GAZİ ÜNİVERSİTESİ

Gazi

1926

METALİK DİFERENSİYEL GEOMETRİ

Fatma YILMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OCAK 2016

Fatma YILMAZ tarafından hazırlanan "METALİK DİFERENSİYEL GEOMETRİ" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile GAZİ ÜNİVERSİTESİ MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Mustafa ÖZKAN

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Başkan: Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Üye: Prof. Dr. F. Nejat EKMEKCİ

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Tez Savunma Tarihi: 07/01/2016

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

....

Prof. Dr. Metin GÜRÜ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

....

Fatma YILMAZ

07/01/2016

METALİK DİFERENSİYEL GEOMETRİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Fatma YILMAZ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2016

ÖZET

Bu çalışmada, $J^2 = pJ + qI$ denklemini sağlayan $(1,1)-$tipinden bir J tensör alanı ile bir diferensiyellenebilir M manifoldu üzerinde bir metalik yapı tanımlandı ve bu yapılara örnekler verildi. Metalik yapılar ile konneksiyonlar arasındaki ilişki incelendi ve bazı sonuçlar elde edildi. Metalik yapıların integrallenebilirliği ve paralelliği araştırıldı ve son olarak metalik Riemann metrikleri çalışıldı.

Bilim Kodu	: 204.1.049
Anahtar Kelimeler	: Metalik oran, metalik yapı, metalik manifold, metalik Riemann manifold, integrallenebilirlik.
Sayfa Adedi	: 89
Danışman	: Doç. Dr. Mustafa ÖZKAN

METALLIC DIFFERENTIAL GEOMETRY

(M. Sc. Thesis)

Fatma YILMAZ

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2016

ABSTRACT

In this study, a metallic structure is defined on a differentiable manifold M with a $(1,1)-$tensor field J which satisfies the equation $J^2 = pJ + qI$ and some related examples of these structures are given. The relation between metallic structures and connections are obtained and some results are given. The integrability and parallelism of metallic structures are investigated and finally metallic Riemannian structures are studied.

Science Code	: 204.1.049
Key Words	: Metallic ratio, metallic structure, metallic manifold, metallic Riemannian manifold, integrability.
Page Number	: 89
Supervisor	: Assoc. Prof. Dr. Mustafa ÖZKAN

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren, tezin meydana getirilmesi sırasında karşılaştığım her problemde yardımına başvurduğum, bilgi birikiminden faydalandığım değerli hocam Doç. Dr. Mustafa ÖZKAN'a teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca her koşulda yanımda olan, manevi desteğini esirgemeyen Arş. Gör. Emre SEVGİ'ye, çok sevdiğim ailem ve dostlarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\boldsymbol{\sigma_{p,q}}$	Metalik oran
$\boldsymbol{J}$	Metalik yapı
$\boldsymbol{F(n)}$	Fibonacci dizisi
$\boldsymbol{G(n)}$	Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi (Horadam dizisi)
$\boldsymbol{TM}$	M nin tanjant manifoldu
$\boldsymbol{\nabla}$	Lineer konneksiyon
$\overset{Sc}{\boldsymbol{\nabla}}$	Schouten konneksiyonu
$\overset{V}{\boldsymbol{\nabla}}$	Vranceanu konneksiyonu
$[\,,\,]$	Lie parantez operatörü
$\Im_l^k(\boldsymbol{M})$	M üzerinde tanımlı $(k,l)-$ tipinden tensör alanlarının kümesi
$\boldsymbol{V_zE}$	E nin z noktasındaki vertical uzayı
$\boldsymbol{H_zE}$	E nin z noktasındaki horizontal uzayı
$\boldsymbol{(E,\pi,M,B)}$	Lif demeti
$\boldsymbol{cl}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$	$\mathbb{R}^n$ nin Clifford cebiri
$\mathbb{H}$	Kuaterniyon cebiri
$\boldsymbol{B(M,\pi,G)}$	Asli lif demeti

1. GİRİŞ

Altın oran ve Fibonacci sayılarının, bitkilerin büyümeleri ve bazı belli katıların kristalografik yapılarından, veri tabanlarında arama yapmak için yazılan bilgisayar algoritmalarının geliştirilmesine kadar çok geniş uygulama alanları vardır. Ayrıca altın oran, insan bedeninin boyutlarında, mimaride, görsel sanatlarda, uyumlu ses frekanslarındaki oranlarda ve fraktallarda karşımıza çıkmaktadır.

Son yıllarda ise altın oran matematik araştırmalarında önemli bir rol oynamaktadır. 2008'de Crasmareanu ve Hretcanu [4], $Q(X) = X^2 - X - 1 = 0$ denklemini sağlayan M manifoldu üzerinde $(1,1)$ tipinden bir tensör alanı yardımı ile altın yapı tanımlamışlar ve bu yapının geometrisini incelemişlerdir. Daha sonra bu konu ile ilgili bir çok çalışma yapılmıştır [11, 19, 20, 27, 28, 34, 37, 38].

İnsanlık tarihinde, altın oran kadar olmasa da insanları etkileyen irrasyonel sayılardan bazıları da; gümüş oran ve bronz oran olarak adlandırılan, sırasıyla, $1+\sqrt{2}$ ve $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ sayılarıdır. Özkan ve Peltek [29, 31] gümüş orandan yararlanarak gümüş yapı ile ilgili çalışmalar yapmışlardır. Bronz oran ile ilgili Özkan ve Yılmaz [30] 14. Matematik Sempozyumu'nda "Bronz Yapı" adlı bir sunum yapmışlardır.

De Spinadel [7–9], altın oranın çok ilginç bir genişletilmişini tanıtmıştır ve bu genişletmeyi metalik oran ailesi olarak adlandırmıştır. Metalik oran ailesinin elemanları; altın oran, gümüş oran, bronz oran, bakır oran ve diğerleri gibi bir metalin isminin özelliklerini taşımaktadır.

Fibonacci dizisi

$$F(n+1) = F(n) + F(n-1)$$

bağıntısıyla verilen tam sayıların bir dizisidir. Bu bağıntı

$$G(n+1) = pG(n) + qG(n-1), \quad n \geq 1 \tag{1.1}$$

şeklinde genelleştirilebilir ve bu genelleştirme genelleştirilmiş Fibonacci dizisi (veya Horadam dizisi) olarak adlandırılır. $G(0) = a$ ve $G(1) = b$ alınırsa

$$a,\ b,\ pb + qa,\ p(pb + qa) + qb, ...$$

şeklinde genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin elemanları bulunur.

Eş. 1.1 ifadesinden,

$$\frac{G(n+1)}{G(n)} = p + q\frac{G(n-1)}{G(n)} = p + \frac{q}{\dfrac{G(n)}{G(n-1)}}$$

elde edilir. İki tarafın limiti alınıp $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{G(n+1)}{G(n)}$ değerinin var ve x e eşit olduğu kabul edilirse, $x = p + \dfrac{q}{x}$, yani $x^2 - px - q = 0$ denklemi bulunur. Bu denklemin pozitif kökü metalik oranı verir ve bu oran

$$\sigma_{p,q} = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2} \tag{1.2}$$

eşitliği ile tanımlanır [7–9].

Eş. 1.2 ifadesinde, p ve q nun pozitif tamsayı değerleri için metalik oran ailesinin elemanları bulunur. Yani,

• $p = q = 1$ için, ardışık iki Fibonacci sayısı arasındaki oran olan $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ altın oran,

• $p = 2$, $q = 1$ için, ardışık iki Pell sayısı arasındaki oran olan $\sigma_{1,2} = 1 + \sqrt{2}$ gümüş oran,

• $p = 3$, $q = 1$ için, $\sigma_{3,1} = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$ bronz oran,

• $p = 1$, $q = 2$ için, $\sigma_{2,1} = 2$ bakır oran,

• $p = 1$, $q = 3$ alırsak, $\sigma_{1,3} = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$ nikel oran

elde edilir [21].

Goldberg, Yano ve Petridis [14] ve [15], bir manifold üzerinde $Q(J) = J^2 - pJ - qI$ yapı polinomuna sahip bir polinomial yapı tanımlamışlardır. Bundan esinlenerek 2013 yılında Hretcanu ve Crasmareanu [21], bir manifold üzerinde $J^2 = pJ + qI$ denklemini sağlayan $(1,1)-$ tipinden bir tensör alanı yardımıyla bir metalik yapı tanımlamışlardır. Ayrıca metalik oran ailesinin diferensiyel geometrisinde bazı uygulamaları incelemişler ve Riemann manifoldları üzerinde polinomial yapıların bir sınıfını kullanarak Fibonacci dizilerini genelleştirmişlerdir. Gezer ve Karaman [12], 2015 de metalik Riemann manifoldlar üzerine bir çalışma yapmışlardır.

Bu tezin ikinci bölümünde, tezin ilerleyen kısmında ihtiyaç duyulan temel kavram ve teoremlere yer verilmiştir.

Özgün olan üçüncü bölümde ise, Hretcanu ve Crasmareanu [21] tarafından tanımlanan metalik yapı kullanılarak, diğer çalışmalarında [4] elde edilen sonuçlar metalik yapıya genelleştirilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, ilerleyen bölümlerde kullanacağımız bazı temel kavramları vereceğiz.

2.1. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tezin tamamında, bir $F : M \longrightarrow N$ dönüşümü verildiğinde F nin tanım kümesi olarak M nin tamamı ve görüntü kümesi olarak da N nin tamamı alınmayacaktır. Bunun için F nin tanım kümesi $domF = D_F$ ve değer kümesi de $rangeF = ImF = R_F$ ile gösterilecektir.

2.1 Tanım

Boştan farklı herhangi bir küme M ve $\varphi : M \to \mathbb{R}^m$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer;

$i)$ φ birebir,

$ii)$ φ nin görüntü kümesi $\mathbb{R}^m$ de bir açık küme

ise φ ye M için bir $m-$boyutlu bir harita veya koordinat sistemi denir [2].

2.2 Tanım

M kümesi için $m-$boyutlu bir φ haritası verilmiş olsun. $\mathbb{R}^m$ deki doğal koordinat fonksiyonları $1 \leq i \leq m$ için $u^i : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere, $x^i = \varphi^i = u^i \circ \varphi$ şeklinde tanımlı

$$x^i : M \to \mathbb{R}$$

fonksiyonlarına φ haritasına ait lokal koordinat fonksiyonları denir.

$p \in D_\varphi$ olmak üzere $\varphi(p) \in \mathbb{R}^m$ noktasının bileşenleri olan $x^i(p) = \varphi^i(p) \in \mathbb{R}$ sayılarına

$p \in D_\varphi$ noktasının lokal koordinatları ve $\varphi(p) \in \mathbb{R}^m$ ye de $p \in D_\varphi$ nin φ haritasındaki koordinat gösterimi (ifadesi veya temsilcisi) denir.

φ haritasına p de veya p civarında bir harita, D_φ kümesine p noktasının bir koordinat komşuluğu ve φ dönüşümüne de haritanın koordinat dönüşümü denir [2].

Not

Bir M kümesi üzerinde bir φ haritası denildiğinde bazen literatürde $(D_\varphi, \varphi = (x^i))$ ikilisi de anlaşılır.

2.3 Tanım

M kümesi için $m-$boyutlu iki harita φ ve ψ olsun. Eğer, $D_\varphi \cap D_\psi = \varnothing$ ya da $D_\varphi \cap D_\psi \neq \varnothing$ olduğunda $\gamma = \psi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ve $\gamma^{-1} = \varphi \circ \psi^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonları C^k- diferensiyellenebilir ise φ ve ψ haritalarına C^k- bağdaşık haritalar denir ve bu durumda γ ya da bir lokal koordinat transformasyonu denir [2].

2.4 Tanım

M bir küme ve I bir indis kümesi olmak üzere, M de haritaların bir kümesi $\mathbb{A} = \{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ olsun. Bu haritaların tanım kümeleri $D_{\varphi_\alpha} = U_\alpha \subset M$ olmak üzere

$i)$ U_α lar M yi örter; yani $M = \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$,

$ii)$ $\mathbb{A}$ nın tüm haritaları C^k- bağdaşık, yani $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ olacak biçimdeki her bir $(\alpha, \beta) \in I \times I$ indis çifti için; $\gamma_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ ve $\gamma_{\alpha\beta}^{-1} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümü C^k- diferensiyellenebilir ise $\mathbb{A}$ sınıfına M kümesi üzerinde bir C^k-diferensiyellenebilir atlas veya kısaca C^k- atlas denir [2].

2.5 Tanım

M kümesi üzerinde iki C^k-atlas $\mathbb{A}$ ve $\mathbb{B}$ olsun. Eğer $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$, M üzerinde yine bir

C^k-atlas ise $\mathbb{A}$ ve $\mathbb{B}$ atlaslarına C^k- bağdaşıktır denir [2].

2.6 Önerme

M kümesi üzerinde iki C^k-atlas $\mathbb{A}$ ve $\mathbb{B}$ olsun. $\mathbb{A}$ ve $\mathbb{B}$ nin C^k- bağdaşık olması $\mathbb{A} \sim \mathbb{B}$ ile gösterilirse bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır.

Bu $\sim$ bağıntısına göre M kümesi üzerinde herhangi bir denklik sınıfı

$$S = [\mathbb{A}] = \left\{\mathbb{B} : \mathbb{B},\ M \text{ üzerinde bir } C^k - \text{atlas ve } \mathbb{A} \sim \mathbb{B}\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

2.7 Tanım

S ye M kümesi üzerinde $\mathbb{A}$ nın doğurduğu (veya $\mathbb{A}$ ile gerilen) C^k- diferensiyellenebilir yapı veya C^k- yapı denir [2].

2.8 Tanım

S, $\mathbb{A}$ nın doğurduğu C^k- yapı olmak üzere (M, S) veya $(M, [\mathbb{A}])$ ikilisine $m-$ boyutlu bir C^k- diferensiyellenebilir manifold veya kısaca C^k- manifold denir [2].

(M, S), C^k- manifold kısalık için M ile gösterilir.

$\forall k \in \mathbb{Z}^+$ için C^k- manifolda, $C^\infty-$ manifold denir.

Çalışmanın tamamında aksi söylenmedikçe manifoldun $C^\infty-$ diferensiyellenebilir olduğu kabul edilecektir.

2.9 Tanım

M ve N, sırasıyla, m ve n boyutlu iki manifold, $p \in M$ ve $F : M \longrightarrow N$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer,

$$\hat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \psi(V)$$

dönüşümünün $\varphi(p)$ noktasında $C^{\infty}-$ diferensiyellenebilir olacak şekilde p noktasının bir U ve $F(p)$ noktasının da $F(U) \subset V$ şeklinde bir V koordinat komşuluğu varsa, F dönüşümüne $p \in M$ noktasında $C^{\infty}-$ diferensiyellenebilirdir (veya $C^{\infty}-$ dönüşümdür) denir. Buradaki $\hat{F}$ dönüşümüne (U, φ) ve (V, ψ) haritalarına göre F nin koordinat temsili (veya lokal koordinatlardaki ifadesi) denir [2].

2.10 Tanım

M manifoldu üzerinde bir açık altküme $W \subset domF$ olmak üzere; eğer F, W nin her noktasında bir $C^{\infty}-$ diferensiyellenebilir dönüşüm ise; F, W üzerinde $C^{\infty}-$ diferensiyellenebilir dönüşüm veya kısaca $C^{\infty}-$ dönüşüm denir [2].

Eğer $F : M \longrightarrow N$, $domF$ üzerinde bir $C^{\infty}-$ dönüşüm ise $F \in C^{\infty}(M, N)$ ve özel olarak $N = \mathbb{R}$ ise o zaman $F \in C^{\infty}(M)$ yazılır. Bir $p \in M$ için, p nin bir komşuluğunda $C^{\infty}-$ diferensiyellenebilir olan reel değerli dönüşümlerin kümesi $C^{\infty}(p)$ ile gösterilir.

2.11 Tanım

M, N aynı boyutlu iki manifold ve $F : M \longrightarrow N$ birebir, örten dönüşüm olsun. Eğer

$i)$ $F \in C^{k}(M, N)$,

$ii)$ $F^{-1} \in C^{k}(N, M)$

ise F dönüşümüne bir $C^{k}-$ diffeomorfizm denir. Bu durumda M ve N manifoldlarına diffeomorfiktirler denir [2].

2.12 Tanım

M diferensiyellenebilir bir manifold ve $p \in M$ olsun. $\forall f, g \in C^{\infty}(p)$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{array}{rcl} v_p : C^{\infty}(p) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longrightarrow & v_p(f) \end{array}$$

dönüşümü

$i)$ Lineerlik;

$$v_p(af + bg) = av_p(f) + bv_p(g)$$

$ii)$ Leibniz kuralı;

$$v_p(fg) = v_p(f)g(p) + f(p)v_p(g)$$

özelliklerini sağlıyorsa v_p ye p noktasında M nin bir tanjant vektörü denir ve M nin bu şekildeki tanjant vektörlerinin kümesi T_pM ile gösterilir. T_pM bir reel vektör uzayı olup bu uzaya M nin p noktasındaki tanjant uzayı denir [2].

M diferensiyellenebilir manifoldunun $p \in M$ noktasında bir haritası $(U, \varphi = (x^i))_{1 \leq i \leq m}$, ise T_pM nin bir bazı

$$\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p : 1 \leq i \leq m \right\}$$

kümesidir. Bu baza T_pM nin doğal (veya koordinat) bazı denir [2].

2.13 Tanım

M ve N, sırasıyla, m ve n boyutlu iki manifold ve $F : M \longrightarrow N$ bir $C^{\infty}-$ dönüşüm olsun. $\forall v_p \in T_pM$ ve $\forall h \in C^{\infty}(N)$ için,

$$(dF_p(v_p))(h) = v_p(h \circ F)$$

şeklinde tanımlı bir $dF_p : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ dönüşümüne F nin bir $p \in M$ noktasındaki türev dönüşümü denir [26].

dF_p bir lineer dönüşüm olup M ve N nin doğal bazlarına göre dF_p dönüşümüne karşılık gelen $\left[\left. \dfrac{\partial f^j}{\partial x^i} \right|_p \right]$ matrisi F nin p deki Jakobien matrisi olarak isimlendirilir ve $J_F(p)$ ile gösterilir. Burada $p \in U$, $(U, \varphi = (x^i))_{1 \leq i \leq m}$ ve $(V, \psi = (y^i))_{1 \leq j \leq n}$,sırasıyla, M ve N ye ait haritalar olup, $y^j \circ F = f^j$ dönüşümleri $F(p) = (f^1(p), ..., f^n(p))$ şeklinde F nin koordinat birleşenleridir. Ayrıca,

$$(rankF)_p = rank(dF_p) = rankJ_F(p) = (rank\hat{F})_{\varphi(p)}$$

olarak tanımlanır [26].

$TM = \bigcup\limits_{p \in M} T_pM$ olmak üzere, eğer U, M nin bir açık alt kümesi ise $\bigcup\limits_{p \in U} T_pU$ ayrık birleşimi $TM|_U$ ile gösterilsin. $p \in U$ için $T_pU \cong T_pM$ olduğundan

$$TM|_U \cong TM$$

dir.

2.14 Tanım

M bir manifold, M nin bir açık alt kümesi U ve $X : U \longrightarrow TM|_U$ bir dönüşüm olsun. $\pi_M : TM|_U \longrightarrow U$, $\pi_M(v) = p$; (eğer $v \in T_pM$) ise kanonik projeksiyon olmak üzere $\pi_M \circ X = I_U$ (özdeşlik dönüşümü) ise, X e U üzerinde bir vektör alanı denir [2].

