



ILMONEN-HAUKKANEN-MERIKOSKI KONJEKTÜRÜNÜN İSPATI

Ali KESKİN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

EKİM 2015

Ali KESKİN tarafından hazırlanan “İLMONEN-HAUKKANEN-MERIKOSKI KONJEKTÜRÜNÜN İSPATI” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Ercan ALTINIŞIK

Matematik, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Başkan : Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU

Matematik, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye : Prof. Dr. Dursun TAŞCI

Matematik, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 22/10/2015

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....
Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Ali KESKİN

22/10/2015

ILMONEN-HAUKKANEN-MERIKOSKI KONJEKTÜRÜNÜN İSPATI
(Yüksek Lisans Tezi)

Ali KESKİN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ekim 2015

ÖZET

2008 yılında Imonen, Haukkanen ve Merikoski, köşegen elemanları 1 olan $n \times n$ tipinden bütün $(0,1)$ alt üçgen Y matrisleri için Y ve Y nin transpozunun çarpımlarının en küçük özdeğerlerinden en küçüğü ile ilgili bir konjektür sunmuşlardır. Bu tezde bir C kodu yardımıyla bu konjektürün 8×8 tipinden ve 9×9 tipinden matrisler için doğruluğu kontrol edilmiştir. Sonra konjektürün doğru olduğu negatif olmayan matrislerin spektral yarıçapı için bir eşitsizlik kullanılarak ispatlanmıştır. Üstelik yapılan hesaplamalar ışığında böyle bir Y matrisinin tek olduğuna ilişkin bir konjektür ortaya atılmıştır.

Bilim Kodu : 204.1.025
Anahtar Kelimeler : Imonen-Haukkanen-Merikoski konjektürü, 0-1 matrisi, özdeğer, negatif olmayan matris, spektral yarıçap
Sayfa Adedi : 29
Danışman : Doç. Dr. Ercan ALTINIŞIK

PROOF OF ILMONEN-HAUKKANEN-MERIKOSKI CONJECTURE

(M. Sc. Thesis)

Ali KESKİN

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

October 2015

ABSTRACT

In 2008 Ilmonen, Haukkanen and Merikoski presented a conjecture on the smallest one of the smallest eigenvalues of all products of Y and the transpose of Y for all Y matrices in the set of all n by n lower triangular 0-1 matrix with each diagonal element equal to 1. In this thesis, we verify the truth of the Ilmonen-Haukkanen-Merikoski conjecture by using a C code for 8 by 8 matrices and 9 by 9 matrices. Then, we prove that the conjecture is true by using an inequality for spectral radii of nonnegative matrices. Furthermore, in the light of our computations, we conjecture that such a matrix Y is unique.

Science Code : 204.1.025

Key Words : Ilmonen-Haukkanen-Merikoski conjecture, 0-1 matrix, eigenvalue, nonnegative matrix, spectral radius

Page Number : 29

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Ercan ALTINIŞIK

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana vererek çalıőmalarımın her aőamasında yakın ilgisini esirgemeyen, çok kıymetli yardımlarıyla beni yönlendiren hocam, Sayın Doç. Dr. Ercan ALTINIŞIK'a, yine her aőamada yardımlarından ötürü Sayın Mehmet YILDIZ'a, kod yazma aőamasındaki büyük desteği için Sayın Murat DEMİRBÜKEN'e ve son olarak da manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen eőime teőekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. KONJEKTÜRÜN DOĞRULUĞUNUN $n=8$ ve 9 İÇİN KONTROL EDİLMESİ	5
3. KONJEKTÜRÜN İSPATI.....	9
4. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	17
KAYNAKLAR	19
EKLER.....	21
EK-1. MATLAB Kodu	22
EK-2. C Kodu	23
EK-3. Teklik için C Kodu.....	26
ÖZGEÇMİŞ	29

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklamalar

$\det A$

A matrisinin determinanı

$\text{iz}(A)$

A matrisinin izi

$\rho(A)$

A matrisinin spektral yarıçapı

ϕ

Euler'in ϕ fonksiyonu

J_ϵ

Euler fonksiyonunun Jordan genellemesi

F_n

n . Fibonacci sayısı

(S)

GCD matrisi

$M_n(\mathbb{Z})$

Tamsayı elemanlı n –kare matrislerin kümesi

I

Özdeşlik fonksiyonu

(x_i, x_j)

x_i ve x_j nin en büyük ortak böleni

Kısaltmalar

Açıklamalar

GCD

En büyük ortak bölen

1. GİRİŞ

$S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ farklı pozitif tamsayılardan oluşan bir küme olsun. x_i ve x_j sayılarının en büyük ortak böleni (x_i, x_j) ile gösterilsin ve ϵ bir pozitif reel sayı olsun. $n \times n$ tipinden $(S) = ((x_i, x_j))$ ve $(S)^\epsilon = ((x_i, x_j)^\epsilon)$ matrisleri sırasıyla S üzerinde GCD matris ve GCD kuvvet matrisi olarak adlandırılır. 1876 yılında Smith [23], S çarpan kapalı ise $\det(S) = \prod_{k=1}^n \phi(x_k)$ eşitliğinin sağlandığını ispatladı. Smith'in çalışmasından sonra GCD, LCM matrisleri ve bunların çeşitli genellemelerinin determinantları, tersleri, özdeğerleri ve matris normları ile ilgili bir çok sonuç yayınlanmıştır [3, 6-9, 17].

GCD matrisleri ile ilgili ilginç ve aktif çalışma konularından biri de bu matrislerin özdeğerleridir. Bu konudaki ilk sonuçlar Wintner [25] ile Lindqvist ve Seip [18] tarafından yayınlandı. Bu sonuçlar, fonksiyonel analizdeki Riesz bazları üzerine bazı teoremlerden elde edildiğinden Hong ve Loewy'nin makalesi [12] konumuzun ilk çalışması olarak kabul edilebilir. Makalede Hong ve Loewy sayılar teorisinin bazı araçlarını kullanarak GCD kuvvet matrislerinin özdeğerlerinin asimptotik davranışlarını araştırdı. $\{x_i\}_{i=1}^\infty$, pozitif tamsayıların kesin artan sonsuz dizisi olsun. $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ kümesi üzerinde tanımlı $(S)^\epsilon$ GCD kuvvet matrisinin özdeğerleri $\lambda_n^{(1)} \leq \dots \leq \lambda_n^{(n)}$ olsun. $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ dizisinin elemanları her $i \neq j$ için $(x_i, x_j) = x$ ve $\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{x_i} = \infty$ şartlarını sağlasın. Bu durumda Hong ve Loewy $0 < \epsilon \leq 1$ olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^{(1)} = x_1^\epsilon - x^\epsilon$ olduğunu ispatladılar. Sonra $a \geq 0, b \geq 1$ ve $e \geq 0$ tamsayıları verildiğinde oluşan $\{x_{i-e+1} = a + ib\}_{i=e}^\infty$ aritmetik dizisi için $0 < \epsilon \leq 1$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^{(q)} = 0$ olduğunu gösterdiler. Bu sonuçların yanında, aynı makalede Hong ve Loewy GCD kuvvet matrislerinin en küçük özdeğerlerinin bir alt sınırını elde etmek için bir c_n sabiti tanımladılar. K_n , $n \times n$ tipinden köşegen elemanları 1 olan bütün $(0,1)$ alt üçgen matrislerin kümesi, $L_n = \{YY^T : Y \in K_n\}$ ve

