbeck, A., 1976. Ueber Stationäre Flüssigkeitsbewegungen Mit Berücksichtigung Der Inneren Reibung, *J. Reine Angew. Maths.*, 81, Pp 62-80.
14. Jeffrey, G.B., 1992. On Water Waves Near The Shore, *Proc. Roy. Soc., (A)*, 102, Pp 161.
15. Smith, R.C.T., 1952. The Bending of A Semi-infinite Strip, *Austral. J. Sci. Res.*, 5, Pp 227-237.
16. Joseph, D.D. and Sturges, L., 1975. The Free Surface on A Liquid Filling A Trench Heated From Its Side, *J.Fluid Mech.*, 69, Pp 565-589.
17. Joseph, D.D. and Sturges, L., 1978. The Convergence of Biorthogonal Series For Biharmonic and Stokes Flow Edge Problems: Part II, *Siam., J. Appl. Math.*, 34, Pp 7-27.
18. Khuri,S.A., 1996. Biorthogonal Series Solution of Stokes Flow Problems in Sectorial Regions, *Siam.,J. Appl. Math.* 56, 1, Pp. 19-39.
19. Khuri,S.A., 2000. Biorthogonality Condition for Axisymmetric Stokes Flow In Spherical Geometries, *Journal .Math. Sci.*, 23, Pp 711-715.
20. Khuri,S.A., 1997. Biorthogonality Condition for Stokes Flow in Rectangular Regions,*intern. J. Computer Math.*, Vol. 70, Pp. 411 -415.
21. Khuri,S.A., 2003. Biorthogonality Condition For Creeping Flow in Wedge-Shaped Trenches, *Applied Mathematics and Computation*, 134, 1, 141-145.
22. Gürcan, F. and Bilgil, H., 2013. Bifurcations and eddy genesis of Stokes flow within a sectorial cavity. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, vol. 39, pp. 42-51.
23. Gürcan, F., Bilgil, H. 2015. Bifurcations and eddy genesis of Stokes flow within a sectorial cavity: Co-Moving Lids, *Eur. J. Mech. B Fluids* [dx.doi.org/10.1016/j.euromechflu.2015.02.008](https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2015.02.008).
24. Burggraf, O., 1996. Analytical and Numerical Studies of The Structure of Steady Separated Flows, *J. Fluid Mech.*, Pp. 113-151.
25. Pan, F. and Acrivos, A., 1967. Steady Flows in Rectangular Cavities, *J. Fluid Mech.*, 28, Pp 643-655.

26. Harper, J.F. and Wake, G.C., 1983. Stokes Flow Between Parallel Plates due to Transversely Moving End Wall, *J. Appl. Math.*, 30, Pp 141-149.
27. Brøns, M., Hartnack, J. N., 1999. Streamline topologies near simple degenerate critical points in twodimensional flow away from boundaries, *Phys. Fluids* 11, 314-324.
28. Gurcan, F., Deliceoglu, A. and Bakker, P.G., 2005. Streamline Topologies Near A Non-Simple Degenerate Critical Point Close to a Stationary Wall Using Normal Forms. , *J. Fluid Mechanics*, 539, 299-311.
29. Gurcan, F., and Deliceoglu, A., 2005. Streamline Topologies Near Non-Simple Degenerate Points in Two Dimensional Flows with Double Symmetric Away From Boundaries and an Application., *Physics of Fluids*. 17, 9, Art No:093106.
30. Gurcan, F., and Deliceoglu, A., 2005. Saddle Connections Near Degenerate Critical Points of Stokes Flow Within Cavities., *Applied Mathematics and Computation*, 172, 2, 1133-1144.
31. Gurcan, F., Streamline Topologies Near A Stationary Wall of Stokes Flow in a Cavity., *Applied Mathematics and Computation*, 165, Pp. 329-345, 2005.
32. Gurcan, F., 2003. Streamline Topologies in Stokes Flow Within Lid-Driven Cavities, *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, Vol.17, No:(1) Pp. 19-30.
33. Gurcan, F., Wilson, M.C.T., and Savage, M.D., 2006. Eddies Genesis and Transformation of Stokes Flow in Double-Lid-Driven Cavity Part 2: Deep Cavities, i *Proc. of The Instn. Mech. Eng. Part-C: J. Mec. Eng. Sci)*, , Vol.220, No:12, Pp 1765-1774.
34. Gurcan, F., 2006. Phd Thesis, University of Leeds.
35. Gurcan, F., Gaskell, P.H., Savage, M.D. and M. Wilson, 2003. Eddy Genesis and Transformation of Stokes Flow in A Double-Lid-Driven Cavity, *Proc. of The Instn. Mech. Eng. Part-C: J. Mec. Eng. Sci*, Vol.217, No:3, Pp 353-364.
36. Gaskell, P.H., Savage, M.D., Wilson, M., 1997. Structures in A Half-Filled Annulus Between Rotating Co-Axial Cylinders, *Journal of Fluid Mechanics*, 337, 263-282.

37. Jeffrey, D.J. and Sherwood, J.D., 1980. Streamline Patterns and Eddies in Low Reynolds Number Flow, *J.Fluid Mech.*, 96, Pp 315-334.
38. Bakker, P.G., 1989. Bifurcation in Flow Patterns, Thesis, Technical University of Delft, Netherlands.
39. Beavers and R. L. Fosdick, 1973. The Free Surface on A Liquid Between Cylinders Rotating at Different Speeds *Arch Rat. Mech Anal.*, 49, 321.
40. Deliceoglu, A. and Gurcan, F., 2008. Streamline Topology Near Non-Simple Degenerate Critical Points in Two-Dimensional Flow With Symmetry About an Axis, *Journal of Fluid Mechanics*, Volume 606, 417-432.
41. Gaskell, P.H., Gurcan, F., Savage, M.D. and Thompson, H.M, 1998. Stokes Flow in A Double-Lid-Driven Cavity With Free Surface Side Walls ., *Proc. of The Instn. Mech. Eng. Part-C: J. Mec. Eng. Sci.*, Vol.212, No:5, Pp. 387-403.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Zarife DÖLEK
Doğum Tarihi ve Yeri : 29.10.1990 / AKSARAY
E-posta adresi : zarifedolek@hotmail.com

EĞİTİM BİLGİLERİ

Lisans : Erciyes Üniversitesi Fen Fakültesi 2012