Genellikle vektör alanları tanım kümeleri belirtilmeden $X : M \longrightarrow TM$ şeklinde de ifade edilir. Bu durumda X in tanım kümesinin M de bir açık alt küme olduğu anlaşılacaktır. M üzerindeki vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ ile gösterilir.

$X \in \chi(M)$, $domX = U$ olmak üzere, $\forall f \in C^\infty(U)$ ve $\forall p \in U$ için:

$$X(f)(p) = X_p(f)$$

şeklinde tanımlansın. Eğer $X(f)$, U üzerinde $C^\infty-$ diferensiyellenebilir ise, X vektör alanına U üzerinde $C^\infty-$ diferensiyellenebilir denir. Bu durumda

$$\begin{array}{rcl} X : C^\infty(U) & \longrightarrow & C^\infty(U) \\ f & \longrightarrow & X(f) \end{array}$$

operatörü tanımlanabilir.

Bundan sonra vektör alanından söz edildiğinde $C^\infty-$ diferensiyellenebilir olduğu kabul edilecektir.

2.15 Tanım

M bir manifold olsun. T_pM tanjant uzayının cebirsel duali olan T_p^*M ye, M nin p noktasındaki kotanjant uzayı ve bu uzayın her bir elemanına da p noktasında bir kotanjant vektör (veya kovektör) denir [26].

T_p^*M uzayı bir reel vektör uzayı olup, p noktasında verilen bir $(U, \varphi = (x^i))_{1 \leq i \leq m}$ haritasına göre doğal bazı

$$\left\{ dx^i\big|_p : 1 \leq i \leq m \right\}$$

kümesidir. $dx^i\big|_p \left(\left. \dfrac{\partial}{\partial x^j} \right|_p \right) = \delta_j^i$ olduğu açıktır [26].

2.16 Tanım

M bir manifold olsun. M nin her bir noktasına bir kotanjant vektör karşılık getiren

$$W : M \to \bigcup_{p \in M} T_p^*M = T^*M$$

dönüşümüne M üzerinde $1-$form (veya kovektör alanı) denir [26].

M manifoldu üzerinde tanımlı $1-$formların kümesi $\chi^*(M)$ ile gösterilir.

2.17 Tanım

Bir reel vektör uzayı V ve V nin dual uzayı V^* olsun.

$$T : \underbrace{V^* \times ... \times V^*}_{k-\text{tane}} \times \underbrace{V \times ... \times V}_{l-\text{tane}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde her bir $(k+l)$ lineer dönüşümüne V üzerinde $k-$ yinci dereceden kontravaryant ve $l-$ yinci dereceden kovaryant (veya kısaca $(k,l)-$ tipinden) bir tensör denir [26].

Bir vektör uzayı üzerinde tanımlı $(k,l)-$ tipinden tensörlerin kümesi $T_l^k(V)$ ile gösterilir. $T_l^k(V)$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı olup $boyV = n$ ise $boyT_l^k(V) = n^{k+l}$ dir.

V vektör uzayı yerine M manifoldunun p noktasındaki tanjant uzayı olan T_pM alınırsa, M nin p noktasındaki bir tensör uzayı olan $T_l^k(T_pM)$ elde edilir ve bu uzayın her bir elemanına p noktasında bir $(k,l)-$ tensör denir.

2.18 Tanım

M bir manifold olsun. M nin her bir noktasına $(k,l)-$ tipinden bir tensör karşılık getiren bir dönüşüme, M üzerinde $(k,l)-$ tipinden bir tensör alanı denir [26].

O halde M üzerinde tanımlı bir tensör alanı,

$$T : M \longrightarrow \bigcup_{p\in M} T_l^k(T_pM)$$

$$p \longrightarrow T(p) \in T_l^k(T_pM)$$

şeklinde tanımlı bir dönüşümdür.

M üzerinde tanımlı tensör alanlarının kümesi $\Im_l^k(M)$ ile gösterilir. $\Im_l^k(M)$ kümesi $C^\infty(M)$ üzerinde bir modüldür.

Özel olarak:

$$\Im_0^0(M) = C^\infty(M), \quad \Im_0^1(M) = \chi(M), \quad \Im_1^0(M) = \chi^*(M)$$

dir.

Ayrıca $W_1, ..., W_k \in \chi^*(M)$, $X_1, ..., X_l \in \chi(M)$ ve $p \in M$ olmak üzere;

$$(T(W_1, ..., W_k, X_1, ..., X_l))(p) = T_p(W_{1p}, ..., W_{kp}, X_{1p}, ..., X_{lp})$$

şeklinde tanımlanırsa,

$$T : \underbrace{\chi^*(M) \times ... \times \chi^*(M)}_{k-\text{tane}} \times \underbrace{\chi(M) \times ... \times \chi(M)}_{l-\text{tane}} \longrightarrow C^\infty(M)$$

dönüşümü $C^\infty(M)$ değerli bir $(k+l)$ lineer dönüşüm olur.

2.19 Tanım

M bir manifold olsun. M üzerinde $(0,2)-$ tipinden

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M)$$

tensörü simetrik ve non-dejenere ($\forall X \in \chi(M)$ için $g(X,Y) = 0 \Rightarrow Y = 0$) ise g ye M üzerinde bir yarı-Riemann metriği denir [18].

2.20 Tanım

M bir manifold ve M üzerinde bir yarı-Riemann metriği g olsun. Bu durumda (M, g) ikilisine bir yarı-Riemann manifold denir [18].

2.21 Tanım

M bir manifold olsun. M üzerinde $(0,2)-$ tipinden

$g : \chi(M) \times \chi(M) \to C^{\infty}(M)$

tensörü simetrik ve pozitif tanımlı ise, g ye M üzerinde bir Riemann metriği denir [18].

2.22 Tanım

M bir manifold ve M üzerinde bir Riemann metriği g olsun. Bu durumda (M, g) ikilisine bir Riemann manifold denir [17].

2.23 Tanım

M bir manifold ve

$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$

diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $\forall f, g \in C^{\infty}(M)$ ve $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

ii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y$

iii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

ise ∇ ya M üzerinde bir lineer konneksiyon denir [2].

M manifoldu üzerinde bir lineer konneksiyon ∇ olsun. ∇ nın koordinat vektör alanlarındaki değeri

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{m} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

eşitliği ile belirlidir. Bu eşitlik ile tanımlı Γ_{ij}^k, $C^{\infty}-$dönüşümlerine ∇ lineer konneksiyonunun bileşenleri veya Christoffel sembolleri denir [2].

Bir ∇ lineer konneksiyonunun $X, Y \in \chi(M)$ vektör alanlarındaki değeri,

$$X = \sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{ve} \quad Y = \sum_{j=1}^{m} Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

olmak üzere

$$\nabla_X Y = \sum_{h=1}^{m} \left(\sum_{i,k=1}^{m} X^i \frac{\partial Y^h}{\partial x^i} + \sum_{i,k=1}^{m} X^i Y^k \Gamma_{ik}^h \right) \frac{\partial}{\partial x^h}$$

eşitliğiyle belirlidir.

2.24 Tanım

M bir manifold olsun. $X, Y \in \chi(M)$ ve $\forall f \in C^\infty(M)$ için

$$[X, Y](f) = X(Yf) - Y(Xf)$$

ile tanımlanan

$$[,] : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

dönüşümüne Lie parantez operatörü denir [2].

$X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $f, g \in C^\infty(M)$ olmak üzere Lie parantez operatörü şağıdaki şartları sağlar [2].

i) $[X, Y] = -[Y, X]$,

ii) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$,

iii) $[fX, gY] = f\,(Xg)\,Y - g\,(Yf)\,X + fg\,[X, Y]\,$,

iv) $[X, Y]\,(f, g) = f\,[X, Y]\,(g) + g\,[X, Y]\,(f)\,$.

2.25 Tanım

G bir grup ve aynı zamanda diferensiyellenebilir bir manifold olsun. Eğer

$$\mu : G \times G \to G, \quad \mu(a,b) = ab$$

ve G de ki inversiyon operatörü olan

$$\xi : G \to G, \quad \xi(a) = a^{-1}$$

dönüşümlerinin her ikisi de diferensiyellenebilir ise G ye Lie grubu denir [17].

O halde Lie grupları aynı zamanda grup olan diferensiyellenebilir manifoldlardır. Dolayısıyla bir Lie grubu aynı zamanda bir grup, bir topolojik uzay ve bir manifolddur [17].

2.26 Tanım

G bir Lie grubu ve M bir manifold olsun.

i) $\forall m \in M$ için $\Phi(m,e) = m$, (e, G Lie grubunun etkisiz elemanı),

ii) $\forall m \in M$, $\forall g_1,\, g_2 \in G$ için $\Phi(\Phi(m,g_1), g_2) = \Phi(m, g_1 g_2)$

özelliklerini sağlayan $\Phi : M \times G \to M$ dönüşümüne G Lie grubunun M manifoldu üzerindeki sağ etkisi denir [24].

2.27 Tanım

M bir manifold ve $F, G \in \Im_1^1(M)$ olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} 2N_{F,G}(X,Y) = {} & [F(X), G(Y)] + [G(X), F(Y)] + (FG + GF)[X,Y] - F[G(X), Y] \\ & - F[X, G(Y)] - G[F(X), Y] - G[X, F(Y)] \end{aligned}$$

ile tanımlı $(1,2)-$ tipinden bir $N_{F,G}$ tensör alanına F ve G nin torsiyon tensörü denir [36].

2.28 Tanım

M bir manifold ve $F \in \Im_1^1(M)$ olsun.

$$N_F = N_{F,F}$$

ile tanımlı $(1,2)-$ tipinden bir N_F tensör alanına F nin Nijenhuis tensörü denir [36].

$X, Y \in \Im_0^1(M)$ için

$$N_F(X,Y) = F^2([X,Y]) + [F(X), F(Y)] - F([F(X),Y]) - F([X,F(Y)])$$

dir [36].

2.29 Tanım

M bir manifold olsun. Eğer M üzerinde $(1,1)-$ tipinden bir F tensör alanı

$$x^n + a_n x^{n-1} + ... + a_2 x + a_1 = 0$$

cebirsel denklemini sağlar ve $(1,1)-$ tipinden birim tensör alanı I olmak üzere $\forall p \in M$ için $F^{n-1}(p), F^{n-2}(p), ..., F(p), I$ lineer bağımsız ise, F tensör alanına M manifoldu üzerinde bir polinomial yapı ve $Q(x) = x^n + a_n x^{n-1} + ... + a_2 x + a_1$ polinomuna da yapı polinomu denir [14, 15].

2.30 Tanım

M bir manifold ve $T, P, C \in \Im_1^1(M)$ olsun.

i) $Q(x) = x^2$ yapı polinomuna sahip $(1,1)-$ tipinden bir T tensör alanına hemen

hemen tanjant yapı denir. Yani, $T^2 = 0$ dır [13].

ii) $Q(x) = x^2 - I$ yapı polinomuna sahip $(1,1)-$ tipinden bir P tensör alanına hemen hemen çarpım yapı denir. Yani, $P^2 = I$ dır [36].

iii) $Q(x) = x^2 + I$ yapı polinomuna sahip $(1,1)-$ tipinden bir C tensör alanına hemen hemen kompleks yapı denir. Yani, $C^2 = -I$ dır [36].

2.2. Diferensiyellenebilir Demet Yapıları

2.31 Tanım

E, M ve B manifoldlar olsun. $\pi : E \longrightarrow M$ bir $C^\infty-$ dönüşüm ve M nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ olmak üzere, eğer $p \in U$ ve $y \in B$ için

$$(\pi \circ \psi_\alpha)(p, y) = p$$

olacak biçimde

$$\psi_\alpha : U_\alpha \times B \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$$

diffeomorfizmlerin bir $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ sınıfı varsa, π lokal çarpım özelliğine sahiptir denir. $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ sistemine de π nin bir lokal ayrışmasıdır denir [16].

2.32 Tanım

E, M ve B manifoldlar ve $\pi : E \longrightarrow M$ $C^\infty-$ dönüşümü lokal çarpım özelliğine sahip olsun. Bu durumda $\xi = (E, \pi, M, B)$ dörtlüsüne bir diferensiyellenebilir lif demeti adı verilir [16].

2.33 Tanım

$\xi = (E, \pi, M, B)$ bir $C^\infty-$ lif demeti olsun. O zaman, $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ lokal ayrışmasına,

ξ lif demetinin bir lokal koordinat gösterimi denir [16].

Bir $\xi = (E, \pi, M, B)$ lif demetinde E ye ξ lif demetinin total uzayı, M ye baz (taban) uzayı, B ye lif modeli (veya standart lif) ve π ye fibrasyon veya projeksiyon adı verilir. Ayrıca $rank\xi = boyB$ olarak tanımlanır [16] .

(E, π, M, B) lif demeti bazen E total uzayı ile bazen de $\pi : E \longrightarrow M$ dönüşümü ile gösterilir.

2.34 Tanım

$\pi : E \longrightarrow M$ bir lif demeti olsun. $\forall p \in M$ için,

$$E_p = \pi^{-1}(p) = \{u \subset E : \pi(u) = p\}$$

kümesine p üzerinde bir lif denir [16].

Tüm E_p liflerin ayrık bileşimi E total uzayını verir. Yani,

$$E = \bigcup_{p \in M} E_p$$

dir. Üstelik bir $p \in M$ için, E_p lifi, E de kapalı imbedded alt manifolddur [33].

$boyE_p = boyE - boyM$ sayısına ξ nın lif boyutu denir [33].

Örnek

$\pi_M : TM \longrightarrow M$ doğal projeksiyon olmak üzere, $\pi_M = (TM, \pi_M, M, \mathbb{R}^m)$ dörtlüsü bir lif demetidir. Buna M manifoldunun tanjant demeti denir. Bir $p \in M$ için $\pi_M^{-1}(p)$ lifi, T_pM tanjant uzayıdır [3].

Örnek

$\pi : M \longrightarrow S^1$ bir projeksiyon olmak üzere (M, π, S^1); total uzayı M Mobius şeridi, taban uzayı S^1 birim çemberi olan bir lif demetidir [37].

2.35 Tanım

$\xi = (E, \pi, M, B)$ lif demeti olsun. Eğer $E = M \times B$ ve π, birinci izdüşüm fonksiyonu ise ξ ye bir aşikar (trivial) demet denir [23].

Örnek

$\pi_1 : S^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ bir projeksiyon olmak üzere $(S^1 \times \mathbb{R}, \pi_1, S^1)$; total uzayı $S^1 \times \mathbb{R}$ silindiri, taban uzayı S^1 olan bir trivial demettir [37].

2.36 Tanım

$\xi = (E, \pi, M, B)$ herhangi bir lif demeti olsun.

$\pi \circ \sigma = I_M$ (özdeşlik)

olacak biçimde tanımlı, $\sigma : M \longrightarrow E$ $C^\infty-$ dönüşümüne ξ lif demeti üzerinde bir çapraz kesit denir [16].

Örnek

$\pi_M = (TM, \pi_M, M, \mathbb{R}^m)$ lif demetini gözönüne alalım. Bu durumda $\forall X \in \chi(M)$ vektör alanı, $X : M \longrightarrow TM$, $\forall p \in M$ için $X(p) = X_p \in TpM$ şeklinde tanımlı olup, π_M kanonik projeksiyonunda $\forall X_p \in TM$ için $\pi_M(X_p) = p$ olarak tanımlandığında

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "X"] \arrow[dr, "\pi_M \circ X = I_M"'] & TM \arrow[d, "\pi_M"] \\
& M
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olur. Böylece bütün $X \in \chi(M)$ C^{∞} vektör alanları, π_M lif demeti üzerinde çapraz kesitlerdir [3].

2.37 Tanım

$\xi = (E, \pi, M, B)$ bir $C^{\infty}-$ lif demeti olsun. Eğer

i) $\forall p \in M$ için $\pi^{-1}(p) = E_p$ ve B reel vektör uzayı,

ii) $\forall p \in M$ için $\psi_\alpha : B \longrightarrow E_p$ dönüşümleri lineer izomorfizm olacak biçimde ξ nin lokal koordinat gösterimi $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$

ise ξ ye bir vektör demeti denir [3].

2.38 Tanım

$\xi = (E, \pi, M, B)$ ve $\bar{\xi} = (\bar{E}, \bar{\pi}, \bar{M}, \bar{B})$ iki vektör demeti olsun. Eğer

i) $\bar{M} = M$,

ii) $\forall x \in \bar{M}$ için $\bar{B}_x$ lifi B_x lifinin bir altvektör uzayı,

iii) $\imath : \bar{E} \to E$ inclusion dönüşümü diferensiyellenebilir bir dönüşüm

ise $\bar{\xi}$ vektör demetine ξ vektör demetinin bir altvektör demeti denir [16].

2.3. Tanjant Demet

2.39 Tanım

M, m boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold olsun. M nin tüm noktalarındaki tanjant uzaylarının ayrık birleşimi $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$ ve TM üzerinde

$$\pi_M : TM \longrightarrow M$$

$$z \quad \longrightarrow \pi_M(z) = p \qquad (\text{eğer } z \in T_PM \text{ ise})$$

şeklinde tanımlı π_M dönüşümü, sürekli ve örten bir dönüşüm olup, bu π_M dönüşümüne kanonik (doğal) projeksiyon denir [3].

2.40 Teorem

M, m boyutlu bir manifold ise TM, $2m$ boyutlu bir manifolddur [10, 35].

İspat

M, m boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold ve M üzerinde bir harita $(U_\alpha, \varphi_\alpha = (x^i))_{1 \leq i \leq m}$ olsun.

$$\widetilde{\varphi}_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$$

dönüşümü $z_p \in T_pM$ için

$$\begin{aligned} v_p \rightarrow \widetilde{\varphi}_\alpha(z_p) &= (x^1 \circ \pi(z_p), ..., x^m \circ \pi(z_p), dx^1(z_p), ..., dx^m(z_p)) \\ &= (x^1(p), ..., x^m(p), dx^1(z_p), ..., dx^m(z_p)) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanırsa, $\widetilde{\varphi}_\alpha$ dönüşümü birebir, örten olup, görüntü kümesi $\mathbb{R}^{2m}$ uzayının bir açık alt kümesidir. O halde $(\pi_M^{-1}(U_\alpha), \widetilde{\varphi}_\alpha)$ ikilisi TM üzerinde $2m$ boyutlu bir haritadır. Ayrıca

$\widetilde{\varphi}_\alpha^{-1}((\varphi_\alpha(p), z^1, ..., z^m) = (z_p)$

dir.

M üzerinde $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ haritaların ailesinden $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ olacak biçimdeki α, β indis çifti için $(U_\alpha, \varphi_\alpha = (x^i))_{1 \leq i \leq m}$ ve $(U_\beta, \varphi_\beta = (y^i))_{1 \leq i \leq m}$ haritalarını alalım. Bu durumda $\pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta) \neq \varnothing$ olacaktır.

$$\phi_{\alpha\beta} = \widetilde{\varphi}_\alpha \circ \widetilde{\varphi}_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^m \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^m$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha\beta}(p) = \widetilde{\varphi}_\alpha \circ \widetilde{\varphi}_\beta^{-1}(\varphi_\beta(p), z^1, ..., z^m) &= \widetilde{\varphi}_\alpha(z_p) \\ &= (x^1 \circ \pi(z_p), ..., x^m \circ \pi(z_p), dx^1(z_p), ..., dx^m(z_p)) \end{aligned}$$

olur. Burada $x^i \circ \pi$ ve $dx^i_{(1 \leq i \leq m)}$ diferensiyellenebilir olduğundan $\phi_{\alpha\beta} = \widetilde{\varphi}_\alpha \circ \widetilde{\varphi}_\beta^{-1}$ de diferensiyellenebilirdir. Benzer şekilde $\phi_{\beta\alpha} = \widetilde{\varphi}_\beta \circ \widetilde{\varphi}_\alpha^{-1}$ diferensiyellenebilir olduğu görülür. O halde

$$A = \{(\pi^{-1}(U_\alpha), \widetilde{\varphi}_\alpha)\}_{\alpha \in I}$$

ailesi diferensiyellenebilir bir atlastır. Bu yapıyla TM, $2m-$ boyutlu bir $C^\infty-$ manifold olur [10, 35].