$$c_n = \min_{Z \in L_n} \{\mu_n^{(1)}(Z) : \mu_n^{(1)}(Z), Z \text{ nin en küçük özdeğeri}\}$$

olsun. $\lambda_n^{(1)}((S)^\epsilon)$, $(S)^\epsilon$ GCD kuvvet matrisinin en küçük özdeğeri ve J_ϵ , Euler fonksiyonunun Jordan genellemesi olmak üzere $\lambda_n^{(1)}((S)^\epsilon) \geq c_n \cdot \min_{1 \leq i \leq n} \{J_\epsilon(x_i)\}$ olduğunu

ispatladılar [12]. Hong ve Loewy'nin makalesinden sonra literatürde konu ile ilgili bir çok sonuç yayınlanmıştır [1, 4, 5, 10-11, 13, 15, 19-22].

Bu çalışmalardan biri Ilmonen, Haukkanen ve Merikoski'nin 2008 yılında yayınladığı makaledir [12]. Bu makalede Ilmonen, Haukkanen ve Merikoski c_n sayısının ne olabileceğine ilişkin $n \leq 7$ için MATLAB yardımıyla hesaplamalar yaptılar. Bu hesaplamalar sonucunda c_n sayısının özel bir matrisin en küçük özdeğeri olduğunu keşfederek aşağıdaki konjektörü ortaya attılar.

Konjektür:

$$b_{ij} = \begin{cases} 0, & i < j \\ 1, & i = j \\ \frac{1 - (-1)^{i+j}}{2}, & i > j \end{cases}$$

olmak üzere $Y_0 = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ matrisi tanımlansın. O zaman c_n , $Y_0 Y_0^T$ matrisinin en küçük özdeğeridir [12].

Bugüne kadar ne konjektörü çürütecek bir karşı örnek sunulabilmiş ne de konjektürün doğruluğu ispat edilebilmiştir. Hatta n nin 7 den büyük değerleri için bilgisayar yardımıyla bile herhangi bir araştırma yapılmamıştır. Yalnızca Mattila bu yıl basılan makalesinde konjektürün doğru olduğunu varsayarak c_n sayısı için iki alt sınır sunmuş ancak bulunduğu sınırların iyi olmadığını itiraf etmiştir [19]. Aynı makalede Mattila konjektürün doğruluğunun ispatının ya da çürütülmesinin halen bir açık problem olarak durduğunu ve ispatın zor görüldüğünü vurgulamıştır.

Bu tezin amacı, n nin daha büyük değerleri için konjektürün doğruluğunu bilgisayar yardımıyla kontrol etmek ve konjektürün doğruluğuna ilişkin ikna edici verilerin artması durumunda konjektürün ispatını aramaktır. Bu nedenle ikinci bölümde $n = 2, 3, \dots, 8$ için konjektürün doğruluğu öncelikle bir MATLAB programı yardımıyla kontrol edilmiştir. Sonra programın çalışma süresinin uzun olması nedeniyle MATLAB den vazgeçilerek C programında bir kod yazılmıştır. Bu kodda Newton özdeşlikleri kullanılarak en küçük özdeğerini hesaplamak istediğimiz matrislerin önce karakteristik polinomları bulunmuş

sonra Newton metodunu kullanarak en küçük özdeğer yaklaşık olarak hesaplanmıştır. Dolayısıyla en küçük özdeğerin bulunması, yeni C kodu yardımıyla büyük ölçüde hızlandırılmıştır. Bu sayede $n = 9$ için de konjektürün doğruluğu kontrol edilmiştir. Bu hesaplamalar konjektürün doğruluğuna ilişkin inancı güçlendirmiş ve bizi konjektürün doğruluğunu ispatlama yönünde motive etmiştir.

Üçüncü bölümde öncelikle her $Y \in K_n$ için $|Y^{-1}| \leq |Y_0^{-1}|$ olduğu ve ardından her $Z \in L_n$ için $|Z^{-1}| \leq |(Y_0 Y_0^T)^{-1}|$ olduğu gösterilmiştir. Sonra negatif olmayan matrisler için spektral yarıçap ile ilgili bir eşitsizlik kullanılarak Ilmonen, Haukkanen ve Merikoski tarafından ortaya atılan konjektürün ispatı yapılmıştır. Ayrıca yaptığımız hesaplamalar ışığında, son bölümde $Z \in L_n$ matrislerinden en küçük özdeğeri c_n olan matrisin $Y_0 Y_0^T$ dan başka bir matris olamayacağını iddia eden bir konjektür ortaya atılmıştır.

2. KONJEKTÜRÜN DOĞRULUĞUNUN $n=8$ ve 9 İÇİN KONTROL EDİLMESİ

Öncelikle üzerinde çalıştığımız Ilmonen-Haukkanen-Merikoski konjektürünü ifade edelim. K_n , $n \times n$ tipinden köşegen elemanları 1 olan bütün $(0,1)$ alt üçgen matrislerin kümesi, $L_n = \{YY^T : Y \in K_n\}$ ve

$$c_n = \min_{Z \in L_n} \{\mu_n^{(1)}(Z) : \mu_n^{(1)}(Z), Z \text{ nin en küçük özdeğeri}\}$$

olsun.

2.1. Konjektür

$$b_{ij} = \begin{cases} 0, & i < j \\ 1, & i = j \\ \frac{1 - (-1)^{i+j}}{2}, & i > j \end{cases} \quad (2.1)$$

olmak üzere $Y_0 = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ matrisi tanımlansın. O zaman c_n , $Y_0 Y_0^T$ matrisinin en küçük özdeğeridir [12].