2.41 Tanım

TM ye M nin tanjant manifoldu denir.

M, m boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold ve $(U_\alpha, \varphi_\alpha = (x^i))_{1 \leq i \leq m}$ M üzerinde bir harita olsun. Bu durumda $\pi_M^{-1}(U_\alpha) = U'$, TM de açıktır.

$$\begin{tikzcd} U' \subset TM \arrow[r, "\pi_M"] \arrow[dr, "v^i = x^i \circ \pi_M"'] & U \subset M \arrow[d, "x^i"] \\ & R \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak biçimde $v^i : U' \subset TM \longrightarrow \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyonlarını $\forall z \in U'$ için, $v^i(z) = (x^i \circ \pi_M)(z) = x^i(\pi_M(z)) = x^i(p)$ şeklinde tanımlayalım. Ayrıca, $v^{m+i} : U' \subset TM \longrightarrow \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyonlarını da, $\forall z \in U'$ için $v^{m+i}(Z) = dx^i(Z) = Z[x^i]$ olarak tanımlayalım.

Böylece,

$$\begin{cases} v^i = x^i \circ \pi_M \\ v^{m+i}(Z) = dx^i(Z) = Z[x^i]; \quad Z \in U' \end{cases}$$

sistemi elde edilir. Bu sistemi kısaca $\{v\}$;

$$v = (v^1, v^2, ..., v^{2m}) = (x^1 \circ \pi, ..., x^m \circ \pi, dx^1, ..., dx^m)$$

şeklinde gösterecek olursak $\{v\}$ sistemi TM için bir lokal koordinat sistemidir [10, 35].

2.42 Teorem

$\pi_M = (TM, \pi_M, M, \mathbb{R}^m)$ dörtlüsü bir vektör demetidir [16].

2.43 Tanım

M, manifoldu baz alınarak oluşturulan $\pi_M = (TM, \pi_M, M, \mathbb{R}^m)$ vektör demetine, M manifoldunun tanjant demeti denir [3].

Biz genellikle bu π_M vektör demetini de TM total uzayı ile göstereceğiz. Ayrıca TM total uzayı,

$TM = \{(p,z) : p \in M, \;\; z \in T_pM\}$

şeklinde yazılabilir.

2.44 Tanım

$\xi = (E, \pi, M, B)$ lif demeti olsun. $\forall z \in E$ için

$V_zE =$çek$(d\pi_z) = \{A_z \in T_zE : d\pi_z(A_z) = 0\}$

kümesi, T_zE tanjant uzayının bir alt uzayıdır. V_zE uzayına E nin z noktasında vertical uzayı denir ve bu uzayın her bir elemanına da bir vertical tanjant vektör denir [16].

2.45 Tanım

E üzerinde vektör alanlarının modülü $\chi(E)$ olmak üzere $A \in \chi(E)$ olsun. $\forall z \in E$ için $A_z \in V_zE$ ise A ya vertical vektör alanı denir ve $A \in \chi^v(E)$ şeklinde gösterilir [16].

2.46 Teorem

$\xi = (E, \pi, M, B)$ bir lif demeti olsun. $\pi_E : TE \longrightarrow E$ dönüşümü $\forall z \in E$ için $\pi_E^{-1}(z) = T_zE$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$TE = \bigcup_{z \in E} T_zE$$

olmak üzere $\xi_E = (TE, \pi_E, E, \mathbb{R}^{m+n})$ dörtlüsü bir vektör demetidir. ξ_E, E manifoldunun tanjant demetidir [16].

2.47 Teorem

$\xi = (E, \pi, M, B)$ bir lif demeti olsun.

$$VE = \bigcup_{z \in E} V_zE, \quad \pi_{VE} = \pi_E|_{VE}, \quad \pi_{VE}^{-1}(z) = V_zE$$

olmak üzere $\xi_{VE} = (VE, \pi_{VE}, E, \mathbb{R}^n)$ dörtlüsü TE nin bir altvektör demetidir [16].

2.48 Tanım

VE vektör demetine TE nin vertical altdemeti adı verilir [16].

2.49 Tanım

$\xi = (E, \pi, M, B)$ bir lif demeti olsun.

$$\xi_E = \xi_{HE} \oplus \xi_{VE}$$

olacak biçimdeki ξ_{HE} vektör demetine ξ_E nin horizontal altdemeti denir [16].

$$HE = \bigcup_{z \in E} H_z E, \qquad \pi_{HE} = \pi_E|_{HE}, \qquad \pi_{HE}^{-1}(z) = H_z E$$

olmak üzere horizontal altdemet $\xi_{HE} = (HE, \pi_{HE}, E, \mathbb{R}^m)$ şeklindedir.

Ayrıca $\forall z \in E$ için,

$$T_z E = H_z E \oplus V_z E, \quad TE = \bigcup_{z \in E} (H_z E \oplus V_z E) = HE \oplus VE$$

yazılabilir [16].

2.50 Tanım

$H_z E$, $T_z E$ tanjant uzayının bir altuzayıdır ve bu uzaya E nin z noktasındaki horizontal uzayı denir. Bu uzayın her bir elemanına da bir horizontal tanjant vektör denir [16].

$O \in \chi(E)$ olsun. $\forall z \in E$ için $O_z \in H_z E$ ise, O ya horizontal vektör alanı denir ve $O \in \chi^h(E)$ şeklinde gösterilir [16].

$X \in \chi(E)$ için $X = X^h + X^v$ şeklindedir. Burada X^h ve X^v sırasıyla X vektör alanının horizontal ve vertical bileşenleridir. Yani, $X^h \in \chi^h(E)$ ve $X^v \in \chi^v(E)$ dir. Böylece

$$\chi(E) = \chi^h(E) \oplus \chi^v(E)$$

dir [16].

Vertical ve horizontal alt demet tanımından $TE = HE \oplus VE$ olduğunu biliyoruz. h ve v de sırasıyla HE ve VE ye karşılık gelen projeksiyonlar olmak üzere,

$$\begin{array}{l} h : TE \to HE \qquad \text{ve} \qquad v : TE \to VE \\ h^2 = h, \quad v^2 = v, \quad h \circ v = v \circ h = 0, \quad h + v = I \\ \text{çek}h = VE \qquad \text{ve} \qquad \text{çek}v = HE \end{array}$$

şeklinde bağıntılar vardır (burada I, TE üzerinde özdeşlik dönüşümüdür) [1].

$h - v = P$ şeklinde bir dönüşüm tanımlarsak P, $(1,1)$ tipinde bir tensör alanı olup, $P^2 = I$ dır. Bu durumda P, E üzerinde bir hemen hemen çarpım yapısıdır. Dolayısıyla (E, P) ikilisi de bir hemen hemen çarpım manifoldudur [1].

2.51 Tanım

M, $m = n + k$ boyutlu bir manifold olsun. M üzerinde $n-$ boyutlu diferensiyellenebilir bir dağılım, TM tanjant demetinin rankı n olan bir D altvektör demetidir [22].

O halde M manifoldu üzerindeki $n-$ boyutlu diferensiyellenbilir bir dağılım için şunu söyleyebiliriz:

$\forall x \in M$ ye $n-$boyutlu bir $\triangle_x \subset T_xM$ altvektör uzayını karşılık getirir.

$$\begin{array}{rcl} \triangle : M & \longrightarrow & \bigcup\limits_{x \in M} T_xM \\ x & \longrightarrow & \triangle_x \subset T_xM \end{array}$$

$\forall x \in M$ nin bir U komşuluğunda, $\forall q \in U$ için $\{X_1(q), ..., X_n(q)\}$ cümlesi $\triangle_q$ altvektör uzayının bir bazı olacak şekilde lineer bağımsız $X_1, ..., X_n$ vektör alanı vardır [22].

D, M manifoldu üzerinde bir dağılım ve X de $U \subset M$ açık kümesi üzerinde tanımlı bir vektör alanı olsun. Eğer, $\forall p \in U$ için $X_p \in \triangle_p$ ise X vektör alanı D dağılımına aittir denir ve $X \in \chi(D)$ şeklinde gösterilir [1].

2.52 Tanım

M bir manifold olsun. R ve S, M manifoldu üzerinde iki tümleyen dağılım olsun. Yani $\forall x \in M$ için

$$T_xM = R_x \oplus S_x$$

veya

$$TM = R \oplus S$$

dir [27].

R ve S dağılımlarına sırasıyla karşılık gelen r ve s projeksiyonları M üzerinde $(1,1)-$ tipinde bir tensör alanıdır. r ve s tensör alanları için

$$r^2 = r, \quad s^2 = s, \quad rs = sr = 0, \quad r + s = I_{TM}$$

özellikleri vardır [27].

2.53 Tanım

D, M manifoldu üzerinde bir dağılım olmak üzere eğer, $X \in \chi(M)$ ve $Y \in D$ için $\nabla_X Y \in D$ ise D dağılımına, ∇ lineer konneksiyonuna göre paraleldir denir [4].

2.54 Tanım

R ve S, M manifoldu üzerinde iki tümleyen dağılım olsun. $X \in R$, $Y \in \chi(M)$ için

$$(\Delta P)(X,Y) = P\nabla_X Y - P\nabla_Y X - \nabla_{PX} Y + \nabla_Y (PX) \tag{2.1}$$

olacak şekilde $(\Delta P)(X,Y) \in R$ varsa, R dağılımına $\nabla-$ yarı paralel denir [6].

2.55 Tanım

R ve S, M manifoldu üzerinde iki tümleyen dağılım olmak üzere $X \in R$, $Y \in \chi(M)$ için, $(\Delta P)(X,Y) \in S$ ise, R dağılımına $\nabla-$ters yarı paralel denir [6].

2.56 Önerme

(M,g) bir Riemann manifold ve P, M üzerinde bir Riemann hemen hemen çarpım yapı olsun. P, $\overset{g}{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel ise (yani $\overset{g}{\nabla} P = 0$) M manifoldu üzerindeki bir Riemann hemen hemen çarpım yapı bir lokal çarpım yapıdır. Ayrıca, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için, ∇ simetrik lineer konneksiyon ise P nin Nijenhuis tensörü,

$$N_P(X,Y) = (\nabla_{PX} P)(Y) - (\nabla_{PY} P)(X) - P(\nabla_X P)(Y) + P(\nabla_Y P)(X)$$

şeklindedir [4].

2.4. Uyarlanmış Konneksiyonlar

2.57 Tanım

M, $n+k$ boyutlu bir manifold ve R, M üzerinde $n-$dağılım olsun. M manifoldu üzerindeki bir lineer konneksiyon ∇ olmak üzere $\forall X \in \chi(M)$, $Y \in R$ için $\nabla_X Y \in R$ ise ∇ konneksiyonuna R ye uyarlanmış denir [1].

M, $n+k$ boyutlu bir manifold ve S, M manifoldu üzerinde R dağılımının tümleyen bir $k-$dağılımı olsun. O halde, $TM = R \oplus S$ dir. r ve s sırasıyla, R ve S ye karşılık gelen projeksiyonlar olmak üzere $r - s = P$ şeklinde bir hemen hemen çarpım yapı oluşturulabilir. (M, R, S) üçlüsüne de hemen hemen çarpım manifoldu denir.

(M, R, S) hemen hemen çarpım manifoldu üzerinde bir ∇ lineer konneksiyonu hem R hem de S ye göre uyarlanmış, yani $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\nabla_X rY \in \chi(R), \quad \nabla_X sY \in \chi(S)$$

ise ∇ ya uyarlanmış lineer konneksiyon denir [37].

İlk kez Schouten Van-Kampen ve Vranceanu tarafından tanımlanan ve kendi isimleriyle bilinen hemen hemen çarpım manifoldları üzerinde iki uyarlanmış lineer konneksiyon vardır.

2.58 Tanım

M bir hemen hemen çarpım manifoldu ve ∇, M üzerinde bir lineer konneksiyon olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

i) $\overset{Sc}{\nabla}_X Y = r(\nabla_X rY) + s(\nabla_X sY)$

şeklinde tanımlı $\overset{Sc}{\nabla}$ uyarlanmış lineer konneksiyonuna Schouten konneksiyonu denir.

ii) $\overset{V}{\nabla}_X Y = r(\nabla_{rX} rY) + s(\nabla_{sX} sY) + r[sX, rY] + s[rX, sY]$

şeklinde tanımlı $\overset{V}{\nabla}$ uyarlanmış lineer konneksiyonuna Vranceanu konneksiyonu denir [1].

2.59 Tanım

M bir manifold olsun. M üzerinde $r - s = P$ hemen hemen çarpım yapısının, M üzerindeki bir ∇ lineer konneksiyonuna göre kovaryant türevi sıfır, yani $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X P)Y = \nabla_X PY - P\nabla_X Y = 0$$

ise P hemen hemen çarpım yapısına ∇ ya göre paraleldir denir [1].

3. METALİK DİFERENSİYEL GEOMETRİ

Bu bölümde, p ve q iki pozitif tamsayı olmak üzere, $Q(X) = X^2 - pX - q$ yapı polinomuna sahip M manifoldu üzerinde $(1,1)$ tipinden J tensör alanı yardımıyla, bir M manifoldu üzerinde metalik yapının tanımı verilecek ve bu yapının geometrisi incelenecektir.

3.1. Manifoldlar Üzerinde Metalik Yapılar

3.1 Tanım

p, q iki pozitif tamsayı ve I, M manifoldu üzerinde vektör alanlarının $\chi(M)$ Lie cebiri üzerinde özdeşlik dönüşümü olsun.

$$J^2 = pJ + qI \tag{3.1}$$

denklemini sağlayan M üzerinde $(1,1)$ tipinden J tensör alanı ile tanımlanan M üzerindeki bir polinomial yapıya metalik yapı denir [21].

Not

Tanım 3.1 de özel olarak $p = q = 1$, $p = 2$, $q = 1$ ve $p = 3$, $q = 1$ alınırsa M manifoldu üzerinde, sırasıyla, altın yapı [4], gümüş yapı [29, 31] ve bronz yapı [30] elde edilir.

3.2 Önerme

M bir manifold ve J, M üzerinde bir metalik yapı olmak üzere;

$i)$ J nin öz değerleri, metalik oran olan $\sigma_{p,q}$ ve $p - \sigma_{p,q}$ dır [21].

$ii)$ J, $\forall x \in M$ için M manifoldunun T_xM tanjant uzayı üzerinde bir izomofizmdir [21].

$iii)$ J nin tersi mevcuttur ve bu ters $J^{-1} = \hat{J}$ olmak üzere $q\hat{J}^2 + p\hat{J} - I = 0$ denklemini sağlar [21].

İspat

i) $J \in \Im_1^1(M)$ olduğundan $J : \chi(M) \to \chi(M)$ bir lineer dönüşümdür. J nin öz değeri λ olsun. Bu durumda $\forall X \in \chi(M)$ için $J(X) = \lambda X$ dir. J metalik yapı olduğundan $J^2 = pJ + qI$ eşitliğini sağlar. Buradan

$$\begin{aligned} J^2(X) = pJ(X) + qI(X) \Rightarrow J(J(X)) &= pJ(X) + qX \\ \Rightarrow \quad J(\lambda X) &= p\lambda X + qX \\ \Rightarrow \quad \lambda(\lambda X) &= p\lambda X + qX \\ \Rightarrow \quad \lambda^2 X &= p\lambda X + qX \\ \Rightarrow \quad \lambda^2 X &= (p\lambda + q) X \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu eşitlik $\forall X \in \chi(M)$ için doğru olduğundan $\lambda^2 = p\lambda + q$ eşitliğini elde ederiz. Bu denklemin kökleri metal oran olan $\lambda_1 = \dfrac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2} = \sigma_{p,q}$ ve $\lambda_2 = \dfrac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2} = p - \sigma_{p,q}$ dir. Böylece $\lambda_1 = \sigma_{p,q}$ ve $\lambda_2 = p - \sigma_{p,q}$ değerleri de J metal yapısının öz değerleridir.

ii) $J \in \Im_1^1(M)$ olduğundan $J : \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$ bir lineer dönüşümdür. J nin birebir ve örten olduğunu göstermek ispat için yeterlidir. Eğer bir lineer dönüşümün çekirdeği $\{0\}$ ise bu lineer dönüşüm birebirdir. Dolayısıyla $\text{ç}ekJ = \{X \in \chi(M) : J(X) = 0\}$ kümesinin elemanlarını bulalım. $X \in \text{ç}ekJ$ Eş. 3.1 ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} J(J(X)) = pJ(X) + qI(X) \Rightarrow J(0) &= X \\ \Rightarrow \quad 0 &= X \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\text{ç}ekJ = \{0\}$ bulunur. Dolayısıyla J birebirdir. Bir lineer dönüşüm için $boy\chi(M) = rankJ + s\imath f\imath rl\imath kJ$ eşitliği vardır. $s\imath f\imath rl\imath kJ = boy(\text{ç}ekJ) = 0$

olduğundan

$$boy\chi(M) = boyJ(\chi(M)) \Rightarrow \chi(M) = J(\chi(M))$$

elde edilir. Dolayısıyla J örtendir. Böylece J metalik yapısı, $\forall x \in M$ için T_xM üzerinde bir izomofizimdir.

iii) J izomorfizm olduğundan J^{-1} vardır. Eş. 3.1 ifadesinin her iki tarafının J^{-1} ile bileşkesini alalım.

$$\begin{aligned}
J^2J^{-1} = p(JJ^{-1}) + qIJ^{-1} &\Rightarrow J(JJ^{-1}) = pI + qJ^{-1} \\
&\Rightarrow \quad JI = pI + qJ^{-1} \\
&\Rightarrow \quad J = pI + qJ^{-1} \\
&\Rightarrow \quad qJ^{-1} = J - pI \qquad\qquad (J^{-1} \text{ ile bileşke alınırsa}) \\
&\Rightarrow qJ^{-1}J^{-1} = JJ^{-1} - p(IJ^{-1}) \\
&\Rightarrow q\left(J^{-1}\right)^2 = I - pJ^{-1} \qquad\qquad (J^{-1} = \hat{J} \text{ alınırsa}) \\
&\Rightarrow \quad q\hat{J}^2 = -p\hat{J} + I
\end{aligned}$$

Buradan $q\hat{J}^2 + p\hat{J} - I = 0$ elde edilir.

3.3 Önerme

Metalik yapılar ikililer şeklindedir. Yani, J bir metalik yapı ise $\tilde{J} = pI - J$ da bir metalik yapıdır.

İspat

J bir metalik yapı olsun. Eş. 3.1 ifadesinden

$$
\begin{aligned}
(pI-J)^2 &= (pI-J)\circ(pI-J)\\
&= p^2I^2-2pJI+J^2\\
&= p^2I-2pJI+pJ+qI\\
&= p^2I-pJ+qI\\
&= p(pI-J)+qI
\end{aligned}
$$

elde edilir. O halde $(pI-J)^2 = p(pI-J)+qI$ olup $\tilde{J} = pI-J$ da bir metalik yapı belirtir.

Benzer durum hemen hemen tanjant yapı, hemen hemen çarpım yapı ve hemen hemen kompleks yapı için de geçerlidir. Yani, T bir hemen hemen tanjant yapı ise $(-T)$ de bir hemen hemen tanjant yapıdır. P bir hemen hemen çarpım yapı ise $(-P)$ de bir hemen hemen çarpım yapıdır. C bir hemen hemen kompleks yapı ise $(-C)$ de bir hemen hemen kompleks yapıdır [4].

Bir M manifoldu üzerinde bir hemen hemen çarpım yapı ile metalik yapı arasındaki ilişkiyi aşağıdaki önerme ile verelim.

3.4 Önerme

M manifoldu üzerinde bir P hemen hemen çarpım yapı M üzerinde

$$J_1 = \frac{p}{2}I + \left(\frac{2\sigma_{p,q}-p}{2}\right)P, \qquad J_2 = \frac{p}{2}I - \left(\frac{2\sigma_{p,q}-p}{2}\right)P \tag{3.2}$$

gibi iki metalik yapı indirger.

Tersine M manifoldu üzerindeki her J metalik yapı bu manifold üzerinde

$$P = \pm\left(\frac{2}{2\sigma_{p,q}-p}J - \frac{p}{2\sigma_{p,q}-p}I\right) \tag{3.3}$$

gibi iki hemen hemen çarpım yapı üretir [21].

İspat

$P^2 = I$ ve $J_1 = \frac{p}{2}I + \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right) P$ olsun.

$$
\begin{aligned}
J_1^2 &= (J_1 \circ J_1) \\
&= \frac{p^2}{4}I + 2\frac{p}{2}\left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right) P + \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right)^2 P^2 \\
&= \frac{p^2}{4}I + \frac{p^2 + 4q}{4}I + p\frac{\sqrt{p^2 + 4q}}{2}P \\
&= \frac{p^2}{2}I + qI + p\frac{\sqrt{p^2 + 4q}}{2}P \\
&= p\left(\frac{p}{2}I + \frac{\sqrt{p^2 + 4q}}{2}P\right) + qI \\
&= pJ_1 + qI
\end{aligned}
$$

O halde $J_1^2 = pJ_1 + qI$ dir. Dolayısıyla J_1 bir metalik yapıdır. Benzer şekilde

$J_2 = \frac{p}{2}I - \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right) P$ için de J_2 nin bir metalik yapı olduğu kolayca gösterilebilir.

Tersine, $J^2 = pJ + qI$ ve $P = \left(\frac{2}{2\sigma_{p,q} - p}J - \frac{p}{2\sigma_{p,q} - p}I\right)$ olsun.

$$
\begin{aligned}
P^2 &= P \circ P \\
&= \left(\frac{2}{2\sigma_{p,q} - p}J - \frac{p}{2\sigma_{p,q} - p}I\right)\left(\frac{2}{2\sigma_{p,q} - p}J - \frac{p}{2\sigma_{p,q} - p}I\right) \\
&= \frac{4}{(2\sigma_{p,q} - p)^2}J^2 - 2\frac{2p}{(2\sigma_{p,q} - p)^2}J + \frac{p^2}{(2\sigma_{p,q} - p)^2}I \\
&= \frac{4(pJ + qI)}{p^2 + 4q} - \frac{4}{p^2 + 4q}J + \frac{p^2}{p^2 + 4q}I \\
&= \frac{(p^2 + 4q)I}{p^2 + 4q} \\
&= I
\end{aligned}
$$

O halde $P^2 = I$ dir. Dolayısıyla P bir hemen hemen çarpım yapıdır. Benzer şekilde

$P = -\left(\frac{2}{2\sigma_{p,q} - p}J - \frac{p}{2\sigma_{p,q} - p}I\right)$ için de P nin bir hemen hemen çarpım yapı olduğu gösterilebilir.

Hemen hemen tanjant ve hemen hemen çarpım yapılar için Eş. 3.2 ifadesi ele alınırsa aşağıdaki tanımları verebiliriz.

3.5 Tanım

i) T, M manifoldu üzerinde bir hemen hemen tanjant yapı olsun.O zaman

$$J_t = \frac{p}{2}I + \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right)T$$

ifadesi (M, T) hemen hemen tanjant manifoldu üzerinde bir tanjant metalik yapıdır. J_t tanjant metalik yapısı,

$$J_t^2 - pJ_t + \frac{p^2}{4}I = 0$$

denklemini sağlar. Reel sayılarda bu denklemi düşünürsek, $x^2 - px + \frac{p^2}{4} = 0$ dır. Bu denklemin kökü $\sigma_t = \frac{p}{2}$ sayısı tanjant metalik oran olarak adlandırılır.

ii) (M, C) bir hemen hemen kompleks manifold olsun.

$$J_c = \frac{p}{2}I + \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right)C$$

şeklinde tanımlanan J_c tensör alanına (M, C) hemen hemen kompleks manifoldu üzerinde kompleks metalik yapı denir. J_c kompleks yapısı

$$J_c^2 - pJ_c + \frac{p^2 + 2q}{2}I = 0 \tag{3.4}$$

denklemini sağlar. Reel sayılarda bu denklemi düşünürsek, $x^2 - px + \frac{p^2 + 2q}{2} = 0$ dır.

Bu denklemin kökleri $x_1 = \frac{p}{2} + \frac{\sqrt{p^2+4q}}{2}i$, $x_2 = \frac{p}{2} - \frac{\sqrt{p^2+4q}}{2}i$ bulunur. Denklemin pozitif kökü olan

$$J_c = \frac{p}{2}I + \frac{\sqrt{p^2+4q}}{2}i$$

kompleks sayısına kompleks metalik oran denir.

3.6 Tanım

$$J_c^u = \frac{p}{\sqrt{2\left(p^2+2q\right)}} + i\sqrt{\frac{p^2+4q}{2\left(p^2+2q\right)}}$$

kompleks sayısına birim kompleks metalik oran denir.

J_c^u aşağıdaki denklemi sağlar:

$$x^2 - \frac{\sqrt{2\left(p^2+2q\right)}}{\left(p^2+2q\right)}x + 1 = 0.$$

3.2. Metalik Yapılara Örnekler

Bu kesimde metalik yapılara örnekler verilecektir.

3.2.1. Clifford cebiri

$\mathbb{R}^n$ nin herhangi x ve y vektörü için Clifford çarpımı xy ile gösterilir ve

$$xy = \langle x, y\rangle + x \wedge y \tag{3.5}$$

olarak tanımlanır. $\mathbb{R}^n$ nin Clifford cebiri $cl(\mathbb{R}^n)$ şeklinde gösterilir [25].

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ için $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ ve $x \wedge y = -y \wedge x$ olduğundan

$$yx = \langle y, x\rangle + y \wedge x = \langle x, y\rangle - x \wedge y \tag{3.6}$$

eşitliği elde edilir. Eş. 3.5 ve Eş. 3.6 ifadeleri taraf tarafa toplanırsa,

$$xy + yx = 2\langle x, y\rangle$$

bulunur.

$\mathbb{R}^n$ vektör uzayının bir ortonormal bazı $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ olsun. Bu durumda

$$e_i e_j = \langle e_i, e_j\rangle + e_i \wedge e_j = e_i \wedge e_j$$

$$e_j e_i = \langle e_j, e_i\rangle + e_j \wedge e_i = e_j \wedge e_i = -e_i \wedge e_j = -e_i e_j$$

$$e_i e_i = \langle e_i, e_i\rangle + e_i \wedge e_i = 1$$

eşitlikleri vardır.

Dolayısıyla Clifford çarpımına göre $\mathbb{R}^n$ vektör uzayının standart bazı

$$\begin{cases} e_i^2 = e_i e_i = 1, & i = j \\ e_i e_j + e_j e_i = 0, & i \neq j \end{cases} \tag{3.7}$$

bağıntılarını sağlar.

$J_i = \frac{1}{2}\left(p + \sqrt{p^2 + 4q} e_i\right)$ eşitliği yardımı ile Eş. 3.7 ifadesinden

$$\begin{cases} J_i \text{ bir metalik yapı}, & i = j \\ J_i J_j + J_j J_i = p\left(J_i + J_j\right) - \dfrac{p^2}{2}, & i \neq j \end{cases}$$

bağıntılarını elde ederiz.

Not

$\{e_1, e_2\}$, $\mathbb{R}^2$ nin bir ortonormal bazı olsun. $\{1, e_1, e_2, e_1 e_2\}$ kümesi $\mathbb{R}^2$ nin $cl(\mathbb{R}^2)$ Clifford cebiri için bir baz oluşturur. Yani $cl(\mathbb{R}^2)$ nin bir u elemanı, u_0 skaları, $\tilde{u} = u_1e_1 + u_2e_2$ vektörü ve $\hat{u} = u_{12}e_1e_2$ bivektörünün lineer birleşimi olarak $u = u_0+u_1e_1+u_2e_2+u_{12}e_1e_2$ şeklinde yazılabilir. Bu durumda $cl(\mathbb{R}^2)$ clifford cebiri dört boyutlu bir reel vektör uzayıdır [25].

Clifford cebirinin matris cebiri olarak ifade edilmesi

$\mathbb{R}^2$ vektör uzayında ortonormal baz vektörleri e_1 ve e_2 olmak üzere $cl(\mathbb{R}^2)$ de

$$1 \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2, \quad e_1 \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_2 \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ve e_1e_2 bivektörü

$$e_1e_2 \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisleri ile ifade edilir [25].

Böylece,

$$\begin{aligned} &i)\ J_1 = \frac{1}{2}\left(pI_2 + \sqrt{p^2+4q}\,e_1\right) = \begin{pmatrix} \frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{p,q} & 0 \\ 0 & p-\sigma_{p,q} \end{pmatrix} \\ &ii)\ J_2 = \frac{1}{2}\left(pI_2 + \sqrt{p^2+4q}\,e_2\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} p & \sqrt{p^2+4q} \\ \sqrt{p^2+4q} & p \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.8}$$

ifadelerini elde ederiz.

3.2.2. 2-Boyutlu metalik matrisler

$J \in R_n^n$ olmak üzere $J^2 = pJ + qI_n$ şartını sağlayan matrislere metalik matris denir. $n = 2$ için metalik matrisleri inceleyelim. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $J \in \mathbb{R}_2^2$ elemanı

$$J=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

şeklinde alınarak, Eş. 3.1 ifadesi çözüldüğünde metalik yapıların iki parametreli ailesi elde edilir.

$$\begin{aligned} J^2 &= JJ \\ &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2+bc & ac+dc \\ ab+bd & cb+d^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} pJ+qI_2 &= p\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} pa+q & pc \\ pb & pd+q \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.10}$$

dir. Eş. 3.1, Eş. 3.9 ve Eş. 3.10 ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{pmatrix} a^2+bc & ac+dc \\ ab+bd & cb+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa+q & pc \\ pb & pd+q \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2+bc = pa+q \\ ab+bd = pb \\ ac+dc = pc \\ cb+d^2 = pd+q \end{cases}$$

elde edilir. Buradan $a+d=p$ ve $c=\dfrac{1}{b}(ap-a^2+q)$ bulunur.

O halde $n=2$ için metalik matrisler, $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}-\{0\}$ olmak üzere

$$J_{a,b}=\begin{pmatrix} a & \frac{1}{b}\left(ap-a^2+q\right) \\ b & p-a \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

formatındadır.

Ayrıca, Eş. 3.8 ifadesi $i)$ den J_1 ve $pI_2 - J_1$ matrisleri Eş. 3.11 ifadesi formatında olmadıkları halde metalik matristir. Çünkü,

$$
\begin{aligned}
J_1^2 &= J_1 J_1 \\
&= \begin{pmatrix} \sigma_{p,q} & 0 \\ 0 & p-\sigma_{p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{p,q} & 0 \\ 0 & p-\sigma_{p,q} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sigma_{p,q}^2 & 0 \\ 0 & (p-\sigma_{p,q})^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} p\sigma_{p,q}+q & 0 \\ 0 & p^2-2p\sigma_{p,q}+\sigma_{p,q}^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} p\sigma_{p,q}+q & 0 \\ 0 & p^2-p\sigma_{p,q}+q \end{pmatrix} \\
&= p\begin{pmatrix} \sigma_{p,q} & 0 \\ 0 & p-\sigma_{p,q} \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ifadesinden $J_1^2 = pJ_1 + qI_2$ elde edilir. Benzer şekilde, $J^2 = pJ + qI$ eşitliği kullanılırsa,

$$
pI_2 - J_1 = p\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma_{p,q} & 0 \\ 0 & p-\sigma_{p,q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-\sigma_{p,q} & 0 \\ 0 & \sigma_{p,q} \end{pmatrix}
$$

ve buradan

$$
\begin{aligned}
(pI_2 - J_1)^2 &= \begin{pmatrix} p-\sigma_{p,q} & 0 \\ 0 & \sigma_{p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p-\sigma_{p,q} & 0 \\ 0 & \sigma_{p,q} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sigma_{p,q}^2 - 2p\sigma_{p,q} + p^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{p,q}^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$= \begin{pmatrix} p^2 - \sigma_{p,q} + q & 0 \\ 0 & p\sigma_{p,q} \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= p \begin{pmatrix} p - \sigma_{p,q} & 0 \\ 0 & \sigma_{p,q} \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= p(pI_2 - J_1) + qI_2$$

elde edilir.

Eş. 3.11 ifadesi dikkate alındığında, Eş. 3.8 ifadesindeki J_1 ve J_2 matrislerini, $J_1 = \lim_{b \to 0} J_{\sigma_{p,q},b}$ ve $J_2 = J_{\frac{p}{2},\frac{\sqrt{p^2+4q}}{2}}$ şeklinde ifade edebiliriz.

Eş. 3.11 ifadesini tekrar ele alırsak;

i) $x^2 - px - q = 0$ denkleminin kökleri $\sigma_{p,q}$ ve $p - \sigma_{p,q}$ olup, toplamları p dir. Bu durum Eş. 3.11 ifadesindeki matris için de doğrulanır. Yani

$$pI_2 - J_{a,b} = J_{p-a,-b} \quad \text{ise} \quad J_{a,b} + J_{p-a,-b} = pI_2$$

elde edilir.

ii) $\dot{I}z\,(J_{a,b}) = p$ olduğundan $J_{a,b}$ matrisinin izi a, b parametrelerinden bağımsızdır. $k \geq 0$ için $J^k_{a,b}$ matrisinin izlerinin dizisi 2, p, $p^2 + 2q$, $p^3 + 3pq$, $p^4 + 4p^2q + 2q^2, ...$ şeklinde olup, bu sayı dizisi genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizisidir.

3.2.3. Metalik yansımalar

E Öklid uzayında, bir H hiperdüzlemini sabit bırakan ve H ya dik her bir $v \in E \setminus \{0\}$ vektörünü $-v$ vektörüne dönüştüren

$$r_v(x) = x - \frac{2\langle x, v\rangle}{\langle v, v\rangle}v, \quad x \in E$$

ortogonal dönüşüme H hiperdüzlemine göre yansıma denir [32]. Ayrıca $r_v^2 = I_E$ (I_E, E üzerinde özdeşlik dönüşümü) olduğu açıktır.

v vektörüne göre metalik yansıma

$$J_v = \frac{1}{2}\left(pI_E + \sqrt{p^2+4q}\,r_v\right)$$

olarak tanımlanabilir. Yani $J_v^2 = pJ_v + qI_E$ dir. Ayrıca, v vektörü J_v nin $p - \sigma_{p,q}$ öz değerine karşılık gelen vektördür.

3.7 Önerme

X ortogonal bir dönüşüm ve v bir vektör olmak üzere

$$Xr_vX^{-1} = r_{X(v)}$$

dir [32].

Bu önermede r_v yi J_v cinsinden, $r_{X(v)}$ yi de $J_{X(v)}$ cinsinden yazılırsa,

$$XJ_vX^{-1} = J_{X(v)}$$

eşitliği elde edilir. J_v lineer dönüşümü

$$J_v(x) = \sigma_{p,q}x - \frac{\sqrt{p^2+4q}\langle x, v\rangle}{\langle v, v\rangle}v$$

şeklindedir.

3.2.4. Metalik yapılarla ilgili üçlü yapılar

3.8 Tanım

M manifoldu üzerinde $(1,1)$ tipinden iki tensör alanı P ve T olsun. $K = T \circ P$ olmak üzere;

$P^2 = T^2 = I$ ve $T \circ P - P \circ T = 0$ ise $K^2 = I$,

$P^2 = T^2 = I$ ve $T \circ P + P \circ T = 0$ ise $K^2 = -I$,

$P^2 = T^2 = -I$ ve $T \circ P - P \circ T = 0$ ise $K^2 = I$,

$P^2 = T^2 = -I$ ve $T \circ P + P \circ T = 0$ ise $K^2 = -I$.

oluyorsa (P, T, K) üçlüsüne, sırasıyla, hemen hemen hyperproduct (ahp), hemen hemen biproduct complex (abpc), hemen hemen product bicomplex (apbc) ve hemen hemen hypercomplex (ahc) yapı denir [5].

3.9 Önerme

P, T, M manifoldu üzerinde $(1,1)$ tipinden iki tensör alanı ve $K = T \circ P$ olsun. Eş. 3.2 ifadesinin ilk eşitliğinden

$$J_P = \frac{p}{2}I + \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right)P,\ J_T = \frac{p}{2}I + \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right)T,\ J_K = \frac{p}{2}I + \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right)K$$

elde edilir ve bunlar arasındaki bağıntı,

$$\sqrt{p^2 + 4q}J_K = 2J_T J_P - pJ_T - pJ_P + \sigma_{p,q}^2 I - qI \tag{3.12}$$

şeklindedir. Böylece (J_P, J_T, J_K) üçlüsü;

$i)$ Bir hemen hemen hyperproduct(ahp) yapıdır $\Longleftrightarrow$ J_P, J_T metalik yapı ve $J_P J_T = J_T J_P$ ise J_K metalik yapıdır.

$ii)$ Bir hemen hemen biproduct complex (abpc) yapıdır $\Longleftrightarrow$ J_P, J_T metalik yapı ve $\frac{2}{p^2}\left(J_T J_P + J_P J_T\right) = \frac{2}{p}\left(J_T + J_P\right) - I$ ise J_K kompleks metalik yapıdır.

iii) Bir hemen hemen product bicomplex (apbc) yapıdır $\Longleftrightarrow$ J_P, J_T kompleks metalik yapı ve $J_P J_T = J_T J_P$ ise J_K metalik yapıdır.

iv) Bir hemen hemen hypercomplex (ahc) yapıdır $\Longleftrightarrow$ J_P, J_T kompleks metalik yapı ve $\frac{2}{p^2}\left(J_T J_P + J_P J_T\right) = \frac{2}{p}\left(J_T + J_P\right) - I$ ise J_K kompleks metalik yapıdır.