$n = 7$ ve $n = 8$ için MATLAB yardımıyla yazdığımız kod, iddianın doğruluğunu ortaya koydu [Ek-1]. Ancak MATLAB kodunun çalışması $n = 7$ için 2 saat ve $n = 8$ için 10 gün sürdü. $|L_8| = 2^{28} = 268,435,456$ ve $|L_9| = 2^{36} = 68,719,476,736$ olduğundan $n = 9$ için doğruluğunu kontrol etmek aynı MATLAB kodu ile yaklaşık 7 yıl sürecekti. Bu süreleri gördükten sonra C programlama dilinde başka bir kod daha yazdık [Ek-2]. $Z \in L_n$ matrisinin karakteristik polinomunu elde etmek için Newton özdeşliklerini [16], Z matrisinin en küçük özdeğerini bulurken de Newton yöntemini [24] kullandık. Bu sayede programın çalışma süresi oldukça kısaldı. $n = 8$ için 30 dakika ve $n = 9$ için yaklaşık 7 gün sürdü. Sonuç olarak $n = 8$ ve $n = 9$ için iddianın doğru olduğunu gördük [Ek-2]. Bu bölümde elde edilen sonuçların bir kısmı AMAT2015 de sunulmuştur [2].

Şimdi kısaca Newton yöntemini sunalım ve bu yöntemin üzerinde çalıştığımız matrisleri karakteristik polinomun köklerini yaklaşık olarak hesaplamak için uygun olduğunu

açıklayalım. $f(x) = 0$ denkleminin Newton yöntemi ile çözümü, tahmini bir x_0 değeri ile başlanarak

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

şeklinde tanımlanır [24]. Burada her $k \geq 0$ için $f'(x_k) \neq 0$ olmalıdır. Diğer yandan, L_n deki her bir Z matrisi pozitif tanımlı olduğundan bu matrisin tüm özdeğerleri pozitif reel sayılardır. Ayrıca, özdeğerinin çarpımı 1 dir. O halde, $n \geq 2$ için Z nin en küçük özdeğeri $(0,1)$ aralığındadır. Üstelik Z nin en küçük özdeğeri $\mu_n^{(1)}(Z)$ olmak üzere Z nin karakteristik polinomu bir fonksiyon olarak $(-\infty, \mu_n^{(1)}(Z)]$ aralığında artan ve konkav ya da azalan ve konvekstir. Bütün bunlar, x_0 değerini 0 aldığımızda en küçük özdeğeri yaklaşık olarak hesaplamak için Newton yönteminin çalışacağını garanti eder.

Şimdi, yazdığımız C kodunu hızlandırmak için kullandığımız ve konjektürün ispatında da kullanacağımız Newton özdeşliklerini verelim [16]. x_1, x_2, \dots, x_n reel sayıları verilsin. $k \geq 1$ için $p_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^k$ şeklinde tanımlansın. $k \geq 0$ için $e_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ temel simetrik polinom olsun. Yani;

$$e_0(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1,$$

her bir $1 \leq k \leq n$ için

$$e_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k},$$

$k > n$ için

$$e_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \text{ dir.}$$

Bu durumda tüm $1 \leq k \leq n$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$k e_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} e_{k-i}(x_1, x_2, \dots, x_n) p_i(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Buradan açıkça görülüyor ki, $e_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sayısı $1 \leq i \leq k$ için $p_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sayılarına bağlı olarak tek türlü bellidir.

Şimdi, Newton özdeşliklerini kullanarak matrislerin karakteristik polinomlarının nasıl tespit edileceğini bir lemma ile verelim.

2.1. Lemma

$A \in M_n(\mathbb{R})$ ve A nın karakteristik polinomu $P_x(A) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ olsun. Bu polinomun kökleri de x_1, x_2, \dots, x_n olsun. Bu durumda $i = 1, 2, \dots, n$ için $a_i = (-1)^i e_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sağlanır ve $k = 1, 2, \dots, n$ için $p_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = iz(A^k)$ [16].

3. KONJEKTÜRÜN İSPATI

Öncelikle konjektürün ispatında kullanılacak olan nilpotent $(0,1)$ matrislerle ilgili bazı özellikler aşağıdaki lemmada verilecektir.

3.1. Lemma

$Y \in K_n$ ve $N := Y - I$ olsun. Burada I , $n \times n$ birim matristir. $(N^k)_{ij}$ ise N matrisinin k . pozitif tam kuvvetinin ij -inci girişi olarak belirlensin. O halde aşağıdakiler doğrudur.

- i) $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $i - j < k$ ise $(N^k)_{ij} = 0$ dır.
- ii) $Y^{-1} = I - N + N^2 - N^3 + \dots + (-1)^{n-1}N^{n-1}$ dır.

İspat

Birinci kısmı k üzerinden tümevarımla ispatlayalım. $k = 1$ için $i - j < 1$ ise $(N)_{ij} = 0$ olduğu N nin tanımından açıktır. $k = m - 1$ için iddia doğru olsun. $k = m$ iddia doğru mu? $i - j < m$ için $(N^m)_{ij} = 0$ olduğunu ispatlamalıyız. $N^m = NN^{m-1}$ olduğundan

$$(N^m)_{ij} = \sum_{t=1}^n N_{it}(N^{m-1})_{tj}$$

eşitliği sağlanır. $i - j \leq 0$ iken $N_{ij} = 0$ olduğundan

$$(N^m)_{ij} = \sum_{t=1}^{i-1} N_{it} \cdot (N^{m-1})_{tj}$$

olur. Diğer yandan, tümevarım kabulünden $t = 1, 2, \dots, i - 1$ değerlerini alırken $t - j \leq i - 1 - j \leq m - 2$ ise $(N^{m-1})_{tj} = 0$ olduğundan $(N^m)_{ij} = 0$ bulunur.

Şimdi ikinci kısmı ispatlayalım. $Y \in K_n$ ise Y^{-1} vardır ve tektir. Diğer yandan $I^n - X^n = (I - X)(I + X + X^2 + \dots + X^{n-1})$ eşitliğini göz önüne alalım. Burada $X = -N$ alırsak $I^n + (-1)^{n+1}N^n = (I + N)(I - N + N^2 - N^3 + \dots + (-1)^{n-1}N^{n-1})$ olur.

$N^n = 0$ ve $I + N = Y$ olduğundan $I = Y \cdot (I - N + N^2 - N^3 + \dots + (-1)^{n-1} N^{n-1})$ bulunur. $I^n - X^n = (I + X + X^2 + \dots + X^{n-1})(I - X)$ olduğu da göz önüne alınırsa $Y^{-1} = I - N + N^2 - N^3 + \dots + (-1)^{n-1} N^{n-1}$ bulunur.

3.2. Lemma

$Y \in K_n$ ve $Y^{-1} = (a_{ij})$ olsun. $N := Y - I$ ve $N = (n_{ij})$ olsun.

$$a_{kl} = \begin{cases} 0, & k < l \\ 1, & k = l \\ -\sum_{i=l}^{k-1} n_{ki} \cdot a_{il}, & k > l \end{cases}$$

bağıntısı vardır.