İspat

i) J_P, J_T metalik yapı ve $J_P J_T = J_T J_P$ olsun. Bu durumda J_K nın metalik yapı olduğunu gösterelim. Eş. 3.12 ifadesinden

$$J_K = \frac{1}{\sqrt{p^2+4q}}\left(2J_T J_P - p\left(J_T + J_P\right) + \left(\sigma_{p,q}^2 - q\right) I\right)$$

elde edilir. Bazı cebirsel işlemlerden sonra $J_P^2 = pJ_P + qI$, $J_T^2 = pJ_T + qI$ ve $J_P J_T = J_T J_P$ eşitlikleri yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} J_K^2 &= \frac{2p}{\sqrt{p^2+4q}} J_T J_P - \frac{p^2}{\sqrt{p^2+4q}} J_T \\ &\quad - \frac{p^2}{\sqrt{p^2+4q}} J_P + \frac{\left(p^2+2q\right)\sqrt{p^2+4q} + p^3}{2\sqrt{p^2+4q}} I \end{aligned} \tag{3.13}$$

olarak bulunur.

Şimdi $pJ_K + qI$ ifadesinin eşitini bulalım.

$$\begin{aligned} pJ_K + qI &= \frac{2p}{\sqrt{p^2+4q}} J_T J_P - \frac{p^2}{\sqrt{p^2+4q}} J_T \\ &\quad - \frac{p^2}{\sqrt{p^2+4q}} J_P + \left(\frac{p\left(\sigma_{p,q}^2 - q\right)}{\sqrt{p^2+4q}} + q\right) I \\ &= \frac{2p}{\sqrt{p^2+4q}} J_T J_P - \frac{p^2}{\sqrt{p^2+4q}} J_T \\ &\quad - \frac{p^2}{\sqrt{p^2+4q}} J_P + \frac{\left(p^2+2q\right)\sqrt{p^2+4q} + p^3}{2\sqrt{p^2+4q}} I \end{aligned} \tag{3.14}$$

Eş. 3.13 ve Eş. 3.14 ifadesinden $J_K^2 = pJ_K + qI$ bulunur. O halde J_K bir metalik yapıdır.

$ii)$ J_P, J_T metalik yapı ve $\frac{2}{p^2}\left(J_TJ_P+J_PJ_T\right)=\frac{2}{p}\left(J_T+J_P\right)-I$ olsun. J_K nın kompleks metalik yapı olduğunu gösterelim. Eş. 3.4 den J_K nın $J_K^2=pJ_K-\frac{p^2+2q}{2}I$ eşitliğini sağladığını göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}
J_K^2 &= \frac{1}{p^2+4q}\{4J_TJ_PJ_TJ_P-2pJ_TJ_PJ_T-2pJ_TJ_P^2-2pJ_T^2J_P-2pJ_PJ_TJ_P \\
&+4(\sigma_{p,q}^2-q)J_TJ_P-2p(\sigma_{p,q}^2-q)J_T-2p(\sigma_{p,q}^2-q)J_P \\
&+p^2\left(J_T^2+J_TJ_P+J_PJ_T+J_P^2\right)+(\sigma_{p,q}^2-q)^2I\} \\
&= \frac{1}{p^2+4q}\Bigg\{4\underbrace{J_TJ_PJ_TJ_P}_{I}-2p\underbrace{J_TJ_PJ_T}_{II}-2p\underbrace{J_PJ_TJ_P}_{III}+(-p^2+2p\sqrt{p^2+4q})J_TJ_P \\
&+p^3J_T+p^3J_P-p^2J_TJ_P-\frac{p^4}{2}I+\left(-2pq-p^2\sqrt{p^2+4q}\right)J_P \\
&+\left(-2pq-p^2\sqrt{p^2+4q}\right)J_T+(2p^2q+\frac{p^4+p^3\sqrt{p^2+4q}}{2}+p^2q)I\Bigg\}
\end{aligned}$$

$\frac{2}{p^2}\left(J_TJ_P+J_PJ_T\right)=\frac{2}{p}\left(J_T+J_P\right)-I$ eşitliğini kullanarak I, II ve III ifadelerini açalım.

$$I\rightarrow\begin{cases} J_TJ_PJ_TJ_P = J_T(pJ_T+pJ_P-J_TJ_P-\frac{p^2}{2}I)J_P \\ \qquad\qquad\quad = \frac{p^2}{2}J_TJ_P-q^2I\end{cases}$$

$$II\rightarrow\begin{cases} J_TJ_PJ_T = J_T(pJ_T+pJ_P-J_TJ_P-\frac{p^2}{2}I) \\ \qquad\qquad = \frac{p^2}{2}J_T-qJ_P+pqI\end{cases}$$

$$III\rightarrow\begin{cases} J_TJ_PJ_T = (pJ_T+pJ_P-J_TJ_P-\frac{p^2}{2}I)J_P \\ \qquad\qquad = \frac{p^2}{2}J_P-qJ_T+pqI\end{cases}$$

I, II ve III eşitliklerini yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} J_K^2 = &\frac{2p}{\sqrt{p^2+4q}}J_TJ_P - \frac{p^2}{\sqrt{p^2+4q}}J_T - \frac{p^2}{\sqrt{p^2+4q}}J_P \\ &+ \left(\frac{p^3-2q\sqrt{p^2+4q}}{2\sqrt{p^2+4q}}\right)I \end{aligned} \tag{3.15}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} pJ_K - \left(\frac{p^2+2q}{2}\right)I = &\frac{2p}{\sqrt{p^2+4q}}J_TJ_P - \frac{p^2}{\sqrt{p^2+4q}}J_T - \frac{p^2}{\sqrt{p^2+4q}}J_P \\ &+ \left(\frac{p^3-2q\sqrt{p^2+4q}}{2\sqrt{p^2+4q}}\right)I \end{aligned} \tag{3.16}$$

Eş. 3.15 ve Eş. 3.16 ifadesinden $J_K^2 = pJ_K - \frac{p^2+2q}{2}I$ bulunur. O halde J_K bir kompleks metalik yapıdır.

$iii)$ İspat (i) deki gibi yapılır.

$iv)$ İspat (ii) deki gibi yapılır.

3.2.5. Kuaterniyon cebiri

$\mathbb{H}$ bir kuaterniyon cebiri olsun. $\mathbb{H}$ nin standart bazı $\{1,\ e_1,\ e_2,\ e_3\}$ olmak üzere bazdaki vektörler için

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1, \quad e_1e_2 = -e_2e_1 = e_3, \quad e_2e_3 = -e_3e_2 = e_1, \quad e_3e_1 = -e_1e_3 = e_2$$

eşitlikleri sağlanır.

Herhangi bir kuaterniyon

$$q = S_q + \vec{V}_q = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$$

olarak yazılabilir. $S_q = a_0$ ve $\vec{V}_q = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ sırasıyla, q kuaterniyonunun skalar kısmı ve vektörel kısmı olarak adlandırılır.

Bir q kuaterniyonunun normu

$$U_q = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

dir. $q \neq 0$ olmak üzere $q_0 = \dfrac{q}{U_q}$ birim kuaterniyon olarak tanımlanır [38].

Metalik kuaterniyon

3.10 Tanım

J bir kuaterniyon olsun. $p, q \in \mathbb{N}$ olmak üzere, J

$$J^2 = pJ + q \tag{3.17}$$

denklemini sağlarsa J ye metalik kuaterniyon denir.

$J = S_J + \vec{V}_J$ olsun. Burada

$$J^2 = S_J^2 - \left\langle \vec{V}_J, \vec{V}_J \right\rangle + 2S_J\vec{V}_J$$

elde edilir. Eş. 3.17 ifadesinden

$$S_J^2 - \left\langle \vec{V}_J, \vec{V}_J \right\rangle + 2S_J\vec{V}_J - pS_J - p\vec{V}_J = q$$

$$\begin{cases} S_J^2 - \left\langle \vec{V}_J, \vec{V}_J \right\rangle - pS_J = q \\ 2S_J\vec{V}_J - p\vec{V}_J = 0 \end{cases}$$

bulunur. Böylece,

$$S_J = \frac{p}{2} \quad \text{veya} \quad \vec{V}_J = 0$$

elde edilir.

Metalik kuaterniyonların iki durumu vardır.

$$
\begin{aligned}
&i)\ \vec{V}_J = 0 \Rightarrow J = \sigma_{p,q} \\
&ii)\ \vec{V}_J \neq 0 \Rightarrow\ S_J = \frac{p}{2}\ \text{ ve } \left\langle \vec{V}_J, \vec{V}_J \right\rangle = \frac{-p^2-4q}{4}.
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

Buradan metalik kuaterniyonun yok olduğunu söyleyebiliriz.

Metalik bikuaterniyon

Eş. 3.18 ifadesine göre

$$S_J = \frac{p}{2} \quad , \quad \left\langle \vec{V}_J, \vec{V}_J \right\rangle = \frac{-p^2-4q}{4}$$

J bir bikuaterniyon olsun. $z_i \in \mathbb{C}$, $i = 0,1,2,3$ olmak üzere

$$J = z_0 + z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3$$

şeklindedir. Burada

$$z_0 = \frac{p}{2} \quad , \quad z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = \frac{-p^2-4q}{4} \tag{3.19}$$

dir. Böylece

$$U_J = \sqrt{z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2} = \sqrt{-q} \tag{3.20}$$

bulunur.

Biliyoruz ki birimleştirilmiş bikuaterniyon $U_J \neq 0$ olmak üzere,

$$J_0 = \frac{J}{U_J} = \frac{z_0 + z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3}{\sqrt{z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}}$$

şeklindedir.

$$\cos\theta = \frac{z_0}{U_J}, \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2}}{U_J}, \quad \vec{S}_0 = \frac{z_1e_1+z_2e_2+z_3e_3}{\sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2}} \tag{3.21}$$

olmak üzere J_0 birim kuaterniyon

$$J_0 = \cos\theta + \vec{S}_0 \sin\theta, \quad \theta \in \mathbb{C} \tag{3.22}$$

şeklinde yazılabilir.

Eş. 3.19, Eş. 3.20, Eş. 3.21, Eş. 3.22 ifadelerinden birim metalik bikuaterniyon şu formdadır:

$$J_0 = \frac{p}{2i\sqrt{q}} + \frac{\sqrt{p^2+4q}}{2\sqrt{q}}\vec{S}_0, \quad \left\langle \vec{S}_0, \vec{S}_0 \right\rangle = 1, \quad \vec{S}_0^2 = -1.$$

Dolayısıyla, bir metalik bikuaterniyon

$$\begin{aligned} J &= J_0 U_J \\ &= \frac{p}{2} + \frac{\sqrt{p^2+4q}\,i}{2}\vec{S}_0, \quad \left\langle \vec{S}_0, \vec{S}_0 \right\rangle = 1, \quad \vec{S}_0^2 = -1 \end{aligned}$$

dir.

Metalik split kuaterniyon

J, $J^2 = pJ + q$ denklemini sağlayan split kuaterniyon olsun. $J = S_J + \vec{V}_J$ ve g, E_1^3 de Lorentz iç çarpımı olmak üzere

$$J^2 = S_J^2 + g(\vec{V}_J, \vec{V}_J) + 2S_J\vec{V}_J$$

dir.

$$J^2 - pJ = q \Rightarrow S_J^2 + g(\vec{V}_J, \vec{V}_J) + 2S_J\vec{V}_J - pS_J - p\vec{V}_J = q$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_J^2 + g(\vec{V}_J, \vec{V}_J) - pS_J = q \\ \\ 2S_J\vec{V}_J - p\vec{V}_J = 0 \end{cases} \tag{3.23}$$

elde edilir. Eş. 3.23 sisteminin çözümünden,

$$S_J = \frac{p}{2} \quad \text{veya} \quad \vec{V}_J = 0$$

bulunur. Metalik bikuaterniyon için iki durum söz konusudur:

$$\begin{aligned} &i) \quad \vec{V}_J = 0 \quad \Rightarrow \quad J = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2} \\ &ii) \quad \vec{V}_J \neq 0 \quad \Rightarrow \qquad S_J = \frac{p}{2} \qquad \text{ve} \quad g\left(\vec{V}_J, \vec{V}_J\right) = \frac{p^2 + 4q}{4}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Böylece, metalik split, metalik dual split ve metalik hiperbolik split kuaterniyonlarını elde edebiliriz. Burada sadece metalik split kuaterniyon elde edilecektir.

$a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, 3$ olmak üzere $J = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ split kuaterniyon olsun. Eş. 3.24 ifadesinin $ii)$ şıkkından

$$a_0 = \frac{p}{2} \quad \text{ve} \quad -a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \frac{p^2 + 4q}{4}$$

elde edilir. Böylece,

$$I_J = a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = -q$$

dir. Dolayısıyla, J metalik split kuaterniyon spacelike kuaterniyondur. [37] ve [38] dan biliyoruz ki, her bir spacelike kuaterniyon,

$$\sinh\theta = \frac{a_0}{U_J}, \quad \cosh\theta = \frac{\sqrt{-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}{U_J}$$

ve $\vec{S}_0 = \dfrac{a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3}{\sqrt{-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$ E_1^3 de spacelike birim kuaterniyon olmak üzere

$$J = U_J(\sinh\theta + \vec{S}_0 \cosh\theta) \tag{3.25}$$

formunda yazılabilir. Eş. 3.23, Eş. 3.24 ve Eş. 3.25 ifadelerinden bir metalik split kuaterniyon

$$J = \frac{p}{2} + \vec{S}_0 \frac{\sqrt{p^2 + 4q}}{2}, \quad g\left(\vec{S}_0, \vec{S}_0\right) = 1 \quad \vec{S}_0^2 = 1$$

formundadır.

3.3. Metalik Yapılar Olarak Konneksiyonlar

3.3.1. Asli lif demetlerinde konneksiyonlar

$B\,(M,\ \pi,\ G)$; total uzayı B, taban uzayı M, lif projeksiyonu π ve grup yapısı G olan bir asli lif demeti, V ($V = cek\pi_*$) ve H (tümleyen dağılım, yani $TB = V \oplus H$) sırasıyla B üzerinde vertical ve horizontal dağılımlar olsun. O halde v ve h sırasıyla V ve H a karşılık gelen projeksiyonları göstermek üzere,

$$P = v - h$$

$(1,1)$ tipindeki tensör alanı, B üstünde bir hemen hemen çarpım yapısıdır [4].

B asli lif demeti üzerindeki bu P hemen hemen çarpım yapısının bir konneksiyona karşılık gelmesi için gerek ve yeter şart aşağıdaki özelliklerin sağlanmasıdır [4].

i) $P\,(X) = X \Leftrightarrow X \in V$,

ii) $dR_a \circ P_u = P_{ua} \circ dR_a, \quad \forall a \in G$ ve $u \in B$.

Eş. 3.2 ifadesi kullanılarak aşağıdaki önerme verilebilir.

3.11 Önerme

B, asli lif demeti üzerindeki bir J metalik yapının bir konneksiyon ifade etmesi için gerek ve yeter şart

$i)$ $X \in \chi(B)$, J metalik yapısının $\sigma_{p,q}$ öz değerine karşılık gelen öz vektörüdür $\Leftrightarrow X$ vertical vektör alanıdır.

$ii)$ $dR_a \circ J_u = J_{ua} \circ dR_a, \quad \forall a \in G$ ve $u \in B$.

şartlarının sağlanmasıdır.

g, G Lie grubunun Lie cebiri olmak üzere, $\omega \in \Lambda^1(B, g)$, H nın konneksiyon 1-formu olsun. $\Omega \in \Lambda^2(B, g)$, ω nın eğrilik formu olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi^h(M)$ için

$$\Omega(X, Y) = d\omega(h(X), h(Y)) = -\omega([X, Y])$$

biçimindedir. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için P hemen hemen çarpım yapının Nijenhuis tensörü,

$$\begin{aligned} N_P(X,Y) &= P^2([X,Y]) + [P(X), P(Y)] - P([P(X), Y]) - P([X, P(Y)]) \\ &= [X,Y] + [P(X), P(Y)] - P([P(X), Y]) - P([X, P(Y)]) \end{aligned} \tag{3.26}$$

dir [36].

O halde $\forall X, Y \in \chi^h(M)$ için, $P(X) = v(X) - h(X) = -h(X) = -X$ olup

$$N_P(X,Y) = [X,Y] + [X,Y] + P([X,Y]) + P([X,Y])$$

$$\Rightarrow \quad N_P(X,Y) = 2[X,Y] + 2P([X,Y])$$

$$\Rightarrow \quad \omega(N_P(X,Y)) = 2\omega([X,Y]) + 2\omega(P[X,Y])$$

$$\Rightarrow \quad \omega(N_P(X,Y)) = 2\omega([X,Y]) + 2\omega([X,Y])$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4}\omega(N_P(X,Y)) = -(\omega([X,Y]))$$

bulunur. Buradan

$$\Omega\left(X,Y\right)=-\frac{1}{4}\omega(N_P(X,Y))$$

elde edilir.

Eş. 3.3 ifadesi, Eş. 3.26 ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
N_P\left(X,Y\right) &= \left[X,Y\right]+\frac{1}{\left(2\sigma_{p,q}-p\right)^2}\left[2J\left(X\right)-pI\left(X\right),2J\left(Y\right)-pI\left(Y\right)\right] \\
&\quad -\frac{1}{\left(2\sigma_{p,q}-p\right)^2}\left(2J-pI\right)\left[2J\left(X\right)-pI\left(X\right),Y\right] \\
&\quad -\frac{1}{\left(2\sigma_{p,q}-p\right)^2}\left(2J-pI\right)\left[X,2J\left(Y\right)-pI\left(Y\right)\right] \\
&= \left[X,Y\right]+\frac{2}{\left(2\sigma_{p,q}-p\right)^2}\left[J\left(X\right),2J\left(Y\right)-pI\left(Y\right)\right] \\
&\quad -\frac{p}{\left(2\sigma_{p,q}-p\right)^2}\left[X,2J\left(Y\right)-pI\left(Y\right)\right]-\frac{2}{\left(2\sigma_{p,q}-p\right)^2}\left(2J-pI\right)\left[J\left(X\right),Y\right] \\
&\quad +\frac{p}{\left(2\sigma_{p,q}-p\right)^2}\left(2J-pI\right)\left[X,Y\right] \\
&\quad -\frac{2}{\left(2\sigma_{p,q}-p\right)^2}\left(2J-pI\right)\left[X,J\left(Y\right)\right]+\frac{p}{\left(2\sigma_{p,q}-p\right)^2}\left(2J-pI\right)\left[X,Y\right] \\
&= \left[X,Y\right]+\frac{4}{\left(2\sigma_{p,q}-p\right)^2}\left[J\left(X\right),J\left(Y\right)\right]-\frac{2p}{\left(2\sigma_{p,q}-p\right)^2}\left[J\left(X\right),Y\right] \\
&\quad -\frac{2p}{\left(2\sigma_{p,q}-p\right)^2}\left[X,J\left(Y\right)\right]+\frac{p^2}{\left(2\sigma_{p,q}-p\right)^2}\left[X,Y\right] \\
&\quad -\frac{4}{\left(2\sigma_{p,q}-p\right)^2}J\left[J\left(X\right),Y\right]+\frac{2p}{\left(2\sigma_{p,q}-p\right)^2}\left[J\left(X\right),Y\right] \\
&\quad +\frac{2p}{\left(2\sigma_{p,q}-p\right)^2}J\left[X,Y\right]-\frac{p^2}{\left(2\sigma_{p,q}-p\right)^2}\left[X,Y\right] \\
&\quad -\frac{4}{\left(2\sigma_{p,q}-p\right)^2}J\left[X,J\left(Y\right)\right]+\frac{2p}{\left(2\sigma_{p,q}-p\right)^2}\left[X,J\left(Y\right)\right] \\
&\quad +\frac{2p}{\left(2\sigma_{p,q}-p\right)^2}J\left[X,Y\right]-\frac{p^2}{\left(2\sigma_{p,q}-p\right)^2}\left[X,Y\right]
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$N_P(X,Y) = \frac{4}{(2\sigma_{p,q}-p)^2}\left(J^2[X,Y] + [J(X),J(Y)]\right) - J([J(X),Y]) - J([X,J(Y)])$$

$$N_P(X,Y) = \frac{4}{(2\sigma_{p,q}-p)^2} N_J(X,Y) \tag{3.27}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} \Omega(X,Y) &= -\frac{1}{4}\omega N_P(X,Y) \\ &= -\frac{1}{(2\sigma_{p,q}-p)^2}\omega N_J(X,Y) \end{aligned}$$

bulunur.

3.12 Önerme

Konneksiyonun flat (yani $\Omega \equiv 0$) olması için gerek ve yeter şart metalik yapının integrallenebilir (yani $N_J \equiv 0$) olmasıdır.

Verilen konneksiyon $l_\omega : \chi(M) \to \chi(B)$ şeklinde bir lift üretir. Bu lift $\forall\, X^*,\, Y^* \in \chi(M)$ için

$$[l_\omega X^*, l_\omega Y^*] - l_\omega[X^*,Y^*] = N_P(l_\omega X^*, l_\omega Y^*)$$

eşitliğini sağlar [4].

3.13 Önerme

l_ω ile tanımlanan liftin Lie cebiri üzerinde bir morfizm olması için gerek ve yeter şart metalik yapının integrallenebilir olmasıdır.

3.3.2. Tanjant demetlerde konneksiyonlar

(TM, π, M), M manifoldunun tanjant demeti olsun. π_* lineer dönüşümünün çekirdeği $V(M)$ ile gösterilir ve $V(M)$ ye M manifoldunun vertical dağılımı denir. $V(M)$ nin N tümleyen (complementary) dağılımına horizontal dağılım veya lineer olmayan konneksiyon denir. M üzerinde bir lokal koordinat sistemi $(x^i)_{1\leq i\leq n}$ olmak üzere $(x^i, y^i = dx^i)_{1\leq i\leq n}$ de TM üzerinde bir lokal koordinat sistemidir. TM nin bir hemen hemen tanjant yapısı $T = \frac{\partial}{\partial y^i} \otimes dx^i$ tensörü ile tanımlanabilir.

3.14 Tanım

$(1,1)$ tipindeki bir tensör alanı $\nu : \chi(M) \to \chi(M)$ olmak üzere

$$\begin{cases} T \circ \nu = 0 \\ \nu \circ T = T \end{cases} \tag{3.28}$$

şartları sağlanıyorsa, ν tensör alanına vertical projektör denir [4].

3.15 Önerme

Bir ν vertical projektör çek$\nu = N(\nu)$ bağıntısı sayesinde bir non-lineer konneksiyon üretir [4].

3.16 Önerme

ν_N, $N(\nu_N) = N$ olacak şekilde bir vertical projektördür [4].

3.17 Tanım

M manifoldu üzerinde $(1,1)$ tipinden Γ tensör alanı

$$\Gamma \circ T = -T \tag{3.29}$$

$$T \circ \Gamma = T \tag{3.30}$$

şartlarını sağlıyorsa Γ tensör alanına hemen hemen çarpım tipinde lineer olmayan konneksiyon denir [4].

3.18 Önerme

Eğer Γ, hemen hemen çarpım tipinde bir lineer olmayan konneksiyon ise,

i) $\nu_\Gamma = \frac{1}{2}(I_{\chi(M)} - \Gamma)$ bir vertical projektördür [4].

ii) $V(M)$, Γ tensör alanının (-1) öz değerine karşılık gelen öz uzayıdır [4].

iii) $N(\nu_\Gamma)$, Γ tensör alanının $(+1)$ öz değerine karşılık gelen öz uzayıdır [4].

İspat

i) Eş. 3.29 ve Eş. 3.30 ifadelerinden

$$T \circ \nu_\Gamma = \frac{1}{2}(T - T \circ \Gamma) = \frac{1}{2}(T - T) = 0,$$

$$\nu_\Gamma \circ T = \frac{1}{2}(T - \Gamma \circ T) = \frac{1}{2}(T + T) = T$$

bulunur. O halde Eş. 3.28 ifadesindeki şartlar sağlandığından ν_Γ bir vertical projektördür.

$ii)$ $V(M) = im\ \nu_\Gamma = \{X \in \chi(M) : \Gamma(X) = -X\}$ olduğu gösterilmelidir.

$\nu_\Gamma = \frac{1}{2}(I_{\chi(M)} - \Gamma)$ olduğundan $V(M) = \{X \in \chi(M) : \nu_\Gamma(X) = X\}$ dir. O halde

$$\begin{aligned} \nu_\Gamma(X) = \frac{1}{2}(I_{\chi(M)}(X) - \Gamma(X)) \Rightarrow \quad X \quad &= \frac{1}{2}(X - \Gamma(X)) \\ &\Rightarrow \Gamma(X) = -X \end{aligned}$$

bulunur.

$iii)$ $N(\nu_\Gamma)$ =çek $\nu_\Gamma = \{X \in \chi(M)\,|\Gamma(X) = X\}$ olduğu gösterilmelidir.

$\nu_\Gamma = \frac{1}{2}(I_{\chi(M)} - \Gamma)$ olduğundan çek $\nu_\Gamma = \{X \in \chi(M)\,|\nu_\Gamma(X) = 0\}$ dır. O halde

$$\begin{aligned} \nu_\Gamma(X) = \frac{1}{2}(I_{\chi(M)}(X) - \Gamma(X)) \Rightarrow \quad 0 \quad &= \frac{1}{2}(X - \Gamma(X)) \\ &\Rightarrow \Gamma(X) = X \end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç olarak her vertical projektör $\Gamma = I_{\chi(M)} - 2\nu$ şeklinde hemen hemen çarpım tipinde bir lineer olmayan konneksiyon belirler.

$$\begin{aligned} \Gamma^2 &= \Gamma \circ \Gamma \\ &= \left(I_{\chi(M)} - 2\nu\right) \circ \left(I_{\chi(M)} - 2\nu\right) \\ &= I_{\chi(M)} - 2\nu - 2\nu + 4\nu^2 \\ &= I_{\chi(M)} - 4\nu + 4\nu \\ &= I_{\chi(M)} \end{aligned}$$

olduğundan Γ tensör alanı M manifoldu üzerinde bir hemen hemen çarpım yapıdır. Bundan yola çıkarak aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

3.19 Önerme

M manifoldu üzerinde v vertical projektörü ile verilen bir N lineer olmayan konneksiyonu bir

$$J = \sigma_{p,q} I_{\chi(M)} - \sqrt{p^2 + 4q}\, v$$

metalik yapısıyla da tanımlanabilir.

Böylece N, J nin $\sigma_{p,q}$ öz değerine karşılık gelen öz uzay, $V(M)$ de J nin $p - \sigma_{p,q}$ öz değerine karşılık gelen öz uzaydır.

İspat

Γ bir hemen hemen çarpım yapısı olduğundan ve Eş. 3.2 ifadesinden

$$J = \frac{1}{2}\left(p I_{\chi(M)} + \sqrt{p^2 + 4q}\,\Gamma\right)$$

elde edilir. Buradan

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 4q}}(2J - p I_{\chi(M)})$$

bulunur. Bu eşitlikte $\Gamma = I_{\chi(M)} - 2v$ de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{p^2 + 4q}}(2J - p I_{\chi(M)}) = I_{\chi(M)} - 2v \Rightarrow 2J &= p I_{\chi(M)} + \sqrt{p^2 + 4q}\, I_{\chi(M)} - 2\sqrt{p^2 + 4q}\, v \\ &= \left(p + \sqrt{p^2 + 4q}\right) I_{\chi(M)} - 2\sqrt{p^2 + 4q}\, v \\ \Rightarrow J &= \left(\frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}\right) I_{\chi(M)} - \sqrt{p^2 + 4q}\, v \\ &= \sigma_{p,q} I_{\chi(M)} - \sqrt{p^2 + 4q}\, v \end{aligned}$$

elde edilir.

$N =$çek$v = \{X \in \chi(M) : J(X) = \sigma_{p,q}X\}$ olduğunu gösterelim. $J = \sigma_{p,q}I_{\chi(M)} - \sqrt{p^2+4q}v$ olduğundan $v = \frac{1}{\sqrt{p^2+4q}}(\sigma_{p,q}I_{\chi(M)} - J)$ dir. $N =$çek$v = \{X \in \chi(M) : v(X) = 0\}$. O halde

$$v(X) = \frac{1}{\sqrt{p^2+4q}}(\sigma_{p,q}I_{\chi(M)}(X) - J(X)) \Rightarrow \quad 0 \quad = \frac{1}{\sqrt{p^2+4q}}(\sigma_{p,q}X - J(X))$$
$$\Rightarrow J(X) = \sigma_{p,q}X$$

dir. Sonuç olarak $N =$çek$v = \{X \in \chi(M) : \sigma_{p,q}X = J(X)\}$ dir.

$V(M) = imv = \{X \in \chi(M) : J(X) = (p - \sigma_{p,q})X\}$ olduğunu gösterelim.

$J = \sigma_{p,q}I_{\chi(M)} - \sqrt{p^2+4q}v$ olduğundan $v = \frac{1}{\sqrt{p^2+4q}}(\sigma_{p,q}I_{\chi(M)} - J)$ dir.

$V(M) = \{X \in \chi(M) : v(X) = X\}$. O halde

$$v(X) = \frac{1}{\sqrt{p^2+4q}}(\sigma_{p,q}I_{\chi(M)}(X) - J(X)) \Rightarrow \quad X \quad = \frac{1}{\sqrt{p^2+4q}}(\sigma_{p,q}(X) - J(X))$$
$$\Rightarrow J(X) = (p - \sigma_{p,q})X$$

dir. Sonuç olarak $V(M) = imv = \{X \in \chi(M) : J(X) = (p - \sigma_{p,q})X\}$ dir.

3.4. Metalik Yapıların İntegrallenebilirliği ve Paralelliği

$\forall X, Y \in \chi(M)$ için, J metallik yapısının Nijenhuis tensörü,

$$N_J(X,Y) = J^2[X,Y] + [J(X), J(Y)] - J[J(X), Y] - J[X, J(Y)]$$

dir.

M bir manifold ve R, S de M üzerinde complementary dağılımlar olsun. Bu durumda $TM = R \oplus S$ eşitliği vardır. R ve S dağılımlarına karşılık gelen r ve s projeksiyonları,

$$r + s = I_{TM}, \quad r^2 = r, \quad s^2 = s, \quad rs = sr = 0 \tag{3.31}$$

eşitliklerini sağlar. $r - s = P$ olmak üzere,

$$\begin{cases} r + s = I_{TM} \\ r - s = P \end{cases}$$

eşitliklerinden

$$\begin{cases} r = \dfrac{1}{2}(I_{TM} + P) \\ s = \dfrac{1}{2}(I_{TM} - P) \end{cases} \tag{3.32}$$

bulunur. Eş. 3.3 ifadesi, Eş. 3.32 ifadesinde yerine yazılırsa,

$$r = \frac{1}{2\sigma_{p,q} - p}J - \frac{p - \sigma_{p,q}}{2\sigma_{p,q} - p}I, \qquad s = -\frac{1}{2\sigma_{p,q} - p}J + \frac{\sigma_{p,q}}{2\sigma_{p,q} - p}I \tag{3.33}$$

elde edilir [21].

3.20 Teorem

i) Eğer $N_J = 0$ ise J metalik yapısı integrallenebilirdir.

ii) $\forall X, Y \in \chi(M)$ için, $s[rX, rY] = 0$ ise R dağılımı M manifoldu üzerinde integrallenebilirdir. Benzer şekilde, $r[sX, sY] = 0$ ise S dağılımı M manifoldu üzerinde integrallenebilirdir [36].

3.21 Önerme

J metalik yapısının integrallenebilir olabilmesi için gerek ve yeter şart P hemen hemen çarpım yapısının integrallenebilir olmasıdır.

İspat

Eş. 3.27 ifadesinden $N_P(X, Y) = \dfrac{4}{(2\sigma_{p,q} - p)^2} N_J(X, Y)$ dir. Buradan ispat açıktır.

Eş. 3.1 ve Eş. 3.33 ifadelerinden

$$
\begin{aligned}
Jr = rJ &= \frac{1}{2\sigma_{p,q} - p} J^2 - \frac{p - \sigma_{p,q}}{2\sigma_{p,q} - p} J \\
&= \frac{p}{2\sigma_{p,q} - p} J + \frac{q}{2\sigma_{p,q} - p} I - \frac{p - \sigma_{p,q}}{2\sigma_{p,q} - p} J \\
&= \frac{\sigma_{p,q}}{2\sigma_{p,q} - p} J + \frac{q}{2\sigma_{p,q} - p} I \\
&= \sigma_{p,q} r \qquad (3.34)
\end{aligned}
$$

bulunur [21]. Benzer şekilde,

$$
\begin{aligned}
Js = sJ &= -\frac{1}{2\sigma_{p,q} - p} J^2 + \frac{\sigma_{p,q}}{2\sigma_{p,q} - p} J \\
&= -\frac{p}{2\sigma_{p,q} - p} J - \frac{q}{2\sigma_{p,q} - p} I + \frac{\sigma_{p,q}}{2\sigma_{p,q} - p} J \\
&= -\frac{(p - \sigma_{p,q})}{2\sigma_{p,q} - p} J - \frac{q}{2\sigma_{p,q} - p} I \\
&= (p - \sigma_{p,q})\, s \qquad (3.35)
\end{aligned}
$$

bulunur [21].

Eş. 3.26, Eş. 3.34 ve Eş. 3.35 ifadeleri yardımıyla

$$
\begin{aligned}
N_J(rX, rY) &= J^2[rX, rY] + [JrX, JrY] - J[JrX, rY] - J[rX, JrY] \\
&= J^2[rX, rY] + [\sigma_{p,q} rX, \sigma_{p,q} rY] \\
&\quad - J[\sigma_{p,q} rX, rY] - J[rX, \sigma_{p,q} rY] \\
&= J^2[rX, rY] + \sigma_{p,q}^2 [rX, rY] \\
&\quad - \sigma_{p,q} J[rX, rY] - \sigma_{p,q} J[rX, rY] \\
&= pJ[rX, rY] + q[rX, rY] + p\sigma_{p,q}[rX, rY] \\
&\quad + q[rX, rY] - 2\sigma_{p,q} J[rX, rY]
\end{aligned}
$$

$$= (p - 2\sigma_{p,q})\, J\,[rX, rY] + (2q + p\sigma_{p,q})\,[rX, rY]$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2\sigma_{p,q} - p)^2} sN_J\,(rX, rY) &= \frac{(p - 2\sigma_{p,q})}{(2\sigma_{p,q} - p)^2} sJ\,[rX, rY] + \frac{(2q + p\sigma_{p,q})}{(2\sigma_{p,q} - p)^2} s\,[rX, rY] \\
&= \frac{(p - 2\sigma_{p,q})}{(2\sigma_{p,q} - p)^2} (p - \sigma_{p,q}) s\,[rX, rY] + \frac{(2q + p\sigma_{p,q})}{(2\sigma_{p,q} - p)^2} s\,[rX, rY] \\
&= \frac{p^2 - p\sigma_{p,q} - 2p\sigma_{p,q} + 2\sigma_{p,q}^2 + 2q + p\sigma_{p,q}}{(2\sigma_{p,q} - p)^2} s\,[rX, rY] \\
&= s\,[rX, rY]
\end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer bir ispatla,

$$\frac{1}{(2\sigma_{p,q} - p)^2} rN_J\,(sX, sY) = r\,[sX, sY]$$

bulunur. Yani,

$$\begin{cases}
s\,[rX, rY] = \dfrac{1}{(2\sigma_{p,q} - p)^2} sN_J\,(rX, rY) \\[2ex]
r\,[sX, sY] = \dfrac{1}{(2\sigma_{p,q} - p)^2} rN_J\,(sX, sY)
\end{cases} \tag{3.36}$$

dir.

3.22 Önerme

$i)$ R dağılımı integrallenebilirdir$\Leftrightarrow$ $sN_J\,(rX, rY) = 0$.

$ii)$ S dağılımı integrallenebilirdir$\Leftrightarrow$ $rN_J\,(sX, sY) = 0$.

$iii)$ J integrallenebilir ise hem R hem de S integrallenebilirdir.

İspat

Teorem 3.20 den ve Eş. 3.36 ifadesinden ispat açıktır.

3.23 Önerme

r ve s projeksiyonları M manifoldu üzerindeki her ∇ lineer konneksiyonu için Schouten ve Vranceanu konneksiyonlarına göre paraleldir. Ayrıca J metalik yapısı da Schouten ve Vranceanu konneksiyonlarına göre paraleldir.

İspat

$\forall X, Y \in \chi(M)$ için, r ve s projeksiyonlarının Schouten ve Vranceanu konneksiyonlarına göre paralelliğini gösterelim. Tanım 2.58 ve Eş. 3.31 ifadesinden,

$$\begin{aligned}
\left(\overset{Sc}{\nabla}_X r\right) Y &= \overset{Sc}{\nabla}_X rY - r\left(\overset{Sc}{\nabla}_X Y\right) \\
&= r\left(\nabla_X r^2 Y\right) + s(\nabla_X s(rY)) - r\left[r(\nabla_X rY) + s(\nabla_X sY)\right] \\
&= r(\nabla_X rY) - r^2\left(\nabla_X rY\right) \\
&= r(\nabla_X rY) - r(\nabla_X rY) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left(\overset{V}{\nabla}_X r\right) Y &= \overset{V}{\nabla}_X rY - r\left(\overset{V}{\nabla}_X Y\right) \\
&= r(\nabla_{rX} r\,(rY)) + s(\nabla_{sX} s(rY)) + r[sX, r\,(rY)] + s[rX, s\,(rY)] \\
&\quad -r\left(r(\nabla r_X rY) + s(\nabla_{sX} sY) + r[sX, rY] + s[rX, sY]\right) \\
&= r(\nabla r_X rY) + r[sX, r\,(rY)] - r(\nabla r_X rY) - r[sX, rY] \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece r projeksiyonu Schouten ve Vranceanu konneksiyonlarına göre paraleldir.

Benzer şekilde s projeksiyonun bu konneksiyonlara göre paralelliği gösterilebilir.