İspat

Lemma 3.1. (ii) deki eşitliğinin her iki tarafını soldan $-N$ ile çarparsak $-N \cdot Y^{-1} = -N + N^2 - N^3 + \dots + (-1)^{n-1} N^{n-1} + (-1)^n N^n$ elde edilir. Her iki tarafa I eklenir ve $N^n = 0$ olduğu göz önünde bulundurulursa $I - N \cdot Y^{-1} = I - N + N^2 - N^3 + \dots + (-1)^{n-1} N^{n-1}$ bulunur. Yani

$$I - N \cdot Y^{-1} = Y^{-1} \tag{3.1}$$

eşitliği elde edilir. Lemma 3.1. (ii) eşitliğinden $k < l$ iken $a_{kl} = 0$ ve $k = l$ iken $a_{kl} = 1$ olduğu aşıkardır. (3.1) eşitliğinden $k > l$ iken $a_{kl} = -\sum_{i=1}^n n_{ki} \cdot a_{il}$ elde edilir. Bu eşitliği

$$a_{kl} = -\sum_{i=1}^{l-1} n_{ki} \cdot a_{il} - \sum_{i=l}^{k-1} n_{ki} \cdot a_{il} - \sum_{i=k}^n n_{ki} \cdot a_{il}$$

şeklinde de yazabiliriz. $i = 1, 2, \dots, l-1$ için $a_{il} = 0$ ve $i = k, k+1, \dots, n$ için $n_{ki} = 0$ olduğundan

$$a_{kl} = - \sum_{i=l}^{k-1} n_{ki} \cdot a_{il}$$

bulunur.

Şimdi, Fibonacci sayılarının toplamları için birkaç zarif özelliği kullanarak $|a_{ij}|$ sayılarının maksimum değerlerini hesaplayalım.

3.1. Teorem

$Y \in K_n$ ve $Y^{-1} = (a_{ij})$ olsun. $1 \leq j < i \leq n$ için $|a_{ij}| \leq F_{i-j}$ eşitsizliği sağlanır. Burada F_{i-j} , $i - j$ -inci Fibonacci terimidir.

İspat

$N = (n_{ij})$ Lemma 3.2. deki gibi tanımlansın. $1 \leq j < i \leq n$ ve $t = i - j$ olsun. $|a_{j+t,j}| \leq F_t$ olduğunu t üzerinden tümevarımla ispatlayalım. $t = 1$ için Lemma 3.2. den $a_{j+1,j} = -n_{j+1,j} = 0$ veya -1 olduğundan $|a_{j+1,j}| \leq 1 = F_1$. Şimdi her $t = 1, 2, \dots, k - 1$ için $|a_{j+t,j}| \leq F_t$ olduğunu kabul edelim. $t = k$ için iddianın doğru olduğunu gösterelim. Lemma 3.2. den $a_{j+k,j} = - \sum_{i=j}^{j+k-1} n_{j+k,i} \cdot a_{ij}$ olduğunu biliyoruz.

1.Durum: $n_{j+k,j+k-1} = 0$ olsun. Bu durumda

$$|a_{j+k,j}| = \left| \sum_{i=j}^{j+k-1} n_{j+k,i} \cdot a_{ij} \right| = \left| \sum_{i=j}^{j+k-2} n_{j+k,i} \cdot a_{ij} \right|$$

olur. Diğer yandan yine Lemma 3.2. den $a_{j+k-1,j} = - \sum_{i=j}^{j+k-2} n_{j+k-1,i} \cdot a_{ij}$ dir. Buradaki $n_{j+k,i}$ terimleri ile $n_{j+k-1,i}$ terimleri $i = j, j + 1, \dots, j + k - 2$ için keyfi 1 veya 0 seçilebildiği için $a_{j+k,j}$ ile $a_{j+k-1,j}$ değişkenleri aynı değerleri alır. O halde, tümevarım kabulünden $|a_{j+k,j}| \leq F_{k-1} \leq F_k$ elde edilir.

2.Durum: $n_{j+k,j+k-1} = 1$ olsun.

1.Alt Durum: $n_{j+k-1,j+k-2} = 0$ olsun. Lemma 3.2. den

$$|a_{j+k,j}| = \left| \sum_{i=j}^{j+k-1} n_{j+k,i} \cdot a_{ij} \right| \leq \left| \sum_{i=j}^{j+k-2} n_{j+k,i} \cdot a_{ij} \right| + |a_{j+k-1,j}|$$

bulunur. Yine Lemma 3.2. den $a_{j+k-1,j} = -\sum_{i=j}^{j+k-2} n_{j+k-1,i} \cdot a_{ij}$ dir. Buradaki $n_{j+k,i}$ terimleri ile $n_{j+k-1,i}$ terimleri $i = j, j+1, \dots, j+k-2$ için keyfi 1 veya 0 seçilebildiği için $\sum_{i=j}^{j+k-2} n_{j+k,i} \cdot a_{ij}$ ile $a_{j+k-1,j}$ değişkenleri aynı değerleri alır. Sonuç olarak, tümevarım kabulünden $|\sum_{i=j}^{j+k-2} n_{j+k,i} \cdot a_{ij}| \leq F_{k-1}$ elde edilir. Diğer yandan, 1.Alt durum kabulünden $|a_{j+k-1,j}| = |\sum_{i=j}^{j+k-2} n_{j+k-1,i} \cdot a_{ij}| = |\sum_{i=j}^{j+k-3} n_{j+k-1,i} \cdot a_{ij}|$ elde edilir. Buradaki $n_{j+k-1,i}$ terimleri ile $n_{j+k-2,i}$ terimleri $i = j, j+1, \dots, j+k-3$ için keyfi 1 veya 0 seçilebildiği için $\sum_{i=j}^{j+k-3} n_{j+k-1,i} \cdot a_{ij}$ ile $a_{j+k-2,j}$ değişkenleri aynı değerleri alır. Sonuç olarak, tümevarım kabulünden $|a_{j+k-1,j}| \leq F_{k-2}$ elde edilir. Sonuç olarak $|a_{j+k,j}| \leq F_{k-1} + F_{k-2} = F_k$ bulunur.

2.Alt Durum: $n_{j+k-1,j+k-2} = 1$ olsun. Lemma 3.2. den

$$|a_{j+k,j}| \leq \left| \sum_{i=j}^{j+k-3} n_{j+k,i} \cdot a_{ij} \right| + \left| \sum_{i=j+k-2}^{j+k-1} n_{j+k,i} \cdot a_{ij} \right|$$

bulunur. $\sum_{i=j}^{j+k-3} n_{j+k,i} \cdot a_{ij}$ ile $a_{j+k-2,j}$ değişkenleri aynı değerleri aldığından ve yine tümevarım kabulünden $|\sum_{i=j}^{j+k-3} n_{j+k,i} \cdot a_{ij}| \leq F_{k-2}$ elde edilir. Diğer yandan $n_{j+k-1,j+k-2} = 1$ olduğu için

$$\sum_{i=j+k-2}^{j+k-1} n_{j+k,i} a_{ij} = (n_{j+k,j+k-2} - 1) a_{j+k-2,j} - \sum_{i=j}^{j+k-3} n_{j+k-1,i} a_{ij}$$

eşitliğini yazabiliriz. Buradaki $1 - n_{j+k,j+k-2}, n_{j+k-1,j}, \dots, n_{j+k-1,j+k-3}$ değişkenleri keyfi 0 veya 1 değerlerini alabilir. Sonuç olarak $\sum_{i=j+k-2}^{j+k-1} n_{j+k,i} \cdot a_{ij}$ ile $a_{j+k-1,j}$ değişkenleri aynı değerleri alabildiği ve tümevarım kabulünden $|\sum_{i=j+k-2}^{j+k-1} n_{j+k,i} \cdot a_{ij}| \leq F_{k-1}$ elde edilir. O halde $|a_{j+k,j}| \leq F_{k-2} + F_{k-1} = F_k$ bulunur.

Tümevarım prensibi gereğince ispat tamamlanmış olur.

$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ olsun. Yani $n \times n$ reel matrisler olsun. Eğer her $a_{ij} \geq 0$ (> 0) ise $A \geq 0$ (> 0) yazabiliriz. Eğer $A - B \geq 0$ (> 0) ise $A \geq B$ yazabiliriz. Buna ek olarak $|A| = (|a_{ij}|)$ olarak tanımlayabiliriz. A matrisinin en büyük özdeğeri, A 'nın spektral yarıçapı olarak adlandırılır ve $\rho(A)$ olarak gösterilir.

3.2. Teorem

$Y_0 = (b_{ij})$, (2.1) deki gibi tanımlansın ve $Z_0 := Y_0 Y_0^T$ olsun. Her $Z \in L_n$ için $|Z^{-1}| \leq |Z_0^{-1}|$ eşitsizliği sağlanır.

İspat

Öncelikle Y_0 matrisinin tersini elde edelim. $N_0 = Y_0 - I$ ve $N_0 = (m_{ij})$ olsun. O halde

$$m_{ij} = \begin{cases} 0, & i \leq j \\ \frac{1 - (-1)^{i+j}}{2}, & i > j \end{cases}$$

olur. Y_0 matrisinin tersi (c_{ij}) olsun. Şimdi

$$c_{ij} = \begin{cases} 0, & i < j \\ 1, & i = j \\ (-1)^{i-j} \cdot F_{i-j}, & i > j \end{cases}$$

olduğunu ispat edelim. $Y_0 \in K_n$ olduğundan ve Lemma 3.2. den $i < j$ iken $c_{ij} = 0$ ve $i = j$ iken $c_{ij} = 1$ olduğu açıkça görülür. Yine Lemma 3.2. den $i > j$ iken $c_{ij} = -\sum_{k=j}^{i-1} m_{ik}c_{kj}$ dir.

Şimdi $i > j$ iken $c_{ij} = (-1)^{i-j} \cdot F_{i-j}$ olduğunu $t = i - j$ üzerinden tümevarımla ispatlayalım. $t = 1$ için $c_{j+1,j} = -m_{j+1,j} = -1 = -F_1$. $t = 1, 2, \dots, k - 1$ için $c_{j+t,j} = (-1)^t F_t$ olduğunu kabul edelim. $c_{j+k,j} = -\sum_{s=j}^{j+k-1} m_{j+k,s}c_{sj}$ olduğunu hatırlayalım. Tümevarım kabulünden k çiftse $c_{j+k,j} = \sum_{s=1}^{k/2} F_{2s-1} = F_k$ ve k tekse $c_{j+k,j} = -1 - \sum_{s=1}^{\frac{k-1}{2}} F_{2s} = -F_k$ bulunur. O halde $c_{j+k,j} = (-1)^k F_k$ elde edilir.

Şimdi, Z_0 matrisinin tersini hesaplayalım. $Z_0 = Y_0 Y_0^T$ ve $Y_0^{-1} = (c_{ij})$ olduğundan her $i = 1, 2, \dots, n$ için $(Z_0^{-1})_{ii} = \sum_{k=1}^n c_{ki}^2 = 1 + \sum_{k=i+1}^n F_{k-i}^2$ elde edilir.

Şimdi $1 \leq i < j \leq n$ için olsun.

$$\begin{aligned} (Z_0^{-1})_{ij} &= \sum_{t=1}^n c_{ti}c_{tj} \\ &= c_{ji} + \sum_{t=j+1}^n c_{ti}c_{tj} \\ &= (-1)^{j-i}F_{j-i} + \sum_{t=j+1}^n (-1)^{-i-j}F_{t-i}F_{t-j} \\ &= (-1)^{j-i} \left(F_{j-i} + \sum_{t=j+1}^n F_{t-i}F_{t-j} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan Z_0^{-1} matrisi simetrik olduğundan $1 \leq j < i \leq n$ olduğunda $(Z_0^{-1})_{ij} = (-1)^{i-j}(F_{i-j} + \sum_{t=i+1}^n F_{t-i}F_{t-j})$ elde edilir.

Şimdi de teoremin iddiasını ispatlayalım. Her $Z \in L_n$ için $Z = YY^T$ olacak şekilde $Y \in K_n$ matrisinin var olduğunu biliyoruz. $Y^{-1} = (a_{ij})$ olsun. Lemma 3.2. ve Teorem 3.1. den $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için

$$\begin{aligned}
|(Z^{-1})_{ii}| &= \left| \sum_{k=1}^n a_{ki}^2 \right| \\
&= \sum_{k=1}^n |a_{ki}|^2 \\
&= \sum_{k=i}^n |a_{ki}|^2 \\
&\leq 1 + \sum_{k=i+1}^n F_{k-i}^2 \\
&= |(Z_0^{-1})_{ii}|
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Şimdi, $j > i$ olsun. Lemma 3.2. ve Teorem 3.1. den

$$\begin{aligned}
|(Z^{-1})_{ij}| &= \left| \sum_{t=1}^n a_{ti} a_{tj} \right| \\
&\leq \sum_{t=1}^n |a_{ti}| |a_{tj}| \\
&= |a_{ji}| + \sum_{t=j+1}^n |a_{ti}| |a_{tj}| \\
&\leq F_{j-i} + \sum_{t=j+1}^n F_{t-i} F_{t-j} \\
&= |(Z_0^{-1})_{ij}|
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç olarak Z^{-1} ve Z_0^{-1} matrisleri simetrik olduğundan her $Z \in L_n$ için $|Z^{-1}| \leq |Z_0^{-1}|$ bulunur.

3.3. Lemma

$A, B \in M_n(\mathbb{R})$ olsun. Eğer $|A| \leq B$ ise $\rho(A) \leq \rho(|A|) \leq \rho(B)$ [14].