Şimdi J metalik yapısının Schouten ve Vranceanu konneksiyonlarına göre paralelliğini gösterelim. Tanım 2.58, Eş. 3.34 ve Eş. 3.35 ifadelerinden,

$$\begin{aligned}
\left(\overset{Sc}{\nabla}_X J\right) Y &= \overset{Sc}{\nabla}_X JY - J\left(\overset{Sc}{\nabla}_X Y\right) \\
&= r\left(\nabla_X r\left(JY\right)\right) + s(\nabla_X s\left(JY\right)) - J\left[r(\nabla_X rY) + s(\nabla_X sY)\right] \\
&= r\left(\nabla_X \sigma_{p,q}\left(rY\right)\right) + s(\nabla_X\left(p-\sigma_{p,q}\right)sY) \\
&\quad -\sigma_{p,q} r(\nabla_X rY) - \left(p-\sigma_{p,q}\right)s(\nabla_X sY) \\
&= \sigma_{p,q} r\left(\nabla_X\left(rY\right)\right) + \left(p-\sigma_{p,q}\right)s(\nabla_X sY) \\
&\quad -\sigma_{p,q} r(\nabla_X rY) - \left(p-\sigma_{p,q}\right)s(\nabla_X sY) \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
\left(\overset{V}{\nabla}_X J\right) Y &= \overset{V}{\nabla}_X JY - J\left(\overset{V}{\nabla}_X Y\right) \\
&= r(\nabla_{rX} r\left(JY\right)) + s(\nabla_{sX} s\left(JY\right)) + r[sX, r\left(JY\right)] + s\left[rX, s\left(JY\right)\right] \\
&\quad -Jr(\nabla r_X rY) - Js(\nabla_{sX} sY) - Jr[sX, rY] - Jr[rX, sY] \\
&= r\left(\nabla_{rX}\sigma_{p,q}\left(rY\right)\right) + s(\nabla_{sX}\left(p-\sigma_{p,q}\right)sY) \\
&\quad +r[sX, \sigma_{p,q}\left(rY\right)] + s\left[rX, \left(p-\sigma_{p,q}\right)sY\right] \\
&\quad -\sigma_{p,q} r\left(\nabla_{rX}\left(rY\right)\right) - \left(p-\sigma_{p,q}\right)s(\nabla_{sX} sY) - \sigma_{p,q} r[sX, rY] \\
&\quad -\left(p-\sigma_{p,q}\right)s[rX, sY] - \sigma_{p,q} r[sX, rY] - \left(p-\sigma_{p,q}\right)s[rX, sY]
\end{aligned}$$

$$= \sigma_{p,q} r\left(\nabla_{rX}(rY)\right) + (p - \sigma_{p,q})\, s(\nabla_{sX} sY)$$

$$+\sigma_{p,q} r[sX, rY] + (p - \sigma_{p,q})\, s[rX, sY]$$

$$-\sigma_{p,q} r\left(\nabla_{rX}(rY)\right) - (p - \sigma_{p,q})\, s(\nabla_{sX} sY)$$

$$-\sigma_{p,q} r[sX, rY] - (p - \sigma_{p,q})\, s[rX, sY]$$

$$= 0$$

bulunur.

3.24 Önerme

Tanım 2.53 den R ve S dağılımları M manifoldu üzerindeki her ∇ lineer konneksiyonu için Schouten ve Vranceanu konneksiyonlarına göre paraleldir.

İspat

$X \in \chi(M)$ ve $Y \in R$ olsun. $Y \in R \Rightarrow s(Y) = 0$ ve $r(Y) = Y$ dir. Böylece,

$$\overset{Sc}{\nabla}_X Y = r(\nabla_X rY) + s(\nabla_X sY)$$

$$= r(\nabla_X Y) \in R$$

ve

$$\overset{V}{\nabla}_X Y = r(\nabla_{rX} rY) + s(\nabla_{sX} sY) + r[sX, rY] + s[rX, sY]$$

$$= \left(r\left(\nabla_{rX} Y\right) + r[sX, Y]\right) \in R$$

bulunur.

Benzer şekilde S dağılımı için de paralellik gösterilebilir.

3.25 Önerme

R ve S dağılımlarının ∇ lineer konneksiyonuna göre paralel olması için gerek ve yeter şart $\nabla = \overset{Sc}{\nabla}$ olmasıdır.

İspat

$X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere, R ve S dağılımları ∇ lineer konneksiyonuna göre paralel ise $\nabla_X(rY) \in R$ ve $\nabla_X(sY) \in S$ dir. Buradan,

$$s\nabla_X(rY) = 0 \quad \text{ve} \quad r\nabla_X(sY) = 0$$

bulunur. $r + s = I$ olduğundan

$$\nabla_X(rY) = r\nabla_X(rY) \quad \text{ve} \quad \nabla_X(sY) = s\nabla_X(sY)$$

yazılabilir. Tanım 2.58 den,

$$\nabla_X Y = r\nabla_X(rY) + s\nabla_X(sY) = \overset{Sc}{\nabla}_X Y$$

elde edilir. Böylece $\nabla = \overset{Sc}{\nabla}$ dir. Tersinin ispatı açıktır.

3.26 Önerme

$X \in R$, $Y \in \chi\left(M\right)$ olmak üzere, $[rX, sY] \in R$ ise, R dağılımı Vranceanu konneksiyonuna göre yarı paraleldir.

İspat

Eş. 2.1 ifadesi yardımıyla $\overset{V}{\nabla}$ için, $X \in R$, $Y \in \chi\left(M\right)$ olmak üzere

$$s(\Delta J)(X, Y) = sJ\overset{V}{\nabla}_X Y - sJ\overset{V}{\nabla}_Y X - s\overset{V}{\nabla}_{JX} Y + s\overset{V}{\nabla}_Y(JX)$$

yazılabilir. Tanım 2.58, Eş. 3.34 ve Eş. 3.35 ifadelerinden

$$s(\Delta J)(X,Y) = (p - 2\sigma_{p,q})\, s\,[rX, sY] = 0$$

elde edilir. O halde $(\Delta J)(X,Y) \in R$ dir. Böylece R dağılımı Vranceanu konneksiyonuna göre yarı paraleldir.

Benzer şekilde S dağılımı için aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

3.27 Önerme

$X \in S, Y \in \chi(M)$ olmak üzere, $[sX, rY] \in S$ ise, S dağılımı Vranceanu konneksiyonuna göre yarı paraleldir.

3.28 Önerme

R ve S dağılımları Vranceanu konneksiyonuna göre ters yarı paraleldir.

İspat

Eş. 2.1 ifadesi göz önüne alınırsa $\overset{V}{\nabla}$ için, $X \in R$, $Y \in \chi(M)$ olmak üzere

$$r(\Delta J)(X,Y) = rJ\overset{V}{\nabla}_X Y - rJ\overset{V}{\nabla}_Y X - r\overset{V}{\nabla}_{JX} Y + r\overset{V}{\nabla}_Y (JX)$$

yazılabilir. Tanım 2.58, Eş. 3.34 ve Eş. 3.35 ifadeleri kullanılarak

$$r(\Delta J)(X,Y) = (2\sigma_{p,q} - p)\, r\,[sX, rY]$$

elde edilir. $sX = 0$ olduğundan $r(\Delta J)(X,Y) = 0$ bulunur. Yani $(\Delta J)(X,Y) \in S$ dir. Böylece R dağılımı Vranceanu konneksiyonuna göre ters yarı paraleldir. Benzer şekilde S dağılımının Vranceanu konneksiyonuna göre ters yarı paralel olduğu gösterilebilir.

3.5. Metalik Riemann Metrikleri

3.29 Tanım

P, M manifoldu üzerinde hemen hemen çarpım yapı olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(P(X), P(Y)) = g(X, Y)$$

veya buna denk olarak (P, bir $g-$simetrik endomorfizm)

$$g(P(X), Y) = g(X, P(Y)) \tag{3.37}$$

olacak şekilde M manifoldu üzerinde bir g Riemann metriği varsa (g, P) ikilisine Riemann hemen hemen çarpım yapı denir [4, 36].

Eş. 3.37 ifadesi ile verilen eşitliği sağlayan g Riemann metriğine $P-$uyumlu da denir.

3.30 Önerme

P hemen hemen çarpım yapının bir $g-$ simetrik endomorfizm olması için gerek ve yeter şart J metalik yapının da bir $g-$ simetrik endomorfizm olmasıdır.

İspat

$g\left(P\left(X\right), Y\right) = g\left(X, P\left(Y\right)\right)$ olsun. Eş. 3.3 ifadesinden,

$$g\left(J\left(X\right), Y\right) = g\left(X, J\left(Y\right)\right)$$

elde edilir.

Tersine, $g\left(J\left(X\right), Y\right) = g\left(X, J\left(Y\right)\right)$ olsun. Eş. 3.2 ifadesinden,

$$g\left(P\left(X\right), Y\right) = g\left(X, P\left(Y\right)\right)$$

bulunur.

3.31 Tanım

M manifoldu üzerinde bir g Riemann metriği, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(J(X), Y) = g(X, J(Y))$$

eşitliğini sağlıyorsa (g, J) ikilisine metalik Riemann yapı ve (M, g, J) üçlüsüne de metalik Riemann manifold denir [21].

Not

Tanım 3.31 da (p, q) ikilisi $(1, 1)$, $(2, 1)$ ve $(3, 1)$ alınırsa M Riemann manifoldu üzerinde sırasıyla altın Riemann yapı, gümüş Riemann yapı ve bronz Riemann yapı elde edilir [4, 29–31].

3.32 Önerme

Metalik Riemann manifoldu üzerinde

i) r, s projeksiyonları $g-$simetriktir. Yani,

$$\begin{cases} g(r(X), Y) = g(X, r(Y)) \\ g(s(X), Y) = g(X, s(Y)) \end{cases}$$

dir.

ii) R ve S dağılımları $g-$ortogonaldir. Yani,

$$g(r(X), s(Y)) = 0$$

dir.

$iii)$ Metalik yapı, N_J-simetriktir. Yani,

$$N_J(J(X),Y) = N_J(X,J(Y))$$

dir.

İspat

$i)$ $r = \frac{1}{2\sigma_{p,q}-p}J - \frac{p-\sigma_{p,q}}{2\sigma_{p,q}-p}I$ ve $g\left(J\left(X\right),Y\right) = g\left(X,J\left(Y\right)\right)$ olduğunu biliyoruz. O halde

$$\begin{aligned}
g\left(\left(\frac{1}{2\sigma_{p,q}-p}J - \frac{p-\sigma_{p,q}}{2\sigma_{p,q}-p}I\right)X,Y\right) &= \frac{1}{2\sigma_{p,q}-p}g\left(J\left(X\right),Y\right) - \frac{p-\sigma_{p,q}}{2\sigma_{p,q}-p}g\left(X,Y\right) \\
&= \frac{1}{2\sigma_{p,q}-p}g\left(X,J\left(Y\right)\right) - \frac{p-\sigma_{p,q}}{2\sigma_{p,q}-p}g\left(X,Y\right) \\
&= g\left(X,\left(\frac{1}{2\sigma_{p,q}-p}J - \frac{p-\sigma_{p,q}}{2\sigma_{p,q}-p}I\right)Y\right) \\
&= g\left(X,r\left(Y\right)\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $g\left(s\left(X\right),Y\right) = g\left(X,s\left(Y\right)\right)$ olduğu kolayca görülür.

$ii)$ Eş. 3.1, Eş. 3.33 ifadeleri ve Tanım 3.31 dan

$$\begin{aligned}
g(r\left(X\right),s\left(Y\right)) &= g\left(\left(\frac{1}{2\sigma_{p,q}-p}J - \frac{p-\sigma_{p,q}}{2\sigma_{p,q}-p}I\right)X,\left(-\frac{1}{2\sigma_{p,q}-p}J + \frac{\sigma_{p,q}}{2\sigma_{p,q}-p}I\right)Y\right) \\
&= -\frac{1}{\left(2\sigma_{p,q}-p\right)^2}g\left(J\left(X\right),J\left(Y\right)\right) - \frac{\left(p-\sigma_{p,q}\right)\sigma_{p,q}}{\left(2\sigma_{p,q}-p\right)^2}g(X,Y) \\
&\quad + \frac{p-\sigma_{p,q}}{\left(2\sigma_{p,q}-p\right)^2}g\left(X,J\left(Y\right)\right) + \frac{\sigma_{p,q}}{\left(2\sigma_{p,q}-p\right)^2}g\left(J\left(X\right),Y\right) \\
&= -\frac{1}{\left(2\sigma_{p,q}-p\right)^2}g\left(J^2\left(X\right),Y\right) - \frac{p\sigma_{p,q}-\sigma_{p,q}^2}{\left(2\sigma_{p,q}-p\right)^2}g(X,Y) \\
&\quad + \frac{p-\sigma_{p,q}}{\left(2\sigma_{p,q}-p\right)^2}g\left(X,J\left(Y\right)\right) + \frac{\sigma_{p,q}}{\left(2\sigma_{p,q}-p\right)^2}g\left(J\left(X\right),Y\right)
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{(2\sigma_{p,q}-p)^2} g\left((pJ+q)\, X, Y\right) + \frac{q}{(2\sigma_{p,q}-p)^2} g(X,Y)$$

$$+\frac{p}{(2\sigma_{p,q}-p)^2} g\left(X, J\left(Y\right)\right)$$

$$= -\frac{p}{(2\sigma_{p,q}-p)^2} g\left(J\left(X\right), Y\right) - \frac{q}{(2\sigma_{p,q}-p)^2} g\left(X, Y\right)$$

$$+\frac{q}{(2\sigma_{p,q}-p)^2} g(X,Y) + \frac{p}{(2\sigma_{p,q}-p)^2} g\left(X, J\left(Y\right)\right)$$

$$= 0$$

bulunur.

$iii)$ J metalik yapısının Nijenhuis tensörü

$$N_J\left(X,Y\right) = J^2\left[X,Y\right] + [J(X), J(Y)] - J\left[J(X), Y\right] - J\left[X, J(Y)\right]$$

dir. O halde

$$\begin{aligned} N_J\left(J\left(X\right), Y\right) &= J^2([J(X),Y]) + [J^2(X), J(Y)] - J([J^2(X),Y]) - J([J(X),J(Y)]) \\ &= (pJ+qI)([J(X),Y]) + p\left[J(X), J\left(Y\right)\right] + q[X, J(Y)] \\ &\quad -pJ([J(X),Y]) - qJ\left[X,Y\right] - J([J(X),J(Y)]) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} N_J\left(X, J\left(Y\right)\right) &= J^2([X), J\left(Y\right)]) + [J(X), J^2(Y)] - J([J(X), J\left(Y\right)]) - J([X, J^2(Y)]) \\ &= (pJ+qI)[X, J(Y)] + p\left[J(X), J(Y)\right] + q\left[J(X), Y\right] \\ &\quad -J\left[J(X), J(Y)\right] - pJ[X, J(Y)] - qJ\left[X,Y\right] \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla

$$N_J(J(X),Y) = N_J(X, J(Y))$$

elde edilir.

3.33 Önerme

M bir lokal çarpım metalik Riemann manifold olsun. Bu manifold üzerindeki J metalik yapısı integrallenebilirdir.

İspat

∇, M metalik Riemann manifoldu üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olsun. Önermeden 3.33 den

$$N_J\left(X,Y\right)=\left(\nabla_{JX}J\right)\left(Y\right)-\left(\nabla_{JY}J\right)\left(X\right)-J\left(\nabla_X J\right)\left(Y\right)+J\left(\nabla_Y J\right)\left(X\right)$$

elde edilir. Ayrıca M metalik Riemann manifoldu lokal çarpım olduğundan, Önerme 2.56 den

$$\nabla J=0$$

elde edilir. Bu eşitlikler dikkate alınırsa $N_J=0$ bulunur. O halde, M üzerindeki J metalik yapısı integrallenebilirdir.

3.34 Teorem

$\widetilde{\nabla}$ herhangi bir lineer konneksiyon ve Q, $(1,2)$ tipinden tensör alanı olmak üzere O_PQ,

$$O_PQ\left(X,Y\right)=\frac{1}{2}\left[Q\left(X,Y\right)+PQ(X,PY)\right] \tag{3.38}$$

şeklinde tanımlı hemen hemen çarpım yapıya karşılık gelen bir Obata operatörü olsun. $\nabla J=0$ olacak şekildeki ∇ lineer konneksiyonların cümlesi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}\nabla_X Y={}&\frac{1}{p^2+4q}\left[\left(p^2+2q\right)\breve{\nabla}_X Y+2J\left(\breve{\nabla}_X JY\right)-pJ\left(\breve{\nabla}_X Y\right)-p\left(\breve{\nabla}_X JY\right)\right]\\&+O_PQ\left(X,Y\right).\end{aligned} \tag{3.39}$$

İspat

$\nabla_X Y = \dfrac{1}{2}\left[\breve{\nabla}_X Y + P\left(\breve{\nabla}_X PY\right)\right]$ olduğundan, Eş. 3.3 ifadesinden faydalanırsak,

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \frac{1}{2}\left[\breve{\nabla}_X Y + \frac{1}{\sqrt{p^2+4q}}\left(2J - pI\right)\left(\breve{\nabla}_X PY\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\breve{\nabla}_X Y + \frac{1}{\sqrt{p^2+4q}}2J\left(\breve{\nabla}_X\left(\frac{1}{\sqrt{p^2+4q}}\left(2J-pI\right)\right)Y\right)\right. \\
&\quad \left. - \frac{p}{\sqrt{p^2+4q}}I\left(\breve{\nabla}_X\left(\frac{1}{\sqrt{p^2+4q}}\left(2J-pI\right)\right)Y\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\breve{\nabla}_X Y + \frac{4J}{p^2+4q}\left(\breve{\nabla}_X JY\right) - \frac{2pJ}{p^2+4q}I\left(\breve{\nabla}_X Y\right)\right. \\
&\quad \left. - \frac{2p}{p^2+4q}I\left(\breve{\nabla}_X JY\right) + \frac{p^2 I^2}{p^2+4q}\left(\breve{\nabla}_X Y\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2p^2+4q}{p^2+4q}\right)\breve{\nabla}_X Y + \frac{4J}{p^2+4q}\left(\breve{\nabla}_X JY\right)\right. \\
&\quad \left. - \frac{2pJ}{p^2+4q}I\left(\breve{\nabla}_X Y\right) - \frac{2p}{p^2+4q}I\left(\breve{\nabla}_X JY\right)\right] \\
&= \frac{1}{p^2+4q}\left[\left(p^2+2q\right)\breve{\nabla}_X Y + 2J\left(\breve{\nabla}_X JY\right) - pJ\left(\breve{\nabla}_X Y\right) - p\left(\breve{\nabla}_X JY\right)\right]
\end{aligned}$$

dir.

Şimdi

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \frac{1}{p^2+4q}\left[\left(p^2+2q\right)\breve{\nabla}_X Y + 2J\left(\breve{\nabla}_X JY\right) - pJ\left(\breve{\nabla}_X Y\right) - p\left(\breve{\nabla}_X JY\right)\right] \\
&\quad + O_P Q\left(X, Y\right)
\end{aligned}$$

eşitliği yardımı ile $\nabla J = 0$ olduğunu gösterelim. Buna göre Tanım 2.59 den

$$\left(\nabla_X J\right)Y = \underbrace{\nabla_X JY}_{I} - \underbrace{J\left(\nabla_X Y\right)}_{II} = 0$$

olmalıdır.

I ifadesi açılırsa, Eş. 3.39 ifadesinden

$$
\begin{aligned}
\nabla_X JY = {} & \frac{1}{p^2+4q}\left[\left(p^2+2q\right)\breve{\nabla}_X JY + 2J\left(\breve{\nabla}_X J^2Y\right) - pJ\left(\breve{\nabla}_X JY\right) - p\left(\breve{\nabla}_X J^2Y\right)\right] \\
& + O_P Q\left(X, JY\right)
\end{aligned}
$$

olur. $J^2 = pJ + qI$ olduğundan,

$$
\begin{aligned}
\nabla_X JY = {} & \frac{1}{p^2+4q}\left[p^2\left(\breve{\nabla}_X JY\right) + 2q\left(\breve{\nabla}_X JY\right) + 2pJ\left(\breve{\nabla}_X JY\right) + 2qJ\left(\breve{\nabla}_X Y\right)\right. \\
& \left. - pJ\left(\breve{\nabla}_X JY\right) - p^2\left(\breve{\nabla}_X JY\right) - pq\left(\breve{\nabla}_X Y\right)\right] + O_P Q\left(X, JY\right) \\
= {} & \frac{1}{p^2+4q}\left[2q\left(\breve{\nabla}_X JY\right) + pJ\left(\breve{\nabla}_X JY\right) + 2qJ\left(\breve{\nabla}_X Y\right) - pq\left(\breve{\nabla}_X Y\right)\right] \\
& + O_P Q\left(X, JY\right)
\end{aligned}
$$

bulunur.

II ifadesini açarsak, Eş. 3.39 ifadesinden

$$
\begin{aligned}
J\left(\nabla_X Y\right) = {} & \frac{1}{p^2+4q}\left[\left(p^2+2q\right)J\left(\breve{\nabla}_X Y\right) + 2J^2\left(\breve{\nabla}_X JY\right)\right. \\
& \left. - pJ^2\left(\breve{\nabla}_X Y\right) - pJ\left(\breve{\nabla}_X JY\right)\right] + J\left(O_P Q\left(X, Y\right)\right)
\end{aligned}
$$

bulunur. $J^2 = pJ + qI$ olduğundan,

$$
\begin{aligned}
J\left(\nabla_X Y\right) = {} & \frac{1}{p^2+4q}\left[p^2J\left(\breve{\nabla}_X Y\right) + 2qJ\left(\breve{\nabla}_X Y\right) + 2pJ\left(\breve{\nabla}_X JY\right) + 2q\left(\breve{\nabla}_X JY\right)\right. \\
& \left. - p^2J\left(\breve{\nabla}_X Y\right) - pq\left(\breve{\nabla}_X Y\right) - pJ\left(\breve{\nabla}_X JY\right)\right] + J\left(O_P Q\left(X, Y\right)\right) \\
= {} & \frac{1}{p^2+4q}\left[2qJ\left(\breve{\nabla}_X Y\right) + pJ\left(\breve{\nabla}_X JY\right) + 2q\left(\breve{\nabla}_X JY\right) - pq\left(\breve{\nabla}_X Y\right)\right] \\
& + J\left(O_P Q\left(X, Y\right)\right)
\end{aligned}
$$

$O_P Q\left(X, JY\right)$ ifadesinin $J\left(O_P Q\left(X, Y\right)\right)$ ifadesine eşit olduğunu gösterelim. Eş. 3.38 ifadesinden

$$O_P Q\left(X, JY\right) = \frac{1}{2}\left[Q\left(X, JY\right) + PQ(X, PJY)\right]$$

dir.

$PJ = \dfrac{1}{2}\left(pPI + \sqrt{p^2 + 4q}\right)$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
O_P Q\left(X, JY\right) &= \frac{1}{2}\left[Q\left(X, JY\right) + PQ(X, p\frac{P}{2}Y + \frac{\sqrt{p^2+4q}}{2}Y)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[Q\left(X, JY\right) + \frac{p}{2}PQ(X, PY) + \frac{\sqrt{p^2+4q}}{2}PQ(X, Y)\right]
\end{aligned}$$

bulunur.

Eş. 3.2 ifadesinden

$$\begin{aligned}
O_P Q\left(X, JY\right) &= \frac{1}{2}\left[Q\left(X, JY\right) + \frac{p}{2}PQ(X, PY) + \frac{\sqrt{p^2+4q}}{2}PQ(X, Y)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[Q\left(X, \frac{p}{2}Y + \frac{\sqrt{p^2+4q}}{2}PY\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{p}{2}PQ(X, PY) + \frac{\sqrt{p^2+4q}}{2}PQ(X, Y)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{p}{2}Q(X, Y) + \frac{\sqrt{p^2+4q}}{2}Q(X, PY)\right. \\
&\quad \left. + \frac{p}{2}PQ(X, PY) + \frac{\sqrt{p^2+4q}}{2}PQ(X, Y)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(p + \sqrt{p^2+4q}P\right)Q(X, Y)\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}\left(\sqrt{p^2+4q} + pP\right)Q(X, PY)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[JQ(X, Y) + PJQ(X, PY)\right]
\end{aligned}$$

dir.

$J\left(O_P Q\left(X,Y\right)\right)$ Eş. 3.38 ifadesinden

$$J\left(O_P Q\left(X,Y\right)\right)=\frac{1}{2}\left[JQ(X,Y)+PJQ(X,PY)\right]$$

olup $O_P Q\left(X,JY\right)=J\left(O_P Q\left(X,Y\right)\right)$ dir.

Sonuç olarak,

$$\left(\nabla_X J\right)Y=\nabla_X JY-J\left(\nabla_X Y\right)=0$$

bulunur. Böylece $\nabla J=0$ dır.

Son olarak elde ettiğimiz metalik yapının reel düzlemde bir örneğini verelim:

Örnek

$\mathbb{R}^2$ de projeksiyon operatörleri olan r ve s yi aşağıdaki gibi seçelim.

$$r=\frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial x}\otimes dx+\frac{xy}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial x}\otimes dy+\frac{xy}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial y}\otimes dx+\frac{y^2}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial y}\otimes dy,$$

$$s=\frac{y^2}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial x}\otimes dx-\frac{xy}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial x}\otimes dy-\frac{xy}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial y}\otimes dx+\frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial y}\otimes dy.$$

Bu operatörlere karşılık gelen dağılımlar ise

$$R=Sp\left\{x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right\},$$

$$S=Sp\left\{y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}\right\}$$

dir.

Gerçekten $R+S=T\mathbb{R}^2$ ve $R\cap S=\varnothing$ dir. r ve s projeksiyon tensörleri $r^2=r$, $s^2=s$, $sr=rs=0$ ve $r+s=I$ şartlarını sağlar.

Eş. 3.33 ifadesinden R ve S dağılımları metalik yapı ile ilişkilendirilebilir.

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\sigma_{p,q}x^2+(p-\sigma_{p,q})y^2}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{(2\sigma_{p,q}-p)\,xy}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial y},$$
$$J\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{(2\sigma_{p,q}-p)\,xy}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{(p-\sigma_{p,q})x^2+\sigma_{p,q}y^2}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial y}.$$

$$\begin{aligned}
N_J\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) &= J^2\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right] + \left[J\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),J\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right] \\
&\quad -J\left[J\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),\frac{\partial}{\partial y}\right] - J\left[\frac{\partial}{\partial x},J\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right] \\
&= J^2\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right] + \left[\frac{\sigma_{p,q}x^2+(p-\sigma_{p,q})y^2}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{(2\sigma_{p,q}-p)\,xy}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial y},\right. \\
&\quad \left.\frac{(2\sigma_{p,q}-p)\,xy}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{(p-\sigma_{p,q})x^2+\sigma_{p,q}y^2}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial y}\right] \\
&\quad -J\left[\frac{\sigma_{p,q}x^2+(p-\sigma_{p,q})y^2}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{(2\sigma_{p,q}-p)\,xy}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y}\right] \\
&\quad -J\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{(2\sigma_{p,q}-p)\,xy}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{(p-\sigma_{p,q})x^2+\sigma_{p,q}y^2}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial y}\right] \\
&= J^2\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right] \\
&\quad +\frac{\sigma_{p,q}x^2+(p-\sigma_{p,q})y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\left[\frac{\partial}{\partial x},(2\sigma_{p,q}-p)\,xy\frac{\partial}{\partial x}+(p-\sigma_{p,q})x^2+\sigma_{p,q}y^2\frac{\partial}{\partial y}\right] \\
&\quad +\frac{(2\sigma_{p,q}-p)\,xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\left[\frac{\partial}{\partial y},(2\sigma_{p,q}-p)\,xy\frac{\partial}{\partial x}+(p-\sigma_{p,q})x^2+\sigma_{p,q}y^2\frac{\partial}{\partial y}\right] \\
&\quad -\frac{\sigma_{p,q}x^2+(p-\sigma_{p,q})y^2}{x^2+y^2}J\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right] - \frac{(2\sigma_{p,q}-p)\,xy}{x^2+y^2}J\left[\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y}\right] \\
&\quad -\frac{(2\sigma_{p,q}-p)\,xy}{x^2+y^2}J\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right] - \frac{(p-\sigma_{p,q})x^2+\sigma_{p,q}y^2}{x^2+y^2}J\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= J^2\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right]+\frac{(\sigma_{p,q}x^2+(p-\sigma_{p,q})y^2)\,(2\sigma_{p,q}-p)\,xy}{(x^2+y^2)^2}\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right]\\
&\quad+\frac{(\sigma_{p,q}x^2+(p-\sigma_{p,q})y^2)\,((p-\sigma_{p,q})x^2+\sigma_{p,q}y^2)}{(x^2+y^2)^2}\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right]\\
&\quad+\frac{(2\sigma_{p,q}-p)^2\,x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\left[\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial x}\right]\\
&\quad+\frac{(2\sigma_{p,q}-p)\,xy\,((p-\sigma_{p,q})x^2+\sigma_{p,q}y^2)}{(x^2+y^2)^2}\left[\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y}\right]\\
&\quad-\frac{\sigma_{p,q}x^2+(p-\sigma_{p,q})y^2}{x^2+y^2}J\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right]-\frac{(2\sigma_{p,q}-p)\,xy}{x^2+y^2}J\left[\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y}\right]\\
&\quad-\frac{(2\sigma_{p,q}-p)\,xy}{x^2+y^2}J\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right]-\frac{(p-\sigma_{p,q})x^2+\sigma_{p,q}y^2}{x^2+y^2}J\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right]\\
&= J^2\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right]+\frac{(\sigma_{p,q}x^2+(p-\sigma_{p,q})y^2)\,((p-\sigma_{p,q})x^2+\sigma_{p,q}y^2)}{(x^2+y^2)^2}\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right]\\
&\quad-\frac{(2\sigma_{p,q}-p)^2\,x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right]-\frac{(p-\sigma_{p,q})x^2+\sigma_{p,q}y^2}{x^2+y^2}J\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right]\\
&\quad-\frac{\sigma_{p,q}x^2+(p-\sigma_{p,q})y^2}{x^2+y^2}J\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right]\\
&= J^2\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right]-pJ\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right]+\left(\frac{\sigma_{p,q}(p-\sigma_{p,q})\,(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2}\right.\\
&\quad\left.+\frac{x^2y^2\left(\sigma_{p,q}^2+(p-\sigma_{p,q})^2-\left(4\sigma_{p,q}^2-4\sigma_{p,q}+p^2\right)\right)}{(x^2+y^2)^2}\right)\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right]\\
&= J^2\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right]-pJ\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right]-qI\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right]\\
&= J^2\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right]-J^2\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right]\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

$N_J\left(\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y}\right)=0$ olduğundan elde edilen reel düzlemdeki metalik yapı integrallenebilirdir.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümünde, Fibonacci dizisi ve Genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin (veya Horadam dizisinin) tanımları verilerek bu dizilerin altın oran ve metalik oran ile olan ilişkisi belirtilmiştir. Metalik oranda, p ve q nun pozitif tamsayı değerleri için metalik oran ailesinin elemanlarından olan altın oran, gümüş oran, bronz oran ve nikel oran tanımları verilmiştir. Çalışmanın ikinci bölümünde, üçüncü bölümde kullanılacak bazı temel kavramlar ve tanımlar verilmiştir. Özgün olan üçüncü bölümde ise [4] deki yol izlenerek, diferensiyellenebilir bir manifold üzerinde $Q(J) = J^2 - pJ - qI$ polinomial yapısına sahip $(1, 1)$ tipinden bir J tensör alanı yardımı ile [21] çalışmasında elde edilen metalik yapının tanımı verilip, sonrasında hemen hemen çarpım yapı ile bu yapı arasındaki geçiş kullanılarak bir diferensiyellenebilir manifold üzerinde metalik yapının geometrisi incelenmiştir.

Sonuç olarak bir diferensiyellenebilir manifold üzerinde metalik yapı için elde edilen tanım, teorem, önerme ve sonuçlar, p ve q pozitif tamsayılarının farklı değerleri alınarak metalik ailenin diğer elemanları içinde kullanılabilir.

KAYNAKLAR

1. Bejancu, A., Farran, H. R. (2006). *Foliations and geometric structures.* Mathematics and its Applications, Springer, New York, 1-7.

2. Brickell, F., Clark, R. S. (1970). *Differentiable manifolds.* VRN Company, London, 14-25, 34-46, 53-63, 109-119, 152-159.

3. Civelek, Ş. (1988). *İkinci Mertebeden Genişletilmiş Manifoldlar Üzerinde Liftler.* Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 35-45.

4. Crasmareanu, M., Hretcanu, C. E. (2008). Golden differential geometry. ***Chaos, Solitons and Fractals***, 38, 1229-1238.

5. Cruceanu, V. (2006). On almost biproduct complex manifolds. ***Analele Ştinţifice Ale Universităţii "Alexandru Ioan Cuza" Din Iaşi Matematică***, 52(1), 5-24.

6. Das, L. S., Nikic, J., and Nivas, R. (2006). Parallelism of distributions and geodesics on $F(a_1, a_2, ..., a_n)$-structure Lagrangian manifolds. ***Differential Geometry - Dynamical System***, 8, 82-89.

7. De Spinadel, V. W. (1997). On characterization of the onset to chaos. ***Chaos, Solitons and Fractals***, 8(10), 1631-1643.

8. De Spinadel, V. W. (1999). The metallic means family and multifractal spectra, ***Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Application***, 36(6), 721-745.

9. İnternet: De Spinadel, V. W. The Family of Metallic Means. *Tripod.* URL:http://www.webcitation.org/query?url=http%3A%2F%2Fvismath1.tripod.com %2Fspinadel&date=2015-12-25, Son Erişim Tarihi: 25.12.2015.

10. Do Carmo Valero, M. P. (1992). *Riemannian geometry.* Birkhauser, Boston, 1-35.

11. Gezer, A., Cengiz, N., Salimov, A. (2013). On integrability of golden Riemannian structures. ***Turkish Journal of Mathematics***, 37, 693-703.

12. Gezer, A., Karaman, Ç. (2015). On metallic Riemannian structures. ***Turkish Journal of Mathematics***, 39, 954-962.

13. Goel, D. S. (1975). Almost tangent structures. ***Kodai Mathematical Seminar Reports***, 26, 187-193.

14. Goldberg, S. I., Yano, K. (1970). Polynomial structures on manifolds. ***Kodai Mathematical Seminar Reports***, 22, 199-218.

15. Goldberg, S. I., Petridis, N. C. (1973). Differentiable solutions of algebraic equations on manifolds. ***Kodai Mathematical Seminar Reports***, 25, 111-128.

16. Greub, W., Halperin, S., Vanstone, R. (1972). *Connection, curvature and cohomology.* Acedemic Press, New York, (1-2), 38-41, 44-84, 87-99.

17. Hacısalihoğlu, H. H. (2006). *Yüksek diferensiyel geometriye giriş.* Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, 25-34, 40-60.

18. Hacısalihoğlu, H. H., Ekmekçi, N. (2003). *Tensör geometri.* Ankara Üniversitesi, 79-80.

19. Hretcanu, C. E., Crasmareanu, M. (2009). Applications of the golden ratio on Riemannian manifolds. ***Turkish Journal of Mathematics***, 33, 179-191.

20. Hretcanu, C. E., Crasmareanu, M. (2007). On some invariant submanifolds in a Riemannian manifold with golden structure. ***Analele Ştinţifice Ale Universităţii "Alexandru Ioan Cuza" Din Iaşi Matematică***, 53, 199-211.

21. Hretcanu, C.E., Crasmareanu, M. (2013). Metallic structures on Riemannian manifolds. ***Revista Union Math Argentina***, 54(2), 15-27.

22. Lee, J. M. (2009). *Manifolds and differential geometry.* American Math. Society, America, 467-478.

23. Lee, J. M. (2003). *Introduction to smooth manifolds.* Spinger, New York, 1-31.

24. İnternet: Lewis, A. Notes on Principal Fibre Bundle. URL:http://www.webcitation.org/query?url=http%3A%2F%2Fwww.mast.queensu.ca %2F%7Eandrew%2Fnotes%2Fpdf%2F1993a.pdf&date=2015-12-25, Son Erişim Tarihi: 25.12.2015.

25. Lounesto, P. (2001). *Clifford algebras and spinors.* Cambridge University Press, United Kingdom, 10-15.

26. Okubo, T. (1987). *Differential geometry.* Marcel Dekker Inc., New York, 19-28, 34-44.

27. Özdemir, F., Crasmareanu, M. (2010). Geometrical objects associated to a substructure. ***Turkish Journal of Mathematics***, 34, 1-12.

28. Özkan, M. (2014). Prolongations of golden structures to tangent bundles. ***Differential Geometry - Dynamical Systems***, 16, 227-238.

29. Özkan, M., Peltek, B. (2013, 26-29 August). *Silver differential geometry.* Paper presented at the II. International Eurasian Conference on Mathematical Sciences

and Applications, Sarajevo-Bosnia and Herzegovina.

30. Özkan, M., Yılmaz, F. (2015, 14-16 Mayıs). *Bronz yapı* . 14. Matematik Sempozyumunda sunuldu, Niğde.

31. Peltek, B. (2014). *Gümüş Diferensiyel Geometri.* Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 31, 58-60.

32. Procesi, C. (2007). *Lie Groups: An Approach Through Invariants and Representations.* Springer, New York, 122-124.

33. Saunders, D. J. (1989). *The geometry of jet bundles.* Cambridge Universty Press, Cambridge, 1-36.

34. Şahin, B., Akyol, M. A. (2014). Golden maps between golden Riemannian manifolds and constancy of certain maps. ***Mathematical Communications***, 19, 1-10.

35. Tu, L. W. (2007). *An introduction to manifolds.* Spinger, New York, 129-140.

36. Yano, K., Kon, M. (1984). *Structures on manifolds.* World Scientific, New York, 170-180.

37. Yardımcı, E.H. (2010). *Altın Manifoldlar.* Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 15-18, 64-65, 76-77.

38. Yardımcı, E.H., Yaylı, Y. (2014). Golden quaternionic structures. ***International Electronic Journal of Pure and Applied Mathematics***, 7(3), 109-125.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	:	YILMAZ, Fatma
Uyruğu	:	T.C.
Doğum tarihi ve yeri	:	16.05.1990, Ankara
Medeni hali	:	Bekar
Telefon	:	0 (312) 202 10 86
e-mail	:	fatmayilmaz@gazi.edu.tr

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik Böl.	Devam ediyor.
Lisans	Celal Bayar Üniversitesi/Matematik Böl.	2012
Lise	Fethiye Kemal Mumcu Anadolu Lisesi	2008

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2014-devam ediyor	Gazi Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Özkan, M., Yılmaz, F. (Baskıda) Prolongations of golden structures to tangent bundles of order r. ***Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1: Mathematics and Statistics***.

Sempozyumlar

1. Özkan, M., Yılmaz, F. (2015). *Bronz yapı* . 14. Matematik Sempozyumu, Niğde, 109-110.
2. Özkan, M., Yılmaz, F. (2014). *Prolongations of golden structure to the tangent bundle*

of order r, III. International Eurasian Conference on Mathematical ciences and Applications, Viyana, 338.

Bilimsel Toplantı Düzenleme

1. Workshop on Invariants of Knots, Surfaces and 3−Manifolds. Yerel Düzenleme Kurulu Üyesi. 03-07 Ağustos 2015. Ankara.
2. Invariants in Low Dimensional Geometry. Yerel Düzenleme Kurulu Üyesi. 10-14 Ağustos 2015. Ankara.

GAZİ GELECEKTİR...