Şimdi Konjektür 2.1 in ispatını sunalım.

3.3. Teorem

Y_0 , (2.1) ile tanımlanan matris olsun. Her $n \geq 2$ için c_n sayısı $Y_0 Y_0^T$ matrisinin en küçük özdeğeridir. Kısaca, Ilmonen-Haukkanen-Merikoski konjektürü doğrudur.

İspat

Z_0 Teorem 3.2. deki gibi tanımlansın. Öncelikle Z_0^{-1} ve $|Z_0^{-1}|$ matrislerinin karakteristik polinomlarının aynı olduğunu gösterelim. Bir kare matrisin izinin tanımı göz önüne alınırsa her $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ için

$$\text{iz}((Z_0^{-1})^k) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n (Z_0^{-1})_{i_1 i_2} \dots (Z_0^{-1})_{i_{k-1} i_k} (Z_0^{-1})_{i_k i_1}$$

olduğu görülür. $(Z_0^{-1})_{ij}$ nin Teorem 3.2. deki formülü göz önünde bulundurulursa tüm $1 \leq i, j \leq n$ için $\text{sgn}((Z_0^{-1})_{ij}) = (-1)^{i-j}$ olduğu kolayca gösterilebilir. Buradan $\text{sgn}((Z_0^{-1})_{i_1 i_2} \dots (Z_0^{-1})_{i_{k-1} i_k} (Z_0^{-1})_{i_k i_1}) = 1$ olur. Yani $\text{iz}((Z_0^{-1})^k) = \text{iz}(|Z_0^{-1}|^k)$ elde edilir. Newton özdeşliklerinden [16] den Z_0^{-1} ve $|Z_0^{-1}|$ matrislerinin karakteristik polinomları aynıdır. Sonuç olarak $\rho(|Z_0^{-1}|) = \rho(Z_0^{-1})$ elde edilir. Teorem 3.2. ve Lemma 3.3. den

$$\rho(Z^{-1}) \leq \rho(|Z^{-1}|) \leq \rho(|Z_0^{-1}|) = \rho(Z_0^{-1})$$

elde edilir. Sonuç olarak her $Z \in L_n$ pozitif tanımlı olduğu için Z_0 matrisinin en küçük özdeğeri her $Z \in L_n$ için Z matrisinin en küçük özdeğerinden küçük veya eşittir.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Literatürde c_n değerinin yaklaşık olarak hesaplaması ile ilgili fazla sonuç bulunmamaktadır. Yakın zamanda Mattila tarafından c_n sabiti için bir alt sınır veren bir çalışma yayınlandı [19]. Bu çalışmada, Mattila c_n değerinin alttan $\left(\frac{6}{n^4+2n^3+2n^2+n}\right)^{\frac{n-1}{2}}$ ile sınırlandığını ispatladı. Sonra, bu alt sınırın n çiftken $\left(\frac{48}{n^4+56n^2+48n}\right)^{\frac{n-1}{2}}$ ve n tekken $\left(\frac{48}{n^4+50n^2+48n-51}\right)^{\frac{n-1}{2}}$ ile değiştirilebileceğini gösterdi. Mattila'nın sonuçlarının yanında, yine yakın zamanda Altınışık ve Büyükköse tarafından $E_n^T E_n$ matrisinin en küçük özdeğeri olan t_n değeri için bir alt sınır elde edildi ve açıkça $t_n \geq (n \sum_{k=1}^n \mu^2(k))^{-1}$ olduğu gösterildi [5]. Burada E_n matrisleri $n \times n$ tipinden matrisler olup ij 'inci girdisi $j|i$ ise 1, diğer durumlarda ise 0 dır. Aslında bu sınır, literatürdeki $S = \{1, 2, \dots, n\}$ üzerinde tanımlı GCD matrisi ve ilgili matrislerin en küçük özdeğerleri için c_n 'i içeren alt sınırlar yerine kullanılabilir [10, 12, 15, 19, 22]. c_n değerinin hesaplanması üzerine yapılan yukarıdaki çalışmalardan sonra, doğal olarak aşağıdaki problemi verebiliriz.

4.1. Problem

c_n için yukarıda bahsedilen alt sınırlar geliştirilebilir mi?

Diğer yandan, Ek-3'te verilen C kodu hesaplamaları ile $n = 2, 3, \dots, 9$ için YY^T matrisinin en küçük özdeğerinin c_n değerine eşit olmasını sağlayan $Y \in K_n$ matrisinin tek olduğu ve (2.1)'de tanımlanan Y_0 matrisinden başkası olamayacağı görülmüştür. Bu hesaplamalar ışığında aşağıdaki konjektörü ortaya atıyoruz.

4.1. Konjektür

$n \geq 2$ olsun. YY^T matrisinin en küçük özdeğeri c_n olacak şekilde $Y \in K_n$ matrisi tektir. Başka bir deyişle, YY^T matrisinin en küçük özdeğeri c_n 'e eşit ise $Y = Y_0$ dır.

KAYNAKLAR

1. Altınışık, E. (2009). On inverses of GCD matrices associated with multiplicative functions and a proof of the Hong-Loewy conjecture. *Linear Algebra and Its Applications*, 430, 1313-1327.
2. Altınışık, E. (2015, 28-31 May). *On a Conjecture on the Smallest Eigenvalues of Some Special Positive Definite Matrices*. Paper presented at the 3rd International Conference on Applied Mathematics & Approximation Theory – AMAT, Ankara.
3. Altınışık, E., Sagan, B. E. and Tuğlu, N. (2005). GCD matrices, posets, and nonintersecting paths. *Linear and Multilinear Algebra*, 53(2), 75-84.
4. Altınışık, E. and Büyükköse, Ş. (2015). A proof of a conjecture on monotonic behavior of the largest eigenvalue of a number-theoretic matrix. *American Institute of Physics Conference Proceedings*, 1648, 850118.
5. Altınışık, E. and Büyükköse, Ş. (2015). A proof of a conjecture on monotonic behavior of the smallest and the largest eigenvalue of a number-theoretic matrix. *Linear Algebra and Its Applications*, 471, 141-149.
6. Altınışık, E., Tuğlu, N. and Haukkanen, P. (2004). A note on bounds for norms of the reciprocal Lcm matrix. *Mathematical Inequalities and Applications*, 7(4) 491-496.
7. Beslin, S. and Ligh, S. (1989). Greatest common divisor matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, 118, 69-76.
8. Bourque, K. and Ligh, S. (1992). On GCD and LCM matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, 174, 65-74.
9. Haukkanen, P., Wang, J. and Sillanpää, J. (1997). On Smith's determinant. *Linear Algebra and Its Applications*, 258, 251-269.
10. Hong, S. (2008). Asymptotic behavior of largest eigenvalue of matrices associated with completely even functions (mod r). *Asian-European Journal of Mathematics*, 1, 225-235.
11. Hong, S. and Enoch Lee, K. S. (2008). Asymptotic behavior of eigenvalues of reciprocal power LCM matrices. *Glasgow Mathematical Journal*, 50, 163-174.
12. Hong, S. and Loewy, R. (2004). Asymptotic behavior of eigenvalues of greatest common divisor matrices. *Glasgow Mathematical Journal*, 46, 303-308.
13. Hong, S. and Loewy, R. (2011). Asymptotic behavior of the smallest eigenvalue of matrices associated with completely even functions (mod r). *International Journal of Number Theory*, 7, 1681-1704.
14. Horn, R. and Johnson, C. R. (1985). *Matrix Analysis* (Forth edition). London: Cambridge University Press, 490-491.

15. Ilmonen, P., Haukkanen, P. and Merikoski, J. K. (2008). On eigenvalues of meet and join matrices associated with incidence functions. *Linear Algebra and Its Applications*, 429, 859-874.
16. Kalman, D. (2000). A matrix proof of Newton's identities. *Mathematics Magazine*, 73(4), 859-874.
17. Korkee, I. and Haukkanen, P. (2003). On meet and join matrices associated with incidence functions. *Linear Algebra and Its Applications*, 372, 127-153.
18. Lindqvist, P. and Seip, K. (1998). Note on some greatest common divisor matrices. *Acta Arithmetica*, 84(2), 149-154.
19. Mattila, M. (2015). On the eigenvalues of combined meet and join matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, 466, 1-20.
20. Mattila, M. and Haukkanen, P. (2012). *On the eigenvalues of certain number-theoretic matrices*. Paper presented at the International Conference in Number Theory and Applications.
21. Mattila, M. and Haukkanen, P. (2012). On the eigenvalues of certain number-theoretic matrices. *East West Journal of Mathematics*, 14(2), 121-130.
22. Mattila, M. and Haukkanen, P. (2004). On the positive definiteness and eigenvalues of meet and join matrices. *Discrete Mathematics*, 326, 9-19.
23. Smith, H. J. S. (1876). On the value of a certain arithmetical determinant. *Proceedings London Mathematical Society*, 1(7), 208-212.
24. Süli, E. and Mayers, D. (2003). *An Introduction to Numerical Analysis* (First edition). London: Cambridge University Press. 19-24.
25. Wintner, A. (1944). Diophantine approximations and Hilbert's space. *American Journal of Mathematics*, 66, 564-578.

EKLER

EK-1. MATLAB Kodu

```

n=8;
global minE;
global minEMatrix;
minE = 1;
minEMatrix=zeros(n);
Y = eye(n);
tryMatrix(Y,2,1,n);

display(minE);
display(minEMatrix);

function setGlobals(e, mE)
    global minE;
    global minEMatrix;
    if(e < minE)
        minE=e;
        minEMatrix=mE;
    end
end

function tryMatrix(Y,i,j,n)
    if(i == n+1)
        Z = Y*Y.';

        min_eZ = eigs(Z,1,'sm');
        setGlobals(min_eZ,Y);

        end
        r = roots(E);
        setGlobals(r(n),Y);

        return;
    end

    Y(i,j)=0;
    if i-1==j
        tryMatrix(Y,i+1,1,n);
    else
        tryMatrix(Y,i,j+1,n);
    end
    Y(i,j)=1;
    if i-1==j
        tryMatrix(Y,i+1,1,n);
    else
        tryMatrix(Y,i,j+1,n);
    end
end
end

```


EK-2. C Kodu

```
// Kodu derlerken "gcc kod.c -o kod -O2" şeklinde derlemelisiniz.
// Çalıştırırken "time ./kod" şeklinde çalıştırmalısınız.
// Matrisin boyutu için N degerini değiştirmeniz yeterli.
```

```
#include <stdio.h>
#define MAXN 10

int N=9;
double minE = 1;
int minEMatrix[MAXN][MAXN];
int Y[MAXN][MAXN];
int Ytrans[MAXN][MAXN];
int Z[MAXN][MAXN];
int T[MAXN][MAXN];
int tmp[MAXN][MAXN];
int E[MAXN];
int P[MAXN];
double x,y,ydif;

// a uzeri b hesaplama
double ussu(double a, int b)
{
    double c;
    if(b == 1) return a;
    if(b == 0) return 1;
    if(b%2 == 0) {
        c = ussu(a, b/2);
        c = c * c;
    }
    else {
        c = ussu(a, (b-1)/2);
        c = c * c * a;
    }
    return c;
}

void tryMatrix(int i,int j)
{
    int k,a,b,c,itr;

    if(i == N+1)
    {
        // Ytrans = Y' O(N^2)
        for (a=1 ; a<=N ; a++) {
            for (b=1 ; b<=N ; b++) {
                Ytrans[b][a] = Y[a][b];
            }
        }
        //****

        // Z = Y * Ytrans(Y') O(N^3)
        for (a=1 ; a<=N ; a++) {
            for (b=1 ; b<=N ; b++) {
                Z[a][b] = 0;
                for (c = 1 ; c <= N ; c++) {
                    Z[a][b] += Y[a][c] * Ytrans[c][b];
                }
            }
        }
    }
    //****
}
```


EK-2(devam). C Kodu

```

// T = Z O(N^2)
for (a=1 ; a<=N ; a++) {
    for (b=1 ; b<=N ; b++) {
        T[a][b]=Z[a][b];
    }
}

//****
// P degerlerini belirleme O(N^4)
for (k=1 ; k<=N ; k++) {
    P[k]=0;
    // P[k] = Trace(T)
    for (a=1 ; a<=N ; a++) {
        P[k]+=T[a][a];
    }
    // tmp = T * Z
    for (a=1 ; a<=N ; a++) {
        for (b=1 ; b<=N ; b++) {
            tmp[a][b] = 0;
            for (c=1 ; c<=N ; c++) {
                tmp[a][b] += T[a][c] * Z[c][b];
            }
        }
    }
    // T = tmp (T * Z)
    for (a=1 ; a<=N ; a++) {
        for (b=1 ; b<=N ; b++) {
            T[a][b]=tmp[a][b];
        }
    }
}

//****
// E degerlerini belirleme O(N^2)
E[1]=1;
for (a=2 ; a<=(N+1) ; a++) {
    E[a]=0;
    for (b=1 ; b<=(a-1) ; b++) {
        E[a] -= E[a-b] * P[b];
    }
    E[a]=E[a]/(a-1);
}

//****
// Minimum koku bulma O(N)
x=0; // mininum kok
for (itr=1 ; itr<=4 ; itr++) {
    y=0; ydif=0;
    for (a=0 ; a<=N ; a++) {
        y += ussu(x,a) * E[N+1-a];
    }
    for (a=1; a<=N ; a++) {
        ydif += a*ussu(x,a-1)*E[N+1-a];
    }
    x=x-y/ydif;
}

//****
// Global minimum ile karsilastirma O(N^2)
if(x < minE) {
    minE = x;
    for (a=1 ; a<=N ; a++) {

```


EK-2(devam). C Kodu

```

        for (b=1 ; b<=N ; b++) {
            minEMatrix[a][b] = Y[a][b];
        }
    }
}
//****

return;
}

Y[i][j]=0;
if ((i-1)==j) {
    tryMatrix(i+1,1);
}
else {
    tryMatrix(i,j+1);
}

Y[i][j]=1;
if ((i-1)==j) {
    tryMatrix(i+1,1);
}
else {
    tryMatrix(i,j+1);
}
return;
}

int main()
{
    int a,b;
        // O(N)
    for(a=1 ; a<=N ; a++)
        Y[a][a]=1;
        //****

        // O((2^(N^2))*(N^4))
    tryMatrix(2,1);
        //****

    printf("Min eigen value -> %lf\nMatrix:\n",minE);
        // O(N^2)
    for(a=1 ; a<=N ; a++)
    {
        for(b=1 ; b<=N ; b++)
            printf("%d ",minEMatrix[a][b]);
        printf("\n");
    }
        //****
    return 0;
}

```


EK-3. Teklik için C Kodu

// Kodu derlerken "gcc kod.c -o kod -O2" şeklinde derlemelisiniz.
 // Çalıştırırken "time ./kod" şeklinde çalıştırmalısınız.
 // Matrisin boyutu için N degerini değiştirmeniz yeterli.

```
#include <stdio.h>
#define MAXN 10

int N=9;
double minE = 1;
int minEMatrix[MAXN][MAXN];
int minMatrixCounter;
int Y[MAXN][MAXN];
int Ytrans[MAXN][MAXN];
int Z[MAXN][MAXN];
int T[MAXN][MAXN];
int tmp[MAXN][MAXN];
int E[MAXN];
int P[MAXN];
double x,y,ydif;

// a uzeri b hesaplama
double ussu(double a, int b)
{
    double c;
    if(b == 1) return a;
    if(b == 0) return 1;
    if(b%2 == 0) {
        c = ussu(a, b/2);
        c = c * c;
    }
    else {
        c = ussu(a, (b-1)/2);
        c = c * c * a;
    }
    return c;
}

void tryMatrix(int i,int j)
{
    int k,a,b,c,itr;

    if(i == N+1)
    {
        // Ytrans = Y' O(N^2)
        for (a=1 ; a<=N ; a++) {
            for (b=1 ; b<=N ; b++) {
                Ytrans[b][a] = Y[a][b];
            }
        }
        //****
        // Z = Y * Ytrans(Y') O(N^3)
        for (a=1 ; a<=N ; a++) {
            for (b=1 ; b<=N ; b++) {
                Z[a][b] = 0;
                for (c = 1 ; c <= N ; c++) {
                    Z[a][b] += Y[a][c] * Ytrans[c][b];
                }
            }
        }
    }
}
```


EK-3(devam). Teklik için C Kodu

```

//****
// T = Z O(N^2)
for (a=1 ; a<=N ; a++) {
    for (b=1 ; b<=N ; b++) {
        T[a][b]=Z[a][b];
    }
}
//****
// P degerlerini belirleme O(N^4)
for (k=1 ; k<=N ; k++) {
    P[k]=0;
    // P[k] = Trace(T)
    for (a=1 ; a<=N ; a++) {
        P[k]+=T[a][a];
    }
    // tmp = T * Z
    for (a=1 ; a<=N ; a++) {
        for (b=1 ; b<=N ; b++) {
            tmp[a][b] = 0;
            for (c=1 ; c<=N ; c++) {
                tmp[a][b] += T[a][c] * Z[c][b];
            }
        }
    }
    // T = tmp (T * Z)
    for (a=1 ; a<=N ; a++) {
        for (b=1 ; b<=N ; b++) {
            T[a][b]=tmp[a][b];
        }
    }
}
//****
// E degerlerini belirleme O(N^2)
E[1]=1;
for (a=2 ; a<=(N+1) ; a++) {
    E[a]=0;
    for (b=1 ; b<=(a-1) ; b++) {
        E[a] -= E[a-b] * P[b];
    }
    E[a]=E[a]/(a-1);
}
//****
// Minimum koku bulma O(N)
x=0; // mininum kok
for (itr=1 ; itr<=4 ; itr++) {
    y=0; ydif=0;
    for (a=0 ; a<=N ; a++) {
        y += ussu(x,a) * E[N+1-a];
    }
    for (a=1; a<=N ; a++) {
        ydif += a*ussu(x,a-1)*E[N+1-a];
    }
    x=x-y/ydif;
}
//****
// Global minimum ile karsilastirma O(N^2)
if(x < minE) {
    minE = x;
}

```


EK-3(devam). Teklik için C Kodu

```

minMatrixCounter = 1;
for (a=1 ; a<=N ; a++) {
    for (b=1 ; b<=N ; b++) {
        minEMatrix[a][b] = Y[a][b];
    }
}
// Global min degerini saglayan matrix sayisi
else if (x == minE) {
    minMatrixCounter++;
}
//****
return;
}

Y[i][j]=0;
if ((i-1)==j) {
    tryMatrix(i+1,1);
}
else {
    tryMatrix(i,j+1);
}

Y[i][j]=1;
if ((i-1)==j) {
    tryMatrix(i+1,1);
}
else {
    tryMatrix(i,j+1);
}
return;
}

int main()
{
    int a,b;
    // O(N)
    for(a=1 ; a<=N ; a++)
        Y[a][a]=1;
    //****

    // O((2^(N^2))*(N^4))
    tryMatrix(2,1);
    //****

    printf("Min eigen value -> %f\nMin eigen value count -> %d\nMatrix:\n",minE,minMatrixCounter);
    // O(N^2)
    for(a=1 ; a<=N ; a++)
    {
        for(b=1 ; b<=N ; b++)
            printf("%d ",minEMatrix[a][b]);
        printf("\n");
    }
    //****
    return 0;
}

```


ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : KESKİN, Ali
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 20.07.1987, Sandıklı
Medeni hali : Evli
Telefon : 0 (533) 519 23 57
e-mail : akeskin1729@gmail.com



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi /Matematik Bölümü	2015
Lisans	Gazi Üniversitesi /Matematik Bölümü	2013
Lise	Özel Samanyolu Fen Lisesi	2004

Yabancı Dil

İngilizce

Yayımlar

-

Hobiler

Yüzme, Masa Tenisi, Sinema



GAZİ GELECEKTİR..